Università degli Studi di Padova

Dipartimento di Matematica "Tullio Levi-Civita"
Corso di Laurea Magistrale in Matematica

# Costruzioni Geometriche indotte da Invarianti Topologici

*Relatore*:
**Prof. Ernesto C. Mistretta**

*Laureanda*:
**Claudia De Lazzari**
**1123132**

23 febbraio 2018

# Indice

# Introduzione

L'obbiettivo di questa tesi è studiare come alcune proprietà geometriche delle varietà di Kähler compatte siano dettate dalla topologia, in termini di gruppo fondamentale ed invarianti dell'algebra coomologica.
Le varietà di Kähler sono varietà complesse che ammettono una metrica che induce una due forma reale di tipo $(1,1)$ *chiusa* e l'interesse per il loro studio nasce, nel contesto di questa tesi, dall'intuizione che molti aspetti della loro geometria si possano dedurre dall'algebra lineare.
Gli invarianti topologici sono il gruppo fondamentale ed il genere di una varietà di Kähler compatta. Quest'ultimo è definito come massima dimensione di un sottospazio isotropico delle 1-forme differenziali reali ed è quindi un invariante dell'algebra coomologica.
La proprietà geometrica che vogliamo studiare, determinata da tali invarianti, è l'esistenza di fibrazioni olomorfe da varietà di Kähler compatte su superfici di Riemann compatte di genere $\geq 2$.
I Teoremi di Catanese (1989) e di Siu-Beauville (1988), punto di arrivo di questo lavoro, descrivono la caratterizzazione coomologica e topologica rispettivamente dell'esistenza di tali fibrazioni.
Il teorema che collega inizialmente le nozioni algebriche a quelle geometriche è il Teorema classico di Castelnuovo-De Franchis (1905) sulle superfici algebriche fibrate, riadattato alle varietà di Kähler compatte, di cui è interessante notare la dimostrazione costruttiva.
Questi risultati forniscono degli esempi di come costruzioni geometriche su varietà di Kähler possano essere dettate dall'algebra lineare, cioè dallo studio dell'anello di coomologia reale o da proprietà algebriche del gruppo fondamentale.

L'argomento è stimolante perché coinvolge Geometria Differenziale ed Algebrica, Analisi Complessa e Topologia Algebrica. Una prima parte consistente della trattazione è dedicata dunque all'esposizione di definizioni e risultati preliminari ed è strutturata in quattro Capitoli.

Il Capitolo 1 tratta le teorie coomologiche. Si definiscono le Coomologie di De Rham e Dolbeault tramite le forme differenziali. Si mostrano gli isomorfismi tra queste e le opportune Coomologie dei Fasci. Si definisce la Coomologia Singolare e la si confronta con la Coomologia dei Fasci e di De Rham.

Nel Capitolo 2 si definisce la condizione di Kähler su una metrica Hermitiana su una varietà complessa. La parte immaginaria della metrica Hermitiana risulta essere una 2-forma reale di tipo $(1,1)$. Se questa forma è *chiusa*, la metrica si dice di Kähler. Si presentano alcune proprietà di base delle varietà di Kähler ed alcuni esempi. In particolare sottovarietà di Kähler sono Kähler, dunque, ammettendo lo spazio $\mathbb{CP}^n$ una metrica di Kähler, si ottiene che ogni varietà proiettiva complessa è di Kähler.

Il Capitolo 3 introduce i risultati della Teoria di Hodge per le varietà di Kähler compatte. La decomposizione di Hodge della coomologia è il risultato più importante e da cui si ottengono le prime restrizioni sulle proprietà di queste varietà e del loro gruppo fondamentale.

Nel Capitolo 4 si richiamano la definizione di gruppo fondamentale, la Teoria dei Rivestimenti e la Teoria di Galois Topologica. Si definiscono Omologia e Coomologia dei Gruppi. Si enunciano i risultati di Eilenberg e MacLane che descrivono coomologia e omologia degli spazi topologici asferici in termini di omologia e coomologia dei loro gruppi fondamentali. Infine, si espongono le proprietà delle mappe verso gli spazi di Eilenberg-MacLane e le proprietà delle mappe indotte tra i gruppi fondamentali e tra le algebre coomologiche.

Gli argomenti di interesse della tesi si sviluppano nei successivi due Capitoli.

Il Capitolo 5 è dedicato alla descrizione degli invarianti topologici. Definizione di gruppo di Kähler ed esempi. Definizione della Varietà di Albanese da cui, tramite la Teoria di Hodge, si estrae la dimensione di Albanese, invariante dell'algebra coomologica. Definizione e proprietà del genere.

Nel Capitolo 6 ci si pone la questione sull'esistenza di fibrazioni olomorfe da varietà di Kähler a varietà target, che inducano un omomorfismo suriettivo tra gruppi fondamentali. Le proprietà della mappa di Albanese forniscono un primo caso positivo. Si enunciano e si dimostrano i Teoremi di Castelnuovo, Catanese e Siu-Beauville. Una formulazione di questi risultati si esprime dicendo che genere e gruppo fondamentale di una varietà di Kähler compatta $X$ dettano l'esistenza di pencil irrazionali su $X$. Il Teorema di Siu-Beauville, sotto opportune ipotesi, fornisce una seconda risposta positiva alla questione iniziale sull'esistenza di mappe suriettive che inducano un dato quoziente sul gruppo fondamentale. I gruppi di Kähler risulteranno distinti in quelli che *fibrano* o non su gruppi di superficie di genere $\geq 2$.

Nel Capitolo 7 si considerano le superfici isogene e fortemente isogene ad un prodotto alto. Queste varietà sono dei quozienti per un'azione libera di un gruppo finito sul prodotto di due curve di genere $\geq 2$. Data una superficie di Kähler compatta, la proprietà di essere isogena ad un prodotto alto è dettata da proprietà algebriche del gruppo fondamentale. L'esistenza di fibrazioni si deduce a posteriori tramite un omomorfismo suriettivo dei gruppi fondamentali.

# Capitolo 1

# Teorie Coomologiche

In questo capitolo richiamiamo le definizioni e le proprietà principali delle teorie coomologiche utilizzate nel seguito. In particolare mostriamo le identificazioni tra le diverse coomologie, per usarne le propritá opportune quando necessario.

## 1.1 Fibrato tangente e cotangente

**Definizione 1.1.1.** Una varietà complessa $X$ di dimensione $n$ è una varietà differenziale reale di dimensione $2n$ equipaggiata di una classe di equivalenza di atlanti olomorfi compatibili.

Come nell'ambito della struttura e geometria differenziale, ogni varietà complessa possiede un fibrato tangente, tramite cui si studia la geometria della varietà stessa. Nell'ambito complesso, il fibrato tangente è olomorfo, cioè dove le trivializzazioni sono olomorfe.
Gli spazi proiettivi sono particolari esempi di varietà complesse compatte.

Se $X$ è una varietà complessa, lo spazio tangente reale ad $X$ è equipaggiato di una struttura quasi complessa $I : T_{X,\mathbb{R}} \to T_{X,\mathbb{R}}$, tale che $I^2 = -id$. In ogni punto della varietà $x \in X$ la struttura quasi complessa induce la seguente decomposizione

$$T_{X,x} \otimes \mathbb{C} = T^{1,0}_{X,x} \oplus T^{0,1}_{X,x}$$

dove $T^{0,1}_{X,x}$ è lo spazio vettoriale dei vettori tangenti complessificati $u \in T_{X,x}$ tali che $I_x u = -iu$ e $T^{1,0}_{X,x}$ è il complesso coniugato di $T^{0,1}_{X,x}$. Dal punto di vista della struttura complessa, cioè del dato locale delle coordinate olomorfe, i campi vettoriali di tipo $(0,1)$ sono quelli che annullano le funzioni olomorfe.

**Proposizione 1.1.1.** *Sia $X$ una varietà complessa, allora $X$ ammette una struttura quasi complessa $I$, e il sottofibrato $T_X^{1,0} \subset T_{X,\mathbb{R}} \otimes \mathbb{C}$ definito da $I$ è uguale come sottofibrato vettoriale complesso di $T_{X,\mathbb{R}} \otimes \mathbb{C}$, al fibrato tangente olomorfo $\mathcal{T}_X$.*

La decomposizione del fibrato tangente

$$T_{X,\mathbb{R}} \otimes \mathbb{C} = T_{X,\mathbb{C}} = T_X^{1,0} \oplus T_X^{0,1}$$

induce l'analoga decomposizione duale

$$\Omega_{X,\mathbb{R}} \otimes \mathbb{C} = \Omega_{X,\mathbb{C}} = \Omega_X^{1,0} \oplus \Omega_X^{0,1}$$

dove $\Omega_X^{1,0}$ è il fibrato delle forme differenziali complesse di tipo $(1,0)$, i.e. $\mathbb{C}$-lineari, generato nelle coordinate locali olomorfe $z_1, \ldots, z_n$, da $dz_i$. Quindi una forma di tipo $(1,0)$ è scritta localmente come $\alpha = \sum_i \alpha_i dz_i$, dove $\alpha_i$ sono funzioni $\mathcal{C}^\infty$ se $\alpha$ è $\mathcal{C}^\infty$. Essendo che $d(dz_i) = 0$ si ha

$$d\alpha = \sum_i d\alpha_i \wedge dz_i$$

Inoltre è indotta la decomposizione delle $k$-forme complesse in forme di tipo $(p,q)$, per $p+q=k$

$$\Omega^k_{X,\mathbb{C}} = \Omega^k_{X,\mathbb{R}} \otimes \mathbb{C} = \bigoplus_{p+q=k} \Omega_X^{p,q} \tag{1.1}$$

in cui

$$\Omega_X^{p,q} \simeq \bigwedge^p \Omega_X^{1,0} \otimes \bigwedge^q \Omega_X^{0,1} \tag{1.2}$$

Questo spazio ha la proprietà di simmetria di Hodge

$$\overline{\Omega_X^{p,q}} = \Omega_X^{q,p}$$

dove la coniugazione complessa agisce naturalmente su $\Omega^k_{X,\mathbb{C}} = \Omega^k_{X,\mathbb{R}} \otimes \mathbb{C}$. Quindi $d\alpha$ risulta essere una sezione di $\Omega_X^{2,0} \oplus \Omega_X^{1,1}$.
Più in generale il fibrato $\Omega_X^{p,q}$ ammette come generatori in un sistema di coordinate locali olomorfe $z_1, \ldots, z_n$, le forme differenziali

$$dz_I \wedge d\bar{z}_J = dz_{i_1} \wedge \cdots \wedge dz_{i_p} \wedge d\bar{z}_{j_1} \wedge \cdots \wedge d\bar{z}_{j_q}$$

Si noti che queste forme sono chiuse, i.e. sono annullate dall'operatore di differenziale esterno $d$. Una forma $\alpha$ di tipo $(p,q)$ può essere localmente scritta come $\alpha = \sum_{I,J} \alpha_{I,J} dz_I \wedge d\bar{z}_J$. Segue che

$$d\alpha = \sum_{I,J} d\alpha_{I,J} \wedge dz_I \wedge d\bar{z}_J$$

che è somma di una forma di tipo $(p,q+1)$ ed una forma di tipo $(p+1,q)$

**Definizione 1.1.2.** Sia $X$ una varietà complessa e $\alpha$ una forma differenziale $\mathcal{C}^1$ di tipo $(p,q)$. Definiamo $\bar{\partial}\alpha$ la componente di tipo $(p,q+1)$ di $d\alpha$. Similmente definiamo $\partial\alpha$ la componente di tipo $(p,q+1)$ di $d\alpha$.

### 1.1.1 Coomologia di De Rham e Dolbeault

I fasci delle sezioni $\mathcal{C}^\infty$ dei fibrati 1.1 e 1.2 si denotano rispettivamente con $\mathcal{A}^k_{X,\mathbb{C}}$ e $\mathcal{A}^{p,q}_X$. Si ha la decomposizione degli spazi delle sezioni globali

$$\mathcal{A}^k_{X,\mathbb{C}} = \bigoplus_{p+q=k} \mathcal{A}^{p,q}_X$$

con la proprietà di simmetria $\overline{\mathcal{A}^{p,q}_X} = \mathcal{A}^{q,p}_X$. Consideriamo $\mathcal{A}^k_{\mathbb{C}}(X)$, lo spazio delle forme differenziali complesse di grado $k$ su $X$, i.e. delle sezioni $\mathcal{C}^\infty$ globali del fibrato vettoriale $\Omega^k_{X,\mathbb{C}}$. Il differenziale esterno

$$d : \mathcal{A}^k_{\mathbb{C}}(X) \to \mathcal{A}^{k+1}_{\mathbb{C}}(X)$$

soddisfa la proprietà $d \circ d = 0$, quindi si ottiene un complesso e si definisce il $k$-esimo gruppo di coomologia (complessa) di De Rham di $X$ come

$$H^k_{DR}(X,\mathbb{C}) = \frac{\ker(d : \mathcal{A}^k_{\mathbb{C}}(X) \to \mathcal{A}^{k+1}_{\mathbb{C}}(X))}{\operatorname{Im}(d : \mathcal{A}^{k-1}_{\mathbb{C}}(X) \to \mathcal{A}^k_{\mathbb{C}}(X))}$$

Sia $E$ un fibrato vettoriale *olomorfo* di rango $k$ sulla varietà complessa $X$. Il fascio delle sezioni *olomorfe* di $E$ sugli aperti di $X$ è un fascio coerente di $\mathcal{O}_X$-moduli ed è localmente libero.
Denotiamo $A^{0,q}(E)$ lo spazio delle sezioni $\mathcal{C}^\infty$ del fibrato $\Omega^{0,q} \otimes_{\mathbb{C}} E$. E' ben definito l'operatore

$$\bar{\partial}_E : \mathcal{A}^{0,q}(E) \to \mathcal{A}^{0,q+1}(E)$$
$$\bar{\partial}_E(\omega \otimes s) \mapsto (\bar{\partial}_E\omega) \otimes s$$

*Osservazione.* Il nucleo di $\bar{\partial}_E : \mathcal{A}^{0,0}(E) \to \mathcal{A}^{0,1}(E))$ contiene esattamente le sezioni olomorfe di $E$.

**Definizione 1.1.3.** Definiamo il complesso di Dolbeault di $E$ come

$$\cdots \to \mathcal{A}^{0,q-1}(E) \xrightarrow{\bar{\partial}_E} \mathcal{A}^{0,q}(E) \xrightarrow{\bar{\partial}_E} \mathcal{A}^{0,q+1}(E) \to \cdots$$

e il $q$-esimo gruppo di coomologia di Dolbeault di $E$

$$H^q_{Dolb}(X, E) = \frac{\ker(\bar{\partial}_E : A^{0,q}(X) \to A^{0,q+1}(X)}{\operatorname{Im}(\bar{\partial}_E : A^{0,q-1}(X) \to A^{0,q}(X))}$$

## 1.2 Coomologia dei fasci

### 1.2.1 Funtori derivati

**Definizione 1.2.1.** Un *complesso* $A^{\cdot}$ in una categoria abeliana $\mathfrak{C}$ è una collezione di oggetti $A^i$, $i \in \mathbb{Z}$ e morfismi $d^i : A^i \to A^{i+1}$, tali che $d^{i+1} \circ d^i = 0$ per ogni $i$.

**Definizione 1.2.2.** L' *i-esimo oggetto coomologico* $h^i(A^{\cdot})$ di un complesso $A^{\cdot}$ è definito come:

$$h^i(A^{\cdot}) := \ker(d^i)/\operatorname{Im}(d^{i-1})$$

Siano $\mathfrak{C}$ e $\mathfrak{C}'$ due categorie abeliane e sia $F$ un funtore additivo esatto a sinistra da $\mathfrak{C}$ a $\mathfrak{C}'$. Si assumi che $\mathfrak{C}$ abbia abbastanza oggetti iniettivi. Si costruiscono i *funtori destri derivati* $R^iF$, $i \geq 0$, di $F$ come segue. Per ogni oggetto $A$ di $\mathfrak{C}$, si sceglie una risoluzione iniettiva $I^{\cdot}$ di $A$. Si definisce allora

$$R^iF(A) = h^i(F(I^{\cdot}))$$

**Definizione 1.2.3.** Sia $X$ uno spazio topologico. Sia $\Gamma(X, \cdot)$ il funtore della sezione globale dalla categoria dei fasci di gruppi abeliani su $X$ alla categoria dei gruppi abeliani. Definiamo i *funtori di coomologia* $H^i(X, \cdot)$ come i funtori derivati destri di $\Gamma(X, \cdot)$. Per ogni facio $\mathcal{F}$, i gruppi $H^i(X, \mathcal{F})$ sono i *gruppi di coomologia* di $\mathcal{F}$.

In pratica, le risoluzioni iniettive sono difficili da manipolare. Diamo di seguito un risultato che mostra come sostituire le risoluzioni iniettive con risoluzioni che soddisfano una condizione più debole.

*Osservazione.* Se $F$ è esatto, allora $R^iF(A) = 0$ per ogni $A$ e $i > 0$. Infatti, se scegliamo una risoluzione iniettiva $0 \to A \to I^\cdot$, il complesso $F(I^\cdot)$ è esatto nei gradi $i > 0$ essendo $F$ esatto, quindi $R^iF(A) = h^iF(I^\cdot) = 0$ per $i > 0$.

**Definizione 1.2.4.** Sia $F$ come sopra. Un oggetto $J$ di $\mathfrak{C}$ è *aciclico* per $F$ se $R^iF(J) = 0$ per ogni $i > 0$.

In particolare questo significa che se $0 \to A \to B \to C \to 0$ è esatta e $A$ è aciclico per $F$, allora la sequenza $0 \to F(A) \to F(B) \to F(C) \to 0$ è esatta. Quindi gli oggetti iniettivi sono aciclici per il funtore esatto a sinistra $F$.

**Proposizione 1.2.1** (Teorema Formale di De Rham)**.** *Sia $F$ come sopra e sia*

$$0 \to A \to J^0 \to J^1 \to \cdots$$

*una sequenza esatta, dove ogni $J^i$ è aciclico per $F$, $i \geq 0$. Allora per ogni $i \geq 0$ c'è un isomorfismo naturale $R^iF(A) \simeq h^i(F(J^\cdot))$*

In particolare i fasci di $\mathcal{C}^\infty_X$-moduli sono aciclici per il funtore delle sezioni globali, quindi permettono di calcolare la coomologia.

**Definizione 1.2.5** (Fascio costante)**.** Sia $X$ uno spazio topologico e $A$ un gruppo abeliano. Definiamo il fascio costante $\mathscr{A}$ su $X$ determinato da $A$ come segue. Si dia ad $A$ la topologia discreta e per ogni aperto $U \subset X$, sia $\mathscr{A}(U) = C(U, A)$ gruppo delle mappe continue da $U$ ad $A$. Con le usuali mappe di restrizione otteniamo un fascio $\mathscr{A}$. Per ogni $U$ aperto connesso, $\mathscr{A} \simeq A$, da cui il nome *fascio costante di spiga A*. Se $X$ è localmente connesso, $U$ è un insieme aperto le cui componenti connesse sono aperte, allora $\mathscr{A}$ è prodotto diretto di copie di $A$, una per ogni componente connessa di $U$. Nella trattazione futura denoteremo il fascio costante $\mathscr{A}$ semplicemente con $A$, se non vi sarà ambiguità.

## 1.3 Confronto tra le Coomologie

Sia $X$ varietà differenziale $\mathcal{C}^\infty$. Il fascio costante $\mathbb{R}$ è incluso naturalmente nel fascio delle funzioni $\mathcal{C}^\infty$. Sia $\mathcal{A}^k$ il fascio delle forme differenziali $\mathcal{C}^\infty$, ovvero il fascio delle sezioni del fibrato $\Omega^k_{X,\mathbb{R}}$. Il differenziale esterno è un morfismo di fasci $d : \mathcal{A}^k \to \mathcal{A}^{k+1}$.

Il Lemma di Poincarè ci assicura che una forma chiusa di grado $k > 0$ è localmente esatta, quindi la sequenza

$$\mathcal{A}^{k-1} \to \mathcal{A}^k \to \mathcal{A}^{k+1}$$

è esatta nel mezzo per $k \geq 1$. Inoltre $\ker(d : \mathcal{A}^0 \to \mathcal{A}^1)$ coincide con le funzioni localmente costanti.

