



**Università degli Studi di Padova**

---

DIPARTIMENTO DI FISICA

Corso di Laurea in Fisica

TESI DI LAUREA TRIENNALE

**Il modello collettivo: soluzioni dell'Hamiltoniana di Bohr nel  
caso  $\gamma$ -instabile dell'oscillatore quartico**

Candidato:

**Gianluca Stellan**

Matricola 617892-SF

Relatore:

**Lorenzo Fortunato**

# Indice

<b>1</b>	<b>Introduzione</b>	<b>2</b>
1.1	Il modello a goccia di liquido . . . . .	2
1.2	I moti collettivi . . . . .	2
<b>2</b>	<b>Deformazioni della superficie nucleare</b>	<b>3</b>
2.1	I parametri di deformazione . . . . .	3
2.2	Le deformazioni di multipolo . . . . .	4
2.3	Il modo di quadrupolo . . . . .	5
<b>3</b>	<b>Vibrazioni di superficie</b>	<b>8</b>
3.1	L'energia cinetica . . . . .	8
3.2	L'energia potenziale . . . . .	9
3.3	L'oscillatore armonico . . . . .	11
3.4	L'operatore momento angolare . . . . .	15
<b>4</b>	<b>L'Hamiltoniana di Bohr</b>	<b>16</b>
4.1	L'energia cinetica in coordinate intrinseche . . . . .	16
4.2	L'energia potenziale: il caso $\gamma$ -instabile del potenziale quartico . . . . .	19
4.3	Una soluzione approssimata: il metodo matriciale . . . . .	21
<b>5</b>	<b>Conclusione</b>	<b>22</b>

# 1 Introduzione

## 1.1 Il modello a goccia di liquido

Uno dei primi modelli formulati per illustrare la struttura nucleare a bassa energia è il modello a goccia di liquido (*Liquid Drop Model*), che tratta il nucleo in un approccio collettivo, assimilandolo ad una sfera di fluido omogeneo [1, pag. 1]. All'origine del modello vi sono le considerazioni sulle proprietà di saturazione delle forze nucleari e sulla bassa compressibilità del nucleo, che è indice di una ben definita superficie nucleare.

Questo modello prevede, infatti, che ciascun nucleone interagisca soltanto con un numero molto limitato di nucleoni, per l'effetto combinato del corto raggio delle forze nucleari e del principio di esclusione di Pauli. La proprietà a corto raggio delle forze nucleari è dimostrata dagli esperimenti sullo scattering nucleone-nucleone, che mostrano come sensibili deviazioni dalla sezione d'urto di Rutherford appaiano solo quando le superfici dei nuclei che collidono si trovano a pochissimi femtometri l'una dell'altra. Lo scattering nucleone-nucleone ad alta energia rivela, inoltre, che la forza di interazione fra i costituenti del nucleo ha anche una componente repulsiva. Di conseguenza, la forma dell'energia potenziale di interazione fra due nucleoni può essere schematizzata da potenziale simile al Lennard-Jones, con un minimo pronunciato intorno ad un valore di equilibrio (intorno a 0.7 fm), che è dello stesso ordine di grandezza della separazione media fra nucleoni vicini. Questo fatto permette di affermare che la forza nucleare raggiunge un valore di saturazione, cioè l'energia di legame di un nucleone dovuta alle interazioni con gli  $A-1$  componenti si attesta ad un valore che non dipende da  $A$ . Se le forze nucleari non saturassero, infatti, l'energia di legame del nucleo  $\frac{BE(A,Z)}{A}$  crescerebbe in prima approssimazione come il numero delle interazioni a due corpi  $\frac{A(A-1)}{2}$  fra i nucleoni, mentre si osserva che questo valore non varia molto per numeri di massa superiori a 20, attestandosi a circa -8.5 MeV. Una evidenza della saturazione è la densità costante di nucleoni all'interno del nucleo, che rende possibile modellizzare il nucleo con una sfera di raggio  $R = r_0 A^{1/3}$ , ove  $r_0 = 1.2$  fm coincide con il valore del minimo dell'energia totale comprensiva di energia cinetica e potenziale d'interazione. La relativamente piccola variazione di energia di legame per nucleone per  $A > 20$ , suggerisce, inoltre, il paragone tra i nuclei e le goccioline di liquido per le quali il calore latente di evaporazione e la densità del liquido sono indipendenti dalle dimensioni delle goccioline stesse [2, pag. 208].

In un liquido, tuttavia, la distanza fra due molecole di un fluido è circa uguale a quella dove l'energia potenziale è minima, che, per le forze nucleari è circa 0,7 fm, mentre i nucleoni, come accennato precedentemente, sono in media più distanziati [4, pag. 209]: la ragione di questa discrepanza risiede nella natura fermionica dei nucleoni, ove vale principio di esclusione di Pauli, che cancella gran parte delle interazioni a due corpi. Inoltre lo scattering all'interno di un liquido di Fermi è un processo più raro rispetto ai fluidi reali macroscopici, quindi il cammino libero medio di un nucleone può essere grande quanto l'intero raggio nucleare [4, pag. 209]. L'andamento dell'energia di legame in funzione del numero di massa  $A$  è ben approssimato dalla formula di Bethe-Weizsäcker del 1935, la cosiddetta *Semi Empirical Mass Formula* che incorpora un numero di termini che riassumono le considerazioni fisiche appena fatte sulle forze nucleari, tenendo conto anche della tensione superficiale ai bordi del nucleo, della repulsione coulombiana fra i protoni più una correzione che dipende dalla parità del numero dei costituenti,  $N$  e  $Z$ . In particolare, questa formula predice un'energia di legame in rapida salita per piccoli valori di  $\frac{BE(A,Z)}{A}$  che raggiunge -8.5 MeV per  $A = 12$  fino ad un massimo di circa -8.8 MeV per  $A = 60$  per poi decrescere lentamente fino ad un valore di -7.5 MeV per  $A = 250$ , per effetto dell'aumento progressivo della repulsione coulombiana con il crescere del numero di protoni.

## 1.2 I moti collettivi

Come suggerito nel paragrafo precedente, non tutte le caratteristiche dei nuclei possono essere trattate nella visione di particella singola come il modello a shell, ma è possibile descrivere il nucleo e il suo moto a partire da considerazioni classiche come quelle del modello a goccia di liquido, che permettono di spiegare molti effetti tipici di un moto collettivo, ove più nucleoni si muovono coerentemente con fasi ben definite. Si trova sperimentalmente che nei nuclei *pari-pari* la probabilità di transizione dallo stato di momento angolare  $0^+$  allo stato  $2^+$  corrispondenti alla transizione di quadrupolo elettrico  $E2$ ,  $B(E2, 0^+ \rightarrow 2^+)$  è maggiore per i nuclei lontani dalla shell chiusa, in particolare nelle regioni con  $A$  compreso tra 150 e 180 o  $A > 230$ , effetti tanto più pronunciati quanto è grande il numero di nucleoni fuori dal nocciolo o *core*. Proprio agli inizi degli anni '60 si è dimostrato che le interazioni residue fra questi nucleoni nel modello a Shell possono dare origine a moti collettivi macroscopici [5, pag. 142], distinguibili in quattro tipi [6, pagg. 7-10]:

- ♣ Le *vibrazioni* della superficie nucleare sono un moto dei nucleoni da una regione ad un'altra del nucleo, a partire da una configurazione di equilibrio sferica o deformata. Poiché per basse energie di vibrazione la densità rimane costante, il volume nucleare si conserva durante le vibrazioni. Passando alle alte energie, questa ipotesi cade, come nel caso dei *breathing-mode*, dove la sfera nucleare si espande e si comprime isotropicamente diminuendo e aumentando periodicamente la densità di nucleoni. Una classificazione di questi moti esiste e fa capo allo spin isotopico dei nucleoni: se il moto vibrazionale è indipendente

dall'isospin dei nucleoni è detto *isoscalfare*, mentre è *isovettoriale* se protoni e neutroni si muovono in opposizione di fase.

- ♣ Le *rotazioni* dei nuclei deformati costituiscono un ulteriore esempio di moto collettivo e in fase della materia nucleare. In particolare, il *fluido nucleare* in moto rotatorio è sovente considerato irrotazionale nelle basse energie, dove i momenti di inerzia del nucleo dipendono solo dai parametri di deformazione, ma non dalla velocità angolare di rotazione. Ad alte energie, invece, tende a prevalere il moto vorticoso del fluido: in alcuni casi i nucleoni al di fuori dell'ultima shell chiusa possono essere assimilati ad un'onda mareale (*tidal wave*) separata dal nocciolo tramite un sottile strato di superfluido. In questo modello si assume che il *core* ruoti molto lentamente o, nel caso-limite, sia a riposo durante le rotazioni. Ciò a causa del fatto che il potenziale del core resta imperturbato durante le rotazioni, quindi i nucleoni non risentono di alcuna resistenza nè contribuiscono all'energia del moto rotazionale.
- ♣ Un comportamento collettivo che coinvolge anche la parte più interna del nucleo è all'origine della risonanza gigante fotonucleare che si verifica quando il campo elettrico di un fotone da luogo ad uno spostamento netto dei protoni che, per la conservazione della posizione del centro di massa, induce a sua volta uno spostamento in controfase dei neutroni, un moto isovettoriale. Questo fenomeno fu analizzato da Steinwelden e Jensen nel 1950 [7, pag 654] che aggiunsero i gradi di libertà del moto relativo di neutroni e protoni al modello a goccia di Niels Bohr.
- ♣ Il processo di *fissione nucleare* è, infine, anch'esso un moto collettivo di nucleoni, che si muovono in direzioni opposte in modo da separare il nucleo in due parti. Secondo la formula semiempirica di Bethe-Weizsäcker, la fissione si verifica quando il contributo coulombiano diviene in modulo più grande del termine di superficie, cioè la tensione superficiale non è in grado di contrastare l'interazione repulsiva fra i protoni.

Dei quattro tipi di moti collettivi descritti, solo le rotazioni e vibrazioni isoscalari a bassa energia saranno oggetto della trattazione, per gli altri si rimanda ai testi nelle note.

## 2 Deformazioni della superficie nucleare

Il modello collettivo vibrazionale affonda le basi sull'equazione ricavata da Lord Rayleigh per spiegare le deformazioni sulla superficie di una goccia di liquido incomprimibile [8, pag. 1], che coincide con uno sviluppo nelle armoniche sferiche, con coefficienti  $\alpha_{\lambda\mu}(t)$ :

$$R(\theta, \phi, t) = R_0 + R_0 \sum_{\lambda=0}^{+\infty} \sum_{\mu=-\lambda}^{\lambda} \alpha_{\lambda\mu}^*(t) Y_{\lambda\mu}(\theta, \phi). \quad (1)$$

In particolare, egli, nel 1879, mostrò che i coefficienti delle armoniche sferiche giocano il ruolo delle ampiezze dei modi normali di piccole oscillazioni attorno ad una forma sferica. Sulle orme del modello di Rayleigh, Flügge applicò i modi normali a una descrizione classica delle eccitazioni a bassa energia dei nuclei sferici [8, pag. 2]. Questo modello fu più tardi ripreso da Niels Bohr nel 1937, che fu tra i propositori della teoria delle oscillazioni della superficie nucleare. Sulle orme del padre, Aage Bohr, ebbe l'idea di accoppiare il moto di particella singola con il moto collettivo della deformazione della superficie nucleare e propose una versione quantizzata delle roto-vibrazioni di nuclei sferici [9, pag. 2]. Dopo aver introdotto il sistema di riferimento intrinseco per i modi di quadrupolo, Bohr e Mottelson alla metà degli anni cinquanta generalizzarono il modello alle vibrazioni e rotazioni di nuclei deformati, scrivendo l'hamiltoniana che porta il loro nome oggetto dei prossimi paragrafi. Naturalmente, l'Hamiltoniana di Bohr è stata il punto di partenza per la spiegazione di fenomenologie più complesse, come le oscillazioni di quadrupolo di grande ampiezza analizzate da Belayev-Kumar e Baranger, ma il loro studio è al di fuori degli scopi di questa trattazione.

### 2.1 I parametri di deformazione

La formula scritta del paragrafo precedente costituisce il punto di partenza per lo studio delle deformazioni nucleari di superficie, quindi per la comprensione dei moti rotazionali e vibrazionali dei nuclei. Come già accennato, il raggio in una posizione angolare qualsiasi può essere sviluppato in armoniche sferiche avente per coefficienti i parametri complessi  $\alpha_{\lambda\mu}(t)$  dipendenti dal tempo, che descrivono l'ampiezza delle deformazioni. In assenza di deformazioni, le coordinate collettive  $\alpha_{\lambda\mu}(t)$  si annullano e la superficie nucleare si riduce a quella di una sfera di raggio  $R_0$ . Prima di entrare nella descrizione delle singole deformazioni, è utile enumerare le fondamentali proprietà di trasformazione dei parametri  $\alpha_{\lambda\mu}(t)$  [12, pag. 107]:

- ♣ *Coniugazione complessa.* Trattandosi di una quantità misurabile, il raggio nucleare deve essere un numero reale, cioè  $R(\theta, \phi) = R^*(\theta, \phi)$ , dunque, conoscendo la trasformazione delle armoniche sferiche sotto coniugazione complessa  $Y_{\lambda\mu}^*(\theta, \phi) = (-1)^\mu Y_{\lambda-\mu}(\theta, \phi)$  si ottiene, dalla formula (1)

$$\alpha_{\lambda\mu}^* = (-1)^\mu \alpha_{\lambda-\mu}. \quad (2)$$

I parametri di deformazione si comportano, quindi, come le armoniche sferiche sotto coniugazione complessa.

