

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

FACOLTÀ DI INGEGNERIA

*Corso di laurea in Ingegneria Meccanica e Meccatronica*

**PRINCIPI FISICI DEI SENSORI MODERNI  
IN AMBITO MECCATRONICO**

RELATORE: ING. ALESSANDRO SONA

LAUREANDO: MARCO ROSSI

Anno Accademico 2011-2012



*Dedico questo lavoro alla mia famiglia, alla  
famiglia Lomanno e a Sara, persone grazie  
alle quali ho potuto affrontare questi duri  
anni di studio con la dovuta serenità.*



# Indice

<b>1</b>	<b>Acquisizione dati</b>	<b>1</b>
1.1	La misurazione ed i sensori . . . . .	1
1.2	La scelta di un sensore . . . . .	2
1.3	Classificazione dei sensori . . . . .	3
<b>2</b>	<b>Elettromagnetismo</b>	<b>5</b>
2.1	Elettrostatica . . . . .	5
2.1.1	Legge di Coulomb . . . . .	5
2.1.2	Principio di conservazione della carica . . . . .	5
2.1.3	Principio di sovrapposizione degli effetti . . . . .	6
2.1.4	Campo elettrico . . . . .	6
2.1.5	Flusso vettore . . . . .	6
2.1.6	Teorema di Gauss . . . . .	7
2.1.7	Potenziale elettrico . . . . .	7
2.1.8	Il dipolo elettrico . . . . .	9
2.1.9	Condensatore . . . . .	9
2.1.10	Energia del campo elettrico . . . . .	11
2.1.11	Corrente elettrica . . . . .	11
2.1.12	Legge di Ohm . . . . .	12
2.1.13	Potenza elettrica . . . . .	13
2.1.14	Resistenza elettrica . . . . .	13
2.2	Magnetismo . . . . .	14
2.2.1	Il campo magnetico . . . . .	14
2.2.2	Forza di Lorentz . . . . .	14
2.2.3	Legge di Biot-Savart . . . . .	15
2.2.4	La legge di Ampère . . . . .	16

<i>INDICE</i>	6
2.2.5 Flusso magnetico . . . . .	17
2.2.6 Legge di Faraday . . . . .	17
2.2.7 Legge di Lenz . . . . .	18
2.2.8 Autoinduzione . . . . .	18
2.2.9 Energia del campo magnetico . . . . .	18
2.2.10 Mutua induzione . . . . .	19
2.3 Le onde . . . . .	19
2.3.1 Equazioni di Maxwell e onde elettromagnetiche . . . . .	20
2.3.2 Conduttori e dielettrici . . . . .	21
2.3.3 Polarizzazione e spostamento elettrico . . . . .	21
2.3.4 Campo magnetico nella materia: i vettori magnetici . . . . .	22
2.3.5 Materiali paramagnetici, diamagnetici e ferromagnetici . . . . .	23
2.3.6 Onde sonore . . . . .	24
2.4 Natura della luce . . . . .	25
2.4.1 Ottica geometrica . . . . .	26
2.4.1.1 Riflessione e rifrazione della luce . . . . .	26
2.4.1.2 Riflessione totale . . . . .	27
2.4.2 Ottica ondulatoria . . . . .	27
2.4.2.1 Interferenza . . . . .	28
2.4.2.2 Diffrazione . . . . .	29
<b>3 Cenni di trasmissione del calore</b>	<b>31</b>
3.1 Conduzione . . . . .	32
3.2 Convezione . . . . .	32
3.3 Irraggiamento . . . . .	33
<b>4 L'effetto fotoelettrico</b>	<b>35</b>
<b>5 Effetto piezoelettrico</b>	<b>39</b>
<b>6 Effetto Hall</b>	<b>44</b>
<b>7 Effetto Seebeck ed effetto Peltier</b>	<b>48</b>

# Elenco delle figure

2.1	Flusso vettore . . . . .	6
2.2	spostamento di una carica elettrica $q$ in presenza di campo elettrico $E$ lungo un percorso AB . . . . .	8
2.3	Dipolo elettrico . . . . .	9
2.4	Condensatore . . . . .	10
2.5	Serie e parallelo di condensatori . . . . .	11
2.6	Corrente elettrica . . . . .	12
2.7	Forza di Lorentz . . . . .	15
2.8	Legge di Biot-Savart . . . . .	16
2.9	Legge di Faraday . . . . .	17
2.10	Riflessione e rifrazione . . . . .	27
2.11	Diffrazione . . . . .	30
3.1	Convezione . . . . .	33
4.1	Effetto fotoelettrico . . . . .	36
5.1	Effetto piezoelettrico . . . . .	39
5.2	Sensore piezoelettrico . . . . .	40
5.3	Tipico collegamento elettrico di un sensore piezoelettrico . . . . .	42
6.1	Effetto Hall . . . . .	45
6.2	Circuito equivalente di un sensore ad effetto Hall . . . . .	46
6.3	Caratteristiche tipiche di un sensore lineare ad effetto Hall . . . . .	47
7.1	L'interazione elettromagnetica dell'effetto Seebeck . . . . .	48
7.2	la variazione di temperatura lungo un conduttore è sorgente di una f.e.m. termoelettrica . . . . .	49

<i>ELENCO DELLE FIGURE</i>	8
7.3 Anello di corrente ed effetto Seebeck . . . . .	50
7.4 Schema termocoppia . . . . .	51
7.5 Effetto Peltier . . . . .	53



# Capitolo 1

## Acquisizione dati

### 1.1 La misurazione ed i sensori

In ogni attività di carattere sperimentale oppure produttivo si richiede la conoscenza del valore di una o più grandezze fisiche: tale conoscenza si raggiunge mediante l'esecuzione di una misurazione. In alcuni casi la misurazione serve per poter investigare la realtà allo scopo di interpretare i fenomeni fisici, in altri casi le misurazioni hanno lo scopo di permettere l'ottimizzazione di un prodotto industriale agendo su opportuni parametri del processo oppure di verificare la corrispondenza del prodotto finito a dei prefissati parametri di qualità. Ma cos'è la misurazione?

La misurazione è l'attività svolta per assegnare ad una determinata proprietà fisica  $X$ , nota come misurando, un intervallo di valori detto risultato della misurazione o più semplicemente misura. Nell'intervallo di valori ottenuto, detto anche intervallo di incertezza, si dichiara la presenza, con una certa probabilità, del valore atteso o "valore vero" della misurazione, cioè del valore, incognito, assunto da  $X$  nell'istante di osservazione di interesse.

Il segnale elettrico è oggi diventato il "vettore" più versatile per la trasmissione, la memorizzazione e la elaborazione delle informazioni raccolte con il processo di misurazione. Le comunicazioni fra le persone (telefono, radio, televisione), le informazioni meteorologiche, i comandi a distanza, i controlli automatici delle macchine e dei meccanismi tecnologici, i sistemi di regolazione automatica e gli azionamenti elettrici fanno uso dei segnali elettrici per la trasmissione delle informazioni richieste per i vantaggi che il vettore elettrico permette. Le considerazioni appena svolte permettono di comprendere agevolmente l'interesse da sempre mostrato dal mondo industriale e da quello scientifico per quegli oggetti, chiamati "sensori", che trasferiscono il contenuto informativo di una grandezza fisica di un tipo ad una grandezza elettrica. L'uso di un sensore permette quindi di trasformare la grandezza fisica da sottoporre alla misurazione in un segnale elettrico ad essa proporzionale (ma non necessariamente alla sua energia) e tale da essere più facilmente trasmesso a distanza e misurato.

Come esempio di sensore, si ricorda l'elemento piezoelettrico presente in alcuni tipi di accelerometri, il quale converte la forza meccanica applicata in un'uscita

elettrica, oppure il termometro elettronico timpanico per bambini, il quale utilizza una termocoppia e circuiteria di condizionamento per convertire l'energia termica in un segnale elettrico legato alla temperatura rilevata.

Un ulteriore esempio riguarda i sistemi di misura ad altissime prestazioni adoperati in Formula Uno: sono molteplici e tutti essenziali per il monitoraggio e lo sviluppo continuo delle monoposto. Centinaia di parametri vengono costantemente rilevati, elaborati e tracciati, sempre con elevati livelli di accuratezza. Le informazioni acquisite sono adoperate per analizzare le prestazioni della terna pilota-motopropulsore-veicolo, simulare il comportamento della vettura con diversi assetti meccanico-aerodinamici, prevenire o studiare alcune criticità e generare delle statistiche. La ricerca, nell'ambito delle misure elettroniche in Formula 1, è anche orientata allo sviluppo di sensori poco ingombranti, leggeri, accurati e al contempo affidabili in condizioni critiche di vibrazioni e temperature. Per soddisfare tali vincoli si ricorre spesso a tecnologie derivanti dal settore aerospaziale.

Il numero estremamente elevato di campi di applicazione e di grandezze fisiche che si ha interesse a convertire in segnali elettrici, ha fatto sì che venisse realizzato una grandissima varietà di sensori. Il numero di principi fisici utilizzato nella realizzazione dei sensori è pertanto rilevante: in alcuni casi i principi utilizzati sono relativamente semplici, in altri casi sono estremamente complessi e la loro descrizione richiede molto di più delle poche pagine che è possibile dedicare in questa breve introduzione ai principi fisici della sensoristica moderna.

## 1.2 La scelta di un sensore

Negli ultimi anni, gli sviluppi dell'ingegneria elettronica hanno avuto un notevole impatto in numerosi settori di ricerca di base e applicata, nonché sulla realtà produttiva, sociale ed economica. Particolarmente oggi, dove l'ICT (Information and Communication Technology) è entrata a far parte della vita di tutti i giorni (si pensi ai PC, ai GPS, alla telefonia cellulare), nascono realtà produttive che, applicando i più recenti risultati della ricerca e le nuove tecnologie nel campo della microelettronica, dei sensori e della strumentazione elettronica intesa in senso lato, ampliano e diversificano il parco dei prodotti industriali, dei servizi e dell'economia basata sulla conoscenza avanzata.

Per ogni grandezza fisica di ingresso vi sono normalmente più soluzioni basate su fenomeni fisici diversi. E' pertanto assai arduo il compito del progettista che deve decidere quale principio utilizzare nelle specifiche applicazioni di interesse per ottimizzare il funzionamento del sistema e per renderlo il più possibile insensibile alle diverse cause di disturbo le quali sono sempre e comunque presenti.

Sarà quindi compito del progettista mecatronico dare di volta in volta il giusto valore alle caratteristiche del dispositivo al fine di individuare il sensore che meglio si adatta alla specifica applicazione. In questa maniera si stabilirà che per una certa applicazione è maggiormente interessante il limitato ingombro, per un'altra applicazione è principalmente importante la affidabilità oppure la linearità, per un'altra il basso costo.

E' possibile infine definire alcuni criteri generali relativi ai parametri fondamentali ottimali da considerare come linea guida per la difficile attività di scelta di un sensore:

- Elevata sensibilità e bassa impedenza di uscita: permettono di fornire in uscita un segnale di grande ampiezza risentendo minimamente dell'effetto del carico costituito dal sistema utilizzatore.
- Elevata accuratezza e transcaratteristica non isteretica: permettono di indicare in maniera accurata il valore della grandezza in ingresso (piccoli intervalli di incertezza) indipendentemente da altri fattori.
- Transcaratteristica lineare e breve tempo di risposta: permettono di elaborare i dati rilevati dal sensore tramite funzioni lineari con conseguente semplificazione dei blocchi circuitali e di garantire la sua applicabilità nei sistemi di controllo.
- Elevato rapporto SNR (signal to noise ratio): permette di limitare il disturbo dovuto al rumore che il sensore stesso genera al suo interno (principalmente rumore termico e rumore flicker) che, inevitabilmente, si sovrappone al segnale utile di uscita disturbandone l'acquisizione o la misurazione.
- Elevata robustezza e stabilità: permettono al sensore di tollerare sollecitazioni di tipo meccanico, elettrico ed elettromagnetico provenienti dall'ambiente esterno garantendo buone prestazioni di accuratezza anche per lunghi periodi successivi alla data di ultima taratura (MTBF).
- Elevata sicurezza: deriva dalla conoscenza che il funzionamento del sensore non dovrà produrre stati indesiderati di pericolo per le persone e l'ambiente di utilizzo in generale; a tale riguardo esistono numerose raccomandazioni internazionali e normative comunitarie che fissano, mediante opportuni standard, requisiti di sicurezza sia generici che specifici di prodotto.
- Prestazioni VS costo: un buon ingegnere non è soltanto un professionista che sfrutta le sue competenze per pervenire alla soluzione in assoluto più performante o meno onerosa, ma la figura che ha la capacità di sintetizzare il miglior compromesso tra costo totale e prestazioni desiderate.

Risulta pertanto essenziale per il progettista meccatronico conoscere i parametri dei sensori e i principi fisici che ne stanno alla base del funzionamento al fine di intraprendere decisioni coerenti ed accettabili nonchè eccellenti in funzione dei limiti tecnologici ed economici di progetto.

### 1.3 Classificazione dei sensori

In questa sezione verranno elencate le principali tipologie di sensori utilizzati nel campo della progettazione di macchine automatiche. In genere, il criterio di classificazione più usato è quello che tiene conto del tipo di segnale di ingresso distinguendo in questo modo i sensori meccanici da quelli termici, quelli magnetici da quelli acustici, etc.

- Sensori di prossimità e di movimento: sensori ad ultrasuoni e a microonde; sensori capacitivi, sensori ad effetto triboelettrico; sensori optoelettronici.
- Sensori di posizione e di livello: sensori potenziometrici, gravitazionali e capacitivi; sensori magnetici e ad induzione; sensori ottici; sensori ad ultrasuoni e radar; resolver ed encoder; trasformatore lineare differenziale (LVDT);
- Sensori di velocità ed accelerazione: accelerometri capacitivi, piezoresistivi, piezoelettrici e termici.
- Sensori di forza, tensione e sensori tattili: estensimetri, sensori di forza ad effetto piezoelettrico.
- Sensori di pressione: sensori piezoresistivi, capacitivi, a riluttanza variabile (VRP), optoelettronici, sensori a vuoto.
- Sensori di temperatura: sensori termoresistivi; sensori a contatto termoelettrico e termocoppie; sensori a semiconduttore a giunzione P-N; sensori ottici e ad effetto piezoelettrico; sensori acustici di temperatura.
- Sensori di flusso: sensori ad ultrasuoni, elettromagnetici, termici.
- Sensori acustici: microfoni resistivi, a condensatore, in fibra ottica, ad effetto piezoelettrico; sensori acustici allo stato solido.
- Sensori di umidità: sensori capacitivi, a conduttività elettrica, a conduzione termica; igrometri ottici e ad oscillazione.
- Sensori di radiazione elettromagnetica: fotodiodi, fototransistori e fotoresistori; sensori termici ad effetto piroelettrico; bolometri e sensori ad infrarossi.
- Sensori chimici: sensori elettrochimici, potenziometrici, conduttimetrici, amperometrici, termici, ottici, biochimici.

Questa classificazione oltre che a mostrare i numerosissimi campi di impiego delle diverse tipologie dei sensori, evidenzia una grande varietà di principi fisici utilizzati per il funzionamento degli stessi.