**Proposizione 1.3.1.** *Il complesso*

$$0 \to \mathcal{A}^0 \to \mathcal{A}^1 \to \cdots \to \mathcal{A}^n \to 0 \tag{1.3}$$

*con* $n = \dim X$ *è una risoluzione del fascio costante* $\mathbb{R}$. *Si ottiene una risoluzione simile del fascio costante* $\mathbb{C}$ *usando le forme differenziali complesse o tensorizzando per* $\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{C}$ *il complesso.*

**Proposizione 1.3.2.** *Sia* $X$ *una varietà* $C^\infty$. *Allora la coomologia del fascio costante* $\mathbb{R}$ *(risp.* $\mathbb{C}$*) è uguale alla coomologia di De Rham reale (risp. complessa)*

$$H^k(X, \mathbb{R}) = H^k_{DR}(X, \mathbb{R})$$

*Dimostrazione.* Utilizziamo la risoluzione 1.3 di $\mathbb{R}$ e rispettivamente di $\mathbb{C}$. Gli $\mathcal{A}^i$ sono fasci di $\mathcal{C}^\infty$-moduli, quindi la risoluzione è aciclica. Questo implica che i gruppi $H^k(X, \mathbb{R})$, rispettivamente $H^k(X, \mathbb{C})$, sono uguali ai gruppi di coomologia del complesso delle sezioni globali del complesso reale, rispettivamente complesso di De Rham. □

Sia $E \to X$ un fibrato vettoriale olomorfo su $X$, varietà complessa. Sia $\mathcal{E}$ il fascio associato di $\mathcal{O}_X$- moduli delle sezioni locali olomorfe di $E$. Sia $\mathcal{A}^{0,q}$ il fascio delle sezioni $\mathcal{C}^\infty$ di $\Omega^{0,q} \otimes E$. L'operatore che abbiamo definito sopra $\bar{\partial}_E : \mathcal{A}^{0,q}(E) \to \mathcal{A}^{0,q+1}(E)$ soddisfa le seguenti prorietà

- il nucleo di $\bar{\partial}_E \mathcal{A}^{0,0}(E) \to \mathcal{A}^{0,1}(E)$ è uguale al fascio delle sezioni olomorfe di $E$, i.e. ad $\mathcal{E}$.
- Per $q > 0$ una sezione di $\mathcal{A}^{0,q}(E)$ è $\bar{\partial}_E$-chiusa se e solo se è localmente $\bar{\partial}_E$-esatta.

**Proposizione 1.3.3.** *Il complesso*

$$0 \to \mathcal{A}^{0,0}(E) \xrightarrow{\bar{\partial}_E} \mathcal{A}^{0,1}(E) \to \cdots \xrightarrow{\bar{\partial}_E} \mathcal{A}^{0,n} \to 0 \tag{1.4}$$

*dove* $n = \dim_{\mathbb{C}} X$ *è una risoluzione del fascio* $\mathcal{E}$.

**Proposizione 1.3.4.** *Sia $E$ un fibrato vettoriale olomorfo su una varietà complessa $X$ ed $\mathcal{E}$ il fscio delle sezioni olomorfe di $E$. Allora*

$$H^q(X, \mathcal{E}) = H^q_{Dolb}(X, E)$$

*Dimostrazione.* Analogamente al precedente risultato, utilizzando la risoluzione di Dolbeault 1.4 di $\mathcal{E}$. $\square$

### 1.3.1 Coomologia Singolare

Sono identificati i gruppi di coomologia reale (risp. complessa) di De Rham di una varietà differenziabile $X$ con i gruppi di coomologia a valori nel fascio costante $\mathbb{R}$ (risp. $\mathbb{C}$), che si chiamano gruppi di coomologia di Betti. La coomologia di Betti è definita su $\mathbb{Z}$ nel senso che $H^k(X, \mathbb{R}) = H^k(X, \mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$, che segue dal teorema di cambiamento dei coefficienti. Consideriamo un'altra coomologia a coefficienti in $\mathbb{Z}$, ma che non sia costruita tramite le forme differenziali.
La *coomologia singolare* è la coomologia del complesso delle cocatene singolari $C^n_{sing}(X, \mathbb{Z})$, i.e. il duale del complesso delle catene singolari $(C_n(X, \mathbb{Z}), \partial)$. Il gruppo delle $n$-catene singolari $C^n_{sing}(X, \mathbb{Z})$ è il gruppo abeliano libero generato dalle mappe continue del simplesso

$$\Delta_n = \{(t_1, \ldots, t_{n+1}) \in [0,1]^{n+1} \big| \sum_i t_i = 1\}$$

di dimensione $n$ in $X$, e la mappa di bordo $\partial$ è data da

$$\partial \phi = \sum_i (-1)^i \phi|_{\Delta'_n}$$

dove $\Delta_{n-1} \simeq \Delta^i_n$ è la $i$-esima faccia di $\Delta$: $\Delta^i_n = \{(t_1, \ldots, t_{n+1}) \in \Delta_n \big| t_i = 0\}$
Esiste un'altra risoluzione aciclica di $\mathbb{Z}$, che ci permette di identificare la coomologia singolare e la coomologia di Betti, i.e. la coomologia del fascio costante $\mathbb{Z}$.

**Teorema 1.3.1.** *Sia $X$ uno spazio topologico localmente contraibile. Allora avremo un isomorfismo canonico*

$$H^k_{sing}(X, \mathbb{Z}) \simeq H^k(X, \mathbb{Z}).$$

*La stessa relazione vale se sostituiamo a $\mathbb{Z}$ un qualunque modulo $G$ su un anello commutativo $R$, così da considerare la coomologia di $X$ a coefficienti nel fascio costante $G$ a destra e la coomologia singolare a coefficienti in $G$ a sinitra.*

Analogamente si può definire l'omologia $H_k(X, R)$ a valori in un anello $R$ prendendo il corrispondente complesso $C_k^{sing}(X, R)$ di $R$-moduli liberi e la coomologia $H^k(X, G)$ a valori in un $R$-modulo $G$, prendendo il complesso $C^k_{sing}(X, G) = Hom_R(C_k^{sing}(X, R), G)$.

La coomologia singolare di $X$ a coefficienti reali può essere identificata con $Hom(H_k^{sing}, \mathbb{R})$, dove $H_k^{sing}$ è l'omologia del complesso delle catene singolari $(C_k(X, \mathbb{Z}), \partial)$. Questo risultato segue dall'isomorfismo dei complessi

$$C^k_{sing}(X, \mathbb{R}) \to Hom(C_k(X, \mathbb{Z}), \mathbb{R}).$$

La composizione

$$H^k_{DR}(X) \xrightarrow{\sim} H^k_{sing}(X, \mathbb{R}) \to Hom(H_k^{sing}(X, \mathbb{Z}), \mathbb{R}),$$

è descritta come segue. Il primo isomorfismo è dato dal teorema precedente. Sia $\omega$ una $k$-forma su $X$. La forma lineare

$$\int \omega : \phi \mapsto \int_{\Delta_k} \phi^* \omega$$

corrisponde ad $\omega$. E' definita almeno sul sottogruppo di $C_k(U, \mathbb{Z})$, generato dalle mappe differenziabili $\Delta_k \to X$. Quando $\omega$ è chiusa, la formula di Stokes mostra che questa forma lineare induce una forma su $H_k(X, \mathbb{Z})$, ovvero si annulla sui bordi. Questa è la forma lineare associata alla classe della forma chiusa $\omega$. Infatti, per la formula di Stokes, la mappa $\omega \mapsto \int \omega$ dà un morfismo di fasci dal complesso di De Rham al complesso delle cocatene singolari (differenziabili) e questo morfismo di risoluzioni acicliche induce l'isomorfismo $H^k_{DR}(X) \simeq H^k_{sing}(X, \mathbb{R})$.

### 1.3.2 Teoremi di Dualità

Sia $X$ spazio e $G$ un $R$-modulo su un dominio ad ideali principali $R$, per esempio un campo oppure $\mathbb{Z}$. Definiamo il gruppo delle $n$-catene singolari a coefficienti in $G$, come gruppo duale di $Hom(C_n(X, R), G)$. Poiché i gruppi

$C_n(X)$ sono liberi, il teorema universale dei coefficienti in forma algebrica assume le sembianze topologiche delle sequenze esatte corta che splittano

$$0 \to Ext^1_R(H_{n-1}(X, R), G) \to H^n(X, G) \to Hom_R(H_n(X, R), G) \to 0.$$

in particolare se $G = R$ *campo* e se $H_{n-1}(X, R)$ è di dimensione finita, otteniamo la dualità tra coomologia e omologia

$$H^n(X, R) \simeq Hom_R(H_n(X, R), R)$$

**Teorema 1.3.2** (Dualità di Poincaré)**.** *Sia $X$ una varietà $n$-dimensionale $R$-orientabile chiusa (compatta e senza bordo) e $k$ un intero. Allora il $k$-esimo gruppo di coomologia a coefficienti in $R$ è isomorfo al $(n-k)$-esimo gruppo di omologia a coefficienti in $R$.*

$$H^k(X, R) \simeq H_{n-k}(X, R)$$

*L'isomorfismo è dato dalla mappa definita da $\alpha \mapsto [\gamma] \frown \alpha$, con $\alpha \in H^k(X, R)$ e $[\gamma] \in H_n(X, R)$ classe fondamentale.*

# Capitolo 2

# Geometria di Kähler

Una varietà di Kähler è una varietà complessa equipaggiata con una metrica Hermitiana, la cui parte immagnaria, che è una 2-forma reale di tipo $(1,1)$, è *chiusa*. Questa si chiama forma di Kähler. Vediamo che le varietà proiettive complesse ammettono una forma di Kähler, dunque sono varietà di Kähler.

## 2.1 Geometria Hermitiana

Sia $V$ uno spazio vettoriale complesso, che si può considerare come uno spazio vettoriale reale dotato di un endomorfismo $\mathbb{R}$-lineare $I : V \to V$ chiamato struttura (quasi) complessa, che verifica $I^2 = -id$.
Sia $W_{\mathbb{R}} = Hom_{\mathbb{R}}(V, \mathbb{R})$, allora

$$W_{\mathbb{R}} \subset W_{\mathbb{R}} \otimes \mathbb{C} = W_{\mathbb{C}} := Hom_{\mathbb{R}}(V, \mathbb{C}) = W^{1,0} \oplus W^{0,1}$$

Questa è la decomposizione in forme $\mathbb{C}$-lineari e $\mathbb{C}$-antilineari, tale che $\overline{W^{1,0}} = W^{0,1}$. Sia

$$W^{1,1} = W^{1,0} \otimes W^{0,1} \subset \bigwedge^2 W_{\mathbb{C}}$$

$$W^{1,1}_{\mathbb{R}} = W^{1,1} \cap \bigwedge^2 W_{\mathbb{R}}.$$

**Lemma 2.1.1.** *Allora si avrà una identificazione naturale tra le forme Hermitiane su $V \times V$ e gli elementi di $W^{1,1}_{\mathbb{R}}$, dato dalla mappa*

$$h \mapsto \omega = -\mathscr{I} h,$$

*dova $h$ è una forma bilineare a valori complessi, $\mathbb{C}$-lineare a sinistra e $\mathbb{C}$-antilineare a destra che soddisfa $h(u,v) = \overline{h(v,u)}$.*

*Dimostrazione.* Se $h$ è Hermitiana, allora $h(u,v) = \overline{h(v,u)}$ e quindi la forma bilineare $\omega$ su $V$ definita da $\omega(u,v) = -\mathscr{I}h(u,v)$ è alternante. Dunque $\omega \in \bigwedge^2 W_{\mathbb{R}}$ e dobbiamo controllare che essa sia anche in $W^{1,1}$. Per definizione, $\omega \in W^{1,1}$ se e solo se l'estensione naturale di $\omega$ per $\mathbb{C}$-bilinearità ad una 2-forma su $V_{\mathbb{C}}$ che si annulla su $(u,v)$, $u,v \in V^{1,0}$ e su $(u,v)$, $u,v \in V^{0,1}$ (la seconda proprietà segue dalla prima utilizzando la coniugazione complessa). Lo spazio $V^{1,0}$ è generato da $v - iIv$, $v \in V$. Siano $v,u \in V$:

$$\omega(u - iIu, v - iIv) = \omega(u,v) - \omega(Iu,Iv) - i(\omega(u,Iv) + \omega(Iu,v))$$

Essendo $h$ $\mathbb{C}$-lineare a sinistra e $\mathbb{C}$-antilineare a destra allora $h(Iu,Iv) = h(u,v)$, quindi $\omega(u,v) = \omega(Iu,Iv)$. Inoltre $h(u,Iv) = -h(Iu,v)$ implica che $\omega(u,Iv) = -\omega(Iu,v)$. Quindi $\omega(u - iIu, v - iIv) = 0$.
Viceversa sia $\omega \in W_{\mathbb{R}}^{1,1}$ e sia

$$g(u,v) = \omega(u,Iv) \quad \text{e} \quad h(u,v) = g(u,v) - i\omega(u,v)$$

Abbiamo $h(u,Iv) = g(u,Iv) - i\omega(u,Iv) = -\omega(u,v) - ig(u,v) = -ih(u,v)$. Essendo $\omega$ alternante , abbiamo $\mathscr{I}h(u,v) = -\mathscr{I}h(v,u)$. Inoltre $\omega(u,Iv) = -\omega(Iu,v)$ quindi $g(u,v) = g(v,u)$ e quindi $h(u,v) = \overline{h(v,u)}$. Quindi $h$ è Hermitiana. □

**Definizione 2.1.1.** La forma $\omega$ alternante reale di tipo $(1,1)$ su $V$ è positiva se la forma Hermitiana corrispondente $h$ è definita positiva.

Esprimiamo la biiezione data dal teorema in coordinate. Siano $z_1, \ldots, z_n$ le coordinate $\mathbb{C}$- lineari su $V$. Denotiamo $z = (t_1, \ldots, t_n)$ e $z' = (t'_1, \ldots, t'_n)$. Dato $\alpha_{i,j} = \overline{\alpha_{j,i}} = h(e_i, e_j)$, abbiamo $h(z,z') = \sum_{i,j} \alpha_{i,j} t_i \bar{t'}_j$. Quindi si avrà

$$\omega(z,z') = \frac{i}{2} \sum_{i,j} \alpha_{i,j} (t_i \bar{t'}_j - t'_i \bar{t}_j).$$

Quindi avremo la seguente ugualianza di forme bilineari su $V$

$$\omega = \frac{i}{2} \sum_{i,j} \alpha_{i,j} z_i \wedge \bar{z}_j \in W^{1,1}$$

Si verifica facilmente che $\omega = \overline{\omega}$, quindi $\omega \in \bigwedge^2 W_{\mathbb{R}} \cap W^{1,1}$.
La dimostrazione del Lemma mostra che si può identificare la forma Hermitiana $h$, con la forma bilineare simmetrica associata ad essa dalla relazione $g(u,v) = \mathscr{R}h(u,v)$. La forma $g$ così ottenuta soddisfa la condizione $g(Iu, Iv) = g(u,v)$.

*Osservazione.* Consideriamo il caso Hermitiano, in cui $h$ e quindi $g$ siano definite positive. Segue dalla relazione $g(u,v) = \omega(u, Iv)$ che se $g$ è non degenere allora anche $\omega$ è non degenere. Nel caso Hermitiano, lo spazio vettoriale reale $V$ è dotato di una struttura Euclidea e da una struttura simplettica.

## 2.2 Metrica di Kähler

Una metrica Hermitiana su $M$, varietà complessa, è una collezione di metriche Hermitiane $h_x$ su ogni spazio tangente $T_{M,x}$ visto come spazio vettoriale complesso, tramite la struttura quasi complessa indotta $I_x$. Diremo che $h$ è continua o differenziabile se per le coordinate locali di $M$, $x_1, \ldots, x_n$ si ha che le funzioni

$$x \mapsto h_x(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j})$$

sono continue o differenziabili. Associamo a tale metrica $h$ la due forma reale di tipo $(1,1)$:

$$\omega = -\mathscr{I}h \in \Omega_M^{1,1} \cap \Omega^2_{M,\mathbb{R}}$$

Questa è la forma di Kähler della metrica $h$.

**Definizione 2.2.1.** La metrica Hermitiana $h$ è Kähler se la due forma $\omega$ è chiusa, i.e. $d\omega = 0$.

*Osservazione.* La varietà $M$ dotata della 2-forma $\omega$ è una varietà simplettica ovvero è dotata di una 2-forma chiusa ovunque non-degenere.

### 2.2.1 Proprietà di base delle varietà di Kähler

#### Forma di volume

Una varietà complessa $M$, di dimensione $2n$ dotata di una struttura Hermitiana è in particolare una varietà Riemanniana e canonicamente orientata. L'orientazione positiva su ogno spazio tangente $T_{M,x}$ è data dalla seguente regola: se $u_1, \ldots, u_n$ è una base di $T_{M,x}$ su $\mathbb{C}$, allora $u_1, Iu_1, \ldots, u_n, Iu_n$ è una base orientata di $T_{M,x}$ su $\mathbb{R}$. Tale varietà di Riemann orientata avrà una forma di volume canonica, ovvero una sezione ovunque non nulla del fibrato $\Omega^{2n}_{M,\mathbb{R}}$. Il suo valore al punto $x \in M$ è l'unica forma che sia positiva su ogni base positivamente orientata di $T_{M,x}$ e che abbia norma 1 per la metrica indotta su $\Omega^{2n}_{M,x,\mathbb{R}}$. Nel caso Hermitiano si ha il seguente

**Lemma 2.2.1.** *La forma di volume associata alla forma Hermitiana $h$ su $M$ è uguale a $\frac{\omega^n}{n!}$.*

Segue dal Lemma che il volume della varietà, che è l'integrale su $M$ della forma di volume (definita solo se $M$ è compatta e quindi strettamente positivo), è uguale all'integrale su $M$ della $2n$-forma $\frac{\omega^n}{n!}$. Per le varietà di Kähler si ha il seguente corollario

**Corollario 2.2.1.** *Se $M$ è una varietà di Kähler compatta, allora per ogni intero $1 \leq k \leq n$ la forma chiusa $\omega^k$ non è esatta.*

*Dimostrazione.* Supponiamo $\omega^k = d\gamma$, allora $\omega^n = d(\omega^{n-k} \wedge \gamma)$. Per la formula di Stokes si ha $\int_M \omega^n = \int_M d(\omega^{n-k} \wedge \gamma) = \int_{\partial M} (\omega^{n-k} \wedge \gamma) = 0$, che non può essere, pherché è il volume di $M$. $\square$

La forma di Kähler è chiusa, quindi rappresenta una classe di coomologia $[\omega] \in H^2_{DR}(M)$. Inoltre la potenza più alta di $\omega$ è un multiplo non-nullo della forma di volume, quindi questa classe di coomologia e tutte le sue potenze $\omega^k \in H^{2k}(M)$ fino a quella più alta sono non-nulle. Come conseguenza, varietà complesse compatte che abbiano gruppi di coomolgia di De Rham $H^{2k}(M)$ nulli, non possono essere Kähler.

### Sottovarietà

Una sottovarietà complessa $N$ di una varietà complessa $M$ è una sottovarietà differenziabile il cui spazio tangente in ogni punto è stabile sotto l'operatore $I$ della struttura quasi complessa su $M$. La struttura quasi complessa indotta è integrabile quindi possiamo vedere $N$ come l'immagine di una immersione olomorfa $j : N \to M$. Sia $M$ una varietà di Kähler, con forma di Kähler $\omega_M$. La metrica Hermitiana su $M$ induce una metrica Hermitiana su $N$ e per definizione la forma di Kähler su $N$ sarà $\omega_N = j^*\omega_M$. Pullback e differenziale commutano quindi $d\omega_N = j^*(d\omega_M) = 0$. Quindi anche $N$ è una varietà di Kähler.

### 2.2.2 $\mathbb{CP}^n$ è Kähler

Consideriamo $\mathbb{CP}^n = \frac{\mathbb{C}^{n+1}-\{0\}}{\mathbb{C}^*}$, con la topologia quziente. Sia $\tilde{\mathrm{U}}_i$ il sottoinsieme di $\mathbb{C}^{n+1} - \{0\}$ dei punti $z$ che hanno $i$-esima coordinata non nulla $z_i \neq 0$. Sai $U_i$ l'immagine di $\tilde{\mathrm{U}}_i$ in $\mathbb{CP}^n$. Ogni punto $Z$ di $U_i$ ammette un unico sollevamento $z$ ad $\tilde{\mathrm{U}}_i$, che soddisfa la condizione $z_i = 1$. Quindi $U_i$ è naturalmente omeomorfo a $\mathbb{C}^n$ e fornisce le carte olomorfe per $\mathbb{CP}^n$, che è ricoperto dagli $U_i$. Verificando che i morfismi di cambiamento di carte sono olomorfi, otteniamo la struttura complessa su $\mathbb{CP}^n$.
Esiste su $\mathbb{CP}^n$ un fibrato in rette olomorfo naturale $S$ la cui fibra in $\Delta \in \mathbb{CP}^n$ è lo spazio vettoriale $\Delta \subset \mathbb{C}^{n+1}$ di rango 1. Questo si chiama fibrato di Hopf o sottofibrato universale.
Per vedere la struttura naturale olomorfa di $S$, notiamo che negli aperti $U_i$, $S$ è trivializzato dalla sezione $\sigma_i$ che a $\Delta$ associa $z$, l'unico vettore generatore di $\Delta$ tale che $z_i = 1$. Sull'intersezione $U_i \cap U_j$ si ottiene $\sigma_j = \frac{Z_i}{Z_j}\sigma_i$, dove $Z_i$ sono le coordinate in $\mathbb{C}^{n+1}$. La funzione $\frac{Z_i}{Z_j}$ è meromorfa (i.e. può essere scritta localmente come quoziente di due funzioni olomorfe) su $\mathbb{CP}^n$ e olomorfa invertibile su $U_i \cap U_j$.