- ♣ *Rotazione.* Effettuando una rotazione qualsiasi della terna di assi con origine nel centro di massa del nucleo, una generica posizione angolare  $(\theta, \phi)$  viene trasformata in  $(\theta', \phi')$  e, contemporaneamente cambierà la forma funzionale del raggio da  $R(\theta, \phi)$  a  $R'(\theta', \phi')$ . Riferendosi allo stesso punto sulla superficie nucleare, il valore del raggio deve restare invariato nei due riferimenti, quindi si ottiene  $R(\theta, \phi) = R'(\theta', \phi')$ . Inoltre, deve rimanere arbitraria la posizione angolare della terna di assi rispetto alla superficie nucleare, cioè, prendendo un qualsiasi sistema di riferimento ruotato (con indici  $\sim$ ) è sempre possibile sviluppare il raggio in serie di armoniche sferiche, che differirà da quello originario per i coefficienti di deformazione,  $\alpha'_{\lambda\mu}(t)$ . Di conseguenza  $R(\theta, \phi) = R(\theta', \phi')$  per uno stesso punto sulla superficie della sfera, quindi si ricava l'utile uguaglianza

$$\sum_{\lambda\mu} \alpha'_{\lambda\mu} Y_{\lambda\mu}(\theta', \phi') = \sum_{\lambda\mu} \alpha_{\lambda\mu} Y_{\lambda\mu}(\theta, \phi). \quad (3)$$

Prima di proseguire, è utile ricordare che le armoniche sferiche sono tensori sferici di rango  $\lambda$  e trasformano sotto una generica rotazione, rappresentata da un operatore unitario  $\hat{R}^1$ , nel modo seguente [10, pagg. 16-17]:

$$Y_{\lambda\mu}(\theta, \phi) = \langle \theta, \phi | \lambda\mu \rangle = \sum_{\mu'=-\lambda}^{\lambda} Y_{\lambda\mu'}(\theta, \phi) \langle \lambda\mu' | \hat{R} | \lambda\mu \rangle = \sum_{\mu'=-\lambda}^{\lambda} D_{\mu\mu'}^\lambda Y_{\lambda\mu'}(\theta', \phi'), \quad (4)$$

dove  $|\lambda\mu\rangle$  è un generico stato di momento angolare  $\lambda$  e componente  $z$  pari a  $\mu$ . In particolare, se l'operatore unitario  $\hat{R}$  è scritto in funzione dei tre angoli di Eulero  $(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$ , il termine  $D_{\mu\mu'}^\lambda$  è l'elemento di una matrice di Wigner. Sostituendo nel membro di sinistra della (3) la regola di trasformazione delle armoniche sferiche appena scritta e rinominando opportunamente gli indici si ottiene il fondamentale risultato:

$$\alpha'_{\lambda\mu} = \sum_{\mu'=-\lambda}^{\lambda} D_{\mu\mu'}^\lambda \alpha_{\lambda\mu'} \quad (5)$$

Da quanto ottenuto si deduce che i parametri di deformazione trasformano in modo analogo alle armoniche sferiche, cioè come tensori sferici di rango  $\lambda$ .

- ♣ *Parità.* In questo caso valgono ancora le considerazioni fatte per le rotazioni: preso un sistema di riferimento con una terna di assi riflessi (con indici  $\tilde{\sim}$ ) rispetto a quello convenzionale è sempre possibile eseguire lo sviluppo in armoniche sferiche del raggio nucleare, ma con coefficienti di deformazione riflessi. Preso, allora un punto qualsiasi sulla superficie nel riferimento convenzionale  $(\theta, \phi)$ , lo stesso punto nel sistema di riferimento riflesso si indicherà con  $(\tilde{\theta}, \tilde{\phi}) \equiv (\pi - \theta, \phi + \pi)$ . Essendo riferito allo stesso punto, il raggio nucleare sarà uguale nei due casi, quindi  $R(\theta, \phi) = R(\tilde{\theta}, \tilde{\phi})$ . Inserendo, ora, la regola di trasformazione delle armoniche sferiche  $Y_{\lambda\mu}(\pi - \theta, \phi + \pi) = (-1)^\lambda Y_{\lambda\mu}(\theta, \phi)$  nella condizione di uguaglianza appena citata:

$$\sum_{\lambda\mu} \tilde{\alpha}_{\lambda\mu} Y_{\lambda\mu}(\pi - \theta, \phi + \pi) = \sum_{\lambda\mu} \alpha_{\lambda\mu} Y_{\lambda\mu}(\theta, \phi) \quad (6)$$

si ottiene che i coefficienti di deformazione trasformano nello stesso modo delle armoniche sferiche, quindi hanno la stessa parità,  $\tilde{\alpha}_{\lambda\mu} = (-1)^\lambda \alpha_{\lambda\mu}$ .

## 2.2 Le deformazioni di multipolo

Definite le proprietà di trasformazione dei parametri di deformazione, è possibile fare una breve disamina delle caratteristiche delle deformazioni al variare della multipolarità  $\lambda$  delle oscillazioni, per poi concentrare definitivamente l'attenzione sul modo di quadrupolo, oggetto di una trattazione più ampia.

<sup>1</sup>Per gli operatori di rotazione si è scelta la convenzione  $\hat{R} = e^{-i\theta_1 L_z} e^{-i\theta_2 L_y} e^{-i\theta_3 L_z}$  adottata da Eisenberg-Greiner [6][11] e Bohr-Mottelson [7], che corrisponde a scegliere un elemento di matrice di Wigner  $D_{\mu'\mu}^\lambda(\theta_1, \theta_2, \theta_3) = \langle \lambda\mu' | e^{-i\theta_1 L_z} e^{-i\theta_2 L_y} e^{-i\theta_3 L_z} | \lambda\mu \rangle$ . Negli scritti di Van de Wiele [10] e di Konishi-Paffuti [15] il segno dei tre esponenziali è, invece, invertito.

♣  $\lambda = 0$ , *Monopolo*. A questa deformazione è associata su una sola armonica sferica, la  $Y_{00}$  che non dipende dagli angoli, quindi il raggio della sfera viene incrementato in tutte le direzioni di una quantità dipendente solo dal tempo. Questo corrisponde al caso del modo compressionale o *breathing mode*, che comporta una dilatazione e compressione della materia nucleare, che non si osserva alle basse energie. D'ora in avanti si può, quindi, ipotizzare l'incomprimibilità della materia nucleare: calcolando il volume nucleare, si osserva, che questa ipotesi è soddisfatta fino al secondo ordine nei coefficienti  $\alpha_{\lambda\mu}$ . I calcoli, infatti, dimostrano che il parametro associato a  $Y_{00}$  è una funzione del modulo quadro dei generici parametri di deformazione [12, pag. 109]:

$$\alpha_{00} = -\frac{1}{\sqrt{4\pi}} \sum_{\lambda\mu} |\alpha_{\lambda\mu}|^2 \quad (7)$$

♣  $\lambda = 1$ , *Dipolo*. Scrivendo il generico raggio vettore  $\mathbf{r}$  su una base sferica di versori complessi <sup>2</sup> si trova che la generica componente della posizione del centro di massa di un nucleo di densità uniforme  $\rho(\mathbf{r}) \approx \rho$  nella base sferica  $R_{cm\mu} = \frac{1}{V} \sqrt{\frac{4\pi}{3}} \int Y_{1\mu} d\Omega \int_0^{R(\Omega)} r^3 dr$  dipende solo dal coefficiente di deformazione  $\alpha_{1\mu}$ . Ne segue che questo modo di deformazione comporta, in realtà, solo uno spostamento del centro di massa del sistema, che è spurio per le vibrazioni isoscalari considerate. I termini di dipolo trovano, invece, una loro utilità nella spiegazione delle vibrazioni isovettoriali, dove i centri di massa di neutroni e protoni si muovono in opposizione di fase, lasciando però il centro di massa del sistema invariato.

♣  $\lambda = 2$ , *Quadrupolo*. E' la deformazione più importante, osservabile anche a basse energie e corrisponde al modo di allungamento-schiacciamento della superficie sferica, che assume ora la forma simile ad un ellissoide prolato, ora oblato. Una descrizione dettagliata di questo modo è riportata in seguito. La parità delle bande associate al quadrupolo è positiva.

♣  $\lambda = 3$ , *Ottupolo*. Analogamente al quadrupolo, questo modo di vibrazione è in grado di spiegare le discrepanze fra la probabilità di transizione ridotta di ottupolo elettrico  $B(E3)$  predetta dal modello a particella singola e quella sperimentale di alcuni nuclei. La superficie, per  $\mu = 0$ , assume una forma assimilabile ad una pera. La parità associata alle bande di ottupolo è negativa.

♣  $\lambda = 4$ , *Esadecapolo*. E' il più alto grado di multipolarità di una certa importanza in fisica nucleare. Dal momento che non c'è alcuna evidenza diretta di esadecapolo negli spettri, questa deformazione si invoca solo nella interpretazione di certe bande eccitate di quadrupolo nei nuclei pesanti. La parità associata all'esadecapolo è positiva.

Come si osserva, i modi di multipolarità superiore a quattro sono privi di importanza pratica, dal momento che le dimensioni dei singoli scostamenti della superficie dalla forma sferica diminuiscono con l'aumentare di  $\lambda$ , ma non possono essere inferiori al diametro di un nucleone. Dal momento che il numero di punti estremali in una armonica sferica  $Y_{\lambda\mu}(\theta, \phi)$  è pari a  $\lambda^2$ , cioè il numero di zeri del polinomio di Legendre associato in  $\theta$  moltiplicato per quello di  $\sin \phi$  o  $\cos \phi$  [12, pag. 109], una stima del numero minimo di nucleoni per prendere in considerazione una data multipolarità si ottiene confrontando  $\lambda^2$  con il numero di nucleoni nella superficie, pari a circa  $A^{2/3}$  (da cui  $\lambda \leq A^{1/3}$ ). Ne segue che, per esempio, un modo di ottupolo è trascurabile per  $A < 27$ , mentre un esadecapolo richiede un minimo di 64 nucleoni.

## 2.3 Il modo di quadrupolo

Il modo di quadrupolo è il fondamentale modo di oscillazione collettiva dei nuclei a bassa energia di eccitazione e merita per questo una analisi più approfondita. Il primo passo per illustrare il significato dei cinque parametri di deformazione con  $\lambda = 2$  è il passaggio dal sistema del laboratorio al sistema intrinseco, dove la terna di versori giace sui tre assi principali d'inerzia del nucleo: in questo modo è possibile separare il contributo delle deformazioni, individuate dai parametri  $(\beta, \gamma)$  dalle rotazioni del nucleo, determinate dai tre angoli di Eulero  $(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$ . Prima di passare al sistema intrinseco, è utile trasformare la formula (1), espressa negli angoli polari, nelle coordinate di un versore cartesiano:

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1 \quad \begin{cases} \xi = \cos \phi \sin \theta \\ \eta = \sin \phi \sin \theta \\ \zeta = \cos \theta \end{cases} \quad (9)$$

<sup>2</sup>Indicati con  $\mathbf{e}_i$   $i = 1, 2, 3$  i versori della base cartesiana, i versori della base sferica  $\xi_i$   $i = -1, 0, 1$  si ottengono dai precedenti tramite la trasformazione [11, pag. 16]:

$$\begin{cases} \xi_0 = \mathbf{e}_3 \\ \xi_{\pm 1} = \mp \frac{1}{\sqrt{2}} (\mathbf{e}_1 \pm i\mathbf{e}_2) \end{cases} \quad (8)$$

Un vettore cartesiano espresso nella base sferica appena definita è equivalente ad un tensore sferico di rango 1.

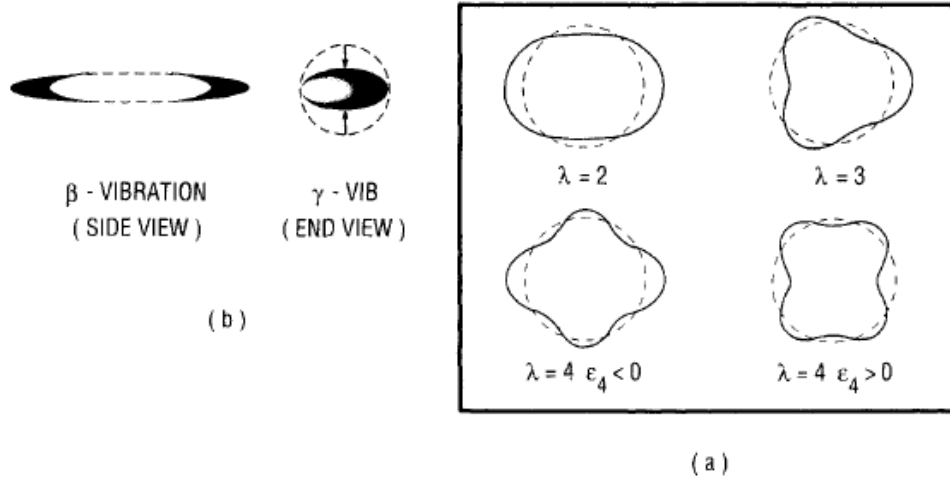


Figura 1: Nel riquadro a destra (a) sono rappresentate le superfici nucleari per le tre piú importanti deformazioni di multipolo ( $\epsilon_4 \equiv \alpha_{4\mu}$ ), mentre nella parte sinistra (b) sono illustrati in modo schematico i moti vibrazionali nei parametri di deformazione intrinseci che allungano e comprimono l'ellissoide lungo l'asse di simmetria ( $\beta$ ) o perpendicolarmente a questo asse ( $\gamma$ ) [5, pag.162].

