

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

Dipartimento di Psicologia Generale

Dipartimento di Psicologia dello Sviluppo e della Socializzazione

Corso di laurea triennale in Psicologia dello Sviluppo e delle Relazioni Interpersonali

Tesi di laurea Triennale

La relazione tra capacità di memoria di lavoro e acuità numerica

The relationship between visual working memory capacity and numerical acuity

Relatore: Prof. Roberto Dell'Acqua

Laureando: Gianmarco Bertolini

Matricola: 2012245

Anno accademico: 2022-2023

Indice

1. Introduzione.....	5
1.1. Memoria di lavoro visiva.....	5
1.2. Acuità numerica.....	7
1.3. Scopo della ricerca.....	9
2. Materiali e metodi.....	13
2.1. Campione sperimentale.....	13
2.2. Procedura e stimoli.....	13
2.2.1. Memoria di lavoro visiva.....	14
2.2.2. Acuità numerica.....	15
3. Risultati.....	17
3.1. Change detection.....	17
3.2. Confronto di numerosità.....	20
3.3. Correlazione tra K_{max} e acuità numerica.....	21
4. Discussione e conclusione.....	23
5. Riferimenti bibliografici.....	25

1. Introduzione

Nel presente elaborato descriverò uno studio che consiste nella somministrazione di due compiti sperimentali, uno comunemente denominato *change detection*, inteso a stimare la capacità individuale di memoria di lavoro visiva (VWM), e l'altro comunemente denominato di confronto di grandezze numeriche espresse in modo non simbolico (ovvero, non con caratteri numerici), inteso a stimare la capacità individuale di un costrutto psicologico che la letteratura definisce acuità numerica. La motivazione allo studio è stata fornita da una ricerca analoga condotta da Piazza et al. (2011), i cui risultati hanno evidenziato un'assenza di correlazione tra questi due domini cognitivi. Sulla scorta di un insieme di limitazioni ravvisate nello studio sopracitato, che verranno descritte a ridosso della sezione dedicata alla parte sperimentale del presente elaborato, abbiamo deciso di aumentare la numerosità del campione utilizzato, oltre che modificare in modo sostanziale le metodiche di stima della capacità di memoria di lavoro visiva, così da aumentare la potenza statistica, al fine di rilevare una possibile correlazione tra memoria di lavoro visiva e acuità numerica. Anticipando i risultati emersi, nonostante i cambiamenti apportati alla metodica analitica e sperimentale, i dati che descriverò hanno ribadito l'assenza di una relazione tra i due domini cognitivi, suggerendo che memoria di lavoro visiva e acuità numerica siano abilità cognitive funzionalmente indipendenti.

I prossimi due capitoli introduttivi forniranno una breve cornice teorica della memoria di lavoro visiva e dell'acuità numerica. Il terzo capitolo è dedicato alla parte sperimentale del presente elaborato, a cui seguirà una sezione con le mie riflessioni.

1.1. Memoria di lavoro visiva

La memoria di lavoro visiva (VWM) rappresenta la capacità di mantenere attivamente informazioni di natura visiva per brevi periodi di tempo ed è una funzione di fondamentale importanza all'interno del nostro sistema cognitivo. Essa consente di mantenere e manipolare le informazioni, acquisite attraverso i nostri sensi (Jolicoeur & Dell'Acqua, 1998) o recuperate dalla memoria a lungo termine (Fukuda & Woodman, 2017). La peculiarità principale della WM è la sua natura limitata, poiché consente di

immagazzinare fino a un massimo di circa 3-4 elementi per un tempo breve, stimabile attorno ai 10 secondi (Baddeley, 2003; Luck & Vogel, 2013; Oberauer et al., 2016). Gli studi, oltre a illustrare i forti limiti della memoria di lavoro, hanno cercato di individuare e approfondire le sue caratteristiche, tra cui l'alta correlazione con varie funzioni cognitive, come l'intelligenza fluida, il controllo dell'attenzione e il conseguimento di voti scolastici più o meno elevati (Adam et al., 2018; Engle et al., 1999; Krumm et al., 2008; Xu et al., 2018). Questi risultati hanno contribuito a rendere la memoria di lavoro un fattore chiave per comprendere le differenze individuali nel funzionamento cognitivo.

Nella letteratura scientifica sono stati proposti due modelli principali per descrivere il funzionamento della memoria di lavoro visiva: il modello a *slot* discreti e il modello a risorse continue. Le teorie basate sul primo dei due modelli sostengono che la memoria di lavoro visiva è composta da un numero massimo di *slot* disponibili (K_{max} ; Cowan, 2001), ciascuno dei quali può contenere un singolo elemento visivo. Quando il numero di elementi presenti nell'input sensoriale supera la capacità K_{max} , solo gli elementi visivi più rilevanti vengono immagazzinati nella memoria di lavoro visiva, mentre gli altri elementi non vengono conservati (Cowan, 2001; Luck & Vogel, 1997). Studi più recenti hanno messo parzialmente in discussione l'affidabilità di tale modello, suggerendo che la precisione di risoluzione con cui le informazioni vengono memorizzate diminuisca con l'incremento del numero di elementi da memorizzare (Bays & Husain, 2008; Wilken & Ma, 2004).

Tale intuizione è stata meglio spiegata dalle teorie basate sul secondo dei due modelli citati, ovvero il modello a risorse continue. Queste teorie considerano la VWM una risorsa flessibile che può essere distribuita tra tutti gli elementi presenti nel display, e affermano, al contrario delle teorie basate sul primo modello, che non esista un limite massimo descrivibile in termini di *slot* disponibili. Secondo queste teorie, la capacità limitata della memoria di lavoro è dovuta alla ridotta quantità di risorse allocata su ogni singolo elemento, dove la precisione della memorizzazione diminuisce con l'incremento della dimensione complessiva dell'insieme di elementi visualizzati (Bays et al., 2009; Gorgoraptis et al., 2011). Le teorie basate sui modelli a risorse continue possono inoltre essere interpretate in termini di una crescita del rumore neurale all'aumentare delle dimensioni dell'insieme visualizzato (Emrich et al., 2013; Sprague et al., 2014).

Uno dei compiti sperimentali più ampiamente utilizzati per quantificare l'efficacia e i limiti di capacità della memoria di lavoro visiva è il paradigma di *change detection task*. Tale paradigma, inizialmente introdotto da Phillips nel 1974 e successivamente reso celebre da Luck e Vogel nel 1997, offre un quadro analitico raffinato per indagare la capacità di immagazzinamento temporaneo delle informazioni visive. L'architettura del paradigma si articola in più fasi sequenziali, a partire dalla fase di *memory array*, in cui al partecipante viene richiesto di memorizzare una quantità variabile di elementi presentati sullo schermo. In seguito, gli stimoli vengono immagazzinati in memoria di lavoro per un intervallo di ritenzione (*blank*), per poi essere ripresentati nella fase di *test array* nella stessa condizione originaria o in una condizione modificata (stessa posizione ma varia il colore di un elemento).

All'interno della letteratura scientifica, emergono due principali versioni di questo compito, denominate come *single-probe recognition* e *whole-display recognition*. Nella prima delle due il partecipante è istruito a memorizzare un solo elemento tra gli oggetti presenti nella schermata iniziale del *memory array* e successivamente solo quest'ultimo elemento può essere modificato, mentre tutti gli altri rimangono inalterati. Al contrario, la variante *whole-display recognition* richiede al soggetto sperimentale di memorizzare l'intero insieme di elementi presentati nella schermata, senza sapere quale tra questi sarà soggetto a modifiche. Si osservano prestazioni inferiori in questa seconda modalità, rispetto alla versione di *single-probe recognition*, in quanto il soggetto sperimentale non è a conoscenza in anticipo di quale elemento tra quelli presentati nel *memory array* potrà in seguito essere modificato.

1.2. Acuità numerica

L'acuità numerica rappresenta la capacità di un individuo di discriminare tra insiemi di quantità differenti di elementi in condizioni dove, a causa dell'elevata numerosità, non è possibile effettuare il conteggio. Un esempio di situazione quotidiana in cui tale

competenza entra in gioco si verifica quando ci viene chiesto di stimare la numerosità delle persone presenti in un'aula universitaria o in una piazza. Nonostante la risposta fornita possa non essere accurata, il nostro sistema cognitivo è in grado, mediante una breve osservazione, di identificare una quantità numerica che approssima il numero effettivo di persone presenti.