## Capitolo 2

# Elettromagnetismo

### 2.1 Elettrostatica

L'elettrostatica si occupa dello studio delle cariche elettriche a riposo e si basa su tre leggi fondamentali: la legge di Coulomb, il principio di conservazione della carica ed il principio di sovrapposizione degli effetti.

#### 2.1.1 Legge di Coulomb

Il fisico Charles Coulomb nel 1785 determinò in termini quantitativi l'interazione tra cariche elettriche. Mediante esperimenti con una bilancia di torsione, Coulomb dedusse che la forza esercitata da una carica puntiforme  $q_1$  su di un'altra carica puntiforme  $q_2$  posta ad una distanza  $r_{21}$  dalla prima è del tipo:

$$\vec{F}_{21} = k \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \vec{u}_r,$$

dove  $k$  è una costante di proporzionalità e  $\vec{u}_r$  è un versore diretto verso  $q_2$  lungo la congiungente delle due cariche. Nel sistema internazionale la costante  $k$  si esprime nella forma:

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \simeq 9 \cdot 10^9 [Nm^2C^{-2}],$$

dove  $\epsilon_0$  si chiama costante dielettrica (o permittività) del vuoto e vale:

$$\epsilon_0 \simeq 8.85 \cdot 10^{-12} [N^{-1}m^{-2}C^2].$$

#### 2.1.2 Principio di conservazione della carica

Questo principio afferma che la quantità totale di carica elettrica che si produce in qualsiasi processo è nulla. Tutti gli esperimenti, fino ad ora, hanno confermato la validità di questa legge, che deve essere considerata una delle leggi fondamentali della fisica.

### 2.1.3 Principio di sovrapposizione degli effetti

In presenza di più di due cariche elettriche questo principio consente di considerare la forza agente su di una carica come la somma di tutte le forze tra ciascuna coppia di cariche, come se tutte le altre non esistessero.

### 2.1.4 Campo elettrico

Una carica esercita su altre cariche una forza elettrica svolgendo un'azione a distanza. Per meglio descrivere questo fenomeno è utile introdurre il concetto di campo come mediatore tra le cariche. Si può considerare che ogni carica genera un campo elettrico in tutto lo spazio ed ogni altra carica interagisce con tale campo dando luogo alla forza elettrica. L'intensità di campo elettrico che esiste in un punto dello spazio è definita come il rapporto tra la forza che agisce su una carica di prova  $q$  ed il valore di tale carica:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}.$$

Dimensionalmente il campo è una forza per unità di carica quindi si misura in  $[N \cdot C^{-1}]$ .

Per visualizzare il campo elettrico, che è un campo vettoriale, si possono tracciare delle linee che indicano la direzione del campo in tutti i punti dello spazio (linee di forza). Tali linee, per definizione, escono dalle cariche positive ed entrano in quelle negative e la loro densità è proporzionale all'intensità del campo. Nei materiali in cui sono presenti cariche libere di muoversi (conduttori), in condizioni statiche il campo elettrico deve essere nullo, perché altrimenti ci sarebbe una forza che farebbe muovere le cariche; per lo stesso motivo le linee di forza del campo devono essere perpendicolari alla superficie esterna del materiale.

### 2.1.5 Flusso vettore

Si consideri una superficie  $\Sigma$  in una regione dello spazio in cui è presente un campo vettoriale  $A$  come rappresentato in figura 2.1.

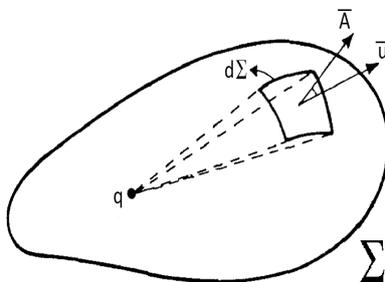


Figura 2.1: Flusso vettore

In ogni punto della superficie è possibile definire un versore perpendicolare a  $\Sigma$ . Si definisce flusso del vettore  $A$  attraverso la superficie  $\Sigma$ :

$$\phi_A = \int_{\Sigma} \vec{A} \cdot \vec{u} d\Sigma.$$

Nel caso in cui la superficie sia chiusa, si assume convenzionalmente che il versore  $\vec{u}$  sia orientato verso l'esterno della superficie e si usa la notazione:

$$\phi_A = \oint_{\Sigma} \vec{A} \cdot \vec{u} d\Sigma.$$

### 2.1.6 Teorema di Gauss

Il teorema di Gauss afferma che il flusso del campo elettrico attraverso una qualsiasi superficie chiusa è proporzionale alla carica contenuta al suo interno e precisamente:

$$\phi_A = \oint_{\Sigma} \vec{E} \cdot \vec{u} d\Sigma = \frac{q}{\varepsilon_0}.$$

Questo teorema, derivato dalle leggi fondamentali dell'elettrostatica, risulta molto utile nella soluzione dei problemi di elettrostatica in cui sia possibile, in base a considerazioni di simmetria, determinare la direzione del campo elettrico e quindi scegliere una superficie di integrazione che facilita il calcolo del flusso. Applicando il teorema della divergenza alla formula precedente si ottiene una espressione del teorema di Gauss che vale puntualmente e coinvolge grandezze microscopiche:

$$\text{div}(\vec{E}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0},$$

dove  $\rho$  è la densità volumica di carica in un punto dello spazio e l'operatore divergenza è così definito:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \left( \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k} \right) \cdot \vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}.$$

### 2.1.7 Potenziale elettrico

Il lavoro compiuto da forze conservative è indipendente dal cammino percorso e quindi, per esse, è possibile definire un'energia potenziale. Siccome le forze centrali sono conservative, anche per la forza di Coulomb, che ha un andamento del tipo  $\frac{1}{r^2}$ , è possibile definire un'energia potenziale  $U$  (che è una grandezza scalare). La variazione di energia potenziale di una carica  $q$  che viene spostata in un campo elettrico da un punto  $A$  ad un punto  $B$  come rappresentato in figura 2.2, è uguale al lavoro compiuto dalla forza elettrica cambiata di segno:

$$U_B - U_A = -L_{AB} = - \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{l} = -q \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l}.$$

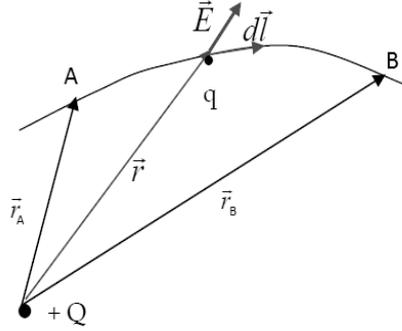


Figura 2.2: spostamento di una carica elettrica  $q$  in presenza di campo elettrico  $E$  lungo un percorso AB

E' utile definire il potenziale elettrico, o più semplicemente potenziale, come l'energia potenziale per unità di carica:

$$V = \frac{U}{q}.$$

L'energia potenziale è definita a meno di una costante, quindi è conveniente determinare la differenza di potenziale elettrico (o tensione) come:

$$\Delta V = \frac{\Delta U}{q}.$$

L'unità di misura della tensione è il volt  $[V] = [J \cdot C^{-1}]$ .

Le relazioni che legano il campo elettrico al potenziale sono:

$$V_{AB} = - \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l};$$

$$E = -\Delta V = - \left( \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k} \right) \cdot V = \left( \frac{\partial V}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial V}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial V}{\partial z} \vec{k} \right).$$

In un campo elettrico uniforme la differenza di potenziale tra due punti è:

$$V_A - V_B = - \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} = E \cdot d,$$

dove  $d$  indica la proiezione, nella direzione del campo, della distanza tra i due punti. Per poter definire il potenziale in un punto è necessario scegliere un punto di riferimento in cui il potenziale è nullo; se si suppone che tale punto sia all'infinito, allora per una carica  $q$  posta nell'origine, il potenziale è dato dalla formula:

$$V(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}.$$

Le superfici che hanno lo stesso potenziale si dicono equipotenziali e sono perpendicolari alle linee di campo perché, spostandosi su di esse, il campo  $E$  non deve compiere lavoro.

### 2.1.8 Il dipolo elettrico

Un dipolo elettrico è la combinazione di due cariche  $q$  uguali in modulo, ma di segno opposto, separate da una distanza  $d$  come rappresentato in figura 2.3.

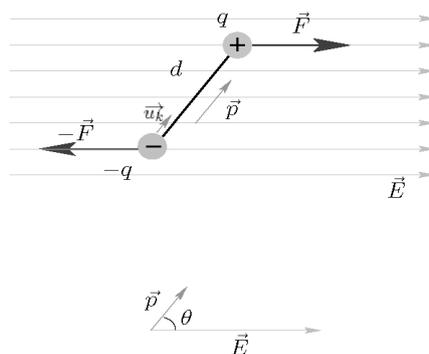


Figura 2.3: Dipolo elettrico

Si definisce momento del dipolo elettrico il vettore:

$$\vec{p} = q \cdot d \cdot \vec{u}_k,$$

dove  $\vec{u}_k$  è un versore diretto dalla carica negativa verso quella positiva. Il potenziale prodotto da un dipolo a grande distanza ( $r \gg d$ ) è:

$$v(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \cos\theta}{r^2}.$$

### 2.1.9 Condensatore

I condensatori sono dei dispositivi che servono ad immagazzinare delle cariche elettriche e sono costituiti da due armature di materiale conduttore isolate tra loro.

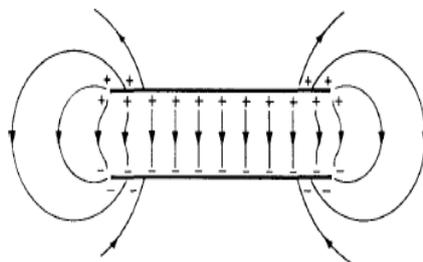


Figura 2.4: Condensatore

Quando si applica al condensatore una differenza di potenziale costante, sulle sue armature si accumulano cariche di segno opposto, ma uguali in modulo. La costante di proporzionalità che lega la carica presente sul condensatore alla sua differenza di potenziale si chiama capacità:

$$C = \frac{Q}{V},$$

e la sua unità di misura è il Farad [ $F = \frac{C}{V}$ ]. La capacità dipende dalla geometria del campione; nel caso di un condensatore ad armature piane parallele il suo valore è:

$$C = \epsilon_0 \frac{A}{d},$$

dove  $A$  è la superficie delle armature e  $d$  la loro distanza. Nel caso di più condensatori collegati in serie o in parallelo le formule per il calcolo della capacità totale sono riportate in tabella 2.5:

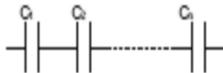
Collegamento in serie	Collegamento in parallelo
	
$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots + \frac{1}{C_n}$	$C = C_1 + C_2 + \dots + C_n$

Figura 2.5: Serie e parallelo di condensatori

### 2.1.10 Energia del campo elettrico

Un corpo elettricamente carico, quando si scarica, libera dell'energia che può essere attribuita a tutto il campo elettrico che viene prodotto dal corpo nello spazio circostante. La densità di energia, cioè l'energia per unità di volume, che si attribuisce al campo elettrico vale:

$$w = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2.$$

Nel caso del condensatore l'energia che esso immagazzina vale:

$$W = \frac{1}{2} QV = \frac{1}{2} CV^2 = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}.$$

### 2.1.11 Corrente elettrica

Lo studio delle cariche elettriche in moto può ancora essere affrontato con le leggi dell'elettrostatica perché non vengono sviluppati campi dipendenti dal tempo. In un filo di materiale conduttore vi sono degli elettroni che sono in grado di muoversi liberamente e di creare un flusso di cariche attraverso la sezione del filo. La quantità netta di carica che attraversa la sezione del filo nell'unità di tempo prende il nome di corrente elettrica.

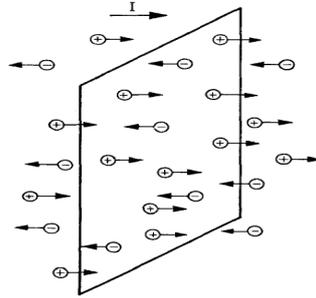


Figura 2.6: Corrente elettrica

La corrente media è quindi definita come:

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t},$$

dove  $\Delta Q$  è la carica che attraversa la sezione del conduttore nel tempo  $\Delta t$ . La corrente istantanea viene definita facendo tendere a zero il tempo  $\Delta t$ :

$$I = \frac{dQ}{dt}.$$

L'unità di misura della corrente nel SI è l'ampere [ $A = C \cdot s^{-1}$ ].

E' possibile collegare la corrente a grandezze microscopiche tramite la densità di corrente, cioè la corrente per unità di superficie, che è esprimibile come:

$$\vec{J} = -ne\vec{v}_d,$$

dove  $n$  è il numero di elettroni di conduzione per unità di volume,  $e$  è la carica dell'elettrone e  $\vec{v}_d$  è la velocità di deriva degli elettroni.

### 2.1.12 Legge di Ohm

Affinché circoli della corrente in un filo è necessario che sia presente una differenza di potenziale ai suoi capi. La relazione che lega la tensione alla corrente, è la legge di Ohm:

$$V = R \cdot I,$$

in cui  $R$  indica la resistenza elettrica del materiale. L'unità di misura della resistenza è l'ohm [ $\Omega = VA^{-1}$ ]. Nel caso di fili conduttori la resistenza dipende dalla forma geometrica secondo la relazione:

$$R = \rho \frac{l}{\Sigma},$$

dove  $l$  è la lunghezza del filo,  $\Sigma$  è l'area della sezione trasversale del filo e  $\rho$  è una costante di proporzionalità che dipende dal materiale e si chiama resistività (unità di misura  $[Wm]$ ). L'inverso della resistività si chiama conducibilità e si indica con il simbolo  $\sigma$ . La legge di Ohm può essere scritta in funzione di grandezze microscopiche nel seguente modo:

$$\vec{j} = \sigma \cdot \vec{E}.$$

### 2.1.13 Potenza elettrica

La potenza che deve essere spesa dal campo elettrico per mantenere una corrente  $I$  in presenza di una differenza di potenziale  $V$  vale:

$$P = V \cdot I.$$

Applicando la legge di Ohm si può anche scrivere:

$$P = V \cdot I = R \cdot I^2 = \frac{V^2}{R}.$$

Tale potenza viene completamente trasformata in calore in seguito all'attrito che gli elettroni incontrano nel materiale (effetto Joule).

### 2.1.14 Resistenza elettrica

Per un filo di materiale conduttore di lunghezza  $L$  e sezione  $\Sigma$  la resistenza si può esprimere come:  $R = \rho \cdot \frac{L}{\Sigma}$  dove la quantità  $\rho$  è detta resistività, si misura in ohmmetro, e dipende dalla temperatura. Nei migliori conduttori (Argento Rame e Oro), a 293 K, vale  $(1.59 \sim 2.44) \cdot 10^{-8} [\Omega \cdot m]$  ed ha un andamento lineare con la temperatura. In alcuni materiali, detti superconduttori, invece la resistività, al di sotto di una temperatura caratteristica del materiale (temperatura critica), si annulla bruscamente: per il Piombo ad esempio  $T_c = 7.18K$ , il Mercurio  $T_c = 4.15$  mentre per il composto ceramico non stechiometrico di Ittrio, Bario, Rame e Ossigeno (YBCO),  $T_c = 91K$ . La più alta temperatura critica conosciuta si ha in un composto di Mercurio, Bario, Calcio, Rame e Ossigeno (HBCCO) ed è  $135K$ .