Dopo aver trasformato le cinque armoniche sferiche di quadrupolo nelle coordinate cartesiane e aver isolato i termini di grado due nelle nuove coordinate, si ricava una nuova espressione per il raggio nucleare,

$$R(\xi, \eta, \zeta) = R_0(1 + \alpha_{\xi\xi}\xi^2 + \alpha_{\eta\eta}\eta^2 + \alpha_{\zeta\zeta}\zeta^2 + 2\alpha_{\xi\eta}\xi\eta + 2\alpha_{\xi\zeta}\xi\zeta + 2\alpha_{\eta\zeta}\eta\zeta). \quad (10)$$

dove i parametri di deformazione precedenti sono collegati ai nuovi dalla trasformazione:

$$\begin{cases} \alpha_{2\pm 2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{8\pi}{15}}(\alpha_{\xi\xi} - \alpha_{\eta\eta} \pm 2i\alpha_{\xi\eta}) \\ \alpha_{2\pm 1} = \sqrt{\frac{8\pi}{15}}(\alpha_{\xi\zeta} \pm i\alpha_{\eta\zeta}) \\ \alpha_{20} = \frac{1}{\sqrt{6}}\sqrt{\frac{8\pi}{15}}(2\alpha_{\zeta\zeta} - \alpha_{\xi\xi} - \alpha_{\eta\eta}) \end{cases} \quad (11)$$

Se si richiede la conservazione della superficie nucleare in coordinate sferiche e nelle nuove coordinate cartesiane si ottiene una condizione aggiuntiva che i parametri di deformazione trasformati devono soddisfare [12, pag. 111]:

$$\alpha_{\xi\xi} + \alpha_{\eta\eta} + \alpha_{\zeta\zeta} = 0 \quad (12)$$

I parametri di deformazione in coordinate cartesiane appena ricavati hanno un significato piú intellegibile: parametri con indici ripetuti indicano una compressione o allungamento lungo uno degli assi cartesiani, mentre i termini misti esprimono l'accoppiamento tra deformazioni che avvengono lungo assi distinti. Questo accoppiamento fa in modo che una determinata vibrazione attorno ad una posizione di equilibrio non provochi una variazione netta nel volume nucleare. Le considerazioni appena fatte permettono di attribuire un significato fisico a ciascuno dei parametri originari:

- ♣  $\mu = 0$ . Il termine  $\alpha_{20}$  descrive l'allungamento dell'asse z rispetto agli assi x e y.
- ♣  $\mu \pm 1$ . La coppia di termini  $\alpha_{2\pm 1}$  descrive una deformazione obliqua della componente lungo z.
- ♣  $\mu \pm 2$ . I due termini  $\alpha_{2\pm 2}$  descrivono la lunghezza relativa lungo l'asse x rispetto all'asse y, cioè la deformazione obliqua nel piano xy.

I parametri appena elencati, tuttavia, presentano due essenziali mancanze, che rendono necessario il passaggio al sistema di riferimento intrinseco. La prima è l'impossibilità di separare l'effetto delle rotazioni da quello delle vibrazioni, ostacolo che si supera separando l'orientazione nello spazio (dipendente dal tempo) dalle oscillazioni pure della superficie attorno ad una posizione di equilibrio. Il secondo difetto è l'impossibilità di sfruttare le simmetrie della superficie nucleare: facendo corrispondere gli assi principali d'inerzia alla base cartesiana – ci sono 24 modi differenti per farlo [6, pag. 75] – è possibile distinguere simmetrie assiali da quelle triassiali e quindi semplificare l'analisi del moto collettivo. Ricordando che gli assi principali d'inerzia sono gli autovettori

che diagonalizzano la matrice d'inerzia, anche il tensore di deformazione (di rango due) deve essere diagonale in questa base, cosicchè il raggio nucleare in questo sistema di riferimento possa essere scritto come

$$R(\xi', \eta', \zeta') = R_0(1 + \alpha'_{\xi\xi}\xi^2 + \alpha'_{\eta\eta}\eta^2 + \alpha'_{\zeta\zeta}\zeta^2). \quad (13)$$

Ove la trasformazione fra parametri di deformazione sferici e cartesiani assume una forma particolarmente semplice:

$$\begin{cases} a_{2\pm 2} \equiv \alpha'_{2\pm 2} = \sqrt{\frac{2\pi}{15}}(\alpha'_{\xi\xi} - \alpha'_{\eta\eta}) \\ a_{2\pm 1} = \alpha'_{2\pm 1} = 0 \\ a_{20} = \alpha'_{20} = \frac{1}{\sqrt{6}}\sqrt{\frac{2\pi}{15}}(2\alpha'_{\zeta\zeta} - \alpha'_{\xi\xi} - \alpha'_{\eta\eta}) \end{cases} \quad (14)$$

Come si osserva, dei cinque parametri di oscillazione indipendenti ne restano solo due, ma, in compenso, si aggiungono i tre angoli di Eulero, che determinano l'orientazione della terna di assi solidale al corpo (denotata con ') rispetto alla terna fissa, cioè il sistema del laboratorio. Il parametro  $a_{20}$  ora esprime l'allungamento della componente lungo l'asse  $z'$  della terna solidale rispetto alle componenti in  $x'$  e  $y'$ , mentre i due parametri identici  $a_{22} = a_{2-2}$  assumono il semplice significato di differenza in lunghezza delle componenti lungo gli assi  $x'$  e  $y'$  [12, pag. 112]. Sapendo, inoltre, che i parametri di deformazione trasformano come tensori sferici, si trova che il valore della somma del modulo quadro dei parametri di deformazione è uguale nel sistema intrinseco e nel sistema del laboratorio <sup>3</sup>, dunque può essere assimilata al quadrato di un parametro  $\beta$ :

$$0 \leq \sum_{\mu} |\alpha_{2\mu}|^2 = \sum_{\mu} |\alpha'_{2\mu}|^2 = a_{20}^2 + 2a_{22}^2 \equiv \beta^2 \quad (16)$$

Da qui, si può scegliere un altro parametro, detto  $\gamma$ , che soddisfi la formula (15) ed operare il seguente cambio di variabili:

$$\begin{cases} a_0 = \beta \cos \gamma \\ a_{22} = a_{2-2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\beta \sin \gamma \end{cases} \quad (17)$$

Questo cambio di variabili, dette di Hill-Wheeler [18], permette di sfruttare appieno le simmetrie della deformazione di quadrupolo e di dedurre l'aspetto e ricorda il passaggio da coordinate cartesiane a coordinate polari nel piano. La forma semplice del raggio nucleare in coordinate cartesiane nella (13), permette di separare i contributi della deformazione nei tre assi della terna solidale. Denotando con gli indici numerici 1, 2 e 3 rispettivamente gli assi  $x'$ ,  $y'$  e  $z'$  della terna solidale, la deformazione lungo gli assi coordinati di questa terna può essere scritta in modo succinto come

$$\delta R_k = \sqrt{\frac{5}{4\pi}}\beta \cos\left(\gamma - \frac{2\pi k}{3}\right). \quad (18)$$

La formula appena scritta suggerisce immediatamente il paragone tra il parametro  $\beta$  e il raggio di una circonferenza e tra  $\gamma$  e una generica variabile angolare. In particolare, quando  $\gamma$  è nullo, le deformazioni lungo gli assi  $x'$  e  $y'$  sono uguali mentre lungo  $z'$  la deformazione è maggiore, quindi la superficie è simile a quella di un ellissoide prolato. Incrementando leggermente la variabile angolare, l'*ellissoide* perde la simmetria assiale dal momento che la componente lungo  $z'$  cala in modulo aumentando in misura diversa le componenti lungo  $x'$  e  $y'$ . Dopo una rotazione di  $\frac{\pi}{3}$ , il nucleo diviene un *ellissoide* oblato, con componente lungo  $z'$  e  $x'$  uguali e asse di simmetria coincidente con  $y'$ . Lo schema si ripete dopo ogni rotazione di  $60^\circ$ : a cambiare è solo l'asse di simmetria dell'*ellissoide*, che ogni  $\pi$  torna lo stesso, con la stessa semi-periodicità della funzione coseno nella formula (18). Le simmetrie delle deformazioni di quadrupolo possono, quindi, essere rappresentate da un settore circolare di  $60^\circ$ , con i due casi-limite di *ellissoide* schiacciato o allungato ai poli (cfr. regione turchese in figura 2).

<sup>3</sup>Si può dimostrare che la somma del modulo quadro dei parametri di deformazione di quadrupolo è uno scalare, cioè è indipendente dalla particolare orientazione degli assi e sotto traslazioni. E' possibile, infatti, scrivere il singolo modulo quadro di  $\alpha_{2\mu}$  come prodotto tensore di rango zero di due parametri di deformazione:

$$[\alpha_2 \otimes \alpha_2]_0^{[0]} = \sum_{\mu'\mu} (220|\mu\mu'0)\alpha_{\mu}\alpha_{2\mu'} = \frac{1}{\sqrt{5}} \sum_{2\mu} (-1)^\mu \alpha_{2\mu}\alpha_{2-\mu} = \frac{1}{\sqrt{5}} \sum_{\mu} |\alpha_{2\mu}|^2 \quad (15)$$



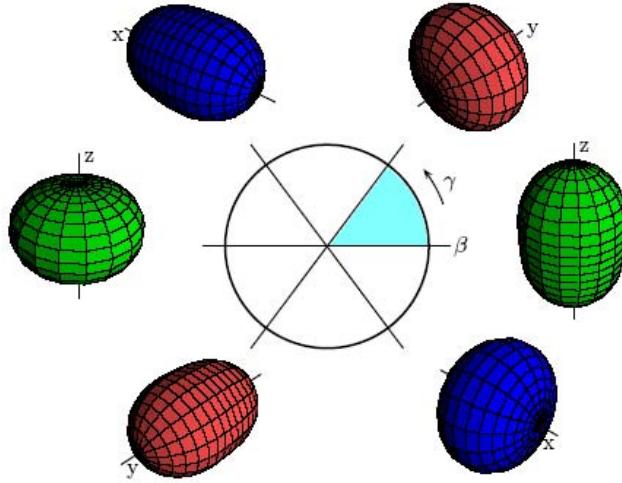


Figura 2: *Aspetto della superficie nucleare al variare dei parametri di deformazione del sistema intrinseco  $(\beta, \gamma)$ : il nucleo assume una forma sferica solo all'annullarsi parametro  $\beta$ , indipendentemente dal valore assunto da  $\gamma$ .*

### 3 Vibrazioni di superficie

Il primo passo verso la costruzione dell'Hamiltoniana di Bohr è lo studio del comportamento di una goccia di fluido carico classico. L'energia di una goccia di fluido carico dovrà, infatti, contenere un termine di repulsione coulombiana,  $E_C$  e un termine di superficie  $E_S$ , che esprime l'effetto contenitivo della tensione superficiale. Considerando il termine cinetico, l'energia totale del nucleo sarà la somma di questi tre contributi:

$$E = T + E_C + E_S \quad (19)$$

Obiettivo dei due paragrafi che seguono è, quindi, trovare una forma analitica di ciascuno dei tre termini e illustrarne il significato.

