



UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

Dipartimento di Fisica e Astronomia “Galileo Galilei”

Dipartimento di Matematica “Tullio Levi Civita”

Corso di Laurea in Fisica

Tesi di Laurea

FORMULAZIONE DI NELSON DELLA MECCANICA QUANTISTICA

Relatore

Prof. Antonio Ponno

Laureando

Marco Zen

Anno Accademico 2018/2019

Padova, 16 luglio 2019

A Tiberio Bottacin L.G., che mi ha indicato questo percorso.

Alle mie ragazze e ai miei ragazzi dell'ACR di Fratte.

Alla mia intera, grande famiglia.

*Un immenso grazie al mio relatore, il professor **Antonio Ponso**.*

Abstract

In questa tesi viene presentata una deduzione matematica dell'equazione di Schrödinger dovuta al probabilista Edward Nelson (*Decatur, 1932 - Princeton, 2014*).

Per deduzione matematica si intende questo: a partire da ipotesi ben precise sulla dinamica microscopica classica (ma stocastica) della particella, segue che il suo moto è descritto esattamente da un sistema di equazioni di tipo idrodinamico che risulta equivalente all'equazione scritta per la prima volta da Erwin Schrödinger nel 1926.

Indice

1	Introduzione	1
2	Richiami matematici e fisici	2
2.1	I processi stocastici	2
2.1.1	Un esempio	2
2.1.2	Il processo stocastico di tipo Gaussiano	2
2.1.3	Equazione di Langevin e processo di Wiener	3
2.2	Il teorema di Liouville e l'equazione di Fokker-Planck	4
2.3	Equazione di Schrödinger ed equazione di Hamilton-Jacobi	4
3	Derivazione dell'equazione di Schrödinger	6
3.1	Il moto Browniano di Ornstein-Uhlenbeck	6
3.2	Il moto Browniano di Einstein-Smoluchowski	7
3.2.1	La variabile \vec{v}	7
3.2.2	La variabile \vec{u}	7
3.2.3	Equazioni di evoluzione per \vec{v} e \vec{u}	8
3.3	Le ipotesi sul moto Browniano	8
3.4	La derivazione dell'equazione di Schrödinger	9
3.5	Esempio applicativo: la particella libera	10
4	Conclusioni	12
A	Passaggi nascosti	13
A.1	Il differenziale di una funzione $f(t, \vec{x}(t))$	13
A.2	La mancanza del termine di rotore nella definizione di \vec{u}	13
A.3	Equazione di evoluzione per \vec{u} ed equazione di continuità	15

Capitolo 1

Introduzione

La preparazione della tesi ha seguito due momenti distinti: in prima battuta si è cercato di capire il ragionamento di Nelson, valorizzando tutte le sue ipotesi dal punto di vista fisico e matematico. Una volta acquisito il filo logico, sono stati regolati i vari passaggi. L'intero lavoro conserva questa struttura e si divide in un due capitoli: nel primo si introducono alcuni strumenti matematici come i processi stocastici, l'equazione di Fokker-Planck e l'equivalenza tra l'equazione di Schrödinger e il sistema di Madelung; nel secondo capitolo si percorrono tutti i passaggi che portano poi alla derivazione dell'equazione di Schrödinger, partendo dall'ipotesi che la particella compia un moto Browniano di Einstein-Smoluchowski: allo scopo di garantire una maggiore fluidità di lettura, i conti algebrici sono stati inseriti in appendice, con gli opportuni riferimenti. Al termine della derivazione si è trattato il caso particolare della particella libera in una dimensione. Nella conclusione della tesi ci è sembrato opportuno enunciare un *teorema di Nelson* come sintesi dell'intero lavoro.

Capitolo 2

Richiami matematici e fisici

Si espongono qui alcuni argomenti di carattere fisico-matematico necessari alla derivazione: cenni sui processi stocastici, l'equazione di Fokker-Planck, il sistema di Madelung.

2.1 I processi stocastici

Si definisce *processo stocastico*, o funzione random, la funzione

$$\xi : T \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n : (t, \omega) \mapsto \xi(t, \omega) \quad (2.1)$$

dove T è l'insieme degli istanti di tempo che in generale è \mathbb{R} (processo stocastico a tempo continuo) o \mathbb{Z} (processo stocastico a tempo discreto) e $(\Omega, \sigma_\Omega, \mu)$ è un dato spazio di probabilità. Se si fissa il tempo $t = t^*$ e si mantiene variabile ω (che corrisponde ad uno o più parametri) allora la funzione $\xi(t^*, \omega)$ è una variabile casuale, discreta o continua, a cui sarà associata una certa densità di probabilità. Se invece si mantiene costante ω , ovvero si fissano i parametri da cui dipende il processo, facendo variare il tempo t si ottiene un possibile risultato del processo, ciò che si etichetta con *realizzazione*.

2.1.1 Un esempio

Sia $\xi(t, \omega) =: \xi(t, A, \varphi) = \sum_{k=1}^N A_k \cos(t + \varphi_k)$ un processo stocastico di cui si sa che:

- A_k ha distribuzione gaussiana di densità $\rho_{A_k} = \frac{e^{-A^2}}{\sqrt{2\pi}}$, ovvero media nulla, varianza unitaria, statisticamente indipendenti;
- φ_k hanno distribuzione uniforme di densità $\rho_{\varphi_k} = \frac{1}{2\pi}$.

Una realizzazione corrisponde alla determinazione delle $2N$ costanti (A, φ) e al graficare $\xi(t, A^*, \varphi^*)$ in funzione del tempo. Fissare un certo tempo, ad esempio $t = 0$, vuol dire avere una variabile casuale $\xi(0, A, \varphi) = \sum_{k=1}^N A_k \cos(\varphi_k)$, di cui si possono calcolare media, varianza e momenti successivi.

2.1.2 Il processo stocastico di tipo Gaussiano

Un processo stocastico di tipo gaussiano gode delle seguenti proprietà:

- P1: Media nulla, ovvero $\langle \xi_j(s, \omega) \rangle = 0 \quad \forall s \in T, \forall j = 0, \dots, n;$

P2: Realizzazioni statisticamente indipendenti: $\langle \xi_j(s, \omega) \xi_k(s', \omega) \rangle = g_{jk} \delta(s - s')$
 $\forall s, s' \in T, \forall k, j = 0, \dots, n, g_{jk} = a \delta_{jk}, a \in \mathbb{R}$ e ovviamente $\delta(s - s')$ la funzione delta di Dirac.