**Definizione 2.2.2.** Denotiamo con $O_{\mathbb{P}^n}(1)$ il duale di $S$.

Sia $h$ la metrica Hermitiana standard su $\mathbb{C}^{n+1}$. Per restrizione, l'inclusione dei fibrati vettoriali

$$S \subset \mathbb{CP}^n \times \mathbb{C}^{n+1}$$

inducono una metrica $h$ sul $S$ e sul suo duale $O_{\mathbb{P}^n}(1)$.
La 2-forma di tipo $(1,1)$ associata a questa metrica $h^*$ è definita su $U_i$ come segue

$$\omega_i = \frac{1}{2i\pi}\partial\bar{\partial}\log\big(h^*(\sigma_i^*)\quad \text{su } U_i$$

dove $\sigma_i^*$ è la sezione duale di $\sigma_i$ su $U_i$. Si ha che $h^*(\sigma_i^*) = \frac{1}{h(\sigma_i)}$. Infine, tramite l'identificazione naturale $U_i \simeq \mathbb{C}^{n+1}$, la sezione $\sigma_i$ di $S$, considerata come mappa olomorfa a valori in $\mathbb{C}^{n+1}$, si può scrivere $\sigma_i(z_1, \ldots, z_n) = (z_1, \ldots, 1, z_i, \ldots, z_n)$ con 1 nella $i$-esima posizione. Si ottiene

$$h(\sigma_i) = 1 + \sum_i |z_i|^2,$$

e la 2-forma di tipo $(1,1)$ definita su $U_i$

$$\omega_i = \frac{1}{2i\pi}\partial\bar{\partial}log\Big(\frac{1}{1+\sum_i |z_i|^2}\Big)$$

Le forme $\omega_i$ così costruite sugli aperti, si incollano opportunamente per definire globalmente su $\mathbb{CP}^n$ una 2-forma di tipo $(1,1)$ reale, positiva e chiusa. Questa è la metrica di Kähler definita su $\mathbb{CP}^n$, è chiamata *metrica di Fubini-Study* e si denota con $\omega_{FS}$.
Infine otteniamo come conseguenza di questa costruzione e della trattazione precedente che *ogni varietà proiettiva complessa*, i.e. sottovarietà complessa di uno spazio proiettivo *è di Kähler*. Non vale però il viceversa. Esistono infatti varietà di Kähler che non sono proiettive.

**Altri esempi di varietà di Kähler**

- Prodotti di varietà di Kähler sono Kähler, per la metrica prodotto.
- Sia $\pi : Y \to X$ un rivestimento di $X$, varietà di Kähler. La forma di Kähler su $Y$ si ottiene dal pullback della forma di Kähler su $X$. Quindi i rivestimenti di varietà di Kähler, sono varietà di Kähler.
- Ogni metrica Hermitiana su una *superficie di Riemann* è Kähler, perché la forma di Kähler, che è di grado 2 su una varietà 2-dimensionale , deve essere necessariamente chiusa.
- I *tori complessi* $T = \mathbb{C}^n/\Gamma$, $\Gamma$ sottogruppo discreto, hanno metriche di Kähler piatte ottenute considerando metriche a coefficienti costanti su $\mathbb{C}^n$. Tali metriche sono invarianti per traslazione, e danno una metrica su ogni quoziente $T = \mathbb{C}^n/\Gamma$.

*Osservazione.* I tori complessi, in dimensione superiore ad 1, forniscono un esempio di quanto detto sopra, poiché sono tutti varietà di Kähler, ma possono non essere proiettivi.

# Capitolo 3

# Teoria di Hodge per le varietà di Kähler compatte

Introduciamo in questo capitolo la Teoria di Hodge per stabilire l'esistenza della decomposizione di Hodge della coomologia delle varietà di Kähler compatte. Questa decomposizione dà vincoli alla coomologia che rivelano l'esistenza di varietà complesse compatte non Kähler. Dal punto di vista topologico, vi sono delle restrizioni anche sui gruppi che possono essere gruppi fondamentali delle varietà di Kähler compatte. Inoltre la Teoria di Hogde è fondamentale nella costruzione dei nuovi invarianti dell'algebra coomologica.

## 3.1 Metrica $L^2$ sulle forme differenziali

Sia $X$ una varietà compatta equipaggiata con una struttura Riemanniana, i.e. una metrica Riemanniana $g$. E' possibile esibire dei rappresentanti, che sono forme differenziali chiuse particolari, delle classi di coomologia di De Rham. Queste forme, che si chiamano armoniche, oltre ad essere chiuse, soddisfano la condizione di essere cochiuse, i.e. di essere annullate dall'operatore aggiunto formale $d^*$ dell'operatore $d$.
Essendo la varietà compatta, la metrica su $X$ fornisce una metrica $(\cdot,\cdot)_{L^2}$ sullo spazio delle forme differenziali $\mathcal{C}^\infty$, $\mathcal{A}^k(X)$.

$$(\alpha,\beta)_{L^2} = \int_X \langle\alpha,\beta\rangle Vol,$$

dove $Vol$ è la forma di volume associata alla metrica, $\alpha$ e $\beta$ sono forme differenziali di grado $k$ su $X$ e il prodotto scalare $\langle \alpha, \beta \rangle$ in $x \in X$ è indotto dalla valutazione delle forme nel punto $x$ e dalla metrica nel punto $x$.

Usando la formula di Stokes, si può dimostrare l'esistenza di un operatore differenziale $d^* : \mathcal{A}^{k+1}(X) \to \mathcal{A}^k(X)$, aggiunto formale di $d : \mathcal{A}^k(X) \to \mathcal{A}^{k+1}(X)$, i.e. che soddisfa la relazione

$$(\alpha, d\beta)_{L^2} = (d^*\alpha, \beta)_{L^2},$$

con $\alpha \in A^{k+1}(X)$ e $\beta \in A^k(X)$.
Si definisce poi l'operatore differenziale ellittico di ordine 2, il Laplaciano come $\Delta_d = dd^* + d^*d : A^k(X) \to A^k(X)$. Una forma risulta essere chiusa e cochiusa se e solo se è annullata dal Laplaciano e sarà chiamata armonica o $\Delta_d$-armonica.

Se $X$ è una varietà complessa, abbiamo gli operatori $\partial$ e $\bar{\partial}$ definiti sulle forme differenziali complesse, che soddisfano la relazione $d = \partial + \bar{\partial}$. Si definiscono rispettivamente $\partial^*$ e $\bar{\partial}^*$ gli operatori aggiunti formali dei precedenti. Inoltre si può fare la stessa costruzione con l'operatore $\bar{\partial}_E$ del fibrato vettoriale olomorfo $E$ sulla varietà complessa $X$, ottenendo l'operatore aggiunto formale $\bar{\partial}_E^*$.

*Osservazione.* Se, in particolare consideriamo come fibrato $E$, il fibrato olomorfo $\Omega_X^p$ equipaggiato con la sua metrica Hermitiana indotta, gli operatori $\bar{\partial}_E$ e $\bar{\partial}_E^*$ coincidono con gli operatori $\bar{\partial}$ e $\bar{\partial}^*$, ristretti alle forme di tipo $(p,q)$ e a meno di coefficienti.

Per una varietà complessa $X$ equipaggiata con una metrica Hermitiana, scriviamo

$$\Delta_\partial = \partial\partial^* + \partial^*\partial, \quad \Delta_{\bar{\partial}} = \bar{\partial}\bar{\partial}^* + \bar{\partial}^*\bar{\partial} \quad \Delta_E = \bar{\partial}_E\bar{\partial}_E^* + \bar{\partial}_E^*\bar{\partial}_E$$

per i Laplaciani associati agli operatori $\partial$, $\bar{\partial}$ e $\bar{\partial}_E$.

**Lemma 3.1.1.** *Se $X$ è compatta, abbiamo la seguente ugualianza*

$$(\alpha, \Delta_d\alpha)_{L^2} = (d\alpha, d\alpha)_{L^2} + (d^*\alpha, d^*\alpha)_{L^2}$$

*e valgono ugualianze analoghe per tutti i Laplaciani introdotti.*

**Corollario 3.1.1.** *Su una varietà compatta, si ha* $\ker \Delta_d = \ker d \cap \ker d^*$ *e valgono ugualianze analoghe per tutti i Laplaciani introdotti.*

**Definizione 3.1.1.** Una forma $\Delta_d$-armonica è una forma che è annullata dal Laplaciano $\Delta_d$, o equivalentemente che è annullata da $d$ e $d^*$. Similmente definiamo le forme $\Delta_\partial$-armoniche, $\Delta_{\bar{\partial}}$-armoniche e le forme $(0, q)$ $\Delta_E$-armoniche a coefficienti in $E$.

L'idea della teoria di Hodge è dimostrare, usando l'operatore aggiunto $d^*$, le seguenti decomposizioni

$$\mathcal{A}^k(X) = \operatorname{Im} d \oplus \ker d^*$$
$$\mathcal{A}^k(X) = \ker d \oplus \operatorname{Im} d^*$$

e, utilizzando l'inclusione $\operatorname{Im} d \subset \ker d$

$$\mathcal{A}^k(X) = \ker d \cap \ker d^* \oplus \operatorname{Im} d \oplus \operatorname{Im} d^*.$$

Si ottiene infine la decomposizione dello spazio delle $k$ forme differenziali

**Teorema 3.1.1.** *Se $X$ è una varietà Riemanniana compatta, si ha la decomposizione come somma diretta ortogonale*

$$\mathcal{A}^k(X) = \mathcal{H}^k \oplus \operatorname{Im} d \oplus \operatorname{Im} d^*$$

*dove $\mathcal{H}^k$ è lo spazio delle forme armoniche di grado $k$.*

## 3.2 Coomologia e forme armoniche

Sia $(X, g)$ una varietà di Riemann compatta orientata.

**Teorema 3.2.1.** *Sia $\mathcal{H}^k$ lo spazio vettoriale delle forme differenziali $\Delta$-armoniche di grado $k$. La mappa naturale*

$$\mathcal{H}^k \to H^k(X, \mathbb{R})$$

*che associa ad $\alpha$ la classe delle forme chiuse $H^k_{DR}(X, \mathbb{R}) \simeq H^k(X, \mathbb{R})$ è un isomorfismo. Analogamente, la mappa naturale dallo spazio delle forme armoniche a valori complessi al gruppo di coomologia $H^k(X, \mathbb{C})$ è un isomorfismo.*

Utilizzando la coomologia di Dolbeault del fibrato vettoriale olomorfo $E$ su una vaietà complessa $X$, abbiamo un analogo risultato per i gruppi di coomologia $H^q(X, \mathcal{E})$ a valori nel fascio $\mathcal{E}$ delle sezioni olomorfe di $E$.

**Teorema 3.2.2.** *Sia $E$ un fibrato vettoriale olomorfo Hermitiano su una varietà complessa compatta $X$, equipaggiata con una metrica Hermitiana. Se $\mathcal{H}^{0,q}(E)$ è lo spazio delle forme armoniche, i.e. delle forme annullate da $\Delta_E$ di tipo $(0,q)$ a coefficienti in $E$, la mappa naturale*

$$\mathcal{H}^{0,q}(E) \to H^{0,q}(X, \mathcal{E})$$

*che alla forma armonica $\alpha$ associa la classe della forma $\bar{\partial}$-chiusa $\alpha$, è un isomorfismo.*

**Corollario 3.2.1.** .

1. *Se $X$ è una varietà compatta, allora i gruppi di coomologia $H^k(X, \mathbb{R})$ sono finito-dimensionale*

2. *Se $X$ è una varietà complessa compatta, allora i gruppi $H^k(X, E)$ sono finito-dimensionali, per ogni fibrato vettoriale olomorfo $E$ su $X$.*

## 3.3 Varietà di Kähler

Sia $(X, \omega)$ una varietà di Kähler. Allora abbiamo le relazioni

$$\Delta_d = 2\Delta_\partial = 2\Delta_{\bar{\partial}}$$

in particolare le forme $d$-armoniche sono anche $\partial$ e $\bar{\partial}$ arminiche e chiuse.

**Corollario 3.3.1.** *Se $X$ è di Kähler, il Laplaciano $\Delta_d$ è biomogeneo, i.e.*

$$\Delta_d(\mathcal{A}^{p,q}(X)) \subset \mathcal{A}^{p,q}(X)$$

**Corollario 3.3.2.** *Se $\alpha \in \mathcal{A}^k(X)$ è armonica, allora le sue componenti di tipo $(p,q)$, $\alpha^{p,q}$, sono armoniche.*

**Corollario 3.3.3.** *Sia $X$ varietà di Kähler compatta. Abbiamo una decomposizione come somma diretta*

$$\mathcal{H}^k(X) = \bigoplus_{p+q=k} \mathcal{H}^{p,q}$$

*dove $\mathcal{H}^{p,q}$ è l'insieme delle forme di tipo $(p,q)$ che sono armoniche per $\Delta_d$ e anche armoniche per $\Delta_{\bar{\partial}}$.*

I risultati precedenti inducono la seguente decomposizione

$$H^k(X, \mathbb{C}) = \bigoplus_{p+q=k} H^{p,q}(X) \tag{3.1}$$

che è la decomposizione di Hodge della coomologia delle varietà di Kähler compatte. Inoltre la decomposizione non dipende dalla scelta della metrica di Kähler e si può mostare che

$$H^{p,q}(X) = \{[\alpha] \in H^{p+q}(X, \mathbb{C}) | \alpha \in \mathcal{A}^{p,q} \text{ ed è tale che } d(\alpha) = 0\}.$$

**Corollario 3.3.4.** *Abbiamo* $\overline{H^{p,q}(X)} = H^{q,p}(X)$ *dove la coniugazione complessa agisce naturalmente su* $H^{p+q}(X, \mathbb{C}) = H^{p+q}(X, \mathbb{R}) \otimes \mathbb{C}$

Quindi abbiamo che $h^{p,q} = \dim H^{p,q}(X) = \dim \overline{H^{q,p}(X)} = \dim H^{q,p}(X) = h^{q,p}$. Ricordiamo che il $k$-esimo numero di Betti è definito come $b_k(X) = \dim_{\mathbb{C}} H^k(X, \mathbb{C})$. Dalla decompisizione 3.1 otteniamo

$$b_k(X) = \sum_{p+q=k} h^{p,q}.$$

**Corollario 3.3.5.** *I numeri di Betti dispari* $b_{2k+1}(X) = \dim_{\mathbb{C}} H^{2k+1}(X, \mathbb{C})$ *di una varietà di Kähler compatta sono pari.*

$$b_{2k+1}(X) = \dim_{\mathbb{C}} H^{2k+1}(X, \mathbb{C}) = \sum_{p+q=2k+1} h^{p,q} = \sum_{\substack{p+q=k \\ p<q}} 2h^{p,q}$$

**Proposizione 3.3.1** ($\partial\bar{\partial}$ Lemma)**.** *Sia* $X$ *varietà di Kähler e* $\omega$ *una forma* $\partial$*-chiusa e* $\bar{\partial}$*-chiusa. Se* $\omega$ *è* $d$*,* $\partial$ *oppure* $\bar{\partial}$ *esatta, allora esiste una forma* $\chi$ *tale che* $\omega = \partial\bar{\partial}\chi$.

**Corollario 3.3.6.** *Sia* $X$ *una varietà di Kähler compatta. Se* $\alpha \in H^0(X, \Omega^p_X)$*, allora è chiusa.*

**Lemma 3.3.1.** $H^{p,q}(X)$ *è canonicamente isomorfo a* $H^q(X, \Omega^p_X)$.

Lo spazio $H^p(X, \Omega^q_X)$ è il $q$-esimo gruppo di coomologia di Dolbeault, definito come il $q$-esimo gruppo di coomologia di $X$ a volari nel fascio $\Omega^p_X$ delle forme differenziali olomorfe di grado $p$.

*Dimostrazione.* Gli elementi di $H^k(X, \mathbb{C})$ sono rappresentati dalle forme $\Delta_d$-armoniche e $H^{p,q}(X)$ può essere identificato con lo spazio delle forme armoniche di tipo $(p, q)$. Ma avendo l'ugualianza $\Delta_d = 2\Delta_{\bar{\partial}}$, le forme armoniche di tipo $(p, q)$ sono le forme $\Delta_{\bar{\partial}}$-armoniche di tipo $(p, q)$. Per il teorema 3.2.2, queste sono in biiezione con $H^q(X, \Omega^p_X)$. $\square$

# Capitolo 4

# Gruppo fondamentale

In questo capitolo defininiamo il gruppo fondamentale di una varietà topologica e richiamiamo alcuni risultati della Teoria dei Rivestimenti e della Teoria di Galois Topologica. Inoltre definiamo l'omologia e la coomologia dei gruppi per enunciare i risultati di Eilenberg-MacLane. Il teorema di Eilenberg-MacLane descrive come la proprietà di uno spazio di essere *asferico*, cioè avere gruppi di omotopia alti triviali, implichi il fatto che la struttura omologica e coomologica siano determinate dal gruppo fondamentale. Infine descrivimo la relazione tra le mappe da varietà a spazi asferici e i morfismi indotti tra i rispettivi gruppi fondamentali e gruppi di coomologia.

## 4.1 Omotopia e gruppo fondamentale

Una coppia di spazi è il dato di $(X, S)$, $X$ spazio topologico e $S \subset X$.
Una funzione tra due coppie di spazi $(X, S)$ verso $(Y, T)$ è il dato di una mappa continua $f : X \to Y$ tale che $f(S) \subset T$.
In particolare consideriamo lo spazio *puntato*: $(X, x)$, con $x \in X$. Una mappa tra gli spazi puntati $(X, x)$ e $(Y, y)$ è data da $f : X \to Y$ tale che $f(x) = y$.

**Definizione 4.1.1.** Una *omotopia* tra due funzioni continue $f, g : X \to Y$ tra spazi topologici è una funzione continua $H : X \times I \to Y$, tale che

$$\begin{cases} H(x,0) & = f(x) \\ H(x,1) & = g(x) \end{cases}$$

Se esiste una omotopia tra le due funzioni $f, g$, queste si diranno *omotope* e si denota $f \simeq g$.

**Definizione 4.1.2.** Sia $(X, S)$ una coppia di spazi e $f, g : X \to Y$ mappe, allora definiamo $f \simeq g$ $(\mathrm{rel}\, S)$, se esiste $H : X \times I \to Y$ continua, tale che $H(x, 0) = f(x)$, $H(x, 1) = g(x)$ ed inoltre $H(s, t) = f(s)$ per ogni $s \in S, t \in T$. In particolare $f \equiv g$ su $S$.

La relazione $\simeq$ è una relazione di equivalenza, e l'insieme quoziente si indica

$$H(X, Y) = C(X, Y)/\simeq .$$

**Definizione 4.1.3.** Una mappa $f : X \to Y$ si dice *equivalenza omotopica* se è invertibile in $H(X, Y)$, cioè se esiste $g \in C(Y, X)$ tale che

$$\begin{cases} f \circ g \simeq id_Y \\ g \circ f \simeq id_X \end{cases}$$

*Esempio* 4.1.1. Un omeomorfismo è una equivalenza omotopica, ma non vale il viceversa.

**Definizione 4.1.4.** Il *tipo di omotopia* di uno spazio topologico $X$ è la sua classe di equivalenza modulo equivalenza omotopica.

Sia $\mathbb{S}^1$ lo spazio topologico circonferenza e $1 \in \mathbb{S}^1$ e sia $\mathbb{S}^n = \mathbb{S}^1 \times \cdots \times \mathbb{S}^1$, $n$-volte e $pt. \in \mathbb{S}^n$. Definiamo il gruppo fondamentale $\pi_1(X, x_0)$ e i gruppi di omotopia superiori $\pi_n(X, x_0)$ di uno spazio topologico puntato $(X, x_0)$ connesso per archi come

**Definizione 4.1.5.**

$$\begin{aligned} \pi_1(X, x_0) &:= H((\mathbb{S}^1, 1), (X, x_0)) \\ &= C((\mathbb{S}^1, 1), (X, x_0))/\simeq (\mathrm{rel}\, 1) \end{aligned}$$

$$\pi_n(X, x_0) := H((\mathbb{S}^n, pt.), (X, x_0))$$

Se consideriamo la definizione in funzione dei *loop*, riscriviamo

$$\pi_1(X, x_0) \simeq \{\gamma : I \to X \text{ continua } | \gamma(0) = \gamma(1) = x_0\}/\simeq (\mathrm{rel}\, 0, 1)$$

Gli elementi del gruppo fondamentale sono le classi di equivalenza omotopiche di loop, su $X$ puntato in $x_0 \in X$. La struttura di gruppo è data dall'operazione di giustapposizione di cammini.