Nel processo atto a fornire tale stima, ci affidiamo a una fase di elaborazione della numerosità che precede la simbolizzazione e che è identificata dagli studiosi come “senso del numero”. Il senso del numero, come messo in luce in letteratura, sembra essere un'abilità filogenetica che, in maniera più o meno accurata, accomuna diverse specie animali. Sono diversi gli studi su pulcini (Rugani, 2013), lumache (Bisazza & Gatto, 2021), rane (Stancher et al., 2015), corvi (Bogale et al., 2014) e scimmie (Hauser et al., 2000) che confermano quanto sostenuto.

La presenza del senso del numero in una quantità così elevata di organismi differenti è attribuibile alla sua intrinseca natura altamente adattiva, la quale consente all'individuo di ottimizzare la sua interazione con l'ambiente circostante e di adottare decisioni che favoriscono una maggiore probabilità di sopravvivenza. In linea con tale prospettiva evolucionista, la capacità di distinguere due insiemi di numerosità diverse risulta già presente a uno stadio precoce dello sviluppo umano. Si osserva infatti come i bambini siano in grado di discriminare due grandezze diverse già a partire dalle prime tre ore di vita (Izard et al., 2009), per poi migliorare le proprie prestazioni prima del compimento dei dodici mesi, passando dalla discriminazione di due insiemi che presentano tra loro un rapporto di elementi pari a 1:2 ad uno con un rapporto di 2:3 (Lipton & Spelke, 2003). In seguito, questa abilità presenta tipicamente un progressivo affinamento durante l'infanzia, fino a raggiungere il suo massimo sviluppo nell'età adulta, con la possibilità di discriminare correttamente tra insiemi con un rapporto di 9:10 con buona accuratezza (Halberda & Feigenson, 2008).

Il paradigma sperimentale che più comunemente viene utilizzato per sondare l'acuità numerica consiste nel confrontare due differenti insiemi (*arrays*) di oggetti simili, ad esempio insiemi di pallini o quadratini, dove al partecipante viene chiesto di determinare quale dei due presenti una maggiore numerosità. È fondamentale sottolineare che l'esposizione dei due insiemi debba avvenire per un breve intervallo di tempo, o istruendo

il soggetto a rispondere il prima possibile, in modo da precludere il conteggio degli elementi, in quanto si tratterebbe di un'operazione che richiede l'utilizzo dell'attenzione. Dipendentemente dalla quantità di elementi presentati sui due insiemi, entrano in gioco due effetti, denominati rispettivamente effetto distanza (Moyer & Landauer, 1967) ed effetto grandezza (Moyer & Landauer, 1967). Il primo sostiene che all'incremento della differenza di numerosità proposta tra i due insiemi corrispondano migliori prestazioni dei soggetti (es. risulta più difficile distinguere tra 16:17 rispetto a 16:20). L'effetto grandezza afferma invece che, a parità di differenza di numerosità tra due coppie di insiemi, l'accuratezza e i tempi delle risposte peggiorano all'aumentare di elementi presenti nei due insiemi (es. sarà più difficile distinguere la numerosità tra 16:14 rispetto a quella tra 6:4).

Infine, va specificato che nei compiti di acuità numerica per via della numerosità elevata, e quindi dell'impossibilità di enumerare in tempi brevi il numero di pallini presentati, viene attivato un sistema chiamato in letteratura *ANS* (*approximate number system*) (Feigenson et al., 2004). Tale sistema, secondo numerose evidenze scientifiche, differisce da un differente sistema denominato *OTS* (*object tracking system*) (Feigenson et al., 2004), che è implicato in compiti dove la numerosità è minore a 3-4 elementi e permette un'alta accuratezza delle risposte con tempi di reazione molto bassi. L'*OTS* è il focus di studi riguardanti il *subitizing*, un compito in cui i partecipanti devono riconoscere rapidamente e con precisione la quantità di un numero limitato di oggetti o elementi.

1.3. Scopo della ricerca

Nello studio di Piazza et al. (2011), menzionato nel paragrafo introduttivo, è stata messa in relazione la memoria di lavoro, sondata attraverso il paradigma di *change detection*, rispettivamente con un compito di *subitizing* e uno di acuità numerica. L'esperimento di *subitizing* richiedeva ai partecipanti di enumerare il più velocemente possibile la quantità di quadratini colorati, che variava da 1 a 8, presentata sullo schermo per un tempo di esposizione pari a 250 ms. Il secondo compito invece riguardava la capacità di discriminare la numerosità maggiore tra due insiemi di elementi, individuando, attraverso una risposta comportamentale, l'insieme più numeroso. I risultati ottenuti da Piazza et al.

(2011) riportano una correlazione positiva tra il compito di *subitizing* ($R = 0.73$, $p = 0.001$) e la WM, mentre risulta assente la correlazione tra la WM e il compito di acuità numerica ($R = 0.07$, $p = 0.80$).

In particolare, il presente elaborato sperimentale intende focalizzarsi su quest'ultima assenza di correlazione (acuità numerica e WM), con l'obiettivo di indagarne le ragioni e migliorare la metodologia utilizzata, nonché corroborare la validità del risultato ottenuto da Piazza et al. (2011). Un'analisi dettagliata dello studio pregresso ci induce a pensare che metodologia e calcolo relativo agli indici *Kmax* e di acuità visiva estratti siano per alcuni aspetti non del tutto affidabili. Per citarne alcuni, sono solo 16 i soggetti che hanno preso parte all'esperimento di Piazza et al. (2011), suggerendo che il campione fosse limitato e poco rappresentativo. In secondo luogo, si possono individuare divergenze rispetto alla metodologia classica utilizzata nel compito di *change detection*.

Infatti, nel paradigma di *change detection* il *memory array* è stato presentato con un tempo di esposizione di 700 ms. Tipicamente in letteratura l'intervallo di presentazione del *memory array* è di una durata inferiore, affinché il partecipante non abbia il tempo di direzionare lo sguardo verso gli elementi da memorizzare e si evitino inoltre altre potenziali strategie di codifica dell'informazione presentata. Un tempo limitato di esposizione rende ad esempio ardua una codifica semantica dell'informazione visiva nonché una ricodifica fonologica della stimolazione presentata, se la stimolazione è denominabile (Luria et al., 2010).

In aggiunta, nell'ambito della fase di analisi dati, l'elaborazione del parametro *Kmax*, che rappresenta la massima quantità di elementi che la memoria di lavoro di un individuo è in grado di contenere, è stata condotta in modo inadeguato. Piazza et al. (2011) hanno calcolato *Kmax* utilizzando la formula proposta da Cowan (2001) piuttosto che quella proposta da Pashler (1988). Questo errore è stato ben descritto da Rouder et al. (2011), i quali hanno dimostrato che, nei contesti in cui il paradigma del compito di *change detection task* viene presentato come *single-probe recognition*, la formula sviluppata da Cowan (2001) costituisce l'opzione più idonea per stimare i limiti della capacità della memoria di lavoro visiva. Al contrario, nell'ambito del presente esperimento in cui è stato adottato il paradigma *whole-display recognition*, si suggerisce l'adozione della formula proposta da Pashler (1988).

Infine, sempre al fine di favorire una corretta esplorazione dei limiti di capacità della memoria di lavoro visiva, sarebbe opportuno analizzare i valori massimi di K quando il *set-size* di elementi da memorizzare supera il limite massimo di capacità di memoria (3-4 elementi), anziché calcolare la media dei valori di K basati su un *set-size* che varia da 1 a 8, come riportato nell'esperimento di Piazza et al. (2011) (Balaban et al., 2019).

2. Materiali e metodi

2.1. Campione sperimentale

Hanno partecipato alla ricerca 44 studenti dell'Università di Padova (27 maschi e 17 femmine), ignari dei fini sperimentali, che sono stati convocati presso il laboratorio "Attenzione e percezione" del Dipartimento di Psicologia dello Sviluppo e della Socializzazione. I soggetti, di età media pari a 22.4 anni ($SD = 2.1$), hanno firmato un modulo di consenso informato prima di svolgere l'esperimento. Il protocollo sperimentale è stato approvato dal comitato etico locale (n. protocollo 4683).