2.1.3 Equazione di Langevin e processo di Wiener

L'equazione di Langevin è una particolare equazione differenziale stocastica,

$$\dot{x} = f(t, x) + \xi(t), \quad (2.2)$$

dove $\xi(t)$ è un processo stocastico di tipo Gaussiano. Si sottolinea fin da subito che l'equazione di Langevin è priva di significato dato che, con le ipotesi fatte, $x(t)$ è una funzione continua ma non differenziabile in alcun punto.

Proposizione. *Se $\dot{x} = \xi(t)$, con $\xi(t)$ processo gaussiano, allora $x(t)$ non è differenziabile in alcun punto del suo dominio.*

Dimostrazione. Formalmente si può scrivere sempre $x(t + \Delta t) - x(t) = \int_t^{t+\Delta t} \xi(s) ds$ con $\Delta t > 0$: si sta quindi parlando di processo *in avanti*. Prendendo i valori medi rispetto ai parametri (i parametri ω e il tempo t sono indipendenti):

$$\langle x(t + \Delta t) - x(t) \rangle = \int_t^{t+\Delta t} \langle \xi(s) \rangle ds = 0$$

per definizione di $\xi(t)$. Ciò mostra una continuità media di $x(t) \forall t$, e non è necessario che Δt sia preso *piccolo a piacere*. Per quanto riguarda la derivabilità:

$$\langle [x(t + \Delta t) - x(t)]^2 \rangle = \int_t^{t+\Delta t} ds \int_t^{t+\Delta t} ds' \langle \xi(s) \xi(s') \rangle = \int_t^{t+\Delta t} \langle \xi^2(s) \rangle ds = g \Delta t.$$

Ma allora

$$\dot{x} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left\langle \left[\frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} \right]^2 \right\rangle = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{g}{\Delta t} = +\infty$$

e siccome vale $\forall t$ segue la non differenziabilità $\forall t$. □

Alla luce di tutto ciò, c'è un modo nettamente migliore di scrivere (2.2):

$$\Delta x(t) := x(t + \Delta t) - x(t) = \int_t^{t+\Delta t} f(s, x(s)) ds + \Delta w$$

e si è soliti porre $w(t) := \int_0^t \xi(s) ds$ (detto *processo integrale* o *processo di Wiener*), che

comporta $\Delta w := w(t + \Delta t) - w(t) = \int_t^{t+\Delta t} \xi(s) ds$.

Mandando $\Delta t \rightarrow 0^+$ si ha

$$dx = b(t, x)dt + dw \quad (2.3)$$

Le proprietà di Δw , o dw , sono indotte direttamente da $\xi(s)$, ossia

1. $\langle \Delta w_j \rangle = \left\langle \int_t^{t+\Delta t} \xi_j(s) ds \right\rangle = \int_t^{t+\Delta t} \langle \xi_j(s) \rangle ds = 0$;
2. $\langle \Delta w_j(s) \Delta w_k(s) \rangle = \left\langle \int_t^{t+\Delta t} \xi_j(s) ds \cdot \int_t^{t+\Delta t} \xi_k(r) dr \right\rangle = \int_t^{t+\Delta t} ds \int_t^{t+\Delta t} \langle \xi_j(s) \xi_k(r) \rangle dr =$
 $= g_{jk} \int_t^{t+\Delta t} ds = g_{jk} \Delta t$ cioè $\Delta w \propto \sqrt{\Delta t}$ mediamente.

3. Non dipende da $\vec{x}(s) \forall s > t$.

Per gli scopi di questo lavoro non è di interesse studiare il flusso dell'equazione di Langevin: d'ora in poi si supporrà che essa ammetta soluzione $x(t) := \Phi^t(x_0; \xi)$.

Risulterà necessario avere comunque una definizione di derivata che descriva la velocità media di una particella la cui equazione del moto sia del tipo (2.2); si definiscono quindi

$$\begin{cases} \mathcal{D}x = \lim_{\Delta t \rightarrow 0^+} \left\langle \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} \right\rangle & \text{derivata media in avanti} \\ \mathcal{D}_*x = \lim_{\Delta t \rightarrow 0^-} \left\langle \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} \right\rangle & \text{derivata media all'indietro} \end{cases} \quad (2.4)$$

Ovviamente le definizioni coincidono se $x(t)$ è differenziabile: a quel punto $\mathcal{D}x(t) = \mathcal{D}_*x(t) \equiv \frac{dx(t)}{dt}$. In generale non è vero.

2.2 Il teorema di Liouville e l'equazione di Fokker-Planck

In meccanica hamiltoniana vale il

Teorema di Liouville. *Se $\rho(q_i, p_i, t)$ è la densità di configurazioni di un sistema hamiltoniano di N punti materiali nell'intorno del punto (q_i, p_i) allora*

$$\frac{d\rho(q_i(t), p_i(t), t)}{dt} = 0 \quad (2.5)$$

Il teorema altro non è che un'equazione di continuità per ρ . Si può dimostrare che nel caso dell'equazione di Langevin c'è un analogo densità di probabilità che soddisfa la seguente

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) = a \frac{1}{2} \vec{\nabla}^2 \rho \quad (2.6)$$

detta equazione di Fokker-Planck. La derivazione è laboriosa, quindi viene omessa. Si osservi solamente che nel caso il termine stocastico sia assente allora si otterrebbe il precedente teorema di Liouville: l'equazione di Fokker-Planck è da considerarsi un'estensione dello stesso.