Se $f : X \to Y$ è una funzione continua tra spazi topologici, allora viene indotto il morfismo di gruppi

$$\begin{aligned} f^* : \pi_1(X, x) &\to \pi_1(Y, f(x)) \\ [\alpha] &\mapsto [f \circ \alpha] \end{aligned}$$

Equivalenze omotopiche inducono isomorfismi sui gruppi fondamentali, per spazi connessi per archi, quindi i gruppi fondamentali sono *invarianti omotopici*, cioè due spazi non sono omotopicamente equivalenti se hanno gruppi fondamentali non isomorfi. Il viceversa è falso. Due spazi possono avere gruppi fondamentali isomorfi e non essere omotopicamente equivalenti nè dunque omeomorfi.
Inoltre spazi omotopicamente equivalenti hanno gruppi di omologia e coomologia singolare isomorfi, poichè i morfismi indotti in omologia e coomologia sono isomorfismi. Dunque sono anch'essi invarianti omotopici.

### 4.1.1 Gruppo fondamentale e primo gruppo di omologia

C'è una stretta connessione tra il gruppo fondamentale ed il primo gruppo di omologia singolare, che nasce dal fatto che una mappa $f : I \to X$ può essere vista come un cammino oppure un 1-simplesso singolare. Se $f$ è un *loop*, i.e. $f(0) = f(1)$, questo 1-simplesso è un *ciclo*, poiché $\partial f = f(1) - f(0) = 0$.

**Teorema 4.1.1.** *Otteniamo un omomorfismo $h : \pi_1(X, x_0) \to H_1(X, \mathbb{Z})$. Se $X$ è connesso per archi, allora $h$ è suriettiva e il suo nucleo corrisponde al sottogruppo commutatore di $\pi_1(X)$. Quindi $h$ induce un isomorfismo*

$$\frac{\pi_1(X)}{[\pi_1(X), \pi_1(X)]} \xrightarrow{\sim} H_1(X, \mathbb{Z}) \tag{4.1}$$

### 4.1.2 Teorema iperpiano di Lefschetz

Abbiamo visto che le varietà algebriche proiettive complesse sono varietà di Kähler e ne sono la fonte principale di esempi, quindi enunciamo il teorema che ne descrive la topologia.

**Teorema 4.1.2** (Iperpiano di Lefschetz). *Sia $X \subset \mathbb{CP}^n$ una varietà proiettiva liscia e $Y = X \cap H$ una generica sezione iperpiana. Allora per ogni*

*$i < \dim_{\mathbb{C}} X - 1$ si ha*

$$\pi_i(Y) \simeq \pi_i(X)$$
$$H^i(Y, \mathbb{Z}) \simeq H^i(X, \mathbb{Z})$$

In particolare, questo mostra che nello studio dei gruppi fondamentali delle varietà algebriche proiettive, ci si può restringere al caso di dimensione complessa 2, cioè alle superfici algebriche.

## 4.2 Teoria dei rivestimenti

Dato uno spazio topologico $X$, un *rivestimento* di $X$ è uno spazio $Y$ e una mappa $p : Y \to X$ che soddisfano la seguente condizione: per ogni punto $x \in X$ esiste un intorno aperto $U$ di $x$ in $X$, tale che $p^{-1}(U)$ sia unione disgiunta di aperti, ognuno dei quali è mappato omeomorficamente su $U$ dalla mappa $p$. Gli aperti disgiunti nell'antimmagine di $U$, sono detti *foglie*, il loro numero è la cardinalità della fibra $p^{-1}(x)$, per $x \in U$ e se $X$ è connesso, è costante.

**Definizione 4.2.1.** Se un gruppo discreto $G$ opera in modo propriamente discontinuo su uno spazio topologico $X$, allora la proiezione $p : X \to X/G$ è un rivestimento con fibra omeomorfa a $G$. Chiameremo rivestimenti isomorfi a questi, rivestimenti di Galois o regolari.

**Teorema 4.2.1.** *Sia $X$ uno spazio topologico, connesso per archi, localmente connesso per archi e semilocalmente semplicemente connesso. Allora c'è una biiezione tra l'insieme delle classi di isomorfismo di rivestimenti connessi per cammini puntati di $X$, $p : (Y, y_0) \to (X, x_0)$ e l'insieme dei sottogruppi di $\pi_1(X, x_0)$, ottenuti associando $p_*(\pi_1(Y, y_0))$ al rivestimento $(Y, y_0)$.*
*Ignorando i punti base, la corrispondenza dà una biiezione tra classi di isomorfismo di rivestimenti connessi per archi $p : Y \to X$ e classi di coniugio dei sottogruppi di $\pi_1(X, x_0)$.*

$$\{\text{sottogruppi di } \pi_1(X, x_0)\} \longleftrightarrow \{\text{rivestimenti puntati di } X\}$$
$$p_*(\pi_1(Y, y_0)) \longleftarrow (Y, y_0)$$
$$H \longrightarrow \tilde{X}/H$$

dove denotiamo con $\tilde{X}$ il rivestimento universale di $X$, che ricordiamo essere costruito come lo spazio delle classi di omotopia di cammini in $X$ che partono dal punto base. La mappa di rivestimento è

$$\begin{aligned} \tilde{X} &\to X \\ [\gamma] &\mapsto \gamma(1) \end{aligned}$$

e la fibra di $x_0$ è il gruppo fondamentale $\pi_1(X, x_0)$.

## 4.3 Teoria di Galois Topologica

Dato un rivestimento $p : Y \to X$, definiamo

$$G(Y/X) = Aut_X Y = \{f : Y \to Y | f \in Aut(Y), p \circ f = p\}$$

il gruppo delle trasformazioni del rivestimento. Esso agisce liberamente e propriamente su $Y$. Quindi sulle fibre del rivestimento $p : Y \to X$ agiscono $G(Y/X)$ a destra e $\pi_1(X)$ a sinistra, in modo compatibile.

Denotiamo con $N(\pi_1(Y))$ il normalizzante di $\pi_1(Y)$ in $\pi_1(X)$. Abbiamo in generale la sequenza esatta di gruppi

$$1 \to \pi_1(Y) \to N(\pi_1(Y)) \to G(Y/X) \to 1$$

da cui si ottiene $G(Y/X) \simeq N(\pi_1(Y))/\pi_1(Y)$.

Se il rivestimento è normale $N(\pi_1(Y)) = \pi_1(X)$

$$1 \to \pi_1(Y) \to \pi_1(X) \to G(Y/X) \to 1$$

dunque $G(Y/X) \simeq \pi_1(X)/p_*\pi_1(Y)$.

In particolare se $Y \to X$ è normale e $\tilde{X}$ è il rivestimento universale $\tilde{X} \to Y \to X$, vale $G(\tilde{X}/X) = \pi_1(X)$ e $G(\tilde{X}/Y) = \pi_1(Y)$. Dalla sequenza esatta

$$1 \to G(\tilde{X}/Y) \to G(\tilde{X}/X) \to G(Y/X) \to 1$$

otteniamo $G(Y/X) \simeq G(\tilde{X}/X)/G(\tilde{X}/Y)$.

**Teorema 4.3.1.** *Sia $Z$ un rivestimento connesso e di Galois di $X$. Allora c'è una corrispondenza biunivoca tra le classi di isomorfismo di rivestimenti intermedi e le classi di coniugio di sottogruppi del gruppo $G(Z/X)$. A rivestimenti normali corrispondono sottogruppi normali.*

$$\begin{aligned}\{\textit{rivestimenti intermedi tra } Z \textit{ e } X\} &\longleftrightarrow \{\textit{sottogruppi di } G(Z/X)\}\\ Y &\longrightarrow G(Z/Y)\\ Z/H &\longleftarrow H\end{aligned}$$

*La stessa corrispondenza dà luogo ad una corrispondenza biunivoca tra il reticolo dei rivestimenti puntati intermdi e il reticolo dei sottogruppi del gruppo $G(Z/X)$.*

## 4.4 Omologia e Coomologia dei Gruppi

Sia $\Gamma$ un gruppo, in notazione moltiplicativa.
$\mathbb{Z}\Gamma$ denota lo $\mathbb{Z}$-modulo libero, generato dagli elementi di $\Gamma$, i.e. un elemento $a \in \mathbb{Z}\Gamma$ si esprime unicamente nella forma $a = \sum_{\gamma\in\Gamma} a(\gamma)\gamma$, dove $a(\gamma) \in \mathbb{Z}$ e $a(\gamma) = 0$ per quasi ogni elemento del gruppo. La moltiplicazione di $\Gamma$ si estende unicamente ad un prodotto bilineare $\mathbb{Z}\Gamma \times \mathbb{Z}\Gamma \to \mathbb{Z}\Gamma$, rendendo $\mathbb{Z}\Gamma$ un anello, chiamato *anello di gruppo integrale* di $\Gamma$.
Un $\mathbb{Z}\Gamma$-modulo (sinistro), detto anche $\Gamma$-*modulo*, è un gruppo abeliano $A$ con una azione di $\Gamma$ su $A$. Per esempio, ogni $A$ ammette una struttura di modulo triviale, con $\gamma a = a$ per ogni $\gamma \in \Gamma$ e $a \in A$, quindi se $\varepsilon : \mathbb{Z}\Gamma \to \mathbb{Z}$ è la mappa di aumentazione, si ha $ra = \varepsilon(r) \cdot a$, per $r \in \mathbb{Z}\Gamma$.
Considerimo ora $\mathbb{Z}$ come $\mathbb{Z}\Gamma$-modulo con la $\Gamma$-azione triviale. Vedremo che le risoluzioni libere di questo modulo nascono da azioni libere di $\Gamma$ su complessi contraibili.
Un $\Gamma$-*complesso* è un CW-complesso $X$ con una azione di $\Gamma$ su $X$ che permuta le celle. Quindi per ogni $\gamma \in \Gamma$ abbiamo un omeomorfismo $x \mapsto x\gamma$ di $X$ tale che l'immagine $\gamma\sigma$ di ogni cella $\sigma$ di $X$ è ancora una cella di $X$.
Se $X$ è un $\Gamma$-complesso allora l'azione di $\Gamma$ su $X$ induce un'azione di $\Gamma$ sul complesso di catene cellulari $C_*(X)$, che diventa dunque un complesso di catene di $\Gamma$-moduli. Inoltre l'aumentazione canonica $\varepsilon : C_0(X) \to \mathbb{Z}$, definita da $\varepsilon(v) = 1$ per ogni 0-cella di $X$, è una mappa di $\Gamma$-moduli.
Diremo che $X$ è un $\Gamma$-complesso *libero* se l'azione di $\Gamma$ permuta liberamente

le celle di $X$, i.e. $\gamma\sigma \neq \sigma$ per ogni $\sigma$ e $\gamma \neq 1$. In questo caso ogni modulo di catena $C_n(X)$ ha una $\mathbb{Z}$-base permutata liberamente da $\Gamma$, quindi $C_n(X)$ è un $\mathbb{Z}\Gamma$-modulo *libero* con un elemento di base per ogni $\Gamma$-orbita di celle. Infine se $X$ è contraibile, allora $H_*(X) \approx H_*(point)$, quindi la sequenza

$$\cdots \to C_n(X) \to C_{n-1}(X) \to \cdots \to C_0(X) \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \to 0$$

è esatta. Otteniamo il seguente risultato

**Proposizione 4.4.1.** *Sia $X$ un $\Gamma$-complesso libero contraibile. Allora il complesso di catene cellulari aumentato di $X$ è una risoluzione libera di $\mathbb{Z}$ su $\mathbb{Z}\Gamma$.*

*Esempio* 4.4.1. Supponiamo di avere $p : \tilde{X} \to X$ un rivestimento regolare con $\Gamma$ gruppo degli automorfismi di rivestimento. Se $X$ è un CW-complesso, allora $\tilde{X}$ eredita una CW-struttura tale che la $\Gamma$-azione ne permuta le celle. Le celle aperte di $\tilde{X}$ che stanno sopra una cella aperta $\sigma$ di $X$ sono semplicemente le componenti connesse della fibra di $p^{-1}\sigma$. Queste celle sono permutate in modo libero e transitivo da $\Gamma$, ed ognuna è mappata omeomorficamente su $\sigma$ da $p$. Quindi $\tilde{X}$ è un $\Gamma$-complesso libero e $C_*(\tilde{X})$ è un complesso di $\mathbb{Z}\Gamma$-moduli liberi, con un elemento di base per ogni cella di $X$.

### Complessi di Eilenberg-MacLane

E' naturale considerare ora $CW$-complessi $X$, che soddisfino le seguenti proprietà:

1. $X$ è connesso
2. $\pi_1(X) \simeq \Gamma$.
3. $\tilde{X}$ rivestimento universale di $X$ è contraibile.

Tale complesso $X$ si chiama *complesso di Eilenberg-MacLane* di tipo $(\Gamma, 1)$, che denotiamo $K(\Gamma, 1)$.

La seconda condizione è da interpretare nel senso che si è scelto un punto base $x \in X$ e l'isomorfismo specifico $\pi_1(X, x) \simeq \Gamma$.
La terza condizione è inoltre equivalente alle seguenti:

3'. $H_i(\tilde{X}) = 0$ per $i \geq 2$,

3''. $\pi_i(X) = 0$ per $i \geq 2$.

Se $X$ è un complesso $K(\Gamma, 1)$ allora il rivestimento universale $p : \tilde{X} \to X$ è un rivestimento regolare il cui gruppo è isomorfo a $\pi_1(X) = \Gamma$. Dunque otteniamo:

**Proposizione 4.4.2.** *Se $X$ è un $K(\Gamma, 1)$ allora il complesso di catene cellulari aumentato del rivestimento universale di $X$ è una risoluzione libera di $\mathbb{Z}$ su $\mathbb{Z}\Gamma$.*

### Co-invarianti

In generale, se $\Gamma$ è un gruppo e $M$ è un $\Gamma$-modulo, definiamo il gruppo di co-invarianti di $M$, denotato con $M_\Gamma$, come quoziente di $M$ per il sottogruppo additivo generato dagli elementi della forma $\gamma m - m$ con $\gamma \in \Gamma$ e $m \in M$. Equivalentemente

$$M_\Gamma = \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}\Gamma} M$$

dove consideriamo $\mathbb{Z}$ come $\mathbb{Z}\Gamma$-modulo destro, con $\Gamma$-azione triviale, che denotiamo anche con $M_\Gamma = \mathbb{Z} \otimes_\Gamma M$.
Definito il tensore co-invariante $\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}\Gamma} -$ possiamo costruire la coomologia dei gruppi seguendo due strade diverse. La prima è algebrica, tramite la coomologia del complesso tensorizzato:

**Definizione 4.4.1.** Sia $\Gamma$ un gruppo e $\varepsilon : F \to \mathbb{Z}$ una risoluzione proiettiva di $\mathbb{Z}$ su $\mathbb{Z}\Gamma$. Definiamo i *gruppi di omologia* di $X$ come

$$H_i(\Gamma) = H_i(F_\Gamma)$$

La seconda strada è topologica, da cui il funtore co-invariante nasce in modo naturale:

**Proposizione 4.4.3.** *Sia $Z$ un $\Gamma$-complesso libero e sia $X$ il complesso di orbita $Z/\Gamma$. Allora $C_*(X) \simeq C_*(Z)_\Gamma$.*

Se $X$ è un complesso $K(\Gamma, 1)$ con rivestimento universale $\tilde{X}$, allora sappiamo che $C_*(\tilde{X})$ è una risoluzione libera di $\mathbb{Z}$ su $\mathbb{Z}\Gamma$. Essendo la relazione tra i comolessi $C_*(\tilde{X})_\Gamma \simeq C_*(X)$, otteniamo una definizione alternativa della comologia del gruppo:

**Proposizione 4.4.4.** *Se $X$ è un $K(\Gamma, 1)$, allora $H_*(\Gamma) \simeq H_*(X)$.*

**Omologia e Coomologia con coefficienti**

Se $F$ è una risoluzione proiettiva di $\mathbb{Z}$ su $\mathbb{Z}\Gamma$ e sia $M$ un $\Gamma$-modulo. Definiamo *l'omologia di* $\Gamma$ *a coefficienti in* $M$ come

$$H_*(\Gamma, M) = H_*(F \otimes_{\mathbb{Z}\Gamma} M).$$

Quindi è una generalizzazione naturale della definizione di omologia, pensata a coefficienti in $M = \mathbb{Z}$.
Definiamo infine la *coomologia di* $\Gamma$ *a coefficienti in* $M$, tramite il funtore $Hom_\Gamma(-, M) = Hom_{\mathbb{Z}\Gamma}(-, M)$:

$$H^*(\Gamma, M) = H^*(Hom_\Gamma(F, M))$$

### 4.4.1 Risultati di Eilinberg e MacLane

Come il gruppo fondamentale $\pi_1(X)$ influenza la struttura omologica e coomologica dello *spazio* $X$? Consideriamo ora lo spazio topologico connesso per archi $X$ e i seguenti gruppi

- $\pi_n(X)$ è l'$n$-esimo gruppo di omotopia di $X$, costruito relativamente ad un punto base $x_0 \in X$. Il primo gruppo di omotopia $\pi_1(X)$ è il gruppo fondamentale di $X$.
- $H_n(X, G)$ è l'$n$-esimo gruppo di omologia singolare di $X$ a coefficienti in un gruppo $G$. Entrambi $G$ e $H_n(X, G)$ sono gruppi abeliani discreti. Se $G = \mathbb{Z}$ gruppo additivo degli interi, scriveremo $H_n(X)$.
- $H^n(X, G)$ è l'$n$-esimo gruppo di coomologia singolare di $X$ a coefficienti nel gruppo $G$. Entrambi $G$ e $H^n(X, G)$ sono gruppi topologici abeliani, i.e. gruppi che hanno una topologia rispetto a cui le operazioni di gruppo sono continue.

**Definizione 4.4.2.** Uno spazio $X$ si dice *asferico* se i gruppi di omotopia superiori sono triviali, i.e. $\pi_i(X) = 0$ per ogni $i \geq 2$.

**Definizione 4.4.3.** Sia $\Gamma$ un gruppo. Uno spazio $X$ si dice spazio $K(\Gamma, 1)$ se è connesso per archi, $\pi_1(X) = \Gamma$ e asferico.

Enunciamo il risultato di Eilenberg e MacLane.

**Teorema 4.4.1.** *Se $X$ è connesso per archi e asferico, i.e. se è un $K(\pi_1(X), 1)$, allora i gruppi di omologia e coomologia di $X$ sono determinati dal gruppo fondamentale $\pi_1(X)$. Più precisamente,*

$$H_n(X, G) \simeq H_n(\pi_1(X), G)$$
$$H^n(X, G) \simeq H^n(\pi_1(X), G)$$

*dove a sinistra abbiamo omologia e coomologia del gruppo fondamentale a coefficienti in $G$ e a sinistra omologia e coomologia singolare dello spazio $X$ a coefficienti in $G$.*

*Osservazione.* Come caso particolare otteniamo che se $X$ è uno spazio connesso per archi ed ha rivestimento universale regolare e contraibile $\tilde{X}$, con gruppo di rivestimento $\Gamma$, allora $H_*(\Gamma) \simeq H_*(X)$ l'omologia del gruppo è isomorfa all'omologia singolare di $X$.

### Esempi di CW-complessi $K(\Gamma, 1)$

*Esempio* 4.4.2. Sia $\Gamma = F(S)$ il gruppo libero generato da un insiemi $S$. Sia $X = \bigvee_{s \in S} S^1$, il bouquet di $s$ cerchi. $X$ è un complesso CW 1-dimensionale che ha un solo vertice e una 1-cella per ogni elemento di $S$. Il gruppo fondamentale $\pi_1(X) = F(S)$ e $H_i(X) = 0$ per $i \geq 2$ per ragioni di dimensione, quindi $X$ è un complesso $K(F(S), 1)$. Quindi

$$H_i(F(S)) = H_i(X) = \begin{cases} \mathbb{Z} & i = 0 \\ F(S)_{ab} & i = 1 \\ 0 & i > 1 \end{cases} \tag{4.2}$$

*Esempio* 4.4.3. Sia $g \geq 1$ un intero e sia

$$\Gamma = \big\langle a_1, \dots, a_g, b_1, \dots, b_g | \prod_{i=1}^{g} [a_i, b_i] = 1 \big\rangle.$$

$\Gamma$ è il gruppo di generatori $a_i, b_i$, $i = 1, \dots, g$ ed una relazione $\prod_{i=1}^{g} [a_i, b_i] = 1$. Allora $\Gamma$ è il gruppo fondamentale di una superficie orientabile chiusa $X$ di genere $g$. Il rivestimento universale $\tilde{X}$ di $X$ è una *superficie non-compatta* perché $\Gamma$ è infinito. Dunque $H_i(\tilde{X}) = 0$ per $i \geq 2$, e $X$ è un complesso $K(\Gamma, 1)$.

$$H_i(\Gamma) = H_i(X) = \begin{cases} \mathbb{Z} & i = 0, 2 \\ \mathbb{Z}^{2g} & i = 1 \\ 0 & i > 2 \end{cases} \tag{4.3}$$

*Esempio* 4.4.4. Se $\Gamma = \mathbb{Z}^n$, il gruppo libero abeliano di rango $n$, allora il toro $n$-dimentionale $X = S^1 \times \cdots \times S^1$ ($n$ volte) è un $K(\Gamma, 1)$, perché il suo rivestimento universale è $\mathbb{R}^n$ che è contraibile.
Possiamo descivere questo esempio in termini dell'embedding del gruppo $\Gamma = \mathbb{Z}^n$ come sottogruppo discreto del gruppo di Lie $\mathbb{R}^n$. Infatti $X = S^1 \times \cdots \times S^1$ è il quoziente $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$.