Dal campione iniziale sono stati rimossi 5 partecipanti, in quanto presentavano dati con scarsa accuratezza. 3 soggetti riportavano una percentuale troppo bassa di risposte corrette nel compito di *change detection* e i restanti 2 presentavano dei valori che differivano di 3 o più deviazioni standard dalla media nel compito di acuità numerica. Considerando i soggetti esclusi, il campione finale di soggetti era costituito da un totale di 40 partecipanti, dei quali 16 femmine e 24 maschi (età media = 22.6, $SD = 2.1$). Ogni partecipante, neurologicamente sano, era dotato di vista normale o corretta da lenti, con normale percezione del colore.

2.2. Stimoli e procedure

L'esperimento è consistito nella somministrazione dei due compiti: di *change detection* e di confronto di grandezze numeriche (*dots comparison*), in modo alternato tra i partecipanti.

In entrambi i compiti richiesti i partecipanti sono stati posti a circa 65 cm di distanza da un display a 24 pollici con un rate di refresh pari a 60Hz. Gli esperimenti sono stati presentati attraverso l'utilizzo del software *E-Prime 2 (Psychology Software Tools)*. Prima di ogni esperimento abbiamo presentato le istruzioni, seguite da una fase di pratica di 16 trials in modo da permettere al partecipante di prendere familiarità con le richieste

dei compiti. Per entrambi gli esperimenti è stato espressamente chiesto di cercare di mantenere lo sguardo il più possibile sul punto di fissazione ($.8^\circ$) posto al centro dello schermo per tutta la durata del compito.

2.2.1. Memoria di lavoro visiva

Il compito di *change detection* (Fig 1) consisteva nella presentazione di un numero variabile di quadratini (*memory array*), per poi, dopo un intervallo di conservazione, essere ripresentati nella stessa condizione originaria per posizione e colore, oppure in una condizione modificata (*test array*). Nella condizione di modifica nel 50% dei casi uno solo dei quadratini esposti poteva variare di colore, ma mantenendo la stessa posizione originaria.

Ogni prova è iniziata premendo la barra di spazio sulla tastiera, dopo la quale è apparso il punto di fissazione ($.8^\circ$) posizionato al centro dello schermo per una durata casualmente variabile tra i 900-1000ms. In seguito, nella fase di *memory array* venivano presentati due, tre o cinque quadratini randomizzati attorno al punto di fissazione. I quadratini apparivano su uno sfondo nero (RGB: 40, 40, 40) e variavano casualmente tra i seguenti 11 colori: blu (RGB: 0, 0, 255), marrone (RGB: 157, 0, 23), arancio (RGB: 255, 128, 0), viola (RGB: 128, 0, 255), verde scuro (RGB: 30, 140, 60), ciano (RGB: 0, 255, 255), rosa (RGB: 255, 174, 201), magenta (RGB: 255, 0, 255), giallo (RGB: 255, 255, 0), rosso (RGB: 255, 0, 0) e verde chiaro (RGB: 0, 255, 0). Gli stimoli erano disposti in posizioni casuali in un rettangolo di grado visivo pari a $5^\circ \times 5^\circ$, dove la minima distanza tra il punto di fissazione e il quadrato più vicino a quest'ultimo era maggiore di 1.3° . Inoltre, è stata posta una distanza minima tra gli angoli in alto a sinistra di due stimoli adiacenti, pari a $1,5^\circ$. Dopo l'intervallo di conservazione pari a 900 ms i partecipanti nella fase di *test array* erano istruiti a fornire una risposta comportamentale premendo il pulsante "1" o "2" della tastiera, segnalando in questo la presenza o meno di cambiamento.

L'associazione del pulsante "1" al cambiamento e del "2" al non cambiamento era alternata sistematicamente tra i vari soggetti. Nel fornire la risposta non sono stati imposti limiti di tempo. Al termine di ogni prova, il partecipante aveva un feedback in base alla risposta fornita: in caso di risposta corretta il punto di fissazione posto al centro dello

schermo manteneva il segno (+), mentre in caso di risposta errata appariva nella stessa posizione il segno (-). Complessivamente, l'esperimento era composto da 12 blocchi di 16 trials ciascuno, per un totale di 192 prove.

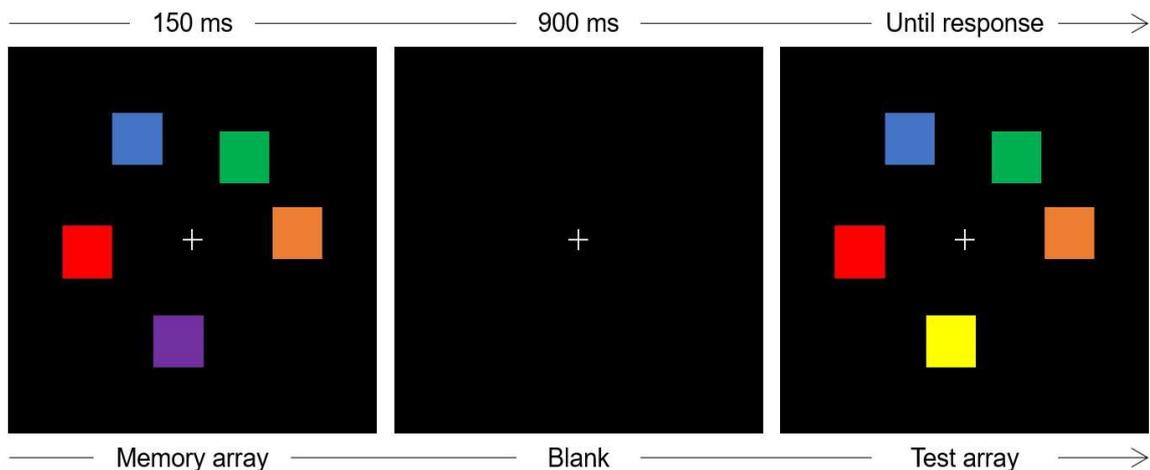


Fig. 1: Nel paradigma illustrato in figura il partecipante è istruito a guardare il punto di fissazione e a memorizzare i quadratini presentati per 150 ms (*memory array*). In seguito, dopo un intervallo di ritenzione pari a 900 ms (*blank*), ai partecipanti è richiesto di rilevare o meno la presenza di un cambiamento di colore di un quadratino (*test array*). Nel caso illustrato nella figura, il cambiamento c'è, ed è costituito dal quadratino viola che cambia colore in giallo tra *memory* e *test arrays*.

2.2.2. Acuità numerica

Nel secondo compito (Fig. 2) veniva richiesto al soggetto di individuare quale tra le due schermate proposte a sinistra e a destra del punto di fissazione presentasse il maggior numero di pallini. Ogni prova, a differenza dell'esperimento di WM, aveva inizio automaticamente senza dover premere la barra spaziatrice. Dopo un breve intervallo di tempo comparivano i due *array* per una durata di 2000 ms, intervallo di tempo entro al quale i partecipanti dovevano fornire una risposta premendo o il tasto "A" (più numeroso insieme a sinistra) o il tasto "L" (più numeroso insieme a destra). Il tempo limitato entro il quale bisognava fornire la risposta è stato impostato per evitare che i soggetti potessero effettuare un'operazione di *counting*.

Uno dei due *array* presentava sempre 16 o 32 punti e veniva definito come numerosità di riferimento (n_1), alla quale era associato un insieme di numerosità che variava casualmente da prova a prova. L'*array* associato alla numerosità di riferimento di 16 punti conteneva un insieme di punti (n_2) con valori compresi tra 12 e 20 (12, 13, 14, 15, 17, 18, 19, o 20), mentre per la numerosità di riferimento di 32 punti, i valori di n_2 erano il doppio di quelli associati alla numerosità di riferimento di 16 (24, 26, 28, 30, 34, 36, 38 o 40). In totale le condizioni sperimentali erano 16.

Le variabili percettive sono state assegnate casualmente in modo da mantenere costante in metà delle prove la dimensione dei puntini dell'*array* non di riferimento (n_2), mentre, nella restante metà, mantenere invariata la dimensione dell'area relativa allo stesso *array* (n_2). Invece, per l'insieme di riferimento (n_1) questi parametri variavano simultaneamente. La modifica delle variabili sperimentali è stata effettuata attraverso la *toolbox di Matlab CUSTOM* (De Marco & Cutini, 2020) per evitare che i soggetti potessero basare le proprie risposte su parametri non numerici (Dehaene et al., 2005). Come nel compito di working memory, i soggetti ricevevano un feedback istantaneo circa la correttezza (+) o meno (-) della risposta. In totale l'esperimento era composto da 12 blocchi di 16 prove ciascuno, per una somma complessiva di 192 trial.