2.3 Equazione di Schrödinger ed equazione di Hamilton-Jacobi

Nell'ambito hamiltoniano, l'equazione di Schrödinger per una particella di massa m

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = H\psi \quad (2.7)$$

è completamente equivalente alla coppia di equazioni che costituisce il sistema di Madelung

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} = -\vec{\nabla} \cdot \left(\rho \frac{\vec{\nabla} S}{m} \right) \\ \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{|\vec{\nabla} S|^2}{2m} + V(x) - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\vec{\nabla}^2 \sqrt{\rho}}{\sqrt{\rho}} = 0 \end{cases} \quad (2.8)$$

se si pone $\psi = \sqrt{\rho}e^{i\frac{S}{\hbar}}$: nel linguaggio hamiltoniano essa è una trasformazione canonica che permette di passare dalla funzione complessa $\psi(t, \vec{x})$ a una coppia di funzioni reali $\rho(t, \vec{x}), S(t, \vec{x})$ dipendenti dal tempo e dallo spazio tanto quanto $\psi(t, \vec{x})$. Infatti

$$\begin{cases} \frac{\partial \psi}{\partial t} = \left(\frac{1}{2\rho} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{i}{\hbar} \sqrt{\rho} \frac{\partial S}{\partial t} \right) e^{i\frac{S}{\hbar}} \\ \vec{\nabla}^2 \psi = \left[\vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\vec{\nabla} \rho}{2\sqrt{\rho}} \right) + \frac{i}{\hbar} \sqrt{\rho} \vec{\nabla}^2 S + \frac{i}{\hbar} \vec{\nabla} S \cdot \vec{\nabla}(\sqrt{\rho}) + \frac{i}{\hbar} \left(\frac{\vec{\nabla} \rho}{2\sqrt{\rho}} + \frac{i}{\hbar} \sqrt{\rho} \vec{\nabla} S \right) \vec{\nabla} S \right] e^{i\frac{S}{\hbar}} \end{cases}$$

Quindi

$$\begin{aligned} i\hbar \left(\frac{1}{2\sqrt{\rho}} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{i}{\hbar} \sqrt{\rho} \frac{\partial S}{\partial t} \right) e^{i\frac{S}{\hbar}} = & -\frac{\hbar^2}{2m} \left[\vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\vec{\nabla} \rho}{2\sqrt{\rho}} \right) + \frac{i}{\hbar} (\sqrt{\rho} \vec{\nabla}^2 S) + \vec{\nabla} S \cdot \vec{\nabla}(\sqrt{\rho}) + \right. \\ & \left. + \frac{i}{\hbar} \left(\frac{\vec{\nabla} \rho}{2\sqrt{\rho}} + \frac{i}{\hbar} \sqrt{\rho} \vec{\nabla} S \right) \vec{\nabla} S \right] + V(x) \sqrt{\rho} e^{i\frac{S}{\hbar}} \end{aligned}$$

e uguagliando parti reale ed immaginaria si ottiene il sistema di Madelung; tenendo presente che

$$\frac{\vec{\nabla}^2 \sqrt{\rho}}{\sqrt{\rho}} = \frac{\vec{\nabla}^2 \rho}{2\rho} - \frac{|\vec{\nabla} \rho|^2}{4\rho^2}$$

il sistema può essere riscritto finalmente come

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} = -\vec{\nabla} \cdot \left(\rho \frac{\vec{\nabla} S}{m} \right) \\ \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{|\vec{\nabla} S|^2}{2m} + V(x) - \frac{\hbar^2}{4m} \frac{\vec{\nabla}^2 \rho}{\rho} + \frac{\hbar^2}{8m} \frac{|\vec{\nabla} \rho|^2}{\rho^2} = 0 \end{cases} \quad (2.9)$$

A livello di meccanica hamiltoniana, la seconda è esattamente l'equazione di Hamilton-Jacobi per la generatrice S della trasformazione canonica di Madelung sommata ad un termine che nel limite classico è nullo:

$$\lim_{\hbar \rightarrow 0} \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\vec{\nabla}^2 \sqrt{\rho}}{\sqrt{\rho}} = 0$$

Ciò è molto importante poiché significa che anche l'equazione di Schrödinger ha una formulazione hamiltoniana. Di più: se si pone $\vec{z} \equiv \frac{\vec{\nabla} S}{m}$ e $\phi(x) \equiv V(x) - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\vec{\nabla}^2 \sqrt{\rho}}{\sqrt{\rho}}$ si riottengono proprio le equazioni del fluido di Eulero:

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} = -\vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{z}) \\ \frac{\partial \vec{z}}{\partial t} + (\vec{z} \cdot \vec{\nabla}) \vec{z} = -\frac{1}{m} \vec{\nabla} \phi, \quad \vec{\nabla} \times \vec{z} = \vec{0} \end{cases} \quad (2.10)$$

La condizione di irrotazionalità di \vec{z} giocherà un ruolo cruciale nella derivazione di *Nelson*.

Capitolo 3

Derivazione dell'equazione di Schrödinger

Si mostrano in questo capitolo i passaggi logici che portano alla dimostrazione dell'equazione di Schrödinger, stazionaria e dipendente dal tempo.

3.1 Il moto Browniano di Ornstein-Uhlenbeck

Innanzitutto si consideri la teoria di Ornstein-Uhlenbeck del moto Browniano, con coefficiente di attrito $m\gamma$ e sotto l'azione di un potenziale V , la accelerazione associata è $\vec{K} = -\frac{1}{m}\vec{\nabla}V$. Se $\vec{x}(t)$ è la posizione della particella e $\vec{v}(t)$ la sua velocità allora l'equazione del moto si scrive come sistema del second'ordine

$$\begin{cases} d\vec{x} = \vec{v}dt \\ d\vec{v} = -\gamma\vec{v}dt + \vec{K}(\vec{x}(t))dt + d\vec{B} \end{cases} \quad (3.1)$$

dove $d\vec{B}$ è un processo di Wiener tale che $g_{ij} = 6\frac{\gamma kT}{m}\delta_{ij}$ con k la costante di Boltzmann, T la temperatura assoluta del mezzo, m la massa della particella. Per non perdere la simmetria rispetto all'inversione temporale si deve scrivere anche la versione per tempi negativi, invertendo il segno al coefficiente d'attrito

$$\begin{cases} d\vec{x} = \vec{v}dt \\ d\vec{v} = \gamma\vec{v}dt + \vec{K}(\vec{x}(t))dt + d\vec{B}_* \end{cases} \quad (3.2)$$

dove $d\vec{B}_*$ è un altro processo di Wiener con le stesse caratteristiche di prima. Ora \vec{x} è differenziabile con derivata $\vec{v}(t)$ ma non lo è $\vec{v}(t)$ per quanto detto a proposito nel precedente capitolo. Applicando le definizioni (2.4) alle espressioni per $d\vec{v}$ rispettivamente

$$\begin{cases} \mathcal{D}\vec{v} = -\gamma\vec{v} + \vec{K} \\ \mathcal{D}_*\vec{v} = \gamma\vec{v} + \vec{K} \end{cases} \quad (3.3)$$