### 4.4.2 Mappa tautologica

Sia $X$ spazio topologico connesso per archi e $\Gamma$ un gruppo. Se esiste un morfismo di gruppi

$$\phi : \pi_1(X) \to \Gamma$$

e uno spazio topologico $Y$ che sia uno spazio $K(\Gamma, 1)$, allora esiste un funzione continua $f : X \to Y$, che induce il morfismo di gruppi

$$\phi : \pi_1(X) \to \pi_1(Y) \simeq \Gamma$$

Se consideriamo proprio $\Gamma = \pi_1(X)$ e dunque $Y$ uno spazio $K(\pi_1(X), 1)$, la mappa continua $f : X \to Y$ è detta *mappa tautologica*. Essa induce un isomorfismo sui gruppi fondamentali ed ha la proprietà che l'omomorfismo indotto di algebre:

$$f^* : H^*(Y) \to H^*(X)$$

sia un *isomorfismo* in grado 0 ed 1, sia *iniettivo* in grado 2. Se anche $X$ è uno spazio di Eilenberg-MacLane $f^*$ è un isomorfismo in ogni grado.

Si può generalizzare quanto detto sostituendo $\mathbb{Z}$ con $\mathbb{R}$, considerato come $\pi_1(X)$-modulo con azione triviale di $\pi_1(X)$, ottenendo il morfismo di anelli

$$H^*(\pi_1(X), \mathbb{R}) \to H^*(X, \mathbb{R})$$

per cui valgono i risultati sopra esposti.

# Capitolo 5

# Invarianti topologici delle varietà di Kähler

## 5.1 Gruppi di Kähler

Quali gruppi possono essere gruppi fondamentali delle varietà di Kähler compatte? I risultati positivi nascono da gruppi fondamentali di varietà proiettive complesse lisce che abbiamo visto essere di Kähler. Mentre quelli negativi da restrizioni indotte dalla condizione di Kähler e dalla teoria di Hodge sulle varietà di Kähler compatte.

**Definizione 5.1.1.** Un gruppo si dice *gruppo di Kähler* se è il gruppo fondamentale di una qualche varietà di Kähler *compatta*.

La prima restrizione sui gruppi di Kähler consiste nel fatto che siano finitamente presentati, perché una varietà di Kähler compatta è in particolare una varietà differenziabile compatta, quindi ammette una triangolazione finita. Un gruppo finitamente presentabile che non sia un gruppo di Kähler sarà chiamato *gruppo non-Kähler*. Diamo ora degli esempi di gruppi di Kähler.

### Esempi di gruppi di Kähler

*Esempio* 5.1.1. La classe dei gruppi di Kähler è chiusa per prodotto diretto perché il prodotto di varietà di Kähler è Kähler con riferimento alla metrica prodotto.

*Esempio* 5.1.2. Essa è chiusa per passaggio a sottogruppi di indice finito perchè la metrica piò essere sollevata ai rivestimenti finiti.

*Esempio* 5.1.3. Ogni gruppo finito è di Kähler. Passando ai sottogruppi è sufficiente dimostrare che il gruppo simmetrico su $m$ lettere, $S_m$, è di Kähler. Questo agisce su $\Pi = \mathbb{CP}^s \times \cdots \times \mathbb{CP}^s$ ($m$ volte), permutando i fattori. Il quoziente $\Pi' = \Pi/S_m$ è una varietà proiettiva, singolare soltanto lungo l'immagine $\Delta' \subset \Pi'$ delle diagonali

$$\Delta = \{(x_1, \ldots, x_m)| \quad x_i = x_j \quad \text{per ogni } i \neq j\} \subset \Pi$$

Si sceglie un embedding proiettivo $\Pi' \subset \mathbb{CP}^N$ e si interseca $\Pi'$ con un sottospazio lineare $L \subset \mathbb{CP}^N$.
Se $d = \text{codim}_{\mathbb{CP}^N}(L) > \text{codim}_{\mathbb{CP}^N}(\Delta') = s$ (scelti opportunamente), possiamo scegliere $L$ in modo che non intersechi $\Delta'$, e quindi $X = L \cap \Pi'$ è liscia.
La sua antimmagine in $Y \subset \Pi$ non interseca $\Delta$ e può essere scelta come l'intersezione di $\Pi$ con un sottospazio lineare, sotto un embedding proiettivo di $\Pi$.
Fintanto che $\dim(Y) = \dim(\Pi) - \text{codim}(L) = ms - d \geq 2$, $Y$ è semplicemente connesso per il Teorema dell'Iperpiano di Lefschetz. Il gruppo del rivestimento $Y \to X$ è $S_m$, quindi $\pi_1(X) \simeq S_m$.

*Esempio* 5.1.4. Per ogni $n \in \mathbb{Z}$, il reticolo $\mathbb{Z}^{2n}$ è un gruppo di Kähler, perché è il gruppo fondamentale della varietà Abeliana $\mathbb{C}^n/\mathbb{Z}^{2n}$.

*Esempio* 5.1.5. Il gruppo fondamentale di 2-varietà orientabili chiuse è di Kähler, perchè le superfici orientabili ammettono una struttura complessa e in dimensione reale 2 la condizione di chiusura della 2 forma è banale.

## 5.2 Invarianti dalla Teoria di Hodge

Dalla teoria di Hodge otteniamo la decomposizione 3.1 per i gruppi di coomologia di una varietà di Kähler compatta

$$H^k(X, \mathbb{C}) = \bigoplus_{p+q=k} H^{p,q}(X).$$

e la simmetria di Hodge $H^{p,q}(X) = \overline{H^{q,p}(X)}$. Ne consegue il corollario:

**Corollario 5.2.1.** *I numeri di Betti dispari* $b_{2k+1}(X) = \dim_{\mathbb{C}} H^{2k+1}(X, \mathbb{C})$ *di una varietà di Kähler compatta sono pari.*

In particolare il primo numero di Betti

$$b_1(X) = \dim_{\mathbb{C}} H^1(X, \mathbb{C}) = \dim H^{0,1} + \dim H^{1,0} = h^{0,1} + h^{1,0} = 2h^{1,0}$$

deve essere pari. Questo risultato ci fornisce un esempio di varietà non Kähler. Consideriamo la superficie di Hopf che è un quoziente compatto di $\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$ per l'azione libera di un gruppo isomorfo a $\mathbb{Z}$ che agisce per trasformazione biolomorfa $(z_1, z_2) \mapsto (\lambda_1 z_1, \lambda_2 z_2)$, $0 < |\lambda_1| \leq |\lambda_2| < 1$. Lo spazio $\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$ è semplicemente connesso e il gruppo fondamentale di tale superficie $X$ è $\mathbb{Z}$. Per la formula di Hurewitz $H_1(X, \mathbb{Z}) \simeq \pi_1(X)_{ab} = \mathbb{Z}$, quindi $H_1(X, \mathbb{C}) \simeq \mathbb{C}$, e per dualità $H^1(X, \mathbb{C}) \simeq H_1(X, \mathbb{C})^* \simeq \mathbb{C}$. Il primo numero di Betti risulta $b_1(X) = 1$ dispari.

Più in generale, il primo numero di Betti eguaglia il rango dell'abelianizzazione che quindi deve essere pari.

$$b_1(X) = \operatorname{rk}\big(H_1(X, \mathbb{Z})\big) = \operatorname{rk}\big(H_1(X, \mathbb{Z})/tors\big)$$

Ricordando l'isomorfismo di Hurewitz 4.1

$$H_1(X, \mathbb{Z}) = \frac{\pi_1(X)}{[\pi_1(X), \pi_1(X)]}$$

se $\pi_1(X)$ è abeliano, dovrà avere rango pari. Quindi, per esempio, $\mathbb{Z}$ non può essere un gruppo di Kähler.

*Esempio* 5.2.1. Combinando questo risultato con l'esempio 5.1.2 otteniamo che se un gruppo $\Gamma$ ammette un sottogruppo $\Gamma' \leqslant \Gamma$ di indice finito tale che $b_1(\Gamma')$ sia dispari, allora $\Gamma$ non può essere un gruppo di Kähler. In particolare gruppi liberi non triviali, ammettono sempre sottogruppi di indice finito di rango dispari, quindi non possono essere di Kähler.

### 5.2.1 Varietà di Albanese

Sia $X$ una varietà di Kähler compatta di dimensione complessa $n$.
Definiamo la varietà di Albanese di $X$ come

$$Alb(X) = \frac{H^0(X, \Omega_X^1)^*}{j(H_1(X, \mathbb{Z}))}.$$

L'omomorfismo di gruppi $j : H_1(X,\mathbb{Z}) \to H^0(X,\Omega^1_X)^*$ è definito dall'integrazione

$$\begin{aligned} j : H_1(X,\mathbb{Z}) &\to H^0(X,\Omega^1_X)^* \\ [\gamma] &\mapsto (\omega \mapsto \int_\gamma \omega) \end{aligned}$$

Si può dimostrare che se $X$ è una varietà proiettiva, anche $Alb(X)$ è proiettiva.

Vediamo che l'immagine $j(H_1(X,\mathbb{Z})) = \mathrm{Im}(H_1(X,\mathbb{Z}) \to H_1(X,\mathbb{C})) \simeq H_1(X,\mathbb{Z})/torsion$ forma un reticolo di $H^0(X,\Omega^1_X)^*$.
Dalla teoria di Hodge abbiamo la decomposizione del primo gruppo di coomologia $H^1(X,\mathbb{C}) \simeq H^0(X,\Omega^1_X) \oplus \overline{H^0(X,\Omega^1_X)} = H^{1,0}(X) \oplus \overline{H^{1,0}(X)}$.
Consideriamo il diagramma

$$\begin{tikzcd}
H_1(X,\mathbb{Z}) \arrow[r, "j"] \arrow[ddrr] & H_1(X,\mathbb{R}) \arrow[r, hook] \arrow[ddr, dashed] & H_1(X,\mathbb{C}) \simeq H^1(X,\mathbb{C})^* \arrow[d, "\wr"] \\
 & & (H^{1,0}(X))^* \oplus (\overline{H^{1,0}(X)})^* \arrow[d] \\
 & & (H^{1,0}(X))^*
\end{tikzcd}$$

$H_1(X,\mathbb{R})$ è un sottospazio reale dello spazio complesso, invariante per coniugio, $H_1(X,\mathbb{C})$. Utilizziamo la dualità di Poincarè e la decomposizione di Hodge per identificare $H_1(X,\mathbb{C}) \simeq H^{2n-1}(X,\mathbb{C}) \simeq H^1(X,\mathbb{C})^* = (H^{1,0}(X))^* \oplus \overline{(H^{1,0}(X))^*}$ e consideriamo la proiezione su $(H^{1,0}(X))^*$. La freccia tratteggiata è un isomorfismo $\mathbb{R}$-lineare di spazi vettoriali reali, inoltre poiché $\big(H_1(X,\mathbb{Z})/tors\big) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R} = H_1(X,\mathbb{R})$ allora $j(H_1(X,\mathbb{Z}))$ è un reticolo di $H_1(X,\mathbb{R})$ e anche di $(H^{1,0}(X))^*$. Dimensionalmente si avrà

$$\mathrm{rk}\,\big(H_1(X,\mathbb{Z})/tors\big) = b_1(X) = 2\dim_{\mathbb{C}} H^0(X,\Omega^1_X) = \dim_{\mathbb{R}}(H^0(X,\Omega^1_X))^*$$

Dunque $j(H_1(X,\mathbb{Z}))$ è un reticolo di $H^0(X,\Omega^1_X)^*$ di rango $b_1(X)$ e la varietà di Albanese è un toro complesso di dimensione complessa $\dim_{\mathbb{C}} Alb(X) = \frac{b_1(X)}{2}$.

Fissiamo un punto $x_0$ di $X$. Definiamo la mappa di Albanese, tramite l'integrazione:

$$\alpha_X : X \to Alb(X)$$
$$x \mapsto (\omega \mapsto \int_{x_0}^{x} \omega)$$

La mappa è ben definita. Infatti se si considerano due cammini diversi che collegano $x_0$ e $x$, la differenza degli integrali sarà un integrale lungo un cammino chiuso. La scelta di un differente punto iniziale $x_0'$ corrisponde ad una traslazione sul toro $Alb(X)$. Avremo la mappa indotta sui gruppi fondamentali

$$\pi_1(X, x_0) \twoheadrightarrow H_1(X, \mathbb{Z}) \twoheadrightarrow j(H_1(X, \mathbb{Z})) = \pi_1(Alb(X), 0)$$

dove abbiamo considerato

$$H_1(X, \mathbb{Z}) = \frac{\pi_1(X, x_0)}{\big[\pi_1(X, x_0), \pi_1(X, x_0)\big]}$$

e l'isomorfismo dei primi gruppi di omologia

$$H_1(X, \mathbb{Z})/torsion \simeq \pi_1(Alb(X), 0) \simeq \mathbb{Z}^{b_1(X)} \simeq H_1(Alb(X), \mathbb{Z}) \quad \text{essendo abeliano.}$$

### 5.2.2 Dimensione di Albanese

Dalla mappa di Albanese estraiamo ora un invariante omotopico, nel caso di varietà di Kähler compatte.

**Definizione 5.2.1.** Sia $X$ spazio topologico di tipo finito, ad esempio una varietà compatta oppure un CW-complesso. Si definisce $a(X)$ l'intero massimale $m$ per cui l'immagine di $\Lambda^m H^1(X, \mathbb{R})$ in $H^m(X, \mathbb{R})$ è *non* triviale.

*Osservazione.* $a(X)$ è limitato dall'alto dal $\min\{b_1(X), \dim(X)\}$.

**Proposizione 5.2.1.** *Sia X varietà di Kähler compatta. Allora $a(X)$ è la dimensione* reale *dell'immagine di X tramite la mappa di Albanese, nella varietà di Albanese.*

*Dimostrazione.* Sia $d$ la dimensione *reale* dell'immagine di Albanese di $X$, i.e. $d = \dim_{\mathbb{R}} \alpha_X(X)$ in $Alb(X)$. Utilizziamo la coomoogia a coefficienti complessi per determinare $a(X)$. Affermiamo che

$$\bigwedge^{d+1} H^1(X, \mathbb{C}) = 0 \quad \text{se} \quad \bigwedge^{\frac{d}{2}+1} H^0(X, \Omega^1_X) = 0$$

Infatti utilizzando la decomposizione di Hodge e lla formula di Künneth:

$$\begin{aligned} \bigwedge^{d+1} H^1(X, \mathbb{C}) &= \bigwedge^{d+1}\Big(H^0(X, \Omega^1_X) \oplus \overline{H^0(X, \Omega^1_X)}\Big) \\ &= \bigoplus_{k=0}^{d+1}\Big(\bigwedge^{k} H^0(X, \Omega^1_X) \otimes \bigwedge^{d+1-k} \overline{H^0(X, \Omega^1_X)}\Big) \end{aligned}$$

Dimostriamo che

$$\bigwedge^{\frac{d}{2}+1} H^0(X, \Omega^1_X) = 0$$

La varietà di Albanese é il toro complesso

$$Alb(X) = \frac{H^0(X, \Omega^1_X)^*}{j(H_1(X, \mathbb{Z}))}$$

In generale, dato il toro complesso $A = V/\Gamma$, si ha che il fibrato tangente $TA$ è triviale, dunque lo spazio delle 1-forme olomorfe $H^0(A, \Omega^1_A)$ è isomorfo a $V^*$. Otteniamo che mappa pullback $a^*_X$ è un isomorfismo di $\mathbb{C}$-spazi vettoriali

$$a^*_X : H^0(Alb(X), \Omega^1_{Alb(X)}) \xrightarrow{\sim} H^0(X, \Omega^1_X)$$

Siano dunque $\beta_1, \dots, \beta_{\frac{d}{2}+1} \in H^0(Alb(X), \Omega^1_{Alb(X)})$, 1-forme olomorfe sulla varietà di Albanese e $\alpha_1, \dots, \alpha_{\frac{d}{2}+1} \in H^0(X, \Omega^1_X)$ le corrispondenti 1-forme olomorfe su $X$.

$$\alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_{\frac{d}{2}+1} = a^*_X \beta_1 \wedge \dots \wedge \alpha^*_X \beta_{\frac{d}{2}+1} = a^*_X\big(\beta_1|_Y \wedge \dots \wedge \beta_{\frac{d}{2}+1}|_Y\big) = 0$$

dove $Y = a_X(X)$, immagine della mappa di Albanese di $X$, e l'ultima ugualianza vale perché coinvolge un numero di 1-forme olomorfe maggiore di $d/2$,

dimensione complessa dell'immagine della mappa di Albanese.
Resta da dimostrare che

$$\bigwedge^d H^1(X, \mathbb{C}) \neq 0 \quad \text{in coomologia.}$$

Se $\alpha \in H^0(X, \Omega_X^{d/2})$ è non nulla nell'immagine della mappa allora $\alpha \wedge \bar{\alpha}$ rappresenta un elemento non nullo nell'immagine di $\bigwedge^d H^1(X, \mathbb{C})$ in $H^d(X, \mathbb{C})$.

**Lemma 5.2.1.** *Siano $\alpha_1, \ldots, \alpha_{d/2} \in H^0(X, \Omega_X^1)$, tali che $\alpha = \alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_{d/2} \neq 0$ in $H^0(X, \Omega_X^{d/2})$. Allora $\alpha \wedge \bar{\alpha} \neq 0$ in $H^d(X, \mathbb{C})$.*

*Dimostrazione.* Sia $\omega$ la $(1,1)$ forma chiusa di Kähler su $X$. Se $\alpha \wedge \overline{\alpha} = 0$ in $H^d(X, \mathbb{C})$, allora avremmo

$$\int_X \alpha \wedge \overline{\alpha} \wedge \omega^{n-d} = 0$$

Ma a meno di una costante positiva, l'integranda è positiva e strettamente positiva in ogni punto in cui $\alpha \neq 0$, contraddizione. $\square$

*Fine del Teorema.* Dimostriamo che possiamo scegliere $\alpha_1 \ldots, \alpha_{d/2} \in H^0(X, \Omega_X^1)$ con $\alpha = \alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_{d/2} \neq 0 \in H^0(X, \bigwedge^{d/2} \Omega_X^1)$. Consideriamo le mappe tra le varietà

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "\alpha_X"] \arrow[dr, two heads, "\pi"'] & & Alb(X) \\ & Y \arrow[ur, hook, "j"'] & \end{tikzcd}$$

Il fibrato tangente della varietà di Albanese è triviale. Se denotiamo la dimensione di $Alb(X)$ con $g = b_1(X)/2$, avremo $TAlb(X) \simeq Alb(X) \times \mathbb{C}^g$ e $\Omega^1_{Alb(X)} \simeq Alb(X) \times \mathbb{C}^g$, quindi lo spazio delle forme è $H^0(Alb(X), \Omega^1_{Alb(X)}) \simeq \mathbb{C}^g$. Sia $y \in Y$ punto generico e $j(y) \in Alb(X)$. Se si sceglie un vettore dello spazio cotangente $\omega_0 := \omega_{j(y)} \in \Omega^1_{Alb(X),j(y)}$ esiste dunque una forma $\tilde{\omega}_0 \in H^0(Alb(X), \Omega^1_{Alb(X)})$, tale che $\tilde{\omega}_0(j(y)) = \omega_0$.
Scegliamo $x \in X$ tale che $\pi(x) = y$ e consideriamo le mappe tra gli spazi cotangenti

$$\begin{tikzcd} \Omega^1_{X,x} & & \Omega^1_{Alb(X),j(y)} \arrow[ll, "\alpha_X^*"'] \arrow[dl, two heads, "j^*"] \\ & \Omega_{Y,y} \arrow[ul, hook, "\pi^*"] & \end{tikzcd}$$

Scegliamo una base $\omega_1, \ldots, \omega_{d/2}$ di $\Omega^1_{Y,y}$. La mappa $j^*$ è suriettiva, dunque esistono $\omega^0_1, \ldots, \omega^0_{d/2} \in \Omega^1_{Alb(X),j(y)}$, tali che $j^*(\omega^0_i) = \omega^0_i|_Y = \omega_i$. Da quanto detto sopra esistono delle forme $\tilde{\omega}_1, \ldots, \tilde{\omega}_{d/2} \in H^0(Alb(X), \Omega^1_{Alb(X)})$, tali che $\tilde{\omega}_i(j(y)) = \omega_i \in \Omega^1_{Y,y}$. I pullback $\alpha^*_X\tilde{\omega}_1, \ldots, \alpha^*_X\tilde{\omega}_{d/2}$ sono forme in $H^0(X, \Omega^1_X)$ e valutate nel punto $x \in X$, sono funzioni lineari $(\alpha^*_X\tilde{\omega}_1)(x), \ldots, (\alpha^*_X\tilde{\omega}_{d/2})(x)$ su $T_{X,x}$. Consideriamo le mappa tra gli spazi tangenti

$$\begin{tikzcd} T_{X,x} \arrow[rr, "d_x\alpha_X"] \arrow[dr, two heads, "d_x\pi"'] & & T_{Alb(X),j(y)} \\ & T_{Y,y} \arrow[ur, hook, "d_yj"'] & \end{tikzcd}$$

Scelti $v_1, \ldots, v_{d/2}$ base di $T_{Y,y}$ esistono $\tilde{v}_1, \ldots, \tilde{v}_{d/2}$ su $T_{X,x}$ tali che $v_i = d\pi_x(\tilde{v}_i)$. Allora, per la proprietà del pullback

$$\big(\alpha^*_X\tilde{\omega}_1 \wedge \cdots \wedge \alpha^*_X\tilde{\omega}_{d/2}\big)(x)(\tilde{v}_1, \ldots, \tilde{v}_{d/2}) = \big(\tilde{\omega}_1 \wedge \cdots \wedge \tilde{\omega}_{d/2}\big)(y)(v_1, \ldots, v_{d/2}) \neq 0$$

Dunque $\alpha^*_X\tilde{\omega}_1 \wedge \cdots \wedge \alpha^*_X\tilde{\omega}_{d/2} \in H^0(X, \Omega^{d/2}_X)$ è la forma cercata.