#### 3.1 L'energia cinetica

Per l'analisi dell'energia cinetica ci restringeremo alla trattazione del flusso di materia all'interno del nucleo, adottando un approccio ispirato alla fluidodinamica e trascurando l'energia cinetica traslazionale del centro di massa del sistema. Come primo passo verso l'analisi del moto fluido dei nucleoni occorre introdurre il campo di velocità locale  $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$  e la densità di massa,  $\rho_m(\mathbf{r})$ :

$$T = \frac{1}{2} \int \rho_m(\mathbf{r}) v^2(\mathbf{r}, t) d\mathbf{r} \quad (20)$$

La velocità di fluido nell'integrale appena scritto non può non tenere conto delle condizioni al contorno: il campo di velocità sulla superficie del fluido deve coincidere con la velocità della superficie, dipendente anch'essa da posizione e tempo. Questa condizione, tuttavia, non è sufficiente per individuare univocamente il campo: è necessario, quindi, fare un'ipotesi aggiuntiva. In prima approssimazione si può considerare il campo di velocità come irrotazionale [12, pag. 122], vale a dire un moto fluido privo di vorticità dove gli elementi del fluido si muovono con velocità angolare dipendente dalla distanza dall'asse di rotazione. Questo vincolo si esprime nella richiesta matematica che il rotore del campo di velocità sia nullo, cioè

$$\nabla \times \mathbf{v}(\mathbf{r}, t) = 0. \quad (21)$$

Dal momento che il dominio dove è definito il campo di velocità è semplicemente connesso, esso ammette un potenziale scalare  $\Phi(\mathbf{r}, t)$  legato alla velocità fluida dalla relazione differenziale  $\nabla\Phi(\mathbf{r}, t) = -\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ . Poiché la materia nucleare è, in prima approssimazione, incomprimibile [1, pag. 11], la divergenza del campo di velocità è zero, parimenti il laplaciano del potenziale di velocità è nullo

$$\nabla^2\Phi(\mathbf{r}, t) = 0, \quad (22)$$

ovvero  $\Phi(\mathbf{r}, t)$  è un potenziale armonico. L'equazione (22) può essere risolta in coordinate sferiche, sviluppando il potenziale in serie di armoniche sferiche, con parte radiale nulla all'origine e coefficienti  $A_{\lambda\mu}$  dipendenti dal

tempo e dalla multipolarità  $\lambda$  [12, pag.122]:

$$\Phi(r, \theta, \phi, t) = \sum_{\lambda\mu} A_{\lambda\mu}(t) r^\lambda Y_{\lambda\mu}(\theta, \phi) \quad (23)$$

A questo punto, per determinare l'espressione analitica del potenziale è sufficiente sfruttare le condizioni al contorno, eguagliando la derivata temporale del raggio nucleare alla componente della velocità fluida normale alla superficie, che può essere approssimata, per piccole oscillazioni, con la componente radiale del campo di velocità calcolato lungo la superficie [1, pag. 11]:

$$\frac{\partial}{\partial t} R(\theta, \phi, t) \approx v_r(R(\theta, \phi, t), t) = -\frac{\partial}{\partial r} \Phi(r, \theta, \phi, t)|_{r=R(\theta, \phi, t)} \quad (24)$$

Inserendo la formula (1) nel membro di sinistra e la (23) in quello di destra, si ottiene la condizione cercata sui coefficienti  $A_{\lambda\mu}$ :

$$A_{\lambda\mu}(t) = -\frac{1}{\lambda} R_0^{2-\lambda} \dot{\alpha}_{\lambda\mu}^* \quad (25)$$

Ora è possibile inserire l'opposto del gradiente del potenziale di velocità nella formula (20) in luogo del campo di velocità e risolvere l'integrale, cercando di portare l'operatore gradiente sulle coordinate sferiche nella forma di un operatore momento angolare, in modo da poter sfruttare le proprietà delle armoniche sferiche

$$T = \frac{1}{2} \int \rho_m(\mathbf{r}) |\nabla \phi|^2 d\mathbf{r} \quad (26)$$

$$= \frac{1}{2} \rho_m \int \left[ \left( \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right)^2 + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial \phi} \right)^2 \right] r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi \quad (27)$$

$$= \frac{1}{2} \rho_m \sum_{\lambda\mu\lambda'\mu'} A_{\lambda\mu} A_{\lambda'\mu'}^* \int_0^{R(\Omega)} r^{\lambda+\lambda'} dr \int \left( \lambda\lambda' Y_{\lambda\mu} Y_{\lambda'\mu'}^* + \frac{\partial Y_{\lambda\mu}^*}{\partial \theta} \frac{\partial Y_{\lambda'\mu'}}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial Y_{\lambda\mu}^*}{\partial \phi} \frac{\partial Y_{\lambda'\mu'}}{\partial \phi} \right) d\Omega, \quad (28)$$

ove, nel calcolo dell'integrale, per semplicità, il profilo di densità è stato supposto costante  $\rho_m(\mathbf{r}) = \rho_m$ . Dopo alcuni passaggi algebrici, si trova il risultato cercato:

$$T = \frac{1}{2} \rho_m \sum_{\lambda\mu} R_0^{2\lambda+1} \lambda |A_{\lambda\mu}|^2 = \sum_{\lambda\mu} \frac{\rho_m R_0^5}{2\lambda} |\dot{\alpha}_{\lambda\mu}|^2 \quad (29)$$

Di grande importanza è, ora, definire il *parametro di massa collettiva*  $B_\lambda$  che permette di scrivere in modo semplice l'espressione dell'energia cinetica isolando le costanti. Questo parametro, che dipende dal raggio della sfera nucleare all'equilibrio, dalla densità di massa e dalla multipolarità consentirà di riconoscere la lagrangiana di quadrupolo del sistema come quella di un oscillatore armonico in cinque dimensioni. L'espressione dell'energia cinetica nella forma più generale risulta, quindi [1, pag. 11]:

$$T = \sum_{\lambda\mu} \frac{\rho_m R_0^5}{2\lambda} |\dot{\alpha}_{\lambda\mu}|^2 = \frac{1}{2} \sum_{\lambda\mu} B_\lambda |\dot{\alpha}_{\lambda\mu}|^2 \quad (30)$$

Se  $B_\lambda$  è il parametro di massa, il significato delle derivate temporali dei parametri  $\alpha_{\lambda\mu}$  è quello di velocità di deformazione.

### 3.2 L'energia potenziale

L'energia potenziale, come anticipato in § 3, consta di due termini: la componente coulombiana e la componente di superficie, che considera l'azione delle forze di coesione sullo strato superficiale nel nucleo. Iniziamo l'analisi dal termine di Coulomb, che si ottiene dalla formula dell'energia elettrostatica di una distribuzione di carica di densità  $\rho_c(\mathbf{r})$ ,

$$E_C = \frac{1}{2} \int d\mathbf{r} \int \frac{\rho(\mathbf{r})\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\mathbf{r}' \quad (31)$$

Analogamente al caso della massa, si può considerare il nucleo come una distribuzione uniforme di carica e portare la densità fuori dagli integrali della (31), riscritti in coordinate sferiche

$$E_C = \frac{1}{2} \rho_c^2 \int d\Omega \int d\Omega' \int_0^{R(\Omega)} r^2 dr \int_0^{R(\Omega')} \frac{r'^2}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dr' \quad (32)$$

Per semplificare l'espressione (32) si può suddividere l'integrale in tre parti, riducendo l'intervallo d'integrazione della parte radiale come segue:

$$E_C = \frac{1}{2}\rho_c^2 \int d\Omega \int d\Omega' \int_0^{R_0} r^2 dr \int_0^{R_0} \frac{r'^2}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dr' \quad (33)$$

$$+ \frac{1}{2}\rho_c^2 \int d\Omega \int d\Omega' \int_{R_0}^{R(\Omega)} r^2 dr \int_{R_0}^{R(\Omega')} \frac{r'^2}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dr' \quad (34)$$

$$+ \rho_c^2 \int d\Omega \int d\Omega' \int_{R_0}^{R(\Omega)} r^2 dr \int_0^{R_0} \frac{r'^2}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dr'. \quad (35)$$

Sapendo che il raggio nucleare  $R(\Omega)$  è sviluppato in armoniche sferiche, per il calcolo degli integrali è conveniente sviluppare anche la differenza dei raggi vettori al denominatore in serie di armoniche sferiche [12, pag. 118]

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = 4\pi \sum_{\lambda=0}^{+\infty} \sum_{\mu=-\lambda}^{\lambda} \frac{1}{2\lambda+1} \frac{r_{<}^{\lambda}}{r_{>}^{\lambda+1}} Y_{\lambda\mu}^*(\theta, \phi) Y_{\lambda\mu}(\theta', \phi'), \quad (36)$$

ove i termini  $r_{<}$  e  $r_{>}$  indicano rispettivamente il minore e il maggiore dei due raggi. Il primo termine nell'equazione (33), corrisponde all'energia elettrostatica di una sfera uniformemente carica  $E_C^{(0)}$  con densità  $\rho_c = \frac{3Ze}{4\pi R_0^3}$ , e quindi, si trova:

$$E_C^{(0)} = \frac{3}{5} \frac{Z^2 e^2}{R_0} \quad (37)$$

Sfruttando le relazioni di ortonormalità fra le armoniche sferiche, applicando la conservazione del volume nucleare (7) e trascurando termini di ordine superiore al secondo nei parametri di deformazione, si ottengono le espressioni analitiche per il secondo ed il terzo termine, (33) e (34):

$$\rho_c^2 \int d\Omega \int d\Omega' \int_{R_0}^{R(\Omega)} r^2 dr \int_0^{R_0} \frac{r'^2}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dr' = -\frac{2}{3} \pi R_0^5 \rho_c^2 \sum_{\lambda\mu} |\alpha_{\lambda\mu}|^2 \quad (38)$$

$$\frac{1}{2}\rho_c^2 \int d\Omega \int d\Omega' \int_{R_0}^{R(\Omega)} r^2 dr \int_{R_0}^{R(\Omega')} \frac{r'^2}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dr' = 2\pi R_0^5 \rho_c^2 \sum_{\lambda\mu} \frac{\lambda}{2\lambda+1} |\alpha_{\lambda\mu}|^2 \quad (39)$$

Accorpando i risultati dei tre integrali, il termine coulombiano dell'energia risulta, nel complesso [12, pag. 120]:

$$E_C = E_C^{(0)} \left( 1 - \frac{5}{4\pi} \sum_{\lambda=0}^{\infty} \sum_{\mu=-\lambda}^{\lambda} \frac{\lambda-1}{2\lambda+1} |\alpha_{\lambda\mu}|^2 \right) \quad (40)$$

Il risultato appena trovato è consistente con quanto affermato in § 2.2: per i momenti di dipolo, l'energia elettrostatica coincide con quella di una sfera carica non deformata, dal momento che i annullano tutti i numeratori della sommatoria.

Il termine di energia superficiale, infine, è dato dall'integrazione sulla superficie nucleare  $\mathcal{S}$  della tensione superficiale  $\sigma$ , che si assume costante su tutto lo strato superficiale,

$$E_S = \sigma \int_{\mathcal{S}} dS \quad (41)$$

Per il calcolo dell'integrale (41) occorre esplicitare il differenziale di superficie, e lo si può fare utilizzando le coordinate sferiche:

$$dS = \sqrt{1 + \frac{1}{R^2} \left( \frac{\partial R}{\partial \theta} \right)^2 + \frac{1}{R^2 \sin^2 \theta} \left( \frac{\partial R}{\partial \phi} \right)^2} R^2 \sin \theta d\theta d\phi \quad (42)$$

L'espressione di  $dS$  può essere semplificata facendo l'approssimazione di piccole vibrazioni attorno all'equilibrio, cioè considerando le derivate del raggio nucleare molto piccole rispetto all'unità [12, pag. 120]:

$$dS \approx \left[ R^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial R}{\partial \theta} \right)^2 + \frac{1}{2 \sin^2 \theta} \left( \frac{\partial R}{\partial \phi} \right)^2 \right] \sin \theta d\theta d\phi \quad (43)$$

Sostituendo il raggio nucleare nell'elemento di superficie approssimato al primo ordine e denotando con  $\delta R = R_0 \sum_{\lambda\mu} Y_{\lambda\mu} \alpha_{\lambda\mu}^*$  il termine perturbativo del raggio nucleare cioè la sua componente di deformazione, si trova:

$$dS = \left\{ R_0^2 + 2\delta R R_0 + (\delta R)^2 + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial \delta R}{\partial \theta} \right)^2 + \frac{1}{\sin^2 \theta} \left( \frac{\partial \delta R}{\partial \phi} \right)^2 \right] \right\} \sin \theta d\theta d\phi \quad (44)$$

Integrando il primo termine a sinistra della (44) si ottiene l'energia di superficie per una sfera di raggio  $R_0$ , che indichiamo con  $E_S^{(0)} = 4\pi\sigma R_0^2$ . Gli altri termini, invece, necessitano di una integrazione più laboriosa: come nel caso dell'energia cinetica, l'obiettivo è ricondurre le derivate angolari nella forma dell'operatore momento angolare, sfruttando il fatto che le armoniche sferiche sono suoi autostati. Per brevità, sono riportati solo i passaggi chiave dell'integrazione [12, pag. 121]:

$$E_S = E_S^{(0)} + \frac{1}{2}\sigma \int \left\{ -2(\delta R)^2 + R_0^2 \left[ \left( \frac{\partial \delta R}{\partial \theta} \right)^2 + \frac{1}{\sin^2 \theta} \left( \frac{\partial \delta R}{\partial \phi} \right)^2 \right] \right\} \sin \theta d\theta d\phi \quad (45)$$

$$= E_S^{(0)} + \frac{\sigma}{2} \sum_{\lambda\mu\lambda'\mu'} \left\{ \alpha_{\lambda\mu}^* \alpha_{\lambda'\mu'} \int \left[ -2Y_{\lambda\mu} Y_{\lambda'\mu'}^* - Y_{\lambda'\mu'}^* \left( \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \cos \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right) Y_{\lambda\mu} \right] d\Omega \right\} \quad (46)$$

$$= E_S^{(0)} + \frac{1}{2}\sigma R_0^2 \sum_{\lambda\mu\lambda'\mu'} \{ \alpha_{\lambda\mu}^* \alpha_{\lambda'\mu'} \delta_{\lambda\lambda'} \delta_{\mu'\mu} [\lambda(\lambda+1) - 2] \} \quad (47)$$

$$= E_S^{(0)} \left[ 1 + \frac{1}{8\pi} \sum_{\lambda\mu} (\lambda-1)(\lambda+2) |\alpha_{\lambda\mu}|^2 \right] \quad (48)$$

In analogia con il caso dell'energia cinetica, dove è stata tralasciata la sua parte traslazionale, anche i contributi statici all'energia  $E_S^{(0)}$  e  $E_C^{(0)}$  possono essere ignorati, in quanto non dipendono dal particolare moto collettivo del nucleo [1, pag. 12]. Dai risultati ottenuti dal calcolo di energia potenziale elettrostatica ed energia di superficie ristretti alle deformazioni, si può introdurre il coefficiente di rigidità  $C_\lambda$  che riassume entrambi i contributi

$$C_\lambda = (\lambda-1) \left( (\lambda+2)R_0^2\sigma - \frac{3e^2 Z^2}{2\pi(2\lambda+1)R_0} \right). \quad (49)$$

Come si può osservare, anche le due forze, elettrostatica e di coesione superficiale in risposta alle deformazioni si annullano per  $\lambda = 1$ , evidenziando la natura non vibrazionale del modo di dipolo.