Si può isolare $\vec{K} \equiv \frac{1}{2}\mathcal{D}\vec{v} + \frac{1}{2}\mathcal{D}_*\vec{v} = \frac{1}{2}\mathcal{D}_*\mathcal{D}\vec{x} + \frac{1}{2}\mathcal{D}\mathcal{D}_*\vec{x}$ e definire allo stesso modo l'accelerazione media della particella, ovvero

$$\vec{a} = \frac{1}{2}\mathcal{D}_*\mathcal{D}\vec{x} + \frac{1}{2}\mathcal{D}\mathcal{D}_*\vec{x} \quad (3.4)$$

3.2 Il moto Browniano di Einstein-Smoluchowski

Si supponga che la particella in esame compia un moto Browniano che soddisfi l'equazione di Einstein-Smoluchowski:

$$d\vec{x}(t) = \vec{b}(\vec{x}(t), t) dt + d\vec{w}(t) \quad (3.5)$$

dove $\vec{b}(\vec{x}(t), t)$ è un campo vettoriale dipendente dalla stessa traiettoria $\vec{x}(t)$ e dal tempo t non noto a priori e dunque un'incognita del problema, $d\vec{w}(t)$ è un processo di Wiener di tipo gaussiano dotato delle proprietà definite in (2.1.3), ponendo $g_{ij} \equiv 2\beta\delta_{ij}$, in cui β ha il significato fisico di coefficiente di diffusione.

Allo scopo di non perdere la simmetria rispetto al tempo è necessario scrivere anche la versione per tempi $s \leq t$ dell'equazione (3.5), cioè

$$d\vec{x}(t) = \vec{b}_*(\vec{x}(t), t) dt + d\vec{w}_*(t) \quad (3.6)$$

dove ancora una volta $\vec{b}_*(\vec{x}(t), t)$ è un'incognita del problema mentre $d\vec{w}_*(t)$ è un processo di Wiener con le stesse caratteristiche del precedente eccetto il fatto che non dipende da $\vec{x}(s) \forall s \leq t$. Applicando la precedente (2.4) rispettivamente a (3.5) e (3.6) e tenendo conto delle ipotesi fatte sui processi di Wiener si ottengono le seguenti condizioni sui campi:

$$\begin{cases} \mathcal{D}\vec{x} = \vec{b} \\ \mathcal{D}_*\vec{x} = \vec{b}_* \end{cases} \quad (3.7)$$

3.2.1 La variabile \vec{v}

Sia $\rho(t, \vec{x})$ la densità di probabilità associata alla $\vec{x}(t)$. Allora essa soddisfa la coppia di equazioni di Fokker-Planck:

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} = -\vec{\nabla} \cdot (\vec{b}\rho) + \beta \vec{\nabla}^2 \rho \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} = -\vec{\nabla} \cdot (\vec{b}_*\rho) - \beta \vec{\nabla}^2 \rho \end{cases} \quad (3.8)$$

Sommando le due espressioni membro a membro si ricava facilmente l'equazione di continuità per la densità di probabilità $\rho(t, \vec{x})$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \left[\frac{\vec{b} + \vec{b}_*}{2} \rho \right] \equiv \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\vec{v}\rho) = 0 \quad (3.9)$$

avendo definito $\vec{v} \equiv \frac{\vec{b} + \vec{b}_*}{2}$. Chiaramente $\rho\vec{v}$ ha il significato di densità di corrente di probabilità.

3.2.2 La variabile \vec{u}

Se si sottraggono le equazioni (3.8), definendo con $\vec{u} \equiv \frac{\vec{b} - \vec{b}_*}{2}$, si ottiene la relazione

$$0 = \vec{\nabla} \cdot (\rho\vec{u}) - \beta \vec{\nabla}^2 \rho = \vec{\nabla} \cdot (\rho\vec{u} - \beta \vec{\nabla} \rho) \quad (3.10)$$

Il passaggio che esplicita \vec{u} è in linea di principio $\vec{u} = \beta \vec{\nabla} \ln \rho + \vec{\nabla} \times \vec{\xi}$ con $\vec{\xi}$ una generica funzione arbitraria dipendente dalle coordinate e dal tempo. In realtà il termine a divergenza nulla non è presente, per motivi spiegati in Appendice (A.2). Quindi

$$\vec{u} = \beta \vec{\nabla} \ln \rho \quad (3.11)$$

3.2.3 Equazioni di evoluzione per \vec{v} e \vec{u}

Derivando ambo i membri dell'equazione (3.11) rispetto al tempo si ottiene facilmente l'equazione di evoluzione temporale per la variabile \vec{u} , ricordando l'equazione di continuità per $\rho(t, \vec{x})$:

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = \beta \frac{\partial \vec{\nabla} \ln \rho}{\partial t} = \beta \vec{\nabla} \frac{\partial \ln \rho}{\partial t} = \beta \vec{\nabla} \frac{\partial \rho}{\partial t} = \beta \vec{\nabla} \left[-\frac{\vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v})}{\rho} \right] = \quad (3.12)$$

$$= \beta \vec{\nabla} \left[-\frac{\vec{\nabla} \rho \cdot \vec{v} + \rho \vec{\nabla} \cdot \vec{v}}{\rho} \right] = \beta \vec{\nabla} \left[-\frac{\vec{\nabla} \rho}{\rho} \cdot \vec{v} - \vec{\nabla} \cdot \vec{v} \right] = \quad (3.13)$$

$$= -\vec{\nabla}(\vec{u} \cdot \vec{v}) - \beta \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{v}) \quad (3.14)$$