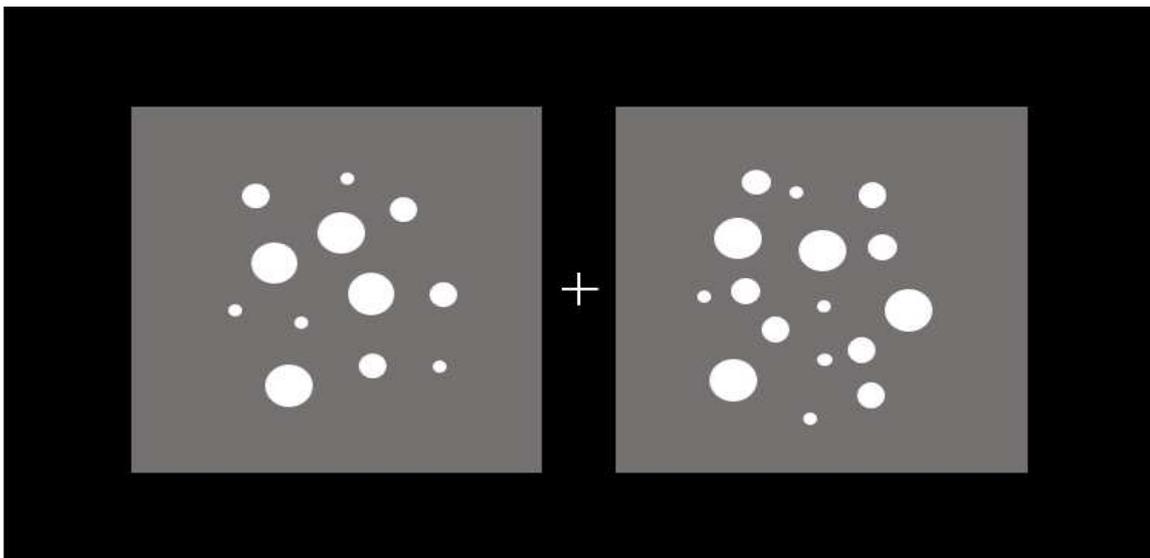


Fig. 2: Esempio del compito di acuità numerica, nel quale al soggetto è richiesto di guardare il punto di fissazione al centro dello schermo e selezionare entro 2000ms l'insieme che presenta un maggior numero di elementi.

3. Risultati

3.1. Change detection

I dati dei partecipanti relativi all'esperimento di WM sono stati riportati su un file di testo e poi analizzati mediante l'utilizzo del software *R studio*. La proporzione di accuratezza dei valori di K calcolata è stata sottoposta a un test *ANOVA* per i vari *set-size* (2,3,5), individuando una differenza statisticamente significativa ($F(2, 80) = 209.4, \eta^2_p = .840, p < .001$). Per comprendere meglio tale differenza sono stati condotti tre t-test con *false discovery rate* (FDR, Benjamini & Hochberg, 1995). Dai risultati di questi test emerge che l'accuratezza dei valori di K per 2 item (.95) è maggiore se comparata alle prove dove è stato richiesto di memorizzare 3 item (.91); $t(40) = 9.3, p < .001$ e 5 items (.8, $t(40) = 14.3, p < .001$) e l'accuratezza con *set-size* 3 è maggiore se comparata a quella con *set-size* 5 ($t(40) = 15.5, p < .001$).

La stima di K per i diversi *set-size* è stata calcolata attraverso la formula di Pashler (1988):

$$\hat{k} = N \left(\frac{\hat{h} - \hat{f}}{1 - \hat{f}} \right), k \leq N, \hat{h} \geq \hat{f}, \hat{f} < 1.$$

dove N rappresenta il *set-size* di item da memorizzare; h corrisponde al numero di *hit*, ovvero i casi in cui il soggetto ha indicato la presenza di un cambiamento e quest'ultimo è effettivamente avvenuto. Il parametro f rappresenta il numero di *false alarm* (falsi allarmi), ovvero i casi in cui il soggetto ha segnalato la presenza di cambiamento quando questo in realtà non è presente. È bene precisare che il numero di *hit* nella formula sopra riportata è in rapporto alle condizioni totali dove avviene cambiamento (*hit* + *miss*), mentre il numero di *false alarm* è in rapporto alle condizioni dove non avviene cambiamento (*false alarm* + *correct rejection*). Nel complesso, la formula moltiplica il numero del *set-size* per una frazione che presenta al numeratore tutti i casi dove il soggetto ha risposto segnalando il cambiamento ($h + f$) e al denominatore i casi di *correct rejection* ($1 - f$), nei quali non si è verificato un cambiamento e il partecipante ha segnalato correttamente che non è avvenuto.

Una volta ottenuto il valore di K per i *set-size* (2, 3, 5), è stata condotta un'analisi della varianza *ANOVA* per valutare la presenza di differenze statisticamente significative tra i valori di K associati ai diversi *set-size*. I risultati dell'analisi indicano l'esistenza di una rilevante differenza statistica in termini di capacità di memoria tra i vari gruppi ($F(2, 80) = 128.6, \eta^2p = .974, p < .001$). Successivamente, seguendo un approccio analogo a quello adottato per il calcolo dell'accuratezza, è stato condotto un t-test con *false discovery rate* (FDR; Benjamini & Hochberg, 1995). Da questo test emerge che la capacità di memoria per il *set-size* 2 (1.9) risulta inferiore rispetto a quella associata al *set-size* 3 (2.8; $t(40) = -42.4, p < .001$) e al *set-size* 5 (4.4; $t(40) = -31.4, p < .001$). Inoltre, la capacità di memoria per il *set-size* 3 risulta inferiore rispetto al valore di K riferito ai casi con 5 elementi ($t(40) = -42.9, p < .001$).

Al fine di aumentare la validità dei dati raccolti, è stata effettuata un'analisi di correlazione dei valori di K tra i diversi *set-size*, seguendo il metodo adottato da Balaban et al. (2019). I risultati ottenuti da Balaban et al., basati su un ampio campione di 3800 individui, hanno dimostrato che il parametro K per ogni *set-size* correla positivamente con quello di tutti gli altri *set-size*. Ciò si verifica in quanto il valore K quantifica gli elementi che un soggetto può mantenere in memoria di lavoro: dunque un soggetto che presenta buoni valori nella memorizzazione di un determinato *set-size* allo stesso tempo avrà buone prestazioni anche quando in numero di item varia da prova a prova. I dati che abbiamo raccolto, come si può vedere in fig.3, sono in linea con quanto affermato da Balaban e i suoi colleghi.

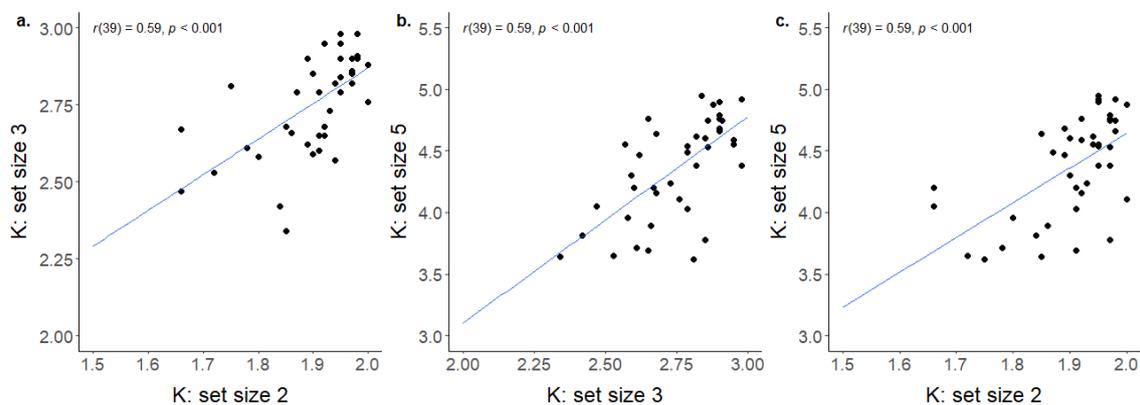


Fig. 3: Correlazioni tra i valori di K per i diversi *set-size* e relative linee di regressione stimate (di colore blu). Pannello a: correlazione tra *set-size* 2 e 3; Pannello b: correlazione tra *set-size* 3 e 5; Pannello c: correlazione tra *set-size* 2 e 5.