$\square$

Sebbene $a(X)$ dimensione di Albanese per $X$ varietà di Kahler compatta sia un invariante dell'algebra coomologica, *non è un invariante per il gruppo fondamentale*. Possiamo estendere la definizione agli spazi asferici $K(\Gamma, 1)$, per ottenere un invariante di gruppo. Sia $\Gamma$ gruppo, definiamo

$$a(\Gamma) := a(K(\Gamma, 1))$$

dove il tipo di omotopia dello spazio $K(\Gamma, 1)$ dipende solo dal gruppo $\Gamma$. La mappa tautologica $f : X \to K(\pi_1(X), 1) \simeq Y$ induce un isomorfismo sui gruppi fondamentali ed ha la proprietà che l'omomorfismo indotto di algebre

$$f^* : H^*(Y) \to H^*(X)$$

è un isomorfismo in grado 1 e *iniettivo* in grado 2.
Siano $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in H^1(X)$, allora esistono $\beta_1, \ldots, \beta_m \in H^1(Y)$, tali che

$$\alpha_1 = f^*(\beta_1), \ldots, \alpha_m = f^*(\beta_m)$$

Si ha dunque:

$$\alpha_1 \smile \cdots \smile \alpha_m = f^*(\beta_1) \smile \cdots \smile f^*(\beta_m) = f^*(\beta_1 \smile \cdots \smile \beta_m)$$

Essendo $f^*$ un omomorfismo

$$\begin{array}{rllll} \text{se esistono} & \alpha_1, \dots, \alpha_m & \text{in } H^1(X) & \text{tali che} & \alpha_1 \smile \cdots \smile \alpha_m \neq 0 \\ \text{allora esistono} & \beta_1, \dots, \beta_m & \text{in } H^1(Y) & \text{tali che} & \beta_1 \smile \cdots \smile \beta_m \neq 0 \end{array}$$

Quindi in generale, se $\pi_1(X) = \Gamma$ e $Y$ è un $K(\Gamma, 1)$ si ha

$$a(X) \leq a(Y) = a(\pi_1(X))$$

*Esempio* 5.2.2. Sia $X$ una varietà abeliana, la mapa di Albanese è l'identità, quindi $a(X) = \dim_{\mathbb{R}} X = 2n$. D'altra parte ci sono superfici algebriche (per esempio sezioni di iperpiano iterate di varietà abeliane di dimensione $2n$) che hanno gruppo fondamentale $\mathbb{Z}^{2n}$ per ogni $n$. Sia $S$ una tale superficie. Si ha dunque che:

$$a(S) \leq 4 \leq a(\pi_1(S)) = a(\mathbb{Z}^{2n}) = a(K(\mathbb{Z}^{2n}, 1)) = 2n$$

### 5.2.3 Genere della Varietà

Definiamo ora un altro invariante dell'algebra coomologica, $g(X)$.

**Definizione 5.2.2.** Un sottospazio $U \subset H^1(X)$ si dirà *isotropico* se la mappa naturale

$$\bigwedge^2 U \to H^2(X) \quad \text{è identicamente nulla.}$$

Per le varietà di Kähler compatte abbiamo la decomposizione di Hodge $H^1(X, \mathbb{C}) = H^0(X, \Omega^1_X) \oplus \overline{H^0(X, \Omega^1_X)}$ quindi possiamo considerare e parlare di sottospazi isotropici dello spazio delle 1-forme olomorfe su $X$.

**Definizione 5.2.3.** Il *genere* di $X$ è definito:

$$g(X) = \max\{\dim U | U \in H^1(X, \mathbb{R}), U \text{ isotropico}\}$$

Il genere $g(X)$, diversamente da $a(X)$, è un invariante del gruppo fondamentale, i.e. $g(X) = g(K(\pi_1(X), 1))$.

*Dimostrazione.* Sia $Y \simeq K(\pi_1(X), 1)$. La mappa tautologica induce l'isomorfismo $f^* : H^1(Y, \mathbb{R}) \xrightarrow{\sim} H^1(X, \mathbb{R})$ e l'omomorfismo iniettivo $\phi : H^2(Y, \mathbb{R}) \hookrightarrow$

$H^2(X,\mathbb{R})$. Consideriamo il diagramma

$$\begin{tikzcd}
\bigwedge^2 H^1(X,\mathbb{R}) \arrow[r] & H^2(X,\mathbb{R}) \\
\bigwedge^2 H^1(Y,\mathbb{R}) \arrow[r] \arrow[u, "\wr"] & H^2(Y,\mathbb{R}) \arrow[u, hook, "\phi"']
\end{tikzcd}$$

Siano $\alpha_1, \alpha_2 \in H^1(X,\mathbb{R})$ e $\beta_1, \beta_2$ i corrispondenti elementi di $H^1(Y,\mathbb{R})$, cioè $f^*(\beta_i) = \alpha_i$. Allora se $\beta_1 \smile \beta_2 \in \bigwedge^2 H^1(Y,\mathbb{R})$

$$f^*(\beta_1 \smile \beta_2) = f^*(\beta_1) \smile f^*(\beta_2) = \alpha_1 \smile \alpha_2 \quad \text{in } \bigwedge^2 H^1(X,\mathbb{R})$$

Se l'immagine $\beta_1 \wedge \beta_2 = 0 \in H^2(Y,\mathbb{R})$ allora $f^*(\beta_1) \wedge f^*(\beta_2) = \alpha_1 \wedge \alpha_2 = 0 \in H^2(X,\mathbb{R})$, perché la mappa $\phi$ è un omomorfismo. Viceversa, se $\alpha_1 \wedge \alpha_2 = 0 \in H^2(X,\mathbb{R})$ allora $\beta_1 \wedge \beta_2 = 0 \in H^2(Y,\mathbb{R})$, perché la mappa $\phi$ è iniettiva. Quindi i sottospazi isotropici di $H^1(X,\mathbb{R})$ e $H^1(K(\pi_1(X),1),\mathbb{R})$ sono in biiezione, così come la loro dimensione massima. $\square$

*Osservazione.* Se $\dim_{\mathbb{C}} X = 1$ allora $g(X)$ è il genere della curva.

*Osservazione.* $a(X)$ e $g(X)$ non dipendono dal campo dei coefficienti usato per la coomologia, finché questo ha caratteristica zero.

# Capitolo 6

# Costruzioni geometriche indotte dalla topologia

Il gruppo fondamentale e l'algebra coomologica sono invarinti topologici. Nel capitolo precedente abbiamo definito, tramite la Teoria di Hodge, altri due invarianti delle varietà di Kähler compatte: la dimensione di Albanese e il genere, ed abbiamo dimostrato che sono invarianti topologici. In questo capitolo studiamo come questi invarianti topologici caratterizzino alcune proprietà geometriche di tali varietà. I teoremi che mostreremo sono esempi concreti del seguente "Metateorema" per le varietà di Kähler.

**Metateorema.** *Le varietà di Kähler sono varietà complesse la cui geometria si riduce all'algebra lineare.*

Un modo tramite cui si esprime il Metateorema, è il fatto che l'esistenza di fibrazioni delle varietà di Kähler su opportune varietà, proprietà geometrica, sia dominata da una parte dagli invarianti dall'algebra coomologica, quindi in questo senso dall'algebra lineare, e dall'altra dal gruppo fondamentale. Da qui l'interesse in particolare per i gruppi fondamentali delle varietà di Kähler compatte. Vedremo anche (cf. la fine del capitolo) che l'ipotesi di Kähler non può essere eliminata e questi risultati non valgono più in generale per varietà complesse compatte. La questione che ci porta ai risultati più interessanti di questa tesi è la seguente.

### La questione delle fibrazioni

Sia $f : X \to Y$ una mappa olomorfa suriettiva tra varietà complesse compatte, allora si avrà $f_* : \pi_1(X) \to \pi_1(Y)$, la mappa indotta sui gruppi fonda-

mentali. L'immagine $f_*(\pi_1(X))$ in $\pi_1(Y)$ è un sottogruppo di indice limitato dal numero di componenti connesse della fibra generica di $f$. In particolare se la mappa $f$ ha fibre connesse, la mappa indotta $f_*$ è suriettiva.
Il nostro interesse si concentra sul seguente problema. Sia $X$ una varietà di Kähler compatta con $\pi_1(X) \simeq \Gamma$ e $\rho : \Gamma \to \Delta$ un omomorfismo suriettivo di gruppi, è possibile trovare una mappa olomorfa suriettiva $f : X \to Y$ che induca $\rho$, ovvero tale che $f_* = \rho$ ?
Il problema in generale non ha risposta positiva. Sappiamo che dato un gruppo $\Delta$, la più piccola dimensione di una varietà complessa che abbia $\Delta$ come gruppo fondamentale è 3, d'altra parte $X$ potrebbe essere una superficie o una curva. Quindi supponendo che esista una mappa olomorfa che induca $\rho$, questa in generale potrà non essere suriettiva.
Se ci restringiamo a considerare $\Delta$ un gruppo di Kähler, abbiamo diversi candidati per la varietà target $Y$. Se scegliessimo uno spazio di Eilenberg-MacLane per esempio, otteremmo l'esistenza di una mappa continua da $X$ ad esso che induca $\rho$, ma in generale non olomorfa, o neanche suriettiva di nuovo per ragioni dimensionali.

Otteniamo una risposta positiva alla questione nel caso in cui $\Gamma$ è il gruppo fondamentale di una varietà di Kähler compatta $X$ e $\rho : \Gamma \to \Delta$ è un omomorfismo suriettivo su un gruppo di superficie di genere $\geq 2$. In questo caso troviamo curve complesse compatte *asferiche* il cui gruppo fondamentale è $\Delta$. Risulta che l'esistenza di una mappa olomorfa suriettiva su una curva di genere $\geq 2$ è *equivalente* all'esistenza di un omomorfismo suriettivo di $\pi_1(X)$ su un gruppo di superficie di genere $\geq 2$. Inoltre ogni suriezione $\rho$ di questo tipo è indotta da una mappa olomorfa se il genere del gruppo di superficie è esattamente $g(X)$, i.e. $\Delta \simeq \pi_1(C_g)$, con $C_g$ superficie di Riemann compatta di genere $g = g(X)$.

## 6.1 Varietà di Albanese e gruppi liberi Abeliani

Prima di lavorare su questo risultato studiamo il caso in cui il gruppo target $\Delta$ è un *gruppo libero abeliano.* Diamo un controesempio per cui la risposta alla questione è negativa e caratterizziamo poi il caso in cui risulti positiva, utilizzando le proprietà della mappa di Albanese.

La varietà di Albanese verifica la seguente proprietà universale

**Lemma 6.1.1.** *Ogni mappa olomorfa da $X$ ad un toro complesso fattorizza tramite la mappa di Albanese in un unico modo.*

Consideriamo l'omomorfismo suriettivo $\rho : \Gamma \to \Delta \simeq \mathbb{Z}^{2k}$. Vogliamo sapere se esiste una mappa olomorfa da $X$ ad un toro complesso di dimensione $k$, che induca $\rho$. Essendo il toro asferico si può sempre trovare una mappa continua da $X$ ad un toro liscio che induca $\rho$, ma questa mappa in generale non può essere scelta olomorfa, come mostra il seguente

*Controesempio.* Sia $X$ una superficie Abeliana *non* isogena al prodotto di curve ellittiche. Allora $X$ non ammette mappe olomorfe non costanti a curve ellittiche, quindi la proiezione

$$\pi_1(X) \simeq \mathbb{Z}^4 \to \mathbb{Z}^2$$

non può essere indotta da alcuna mappa olomorfa suriettiva da $X$ ad un toro complesso.

La risposta positiva alla questione emerge se assumiamo che il primo numero di Betti di $X$, che ricordiamo essere $b_1(X) = \dim_{\mathbb{C}} H^1(X, \mathbb{C})$, sia $2k$, ovvero che $k$ sia scelto massimale per il dato gruppo fondamentale $\pi_1(X) \simeq \Gamma$ di $X$. Questo è una conseguenza dell'esistenza della mappa di Albanese.

**Lemma 6.1.2.** *Sia $X$ varietà di Kähler compatta e $b_1(X)$ il primo numero di Betti di $X$. Se $\rho : \pi_1(X) \to \mathbb{Z}^{b_1(X)}$ un omomorfismo suriettivo. Allora esiste una mappa olomorfa suriettiva da $X$ ad un toro complesso di dimensione $\frac{1}{2}b_1(X)$ che induce $\rho$.*

*Dimostrazione.* Possiamo identificare $\mathbb{Z}^{b_1(X)} = \pi_1(Alb(X))$. La mappa di Albanese induce una suriezione che può differire da $\rho$

$$\pi_1(X, x_0) \xrightarrow{(\alpha_X)_*} \frac{\pi_1(X)}{[\pi_1(X), \pi_1(X)]}/tors = \pi_1(Alb(X), 0)$$

Comunque c'è sempre una $\phi_* : \pi_1(Alb(X)) \simeq \mathbb{Z}^{b_1(X)} \to \mathbb{Z}^{b_1(X)}$ suriettiva e quindi biettiva, $\phi_* \in GL(b_1(X), \mathbb{Z})$, tale che la composizione sia $\rho$

$$\begin{tikzcd}
\pi_1(X, x_0) \arrow[r, "\rho"] \arrow[d, "(\alpha_X)_*"] & \mathbb{Z}^{b_1(X)} \\
\pi_1(Alb(X), 0) \arrow[ur, "\phi_*"] &
\end{tikzcd}$$

Questa $\phi_*$ è realizzata da una mappa olomorfa, $\phi : Alb(X) \to Alb(X)$, tale che $\rho$ sia indotta da $\phi \circ \alpha_X$. $\square$

## 6.2 Fibrazione su superfici di Riemann

Per ogni spazio topologico di tipo finito abbiamo definito l'invariante intero $g(X)$ di cui richiamiamo la definizione

$$g(X) = \max\{\dim U | U \in H^1(X, \mathbb{R}), U \text{ isotropico}\}.$$

Il risultato finale di questo capitolo è il *Teorema di Siu-Beauville* (1988), che risponde positivamente, sotto opportune ipotesi, alla questione iniziale e descrive come, per le varietà di Kähler compatte, il genere di $X$ e l'esistenza di suriezioni tra i gruppi fondamentali governino l'esistenza di mappe olomorfe suriettive su superfici di Riemann compatte di genere $\geq 2$.
Determinante nella dimostrazione di questo risultato è il *Teorema di Catanese* (1989), che è una chiara espressione del Metateorema, infatti caraterizza queste particolari fibrazioni, oggetti geometrici della varietà di Kähler compatte tramite l'algebra coomologica e dunque l'algebra lineare. Il Teorema di Catanese afferma che data una varietà di Kähler compatta $X$ di genere $g(X) \geq 2$, esiste una mappa olomorfa $f : X \to C$ ad una curva complessa compatta di genere $g(X)$. Inoltre ogni sottospazio isotropico massimale $V \in H^1(X, \mathbb{R})$ è realizzato come pullback di tale mappa.
Il legame tra la nozione algebrica di sottospazio isotropico e la geometria della varietà è dato dal *Teorema di Castelnuovo-De Franchis* (1905), che descrive come costruire mappe olomorfe $f : X \to C$ da foliazioni definite da 1-forme olomorfe. Enunciamo questo teorema nella versione originale che ha come oggetto le superfici lisce proiettive e in quella di Catanese riadattata alle varietà di Kähler di qualsiasi dimensione. Il Teorema di Catanese sarà riformulato come Corollario di Castelnuovo De-Franchis e dimostreremo entrambi per arrivare al Teorema di Siu-Beauville.

**Teorema 6.2.1** (Castelnuovo-De Franchis)**.** *Sia $S$ una superficie proiettiva liscia. Siano $\omega_1, \omega_2 \in H^0(S, \Omega^1_S)$ due 1-forme olomorfe. Se $\omega_1 \wedge \omega_2 = 0 \in H^0(S, \omega_S)$ allora esiste $f : X \to C$ morfismo suriettivo a fibre connesse tale che $C$ sia una curva di genere $g(C) \geq 2$ e due 1-forme olomorfe $\alpha_1, \alpha_2 \in H^0(C, \Omega^1_C)$ tali che $\omega_i = f^*(\alpha_i)$.*

**Definizione 6.2.1.** Una fibrazione $f$, come sopra si chiama *pencil irrazionale*. Notiamo che il genere della curva $C$ deve essere $\geq 2$.

**Teorema 6.2.2** (Castelnuovo-De Franchis-Catanese)**.** *Sia $X$ una varietà di Kähler compatta che ammette un sottospazio isotropico massimale $U \subset H^0(X, \Omega^1_X)$ di dimensione $g \geq 2$. Allora esiste una mappa olomorfa suriettiva $f : X \to C$ su una superficie di Riemann compatta $C$ di genere $g(C) = g$, tale che $U$ è nell'immagine della mappa pullback $f^*$, e $f$ ha fibre connesse.*

*Dimostrazione.* Scegliamo una base $\omega_1, \ldots, \omega_g \in U$ di 1-forme olomorfe su $X$. Sia $Y \subset X$ sottoinsieme aperto non vuoto di $X$ in cui non tutte le $\omega_i$ si annullino. In ogni punto $p \in Y$ definiamo il sottospazio di $T_pX$

$$F_p = \bigcap_{1 \leq i \leq g} \ker(\omega_i(p)).$$

Essendo $U$ isotropico, si ha $\omega_i \wedge \omega_j = 0$ per ogni $i, j$. Questo implica che nei punti $p \in Y$ in cui $\omega_i(p) \neq 0 \neq \omega_j(p)$ allora $\ker(\omega_i(p)) = \ker(\omega_j(p))$.
Essendo le forme proporzionali e non tutte nulle in $p \in Y$ si ha che la $\dim F_p = \dim X - 1$. In ogni punto $p \in Y$ la distribuzione $F$ è definita localmente da una forma olomorfa dunque chiusa $\omega_i$, quindi la distribuzione è integrabile. Sciviamo $\omega_i = \phi_i \omega_1$ e consideriamo la seguente mappa

$$\begin{aligned} \phi : Y &\to \mathbb{CP}^{g-1} \\ p &\mapsto [1 : \phi_1(p) : \cdots : \phi_g(p)] \end{aligned}$$

Questa mappa è ben definita come mappa olomorfa su tutto $Y$.
Essendo $0 = d\omega_i = d(\phi_i \omega_1) = d\phi_i \wedge \omega_1$ si ha come sopra che $d\phi_i(\ker(\omega_1)) = 0$, dunque le $\phi_i$ sono costanti lungo le foglie della foliazione definita da $\omega_1$, quindi da tutte le forme $\omega_i$. Questo dice che la mappa $\phi : Y \to \mathbb{CP}^{g-1}$ è costante sulle foglie della foliazione e dunque le foglie della foliazione sono contenute negli insiemi di livello di $\phi$. Quindi l'immagine di $\phi$ è al più unidimensionale e $\dim U = g \geq 2$ implica che è una curva in $\mathbb{CP}^{g-1}$, che denotiamo con $D$. Vogliamo ora dimostrare che la mappa $\phi$ è olomorfa su tutto $X$. Supponiamo che $\phi : X \to \mathbb{CP}^{g-1}$ non sia olomorfa dunque consideriamo una composizione di blowup

$$\pi : X' \to X$$

tale che la mappa $\phi$ si estenda ad una mappa olomorfa

$$\phi' : X' \to D$$

Ora consideriamo la fattorizzazione di Stein, dove $\psi$ ha fibre connesse

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, "\psi"] \arrow[dr, "\phi'"'] & C \arrow[d, "g"] \\ & D \end{tikzcd}$$

Denotiamo allo stesso modo i pullback delle forme $\omega_i$ su $X'$. Allora $\omega_i = \phi_i \omega_1 = \phi_i \frac{1}{\psi_i} d\phi_i$ per la proporzionalità con $d\phi_i$, è una 1-forma razionale ed è il pullback di una qualche 1-forma di $C$, $\eta_i$. Se le $\eta_i$ non fossero regolari su $C$, allora le $\omega_i$ avrebbero poli, e questo porterebbe ad una contraddizione.
Abbiamo trovato $\eta_1, \ldots, \eta_g \in H^0(C, \Omega^1_C)$ linearmente indipendenti su $C$, quindi certamente il genere di $g(C)$ sarà $\geq g$. Affermiamo che è esattamente $g$. Infatti, se supponiamo che $g(C) > g$, potremmo trovare $\eta_{g+1}, \ldots, \eta_{g(C)}$ tali che $H^0(C, \Omega^1_C) \supseteq W = \left\langle \eta_1, \ldots, \eta_{g(C)} \right\rangle$ isotropico.

$$U' := \psi^* W = \left\langle \psi^*\eta_1, \ldots, \psi^*\eta_{g(X)} \right\rangle = \left\langle \omega_1, \ldots, \omega_g, \psi^*\eta_{g+1}, \ldots, \psi^*\eta_{g(C)} \right\rangle$$

$U'$ è genetato da $g(C)$ 1-forme olomorfe linearmente indipendenti, inoltre è isotropico $\psi^*\eta_i \wedge \psi^*\eta_j = \psi^*(\eta_i \wedge \eta_j) = 0$. Abbiamo una contraddizione, perché $\dim U$ è massimale per ipotesi.
Infine osserviamo che le componenti degli exceptional locus del blowup $\pi : X' \to X$, sono fibrati $\mathbb{CP}^r$, per qualche $r$. Essendo $\psi$ una mappa olomorfa da $X$ ad una superficie di Riemann di genere $\geq 2$, essa deve essere *costante* su ogni $\mathbb{CP}^r$. Se per ogni $x \in X$ la mappa $\psi$ è costante sulla fibra, $\psi|_{\pi^{-1}(x)}$, allora la mappa $\psi$ fattorizza[1] ad ogni passo della risoluzione, per ottenere infine $\psi' : X \to C$, tale che $\psi = \psi' \circ \pi$.