Per trovare l'equazione di evoluzione temporale per \vec{v} bisogna riprendere la definizione di accelerazione media (3.4), tenere presente che i campi soddisfano (3.7) e le definizioni in appendice A.1 per \mathcal{D} e \mathcal{D}_* :

$$\begin{cases} \mathcal{D}_* \mathcal{D} \vec{x} = \mathcal{D}_* \vec{b} = \frac{\partial \vec{b}}{\partial t} + (\vec{b}_* \cdot \vec{\nabla}) \vec{b} - \beta \vec{\nabla}^2 \vec{b} \\ \mathcal{D} \mathcal{D}_* \vec{x} = \mathcal{D} \vec{b}_* = \frac{\partial \vec{b}_*}{\partial t} + (\vec{b} \cdot \vec{\nabla}) \vec{b}_* + \beta \vec{\nabla}^2 \vec{b}_* \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 2\vec{a} &= \mathcal{D}_* \vec{b} + \mathcal{D} \vec{b}_* = \frac{\partial}{\partial t} (\vec{b} + \vec{b}_*) + (\vec{b}_* \cdot \vec{\nabla}) \vec{b} + (\vec{b} \cdot \vec{\nabla}) \vec{b}_* - \beta \vec{\nabla}^2 (\vec{b} - \vec{b}_*) = \\ &= 2 \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + [(\vec{v} - \vec{u}) \cdot \vec{\nabla}] (\vec{v} + \vec{u}) + [(\vec{v} + \vec{u}) \cdot \vec{\nabla}] (\vec{v} - \vec{u}) - 2\beta \vec{\nabla}^2 \vec{u} = \\ &= 2 \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + 2(\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} - 2(\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} - 2\beta \vec{\nabla}^2 \vec{u} \end{aligned}$$

e quindi

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \vec{a} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} - (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} + \beta \vec{\nabla}^2 \vec{u} \quad (3.15)$$

Ora il punto è il seguente: che significato si deve dare all'accelerazione \vec{a} ? Gioca il ruolo di una variabile oppure è un'incognita del problema?

3.3 Le ipotesi sul moto Browniano

Si è dunque arrivati al sistema di equazioni differenziali alle derivate parziali nelle incognite \vec{u} e \vec{v}

$$\begin{cases} \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \vec{a} - (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} + \beta \vec{\nabla}^2 \vec{u} \\ \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = -\vec{\nabla} \left[\beta \vec{\nabla} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{u} \right] \end{cases} \quad (3.16)$$

ma ancora non è stato detto quanto valga il parametro β e specialmente che senso abbia l'accelerazione \vec{a} . A questo scopo si enunciano i seguenti postulati:

Postulato 1 Il parametro β deve essere proporzionale all'inverso della massa della particella, precisamente

$$\beta = \frac{\hbar}{2m}$$

dove \hbar è una costante dalle dimensioni di un'azione, che si rivelerà poi essere la costante di Planck ridotta per consistenza. Per quanto spiegato sui processi di Wiener, il coefficiente β regola l'intensità del rumore: se esso è nullo allora le equazioni di Einstein-Smoluchowski (3.5 e 3.6) si riducono a equazioni classiche. La dipendenza dalla massa è ovvia: ci si aspetta che il rumore sia sempre più trascurabile al crescere della massa della particella. In altre parole, le fluttuazioni microscopiche delle particelle sono regolate da \hbar , ipotesi di fisica fondamentale: le fluttuazioni sono fluttuazioni quantistiche.

Postulato 2 Per consistenza fisica, si suppone che l'accelerazione \vec{a} sia esattamente la risultante delle forze conservative che agiscono sulla particella, nella sua forma classica. In effetti è ragionevole pensare che sia così: ad esempio il potenziale dell'atomo di idrogeno quantistico ha la stessa forma analitica del potenziale del problema dei due corpi, così come l'oscillatore armonico quantistico ha lo stesso potenziale di quello classico. Classico o quantistico che sia, la forza ha espressione definita poiché lo è la sua energia potenziale. Quindi l'accelerazione è postulata essere $\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} = -\frac{\vec{\nabla}V}{m}$, con V somma di tutti i potenziali che agiscono sulla particella.

Con queste ipotesi, il sistema assume la forma seguente:

$$\begin{cases} \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\frac{\vec{\nabla}V}{m} - (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{v} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u} + \frac{\hbar}{2m}\vec{\nabla}^2\vec{u} \\ \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = -\vec{\nabla} \left[\frac{\hbar}{2m}\vec{\nabla} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{u} \right] \end{cases} \quad (3.17)$$

cioè una coppia di P.D.E. non lineari che necessiteranno delle opportune condizioni al contorno e di bordo, ma questo esula dalla trattazione.

3.4 La derivazione dell'equazione di Schrödinger

Per quanto il sistema (3.17) sia stato derivato correttamente, occorrono delle ipotesi in più: il problema consta di due campi vettoriali, \vec{v} , \vec{u} , cioè di ben sei incognite. L'equazione di Schrödinger ha come unica incognita la funzione d'onda scalare e complessa ψ , cioè due sole funzioni reali da determinare. Si deve cercare capire quali siano i gradi di libertà ridondanti del problema, in modo da eliminarli con qualche condizione ragionevole. Innanzitutto si ricordi che vale (3.11), che lega la variabile \vec{u} a ρ , abbassando quindi il numero di gradi di libertà a quattro. Allo stesso modo, si possono eliminare altre due incognite del problema supponendo che anche \vec{v} sia un campo gradiente, cioè $\vec{v} \equiv \frac{1}{m}\vec{\nabla}S$ con S funzione scalare da determinare. La motivazione fisica di quest'ipotesi discende dalla fluidodinamica: se si impone che la velocità del fluido sia un campo gradiente, cioè irrotazionale, si distruggono tutte le possibili turbolenze e si riottiene il sistema di Eulero (2.10). Ricapitolando:

$$\begin{cases} \vec{v} = \frac{1}{m}\vec{\nabla}S \\ \vec{u} = \frac{\hbar}{2m}\vec{\nabla} \ln \rho \end{cases} \quad (3.18)$$

Ora, la prima equazione del sistema (3.17) è un altro modo di scrivere l'equazione di continuità per ρ , dato che vale (3.11): i conti espliciti sono stati inseriti in Appendice

(A.3). Si può quindi considerare semplicemente il sistema di equazioni

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\vec{v}\rho) = 0 \\ \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\frac{\vec{\nabla} V}{m} - (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{v} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u} + \frac{\hbar}{2m}\vec{\nabla}^2\vec{u} \end{cases} \quad (3.19)$$