In aggiunta, è stata effettuata una valutazione della qualità del segnale e della capacità di discriminare le rappresentazioni nella memoria di lavoro visiva mediante il calcolo del parametro d' (Green & Swets, 1974). I valori di d' esprimono la capacità individuale di discriminare tra gli elementi memorizzati e quelli non ricordati, consentendo quindi di misurare l'abilità di distinguere tra tali stati delle tracce immagazzinate nella memoria di lavoro visiva. La formula utilizzata per il calcolo di d' è la seguente:

$$d' = Z(\hat{h}) - Z(\hat{f})$$

dove $Z(\hat{h})$ e $Z(\hat{f})$ sono rispettivamente i punteggi Z del tasso di successo e del tasso di falsi allarmi. Come avvenuto nello studio di Balaban et al. (2019), si è rilevato un decremento del parametro d' all'aumentare delle dimensioni del *set-size* (d' alla dimensione del *set-size* 2 = 3.53; d' alla dimensione del *set-size* 3 = 2.85; d' alla dimensione del *set-size* 5 = 2.01): ciò suggerisce una progressiva diminuzione della potenza del segnale di memoria al crescere delle dimensioni degli elementi da immagazzinare in memoria.

Infine, con l'obiettivo di svolgere un'analisi più dettagliata e precisa dei limiti della memoria di lavoro visiva tra i partecipanti sono stati stimati i valori individuali di K per un ipotetico *set-size* 6. Per conseguire ciò, abbiamo adattato quattro modelli lineari, ciascuno basato su una metrica specifica (media di K , deviazione standard, asimmetria e indice di curtosi) utilizzando i dati raccolti nelle dimensioni precedenti dei vari *set-size*. I valori delle varie metriche adattate al modello rispettivamente per i *set-size* 2, 3 e 5: erano: deviazione standard (0.09, 0.16 e 0.41), asimmetria (-1.41, -0.81 e -0.42) e curtosi (4.1, 3.0 e 1.9). Sfruttando le relazioni osservate nelle dimensioni dei *set-size* precedenti, i modelli hanno in questo modo stimato possibili valori per un ipotetico *set-size* di 6 (media di K = 5.2, deviazione standard = 0.5, asimmetria = -0.12, curtosi = 1.2).

A partire da questi valori, attraverso il linguaggio di programmazione R e la funzione *rpearson* del pacchetto *PearsonDS*, abbiamo generato casualmente decine di migliaia di distribuzioni dei ai 41 valori individuali di K con *set-size* 6 (impostando la generazione automatica con valori compresi tra 0 e 6) e su questi è stata fatta una media dei valori simulati ottenendo così il valore ipotetico a un *set-size* di 6.

L'analisi dei dati simulati per la dimensione del set 6 suggerisce che alcuni partecipanti non hanno ancora raggiunto la loro capacità massima di memoria, ma è tuttavia importante notare che molti partecipanti hanno mostrato una capacità di memorizzazione di circa 5 elementi (mediana dei dati simulati per il *set-size* 6 pari a 5.03).

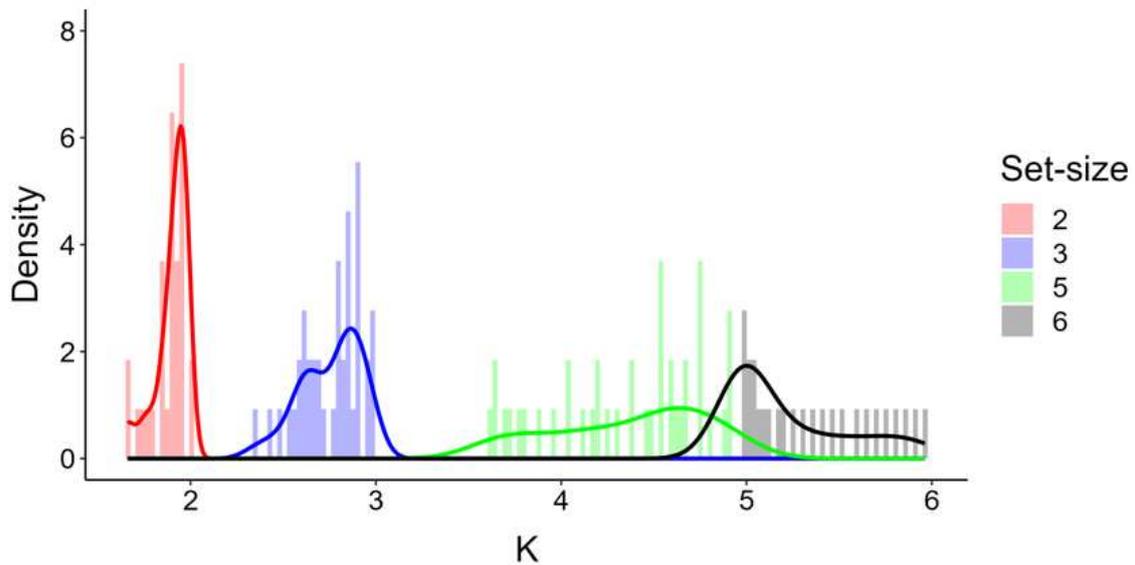


Fig. 4: Frequenza/densità dei dati raccolti: rosso (*set-size* 2), blu (*set-size* 3), verde (*set-size* 5). Il nero rappresenta i dati simulati con *set-size* 6.

3.2. Confronto di numerosità

L'acuità numerica è stata calcolata anch'essa mediante l'utilizzo del software *R studio* insieme all'utilizzo di *MATLAB*. Poiché segue le stesse leggi di altre grandezze psicofisiche, è stata stimata attraverso la funzione di *weber*:

$$k = \Delta I / I$$

dove k è la costante di *weber* e I corrisponde allo stimolo di confronto, che nello studio in questione corrisponde alla numerosità di riferimento ($n_1 = 16$ o 32 elementi). Inoltre, ΔI coincide con la JND (just notable difference), che costituisce l'incremento che innalza la percentuale di risposte "insieme di confronto (n_2) maggiore dell'insieme di riferimento (n_1)" dal caso (50%) a un valore convenzionalmente accettato come identificativo di una discriminazione sufficientemente attendibile (75%).

Il parametro k nell'ambito del nostro esperimento corrisponde al coefficiente di acuità numerica (ω), dove valori minori di ω indicano una maggiore abilità del soggetto nella discriminazione tra due quantità numeriche. Prendendo in considerazione tutti i 40 i soggetti è stato calcolato un valore di ω medio pari a 0.20 (SD = .07, data fit: $R^2 = .81$, SD = .14). Infine, per mettere in relazione l'acuità numerica di ogni soggetto con la WM è stata calcolata anche la differenza $1 - \omega$, dove valori più grandi di $1 - \omega$ costituiscono una maggiore acuità numerica.

3.3. Correlazione tra K_{max} e acuità visiva

Una volta calcolati i valori di K e il valore dell'acuità numerica per ogni soggetto è stata effettuata una correlazione tra queste due componenti. In particolare, i valori dell'acuità numerica sono stati messi in relazione rispettivamente con la K_{max} (*set-size* 5) e la differenza tra K_{max} e i valori di K nelle prove con *set-size* 2. Al fine di accrescere la solidità delle evidenze riguardo alla presenza o all'assenza di correlazione, sono stati calcolati i fattori di Bayes (Bf_{01}), utilizzando una distribuzione beta con scala pari a $1/\sqrt{3}$. La scelta di adottare questo tipo di distribuzione, definita in letteratura come “ampia” (Ly, Verhagen, & Wagenmakers, 2016), è stata presa con il fine di considerare ogni valore di correlazione e non limitarsi a studiare solo un intervallo ristretto di valori.

I risultati del presente esperimento, in linea con quanto trovato da Piazza et al. (2011), hanno confermato l'assenza di una correlazione significativa tra l'acuità numerica e la capacità di memoria di lavoro visiva (fig.5). Inoltre, l'analisi dei fattori di Bayes ha irrobustito e supportato tale risultato, indicando che l'evidenza a favore dell'assenza di correlazione in entrambi i test era “sostanziale” (Jeffreys, 1939).