### 3.3 L'oscillatore armonico

Nella sezione precedente sono state ricavate le espressioni analitiche dell'energia cinetica del moto fluido della materia nucleare e l'energia potenziale, assumendo che alle deformazioni contribuiscano forze elettrostatiche e forze di coesione. Ora, conoscendo l'espressione di energia cinetica e potenziale, scriviamo la Lagrangiana delle oscillazioni di superficie, per modi vibrazionali qualsiasi:

$$\mathcal{L} = T - V = \sum_{\lambda\mu} \frac{1}{2} B_\lambda |\dot{\alpha}_{\lambda\mu}|^2 - \sum_{\lambda\mu} \frac{1}{2} C_\lambda |\alpha_{\lambda\mu}|^2 \quad (50)$$

Come si osserva, la Lagrangiana di deformazione è la sovrapposizione di infiniti oscillatori armonici, ciascuno dei quali a  $2\lambda+1$  dimensioni. Come osservato in § 2.3, energia cinetica ed energia potenziale sono scalari, quindi sono invarianti per traslazione e rotazione nel sistema del laboratorio e possono essere scritte come un tensore di rango zero [12, pag. 115]:

$$T = \sum_{\lambda\mu} \frac{1}{2} B_\lambda |\dot{\alpha}_{\lambda\mu}|^2 = \sum_{\lambda} B_\lambda (-1)^\lambda \frac{\sqrt{2\lambda+1}}{2} [\dot{\alpha}_\lambda \otimes \dot{\alpha}_\lambda]_0^{[0]} \quad (51)$$

$$V = \sum_{\lambda\mu} \frac{1}{2} C_\lambda |\alpha_{\lambda\mu}|^2 = \sum_{\lambda} C_\lambda (-1)^\lambda \frac{\sqrt{2\lambda+1}}{2} [\alpha_\lambda \otimes \alpha_\lambda]_0^{[0]} \quad (52)$$

Restringendo l'hamiltoniana al caso quadrupolare, l'oggetto della trattazione, si trova che la sua Lagrangiana è la somma di cinque oscillatori armonici unidimensionali disaccoppiati di pulsazione  $\omega_2 = \sqrt{\frac{B_2}{C_2}}$ :

$$\mathcal{L} = \sum_{\mu} \frac{1}{2} B_2 |\dot{\alpha}_{2\mu}|^2 - \sum_{\mu} \frac{1}{2} C_2 |\alpha_{2\mu}|^2 \quad (53)$$

Se accostiamo i parametri di deformazione alle coordinate canoniche, l'insieme delle derivate della lagrangiana per le velocità di deformazione costituiscono i momenti coniugati del sistema  $\pi_{2\mu}$   $\mu \in 2, 1, 0, -1, -2$ , cioè

$$\pi_{2\mu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\alpha}_{2\mu}} = \frac{\partial}{\partial \dot{\alpha}_{2\mu}} \frac{1}{2} B_2 \sum_{\mu'=-2}^2 (-1)^{\mu'} \dot{\alpha}_{2\mu'} \dot{\alpha}_{2-\mu'} = B_2 (-1)^\mu \dot{\alpha}_{2-\mu} = B_2 \dot{\alpha}_{2\mu}^*. \quad (54)$$

Dipendendo dal complesso coniugato del parametro di deformazione, il momento coniugato non trasforma esattamente come le armoniche sferiche o i parametri  $\alpha_{\lambda\mu}$  sotto rotazione:

$$\pi'_{2\mu} = \sum_{\mu'} D_{\mu\mu'}^2 \pi_{2\mu'}^* \quad (55)$$

L'elemento di matrice di Wigner, infatti risulta il complesso coniugato di quello in formula (4) mentre è invariata la relazione di coniugazione complessa dei momenti,  $\pi_{\lambda\mu}^* = (-1)^\mu \pi_{\lambda-\mu}$ , analoga a quella della dei tensori sferici. Definiti i momenti coniugati, è possibile trasformare la Lagrangiana (53) nell'Hamiltoniana di quadrupolo, che costituisce il punto di partenza per la quantizzazione del sistema:

$$\mathcal{H} = \sum_{\mu} \frac{1}{2B_2} |\pi_{2\mu}|^2 + \sum_{\mu} \frac{C_2}{2} |\alpha_{2\mu}|^2 \quad (56)$$

Ora si tratta di scrivere l'operatore Hamiltoniano del sistema, e lo si può fare solo dopo aver trovato una espressione analitica degli operatori di deformazione e momento di deformazione. In analogia con gli operatori di posizione e momento, gli operatori dei moti collettivi di quadrupolo dovranno soddisfare le regole di commutazione canonica

$$[\hat{\alpha}_{2\mu}, \hat{\alpha}_{2\mu'}] = 0 \quad [\hat{\pi}_{2\mu}, \hat{\pi}_{2\mu'}] = 0 \quad [\hat{\alpha}_{2\mu}, \hat{\pi}_{2\mu'}] = i\hbar\delta_{\mu\mu'}. \quad (57)$$

Queste relazioni di commutazione sono soddisfatte imponendo  $\hat{\pi}_{2\mu} = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \alpha_{2\mu}^*}$ , coerentemente con gli operatori di posizione-momento in meccanica quantistica. Eseguendo il complesso coniugato degli operatori appena definiti, si ottengono le regole di trasformazione per gli operatori:

$$\hat{\alpha}_{2\mu}^* = (-1)^\mu \hat{\alpha}_{2-\mu} \quad \hat{\pi}_{2\mu}^* = -(-1)^\mu \hat{\pi}_{2-\mu}. \quad (58)$$

In particolare, per l'operatore momento di deformazione, il segno risulta invertito rispetto all'analogo classico a causa dell'unità immaginaria presente nella definizione dell'operatore, un fatto puramente quantistico. Definiti gli operatori di deformazione e momento, l'operatore hamiltoniano del sistema è completamente definito:

$$\hat{\mathcal{H}}_{h.o.} \equiv \hat{\mathcal{H}} = - \sum_{\mu} \frac{1}{2B_2} |\hat{\pi}_{2\mu}|^2 + \sum_{\mu} \frac{C_2}{2} |\hat{\alpha}_{2\mu}|^2 \quad (59)$$

Come nel problema quantistico di cinque oscillatori armonici disaccoppiati, si procede con la seconda quantizzazione del sistema, introducendo gli operatori di creazione e annichilazione, che aggiungono e sottraggono di un fonone con numero quantico magnetico  $\mu$  [1, pag.9]:

$$\hat{\beta}_{2\mu}^\dagger = \sqrt{\frac{B_2\omega_2}{2\hbar}} \hat{\alpha}_{2\mu} - i\sqrt{\frac{1}{2B_2\hbar\omega_2}} (-1)^\mu \hat{\pi}_{2-\mu} \quad (60)$$

$$\hat{\beta}_{2\mu} = \sqrt{\frac{B_2\omega_2}{2\hbar}} (-1)^\mu \hat{\alpha}_{2-\mu} + i\sqrt{\frac{1}{2B_2\hbar\omega_2}} \hat{\pi}_{2\mu} \quad (61)$$

Data la natura bosonica dei fononi, gli operatori di creazione e distruzione obbediscono alle seguenti regole di commutazione [1, pag. 9]:

$$[\beta_{2\mu'}^\dagger, \beta_{2\mu}^\dagger] = [\beta_{2\mu'}, \beta_{2\mu}] = 0 \quad [\beta_{2\mu}, \beta_{2\mu'}^\dagger] = \delta_{\mu\mu'} \quad (62)$$

Poichè le armoniche sferiche sono autostati dell'operatore quadrato del momento angolare con autovalore  $\hbar^2\lambda(\lambda+1)$  e componente azimutale  $\hbar\mu$ , gli indici  $\lambda$  e  $\mu$  degli operatori collettivi possono essere interpretati rispettivamente come numero quantico orbitale e numero quantico magnetico, associati a ciascuno dei cinque oscillatori [6, pag. 51]. Il passo successivo consiste nella definizione dell'operatore numero di fononi del sistema

$$\hat{N} = \sum_{\mu=-2}^2 \hat{\beta}_{2\mu}^\dagger \hat{\beta}_{2\mu} = \sum_{\mu=-2}^2 \hat{n}_{2\mu} \quad N \equiv 2n_\beta + \tau. \quad (63)$$

L'operatore così definito ha l'effetto di contare gli  $n_{2\mu}$  fononi con due unità di momento angolare in ciascuno dei cinque oscillatori armonici unidimensionali di quadrupolo e permette di riscrivere l'Hamiltoniana (59) in modo semplice:

$$\hat{\mathcal{H}} = \hbar\omega_2 \left( \hat{N} + \frac{5}{2} \right) \quad (64)$$

Ogni stato intrinseco del sistema, in analogia con l'oscillatore armonico quantistico, si ottiene specificando il numero di fononi di ciascuno dei cinque oscillatori. Una funzione di questo tipo è certamente autostato di  $\hat{N}$  e quindi dell'Hamiltoniana, oltreché di ciascuno dei numeri di occupazione  $n_{2\mu}$  e si può costruire mediante gli operatori di creazione:

$$|n_{22}, n_{21}, n_{20}, n_{2-1}, n_{2-2}\rangle = \prod_{\mu=-2}^2 \frac{(\beta_{2\mu}^\dagger)^{n_{2\mu}}}{\sqrt{n_{2\mu}!}} |0, 0, 0, 0, 0\rangle. \quad (65)$$

Dipendendo solo da  $N$ , l'energia è degenera nei numeri di fononi di ciascun oscillatore che hanno l'unico vincolo di  $\sum_{\mu=-2}^{\mu} n_{2\mu} = N$ : la funzione più generale sarà, quindi una funzione d'onda simmetrica rispetto allo scambio di due numeri di fononi intrinseci  $n_{2\mu}$  e dovrà tenere conto di tutte le possibili scelte degli  $n_{2\mu}$  che soddisfano il vincolo imposto, tutte equiprobabili.

Un altro modo di esprimere questi autostati dell'oscillatore armonico viene dallo studio delle simmetrie del sistema, che possono emergere passando al sistema di coordinate intrinseco mediante la trasformazione di Hill-Wheeler (cfr. § 4.1). Nel caso di un oscillatore armonico tridimensionale, passando alle coordinate sferiche era possibile eseguire la separazione fra la variabile radiale e le variabili angolari e osservare che l'Hamiltoniano nelle nuove coordinate commutava con l'operatore modulo quadro del momento angolare,  $\hat{L}^2$  e con la sua terza componente  $\hat{L}_z$ , esattamente come nel caso dell'atomo di idrogeno: da questa invarianza seguiva direttamente la fattorizzazione della funzione d'onda in parte radiale e parte angolare, costituita dalle familiari armoniche sferiche.

Nel caso 5-dimensionale lo studio è più complicato e prevede l'introduzione di cinque numeri quantici: oltre al

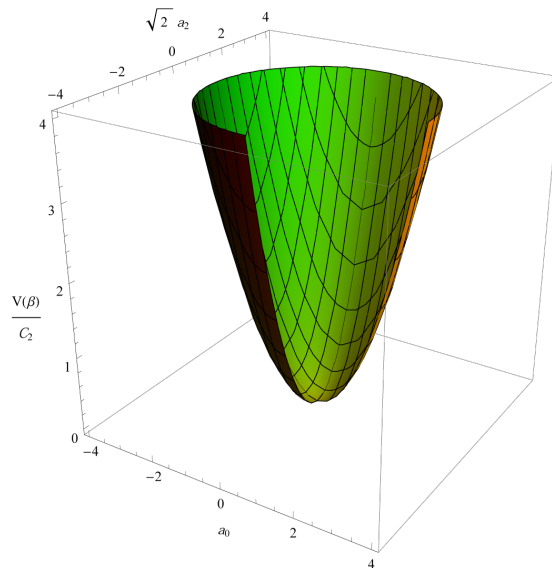


Figura 3: Potenziale nucleare collettivo dell'oscillatore armonico in unità di  $C_2$  in funzione dei parametri di deformazione intrinseci  $a_{20} \equiv a_0$  e  $a_{22} = a_{2-2} \equiv a_2$ . Un potenziale così costruito è indipendente dalla variabile  $\gamma$ , pertanto nello spazio di coordinate  $(\beta, \gamma)$  presenta una simmetria assiale.

numero totale di fononi,  $N$  sono presenti il numero quantico orbitale  $L$  e la sua terza componente  $M$  più altri due numeri quantici,  $\tau$  e  $n_\beta$  (cfr. formula (63)). Oltre all'invarianza per trasformazioni unitarie in cinque dimensioni, infatti, l'Hamiltoniana è invariante per rotazioni nello spazio 5-dimensionale, rappresentazioni del gruppo ortogonale speciale  $SO(5)$  e, analogamente all'oscillatore armonico tridimensionale, per rotazioni nello spazio tridimensionale e bidimensionale, che sono rappresentazioni rispettivamente di  $SO(3)$  e  $SO(2)$ . Si dimostra che a ciascuno di questi gruppi corrisponde un invariante di Casimir [13, pag. 176], che per  $U(5)$  è l'operatore numero di fononi, che da origine al numero quantico  $N$ , mentre per  $SO(n)$  sono operatori che hanno autovalori  $\Lambda(\Lambda + n - 2)$ : in particolare per  $SO(5)$  l'operatore ha autovalori  $\tau(\tau + 3)$ , per  $SO(3)$  l'operatore è il modulo quadro del momento angolare  $\hat{L}^2$  con autovalori  $L(L + 1)$  e, infine, per  $SO(2)$  l'operatore è  $\hat{L}_z^2$  con autovalore  $M^2$ <sup>4</sup>. Quanto appena affermato può essere sintetizzato in modo conciso associando ai numeri quantici del ket il gruppo di provenienza:

$$\left| \begin{array}{cccc} U(5) \supset SO(5) \supset SO(3) \supset SO(2) \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ N & \tau, n_\beta & L & M \end{array} \right\rangle \quad (66)$$

<sup>4</sup>Autovalori espressi in unità di  $\hbar$ .

ove il numero quantico  $n_\beta$  è un label banale in quanto completamente determinato da  $\tau$  e da  $N$ . Concludiamo l'analisi sugli stati dell'oscillatore armonico ricavando una espressione per gli autostati corrispondenti a zero, uno e due fononi totali:

- ♣  $N=0$ , *vuoto fononico*. Dalla (63) si deduce che uno stato di questo tipo corrisponde a  $\tau=0$  e  $n_\beta=0$  nonchè a zero momento angolare totale: usando la notazione della formula (66) questo autostato si scrive

$$|0, 0, 0, 0, 0\rangle. \quad (67)$$

Lo stato appena definito è l'unico non degenero nei numeri quantici, infatti coincide con un solo stato intrinseco, che usando la notazione (65) si scrive esattamente come la (67).