Per un campo gradiente \vec{a} vale l'identità vettoriale

$$(\vec{a} \cdot \vec{\nabla})\vec{a} = \vec{\nabla} \left(\frac{|\vec{a}|^2}{2} \right)$$

e inoltre il laplaciano del gradiente è il gradiente del laplaciano. Quindi

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} &= -\frac{\vec{\nabla} V}{m} - (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{v} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u} + \frac{\hbar}{2m}\vec{\nabla}^2\vec{u} \\ \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} &= -\frac{\vec{\nabla} V}{m} - \frac{\vec{\nabla} (|\vec{v}|^2)}{2} + \frac{\vec{\nabla} (|\vec{u}|^2)}{2} + \frac{\hbar}{2m}\vec{\nabla}^2\vec{u} \\ \vec{\nabla} \left(\frac{1}{m} \frac{\partial S}{\partial t} \right) &= -\frac{\vec{\nabla} V}{m} - \frac{1}{2m^2}\vec{\nabla} (|\vec{\nabla} S|^2) + \frac{\hbar^2}{8m^2}\vec{\nabla} (|\vec{\nabla} \ln \rho|^2) + \frac{\hbar^2}{4m^2}\vec{\nabla}^2\vec{\nabla} \ln \rho \\ \frac{1}{m} \frac{\partial S}{\partial t} &= -\frac{V}{m} - \frac{|\vec{\nabla} S|^2}{2m^2} + \frac{\hbar^2}{8m^2} \frac{|\vec{\nabla} \rho|^2}{\rho^2} + \frac{\hbar^2}{4m^2}\vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\vec{\nabla} \rho}{\rho} \right) + \alpha(t) \\ \frac{\partial S}{\partial t} &= -V - \frac{|\vec{\nabla} S|^2}{2m} - \frac{\hbar^2}{8m} \frac{|\vec{\nabla} \rho|^2}{\rho^2} + \frac{\hbar^2}{4m} \frac{\vec{\nabla}^2 \rho}{\rho} \end{aligned}$$

dove tra la terza e la quarta riga si è sollevato un gradiente, con la conseguente aggiunta di una funzione arbitraria indipendente dal tempo $\alpha(t)$ che però si regola facilmente ridefinendo $S \equiv S - A(t)$, con $A = \int^t \alpha(s) ds$. Si riottiene dunque la seconda equazione del sistema (2.8) che tramite la seguente trasformazione canonica inversa a quella di Madelung

$$\begin{cases} S = -\frac{i\hbar}{2} \ln \left(\frac{\psi}{\psi^*} \right) \\ \rho = |\psi|^2 \end{cases} \quad (3.20)$$

porge finalmente l'equazione di Schrödinger .

3.5 Esempio applicativo: la particella libera

Si consideri il semplice caso della particella libera in una dimensione. Allora l'equazione di Schrödinger è

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} \quad (3.21)$$

Per risolverla si passa in trasformata di Fourier, da cui seguono i seguenti passaggi elementari

$$\psi(t, x) = \int_{\mathbb{R}} e^{ikx} \varphi(t, k) dk = \int e^{i(kx - \frac{\hbar k^2}{2m}t)} \varphi(0, k) dk \quad (3.22)$$

che determinano la soluzione generale in forma integrale. Allo scopo di proseguire con i conti, si abbia un pacchetto gaussiano $\varphi(0, k) = A e^{-\frac{k^2}{2\sigma^2}}$ e A costante arbitraria tale che $[A] = \text{lunghezza}^{1/2}$, necessaria alla normalizzazione di ψ . Allora la soluzione diventa

$$\psi(t, x) = A \int e^{i(kx - \frac{\hbar k^2}{2m}t)} e^{-\frac{k^2}{2\sigma^2}} dk = A \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} e^{-\frac{x^2}{4\alpha}} \quad (3.23)$$

avendo posto $\alpha \equiv \frac{m+i\hbar\sigma^2 t}{2m\sigma}$. Per semplicità, si scriverà

$$\psi = B(t, x)e^{\xi(t, x)x^2}, \quad B = A\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}, \quad \xi = -\frac{1}{4\alpha}$$

sottintendendo che B e ξ non sono funzioni reali; per arrivare alle espressioni delle funzioni b, b_* si deve innanzitutto calcolare la densità di probabilità:

$$\rho = |\psi|^2 = |B|^2 e^{(\xi-\xi^*)x^2} = \frac{2\pi A^2 m\sigma^2}{\sqrt{m^2 + \hbar^2 t^2 \sigma^4}} \exp\left(\frac{\sigma^2 m^2 x^2}{m^2 + \hbar^2 t^2 \sigma^4}\right) \quad (3.24)$$

Ricordando le condizioni (3.18) si ha che

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial x} &= -\frac{4\pi A^2 m^3 \sigma^4 x}{(m^2 + \hbar^2 t^2 \sigma^4)^{3/2}} \exp\left(-\frac{m^2 \sigma^2 x^2}{m^2 + \hbar^2 t^2 \sigma^4}\right) \\ u &= -\frac{m\hbar\sigma^2 x}{m^2 + \hbar^2 t^2 \sigma^4} \end{aligned} \quad (3.25)$$

Inoltre $S = -i\frac{\hbar}{2} \ln\left(\frac{\psi}{\psi^*}\right)$ e osservando che le operazioni di coniugazione complessa e radice quadrata commutano

$$\frac{\psi}{\psi^*} = \sqrt{\frac{\alpha^*}{\alpha}} \exp\left[-\frac{x^2}{4}\left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\alpha^*}\right)\right] = \exp(i\theta(t)) \exp\left(-i\frac{m\hbar t\sigma^4 x^2}{m^2 + \hbar^2 t^2 \sigma^4}\right)$$

dove

$$\theta(t) = \begin{cases} -\arctan\left(\frac{\hbar t\sigma^2}{m}\right) & t < 0 \\ \pi - \arctan\left(\frac{\hbar t\sigma^2}{m}\right) & t > 0 \end{cases}$$

Applicando la formula il termine con $\theta(t)$ viene abbattuto dalla derivata spaziale e quindi

$$S = \frac{m\hbar^2 t\sigma^4 x^2}{2(m^2 + \hbar^2 t^2 \sigma^4)} \implies v = \frac{\hbar^2 t\sigma^4 x}{m^2 + \hbar^2 t^2 \sigma^4} \quad (3.26)$$