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "\pi"'] & C \\ X \arrow[ur, "\psi'"'] & \end{tikzcd}$$

Questa $\psi' : X \to C$ è la mappa cercata. $\square$

Il teorema di Castelnuovo-De Franchis appena dimostrato, vale con la stessa dimostrazione quando si ha uno spazio isotropico di 1-forme *chiuse* su una varietà complessa. Nel caso Kähleriano la proprietà di chiusura discende

[1] O.Debarre, *Higher-Dimentional Algebraic Geometry*, Lemma 1.15, p.14

dal $\partial\bar{\partial}$-Lemma. Inoltre ogni superficie compatta complessa le 1-forme olomorfe sono chiuse.

Usando la Teoria di Hodge, il Teorema di Castelnuovo-De Franchis implica il seguente Teorema di Catanese come Corollario.

**Teorema 6.2.3** (Catanese)**.** *Sia $X$ una varietà di Kähler compatta con $g(X) \geq 2$. Allora esiste una mappa olomorfa suriettiva $f : X \to C$, a fibre connesse, con $C$ una superficie di Riemann compatta di genere $g(X)$. Inoltre, ogni sottospazio isotropico massimle $V \subset H^1(X, \mathbb{R})$ è realizzato come pullback di $f^*(V')$ per tale mappa $f$.*

*Dimostrazione.* Sia $V \subset H^1(X, \mathbb{R})$ sottospazio isotropico massimale e scegliamo $\phi_1, \dots, \phi_{g(X)}$ forme armoniche che rappresentano una base di $V$.
$H^1(X, \mathbb{R}) \subset H^1(X, \mathbb{R}) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = H^1(X, \mathbb{C}) = H^0(X, \Omega^1_X) \oplus \overline{H^0(X, \Omega^1_X)}$ che è invariante per coniugio. Considerando quindi il diagramma

$$\begin{tikzcd}
 & \overline{H^0(X;\Omega^1_X)} \\
\phi_i \in H^1(X,\mathbb{R}) \arrow[ur, "\simeq_{\mathbb{R}}"] \arrow[r, hook] \arrow[dr, "\simeq_{\mathbb{R}}"'] & H^0(X,\Omega^1_X) \oplus \overline{H^0(X,\Omega^1_X)} \arrow[u] \arrow[d] \\
 & \omega_i \in H^0(X,\Omega^1_X)
\end{tikzcd}$$

possiamo scrivere ogni $\phi_i = \omega_i + \bar{\omega_i}$, con $\omega_i \in H^0(X, \Omega^1_X)$. La decomposizione di Hodge del prodotto

$$[\phi_i \wedge \phi_j] = [\omega_i \wedge \omega_j + \omega_i \wedge \bar{\omega_j} + \bar{\omega_i} \wedge \omega_j + \bar{\omega_i} \wedge \bar{\omega_j}] = 0$$

in $H^2(X, \mathbb{C}) = H^0(X, \Omega^2_X) \oplus H^{1,1}(X) \oplus \overline{H^0(X, \Omega^2_X)}$ implica che $\omega_i \wedge \omega_j = 0$ per ogni $i, j = 1, \dots, g(X)$.
Le classi di coomologia reale $\phi_1, \dots, \phi_{g(X)}$ sono linearmente indipendenti su $\mathbb{R}$, quindi sono linearmente indipendenti su $\mathbb{C}$ in $H^1(X, \mathbb{C}) = H^1(X, \mathbb{R}) \otimes \mathbb{C}$. Dunque le 1-forme olomorfe $\omega_1, \dots, \omega_{g(X)}$ generano un sottospazio isotropico $U \subset H^0(X, \Omega^1_X)$ di dimensione complessa $g(X)$. Per il Teorema di Castelnuovo-De Franchis, da $U$ costruiamo una mappa olomorfa suriettiva $f : X \to C$ a fibre connesse, con $g(C) = g(X)$, tale che $V$ sia nell'immagine del pullback $f^*$. $\square$

Infine dimostriamo il teorema di Siu-Beaville, che mostra come l'esistenza di fibrazioni olomorfe su superfici di Riemann compatte sia controllata dal gruppo fondamentale.

**Teorema 6.2.4** (Siu-Beauville)**.** *Sia $X$ una varietà di Kähler compatta e $g \geq 2$ un intero. Allora $X$ ammette una mappa olomorfa suriettiva ad una qualche superficie di Riemann compatta di genere $g' \geq g$, a fibre connesse se e solo se esite un omomorfismo suriettivo $h : \pi_1(X) \to \pi_1(C_g)$, con $\pi_1(C_g)$ che sia il gruppo fondamentale di una superficie di Riemann di genere $g$.*
*Se $\rho : \pi_1(X) \to \pi_1(C)$ è un omomorfismo suriettivo e $g(C) = g(X) \geq 2$ allora esiste una mappa olomorfa suriettiva a fibre connesse da $X$ su una qualche superficie di Riemann di genere $g(X)$, che induce $\rho$.*

*Dimostrazione.* Se la mappa olomorfa non-costante a fibre connesse $f : X \to C_{g'}$ esiste, allora induce un omomorfismo suriettivo $f_* : \pi_1(X) \to \pi_1(C_{g'})$. Essendo $g(C_{g'}) \geq g(C_g)$, $\pi_1(C_{g'})$ ammette una mappa suriettiva su $\pi_1(C_g)$.
Viceversa, sia $h : \pi_1(X) \to \pi_1(C_g)$ l'omomorfismo suriettivo. Essendo $C_g$ uno spazio di Eilemberg-MacLane $K(\pi_1(C_g), 1)$, esiste una classe di omotopia di mappe continue $f : X \to C_g$ che induce $h$. L'omomorfismo di algebre indotto $f^* : H^*(C_g, \mathbb{C}) \to H^*(X, \mathbb{C})$ è *iniettivo* in grado 1 perché l'omomorfismo suriettivo tra i gruppi fondamentali induce un omomorfismo suriettivo tra le abelianizzazioni, i.e. i primi gruppi di omologia e dualizzando si ottiene un omomorfismo iniettivo in coomologia. Questo omomorfismo mappa sottospazi isotropici di $H^1(C_g, \mathbb{C})$ in sottospazi isotropici di $H^1(X, \mathbb{C})$ e ogni sottospazio isotropico è contenuto in un isotropico massimale.
Dato il sottospazio isotropico massimale di $H^1(X, \mathbb{C})$, il Teorema di Catanese mostra che esiste una mappa olomorfa da $X$ ad una curva, che chiamiamo $C'$, che può avere genere maggiore di $g$, se i pullback di sottospazi isotropici massimali da $C_g$, non sono massimali su $X$.
Quando $g(C_g) = g(X)$, la curva $C'$ deve avere genere $g(X)$. Identificando opportunamente i gruppi fondamentali di $C_g$ e $C'$, la mappa olomorfa ottenuta induce $h$. □

*Osservazione.* Il teorema di Siu-Beauville appenna dimostrato mostra che gli omomorfismi suriettivi verso gruppi fondamentali di superficie *massimali* sono realizzate da mappe olomorfe, sebbene questo possa non essere vero in generale se cade l'assunzione di massimalità sul genere della curva. Esprimiamo questo come il seguente

**Corollario 6.2.1.** *Sia $\Gamma = \pi_1(X)$ gruppo fondamentale di una varietà di Kähler compatta $X$. Definiamo*

$$m := \max\{g \geq 2 \mid \exists\ \Gamma \twoheadrightarrow \pi_1(C_g) \text{ suriettivo}\}$$

*dove $\pi_1(C_g)$ è il gruppo fondamentale di una superficie di Riemann compatta di genere $g$. Allora $m = g(X)$.*

*Osservazione.* Una varietà di Kähler compatta ammette una mappa olomorfa suriettiva su una superficie di Riemann di genere $g \geq 2$ se e solo se il suo gruppo fondamentale ha un omomorfismo suriettivo al gruppo fondamentale di una superficie di genere $\geq 2$ se e solo se il genere di $X$ è almeno 2. Questo ci suggerisce la seguente definizione:

**Definizione 6.2.2.** Sia $\Gamma$ un gruppo di Kähler, i.e. gruppo fondamentale di una varietà di Kahelr compatta. Diciamo che $\Gamma$ è *fibrato* se $g(\Gamma) \geq 2$, i.e., se ogni varietà di Kähler compatta che ha come gruppo fondamentale $\Gamma$, fibra su una superficie di Riemann compatta di genere $\geq 2$.

*Osservazione.* Supponiamo che un gruppo $\Gamma$ ammetta un omomorfismo suriettivo $\rho : \Gamma \twoheadrightarrow F_r$ su un gruppo libero $F_r \simeq \mathbb{Z}^{*r}$ di rango $r$. Per i risultati di Eilenberg-MacLane $H^*(F_r, \mathbb{R}) \simeq H^*(B, \mathbb{R})$ dove $B$ è il bouquet di $r$ circonferenze. In particolare $H^1(F_r, \mathbb{R}) = \mathbb{R}^r$ e $H^2(F_r, \mathbb{R}) = 0$ perché $B$ è un CW-complesso unidimensionale. Ogni sottospazio di $H^1(F_r, \mathbb{R})$ è dunque isotropico ed è massimale se coincide con lo spazio stesso. Consideriamo la mappa $f : K(\Gamma, 1) \to K(F_r, 1)$ che induce la suriezione $\rho$ tra i gruppi fondamentali. Il morfismo $f^* : H^1(F_r, \mathbb{R}) \to H^1(K(\Gamma, 1), \mathbb{R}) \simeq H^1(\Gamma, \mathbb{R})$ è iniettivo, quindi l'immagine dello spazio isotropico $H^1(F_r, \mathbb{R})$ in $H^1(\Gamma, \mathbb{R})$ è un sottospazio isotropico di dimensione $r$. Poiché il genere è un invariante del gruppo fondamentale possiamo affermare che $g(\Gamma) \geq r$.
Sia ora $\Gamma$ un gruppo di Kähler e $X$ varietà di Kähler tale che $\pi_1(X) \simeq \Gamma$. Se imponiamo $r \geq 2$ siamo nelle ipotesi del Teorema di Catanese e otteniamo una mappa olomorfa suriettiva a fibre connesse $X \to C_{g(X)}$ su una superficie di Riemann compatta di genere $g(X) \geq r \geq 2$. Per il Teorema di Siu-Beauville esiste una mappa suriettiva $\Gamma \twoheadrightarrow \pi_1(C_r)$ con $\pi_1(C_r)$ gruppo fondamentale di una superficie di Riemann di genere esattamente $g(C_r) = r$. Quest'ultimo surgetta su $F_r$.

Da queste considerazioni otteniamo la seguente caratterizzazione

**Proposizione 6.2.1.** *$\Gamma$ gruppo di Kähler è fibrato se e solo se $\Gamma$ ammette un omomorfismo suriettivo su un gruppo libero di rango $\geq 2$*

*Osservazione.* L'esempio della superficie Abeliana che abbiamo visto sopra mostra che l'esistenza di una mappa olomorfa suriettiva su una superficie di Riemann compatta di genere 1 *non* è un invariante sotto deformazioni della struttura complessa. A posteriori *non* è una proprietà dell'algebra coomologica o del gruppo fondamentale.

*Osservazione.* L'ipotesi di Kähler non può essere tolta dai risultati appena esposti. Infatti ci sono esempi di varietà complesse compatte di genere $\geq 2$, il cui gruppo fondamentale surietta su un gruppo di superficie di genere $\geq 2$, sebbene queste varietà non ammettano mappe olomorfe non-costanti su superfici di Riemann di genere $\geq 2$.

### 6.2.1 Fibrazioni da superfici complesse compatte

La caratterizzazione di varietà complesse che fibrano in modo olomorfo su superfici di Riemann iperboliche, in termini di omomorfismi del gruppo fondamentale a gruppi di superficie, dipende dalla condizione di Kähler e in particolare dalla Teoria di Hodge. Questo risultato è vero per tutte le superfici complesse compatte, senza assunzioni addizionali.

*Osservazione.* E' interessante notare che i risultati di Castelnuovo-Da Franchis e Siu-Beauville valgono per le superfici complesse compatte, ma il Teorema di Catanese, che permette di dimostrare il secondo dal primo, non può essere dimostrato senza l'ipotesi di Käheler.

*Controesempio.* Sia $X$ una superficie primaria di Kodaira[2], i.e. una superficie ellittica su una curva ellittica tale che $b_1(X) = 3$, quindi non Kähler, $b_2(X) = 4$ e con segnatura zero.
L'immagine di $\bigwedge^2 H^1(X, \mathbb{R})$ in $H^2(X, \mathbb{R})$ è un sottospazio isotropico per il prodotto cup, perché $\bigwedge^4 H^1(X, \mathbb{R}) = 0$.
Ma la segnatura del prodotto cup su $H^2(X, \mathbb{R})$ è zero, quindi la dimesione massimale di un sottospazio isotopico è $\frac{1}{2}b_2(X) = 2$. Quindi in $H^1(X, \mathbb{R})$ c'è un sottospazio isotropico di dimensione almeno 2.
D'altra parte il primo numero di Betti è troppo piccolo per far si che $X$ ammetta una mappa suriettiva su una curva di genere $\geq 2$. Se $f : X \to C$

[2]Una superficie di Kodaira è una superficie complessa compatta, con dimensione di Kodaira zero e primo numero di Betti dispari. Mai algebrica. Primarie: hanno fibrato canonico banale

Enunciamo per completezza il teorema di Siu-Beauville per le superfici complesse compatte

**Teorema 6.2.5** (Kotschick). *Sia $X$ una superficie complessa compatta e $g \geq 2$ intero. Allora $X$ ammette una mappa olomorfa suriettiva su una superficie di Riemann compatta di genere $g' \geq g$, avente fibre connesse se e solo se esiste un omomorfismo suriettivo $h : \pi_1(X) \to \pi_1(C_g)$ con $\pi_1(C_g)$ gruppo fondamentale di una superficie di Riemann compatta di genere $g$.*

# Capitolo 7

# Superfici isogene ad un prodotto

In questo capitolo studiamo le superfici isogene ad un prodotto alto, i.e. superfici che ammettono un rivestimento non ramificato finito isomorfo al prodotto di curve di genere $\geq 2$, che vedremo essere equivalente a richiedere che tale rivestimento sia di Galois. In particolare ci interessa la caratterizzazione di tali superfici in termini di gruppo fondamentale e lo studio del gruppo fondamentale stesso. Richiamiamo alcune proprietà delle fibrazioni utili nella trattazione successiva.

## 7.1 Fibrazioni

Per fibrazione si intende un morfismo suriettivo a fibre connesse tra varietà lisce complete. Nel caso in cui $f : S \to B$, con $S$ superficie e $B$ curva di genere $b$, diremo che $f$ è *minimale* se non c'è alcuna $(-1)$-curva contenuta nella fibra, e denotiamo con $g$ il genere aritmetico della fibra $F$. Se la fibra ha genere $\geq 1$ il modello minimo è unico. Chiamiamo $f$ pencil di genere $b$ di curve di genere $g$, e pencil di genere alto se $b \geq 2$.

**Teorema 7.1.1** (Zeuthen-Segre). *Sia $f : S \to B$ un pencil di genere $b$ di curve di genere $g$. Allora abbiamo la seguente disugualianza per la caratteristica di Eulero-Poincaré topologica di $S$: $e(s) \geq 4(g-1)(b-1)$. Se $g \geq 2$, vale l'ugualianza se e solo se $f$ è un fibrato topologico.*

Abbiamo visto i Teoremi di Castelnuovo-De Franchis e Catanese nel capitolo precedente. Tramite quest'ultimo si può dimostrare il seguente

**Teorema 7.1.2** (Gromov). *Sia $X$ una varietà di Kähler compatta e assumiamo esista una suriezione $\pi_1(X) \to \Gamma$, dove $\Gamma$ ha una presentazione con $n$ generatori e $m$ relazioni, con $n \geq m+2$. Allora esiste una curva $B$ di genere $b$, con $b \geq 2$ e $2b \geq n-m$ e una fibrazione $f : X \to B$ tale che*

$$f^*(H^1(B, \mathbb{C})) \supset H^1(\Gamma, \mathbb{C}) \subset H^1(X, \mathbb{C}).$$

*Osservazione.* Il teorema di Siu-Beauville è un caso particolare di questo. Infatti il Teorema di Gromov si applica alla suriezione $\pi_1(X) \to \pi_1(C_g)$ sul gruppo fondamentale di una curva complessa compatta di genere $g$.

### Gruppo fondamentale orbifold di una fibrazione

Sia $X$ una varietà di Kähler compatta e $f : X \to B$ un pencil. Siano $t_1, \ldots . t_r$ punti di $B$ le cui fibre $F_i = f^{-1}(t_i)$ siano fibre multiple di $f$. Denotiamo con $m_i$ la molteplicità di $F_i$, i.e. il massimo comune denominatore delle componenti irriducibili di $F_i$.

**Definizione 7.1.1.** Il gruppo fondamentale orbifold della fibrazione $\pi_1(f) := \pi_1(b, m_1, \ldots, m_r)$ è definito come quoziente di $\pi_1(B - \{t_1, \ldots, t_r\})$ per il più piccolo sottogruppo normale che contiene $\{\gamma_1^{m_1}, \ldots, \gamma_r^{m_r}\}$, dove $\gamma_i$ è il loop geometrico semplice attorno a $t_i$, ovvero $\gamma_i$ è il coniugato, tramite un cammino semplice $\delta$, di un loop locale attorno a $t_i$. Osserviamo che un'altra scelta di $\gamma_i$ dà un elemento coniugato, quindi il gruppo è ben definito.

**Definizione 7.1.2.** Il gruppo fondamentale orbifold si dice di tipo iperbolico se il corrispondente rivestimento universale orbifold (ramificato) di $B$ è $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\} \simeq \{x + iy | y > 0, x \in \mathbb{R}\}$.

**Proposizione 7.1.1.** *Sia $f : X \to B$ una fibrazione da una varietà di Kähler compatta su una curva complessa compatta, abbiamo la sequenza esatta*

$$\pi_1(F) \to \pi_1(X) \to \pi_1(b, m_1, \ldots, m_r) \to 0$$

*dova $F$ è una fibra liscia di $f$.*

**Teorema 7.1.3.** *Sia $X$ una varietà di Kähler compatta e $(b, m_1, \ldots, m_r)$ un tipo iperbolico. Allora c'è una biiezione tra pencils $f : X \to B$ di tipo $(b, m_1, \ldots, m_r)$ e omomorfismi suriettivi $\pi_1(X) \to \pi_1(b, m_1, \ldots, m_r)$ di nucleo finitamente generato.*

## 7.2 Superfici isogene ad un prodotto

Sia $S$ una superficie algebrica liscia e $B$ una curva algebrica liscia. La mappa $f : S \to B$ si dice fibrazione a moduli costanti se tutte le fibre liscie sono isomorfe e in questo caso $S$ è bimeromorfa al quoziente $\frac{C_1 \times C_2}{G}$ del prodotto di due curve per l'azione di un gruppo finito $G$. Quando il gruppo agisce liberamente sul prodotto, diremo che $S$ è fortemente isogena ad un prodotto. Più in generale, una varietà complessa $X$ è isogena ad un prodotto alto se ammette un rivestimento non ramificato finito isomorfo al prodotto di curve di genere $\geq 2$. Questa proprietà è equivalente alla proprietà più forte di avere tale rivestimento di Galois, infatti le nozioni di varietà isogena e fortemente isogena ad un prodotto alto sono equivalenti.