La conducibilità di un materiale cambia con la temperatura  $T$  e, in un intervallo relativamente stretto, questa variazione può essere considerata dal parametro  $\alpha$ , che è il coefficiente termico di resistenza secondo la relazione:

$$\rho = \rho_0 [1 + \alpha(T - T_0)],$$

dove  $\rho_0$  è la resistività del materiale alla temperatura ambiente (tipicamente nell'intorno di 20-25°C). In un intervallo più ampio, la resistività risulta essere una funzione non lineare della temperatura. In automazione viene utilizzato il termistore che è un sensore che converte una temperatura in una corrente

elettrica, facilmente misurabile da un galvanometro. I termistori sono semiconduttori ceramici tipicamente costruiti utilizzando ossidi di uno o più dei seguenti materiali: Nickel, Manganese, Cobalto, Titanio, Ferro. La resistenza varia da frazioni di Ohm a diversi megahoms.

I termistori sono caratterizzati da una caratteristica temperatura-resistenza non lineare che viene generalmente approssimata da diverse equazioni matematiche. La più utilizzata è la seguente forma esponenziale

$$R_t = R_{t_0} \exp\left(\beta \left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_0}\right)\right),$$

dove  $T_0$  è la temperatura di calibrazione in Kelvin,  $R_{t_0}$  è la resistenza alla temperatura di calibrazione e  $\beta$  è una temperatura caratteristica del materiale. Tipicamente  $\beta \in (3000K; 5000K)$  e per un intervallo di temperatura relativamente stretto, può essere considerato indipendente dalla temperatura, rendendo così la precedente equazione una buona approssimazione. Quando è invece richiesta un'accuratezza migliore è generalmente utilizzata una forma polinomiale.

## 2.2 Magnetismo

### 2.2.1 Il campo magnetico

Un campo magnetico può essere creato da cariche elettriche in moto, cioè da una corrente, oppure da un magnete permanente. Sperimentalmente si trova che esistono due polarità nel magnetismo, polo nord e polo sud: poli uguali si respingono, poli opposti si attraggono. A differenza del campo elettrico, per il campo magnetico non è stato ancora isolato il monopolo magnetico, anche se le teorie lo hanno ipotizzato; come conseguenza non è possibile definire il campo magnetico utilizzando una sonda di prova. L'interazione elettrica e l'interazione magnetica sono due aspetti diversi della stessa interazione, ovvero l'interazione elettromagnetica. Sperimentalmente si trova che una carica elettrica in quiete in un campo magnetico non subisce interazioni che ne alterino lo stato di moto, mentre una carica elettrica in moto in un campo magnetico risente di una forza distinta da quella dovuta all'interazione gravitazionale e a quella elettrica.

### 2.2.2 Forza di Lorentz

Una particella di carica  $q$ , in moto con velocità  $v$  in presenza di un campo magnetico  $B$ , è soggetto ad una forza  $F$ , detta forza di Lorentz, data da:

$$\vec{F} = q \cdot \vec{v} \times \vec{B},$$

dove  $B$  è un vettore che prende il nome di campo di induzione magnetica o semplicemente di campo magnetico. L'equazione che esprime la forza di Lorentz può essere considerata come la definizione (operativa) del campo magnetico, in

perfetta analogia con la  $\vec{F} = q \cdot \vec{E}$  che definisce il campo elettrico. Come rappresentato in figura 2.7, la forza di Lorentz risulta essere ortogonale sia al campo, sia alla velocità, e quindi non compie lavoro.

Ciò significa che un campo magnetico induce solo una variazione della direzione del moto della particella, senza alterare il modulo della velocità.

Si consideri un tratto infinitesimo  $dl$  di un conduttore lungo  $L$  percorso da corrente di intensità  $i$ , in presenza di un campo magnetico  $B$ :

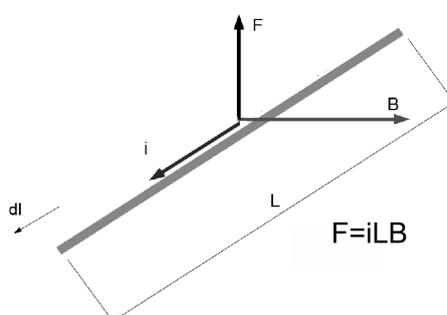


Figura 2.7: Forza di Lorentz

valgono le seguenti relazioni:

$$d\vec{F} = i \cdot d\vec{l} \times \vec{B} \Rightarrow \vec{F} = i \cdot \int_L d\vec{l} \times \vec{B} = iLB.$$

### 2.2.3 Legge di Biot-Savart

Si consideri la figura 2.8 dove un tratto  $dl$  di conduttore percorso da una corrente di intensità  $i$  genera, in un punto  $P$ , il campo magnetico:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} i \frac{d\vec{l} \times \vec{u}_r}{r^2},$$

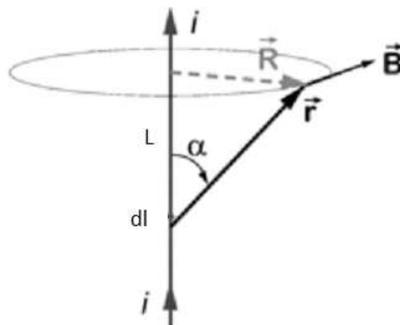


Figura 2.8: Legge di Biot-Savart

dove  $\vec{r}$  è il vettore che va dal conduttore al punto P,  $\vec{u}_r$  è il versore corrispondente, e  $\mu_0$  è una costante detta permeabilità magnetica del vuoto, il cui valore in unità SI è:

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{[N]}{[A^2]}.$$

Applicando la legge di Biot-Savart ad un conduttore rettilineo indefinito percorso da una corrente di intensità  $i$  si dimostra che il modulo del campo magnetico dipende dalla distanza  $r$  dal filo secondo la legge:

$$B(r) = \frac{\mu_0 i}{2\pi r}.$$

Le linee di campo risultano essere delle circonferenze centrate nel conduttore e giacenti in piani ad esso perpendicolari. Utilizzando i risultati precedenti si verifica facilmente che i due conduttori rettilinei indefiniti tra loro paralleli, percorsi da correnti di intensità  $i_1$  e  $i_2$  e distanti  $d$  l'uno dall'altro, si attraggono (per correnti concordi) o si respingono (per correnti discordi) con una forza per unità di lunghezza data, in modulo, da:

$$\frac{F}{l} = \frac{\mu_0 i_1 i_2}{2\pi d}.$$

#### 2.2.4 La legge di Ampère

A partire dalla legge di Biot-Savart è possibile dimostrare una relazione concettualmente analoga al teorema di Gauss per l'elettrostatica, detta legge di Ampère:

$$\oint \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 i,$$

dove  $i$  è la somma (algebrica) di tutte le correnti concatenate con il cammino di integrazione (cioè di tutte le correnti che tagliano una qualunque superficie connessa avente come bordo il cammino di integrazione). La legge di Ampère, come già il teorema di Gauss nell'elettrostatica, è di grande utilità in tutte le situazioni ad elevata simmetria, come il conduttore rettilineo indefinito o il solenoide ideale. Applicando la legge di Ampère ad un solenoide ideale (lunghezza infinita, avvolgimento compatto) avente  $n$  spire per unità di lunghezza e percorso da una corrente di intensità  $i$  si dimostra che, all'interno del solenoide, il campo magnetico ha modulo  $B = \mu_0 ni$ .

### 2.2.5 Flusso magnetico

Il flusso del campo magnetico  $\vec{B}$  attraverso una superficie  $\Sigma$  è definito come:

$$\phi_{\Sigma}(\vec{B}) = \int_{\Sigma} \vec{B} \cdot \vec{u}_n d\Sigma,$$

dove  $\vec{u}_n$  è il versore normale alla superficie  $\Sigma$ . Se il campo magnetico è costante e forma un angolo  $\alpha$  con la normale ad una superficie piana di area  $A$  si ha:

$$\phi_{\Sigma}(\vec{B}) = B \cdot A \cdot \cos(\alpha).$$

### 2.2.6 Legge di Faraday

La legge di induzione di Faraday permette di calcolare la forza elettromotrice (differenza di potenziale)  $\xi$  indotta in un circuito, qualora si conosca, in funzione del tempo, il flusso del campo magnetico attraverso una qualunque superficie delimitata dal circuito. Può essere scritta nella forma:

$$\xi = - \frac{d\phi_{\Sigma}(\vec{B})}{dt}.$$

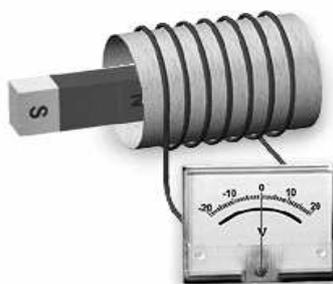


Figura 2.9: Legge di Faraday

### 2.2.7 Legge di Lenz

La legge di Lenz serve a determinare il verso della corrente indotta in un circuito, ed ha il seguente enunciato: la corrente indotta ha verso tale da opporsi alla variazione di flusso che l'ha generata. Questo significa che se, ad esempio, si ha un aumento del flusso, viene a generarsi per la legge di Faraday una forza elettromotrice, e quindi una corrente che deve essere orientata in modo tale che il campo magnetico che essa stessa genera sia diretto in senso opposto a quello originario.

### 2.2.8 Autoinduzione

Si consideri il flusso magnetico  $\phi_{\Sigma}(\vec{B})$  attraverso una superficie delimitata da un conduttore percorso da una corrente di intensità  $I$ . Poiché, per la legge di Biot-Savart, il campo magnetico è proporzionale ad  $I$ , lo stesso varrà per il suo flusso:  $\phi_{\Sigma}(\vec{B}) \propto I$ .

La costante di proporzionalità  $L$  viene chiamata induttanza e si misura in Henry.

$$L = \frac{\phi_{\Sigma}(\vec{B})}{I}.$$

Se la corrente  $I$  nel circuito varia, anche  $\phi_{\Sigma}(\vec{B})$  varia e, per la legge di Faraday, nel circuito si ha una forza elettromotrice indotta. Questo fenomeno viene chiamato autoinduzione ed è descritto quantitativamente dalla relazione:

$$\xi = -L \frac{dI}{dt},$$

che può essere dedotta dalla legge di Faraday usando la definizione di induttanza.

### 2.2.9 Energia del campo magnetico

Come per il campo elettrico, anche al campo magnetico è associata un'energia, la cui densità si scrive nella forma:

$$W = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0}.$$

Nel caso di un circuito di induttanza  $L$ , percorso da una corrente di intensità  $I$ , integrando la densità di energia del campo magnetico su tutto lo spazio, si ottiene l'energia totale:

$$W = \frac{1}{2} \cdot L \cdot I^2.$$

### 2.2.10 Mutua induzione

Si consideri un circuito (che chiameremo circuito 1) percorso da una corrente  $I_1$ , posto in prossimità di un altro circuito (che chiameremo circuito 2). Al variare di  $I_1$  varierà il flusso magnetico concatenato con il circuito 2, nel quale pertanto si avrà una forza elettromotrice indotta, in accordo alla legge di Faraday:

$$\xi_{21} = -M_{21} \frac{dI_1}{dt},$$

dove  $M_{21}$  è una costante che ha le dimensioni di un'induttanza. Scambiando il ruolo dei due circuiti potremo scrivere:

$$\xi_{12} = -M_{12} \frac{dI_2}{dt},$$

dove  $I_2$  è la corrente che scorre nel circuito 2. Si può dimostrare, per mezzo di considerazioni energetiche, che le due costanti sono uguali, e definire quindi il coefficiente di mutua induzione:

$$M = M_{12} = M_{21}.$$

## 2.3 Le onde

La generica espressione di un'onda che si propaga lungo un asse  $x$  può essere espressa come:

$$f(x, t) = f(x \pm vt),$$

dove  $v$  è la velocità di propagazione, ed il segno davanti ad essa indica la direzione di propagazione. Qualunque funzione di questo tipo soddisfa l'equazione alle derivate parziali:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2},$$

definita come equazione delle onde. Vengono definite armoniche, onde del tipo:

$$f(x \pm vt) = A \cdot \sin[k(x \pm vt)] = A \cdot \sin[k \cdot x \pm \omega \cdot t],$$

$$\omega = k \cdot v.$$

Tale onda è caratterizzata da una periodicità spaziale di periodo  $\lambda = \frac{2\pi}{k}$  (dove  $\lambda$  è la lunghezza d'onda) e da una periodicità temporale di periodo  $T = \frac{2\pi}{\omega}$ . La frequenza di oscillazione è  $\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$  e vale la relazione  $\nu \cdot \lambda = v$ . La velocità

di fase è la velocità di propagazione di una singola onda armonica e vale:  $v = \frac{\omega}{k}$ . Un qualunque segnale, sia esso periodico non armonico o in generale aperiodico, può essere rappresentato come una somma di funzioni armoniche (analisi di Fourier). Nel caso in cui le funzioni armoniche si propagano in un mezzo in cui le rispettive velocità di fase  $v$  dipendono dalla lunghezza d'onda, la velocità con cui si propaga l'energia trasportata dal segnale è la cosiddetta velocità di gruppo  $v_g$ :

$$v_g = v + \frac{dv}{dk} \cdot k.$$

### 2.3.1 Equazioni di Maxwell e onde elettromagnetiche

Le equazioni di Maxwell consistono in quattro relazioni che legano il campo elettrico e magnetico, che sono state descritte nelle pagine precedenti. Esse possono essere espresse in forma integrale o differenziale:

- legge di Gauss per l'elettricità:

$$\oint \vec{E} \cdot \vec{u}_n d\Sigma = \frac{q}{\varepsilon_0} \iff \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}.$$

- legge di Gauss per il magnetismo:

$$\oint \vec{B} \cdot \vec{u}_n d\Sigma = 0 \iff \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0.$$

- legge dell'induzione di Faraday:

$$\oint \vec{E} \cdot \vec{u}_t dl = -\frac{d}{dt} \int \vec{B} \cdot \vec{u}_n d\Sigma \iff \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}.$$

- legge di Ampère:

$$\oint \vec{B} \cdot \vec{ds} = \mu_0 I + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{d}{dt} \int \vec{E} \cdot \vec{u}_n d\Sigma \iff \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}.$$

Considerando che non vi siano cariche libere statiche né correnti di conduzione, ponendosi in un sistema di riferimento cartesiano e supponendo che i campi elettrico e magnetico siano costantemente orientati rispettivamente lungo gli assi  $x$  e  $y$ , si dimostra, manipolando opportunamente le equazioni di Maxwell, che i due campi soddisfano l'equazione delle onde:

$$\frac{\partial^2 E}{\partial z^2} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2},$$

$$\frac{\partial^2 B}{\partial z^2} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 B_y}{\partial t^2},$$

per cui le soluzioni delle suddette equazioni non sono altro che onde trasversali tra loro ortogonali (come si suol dire polarizzate linearmente) che

si propagano lungo l'asse  $z$  ( $E \perp B$ ) con una velocità  $c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}}$  che è la velocità della luce nel vuoto ( $3 \times 10^8$  m/s). Se sono imposte le soluzioni armoniche per  $E$  e  $B$ , si ricava che in ogni istante  $E = c \cdot B$ . Le densità volumica di energia elettrica e magnetica sono rispettivamente:

$$w_{el} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2,$$

$$w_{mag} = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0},$$

per cui vale:

$$w = w_{el} + w_{mag} = \varepsilon_0 \cdot E^2.$$

Un'onda elettromagnetica trasporta nello spazio energia; il flusso di tale energia per unità di tempo per unità di superficie è dato dal vettore di Poynting  $\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B}$  che ha la direzione di propagazione dell'onda. Una carica elettrica, che si muove di moto accelerato, irradia onde elettromagnetiche; in particolare, una carica che compie oscillazioni armoniche irradia onde armoniche con la stessa frequenza di oscillazione. Le equazioni di Maxwell possono essere risolte anche nel caso in cui le onde si propagano in un mezzo materiale diverso dal vuoto; in questo caso la velocità di fase è diversa da  $c$  ed è data da  $v = \frac{c}{n}$ , dove  $n$  è il cosiddetto indice di rifrazione del mezzo.