Ricordando infine le relazioni con le funzioni b, b_* :

$$\begin{cases} b = v + u = \frac{\hbar^2 t\sigma^4 x - m\hbar\sigma^2 x}{m^2 + \hbar^2 t^2 \sigma^4} \\ b_* = v - u = \frac{\hbar^2 t\sigma^4 x + m\hbar\sigma^2 x}{m^2 + \hbar^2 t^2 \sigma^4} \end{cases} \quad (3.27)$$

Capitolo 4

Conclusione

A conclusione della trattazione, si enuncia nella sua completezza il

Teorema di Nelson. *Sia data una particella di massa m soggetta a moto Browniano di Einstein-Smoluchowski in avanti e all'indietro, con coefficiente di diffusione $\beta = \frac{\hbar}{2m}$. Si assuma inoltre che l'accelerazione media della particella sia pari ad una assegnata forza conservativa, $\vec{a}(t, \vec{x}) = \frac{\vec{F}(t, \vec{x})}{m} = -\frac{\vec{\nabla}V(t, \vec{x})}{m}$.*

Allora i campi vettoriali in avanti e all'indietro che definiscono il moto Browniano soddisfano un sistema idrodinamico di equazioni le cui soluzioni irrotazionali sono tutte e sole le soluzioni del sistema di Madelung con energia potenziale $V(t, \vec{x})$.

Appendice A

Passaggi nascosti

A.1 Il differenziale di una funzione $f(t, \vec{x}(t))$

Si consideri una qualsiasi funzione delle coordinate e del tempo $f(t, \vec{x})$ e la sua variazione finita al secondo'ordine:

$$\begin{aligned}\Delta f &= f(t + \Delta t, \vec{x}(t + \Delta t)) - f(t, \vec{x}(t)) \\ &= f(t + \Delta t, \vec{x}(t) + \Delta \vec{x}) - f(t, \vec{x}(t)) \\ &= \Delta \vec{x} \cdot \vec{\nabla} f + \Delta t \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \Delta x_i \Delta x_j \frac{\partial f}{\partial x_j} \frac{\partial f}{\partial x_i} + o((\Delta t)^2)\end{aligned}$$

Tenendo presente che $\Delta \vec{x} = \vec{b} \Delta t + \Delta \vec{w} + o(\Delta t)$, la definizione di derivata media in avanti dice che

$$\begin{aligned}\mathcal{D}f &= \left\langle \frac{\Delta f}{\Delta t} \right\rangle_{\Delta t \rightarrow 0^+} = \vec{b} \cdot \vec{\nabla} f + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \sum_{i,j} g_{ij} \frac{\partial f}{\partial x_j} \frac{\partial f}{\partial x_i} = \\ &= \vec{b} \cdot \vec{\nabla} f + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} k \vec{\nabla}^2 f = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{b} \cdot \vec{\nabla} + \frac{1}{2} k \vec{\nabla}^2 \right) f\end{aligned}$$

e analogamente per \mathcal{D}_* con i dovuti cambiamenti:

$$\mathcal{D}_* f = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{b}_* \cdot \vec{\nabla} - \frac{1}{2} k \vec{\nabla}^2 \right) f$$

basta solo porre $k \equiv 2\beta$.

A.2 La mancanza del termine di rotore nella definizione di \vec{u}

Si propone qui la giustificazione dell'affermazione fatta in sezione 3.2.2: ovvero che \vec{u} non può essere definita a meno di un rotore di una funzione vettoriale arbitraria. La motivazione risale in un teorema¹:

$$\int dx dt \left(\partial_t + \vec{b} \cdot \vec{\nabla} + \beta \vec{\nabla}^2 \right) (f) g_\rho = - \int dx dt f \left(\partial_t + \vec{b}_* \cdot \vec{\nabla} - \beta \vec{\nabla}^2 \right) (g_\rho) \quad (\text{A.1})$$

¹Per la dimostrazione completa: Edward Nelson, *Dynamical theories of Brownian motion*, 1967, volume 3, capitolo 11.

dove gli integrali sono estesi a tutto lo spazio e a tutti i tempi, $f(t, \vec{x}), g(t, \vec{x})$ sono due funzioni di prova a supporto compatto nel tempo e nello spazio. Il primo passo è calcolare il membro di sinistra, usando la tecnica di integrazione per parti allo scopo di togliere da f e scaricare su $g\rho$ eventuali operatori di derivazione²:

$$\int dx dt \left(\partial_t f + \vec{b} \cdot \vec{\nabla} f + \beta \vec{\nabla}^2 f \right) g\rho \quad (\text{A.2})$$

$$\begin{aligned} & \bullet \int dx dt (\partial_t f) g\rho = - \int dx dt f \partial_t g\rho - \int dx dt f g \partial_t \rho \\ & \bullet \int dx dt (\vec{b} \cdot \vec{\nabla} f) g\rho = - \int dx dt \left[f (\vec{b} \cdot \vec{\nabla} g) \rho + f g (\vec{b} \cdot \vec{\nabla} \rho) + f g (\vec{\nabla} \cdot \vec{b}) \rho \right] \\ & \bullet \beta \int dx dt (\vec{\nabla}^2 f) g\rho = \beta \int dx dt \left[f \vec{\nabla}^2 g \rho + 2f \vec{\nabla} g \cdot \vec{\nabla} \rho + f g \vec{\nabla}^2 \rho \right] \end{aligned}$$

$$\int dx dt \left[-f \partial_t g - f (\vec{b} \cdot \vec{\nabla} g) + 2\beta f \vec{\nabla} g \cdot \frac{\vec{\nabla} \rho}{\rho} + \beta f \vec{\nabla}^2 g \right] \rho + \quad (\text{A.3})$$

$$-f \left[\partial_t \rho + \vec{\nabla} \cdot (\vec{b} \rho) - \beta \vec{\nabla}^2 \rho \right] \quad (\text{A.4})$$

Se si denota con $\mathcal{A} \equiv \left(\partial_t + \vec{b} \cdot \vec{\nabla} + \beta \vec{\nabla}^2 \right)$ allora si può definirne l'aggiunto in due modi.