**Definizione 7.2.1.** Una superficie $S$ si dice *isogena ad un prodotto* se ammette un rivestimento non ramificato finito isomorfo al prodotto di curve

$$u : C_1 \times C_2 \to S$$

di genere $g_i = g(C_i) \geq 1$. Se $g_i \geq 2$ diremo che $S$ è *isogena ad un prodotto alto.*

Il seguente Teorema caratterizza topologicamente superfici di tipo generale isogene ad un prodotto alto.

**Teorema 7.2.1.** *Una superficie $S$ è isogena ad un prodotto alto se e solo se $\pi_1(S)$ ammette un sottogruppo di indice finito $\Gamma$ isomorfo al prodotto diretto $\Pi_{g_1} \times \Pi_{g_2}$ di gruppi fondamentali di curve di genere $g_1, g_2 \geq 2$, inoltre se $d$ è l'indice di $\Gamma$ in $\pi_1(S)$ e vale*

$$e(S) = \frac{4(g_1 - 1)(g_2 - 1)}{d}. \tag{7.1}$$

*Dimostrazione.* Supponiamo che esista $p : C_1 \times C_2 \to S$ rivestimento non ramificato, $g(C_i) = g_i \geq 2$. $\pi_1(C_1 \times C_2) = \pi_1(C_1) \times \pi_1(C_2)$ e la mappa indotta sui gruppi fondamentali sarà

$$p_* : \pi_1(C_1) \times \pi_1(C_2) \to p_*(\pi_1(C_1) \times \pi_1(C_2)) \leqslant \pi_1(S) \tag{7.2}$$

Inoltre $e(S) \cdot d = e(C_1 \times C_2) = e(C_1) \cdot e(C_2) = 4(g_1 - 1)(g_2 - 1)$.
Viceversa, assumiamo di avere sottogruppo $\Gamma \leqslant \pi_1(S)$, prendiamo il rivestimento non ramificato associato. Sia $d$ l'indice di $\Gamma$ in $\pi_1(S)$. Basta dimostrare

il teorema nel caso $d = 1$, i.e. $\pi_1(S) \simeq \Gamma$.
Il primo passo consiste nel mostrare che $S$ ammette due pencils su $S$ distinti che forniscono una mappa olomorfa suriettiva ad un prodotto di curve $f = (f_1, f_2) : S \to C_1 \times C_2$.
L'isomorfismo $\pi_1(S) \simeq \Pi_{g_1} \times \Pi_{g_2}$ permette di selezionare due mappe suriettive $\pi_1(S) \to \Pi_{g_i}$, per $i = 1, 2$. Per il Teorema di Gromov 7.1.2 esistono due curve $B_i$ di genere $b_i \geq 2$ e $2b_i \geq 2g_i - 1$ e due fibrazioni

$$f_i : S \to B_i$$

tali che

$$f^*(H^1(B_i, \mathbb{C})) \supset H^1(\Pi_{g_i}, \mathbb{C}) \subset H^1(S, \mathbb{C})$$

Inoltre per le proprietà degli spazi di Eilenberg MacLane e la formula di Künnet

$$H^1(S, \mathbb{C}) \simeq H^1(\pi_1(S), \mathbb{C}) = H^1(\Pi_{g_1} \times \Pi_{g_2}, \mathbb{C}) = H^1(\Pi_{g_1}, \mathbb{C}) \oplus H^1(\Pi_{g_2}, \mathbb{C}).$$

Vogliamo dimostrare che questi due pencils sono distinti.
Se fossero uguali, avremmo una fibrazione $f : S \to B$, con $B$ curva di genere $g_1 + g_2$. Quindi avremmo la corrispondente suriezione di gruppi fondamentali $\pi_1(S) \to \Pi_{g_1+g_2}$ e l'omomorfismo delle algebre coomologiche indurrebbe l'isomorfismo sui primi gruppi di coomologia

$$H^1(\Pi_{g_1+g_2}, \mathbb{C}) \xrightarrow{\sim} H^1(\Pi_{g_1}, \mathbb{C}) \oplus H^1(\Pi_{g_2}, \mathbb{C}).$$

Studiamo in particolare l'omomorfismo indotto

$$\phi : \bigwedge^4 \left(H^1(\Pi_{g_1+g_2}, \mathbb{C})\right) \to H^4(\Pi_{g_1} \oplus \Pi_{g_2}, \mathbb{C}).$$

Consideriamo il diagramma

$$\begin{tikzcd}
\bigwedge^4 \left(H^1(\Pi_{g_1+g_2}, \mathbb{C})\right) \arrow[r] \arrow[d, "\delta"] \arrow[dr, "\phi"] & \bigwedge^4 \left(H^1(\Pi_{g_1}, \mathbb{C}) \oplus H^1(\Pi_{g_2}, \mathbb{C})\right) \arrow[d, "\rho"] \\
H^4(\Pi_{g_1+g_2}, \mathbb{C}) = 0 \arrow[r] & H^4(\Pi_{g_1} \oplus \Pi_{g_2}, \mathbb{C})
\end{tikzcd}$$

La mappa $\rho$ ha immagine non nulla, quindi $\phi$ è non nullo. D'altra parte l'omomorfismo $\phi$ fattorizza tramite la mappa $\delta$, quindi deve essere nullo.

Contraddizione.
Essendo i due pencils distinti, otteniamo una mappa olomorfa suriettiva $f = (f_1 \times f_2) : S \to C_1 \times C_2$. Consideriamo la fibrazione $f_2$, che fattorizza tramite $f$.

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "f_2"'] & C_1 \times C_2 \arrow[d] \\ & C_2 \end{tikzcd}$$

Il genere della *fibra* di $f_2$, che denotiamo con $g_1'$, dev'essere almeno $g_1$, perché $\Pi_{g_1}$ è quoziente del gruppo fondamentale della fibra. Per le assunzioni e per il Teorema di Zeuthen-Segre 7.1.1 abbiamo $e(S) = 4(g_1 - 1)(g_2 - 1) \geq 4(g_1' - 1)(g_2 - 1) \geq 4(g_1 - 1)(g_2 - 1)$ si ottiene $g_1' = g_1$ e che $f_2$ è un fibrato topologico. Essendo la fibra generale di $f_2$ isomorfa dunque a $C_1$ ed essendo $f_2$ un fibrato topologico, otteniamo da $f$ l'isomorfismo cercato $S \simeq C_1 \times C_2$. $\square$

**Definizione 7.2.2.** Una superficie $S$ si dice *fortemente isogena ad un prodotto* se $S$ è il quoziente dell'azione di un gruppo che agisce liberamente su un prodoto di curve, $S = C_1 \times C_2/G$. Se $g_i = g(C_i) \geq 2$ diremo fortemente isogena ad un prodotto *alto*.

Scriviamo dei risultati ausiliari per lo studio di questa proprietà e per mostrare che le nozione di essere fortemente isogena ad un prodotto alto e isogena ad un prodotto alto sono la stessa, sebbene non ne diamo la dimostrazione.

**Lemma 7.2.1** (Lemma di rigidità)**.** *Sia $f : C_1 \times C_2 \to B_1 \times B_2$ una mappa olomorfa suriettiva tra prodotti di curve. Assumiamo che $B_1, B_2$ abbiano genere $\geq 2$. Allora, a meno di scambiare $B_1$ e $B_2$, ci sono $f_i : C_i \to B_i$ mappe olomorfe tali che $f : (x, y) \mapsto (f_1(x), f_2(y))$.*

**Corollario 7.2.1.** *Assumiamo che $C_1, C_2$ siano curve di genere $\geq 2$. Allora l'inclusione $Aut(C_1) \times Aut(C_2) \subset Aut(C_1 \times C_2)$ è una ugualianza se le curve non sono isomorfe. Se $C_1 \simeq C_2 = C$, $Aut(C \times C) = Aut(C)^2 \rtimes_\Phi \mathbb{Z}/2$, con $\Phi$ involuzione che scambia i fattori.*

*Osservazione.* Se $S = C_1 \times C_2/G$ con azione libera, possiamo assumere che $G$, oppure il sottogruppo $G_0 = G \cap Aut(C)^2$ se $C_1 \simeq C_2$, ammetta un embedding in $Aut(C_i)$ e diremo che questa realizzazione quoziente di $S$ è *minimale.* Altrimenti, per esempio, il nucleo $K_1 = \ker\{G \to Aut(C_1)\} = \{g \in G | g \mapsto$

$id_{C_1}\}$ agisce trivialmente su $C_1$ e liberamente su $C_2$ (analogamente per $K_2$) e possiamo sostituire $C_1 \times C_2$ con $(C_1/K_2) \times (C_2/K_1)$.

**Proposizione 7.2.1.** *Una superficie $S$ è fortemente isogena ad un prodotto alto se e solo se e isogena ad un prodotto alto.*

**Corollario 7.2.2.** *Ogni rivestimento prodotto minimale di una superficie isogena ad un prodotto alto è di Galois.*

**Proposizione 7.2.2.** *Se $S$ è isogena ad un prodotto alto, allora la realizzazione minimale $S = C_1 \times C_2/G$ è unica.*

## 7.3 Gruppo fondamentale delle superfici isogene ad un prodotto alto

Sia $S = C_1 \times C_2/G$ la realizzazione minimale di una superficie $S$ isogena ad un prodotto alto e sia $G_0$ il sottogruppo di $G$ delle trasformazioni che non scambiano i due fattori $C_1, C_2$. Noi studiamo il caso in cui $G_0 = G$, detto caso non misto o doppio. Denotiamo $C_i' = C_i/G$ e $g(C_i') = g_i'$ per $i = 1, 2$ i rispettivi generi. Abbiamo la sequenza esatta

$$1 \to \Pi_{g_1} \times \Pi_{g_2} \to \pi_1(S) \to G \to 1 \tag{7.3}$$

dove entrambi i fattori $\Pi_{g_1}, \Pi_{g_2}$, gruppi fondamentali di superfici di Riemann compatte di genere risp. $g_1, g_2$. Poiché $G$ non scambia i fattori, questi sono normali in $\pi(S)$, quindi possiamo considerare i quozienti

$$\Pi(i+1) := \pi_1(S)/\Pi_{g_i}$$

cin $i \in \mathbb{Z}/2$, chei si inseriscono in modo naturale nelle sequenze esatte

$$1 \to \Pi_{g_i} \to \Pi(i) \to G \to 1 \tag{7.4}$$

Se $G$ opera in modo libero su $C_1$ per esempio, avremmo un fibrato

$$C_2 \hookrightarrow S \twoheadrightarrow C_1' = C_1/G$$

con fibra $C_2$ connessa. La sequenza *esatta* omotopica del fibrato

$$1 \to \pi_1(C_2) \to \pi_1(S) \to \pi_1(C_1') \to 1$$

implica che $\pi_1(S)/\pi_1(C_2) \simeq \pi_1(C_1')$, dunque in questo caso $\Pi(1) \simeq \pi_1(C_1')$ e abbiamo ottenuto banalmente la mappa suriettiva tra i gruppi fondamentali $\pi_1(S) \to \pi_1(C_1')$.

Se $G$ non agisce liberamente sui fattori, le sequenze esatte sono le sequenze esatte "orbifold" dei possibili rivestimenti ramificati di Galois $C_i \to C_i'$, quindi $\Pi(i)$ saranno i "gruppi fondamentali orbifold dei rivestimenti".

**Gruppo fondamentale orbifold dei rivestimenti**

Sia $X$ una varietà complessa e $p : X \to Y = X/G$ il quoziente per un gruppo finito di automorfismi. Allora $Y$ è una varietà complessa normale. Sia $B = p(\{x \in X | G_x \neq 1_G\})$ e siano $B_1, \dots, B_r$ le componenti irriducibili divisoriali (codimensione 1) di $B$. Siano $\gamma_1, \dots, \gamma_r \in \pi_1(Y - B)$ i loop semplici geometrici attorno alle componenti $B_i$. Allora, avendo la sequenza esatta

$$1 \to \pi_1(X - p^{-1}(B)) \to \pi_1(Y - B) \to G \to 1,$$

otteniamo che $\gamma_i \mapsto g_i$, il cui ordine sia $m_i$, detto indice di ramificazione e denotiamo $m" = (m_1, \dots, m_r)^t$.

**Definizione 7.3.1.** Il gruppo fondamentale orbifold $\pi_1^{orb}(Y - B|m")$ è definito come il quoziente di $\pi_1(Y - B)$ per il più piccolo sottogruppo normale che contiene $\{\gamma_1^{m_1}, \dots, \gamma_r^{m_r}\}$.

*Esempio* 7.3.1. Sia $Y$ una curva complessa compatta di genere $g$ e $B = \{p_1, \dots, p_r\}$, allora $\Gamma = \pi_1^{orb}(Y - \{p_1, \dots, p_r\}, m")$ ha la presentazione

$$\Gamma := \left\langle \gamma_1, \dots, \gamma_r, \alpha_1, \beta_1, \dots, \alpha_g, \beta_g | \prod_{i=1}^{r} \gamma_i \prod_{i=1}^{g} [\alpha_i, \beta_i] = 1, \gamma_j^{m_j} = 1 \right\rangle.$$

Si noti che $p^{-1}(B_i)$ è un divisore uguale a $m_i R_i$, con $R_i$ (non necessariamente connessi) rivestimenti di $B_i$ di grado $d/m_i$. Gli elementi $(\gamma_i)^{m_i}$ si sollevano a loops semplici geometrici in $X - p^{-1}(B)$ intorno alle componenti di $R_i$, quindi appartengono al nucleo di $\pi_1(X - p^{-1}(B)) \to \pi_1(X)$. D'altra parte questo nucleo è generato dall'insieme dei loops semplici geometrici attorno alle componenti di ogni $R_i$. Ma, variando le componenti di $R_i$, otteniamo tali loops come coniugati di $(\gamma_i)^{m_i}$. Abbiamo mostrato il seguente risultato

**Proposizione 7.3.1.** *Sia $X$ una varietà complessa e $p : X \to Y = X/G$ una mappa quoziente finita. Abbiamo la sequenza esatta*

$$1 \to \pi_1(X) \to \pi_1^{orb}(Y - B|m") \to G \to 1$$

**Proposizione 7.3.2.** *La sequenza esatta 7.4*

$$1 \to \Pi_{g_i} \to \Pi(i) \to G \to 1$$

*è la sequenza esatta di orbifold per la mappa quoziente $C_i \to C_i'$.*

Otteniamo il seguente risultato che descrive il gruppo fondamentale di $S$.

**Corollario 7.3.1.** *Sia $S$ una superficie isogena ad un prodotto e di tipo doppio. Allora abbiamo la seguente sequenza esatta*

$$1 \to \Pi_{g_1} \times \Pi_{g_2} \to \Pi(1) \times \Pi(2) \to G \times G \to 1 \tag{7.5}$$

*dove*

$$\Pi(i) \simeq \pi_1^{orb}(C_i'^*|m''(i))$$

*con $C_i'^* = C_i' -$ {pti ramificazione} e $m''(i)$ vettori degli indici di ramificazione, tale che $\pi_1(S)$ è l'immagine inversa di $G$ embedded diagonalmente in $G \times G$.*

Confrontiamo le due sequenze esatte 7.3 e 7.5 e otteniamo il diagramma

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & \Pi_{g_1} \times \Pi_{g_2} \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & \pi_1(S) \arrow[r] \arrow[d, hook, "j"] & G \arrow[r] \arrow[d, hook, "\Delta"] & 1 \\
1 \arrow[r] & \Pi_{g_1} \times \Pi_{g_2} \arrow[r] & \Pi(1) \times \Pi(2) \arrow[r, "\rho"] & G \times G \arrow[r] & 1
\end{tikzcd}$$

Il gruppo fondamentale $\pi_1(S)$ è proprio $\rho^{-1}(G)$ dove $G \overset{\Delta}{\hookrightarrow} G \times G$. Consideriamo le proiezioni $pr_1 : G \times G \to G$, $Pr_i : \Pi(1) \times \Pi(2) \to \Pi(i)$ e gli omomorfismi suriettivi $\gamma_i : \Pi(i) \to G$. Vogliamo dimostrare che esistono le mappe suriettive $\pi_1(S) \to \Pi(i)$, $i = 1, 2$. Lo dimostriamo per $i = 1$, varrà analogamente per $i = 2$. Consideriamo il diagramma

$$\begin{tikzcd}
\pi_1(S) \arrow[r, two heads] \arrow[d, hook, "j"] & G \arrow[d, hook, "\Delta"] & \\
\Pi(1) \times \Pi(2) \arrow[r, two heads, "\rho"] \arrow[d, "Pr_1"'] & G \times G \arrow[d, "pr_1"] & \\
x \in \Pi(1) \arrow[r, two heads, "\gamma_1"] & G & \Pi(2) \arrow[l, two heads, "\gamma_2"']
\end{tikzcd}$$

*Dimostrazione.* Sia $x \in \Pi(1)$. Vogliamo trovare $y \in \Pi(2)$ tale che $(x, y) \in \pi_1(S)$, ovvero trovare $y \in \Pi(2)$ tale che $\rho(x, y) = (\bar{x}, \bar{y}) \in \mathrm{Im}(\Delta : G \to G \times G)$. Essendo $\gamma_2 : \Pi(2) \to G$ suriettiva, scegliamo $y \in \Pi(2)$ tale che $\bar{y} = \bar{x}$. Allora $(x, y) \in \Pi(1) \times \Pi(2)$ è tale che $(\bar{x}, \bar{y}) \in \mathrm{Im}(\Delta : G \to G \times G)$, quindi $(x, y) \in \pi_1(S)$. $\square$

Abbiamo le due proiezioni del gruppo fondamentale di $S$ sui gruppi fondamentali orbifold dei rivestimenti $C_i \to C_1'$.

$$\pi_1(S) \twoheadrightarrow \pi_1^{orb}(C_i'^{*}|m''(i)) \quad i = 1, 2.$$

Se $C_i'$ è una curva complessa compatta di genere $g_i'$, il gruppo fondamentale orbifold avrà presentazione

$$\pi_1^{orb}(C_i'^{*}|m''(i)) = \left\langle \gamma_1, \dots, \gamma_{r_i}, \alpha_1, \beta_1, \dots, \alpha_{g_i'}, \beta_{g_i'} | \prod_{j=1}^{r_i} \gamma_j \prod_{k=1}^{g_i'} [\alpha_k, \beta_k] = 1, \gamma_j^{m_j(i)} = 1 \right\rangle$$

Costruiamo per $i = 1$ l'omomorfismo suriettivo dal gruppo fondamentale orbifold sul gruppo libero di rango $g_1'$

$$\pi_1^{orb}(C_1'^{*}|m''(1)) \xrightarrow{\gamma_j = 1} \Pi_{g_1'} \xrightarrow{\alpha_k = 1} F_{g_1'}$$

Analogamente per $i = 2$. Otteniamo due omomorfismi suriettivi

$$\pi_1(S) \twoheadrightarrow F_{g_i'} \quad i = 1, 2$$

Se $g_i' \geq 2$ per $i = 1, 2$ allora per il Teorema di Siu-Beauville $S$ ammette due fibrazioni su superfici di Riemann di genere $g_i'$. Quindi a posteriori otteniamo le due fibrazioni $f : S \to C_i'$ naturali dallo studio dei gruppi fondamentali e dal Teorema di Siu-Beauville.

# Bibliografia


[1] J. Amorós, M. Burger, K. Corlette, D. Kotschick, D. Toledo, *Fundamental Groups of Compact Kähler Manifold*, American Mathematical Society, 1996

[2] D. Arapura, *Fundamental Groups of Smooth Projective Varieties*, MSRI Publication Volume 28, 1995

[3] D. Auroux, F. Catanese, M. Manetti, P. Seidel, B. Siebert, I. Smith, G. Tian, *Symplectic* 4*-Manifolds and Algebraic Surfaces*, Springer, 2008

[4] F. Catanese, *Moduli and classification of irregular Kaehler manifolds (and algebraic varieties) with Albanese general type fibration*, Inventiones mathematicae, Springer-Verlag, 1991

[5] F. Catanese, *Fibred surfaces, varieties isogenous to a product and related moduli spaces*, American Journal of Mathematics, Vol.122, The Johns Hopkins University Press, 2000

[6] M. De Franchis, *Sulle superficie algebriche le quali contengono un fascio irrazionale di curve*, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo 20, 1905

[7] S. Eilenberg, S. MacLane, *Relation Between Homology and Homotopy Groups of Spaces*, Annals of Mathematics, Vol. 46, 1945

[8] R. Hartshorne, *Algebraic Geometry*, Springer, 1977

[9] A. Hatcher, *Algebraic Topology*, 2001

[10] D. Huybrechts, *Complex Geometry, An Introduction*, Springer, 2005

[11] Kenneth S. Brown, *Cohomology of Groups*, Springer, 1982

[12] C. Voisin, *Hodge Theory and Complex Algebraic Geometry I*, Cambridge University Press, 2002