### 2.3.2 Conduttori e dielettrici

In un conduttore ideale, le cariche possono muoversi liberamente in esso, ne consegue che se lo si immerge in un campo elettrostatico, all'interno del conduttore, il campo elettrico risulterà nullo, se ciò non fosse, avverrebbe un moto di cariche e non si verificherebbero più le condizioni di staticità. In un materiale non conduttore, tutte le cariche sono fortemente vincolate ed un campo elettrostatico può facilmente penetrare al suo interno. Si consideri un condensatore a facce piane parallele distanti  $d$  e di superficie  $\Sigma$ . Nel caso in cui tra le piastre non sia interposto alcun materiale, la capacità risulta essere  $C = \varepsilon_0 \frac{\Sigma}{d}$  ed il campo elettrico tra le piastre  $E = \frac{\rho_{lib}}{\varepsilon_0}$  dove  $\rho_{lib}$  è la densità superficiale di cariche libere presenti sulle piastre stesse. Qualora si inserisca un materiale non conduttore (dielettrico), la capacità aumenta di un fattore  $\varepsilon_r$  che è la cosiddetta costante dielettrica relativa, caratteristica intrinseca di ogni dielettrico ( $C = \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{\Sigma}{d}$ ). Ciò è dovuto al fatto che a parità di cariche libere sulla piastra, il campo elettrico all'interno delle piastre è minore rispetto a quello applicato dalle suddette cariche. Si ha infatti che  $E_{tot} = E_{applicato} - E_{pol}$ , dove  $E_{pol}$  è il campo elettrico opposto in verso rispetto a quello applicato, prodotto dai dipoli elettrici che si sono formati nel dielettrico.

### 2.3.3 Polarizzazione e spostamento elettrico

Si definisce vettore polarizzazione  $\vec{P}$  di un materiale, il suo momento di dipolo elettrico per unità di volume, mentre il vettore spostamento elettrico, detto

anche induzione elettrica, si definisce come:  $\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E}_{tot}$ . Si dimostra che  $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E}_{tot} + \vec{P}$ . In prima approssimazione, il vettore polarizzazione è direttamente proporzionale al campo elettrico presente in un materiale  $\vec{P} = \varepsilon_0 \chi_e \vec{E}_{tot}$  dove  $\chi_e$  è la suscettibilità elettrica del materiale, per cui  $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E}_{tot} + \varepsilon_0 \chi_e \vec{E}_{tot}$ , ossia  $\varepsilon_r = 1 + \chi_e$ . In un dielettrico, il teorema di Gauss risulta così modificato:

$$\oint \vec{E} \cdot \vec{u}_n d\Sigma = \frac{q_{lib} + q_{pol}}{\varepsilon_0},$$

dove  $q_{pol}$  sono le cariche di polarizzazione dovuti ai dipoli elettrici, mentre per il vettore spostamento  $\vec{D}$ :

$$\oint \vec{D} \cdot \vec{u}_n d\Sigma = q_{lib}.$$

Alla superficie di separazione tra due diversi dielettrici, le linee di flusso dei campi  $D$  ed  $E$  subiscono una deflessione, tuttavia le componenti normali di  $D$  e parallele di  $E$  (rispetto all'interfaccia di separazione) si mantengono costanti.

### 2.3.4 Campo magnetico nella materia: i vettori magnetici

Partendo dal modello atomico classico, gli elettroni possono essere pensati come cariche rotanti intorno ai nuclei, quindi come spire ideali percorse da correnti, in altri termini dei dipoli magnetici elementari. Tali correnti microscopiche, in presenza di un campo magnetico generato da correnti esterne, generano un campo proprio e tendono ad orientarsi e, come conseguenza, si genera nel corpo un campo magnetico aggiuntivo. Il già noto vettore  $\vec{B}$  caratterizza il campo magnetico risultante, mentre per caratterizzare il campo magnetico generato dalle correnti esterne macroscopiche, indipendentemente dalle proprietà del mezzo circostante, si introduce il vettore  $\vec{H}$ . Se si considera un solenoide,  $\vec{H}$  è la corrente che circola in esso per unità di lunghezza. Si definisce il vettore magnetizzazione  $\vec{M}$  di un materiale, come il momento di dipolo per unità di volume; esso risulta essere in modulo uguale alle correnti di magnetizzazione superficiale per unità di lunghezza (dovute ai dipoli magnetici). In generale i tre vettori magnetici sono legati dalla relazione  $\vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{M})$ . Per la quasi totalità dei materiali il vettore polarizzazione è direttamente proporzionale al campo  $\vec{H}$  conseguente ad una corrente applicata al circuito magnetizzante. Quindi:  $\vec{M} = \chi_{mag} \cdot \vec{H}$  dove  $\chi_{mag}$  è la suscettività magnetica del materiale, definita come una costante di proporzionalità adimensionale che quantifica il grado di magnetizzazione del materiale in seguito all'applicazione di un campo magnetico. Allora  $\vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \chi_{mag} \cdot \vec{H}) = \mu_0 \mu_r \vec{H}$ , con  $\mu_r = 1 + \chi_{mag}$  detta permeabilità magnetica relativa. In un materiale la legge di Ampère per i campi  $\vec{B}$  ed  $\vec{H}$  risulta:

$$\oint \vec{B} \cdot \vec{u}_N dl = \mu_0(i_{cond} + i_{magn}) = \mu_0 \mu_r i_{cond},$$

$$\oint \vec{H} \cdot \vec{u}_N dl = i_{cond},$$

dove  $i_{cond}$  è la corrente di conduzione (macroscopica esterna) e  $i_{magn}$  è la corrente di magnetizzazione (microscopica interna).

La legge di Laplace e quella di Biot-Savart risultano così modificate:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 \mu_r}{4\pi} i_{cond} \frac{d\vec{l} \times \vec{u}_r}{r^2},$$

$$B(r) = \frac{\mu_0 \mu_r i_{cond}}{2\pi r},$$

mentre per il campo magnetico in un solenoide e la relativa densità volumica di energia magnetica (valida in generale per una qualunque distribuzione di  $B$ ) valgono:

$$B = \mu_0 \mu_r n i_{cond},$$

$$w = \frac{B^2}{2\mu_0 \mu_r}.$$

Si dimostra infine che, alla superficie di separazione di due materiali, la componente normale del campo  $B$  risulta invariata, lo stesso dicasi per la componente di  $H$  parallela all'interfaccia.

### 2.3.5 Materiali paramagnetici, diamagnetici e ferromagnetici

I materiali paramagnetici sono caratterizzati dall'aver una piccola suscettibilità magnetica positiva costante ( $\chi_{mag} \simeq 10^{-4} \sim 10^{-5}$ ); in essi gli atomi possiedono momenti di dipolo magnetico orientati casualmente in assenza di campi esterni; qualora si applichi un campo magnetico esterno i dipoli si orientano concordemente con il campo, cosicchè il campo magnetico risultante è maggiore di quello applicato.

I materiali diamagnetici sono caratterizzati dall'aver una suscettività magnetica negativa costante ( $\chi_{mag} \simeq 10^{-5}$ ); in essi gli atomi non hanno un momento di dipolo permanente, ma ne acquisiscono uno indotto dal campo magnetico applicato; tale campo indotto, per quanto si è visto nell'induzione elettromagnetica, è tale da opporsi a quello applicato, per cui il campo magnetico risultante è minore di quello applicato. In realtà il diamagnetismo si ha in tutti i materiali, tuttavia esso è generalmente un effetto molto minore del paramagnetismo.

Infine, i materiali ferromagnetici hanno una suscettività magnetica positiva elevatissima ( $\chi_{mag} \rightarrow 10^{10}$ ) che risulta essere una funzione del campo magnetico applicato; in essi vi è una forte interazione tra i momenti di dipolo magnetici atomici vicini che li mantiene allineati anche quando il campo magnetico esterno viene rimosso.

### 2.3.6 Onde sonore

Compressioni ed espansioni fisiche alternate e a determinate frequenze di mezzi materiali quali solidi, liquidi e gas, sono chiamate onde sonore. Il contenuto del mezzo oscilla nella direzione della propagazione dell'onda; quindi, queste onde sono chiamate onde meccaniche longitudinali. Si usa il termine onde sonore in relazione al range di udibilità dell'orecchio umano che è approssimativamente compreso tra  $20Hz$  e  $20kHz$ . Onde meccaniche longitudinali sotto i  $20Hz$  sono chiamate infrasuoni mentre oltre i  $20kHz$  sono chiamate ultrasuoni; Il rilevamento di infrasuoni è di enorme importanza nel campo delle costruzioni, nello studio dei fenomeni sismici, e molte altre applicazioni. Quando un infrasuono è di un'ampiezza relativamente elevata, anche se non udito, può essere percepito dagli umani con conseguenti disagi psicofisici (panico, paura, etc.). Onde udibili sono prodotte ad esempio dalle vibrazioni della corde, delle colonne di aria e di piatti vibranti rispettivamente degli strumenti musicali a corda, a fiato e di percussioni. Ogniqualvolta il suono è prodotto, l'aria è alternativamente compressa e decompressa. Questi effetti si propagano esternamente. Gli spettri d'onda possono essere molto differenti tra loro: da un semplice suono monocromatico di un metronomo o di un organo a canne, fino ad una musica di violino. Inoltre il rumore può avere uno spettro molto ampio: può essere a densità uniforme, o "colorato" con componenti armoniche predominanti in alcune delle sue porzioni.

Quando un mezzo viene compresso il suo volume varia da  $V$  a  $V - \Delta V$ ; Il rapporto tra la variazione di pressione  $\Delta p$  e la relativa variazione di volume  $V - \Delta V$ , è chiamato modulo elastico del mezzo:

$$B = -\frac{\Delta p}{\frac{\Delta V}{V}} = \rho_0 \cdot v^2,$$

dove  $\rho_0$  è la densità al di fuori della zona di compressione, e  $v$  è la velocità del suono nel mezzo. Quest'ultima può essere definita come:

$$v = \sqrt{\frac{B}{\rho_0}}.$$

Quindi, la velocità del suono dipende dal modulo elastico  $B$  e dalla densità  $\rho_0$ , ovvero dalle proprietà del mezzo. Siccome entrambe le variabili sono funzioni della temperatura, la velocità del suono dipende dalla temperatura. Questa caratteristica fonda le basi per l'utilizzo dei termometri acustici.

Per i solidi la velocità longitudinale può essere definita attraverso il modulo di Young  $E$  e il coefficiente di Poisson  $\nu$ :

$$v = \sqrt{\frac{E(1 - \nu)}{\rho_0(1 + \nu)(1 - 2\nu)}}.$$

La pressione in un punto generico nel mezzo non è costante e varia continuamente e la differenza tra la pressione media e quella istantanea, è chiamata

pressione acustica  $P$ . Durante la propagazione dell'onda, le particelle vibranti oscillano vicino ad una posizione stazionaria con una velocità istantanea  $\xi$ . Il rapporto tra la pressione acustica e la velocità istantanea (che non è la velocità di propagazione d'onda) è chiamata impedenza acustica:

$$Z = \frac{P}{\xi}.$$

L'impedenza acustica è una quantità in campo complesso, quindi caratterizzata da un certo valore di modulo e fase. Per un mezzo ideale (nessuna perdita),  $Z$  è reale ed è proporzionale alla velocità d'onda:

$$Z = \rho_0 \cdot v.$$

E' possibile definire l'intensità  $I$  di un'onda sonora come la potenza trasferita per unità di area; quest'ultima è esprimibile attraverso l'impedenza acustica con la relazione:

$$I = P\xi = \frac{P^2}{Z}.$$

E' di uso comune specificare il suono, non tramite l'intensità, ma attraverso un parametro  $\beta$  chiamato livello sonoro e definito rispetto ad una intensità di riferimento  $I_0 = 10^{-12} \frac{W}{m^2}$

$$\beta = 10 \log_{10} \left( \frac{I}{I_0} \right).$$

L'ampiezza di  $I_0$  ha questo valore di riferimento perchè rappresenta il più basso livello udibile dall'orecchio umano. L'unità di misura di  $\beta$  è il decibel (dB). Se  $I = I_0$ , allora  $\beta = 0$

## 2.4 Natura della luce

Prima del XIX secolo si pensava che la luce fosse costituita da un flusso di particelle che venivano emesse da una sorgente e che stimolavano il senso della vista entrando nell'occhio. Il più illustre sostenitore di questa teoria corpuscolare fu Isaac Newton. Già nel 1678 il danese Christian Huygens propose una teoria ondulatoria che era in grado di spiegare i fenomeni di riflessione e rifrazione della luce della teoria di Newton altrettanto bene. La natura ondulatoria della luce non fu però generalmente accettata fino al 1801, anno in cui Thomas Young studiò il fenomeno dell'interferenza. Il più importante sviluppo riguardante la teoria della luce si ebbe nel 1873, quando Maxwell predisse che la luce era una forma di onda elettromagnetica ad alta frequenza. La teoria cosiddetta "classica" dell'elettromagnetismo, spiega infatti la maggior parte delle proprietà della luce. Tuttavia alcuni fenomeni, come l'effetto fotoelettrico, non trovarono adeguata spiegazione fino al 1905, anno in cui Einstein ne propose la soluzione

utilizzando il concetto di quantizzazione sviluppato da Max Planck nel 1900. Il modello della quantizzazione assume che l'energia di un'onda luminosa sia distribuita in "pacchetti" di energia chiamati fotoni, per cui l'energia è quantizzata. Questi fotoni si comportano, in determinati casi, come particelle. In questi particolari casi si recupera, in un certo senso, la teoria corpuscolare che era stata alla base delle prime interpretazioni dei fenomeni luminosi. Tuttavia l'energia dei fotoni è determinata dalla frequenza dell'onda elettromagnetica. Ma allora la luce è un'onda o una particella? La domanda è mal posta: si può attribuire alla luce una doppia natura, corpuscolare ed ondulatoria. A seconda del tipo di esperimento si mette in rilievo un aspetto anziché l'altro.