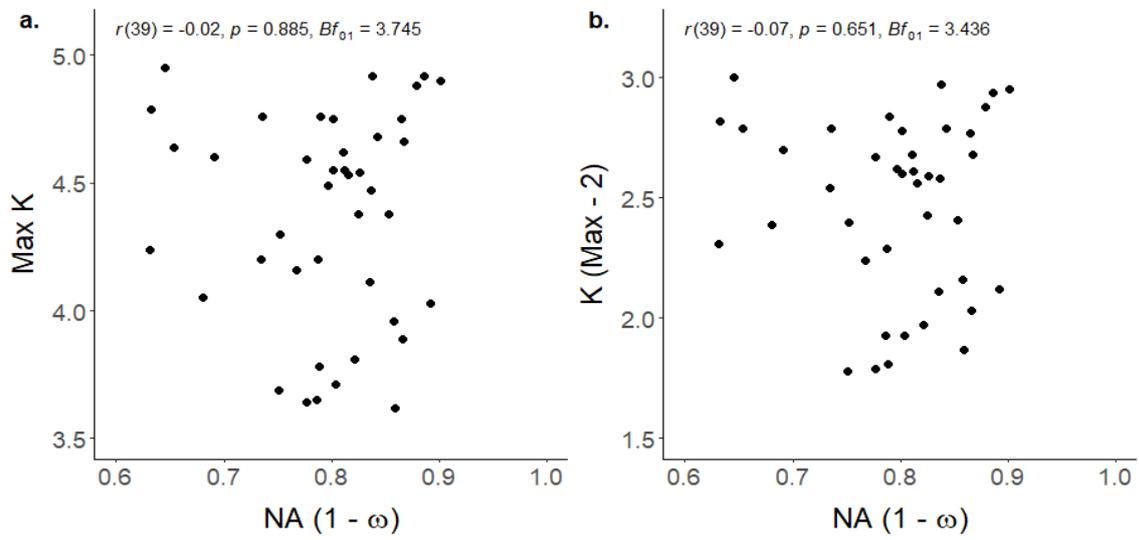


Fig. 5: Corplot che mette in relazione i valori di K stimati e l'acuità numerica $NA (1 - \omega)$. Pannello a: acuità numerica e valori di $Max K$ (*set-size* 5); Pannello b: acuità numerica e valori di $K (Max - 2)$.

4. Discussione

Lo studio condotto è riuscito nel suo intento di replicare l'esperimento di Piazza et al. (2011), affinando la metodologia utilizzata e portando dati scientificamente più validi e consistenti, che confermano l'assenza di correlazione tra le due componenti studiate.

Per quanto concerne l'esperimento di WM visiva è stata osservata una differenza significativa tra i partecipanti nelle stime della capacità di memoria di lavoro (K) all'aumentare degli item da memorizzare (2, 3, 5). Inoltre, come svolto da Balaban et al. (2019), è stata trovata una correlazione positiva tra i valori di K per i vari *set-size*. Tale constatazione sottolinea la presenza di una relazione coerente tra i valori di K per i vari item, confermando l'affidabilità delle misurazioni effettuate. Con il fine di attribuire maggiore validità statistica ai dati raccolti nell'esperimento di *change detection*, è stato calcolato l'indice d' come misura della capacità di discriminare in modo affidabile tra elementi ricordati e non ricordati, consentendo una stima della potenza del segnale di memoria. I risultati hanno rivelato una significativa diminuzione di d' all'aumentare della dimensione del *set-size*, indicando che la discriminabilità e l'affidabilità delle rappresentazioni nella memoria diminuiscono con l'incremento del numero di elementi da ricordare. Anche nell'esperimento di acuità numerica, in linea con quanto riportato in letteratura, abbiamo ottenuto buoni valori medi di ω tra i partecipanti (0.20). Infine, per rafforzare il supporto statistico al risultato nullo, è stata condotta un'analisi bayesiana, dove l'utilizzo di questa metodologia analitica fornisce un prezioso contributo all'interpretazione delle evidenze a sostegno dell'ipotesi nulla (assenza di correlazione).

I dati ottenuti suggeriscono che la WM visiva e l'acuità numerica utilizzino diversi network neurali tra loro e che la loro natura e traiettoria evolutiva segua strade differenti. Da un lato la WM visiva costituisce uno degli aspetti cardine della cognizione umana (come comunemente intesa), per le numerose abilità che predice e con cui è correlata, e rappresenta dunque un prezioso strumento per cogliere le differenze interindividuali (Adam et al., 2018; Engle et al., 1999; Krumm et al., 2008; Xu et al., 2018). Dall'altro, l'acuità numerica, come riportato da numerosi studi, è un'abilità filogeneticamente antica

che accomuna numerose specie animali, dagli invertebrati all'uomo, e trova la sua ragione di esistere nella sua natura fortemente adattiva (Dehaene et al., 1998). Sembrerebbe dunque che queste due abilità ricoprano un'organizzazione gerarchica differente nell'architettura cognitiva umana con l'acuità numerica che è gerarchicamente superiore e non influenzata dalla memoria di lavoro.

Nonostante tali ipotesi emergano come le interpretazioni teoriche più immediate e plausibili per fornire una spiegazione dell'assenza di relazione tra le due abilità studiate, mirando a potenziare la comprensione teorica del risultato ottenuto e a fornire stimoli per la formulazione di future indagini, ho cercato di individuare possibili scenari in cui possa manifestarsi un'associazione positiva tra le due componenti oggetto di studio. Consultando i principali studi in letteratura in merito a queste abilità, alla loro relazione con ulteriori variabili e alle aree cerebrali da esse attivate, l'indipendenza tra tali componenti appare peculiare a causa di due aspetti da tenere in considerazione, che risultano controintuitivi alla luce di quanto ottenuto nel presente esperimento.

In primo luogo, risulta singolare come numerosi studi di neuroimmagine riportino un'attivazione di aree cerebrali sorprendentemente simili tra le due componenti in questione. La causa che spiega in termini di attivazione cerebrale i limiti di capacità della WM sembra essere un numero ristretto di neuroni appartenenti alla zona inferiore del solco intraparietale (IPS). L'attivazione di tali neuroni, come osservato in varie ricerche, aumenta di intensità con l'incremento del numero di elementi immagazzinati in memoria (Mitchell & Cusack, 2008; Xu & Chun, 2006; Todd & Marois, 2004). Questa stessa area implicata nell'attivazione della WM in relazione alla sua capacità limitata sembra essere al contempo la regione dove è localizzato l'*ANS*, implicato, nei compiti di acuità numerica con numerosità elevate. Infatti, in studi che prevedono l'utilizzo di questo sistema, come compiti di semplice osservazione di numerosità variabile (Piazza et al., 2004), oppure di confronto tra insiemi numericamente diversi (Eger et al., 2009), o per il calcolo approssimativo (Knops et al., 2009), si verifica un'attivazione in zone corticali localizzate nella posizione posteriore e centrale dell'IPS.

In secondo luogo, risulta controintuitivo spiegare come le due abilità sondate nel presente esperimento possano essere completamente indipendenti e, allo stesso tempo, essere entrambe in relazione con una terza variabile: le abilità matematiche. Per abilità

matematiche in letteratura si intende una serie di competenze e capacità avanzate legate alla comprensione e alla risoluzione di problemi matematici complessi. Esse, a fronte dei numerosi studi che mettono in luce una relazione positiva tra queste abilità e l'acuità numerica (Chen & Li, 2014; Fazio et al., 2014), e tra le stesse e la memoria di lavoro visuo-spaziale (Bull et al., 2008; Giofrè et al., 2018), possono costituire un'importante chiave di lettura per comprendere l'assenza di correlazione.

Per decifrare e conoscere meglio le interconnessioni tra queste tre abilità, ho consultato i dati di numerosi studi, con il fine di individuare quali componenti dell'acuità numerica e della memoria di lavoro visuo-spaziale giocassero un ruolo maggiore nelle abilità matematiche. Tra le varie evidenze scientifiche prese in esame, ho riscontrato che le ricerche più recenti (Silverman & Ashkenazi, 2022) riportano come la WM visuo-spaziale sia in relazione con le abilità matematiche superiori solo per quanto riguarda la componente spaziale della memoria di lavoro (che concerne la posizione degli oggetti), e non la componente della memoria di lavoro prettamente visiva (relativa a dimensione e colore). Alla luce di questi dati, è bene notare che nel compito di *change detection* descritto nel capitolo relativo alla metodologia, i partecipanti erano istruiti a memorizzare informazioni relative alla componente prettamente visiva (colore dei quadratini), e non quanto concerne la memoria di lavoro spaziale (la posizione degli elementi rimaneva invariata).