- ♣  $N=1$ , *un fonone*. Dal momento che  $\tau$  e  $n_\beta$  sono interi positivi, c'è un'unica possibile scelta che soddisfa la (63), cioè  $\tau=1$ . Per quanto riguarda il momento angolare totale, l'aggiunta di un fonone di quadrupolo comporta l'aggiunta di due unità di momento angolare con terza componente arbitrariamente scelta tra  $-2$  e  $2$ . Ne segue che lo stato a un fonone corrisponde al seguente multipletto di stati degeneri:

$$|1, 1, 0, 2, M\rangle \quad M \in 2, 1, 0, -1, -2 \quad (68)$$

Usando la notazioni intrinseca (65), gli autoket ammessi contengono tutte le possibili permutazioni di quattro zeri e una unità.

- ♣  $N=2$ , *due fononi*. Usando ancora la (63), si trova che gli  $(\tau, n_\beta)$  sono due, cioè  $(2, 0)$  e  $(0, 1)$ . Aggiungendo un fonone di quadrupolo ad uno stato ad un fonone, le regole di addizione del momento angolare indicano che sono possibili gli stati con  $L \in 4, 3, 2, 1, 0$ . Occorre, quindi, sviluppare lo stato di momento angolare totale  $L$  e terza componente  $M$  in serie di Clebsch-Gordan

$$|L, M\rangle \equiv |L, M, 2, 2\rangle = \sum_{\mu=-2}^2 \sum_{\mu'=-2}^2 (22L|\mu\mu'M)|2, \mu, 2, \mu'\rangle = \sum_{\mu=-2}^2 \sum_{\mu'=-2}^2 (L22|M\mu\mu')\beta_{2\mu}^\dagger\beta_{2\mu'}^\dagger|0, 0, 0, 0\rangle, \quad (69)$$

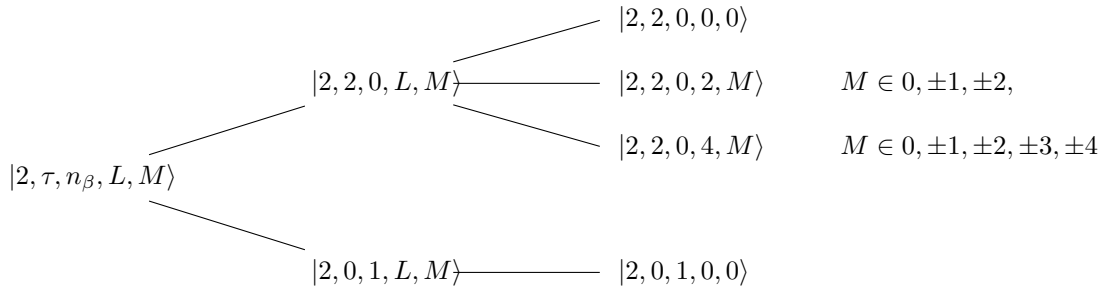
ove è stato espresso lo stato a due unità di momento angolare come lo stato a zero momenti usando gli operatori di creazione. Poichè lo stato di zero momento angolare coincide con il vuoto fononico, questa formula permette di costruire gli autostati a due fononi a partire da questo. Se si applica la relazione di simmetria ai coefficienti di Clebsch-Gordan  $(j_1 j_2 J | m_1 m_2 M) = (-1)^{j_1+j_2-J} (j_2 j_1 J | m_2 m_1 M)$  si trova che lo stato risulta simmetrizzato:

$$|L, M\rangle = \frac{1}{2} \sum_{\mu=-2}^2 \sum_{\mu'=-2}^2 (1 + (-1)^L) (L22|M\mu\mu')\beta_{2\mu}^\dagger\beta_{2\mu'}^\dagger|0, 0, 0, 0\rangle \quad (70)$$

Dalla (70) si evince subito che i momenti angolari dispari  $1$  e  $3$  non sono ammessi, quindi restano solo tre scelte per il momento angolare totale. Inoltre, per  $\tau < 3$ , vale la seguente regola di selezione per i numeri quantici orbitali<sup>5</sup>

$$L \in 2\tau, 2\tau - 2, 2\tau - 3, \dots, \tau + 1, \tau \quad (72)$$

che ha l'effetto di cancellare due dei tre multipletti di stati previsti nel caso di  $(0, 1)$ , mentre conferma i tre multipletti di  $(2, 0)$ . I quattro multipletti dello stato a due fononi possono essere rappresentati tramite il seguente diagramma ad albero:



<sup>5</sup>Si dimostra [9, pag. 4] che, scegliendo il numero quantico  $\nu \in 0, 1, 2, \dots, \lfloor \frac{\tau}{3} \rfloor$  in luogo di  $n_\beta$  e, ponendo  $K \equiv \tau - 3\nu$ , vale la seguente regola di selezione per il numero quantico orbitale:

$$L \in 2K, 2K - 2, 2K - 3, \dots, K + 1, K \quad (71)$$

ove il termine  $2K-1$  non è permesso. Dal momento che  $\nu$  può assumere solo valori interi, per gli stati a due fononi questo numero quantico è necessariamente nullo e, quindi, la (71) si riduce alla (72).

Concludiamo l'analisi dell'oscillatore armonico introducendo un operatore di particolare interesse, l'operatore momento angolare collettivo, generatore delle rotazioni nello spazio tridimensionale. In termini algebrici, si dimostra [14, pag. 2] che le componenti dell'operatore momento angolare  $\hat{L}_\mu$  e dell'operatore di ottupolo  $\hat{O}_{3\nu}$  costituiscono i dieci elementi dell'algebra di Lie di SO(5) [13, pag. 2], il gruppo ortogonale speciale in cinque dimensioni:

$$\hat{L}_\mu = -\sqrt{10}\hbar[\hat{\beta}_2^* \otimes \hat{\beta}_2^\dagger]_{[\mu]}^{[1]} \quad \mu \in 0, \pm 1 \quad (73)$$

$$\hat{O}_{3\nu} = -\sqrt{10}\hbar[\hat{\beta}_2^* \otimes \hat{\beta}_2^\dagger]_{[\nu]}^{[3]} \quad \nu \in 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3 \quad (74)$$

L'oggetto della prossima sottosezione è, quindi, ricavare l'espressione analitica del primo dei due operatori (73).

### 3.4 L'operatore momento angolare

Nel caso cartesiano tridimensionale, l'operatore momento angolare si costruisce come prodotto vettore di posizione e momento, in modo analogo alla meccanica classica. Similmente, si può costruire l'operatore momento angolare come un operatore tensoriale sferico tridimensionale di rango uno<sup>6</sup>, a partire, però, dagli operatori di deformazione e dai relativi momenti di deformazione (54). In particolare, il momento angolare dovrà soddisfare le regole di commutazione di un tensore sferico. Preso un generico operatore tensoriale sferico  $\hat{T}_q^k$  di rango  $k$  e componente  $q$  costruito a partire dai parametri  $\hat{\alpha}_{\lambda\mu}$  e dai  $\hat{\pi}_{\lambda\mu}$ , le regole di commutazione con l'operatore momento angolare in queste coordinate sono:

$$[\hat{L}_0, \hat{T}_q^k] = \hbar q \hat{T}_q^k \quad [\hat{L}_{\pm 1}, \hat{T}_q^k] = \hbar \sqrt{(k \pm q + 1)(k \mp q)} \hat{T}_{q \pm 1}^k \quad (75)$$

Conoscendo la relazione fra i parametri di deformazione e i momenti coniugati (54), si può costruire l'operatore momento angolare di deformazione come prodotto tensore tra gli  $\hat{\alpha}_{\lambda\mu}$  e i  $\hat{\pi}_{\lambda\mu}$ , moltiplicato per una costante  $Z$ , da determinare attraverso le leggi di commutazione (75):

$$\hat{L}_\mu = Z[\hat{\alpha}_\lambda \otimes \hat{\pi}_\lambda^*]_{[\mu]}^{[1]} = Z \sum_{\mu' \mu''} (\lambda \lambda 1 | \mu' \mu'' \mu) \hat{\alpha}_{\lambda \mu'} \hat{\pi}_{\lambda \mu''}^* \quad (76)$$

Prendendo l'equazione a sinistra delle (75) e  $\hat{T}_q^k = \alpha_{\lambda\mu}$ , e, sostituendovi la formula (76), si ottiene la condizione cercata sulla  $Z$ :

$$Z = -i(-1)^\mu \frac{\mu}{(\lambda \lambda 1 | \mu - \mu 0)} \quad (77)$$

Ora, esplicitando il coefficiente di Clebsch-Gordan, si trova

$$(\lambda \lambda 1 | \mu - \mu 0) = \sqrt{3}(-1)^{\lambda - \mu} \frac{\mu}{\sqrt{(2\lambda + 1)(\lambda + 1)\lambda}}, \quad (78)$$

da cui discende subito che  $Z$  è una costante che non dipende dalla particolare componente  $\mu$ , ma solo dalla multipolarità dell'oscillazione:

$$Z = -i \frac{(-1)^\lambda}{\sqrt{3}} \sqrt{(2\lambda + 1)(\lambda + 1)\lambda}. \quad (79)$$

Restringendo l'analisi alle vibrazioni di quadrupolo, si trova l'espressione analitica del momento angolare:

$$\hat{L}_\mu = -i\sqrt{10}[\hat{\alpha}_2 \otimes \hat{\pi}_2^*]_{[\mu]}^{[1]} \quad (80)$$

Infine, sostituendo le relazioni inverse delle (60) e (61) si ottiene l'espressione della componente  $\mu$  del momento angolare collettivo nel formalismo della seconda quantizzazione [6, pag. 62]

$$\hat{L}_\mu = \sqrt{10}\hbar \sum_{\mu' \mu''} (221 | \mu' \mu'' \mu) (-1)^{\mu'} \hat{\beta}_{2-\mu''} \hat{\beta}_{2\mu'}^\dagger = -\sqrt{10}\hbar[\hat{\beta}_2^* \otimes \hat{\beta}_2^\dagger]_{[\mu]}^{[1]}. \quad (81)$$

In particolare, per la componente azimutale del momento angolare la condizione di accoppiamento  $\mu'' + \mu' = 0$  cancella una delle due sommatorie della (81) dando luogo al coefficiente di Clebsch-Gordan

$$(221 | \mu' - \mu' 0) = \mu' \frac{(-1)^{\mu'}}{\sqrt{10}} \quad (82)$$

<sup>6</sup>Il passaggio alla base cartesiana è permesso dalla trasformazione inversa (8) a piè di pagina 4. In particolare, la componente azimutale coincide con  $\hat{L}_0$ , mentre  $\hat{L}_{\pm 1}$  sono gli usuali operatori di incremento e decremento di una unità della terza componente di momento angolare.



che permette di ottenere una espressione significativa per  $\hat{L}_0$ :

$$\hat{L}_0 = \hbar \sum_{\mu} \mu \hat{\beta}_{2\mu} \hat{\beta}_{2\mu}^{\dagger} = \hbar \sum_{\mu} \mu \hat{\beta}_{2\mu}^{\dagger} \hat{\beta}_{2\mu}. \quad (83)$$

Come si osserva, la (83) mantiene la stessa forma invertendo l'ordine degli operatori di creazione e distruzione: sostituendo le (62) si trova che la presenza di  $\mu$  nella sommatoria rende la violazione delle regole di commutazione solo apparente. Infine, confrontando il secondo membro della (83) con la (63) si trova che la componente azimutale del momento angolare ha l'effetto di contare il numero di fononi di ciascun oscillatore *pesandolo* con il valore di  $\mu$ .