- (i) Si definisce l'aggiunto di \mathcal{A} rispetto alla misura $\rho dx dt$ e si denota con \mathcal{A}^* l'operatore tale che

$$\int (\mathcal{A}f)g \rho dx dt = \int f(\mathcal{A}^*g) \rho dx dt \quad \forall f, g \in \mathbb{S}(\mathbb{R}^n) \times \mathbb{S}(\mathbb{R}) \quad (\text{A.5})$$

in notazione di Dirac:

$$\langle \mathcal{A}f | g \rangle_\rho = \langle f | \mathcal{A}^*g \rangle_\rho$$

- (ii) Si definisce l'aggiunto di \mathcal{A} rispetto alla misura $dx dt$ e si denota con \mathcal{A}^\dagger l'operatore tale che

$$\int (\mathcal{A}f)g \rho dx dt = \int f(\mathcal{A}^\dagger g \rho) dx dt \quad \forall f, g, \rho \in \mathbb{S}(\mathbb{R}^n) \times \mathbb{S}(\mathbb{R}) \quad (\text{A.6})$$

in notazione di Dirac:

$$\langle \mathcal{A}f | g\rho \rangle_1 = \langle f | \mathcal{A}^\dagger(g\rho) \rangle_1$$

Ma allora le due definizioni date dicono che

$$\int dx dt f \left[(\mathcal{A}^*g) \rho - \mathcal{A}^\dagger(g\rho) \right] = 0 \iff (\mathcal{A}^*g) \rho = \mathcal{A}^\dagger(g\rho)$$

che vale $\forall f, g$ quindi si arriva alla relazione fondamentale

$$\mathcal{A}^* = \rho^{-1} \mathcal{A}^\dagger \rho \quad (\text{A.7})$$

ed è da intendersi che il secondo membro significa di moltiplicare ρ per la funzione desiderata e poi far agire \mathcal{A}^\dagger . Se ora si usa l'equazione di Fokker-Planck in avanti in (A.4) il secondo termine si annulla e quindi:

$$\int \rho dx dt \left[-f \partial_t g - f (\vec{b} \cdot \vec{\nabla} g) + 2\beta f \vec{\nabla} g \cdot \frac{\vec{\nabla} \rho}{\rho} + \beta f \vec{\nabla}^2 g \right] \quad (\text{A.8})$$

²Al fine di mantenere ordine, per questo calcolo si porrà $\partial_t \equiv \frac{\partial}{\partial t}$

e per definizione di prodotto scalare (i) si ha che

$$\mathcal{A}^* = -\partial_t - \vec{b} \cdot \vec{\nabla} + 2\beta \vec{\nabla} \ln \rho \cdot \vec{\nabla} + \beta \vec{\nabla}^2$$

ma d'altra parte deve anche essere

$$\mathcal{A}^* = -\partial_t - \vec{b}_* \cdot \vec{\nabla} + \beta \vec{\nabla}^2$$

e per consistenza si ottiene la definizione di \vec{u} :

$$-\vec{b} + 2\beta \vec{\nabla} \ln \rho = -\vec{b}_* \iff \vec{u} \equiv \frac{\vec{b} - \vec{b}_*}{2} = \beta \vec{\nabla} \ln \rho$$

che come si vede è priva di termini a divergenza nulla, ovvero del tipo $\vec{\nabla} \times \vec{\xi}$.

A.3 Equazione di evoluzione per \vec{u} ed equazione di continuità

Con l'ipotesi che anche v sia un campo gradiente (3.18) si ha che³:

$$\begin{aligned} \partial_t \vec{u} &= -\vec{\nabla} \left[\frac{\hbar}{2m} \vec{\nabla} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{u} \right] \\ \frac{\hbar}{2m} \vec{\nabla} (\partial_t \ln \rho) &= \vec{\nabla} \left[-\frac{\hbar}{2m} \left(\frac{\hbar}{m} \vec{\nabla}^2 S \right) \right] + \frac{\hbar}{2m} \vec{\nabla} \left(\vec{\nabla} \ln \rho \cdot \frac{\hbar}{m} \vec{\nabla} S \right) \\ \partial_t \ln \rho &= \frac{\hbar}{m} \vec{\nabla}^2 S + \vec{\nabla} \ln \rho \cdot \frac{\hbar}{m} \vec{\nabla} S + f(t) \\ \frac{1}{\rho} \partial_t \rho &= \frac{\hbar}{m} \vec{\nabla}^2 S + \frac{1}{\rho} \vec{\nabla} \rho \cdot \frac{\hbar}{m} \vec{\nabla} S + f(t) \\ \partial_t \rho &= \frac{\hbar}{m} \rho \vec{\nabla}^2 S + \vec{\nabla} \rho \cdot \frac{\hbar}{m} \vec{\nabla} S + \rho f(t) = \vec{\nabla} \cdot \left(\rho \frac{\hbar}{m} \vec{\nabla} S \right) + \rho f(t) \end{aligned}$$

Se ora si riscrive $\rho \equiv \tilde{\rho} e^{F(t)}$ dove $F(t) \equiv \int_0^t f(s) ds$ è una primitiva di $f(t)$ si ritrova l'equazione di continuità per $\tilde{\rho}$. Il vincolo però deve essere logicamente

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^3} \tilde{\rho} d^3x = 1 &= \int_{\mathbb{R}^3} \rho d^3x = \int_{\mathbb{R}^3} \tilde{\rho} e^{F(t)} d^3x = e^{F(t)} \int_{\mathbb{R}^3} \tilde{\rho} d^3x \\ &\iff e^{F(t)} = 1 \iff F(t) \equiv 0 \iff f(t) = 0 \end{aligned}$$

³Anche qui vale $\partial_t \equiv \frac{\partial}{\partial t}$

Bibliografia

- ★ Antonio Poincaré, *DYNAMICAL FOUNDATIONS of STATISTICAL MECHANICS*, 31 Maggio 2018 (Dispense non pubblicate).
- ★ Antonio Poincaré, *ANALYTICAL MECHANICS*, 2018 (Appunti del corso di Meccanica Analitica, Laurea in Fisica).
- ★ Edward Nelson, *Derivation of the Schrödinger Equation from Newtonian Mechanics*, Physical Review, 1966, pagine 1079-1085.
- ★ Edward Nelson, *Dynamical theories of Brownian motion*, 1967, volume 3.
- ★ Erwin Schrödinger , *An undulatory theory of the mechanics of atoms and molecules*, Physical Review, 1926, pagina 1049.
- ★ Erwin Schrödinger , *What is life? The physical aspect of the living cell and mind*, 1944, Cambridge University Press Cambridge.