### 2.4.1 Ottica geometrica

Trascurando la teoria quantistica, la trattazione dei fenomeni luminosi andrebbe fatta nell'ambito dell'elettromagnetismo e quindi in termini ondulatori (ottica ondulatoria). Tuttavia è possibile affrontare molti problemi di ottica senza ricorrere ad una trattazione ondulatoria. In particolare, quando la luce incontra, durante il suo cammino, ostacoli le cui dimensioni sono sempre molto maggiori della sua lunghezza d'onda, è possibile ricorrere ad una descrizione che utilizza il solo concetto di raggio di luce, definito come la normale al fronte d'onda. In questa sezione utilizzeremo tale approssimazione, che è detta ottica geometrica. L'unico riferimento alla natura ondulatoria della luce sarà contenuto nell'indice di rifrazione del mezzo, definito già nella sezione 2.3.1 come  $n = \frac{c}{v}$  (rapporto tra la velocità della luce nel vuoto e la velocità della luce nel mezzo).

#### 2.4.1.1 Riflessione e rifrazione della luce

Un raggio di luce che incide su una superficie speculare piana formando un angolo  $\vartheta_i$  con la normale al piano, viene, come illustrato in figura 2.10, riflesso secondo un angolo  $\vartheta_r = \vartheta_i$ , misurato dalla parte opposta al raggio incidente rispetto alla normale. Raggio incidente, raggio riflesso e normale giacciono sullo stesso piano. Se il piano, anziché essere una superficie completamente speculare, è la superficie di separazione tra due mezzi con diverso indice di rifrazione, parte della luce viene riflessa secondo la regola appena enunciata, e parte attraversa l'interfaccia tra i due mezzi; è quest'ultimo il fenomeno della rifrazione. Se il raggio proveniente dal primo mezzo, dotato di indice di rifrazione  $n_1$ , incide sull'interfaccia secondo un angolo  $\vartheta_i$ , e viene rifratto nel secondo mezzo, con indice di rifrazione  $n_2$ , secondo un angolo  $\vartheta_t$ , si dimostra che vale la relazione (legge di Snell):

$$n_1 \sin \vartheta_i = n_2 \sin \vartheta_t.$$

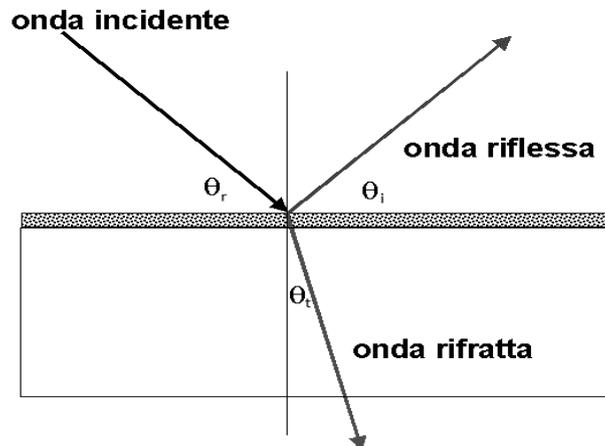


Figura 2.10: Riflessione e rifrazione

#### 2.4.1.2 Riflessione totale

Quando la luce cerca di propagarsi da un mezzo di dato indice di rifrazione  $n_1$  ad un mezzo con indice di rifrazione minore  $n_2$ , si definisce un angolo di incidenza critico (o angolo limite)  $\vartheta_c$  tale che:

$$\sin\vartheta_c = \frac{n_2}{n_1}.$$

Per angoli di incidenza maggiori di  $\vartheta_c$  il fascio luminoso è totalmente riflesso al confine e non vi è raggio rifratto.

#### 2.4.2 Ottica ondulatoria

Vi sono fenomeni luminosi che non possono essere compresi in termini di ottica geometrica, ma richiedono considerazioni di ottica ondulatoria. Tra questi vi sono il fenomeno dell'interferenza e quello della diffrazione. In termini di ottica ondulatoria si può dare una ulteriore interpretazione dell'indice di rifrazione di un mezzo. Questo era stato precedentemente definito (sezione 2.1.3) come rapporto tra la velocità  $c$  della luce nel vuoto e la velocità  $v$  della luce nel mezzo. Nel caso della luce monocromatica (ovvero di una onda elettromagnetica con frequenza  $f$  fissata) vale la relazione:

$$v = \lambda f,$$

dove  $\lambda$  è la lunghezza d'onda. La frequenza dell'onda non dipende dal mezzo, ma solo dalla sorgente, mentre la velocità di propagazione, e quindi la lunghezza d'onda, dipendono dal mezzo. Se la relazione precedente vale in un generico mezzo, nel vuoto avremo:

$$c = \lambda_0 f,$$

dove con  $\lambda_0$  viene indicato la lunghezza d'onda nel vuoto. Applicando queste due relazioni alla definizione di indice di rifrazione ed eliminando la frequenza si trova facilmente:

$$n = \frac{c}{v} = \frac{\lambda_0}{\lambda}.$$

Resta quindi mostrato che, nel caso di luce monocromatica, l'indice di rifrazione è uguale al rapporto tra la lunghezza d'onda nel vuoto e la lunghezza d'onda nel mezzo. E' utile ricordare anche il principio di Huygens: ciascun punto di un campo ondulatorio, portato ad oscillare, diviene esso stesso sorgente di onde elementari secondarie. L'onda risultante, che si propaga oltre, si forma dalla sovrapposizione di tutte le onde emesse da queste sorgenti elementari secondarie puntiformi.

#### 2.4.2.1 Interferenza

Affinchè le onde luminose emesse da due o più sorgenti interferiscano (costruttivamente o distruttivamente) è necessario che le sorgenti siano coerenti, cioè che mantengano una fase costante l'una rispetto all'altra. Non è facile ottenere questa condizione per le sorgenti reali: è necessario ricorrere ad artifici come la doppia fenditura, illuminata da una sola sorgente luminosa. Per il principio di Huygens le due fenditure si comportano a tutti gli effetti come due sorgenti coerenti. Se le fenditure sono poste ad una distanza  $d$  e si osservano le figure di interferenza su uno schermo posto a distanza  $D \gg d$ , la differenza di cammino ottico  $\delta$  per le onde luminose emesse in ogni istante dalle due fenditure, dipende dall'angolo  $\vartheta$  tra la normale al piano delle fenditure e la direzione considerata, pertanto:

$$\delta = d \cdot \sin\vartheta.$$

L'interferenza è costruttiva (frange chiare sullo schermo) quando la differenza di cammino ottico è pari ad un numero intero di lunghezze d'onda:

$$\delta = d \cdot \sin\vartheta = m\lambda,$$

con  $m = (0, \pm 1, \pm 2, \dots)$ ;

L'interferenza è invece distruttiva (frange scure sullo schermo) quando la differenza di cammino ottico è pari a un multiplo dispari di mezza lunghezza d'onda, ovvero:

$$\delta = d \cdot \sin\vartheta = \left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda,$$

con  $m = (0, \pm 1, \pm 2, \dots)$ .

Sullo schermo appaiono frange di interferenza, alternativamente chiare e scure. Nell'approssimazione di  $D$  molto grande (interferenza all'infinito) e angoli  $\vartheta$  piccoli, le posizioni delle frange chiare si possono scrivere come:

$$y_m = m\lambda \frac{D}{d}$$

mentre le posizioni delle frange scure sono:

$$y_m = (m + \frac{1}{2})\lambda \frac{D}{d}$$

Effetti di interferenza si osservano anche nelle lamine sottili, come ad esempio sottili strati di olio sull'acqua o bolle di sapone. L'interferenza è dovuta, in questo caso, alla doppia riflessione del raggio incidente sulle superfici superiore ed inferiore della lamina. Per determinare le condizioni di interferenza (costruttiva o distruttiva), occorre tenere conto, oltre che dello sfasamento dovuto alla differenza di cammino ottico, del fatto che un'onda che si propaga in un mezzo con un dato indice di rifrazione e che viene riflessa da un mezzo con indice di rifrazione maggiore, subisce un ulteriore sfasamento di  $\pi$ . La condizione di interferenza costruttiva nel caso di luce che incide quasi perpendicolarmente ad una lamina di spessore  $S$  posta in aria è data da:

$$2S = (m + \frac{1}{2})\lambda,$$

con  $m = (0, \pm 1, \pm 2, \dots)$ , dove  $\lambda$  è la lunghezza d'onda della luce nel mezzo di indice di rifrazione  $n$ . Ricordando che questa è legata alla lunghezza d'onda nel vuoto  $\lambda_0$  dalla relazione  $\lambda = \frac{\lambda_0}{n}$  si ottiene poi:

$$2nS = (m + \frac{1}{2})\lambda_0,$$

con  $m = (0, \pm 1, \pm 2, \dots)$ . Si può osservare che il primo termine a secondo membro tiene conto della differenza di cammino ottico, mentre il secondo termine tiene conto dello sfasamento dovuto alla riflessione sulla superficie superiore. Analogamente la condizione di interferenza distruttiva è:

$$2nS = m\lambda_0,$$

con  $m = (0, \pm 1, \pm 2, \dots)$ .

#### 2.4.2.2 Diffrazione

La natura ondulatoria della luce si manifesta anche in un altro importante fenomeno, quello della diffrazione, che si osserva quando un'onda luminosa incontra

ostacoli o fenditure aventi dimensioni confrontabili con la sua lunghezza d'onda. Se ad esempio un'onda luminosa piana di lunghezza d'onda  $\lambda$  incontra uno schermo opaco sul quale è stata aperta una fenditura rettangolare di grande lunghezza e di spessore  $b \sim \lambda$ , si constata che l'intensità luminosa non si distribuisce uniformemente su un secondo schermo posto dietro la fenditura. Al contrario si osserva un massimo di intensità luminosa molto pronunciato al centro dello schermo e una successione di massimi secondari, via via meno pronunciati, disposti simmetricamente a sinistra e a destra della riga principale come illustrato in figura 2.11. Gli zeri di intensità luminosa si hanno quando tra le sorgenti elementari di cui si può pensare sia costituita la fenditura vale la condizione di interferenza distruttiva:

$$b \sin \vartheta = m \lambda,$$

con  $m = (0, \pm 1, \pm 2, \dots)$ .

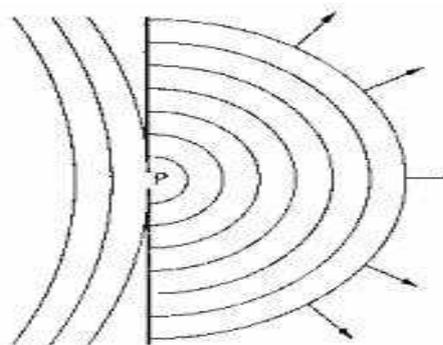


Figura 2.11: Diffrazione

## Capitolo 3

# Cenni di trasmissione del calore

Il nostro corpo ha la capacità di riconoscere se un corpo è relativamente caldo oppure freddo, ma questo non significa che sia uno strumento accurato per le misure di temperatura: i sensi umani non solo non sono lineari, ma dipendenti dalle nostre esperienze passate. E' comunque facilmente percepibile la differenza tra un oggetto caldo ed uno freddo, oltre che a temperatura ambiente. Cosa succede dunque a questi oggetti che producono ai nostri sensi percezioni differenti?

Ogni singola particella di questo universo esiste in un continuo moto perpetuo. La temperatura, nella maniera più intuitiva, può essere definita come una misura dell'energia cinetica delle particelle vibranti. Vibrazioni e movimenti più accentuati delle particelle implicano una temperatura più alta delle stesse. Naturalmente molecole ed atomi in un dato volume di materiale non si muovono con uguali intensità, quindi, a livello microscopico, ognuna di esse è ad una certa temperatura. L'energia cinetica media di un enorme numero di particelle in movimento determina la temperatura macroscopica di un oggetto.

Siccome la temperatura è legata al movimento delle molecole, è strettamente legata alla pressione, che è definita come la forza applicata dalle molecole in movimento per unità di area. Quando atomi e molecole di un materiale si muovono, possono interagire con altri materiali che si trovano nelle vicinanze. Inoltre ogni singolo atomo vibrante si comporta come un microscopico radiotrasmettitore che emana radiazioni elettromagnetiche nello spazio circostante. Questi comportamenti fissano le basi per la trasmissione del calore in maniera unidirezionale da corpi ad alta temperatura verso corpi a più bassa temperatura. Inoltre più intenso sarà il movimento molecolare e più alta sarà la temperatura e più intensa la radiazione elettromagnetica.

Al fine di poter effettuare misure di temperatura, uno strumento, comunemente chiamato termometro, che sia a contatto con un oggetto ad una data temperatura o che sia irradiato dalla radiazione elettromagnetica, produrrà una reazione fisica oppure un segnale. Questo segnale diventerà la misura della temperatura di tale oggetto.

L'energia termica è ciò che viene comunemente chiamato calore, il quale viene misurato in calorie. Una caloria è definita come la quantità di calore che è richiesta per innalzare di 1°C la temperatura di 1g di acqua alla pressione atmosferica.

L'energia può essere trasmessa sotto forma di calore per effetto di una differenza di temperatura tra il sistema e l'esterno. Lo studio della fisica della trasmissione del calore cerca di stabilire quantitativamente questa trasmissione di energia. Come noto, il calore può essere trasmesso secondo tre meccanismi diversi: conduzione, convezione ed irraggiamento che possono anche coesistere tra di loro.

### 3.1 Conduzione

La conduzione è una modalità di trasmissione del calore che si realizza all'interno di mezzi materiali (≠ la conduzione nel vuoto) mediante trasmissione di energia cinetica dalle zone ad alta temperatura verso le zone a bassa temperatura senza movimento macroscopico di particelle. Si può allora affermare che l'energia viene trasmessa per conduzione e che il calore trasmesso nell'unità di tempo sull'unità di area è proporzionale al gradiente normale di temperatura: vale la legge di Fourier:

$$q = -\lambda A \frac{\partial T}{\partial n},$$

dove  $q$  è il calore scambiato nell'unità di tempo attraverso una sezione  $A$ , e  $\frac{\partial T}{\partial n}$  è il gradiente di temperatura nella direzione del flusso di calore. La costante positiva  $\lambda$  è la conducibilità termica del materiale ed il segno negativo è necessario per soddisfare il secondo principio della termodinamica.

### 3.2 Convezione

La convezione è la modalità di trasmissione del calore che si realizza tra due mezzi materiali di cui uno di essi è un fluido che è in moto relativo rispetto all'altro.

Si osservi la figura 3.1. La temperatura della superficie sia  $T_w$  e la temperatura del fluido sia  $T_\infty$ . La velocità del fluido sia quella indicata dalle frecce che si riduce a zero sulla superficie a causa delle azioni viscosive. Poiché la velocità dello strato di fluido a contatto con la parete è nulla, il calore viene trasmesso per conduzione in quel punto. Il gradiente di temperatura dipende però dalla velocità con cui il fluido trasporta il calore: tanto più alta sarà la velocità del fluido tanto più grande sarà il gradiente.