La classificazione della memoria di lavoro visuo-spaziale nelle sue due sottocategorie spaziale e visiva trova riscontro nei dati raccolti in numerose ricerche di neuroimmagine e studi cognitivi, i quali documentano l'attivazione di distinti circuiti neuronali in base alla tipologia dell'informazione visiva memorizzata (Carlesimo et al., 2001; Darling et al., 2005). Nel caso in cui l'informazione immagazzinata riguardi aspetti qualitativi come colore, dimensione e forma, si assiste all'attivazione dei circuiti connessi alla memoria di lavoro visiva. Al contrario, se l'informazione è costituita da dettagli spaziali concernenti la posizione degli oggetti nello spazio, si osserva l'attivazione dei circuiti neuronali implicati nella memoria di lavoro spaziale.

Data la forte relazione che intercorre tra le abilità matematiche, sia con la memoria di lavoro nella sua componente spaziale che con l'acuità numerica, è ipotizzabile che l'assenza di relazione tra le due componenti studiate sia dovuta proprio al fatto che lo

studio nel paradigma di *change detection* sondava prevalentemente la componente visiva della memoria di lavoro (colore dei quadratini), mentre la sua componente spaziale (la posizione dei quadratini non era soggetta a modifiche) era indagata solo parzialmente.

Inoltre, in linea con quanto sostenuto da tale mia ipotesi, per quanto concerne il paradigma di acuità numerica, risulta più intuitivo ipotizzare un possibile coinvolgimento della memoria di lavoro spaziale, rispetto a quella visiva. Questo perché nel compito di *dots comparison* i partecipanti erano istruiti a focalizzarsi sulla numerosità degli elementi distribuiti nello spazio, tralasciando aspetti di natura qualitativa come la grandezza dei puntini. Allo stesso modo, nella vita quotidiana, quando ci è chiesto di fornire una stima della quantità di alunni presenti in un'aula, manipoliamo informazioni relative alla loro numerosità e alla posizione spaziale (in termini di vicinanza con cui le persone si distribuiscono nella stanza) e non ad aspetti qualitativi come l'altezza o il colore delle magliette indossate dalle persone.

A mio avviso, dunque, risulta prematuro trarre a conclusioni affrettate che, alla luce del dato ottenuto nel presente esperimento, considerano l'ANS come un sistema completamente disgiunto dalla memoria di lavoro, senza specificare se si tratti della sua componente spaziale o visiva. Risulterebbe quindi opportuno svolgere ulteriori studi che mettano in relazione l'acuità numerica con compiti di WM, nei quali sia più saliente la richiesta di memorizzazione di informazioni spaziali degli elementi e non il colore o la forma. Ciò potrebbe fornire un contributo importante per comprendere meglio la complessa interazione tra queste abilità cognitive nel contesto matematico.

In conclusione, il presente esperimento è riuscito nell'intento di fornire un dato statisticamente più valido e accurato relativo alla relazione tra l'NA e la WM visiva, che risulta assente. Tuttavia, i motivi che potrebbero spiegare il risultato ottenuto, a causa anche della natura correlazionale limitata dello studio, sono stati precedentemente discussi solo su un piano teorico e ipotetico e necessitano di ulteriori ricerche per comprendere meglio la natura e le ragioni che si celano dietro la singolare assenza di correlazione tra le due abilità.

5. Riferimenti bibliografici

Adam, K. C. S., Robison, M. K., & Vogel, E. K. (2018). Contralateral delay activity tracks fluctuations in working memory performance. *Journal of Cognitive Neuroscience*, 30(9), 1229–1240.

https://doi.org/10.1162/jocn_a_01233

Baddeley, A. (2003). Working memory: Looking back and looking forward. *Nature Reviews Neuroscience*, 4(10), 829–839.

<https://doi.org/10.1038/nrn1201>

Balaban, H., Fukuda, K., & Luria, R. (2019). What can half a million change detection trials tell us about visual working memory? *Cognition*, 191, 103984.

<https://doi.org/10.1016/j.cognition.2019.05.021>

Bays, P. M., Catalao, R. F. G., & Husain, M. (2009). The precision of visual working memory is set by allocation of a shared resource. *Journal of Vision*, 9(10), 7–7.

<https://doi.org/10.1167/9.10.7>

Bays, P. M., & Husain, M. (2008). Dynamic shifts of limited working memory resources in human vision. *Science*, 321(5890), 851–854.

<https://doi.org/10.1126/science.1158023>

Benjamini, Y., & Hochberg, Y. (1995). Controlling the false discovery rate: A practical and powerful approach to multiple testing. *Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Methodological)*, 57(1), 289–300.

<https://doi.org/10.1111/j.2517-6161.1995.tb02031.x>

Biancardi, A., Mariani, E., & Piazza, M. (2016). Intervento logopedico nei DSA la discalculia. *Casa editrice Erikson S.p.A.*, 17-44.

Bisazza, A., & Gatto, E. (2021). Continuous versus discrete quantity discrimination in dune snail (Mollusca: Gastropoda) seeking thermal refuges. *Scientific Reports*, 11(1).

<https://doi.org/10.1038/s41598-021-82249-6>

Bogale, B. A., & Sugita, S. (2013). Shape discrimination and concept formation in the jungle crow (*Corvus macrorhynchos*). *Animal Cognition*, 17(1), 105–111.

<https://doi.org/10.1007/s10071-013-0642-y>

Bull, R., Espy, K. A., & Wiebe, S. A. (2008). Short-term memory, working memory, and executive functioning in preschoolers: Longitudinal predictors of mathematical achievement at age 7 years. *Developmental Neuropsychology*, 33(3), 205–228.

<https://doi.org/10.1080/87565640801982312>

Carlesimo, G. A., Perri, R., Turriziani, P., Tomaiuolo, F., & Caltagirone, C. (2001). Remembering what but not where: independence of spatial and visual working memory in the human brain. *Cortex*, 37(4), 519–534.

[https://doi.org/10.1016/s0010-9452\(08\)70591-4](https://doi.org/10.1016/s0010-9452(08)70591-4)

Chen, Q., & Li, J. (2014). Association between individual differences in non-symbolic number acuity and math performance: A meta-analysis. *Acta Psychologica*, 148, 163–172.

<https://doi.org/10.1016/j.actpsy.2014.01.016>

Darling, S., Della Sala, S., Logie, R. H., & Cantagallo, A. (2005). Neuropsychological evidence for separating components of visuo-spatial working memory. *Journal of Neurology*, 253(2), 176–180.

<https://doi.org/10.1007/s00415-005-0944-3>

Dehaene, S., Kerszberg, M., & Changeux, J. P. (1998). A neuronal model of a global workspace in effortful cognitive tasks. *Proceedings of the National Academy of Sciences (USA)*, 95, 14529–14534.

<https://doi.org/10.1073/pnas.95.24.14529>

Eger, E., Michel, V., Thirion, B., Amadon, A., Dehaene, S., & Kleinschmidt, A. (2009). Deciphering cortical number coding from human brain activity patterns. *Current Biology*, 19(19), 1608–1615.

<https://doi.org/10.1016/j.cub.2009.08.047>

Emrich, S. M., Riggall, A. C., LaRocque, J. J., & Postle, B. R. (2013). Distributed patterns of activity in sensory cortex reflect the precision of multiple items maintained in visual short-term memory. *The Journal of Neuroscience*, 33(15), 6516–6523.

<https://doi.org/10.1523/jneurosci.5732-12.2013>

Engle, R. W., Tuholski, S. W., Laughlin, J. E., & Conway, A. R. A. (1999). Working memory, short-term memory, and general fluid intelligence: A latent-variable approach. *Journal of Experimental Psychology: General*, 128(3), 309–331.

<https://doi.org/10.1037/0096-3445.128.3.309>

Fazio, L. K., Bailey, D. H., Thompson, C. A., & Siegler, R. S. (2014). Relations of different types of numerical magnitude representations to each other and to mathematics achievement. *Journal of Experimental Child Psychology*, 123, 53–72.