## 4 L'Hamiltoniana di Bohr

### 4.1 L'energia cinetica in coordinate intrinseche

Nella sezione 3.1 è stata trovata l'espressione per l'energia cinetica dei modi di oscillazione, concentrando l'attenzione sul significato del parametro di massa  $B_{\lambda}$ . L'obiettivo di questo paragrafo, è, ora, quello di scrivere il termine cinetico di quadrupolo in funzione delle coordinate  $(\beta, \gamma)$ , separando nei termini  $|\dot{\alpha}_{2\mu}|^2$  il contributo delle rotazioni di una superficie nucleare deformata dalle vibrazioni pure della superficie attorno ad una posizione di equilibrio, sferica o deformata. Trasformazioni di coordinate di questo tipo sono particolarmente utili proprio quando il sistema devia dalla simmetria sferica, e trovano applicazione non solo in ambito nucleare, ma anche in quello molecolare. Infatti, a differenza del caso di una goccia di liquido, che tende a mantenere una forma di equilibrio sferica, la natura fermionica dei nucleoni permette la stabilità anche a posizioni di equilibrio deformate attorno ad un punto  $(\beta_0, \gamma_0) \neq (0, 0)$ , contrariamente al caso dell'oscillatore armonico analizzato in § 3.3. In particolare, mentre rimane valida l'invarianza per rotazioni nel sistema del laboratorio, l'hamiltoniana non è più invariante, in generale, per rotazioni nel riferimento solidale al nucleo, infatti le componenti del momento angolare  $\hat{L}'_k$   $k = 1, 2, 3$ , generatore infinitesimo delle rotazioni in questo riferimento non commutano più, in generale con  $\mathcal{H}$ . Il passaggio da fare è, quindi, scrivere l'energia cinetica nel sistema del laboratorio nei parametri di deformazione intrinseci: poiché l'Hamiltoniana deve essere uno scalare, essa non dovrà dipendere dalla particolare angolo di rotazione della superficie sferica, cioè dagli angoli di Eulero, ma solo dalla velocità angolare, dal momento che la rotazione è dipendente dal tempo. Sostituendo la legge di trasformazione (5) nel termine cinetico (51) ed esplicitandone le derivate si ottiene:

$$T = \sum_{2\mu} \frac{1}{2} B_2 |\dot{\alpha}_{2\mu}|^2 = \sum_{2\mu} \frac{1}{2} B_2 \left| \frac{d}{dt} \sum_{\mu'} D_{\mu\mu'}^2 a_{2\mu'} \right|^2 \quad (84)$$

$$= \sum_{\mu} \left[ \sum_{\mu'} \dot{D}_{\mu\mu'}^2 a_{2\mu'} + \sum_{\mu'} D_{\mu\mu'}^2 \dot{a}_{2\mu'} \right] \left[ \sum_{\mu''} \dot{D}_{\mu\mu''}^{2*} a_{2\mu''} + \sum_{\mu''} D_{\mu\mu''}^{2*} \dot{a}_{2\mu''} \right]. \quad (85)$$

Il problema del cambiamento di coordinate si traduce, quindi, nel calcolo delle derivate temporali degli elementi di matrice di Wigner che dipendono dal tempo solo attraverso gli angoli di Eulero:

$$\frac{d}{dt} D_{\mu\mu'}^{\lambda}(\theta_1, \theta_2, \theta_3) = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial D_{\mu\mu'}^{\lambda}}{\partial \theta_i} \frac{\partial \theta_i}{\partial t} + \frac{\partial D_{\mu\mu'}^{\lambda}}{\partial t} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial D_{\mu\mu'}^{\lambda}}{\partial \theta_i} \omega_i \quad (86)$$

ove  $\omega_i$  è la velocità angolare attorno agli assi di rotazione istantanei [6, pag. 93] (o di Eulero [6, pag. 121])  $\mathbf{e}_i$   $i = 1, 2, 3$ . Prima di calcolare le derivate angolari degli elementi di matrice di Wigner, è conveniente riscrivere l'operatore  $\frac{\partial}{\partial \theta_i}$  attraverso gli operatori momento angolare  $\hat{L}'_k$  o  $\hat{L}_k$   $k = 1, 2, 3$ , e lo si può fare solo dopo aver espresso la terna di versori del laboratorio  $\mathbf{x}_i$   $i = 1, 2, 3$  e la terna solidale  $\mathbf{x}'_i$   $i = 1, 2, 3$  in funzione della terna di Eulero, cioè tramite le matrici di cambiamento di base  $V$  e  $U$  <sup>9</sup>:

$$\mathbf{e}_i = \sum_j U_{ji}(\theta_1, \theta_2) \mathbf{x}_j \quad U(\theta_1, \theta_2) = \begin{pmatrix} 0 & -\sin \theta_1 & \cos \theta_1 \sin \theta_2 \\ 0 & \cos \theta_1 & \sin \theta_1 \sin \theta_2 \\ 1 & 0 & \cos \theta_2 \end{pmatrix} \quad (87)$$

$$\mathbf{e}_i = \sum_j V_{ji}(\theta_2, \theta_3) \mathbf{x}'_j \quad V(\theta_2, \theta_3) = \begin{pmatrix} -\sin \theta_2 \cos \theta_3 & \sin \theta_3 & 0 \\ \sin \theta_2 \sin \theta_3 & \cos \theta_3 & 0 \\ \cos \theta_2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (88)$$

<sup>9</sup>Le matrici  $U$  e  $V$  sono collegate alla matrice di rotazione  $R$  tramite la relazione  $UV^{-1} = R^T$ , che permette di scrivere un vettore della base fissa come combinazione lineare di quelli della terna solidale.

Indicati con  $\beta_k$   $k = 1, 2, 3$  gli angoli di rotazione intorno agli assi del sistema intrinseco e partendo dalla conservazione della lunghezza d'arco infinitesima,  $\sum_i \mathbf{e}_i d\theta_i = \sum_j \mathbf{x}'_j d\beta_j$ , si ottiene la relazione

$$d\beta_j = \sum_i V_{ji} d\theta_i \quad (89)$$

che, a partire dalla forma analitica della componente  $k$  dell'operatore momento angolare nel sistema intrinseco

$$\hat{L} = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \beta_k} = -i\hbar \sum_j V_{jk}^{-1} \frac{\partial}{\partial \theta_j}, \quad (90)$$

permette di scrivere la derivata rispetto ad un generico angolo di Eulero in funzione dell'operatore momento angolare del sistema solidale

$$\frac{\partial}{\partial \theta_i} = \sum_k \frac{\partial \beta_k}{\partial \theta_i} \frac{\partial}{\partial \beta_k} = \sum_k V_{ki} \frac{\partial}{\partial \beta_k} = i \frac{1}{\hbar} \sum_k V_{ki} \hat{L}'_k. \quad (91)$$

Inserendo la relazione (91) al posto della derivata parziale dell'angolo di Eulero  $\theta_k$   $k \in 1, 2, 3$  nella (86), la derivata temporale degli elementi di matrice di Wigner risulta:

$$\sum_{i=1}^3 \frac{\partial D_{\mu\mu'}^\lambda}{\partial \theta_i} \frac{\partial \theta_i}{\partial t} = \frac{i}{\hbar} \sum_{i,k} V_{ki} \frac{\partial \theta_i}{\partial t} \hat{L}'_k(\theta_i) \langle \lambda\mu | \hat{R} | \lambda'\mu' \rangle \quad (92)$$

$$= -\frac{i}{\hbar} \sum_{i,k} V_{ki} \frac{\partial \theta_i}{\partial t} \langle \lambda\mu | \hat{L}'_k(x'_i) \hat{R} | \lambda'\mu' \rangle \quad (93)$$

ove nel secondo passaggio (92), il segno complessivo è stato modificato in quanto l'operatore momento angolare nel sistema intrinseco è stato riscritto usando gli angoli polari attorno agli assi di Eulero,  $\phi_i$   $i \in 1, 2, 3$ . Prendendo, per esempio, la rotazione antioraria attorno all'asse  $z$  di angolo  $\theta_3$ , un punto generico fissato sulla sfera unitaria  $(\theta, \phi)$  è trasformato in  $(\theta, \phi')$  con  $\phi' = \phi - \theta_3$ , quindi l'operatore  $\frac{\partial}{\partial \theta_3}$  applicato all'operatore di rotazione  $\hat{R}(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$  può essere riscritto nel modo seguente [6, pag. 121]:

$$\frac{\partial}{\partial \theta_3} \hat{R}(\theta_1, \theta_2, \theta_3) = -\frac{\partial}{\partial \phi} \hat{R}(\theta_1, \theta_2, \theta_3) \equiv -\frac{\partial}{\partial \phi_3} \hat{R}(\theta_1, \theta_2, \theta_3) \quad (94)$$

Generalizzando la (95) per gli altri due angoli di Eulero, la componente  $k$  del operatore momento angolare nel sistema intrinseco può essere riscritta come

$$\hat{L}'_k(\theta_1, \theta_2, \theta_3) \hat{R}(\theta_1, \theta_2, \theta_3) = -i\hbar \sum_j (V^{-1})_{jk} \frac{\partial}{\partial \theta_j} \hat{R} = i\hbar \sum_j (V^{-1})_{jk} \frac{\partial}{\partial \phi_j} \hat{R} = -\hat{L}'_k(x'_1, x'_2, x'_3) \hat{R}(\theta_1, \theta_2, \theta_3), \quad (95)$$

motivando il cambiamento di segno del secondo membro della (92). Una relazione del tutto analoga a quella appena ottenuta vale per il momento angolare nel sistema del laboratorio [6, pag. 124]. Sostituendo la trasformazione della componente  $k$  dell'operatore momento angolare del laboratorio in quello intrinseco  $\hat{L}'_k(x'_1, x'_2, x'_3) = \hat{R}(\theta_1, \theta_2, \theta_3) L_k(x_1, x_2, x_3) \hat{R}^{-1}(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$  nella (93) e definendo la velocità angolare attorno agli assi solidali,

$$\omega'_k \equiv \frac{d\beta_k}{dt} = \sum_j V_{kj} \frac{\partial \theta_j}{\partial t} = \sum_i V_{ki} \omega_i \quad (96)$$

si trova:

$$\sum_{i=1}^3 \frac{\partial D_{\mu\mu'}^\lambda}{\partial \theta_i} \frac{\partial \theta_i}{\partial t} = -\frac{i}{\hbar} \sum_k \omega'_k \langle \lambda\mu | \hat{L}'_k(x'_i) \hat{R}(\theta_i) | \lambda\mu' \rangle \quad (97)$$

Inserendo in quest'ultima la relazione di completezza degli stati di momento angolare, si trova la formula finale per la derivata temporale degli elementi di matrice di Wigner:

$$\sum_{i=1}^3 \frac{\partial D_{\mu\mu'}^\lambda}{\partial \theta_i} \frac{\partial \theta_i}{\partial t} = -\frac{i}{\hbar} \sum_{k,\mu''} \omega'_k \langle \lambda\mu | \hat{L}'_k(x'_i) | \lambda\mu'' \rangle \langle \lambda\mu'' | \hat{R} | \lambda\mu' \rangle \quad (98)$$

$$= -\frac{i}{\hbar} \sum_{k,\mu''} \omega'_k \langle \lambda\mu | \hat{L}'_k(x'_i) | \lambda\mu'' \rangle D_{\mu\mu'}^\lambda \quad (99)$$

dove la sommatoria sui momenti angolari è stata cancellata, dal momento che l'operatore momento angolare non modifica il numero quantico orbitale  $\lambda$ . Eseguita la moltiplicazione entro le due parentesi quadre nella (85) risulta comodo avvalersi della relazione di completezza degli elementi di matrice di Wigner,

$$\sum_{\mu} D_{\mu\mu'}^{\lambda} D_{\mu\mu''}^{\lambda*} = \delta_{\mu'\mu''} \quad (100)$$

in aggiunta alla (99) per semplificare i calcoli all'interno dei quattro gruppi di sommatorie. Per il calcolo degli elementi di matrice del momento angolare rispetto al laboratorio è utile conoscere le seguenti relazioni:

$$\langle 2\mu | \hat{L}_3^2(x) | 2\nu \rangle = n^2 \delta_{\nu\mu} \quad (101)$$

$$\langle 2\nu | \hat{L}_1^2(x) | 2\nu \rangle = \langle 2\nu | \hat{L}_2^2(x) | 2\nu \rangle = \frac{1}{2} [2(2+1) - \nu^2] \quad (102)$$

$$\langle 2\nu + 2 | \hat{L}_1^2(x) | 2\nu \rangle = -\langle 2\nu + 2 | \hat{L}_2^2(x) | 2\nu \rangle = \frac{1}{4} \sqrt{(1-\nu)(2-\nu)(3+\nu)(4+\nu)} \quad (103)$$

$$\langle 2\nu - 2 | \hat{L}_1^2(x) | 2\nu \rangle = -\langle 2\nu - 2 | \hat{L}_2^2(x) | 2\nu \rangle = \frac{1}{4} \sqrt{(1+\nu)(2+\nu)(3-\nu)(4-\nu)} \quad (104)$$