Per esprimere l'effetto complessivo della convezione si utilizza la legge del raffreddamento di Newton:

$$q = \alpha A (T_p - T_f).$$

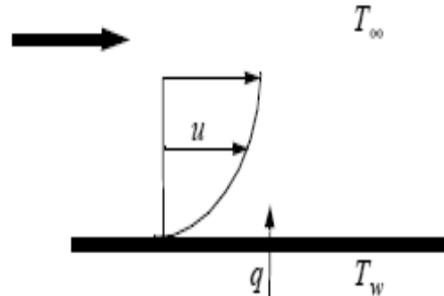


Figura 3.1: Convezione

Il calore trasferito nell'unità di tempo è legato alla differenza di temperatura tra il fluido e la parete e alla superficie di scambio termico  $A$ . La quantità  $\alpha$  è il coefficiente convettivo di trasmissione del calore. Esso può essere calcolato nei casi più semplici, ma il più delle volte deve essere determinato sperimentalmente. Nel caso in cui la superficie calda è esposta in aria calma si ha ancora un moto dell'aria a causa di gradienti di densità vicino alla parete: in questo caso si parla di convezione naturale.

### 3.3 Irraggiamento

L'irraggiamento è la modalità di trasmissione del calore associata all'emissione ed assorbimento di onde elettromagnetiche tra i mezzi materiali. A differenza di conduzione e convezione, dove l'energia viene trasmessa attraverso un mezzo materiale, con l'irraggiamento il calore può essere trasmesso anche attraverso il vuoto. Il meccanismo in questo caso è la radiazione elettromagnetica che si propaga per effetto di una differenza di temperatura (radiazione termica). Un radiatore termico ideale, o corpo nero, emette energia proporzionalmente alla quarta potenza della temperatura assoluta del corpo e alla sua superficie:

$$q_{rad} = \sigma \cdot A \cdot T^4,$$

in cui  $\sigma$  è la costante di proporzionalità ed è nota come costante di Stefan-Boltzmann ed ha il valore  $5.669 \cdot 10^{-8} \left[ \frac{W}{m^2 K^4} \right]$ . L'equazione di Stefan-Boltzmann si applica solo ai corpi neri.

Lo scambio netto di energia termica radiante tra due superfici, rispettivamente alle temperature  $T_1$  e  $T_2$  sarà proporzionale alla differenza delle temperature assolute alla quarta potenza:

$$\frac{q_{rad-netta}}{A} = \sigma \cdot A \cdot (T_1^4 - T_2^4).$$

Per considerare il fatto che i corpi reali emettono meno di un corpo nero, si introduce l'emissività  $\varepsilon$  che lega la radiazione di una superficie "grigia" a quella di un corpo nero ideale.

## Capitolo 4

# L'effetto fotoelettrico

L'effetto fotoelettrico è un fenomeno che si manifesta con l'emissione di particelle elettricamente cariche da parte di un corpo esposto a onde luminose o a radiazioni elettromagnetiche di varia frequenza. Con il termine effetto fotoelettrico si indicano, in generale, diversi tipi di interazioni correlate. Nel cosiddetto effetto fotoelettrico esterno gli elettroni vengono emessi dalla superficie di un conduttore metallico (o da un gas) in seguito all'assorbimento dell'energia trasportata dalla luce incidente sulla superficie stessa. L'effetto è sfruttato nella cellula fotoelettrica, in cui gli elettroni emessi da uno dei due poli della cellula, il fotocatodo, migrano verso l'altro polo, l'anodo, per effetto di un campo elettrico applicato. Si definisce invece effetto fotoelettrico interno quel fenomeno in cui gli elettroni liberati dalla radiazione restano all'interno del materiale, disponibili alla conduzione.

Il termine effetto fotoelettrico può indicare altri tre processi: la fotoionizzazione, la fotoconduzione e l'effetto fotovoltaico. La fotoionizzazione consiste nella ionizzazione di un gas da parte di luce o di altra radiazione elettromagnetica: i fotoni, se dotati di energia sufficiente, liberano uno o più elettroni appartenenti ai livelli energetici esterni degli atomi del gas. Nella fotoconduzione, gli elettroni facenti parte del reticolo cristallino di un solido assorbono energia dai fotoni incidenti e divengono elettroni di conduzione. L'effetto fotovoltaico si manifesta invece con la formazione di coppie elettrone-lacuna quando un fascio di fotoni colpisce la superficie di un materiale semiconduttore. In alcuni tipi di transistor quest'ultimo effetto viene sfruttato per provocare una differenza di potenziale in corrispondenza della giunzione tra due diversi semiconduttori.

Alcune delle caratteristiche principali dell'effetto fotoelettrico non sono spiegabili con la fisica classica. Nel 1905 Einstein propose una spiegazione dell'effetto fotoelettrico assumendo che la radiazione elettromagnetica fosse emessa per pacchetti, quanti, di energia, chiamati fotoni. Una radiazione di frequenza  $f$  è costituita da fotoni di energia  $h$  ( $h$  costante di Planck) e la sua intensità dipende dal numero di fotoni. Nell'effetto fotoelettrico un fotone è completamente assorbito da un elettrone, che aumenta la sua energia proprio di  $h$ . Si ricorda che Planck aveva ipotizzato un comportamento di questo tipo solo per l'energia elettromagnetica in una cavità, cioè per onde stazionarie, in quanto il comportamento ondulatorio delle onde elettromagnetiche era stato dimostrato

dalle esperienze di interferenza e diffrazione. Einstein sostenne che, siccome le esperienze di interferenza coinvolgono un numero molto grande di fotoni, non esiste realmente una contraddizione tra l'ipotesi dei fotoni ed il comportamento ondulatorio dimostrato dai fenomeni di interferenza, in quanto i risultati di queste esperienze sono valori medi sul comportamento dei singoli fotoni.

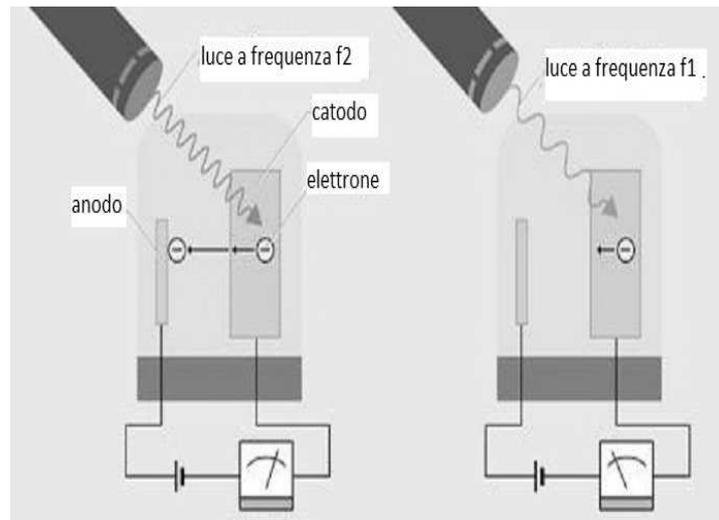


Figura 4.1: Effetto fotoelettrico

Nella figura 4.1 la radiazione luminosa di frequenza  $f_2$  è composta da particelle corpuscolari (fotoni) di energia  $E = h \cdot f_2$  dove  $h$  è la costante di Planck. Per riuscire a strappare un elettrone a una superficie metallica, l'energia del fotone deve essere maggiore dell'energia di legame dell'elettrone caratteristica del metallo definita come  $W_0$ . In questo caso, inserendo un amperometro fra anodo e catodo si misura un passaggio di corrente (a sinistra, nell'illustrazione). Se l'energia del fotone è inferiore a  $W_0$  (a destra, nell'illustrazione) non si ha effetto fotoelettrico, e dunque l'amperometro non registra flusso di corrente. La caratteristica importante dell'effetto fotoelettrico è di dipendere dalla frequenza della radiazione, che determina l'energia del fotone, e non dall'intensità della luce.

Nel 1905 Albert Einstein spiegò l'effetto fotoelettrico con l'ipotesi che i raggi luminosi trasportassero particelle, chiamate fotoni, la cui energia è direttamente proporzionale alla frequenza dell'onda corrispondente. Secondo la teoria formulata da Einstein, incidendo sulla superficie di un corpo metallico, i fotoni cedono parte della propria energia agli elettroni liberi del conduttore, provocandone l'emissione. In questa ipotesi, l'energia dell'elettrone liberato dipende solo dall'energia del fotone, mentre l'intensità della radiazione è direttamente correlata al numero di fotoni trasportati dall'onda, e dunque può influire sul numero di elettroni estratti dal metallo, ma non sulla loro energia.

I risultati sperimentali portano all'individuazione degli elementi caratterizzanti il fenomeno fotoelettrico, che si possono così riassumere:

- esiste una frequenza di soglia  $f_0$ , dipendente dal tipo di metallo, della radiazione incidente al disotto della quale non si verifica nessuno effetto;
- esiste un potenziale d'arresto (stopping potential)  $V_0$ , indipendente dall'intensità  $I$  della radiazione incidente, al di sotto del quale nessun elettrone emesso raggiunge l'anodo, quindi l'energia cinetica massima,  $E_{K_{MAX}}$ , dei fotoelettroni più veloci soddisfa l'equazione:

$$E_{K_{MAX}} = e \cdot V_0,$$

ed è indipendente dall'intensità  $I$  ( $e$  è la carica elettrica dell'elettrone pari a  $1.6 \cdot 10^{-19}C$ ). Il valore di  $V_0$  cresce linearmente con la frequenza della radiazione incidente;

- l'emissione dei fotoelettroni è istantanea, per ogni valore di  $I$  purchè  $f > f_0$ ;
- la corrente fotoelettronica  $i$ , cioè il numero di elettroni emessi nell'unità di tempo, dipende dall'intensità  $I$  della radiazione incidente.

Si osservi come l'ipotesi di Einstein spiega l'effetto fotoelettrico. Si assuma, per semplicità, che l'elettrone sia a riposo. Tale ipotesi è giustificata dall'osservazione sperimentale che l'effetto fotoelettrico avviene con luce nel visibile o nell'ultravioletto a cui corrisponde un'energia  $E = hf \sim 1 - 10eV$  molto maggiore dell'energia cinetica termica che, a temperatura ordinaria, è dell'ordine di  $\sim 10^{-2}eV$ .

- Un elettrone che ha assorbito un fotone di frequenza  $f$ , è emesso dal catodo con energia cinetica  $E_K$  data da:

$$E_K = hf - W,$$

dove  $W$  è il lavoro necessario per vincere l'attrazione degli atomi e le eventuali perdite di energia cinetica dovuta ad urti, che occorre fornire per rimuovere l'elettrone dal metallo. L'energia cinetica massima  $E_{K_{MAX}}$  con cui un elettrone può essere emesso quindi soddisfa un'equazione del tipo:

$$E_{K_{MAX}} = hf - W_0 \geq 0,$$

dove  $W_0$ , funzione lavoro o energia di estrazione, è una caratteristica del metallo. Quindi esiste una frequenza di soglia,  $hf_0 = W_0$ , tale che per  $f < f_0$  l'equazione precedente non ha soluzione.

- Si deduce immediatamente che esiste un valore  $V_0$  del potenziale d'arresto

$$V_0 = \frac{hf}{e} - \frac{W_0}{e},$$

in grado di impedire anche agli elettroni più veloci di raggiungere l'anodo;

- Siccome un elettrone del catodo acquista, mediante l'assorbimento di un fotone, un pacchetto  $h$  di energia, l'emissione avviene immediatamente e non dipende dall'intensità  $I$  della radiazione. Al crescere di  $I$ , aumenta il numero di fotoni che incide sul catodo, quindi aumenta la probabilità per

gli elettroni di assorbire un fotone  $e$ , di conseguenza, il numero di elettroni emessi. Quindi l'effetto fotoelettrico fornisce una prova, indipendente dalla radiazione del corpo nero, che la radiazione elettromagnetica è costituita da quanti di energia  $h$ .

I sensori fotoelettrici vengono utilizzati per misure di intensità luminosa. Questi sensori generano una corrente proporzionale alla potenza della radiazione luminosa incidente. Tra i sensori fotoelettrici, i dispositivi più comunemente utilizzati sono i fotodiodi (al Silicio o al Germanio), che generano correnti specifiche dell'ordine di  $10 \frac{mA}{mW}$  con costanti di tempo dell'ordine di  $10ns$ . Questi dispositivi sono assai sensibili alla temperatura e la risposta è lineare solo se essi vengono polarizzati opportunamente. Oltre che per misure dirette di intensità luminosa, i sensori fotoelettrici vengono utilizzati, spesso, in combinazione con emettitori di radiazione luminosa, anche per misure indirette di posizione o velocità (righe ed encoder ottici) e per realizzare fotocellule.

## Capitolo 5

# Effetto piezoelettrico

L'effetto piezoelettrico fu scoperto da Pierre e Jacques Curie nel 1880. Venne infatti dimostrato come certi tipi di cristalli soggetti ad una sollecitazione meccanica, sprigionassero una carica elettrica, di intensità proporzionale alla sollecitazione subita. Viceversa, questi materiali venivano deformati se sottoposti ad un campo elettrico. Il funzionamento di un cristallo piezoelettrico, come schematizzato in figura 5.1, è quindi abbastanza semplice: quando viene compresso oppure teso, si posizionano sulle facce opposte cariche di segno opposto.

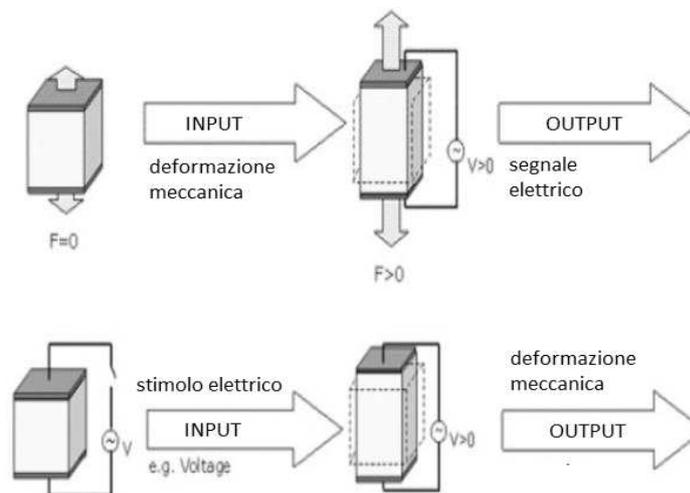


Figura 5.1: Effetto piezoelettrico

Il cristallo si comporta come un condensatore al quale è applicata una differenza di potenziale. Se le due facce vengono collegate tramite un circuito esterno, viene generata una corrente, chiamata corrente piezoelettrica. Al contrario,

quando viene applicata una differenza di potenziale al cristallo esso si espande o si contrae. L'effetto piezoelettrico è quindi un fenomeno reversibile.

Un sensore piezoelettrico è formato applicando degli elettrodi ad un materiale cristallino polarizzato come rappresentato in figura 5.2: un paio di elettrodi viene utilizzato per fornire la tensione al cristallo e i rimanenti per raccogliere le cariche risultanti dalla deformazione sviluppata.