<https://doi.org/10.1016/j.jecp.2014.01.013>

Feldmann-Wüstefeld, T., & Vogel, E. K. (2018). Neural evidence for the contribution of active suppression during working memory filtering. *Cerebral Cortex*, 29(2), 529–543.

<https://doi.org/10.1093/cercor/bhx336>

Feldmann-Wüstefeld, T. (2020). Neural measures of working memory in a bilateral change detection task. *Psychophysiology*, 58(1).

<https://doi.org/10.1111/psyp.13683>

Feigenson, L., Dehaene, S., & Spelke, E. (2004). Core systems of number. *Trends in Cognitive Sciences*, 8(7), 307–314.

<https://doi.org/10.1016/j.tics.2004.05.002>

Fukuda, K., & Woodman, G. F. (2017). Visual working memory buffers information retrieved from visual long-term memory. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 114(20), 5306–5311.

<https://doi.org/10.1073/pnas.1617874114>

Gorgoraptis, N., Catalao, R. F. G., Bays, P. M., & Husain, M. (2011). Dynamic updating of working memory resources for visual objects. *Journal of Neuroscience*, 31(23), 8502–8511.

<https://doi.org/10.1523/jneurosci.0208-11.2011>

Giofrè, D., Donolato, E., & Mammarella, I. C. (2018). The differential role of verbal and visuospatial working memory in mathematics and reading. *Trends in Neuroscience and Education*, 12, 1–6.

<https://doi.org/10.1016/j.tine.2018.07.001>

Green, D. M., & Swets, J. A. (1974). Signal detection theory and psychophysics. *Huntington (NY): Krieger*.

Hauser, M. D., Carey, S., & Hauser, L. B. (2000). Spontaneous number representation in semi-free-ranging rhesus monkeys. *Proceedings of the Royal Society of London. Series B: Biological Sciences*, 267(1445), 829–833.

<https://doi.org/10.1098/rspb.2000.1078>

Halberda, J., & Feigenson, L. (2008). Developmental change in the acuity of the “number sense”: The approximate number system in 3-, 4-, 5-, and 6-year-olds and adults. *Developmental Psychology*, 44(5), 1457–1465.

<https://doi.org/10.1037/a0012682>

Jeffreys, H. (1939). *Theory of probability* (III Ed.). New York (NY): Oxford University Press.

Jolicoeur, P., & Dell’Acqua, R. (1998). The Demonstration of short-term consolidation. *Cognitive Psychology*, 36(2), 138–202.

<https://doi.org/10.1006/cogp.1998.0684>

Knops, A., Thirion, B., Hubbard, E. M., Michel, V., & Dehaene, S. (2009). Recruitment of an area involved in eye movements during mental arithmetic. *Science*, 324(5934), 1583–1585.

<https://doi.org/10.1126/science.1171599>

Krumm, S., Ziegler, M., & Buehner, M. (2008). Reasoning and working memory as predictors of school grades. *Learning and Individual Differences*, 18(2), 248–257.

<https://doi.org/10.1016/j.lindif.2007.08.002>

Lipton, J. S., & Spelke, E. S. (2003). Origins of number sense. *Psychological Science*, 14(5), 396–401.

<https://doi.org/10.1111/1467-9280.01453>

Luck, S. J., & Vogel, E. K. (1997). The capacity of visual working memory for features and conjunctions. *Nature*, 390(6657), 279–281.

<https://doi.org/10.1038/36846>

Luck, S. J., & Vogel, E. K. (2013). Visual working memory capacity: from psychophysics and neurobiology to individual differences. *Trends in Cognitive Sciences*, 17(8), 391–400.

<https://doi.org/10.1016/j.tics.2013.06.006>

Luria, R., Sessa, P., Gotler, A., Jolicœur, P., & Dell'Acqua, R. (2010). Visual short-term memory capacity for simple and complex objects. *Journal of Cognitive Neuroscience*, 22(3), 496–512.

<https://doi.org/10.1162/jocn.2009.21214>

Ly, A., Verhagen, J., & Wagenmakers, E. J. (2016). Harold Jeffreys's default Bayes factor hypothesis tests: Explanation, extension, and application in psychology. *Journal of Mathematical Psychology*, 72, 19–32.

<https://doi.org/10.1016/j.jmp.2015.06.004>

Mitchell, D. J., & Cusack, R. (2007). Flexible, capacity-limited activity of posterior parietal cortex in perceptual as well as visual short-term memory tasks. *Cerebral Cortex*, 18(8), 1788–1798.

<https://doi.org/10.1093/cercor/bhm205>

Moyer, R. S., & Landauer, T. K. (1967). Time required for judgements of numerical inequality. *Nature*, 215(5109), 1519–1520.

<https://doi.org/10.1038/2151519a0>

Oberauer, K., Farrell, S., Jarrold, C., & Lewandowsky, S. (2016). What limits working memory capacity? *Psychological Bulletin*, 142(7), 758–799.

<https://doi.org/10.1037/bul0000046>

Pashler, H. (1988). Familiarity and visual change detection. *Perception & Psychophysics*, 44(4), 369–378.

<https://doi.org/10.3758/BF03210419>

Piazza, M., Facoetti, A., Trussardi, A. N., Berteletti, I., Conte, S., Lucangeli, D., Dehaene, S., & Zorzi, M. (2010). Developmental trajectory of number acuity reveals a severe impairment in developmental dyscalculia. *Cognition*, 116(1), 33–41.

<https://doi.org/10.1016/j.cognition.2010.03.012>

Piazza, M., Fumarola, A., Chinello, A., & Melcher, D. (2011). Subitizing reflects visuo-spatial object individuation capacity. *Cognition*, 121(1), 147–153.

<https://doi.org/10.1016/j.cognition.2011.05.007>

Piazza, M., & Izard, V. (2009). How humans count: numerosity and the parietal cortex. *The Neuroscientist*, 15(3), 261–273.

<https://doi.org/10.1177/1073858409333073>

Piazza, M., Izard, V., Pinel, P., Le Bihan, D., & Dehaene, S. (2004). Tuning curves for approximate numerosity in the human intraparietal sulcus. *Neuron*, 44(3), 547–555.

<https://doi.org/10.1016/j.neuron.2004.10.014>

Rouder, J. N., Morey, R. D., Morey, C. C., & Cowan, N. (2011). How to measure working memory capacity in the change detection paradigm. *Psychonomic Bulletin & Review*, 18(2), 324–330.

<https://doi.org/10.3758/s13423-011-0055-3>

Rugani, R., Cavazzana, A., Vallortigara, G., & Regolin, L. (2013). One, two, three, four, or is there something more? Numerical discrimination in day-old domestic chicks. *Animal Cognition*, 16(4), 557–564.

<https://doi.org/10.1007/s10071-012-0593-8>

Silverman, S., & Ashkenazi S., (2022). The differential relationship between visual and spatial working memory in children’s mathematics performance. *Trends in Neuroscience and Education*.

<https://doi.org/10.1016/j.tine.2022.100188>

Sprague, T. C., Ester, E. F., & Serences, J. T. (2014). Reconstructions of information in visual spatial working memory degrade with memory load. *Current Biology*, 24(18), 2174–2180.

<https://doi.org/10.1016/j.cub.2014.07.066>

Stancher, G., Rugani, R., Regolin, L., & Vallortigara, G. (2014). Numerical discrimination by frogs (*Bombina orientalis*). *Animal Cognition*, 18(1), 219–229.

<https://doi.org/10.1007/s10071-014-0791-7>

Todd, J. J., & Marois, R. (2004). Capacity limit of visual short-term memory in human posterior parietal cortex. *Nature*, 428(6984), 751–754.

<https://doi.org/10.1038/nature02466>

Wilken, P., & Ma, W. J. (2004). A detection theory account of change detection. *Journal of Vision*, 4(12), 11.

<https://doi.org/10.1167/4.12.11>

Xu, Z., Adam, K. C. S., Fang, X., & Vogel, E. K. (2018). The reliability and stability of visual working memory capacity. *Behavior Research Methods*, 50(2), 576–588.

<https://doi.org/10.3758/s13428-017-0886-6>

Xu, Y., & Chun, M. M. (2005). Dissociable neural mechanisms supporting visual short-term memory for objects. *Nature*, 440(7080), 91–95.

<https://doi.org/10.1038/nature04262>