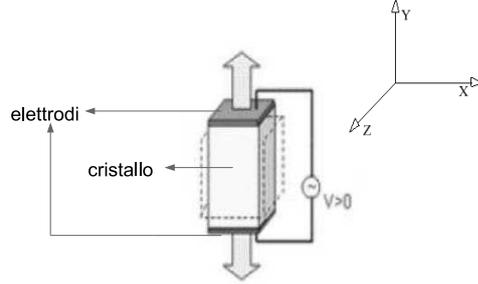


Figura 5.2: Sensore piezoelettrico

L'intensità dell'effetto piezoelettrico, in un modello semplificato, può essere rappresentata dal vettore di polarizzazione:

$$\vec{P} = \vec{P}_{xx} + \vec{P}_{yy} + \vec{P}_{zz},$$

dove  $x$ ,  $y$  e  $z$  sono le coordinate di un sistema di riferimento cartesiano convenzionale riferito agli assi del cristallo.

In termini di tensioni assiali  $\sigma$  vale:

$$\vec{P}_{xx} = d_{11}\sigma_{xx} + d_{12}\sigma_{yy} + d_{13}\sigma_{zz}$$

$$\vec{P}_{yy} = d_{21}\sigma_{xx} + d_{22}\sigma_{yy} + d_{23}\sigma_{zz}$$

$$\vec{P}_{zz} = d_{31}\sigma_{xx} + d_{32}\sigma_{yy} + d_{33}\sigma_{zz}$$

dove le costanti  $d_{pq}$  sono i coefficienti piezoelettrici lungo gli assi ortogonali alle facce del cristallo; essi hanno dimensione  $\left[\frac{C}{N}\right]$ .

Per semplificare la notazione vengono definite due unità aggiuntive:

- $g = \frac{d_{pq}}{\varepsilon_0 \varepsilon_{pq}} \left[ \frac{V}{\frac{N}{m^2}} \right]$  questo coefficiente rappresenta il gradiente di tensione generato dal cristallo per unità di pressione applicata.
- $h = g \cdot E_{Young} \left[ \frac{V}{m} \right]$  questo coefficiente è ottenuto moltiplicando il coefficiente  $g$  per il corrispondente modulo di Young relativo all'asse del cristallo.

I cristalli piezoelettrici sono quindi convertitori diretti di energia meccanica in energia elettrica. L'efficienza di conversione può essere determinata ricorrendo al cosiddetto coefficiente di accoppiamento

$$k_{pq} = \sqrt{d_{pq} \cdot h_{pq}}.$$

Questo coefficiente è di primaria importanza nelle applicazioni dove l'efficienza energetica è un parametro imprescindibile come nel campo dell'acustica e degli ultrasuoni.

La carica generata dal cristallo piezoelettrico è proporzionale alla forza applicata, per esempio, nella direzione  $x$ , la carica vale:

$$Q_x = d_{11} F_x.$$

Dato che un cristallo contornato da elettrodi forma un condensatore di capacità  $C$ , la tensione  $V$  che si sviluppa tra gli elettrodi vale:

$$V = \frac{Q_x}{C} = \frac{d_{11}}{C} F_x;$$

a sua volta la capacità può essere rappresentata attraverso l'area superficiale  $\Sigma$  degli elettrodi e lo spessore  $s$  del cristallo:

$$C = k \varepsilon_0 \frac{\Sigma}{s},$$

dove  $\varepsilon_0$  è la costante di permeabilità e  $k$  la costante dielettrica.

La tensione risultante risulta quindi:

$$V = \frac{d_{11}}{C} F_x = \frac{d_{11}}{k \varepsilon_0 \Sigma} F_x.$$

I materiali piezoelettrici sono disponibili in diverse forme che includono i monocristalli (quarzo), i materiali ceramici e quelli polimerici, come il poly-vinylidene-fluoride (PVDF), dotati di ottime qualità.

Tipicamente i materiali piezoelettrici presentano caratteristiche di anisotropia, cosicché le proprietà del materiale differiscono a seconda della direzione di applicazione della forza o del campo elettrico che sollecita il materiale. Ogni materiale piezoelettrico è quindi caratterizzato da una direzione di polarizzazione lungo la quale gli effetti piezoelettrici si manifestano in misura maggiore o inferiore.

I sensori piezoelettrici, quindi, convertono sforzi di trazione, compressione o di taglio, in forze elettromotrici. Sottoponendo dei cristalli opportunamente tagliati a tali sforzi, sulle facce si originano cariche elettriche dell'ordine di  $10^{-9} \frac{C}{N}$ , che producono sulla capacità propria del cristallo e su eventuali capacità esterne delle differenze di potenziale, misurabili con strumenti ad alta impedenza. Il materiale piezoelettrico per eccellenza è il quarzo, ma esistono anche alcune ceramiche con buone caratteristiche di piezoelettricità.

Per un sensore piezoelettrico si definisce sensibilità di carica la grandezza:

$$S_Q = \frac{Q}{P},$$

dove  $Q$  è la carica prodotta e  $P$  lo sforzo applicato. Poichè:

$$V = \frac{Q}{C} = \frac{S_Q P}{C},$$

dove  $V$  è la forza elettromotrice generata e  $C = C_S + C_C$  è la capacità equivalente di tutto ciò che si trova a monte del punto dove si rileva  $V$  (inclusi i cavi di collegamento e la capacità di ingresso dello strumento di misura), la sensibilità in tensione del trasduttore è data da:

$$S_V = \frac{S_Q}{C} = \frac{Q}{P \cdot C} = \frac{Q}{P \cdot (C_S + C_C)}.$$

Dall' ultima relazione si vede che  $S_V$  varia con  $C_C$  e, quindi, con le condizioni di impiego del sensore (cavi di collegamento e strumento di misura). Per ovviare a questo inconveniente, si interpongono frequentemente fra sensore e strumento di misura, come rappresentato in figura 5.3, degli opportuni amplificatori di carica (integratori) i quali determinano una tensione d'uscita proporzionale alla carica  $Q$  (non alla tensione  $V$ ) e svincolano, così, il valore di  $S_V$  dalle variazioni di  $C_C$ .

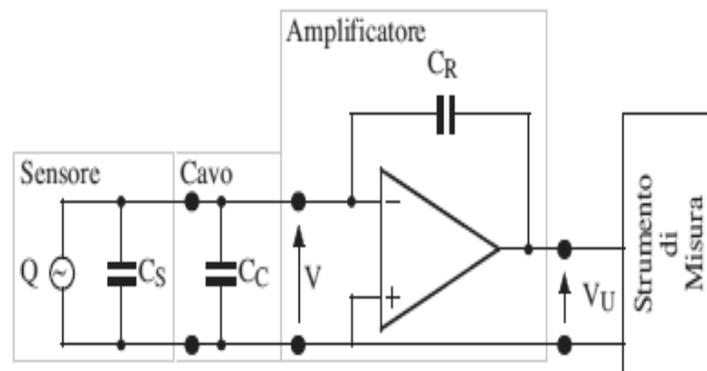


Figura 5.3: Tipico collegamento elettrico di un sensore piezoelettrico

Vale, infatti, la relazione:

$$V_U = \frac{Q}{C_R},$$

dove  $C_R$  è la capacità dell'amplificatore.

Questi sensori hanno frequenze di risonanza elevate (decine di MHz) e, quindi, si prestano bene a rilievi in regime dinamico. Inoltre, essi sono molto robusti e di ridotte dimensioni. Essi sono, però, sensibili alla temperatura ed all'umidità e sono difficili da calibrare in condizioni statiche.

## Capitolo 6

# Effetto Hall

L'effetto Hall fu scoperto nel 1879 alla Johns Hopkins University da E. Hall. Inizialmente tale effetto era molto limitato; si rivelò però un prezioso strumento di studio sulla conduzione elettrica nei metalli, semiconduttori, ed altri materiali conduttivi. Attualmente i sensori ad effetto Hall sono utilizzati come rilevatori di campi magnetici, come sensori di posizione e di movimento.

L'effetto è basato nell'interazione tra vettori elettrici in movimento ed un campo magnetico esterno. Nei metalli, tali vettori sono elettroni. Quando una carica elettrica si muove in presenza di un campo magnetico, è soggetta alla forza di Lorentz  $F$ :

$$\vec{F} = q \cdot \vec{v} \times \vec{B},$$

dove  $q = 1.6 \cdot 10^{-19}C$  è la carica dell'elettrone,  $v$  è la velocità dell'elettrone e  $B$  è il campo magnetico.

Si assuma che l'elettrone si muova all'interno di una piastra conduttiva piatta che è immersa in un campo magnetico come rappresentato in figura 6.1. La piastra abbia due contatti addizionali alla sua sinistra ed alla sua destra ai quali sia connesso un voltmetro. Altri due contatti siano posti uno al bordo estremo superiore e l'altro al bordo estremo inferiore della piastra. Questi ultimi siano collegati ad un generatore di corrente elettrica  $i$ .

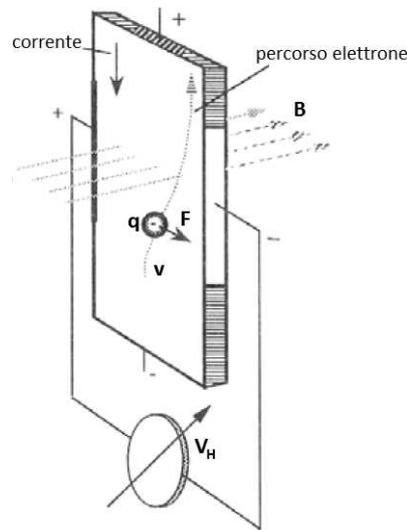


Figura 6.1: Effetto Hall

A causa del campo magnetico, la forza di Lorentz tende a spostare gli elettroni verso il lato destro della piastra sul quale si accumulano quindi un maggior numero di cariche negative. Queste ultime, insieme al campo magnetico ed alla corrente elettrica, producono una tensione  $V_H$  chiamata "differenza di potenziale trasversale di Hall". Il segno e il modulo di questa tensione, dipendono entrambi dall'ampiezza e dalla direzione del campo magnetico e rispettivamente dalla corrente. Ad una data temperatura la tensione di Hall è data da:

$$V_H = h \cdot i \cdot B \cdot \sin\alpha,$$

dove  $\alpha$  è l'angolo tra il vettore campo magnetico  $B$  e la superficie della piastra e  $h$  è il coefficiente di sensibilità globale il cui valore dipende dal materiale della piastra, dalla sua geometria e dalla sua temperatura. La sensibilità globale dipende dal coefficiente di Hall che può essere definito come il gradiente di potenziale elettrico trasversale per unità di intensità di campo magnetico per unità di densità di corrente. In accordo con la teoria degli elettroni liberi nei metalli, il coefficiente di Hall vale:

$$H = \frac{1}{N \cdot c \cdot q},$$

dove  $N$  è il numero di elettroni liberi per unità di volume,  $c$  la velocità della luce e  $q$  la carica dell'elettrone. In base alla struttura cristallina del materiale, le cariche possono essere elettroni (negative) o lacune (positive). Come risultato, l'effetto Hall può essere positivo o negativo.

Un sensore ad effetto Hall è di solito contenuto dentro un involucro a quattro terminali: i terminali per l'applicazione della corrente di alimentazione sono

chiamati terminali di controllo e, la resistenza tra loro, è chiamata resistenza di controllo  $R_i$ ; i terminali dove viene prelevata la tensione di uscita sono chiamati terminali differenziali di uscita e la resistenza tra loro è chiamata resistenza differenziale di uscita,  $R_o$ .

Il circuito equivalente di un sensore ad effetto Hall può essere rappresentato, come in figura 6.2, da una rete di resistori incrociati e due generatori di tensione connessi in serie ai terminali di output:

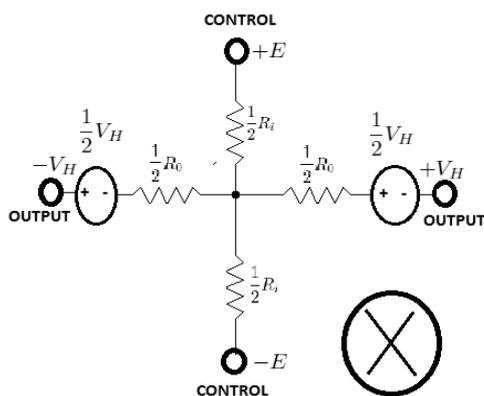


Figura 6.2: Circuito equivalente di un sensore ad effetto Hall

(la croce  $\otimes$  in figura indica il verso entrante nel foglio del vettore campo magnetico  $B$ )

Il sensore è caratterizzato dalle sue resistenze ( $R_i$  e  $R_o$ ) attraverso entrambe le coppie di terminali, dalla tensione di offset misurata in assenza di campo magnetico, dalla sua sensibilità ed attraverso il coefficiente termico di sensibilità; alcuni valori tipici sono elencati nella tabella seguente:

Corrente di controllo	3 mA
Resistenza di controllo	2.2 k $\Omega$
Resistenza di controllo/temperatura	+0.8% / °C
Resistenza differenziale di uscita	4.4 k $\Omega$
Tensione di offset di uscita	5.0 mV (con B=0G) (G=Gauss)
Sensibilità	60 $\mu$ V/G
Sensibilità/temperatura	+0.1% / °C
Sensibilità complessiva	20 V/ $\Omega$ kG
Massima densità di flusso magnetico	illimitato

Figura 6.3: Caratteristiche tipiche di un sensore lineare ad effetto Hall

## Capitolo 7

# Effetto Seebeck ed effetto Peltier

Nel 1821, T.J. Seebeck, nato in Estonia e fisico all'università di Berlino e di Gottinga, ebbe a che fare per caso con un pezzo circolare di bismuto e rame studiando gli effetti termici in galvanostegia. Una bussola nelle vicinanze indicò un disturbo magnetico.

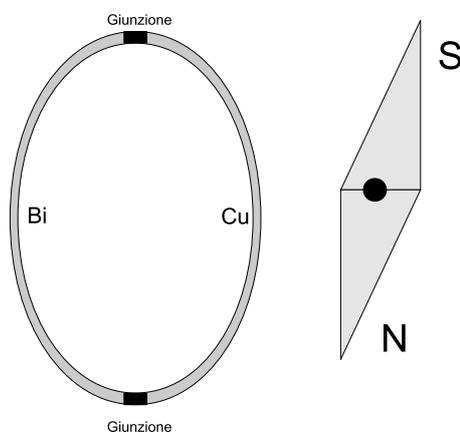


Figura 7.1: L'interazione elettromagnetica dell'effetto Seebeck

Seebeck sperimentò ripetutamente altre combinazioni tra metalli a differenti temperature ma niente rilevò linee di forza di campo magnetico. Curiosamente non credeva che una corrente elettrica stesse scorrendo e preferì descrivere questo effetto come "effetto termomagnetico". Se, utilizzando un conduttore, se ne ponesse un'estremità ad una temperatura fredda e l'altra estremità ad una temperatura calda, si instaurerebbe un flusso di energia attraverso trasmissione di calore dalle zone ad alta temperatura verso le zone a bassa temperatura. L'intensità del flusso di calore è proporzionale alla conducibilità termica del

materiale del conduttore, inoltre il gradiente termico fissa un campo elettrico all'interno del conduttore relativamente all'effetto Thompson.

L'effetto Thompson venne scoperto intorno al 1850 da W. Thomson. Consiste nell'assorbimento o emanazione di calore dovuti al passaggio di corrente attraverso un conduttore omogeneo dotato di gradiente termico. Il calore è quindi linearmente proporzionale alla corrente ed è assorbito quando corrente e calore scorrono in versi opposti, mentre è emanato quando scorrono entrambi nello stesso verso.

Il campo genera una tensione incrementale:

$$dV_a = \alpha_a \frac{dT}{dx} dx,$$

dove  $dT$  è il gradiente di temperatura lungo una lunghezza infinitesima  $dx$ , e  $\alpha_a$  è il coefficiente assoluto di Seebeck del materiale. Se il materiale è omogeneo,  $\alpha_a$  non è funzione della lunghezza e l'equazione precedente si riduce a:

$$dV_a = \alpha_a dT.$$

Quest'ultima è un'importante espressione matematica dell'effetto termoelettrico.

La figura 7.2 mostra un conduttore avente una temperatura non uniforme  $T$  lungo la sua lunghezza  $x$ .

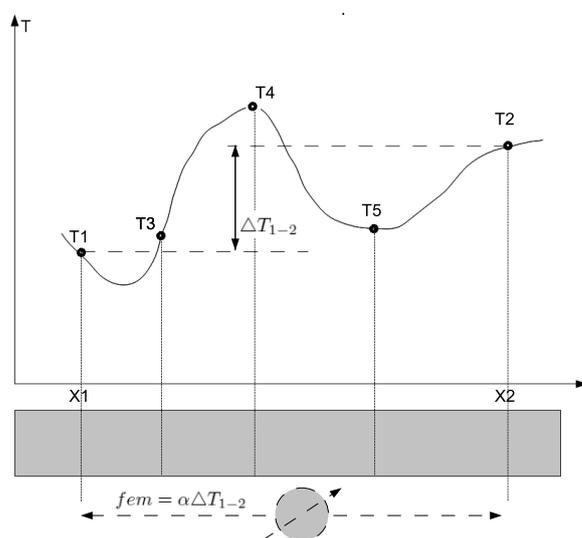


Figura 7.2: la variazione di temperatura lungo un conduttore è sorgente di una f.e.m. termoelettrica

Un gradiente di temperatura tra una qualsiasi coppia di punti definisce una forza elettromotrice  $fem$  tra questi ultimi. Altre possibili temperature comprese tra

tali punti (ad esempio le temperature  $T_3$ ,  $T_4$  e  $T_5$ ) non hanno alcun effetto sul valore della  $fem$  tra i punti X1 e X2 rispettivamente alle temperature  $T_1$  e  $T_2$ .

Si consideri un circuito elettrico di misura dove è presente un anello di corrente con, collegato in serie, un amperometro, come rappresentato in figura 7.3. Se l'anello è costituito da un unico materiale, ad esempio rame, allora nessuna corrente sarà rilevata dall'amperometro anche se la temperatura lungo il conduttore non è uniforme. Il campo elettrico presente sia nel ramo destro che sinistro dell'anello produrrà correnti di uguali intensità ( $i_a = i_b$ ) che si compensano a vicenda dando come risultato una corrente netta pari a zero (figura 7.3 di sinistra).

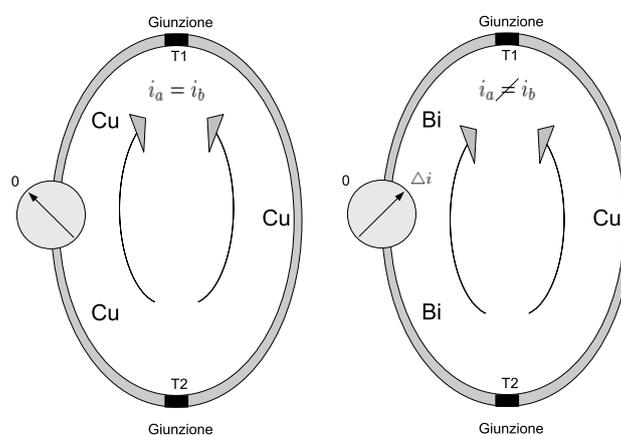


Figura 7.3: Anello di corrente ed effetto Seebeck

Una  $fem$  indotta termicamente esiste in ogni materiale conduttore non omogeneo, ma non può essere misurata direttamente. Per osservare l'effetto termoelettrico, è necessario utilizzare un circuito composto da due differenti materiali, così da poterne misurare la netta differenza tra le loro proprietà termoelettriche. Nella figura 7.3 di destra l'anello di corrente è realizzato con due diversi materiali conduttori che concorrono a produrre una corrente netta  $\Delta i = i_a - i_b$ ; tale corrente dipende anche dalla forma e dalla sezione del conduttore. Se invece di misurare la corrente, si misurasse la tensione netta, il potenziale dipenderebbe solo dal materiale e dalla differenza di temperatura e da nessun altro fattore. Un  $ddp$  indotta termicamente è quindi chiamata tensione di Seebeck.

Cosa succede quando due conduttori sono messi a contatto? Gli elettroni liberi nel metallo potrebbero comportarsi come un gas ideale e l'energia cinetica degli elettroni è funzione della temperatura del materiale. Comunque, in differenti materiali, energia e densità di elettroni liberi non sono le stesse. Quando due materiali diversi alla stessa temperatura sono messi a contatto, esiste un flusso di elettroni liberi attraverso la giunzione. Il potenziale elettrico del materiale accettore del flusso di elettroni diventa "più negativo" all'interfaccia e il materiale emettitore di elettroni diventa "più positivo". La differenza di concentrazione di elettroni alla giunzione genera un campo elettrico che bilancia il processo di diffusione fino al raggiungimento di uno stato di equilibrio.

Se le due giunzioni sono alla stessa temperatura i campi elettrici alle giunzioni si elidono, cosa che non avviene se le due giunzioni si trovano a differenti temperature.

Si può affermare che le proprietà termoelettriche di un conduttore sono, in generale, altre proprietà esattamente come lo sono la conducibilità termica ed elettrica.

Sia  $\alpha_A$  una proprietà del materiale ossia il suo coefficiente assoluto di Seebeck intrinseco. Quando una combinazione di due materiali differenti (A e B) è utilizzata, il potenziale di Seebeck è determinato dal coefficiente differenziale di Seebeck:

$$\alpha_{AB} = \alpha_A - \alpha_B.$$

La tensione netta alla giunzione risulta essere:

$$dV_{AB} = \alpha_{AB}dT.$$

L'equazione precedente può essere utilizzata per determinare il coefficiente differenziale:

$$\alpha_{AB} = \frac{dV_{AB}}{dT}.$$

L'effetto Seebeck è molto utilizzato nei sensori di temperatura chiamati termocof.e.m. su un conduttore a temperatura non uniforme. Le termocoppie sono sensori attivi di temperatura. Come illustrato nella figura 7.4, sono costituite da due fili di metalli diversi, saldati insieme ad una delle estremità. Si può osservare che, per una termocoppia, questo coefficiente, chiamato sensibilità della giunzione di termocoppia, è una funzione lineare della temperatura.

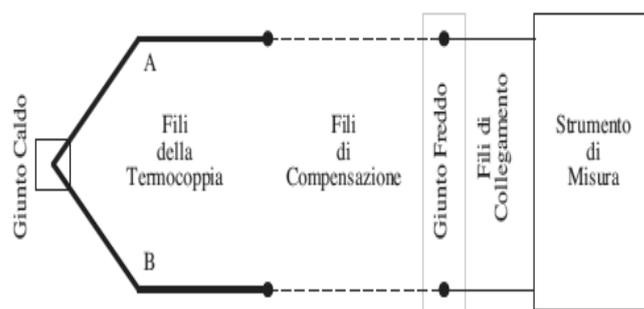


Figura 7.4: Schema termocoppia

Una giunzione di riferimento che è mantenuta ad una temperatura più fredda è chiamata *giunto freddo* mentre una seconda giunzione ad una temperatura più elevata è chiamata *giunto caldo*. Il coefficiente di Seebeck non dipende dalla natura della giunzione: i metalli possono essere pressati insieme, saldati, fusi e così via. Ciò che conta è la temperatura della giunzione e il materiale che costituisce la termocoppia. Si osserva sperimentalmente che per ottenere la migliore sensibilità, i materiali di giunzione andrebbero scelti con segni opposti di  $\alpha$  ed elevato valore assoluto.

L'effetto Seebeck risulta quindi la diretta conversione di energia termica in energia elettrica: ogni giunzione tra due conduttori diversi fornisce una forza elettromotrice, che dipende dalla differenza di temperatura tra la giunzione stessa (giunto caldo) e gli altri estremi dei conduttori (giunto freddo).

Le termocoppie sono sensori assai robusti, di facile installazione e basso costo. Entro un certo campo di temperature, la tensione di uscita è ragionevolmente lineare. Il giunto freddo deve essere termostato a  $0^\circ\text{C}$ , per avere misure assolute nel dominio della scala centigrada, oppure, in caso contrario, le variazioni di temperatura del giunto freddo devono essere compensate automaticamente. Poiché collegamenti realizzati con materiali diversi non influenzano la misura se le rispettive giunzioni sono isoterme, spesso il giunto freddo è contenuto all'interno dello strumento di misura e controllato in temperatura. I fili di compensazione vengono introdotti qualora la distanza fra il giunto caldo e lo strumento di misura sia apprezzabile e sono realizzati con gli stessi materiali che costituiscono la termocoppia.

Nel primo diciannovesimo secolo, un orologiaio francese diventato un fisico, J.C.A. Peltier, scoprì che se la corrente scorre da una sostanza ad un'altra, allora la giunzione tra i due materiali può assorbire od emanare calore. L'assorbimento o l'emissione di calore sono funzione della direzione della corrente:

$$dQ_P = \pm p \cdot i \cdot dt,$$

dove  $i$  è la corrente e  $dt$  l'intervallo di tempo. Il coefficiente  $p$  ha la dimensione della tensione e rappresenta le proprietà termoelettriche del materiale. È importante notare che il calore scambiato non dipende dalla temperatura dell'altro materiale oltre la giunzione.

L'effetto Peltier, quindi, riguarda l'assorbimento reversibile di calore che è generato dal passaggio di corrente elettrica attraverso una giunzione tra due metalli differenti. Tale effetto si manifesta sia se la corrente è introdotta esternamente sia se indotta dalla giunzione stessa per effetto Seebeck.

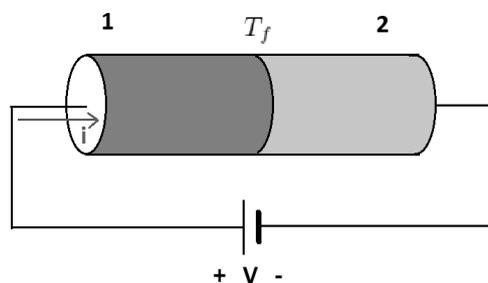


Figura 7.5: Effetto Peltier

L'effetto Peltier può quindi generare calore o "generare" freddo in base alla direzione della corrente che scorre attraverso la giunzione. Questa caratteristica lo rende particolarmente utile nei dispositivi dove è richiesto un preciso controllo termico. Apparentemente l'effetto Peltier è della stessa natura dell'effetto Seebeck, risulta però importante sottolineare le differenze tra il calore di Peltier dal calore prodotto per effetto Joule: Il calore di Peltier dipende linearmente dall'ampiezza del flusso di corrente in contrasto con il calore prodotto per effetto Joule. Quest'ultimo è prodotto quando una corrente elettrica passa (indipendentemente dal suo verso) attraverso un conduttore di resistenza finita di valore  $R$ . La potenza termica rilasciata per effetto Joule tramite dissipazione di calore, è proporzionale alla radice quadrata della corrente:

$$P = \frac{i^2}{R}.$$

L'intensità e la direzione del flusso termico di Peltier non dipendono in alcun modo dalla natura del contatto. Essi sono puramente funzione dei materiali accoppiati per formare la giunzione ed ogni materiale fornisce il proprio contributo che dipende dalle proprie proprietà termoelettriche, indipendentemente dall'altro materiale.

Riassumendo, le correnti termoelettriche possono esistere ogniqualevolta le giunzioni di un circuito chiuso, formato da almeno due conduttori differenti, sono esposti a differenti temperature. Questa differenza di temperatura è sempre accompagnata da una conduzione di calore irreversibile in accordo con la legge di Fourier, mentre il passaggio di correnti elettriche è sempre accompagnato da una dissipazione di calore irreversibile per effetto Joule. Allo stesso tempo il passaggio di corrente elettrica è sempre accompagnato da un trasferimento di energia termica (assorbimento o emissione di calore) reversibile per effetto Peltier attraverso la giunzione dei differenti conduttori, mentre la combinazione tra la differenza di temperatura ed il passaggio di corrente elettrica è sempre accompagnata da un trasferimento di energia termica (assorbimento o emissione di calore) reversibile per effetto Thomson lungo i conduttori.

I due effetti reversibili di trasferimento di energia termica comportano la manifestazione di quattro distinte *f.e.m.* che generano la *f.e.m.* netta di Seebeck:

$$E_S = p_{AB|T_2} - p_{AB|T_1} + \int_{T_1}^{T_2} \sigma_A dT - \int_{T_1}^{T_2} \sigma_B dT = \int_{T_1}^{T_2} \alpha_{AB} dT,$$

dove  $\sigma$  è una quantità chiamata coefficiente di Thomson, che Thomson denominò come calore specifico elettrico in apparente analogia con il calore specifico termico in termodinamica. La quantità  $\sigma$  rappresenta il tasso al quale il calore viene assorbito od emesso, per unità di differenza di temperatura e per unità di massa.

# Conclusioni

Questo lavoro ha avuto lo scopo di fornire le nozioni fondamentali e di richiamare i pilastri portanti della fisica su larga scala, relativi ai principi fisici maggiormente utilizzati nel campo della sensoristica moderna in dualità ad un primo corso di fondamenti di misure elettriche. Visto l'importanza e la vastità dell'argomento risulterà essenziale in futuro approfondire ogni singolo principio fisico in maniera più rigorosa e dettagliata, descrivendone le caratteristiche tecniche, le applicazioni industriali e presentando linee guida per la difficile operazione di scelta di un sensore. Sarà quindi un prezioso aiuto al progettista meccatronico che, di volta in volta, dovrà dare il giusto valore alle caratteristiche del dispositivo al fine di individuare il sensore che meglio si adatta alla specifica applicazione al fine di intraprendere decisioni coerenti ed accettabili nonché eccellenti in funzione dei limiti tecnologici ed economici di progetto.

# Bibliografia

- [1] Paolo Mazzoldi, Massimo Nigro, Cesare Voci - "Elementi di Fisica Vol. 2" - terza edizione 2007 - Edises
- [2] D. Halliday, R. Resnick, K.S. Krane - "Fisica 2" - quinta edizione 2004 - Casa editrice Ambrosiana, Milano
- [3] Jacob Fraden - "Handbook of modern sensors: physics, designs and applications" - terza edizione 2003 - edizioni Springer
- [4] Alessandro Sona - "Introduzione alle misure elettroniche" - seconda edizione 2012 - edizioni Lulu