Sfruttando le quattro relazioni (94)-(97) e sostituendo i parametri di deformazione del sistema intrinseco con le variabili di Bohr (17), dopo laboriosi calcoli, si ottiene l'energia cinetica trasformata:

$$T = \frac{1}{2} B_2 (\dot{\beta}^2 + \dot{\gamma}^2 \beta^2) + 2B_2 \beta^2 \left[ \omega_1^2 \sin^2 \left( \gamma - \frac{2\pi}{3} \right) + \omega_2^2 \sin^2 \left( \gamma - \frac{4\pi}{3} \right) + \omega_3^2 \sin^2 \gamma \right] \quad (105)$$

Dall'energia cinetica così ottenuta si può separare in due contributi: il termine cinetico vibrazionale, che corrisponde al primo termine a secondo membro della (98) e dipende unicamente dalle velocità di deformazione del nucleo, e il termine rotazionale che racchiude i tre termini dipendenti dalla velocità angolare attorno agli assi principali d'inerzia. Ricordando che nella terna solidale il tensore d'inerzia è diagonale, i coefficienti di questi ultimi tre termini possono essere interpretati come i momenti d'inerzia  $\mathcal{I}_k$  1, 2, 3 attorno ai tre versori della base solidale  $\mathbf{x}'_k$  1, 2, 3 e possono essere indicati collettivamente con [1, pag. 19]

$$\mathcal{I}_k = 4B_2 \beta^2 \sin^2 \left( \gamma - \frac{2\pi}{3} k \right) \quad k = 1, 2, 3. \quad (106)$$

Dalla (106) si osserva che i momenti d'inerzia dipendono dai parametri di deformazione, accoppiando i rotazionali con quelli vibrazionali. D'altra parte, se la forza di richiamo è sufficientemente intensa, cioè se il potenziale di oscillazione ha equilibri  $(\beta_0, \gamma_0)$  ben definiti, le deformazioni dinamiche sono piccole e i momenti d'inerzia dinamici (124) possono essere ritenuti costanti  $\mathcal{I}_k(\beta, \gamma) \approx \mathcal{I}_k(\beta_0, \gamma_0)$ , rendendo possibile il disaccoppiamento dei moti rotazionali da quelli vibrazionali. E' in questa approssimazione che rotazioni attorno ad assi di simmetria di nuclei simmetrici ( $\beta_0 \neq 0$ ,  $\gamma_0 = m\frac{\pi}{3}$   $m \in \mathbb{Z}$ ) risultano proibite dall'annullamento dei corrispondenti momenti d'inerzia, mentre, per lo stesso motivo, nei nuclei sferici ( $\beta_0 = 0$ ,  $\gamma \in [0, 2\pi]$ ) le bande rotazionali sono assenti del tutto. In questa visuale, quindi, gli unici moti collettivi permessi per l'oscillatore armonico analizzato in § 3.3 sono quelli vibrazionali, motivo per cui in letteratura prende il nome di *vibratore sferico*. Attribuendo a  $B_2$  il significato fornito nella descrizione classica delle vibrazioni di superficie (cfr. § 3), si possono confrontare direttamente i momenti d'inerzia di un fluido irrotazionale con quelli di un corpo rigido che subisce le stesse deformazioni:

$$\mathcal{I}_k^{Irr} = \frac{\rho_m R_0^5}{4} \beta^2 \sin^2 \left( \gamma - \frac{2\pi}{3} k \right) \quad \mathcal{I}_k^{Rig} = \frac{8}{15} \rho_m \pi R_0^5 \left[ 1 - \beta \sqrt{\frac{5}{4\pi}} \cos \left( \gamma - \frac{2\pi}{3} k \right) \right] \quad k = 1, 2, 3. \quad (107)$$

Dalla (100) si evince che il momento di inerzia di corpo rigido si riduce a quello di una sfera di raggio  $R_0$  per  $\beta = 0$  o lungo gli assi di simmetria, dunque meno soggetto del fluido irrotazionale alle deformazioni dinamiche: nella stessa approssimazione di piccole vibrazioni  $\mathcal{I}_k^{Irr}(\beta, \gamma) \approx \mathcal{I}_k^{Irr}(\beta_0, \gamma_0)$  si trova che tutti i moti rotazionali rimangono permessi, indipendentemente dalla configurazione di equilibrio dell'oscillatore  $(\beta_0, \gamma_0)$ . In realtà, misure sperimentali del parametro  $B_2$  a partire dalle probabilità ridotte di transizione di quadrupolo  $B(E2)$  indicano che la materia nucleare ha un comportamento intermedio fra i due casi-limite appena trattati ( $\mathcal{I}^{Irr} < \mathcal{I}^{Exp} < \mathcal{I}^{Rig}$ ). Eseguita la trasformazione di coordinate, l'energia cinetica deve, ora, essere quantizzata, adoperando la legge di quantizzazione in coordinate curvilinee  $q_i$   $i = 1, 2, 3, 4, 5$  nel tensore metrico  $G$  [15, pag. 180]:

$$\hat{T} = -\frac{1}{2} \hbar^2 \sum_{ij} \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial q_i} \sqrt{g} (g^{-1})_{ij} \frac{\partial}{\partial q_j} \quad (108)$$

Il primo passo per farlo è definire le coordinate  $q_i$   $i = 1, 2, 3, 4, 5$ , scelta che storicamente [6, pag. 131] viene fatta ricadere sui tre angoli di Eulero e sui parametri di deformazione del sistema intrinseco  $a_{22} = a_{2-2} \equiv a_2$  e  $a_{20} \equiv a_0$ , presi nell'ordine seguente:

$$q_1 = a_0 \quad q_2 = a_2 \quad q_3 = \theta_1 \quad q_4 = \theta_2 \quad q_5 = \theta_3 \quad (109)$$

Per ricavare gli elementi di matrice del tensore metrico  $G$ , si procede estraendo le derivate temporali delle coordinate scelte dal termine cinetico classico, dunque esprimendo la velocità angolare nel sistema solidale in funzione della derivata degli angoli di Eulero,

$$T = \frac{1}{2}B_2(\dot{\beta}^2 + \dot{\gamma}^2\beta^2) + \sum_k \mathcal{I}_k \omega'_k = \frac{1}{2}B_2(\dot{a}_0^2 + 2\dot{a}_2^2) + \frac{1}{2} \sum_k \mathcal{I}_k \left( \sum_i V_{ki} \frac{d\theta_i}{dt} \right)^2 = \frac{1}{2} \sum_{ij} g_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j \quad (110)$$

Comparando i due membri a sinistra della (110) e ricordando la definizione delle matrici  $V$  e  $U$ , si trova che gli elementi di matrice del tensore metrico  $G$  sono:

$$g_{1k} = g_{k1} = B_2 \delta_{k1} \quad g_{2k} = g_{k2} = 2B_2 \delta_{2k} \quad g_{ij} = \sum_k \mathcal{I}_k V_{ki} V_{kj} \quad i, j \geq 3 \quad (111)$$

Dopo aver ricavato gli elementi dell'inversa  $G^{-1}$  e il determinante del tensore metrico  $G$ ,

$$g \equiv \det G = 2B_2^2 \sin^2 \theta_2 \mathcal{I}_1 \mathcal{I}_2 \mathcal{I}_3 = 16B_2^5 a_2^2 (3a_0^2 - 2a_2^2)^2 \sin^2 \theta_2, \quad (112)$$

e sostituendoli nella (108) si trova l'operatore energia cinetica nelle coordinate (109)

$$\hat{T} = -\frac{\hbar^2}{2B_2} \left[ \frac{\partial^2}{\partial a_0^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial a_2^2} + \frac{6a_0}{3a_0^2 - 2a_2^2} \frac{\partial}{\partial a_0} + \left( \frac{3(a_0^4 - 4a_2^4)}{2a_2(a_0^2 + 2a_2^2)(3a_0^2 - 2a_2^2)} \right) \frac{\partial}{\partial a_2} \right] + \sum_k \frac{\hat{L}'_k{}^2}{2\mathcal{I}_k(a_0, a_2)} \quad (113)$$

Riscrivendo l'energia cinetica in funzione delle coordinate di vibrazione  $(\beta, \gamma)$  si ottiene il risultato di Aage Bohr:

$$\hat{T} = \hat{T}_{vib} + \hat{T}_{rot} = -\frac{\hbar^2}{2B_2} \left[ \frac{1}{\beta^4} \frac{\partial}{\partial \beta} \beta^4 \frac{\partial}{\partial \beta} + \frac{1}{\beta^2} \frac{1}{\sin 3\gamma} \frac{\partial}{\partial \gamma} \sin 3\gamma \frac{\partial}{\partial \gamma} \right] + \sum_k \frac{\hat{L}'_k{}^2}{2\mathcal{I}_k(\beta, \gamma)} \quad (114)$$

Alla luce della (114), si può affermare che i termini vibrazionale e rotazionale dell'operatore cinetico  $\hat{T}$  sono ancora accoppiati: in particolare, per vibrazioni di una superficie sferica, l'accoppiamento di  $\beta$  con il moto rotazionale del nucleo è ancora più forte.

## 4.2 L'energia potenziale: il caso $\gamma$ -instabile del potenziale quartico

Definito il termine cinetico nella sua forma quantizzata, è ora possibile scrivere la formula più generale dell'Hamiltoniana di Bohr, con un potenziale dipendente da entrambi i parametri di deformazione,

$$\hat{\mathcal{H}}_B = \hat{T} + \hat{V} = -\frac{\hbar^2}{2B_2} \left[ \frac{1}{\beta^4} \frac{\partial}{\partial \beta} \beta^4 \frac{\partial}{\partial \beta} + \frac{1}{\beta^2} \frac{1}{\sin 3\gamma} \frac{\partial}{\partial \gamma} \sin 3\gamma \frac{\partial}{\partial \gamma} \right] + \frac{1}{2B_2} \sum_{k=1}^3 \frac{\hat{L}'_k{}^2}{2\beta^2 [\sin(\gamma - \frac{2\pi}{3}k)]^2} + V(\beta, \gamma) \quad (115)$$

Naturalmente, la soluzione generale del problema degli autovalori della (115),  $\hat{\mathcal{H}}_B \Phi = E\Phi$  è una funzione dipendente sia dai parametri di deformazione sia dai tre angoli di Eulero da cui l'operatore momento angolare dipende, che denotiamo con  $\Psi(\beta, \gamma, \theta_1, \theta_2, \theta_3)$ . Restringendosi ad un potenziale dipendente solo dal parametro  $\beta$ , l'Hamiltoniana di Bohr risulta separabile<sup>10</sup> in una parte dipendente solo da  $\beta$ , detta  $\hat{h}(\beta)$  e una dipendente dagli angoli di Eulero e da  $\gamma$ , detta  $\hat{g}(\gamma, \theta_1, \theta_2, \theta_3)$ . Denotando con  $\Lambda$  la costante di separazione e con  $\Psi(\beta, \gamma, \theta_1, \theta_2, \theta_3) = B(\beta)\Phi(\gamma, \theta_1, \theta_2, \theta_3)$  la soluzione fattorizzata, le due equazioni agli autovalori da risolvere sono le seguenti:

$$\left\{ \frac{\hbar^2}{2B_2} \left( -\frac{1}{\beta^4} \frac{\partial}{\partial \beta} \beta^4 \frac{\partial}{\partial \beta} + \frac{\Lambda}{\beta^2} \right) + V(\beta) \right\} B(\beta) = EB(\beta) \quad (117)$$

$$\left\{ -\frac{1}{\sin 3\gamma} \frac{\partial}{\partial \gamma} \sin 3\gamma \frac{\partial}{\partial \gamma} + \frac{1}{4\hbar^2} \sum_{k=1}^3 \frac{\hat{L}'_k{}^2}{2\beta^2 [\sin(\gamma - \frac{2\pi}{3}k)]^2} \right\} \Phi(\gamma, \theta_1, \theta_2, \theta_3) = \Lambda \Phi(\gamma, \theta_1, \theta_2, \theta_3) \quad (118)$$

<sup>10</sup>La condizione richiesta per la separazione dell'Hamiltoniana è, in realtà, più debole: si dimostra che è sufficiente poter esprimere il potenziale  $V(\beta, \gamma)$  nella forma

$$V(\beta, \gamma) = \frac{u(\gamma)}{\beta^2} + z(\beta), \quad (116)$$

ove  $u(\gamma)$  e  $z(\beta)$  sono due funzioni reali dei due rispettivi parametri.

Un potenziale indipendente da  $\gamma$  che permetta di separare l'Hamiltoniana di Bohr nelle due equazioni differenziali (117) e (118) è detto  $\gamma$ -*instabile*, denominazione che si deve alla particolare forma della configurazione di equilibrio dell'oscillatore, non più limitata ad un punto  $(\beta_0, \gamma_0)$ , ma ad una circonferenza di raggio  $\beta_0$  nel piano  $(\beta, \gamma)$ . Per la seconda delle due equazioni, non dipendente dalla scelta del potenziale gamma-instabile, valgono le stesse considerazioni fatte per l'oscillatore armonico: l'Hamiltoniana è esprimibile tramite l'operatore  $\hat{\Lambda}$  di autovalore  $\Lambda = \tau(\tau + 3)$  che è un invariante di Casimir per le rotazioni nello spazio 5-dimensionale a cui è associato il gruppo  $SO(5)$ . Inoltre, dal momento che la (118) commuta con  $\hat{L}'^2 = \hat{L}^2$  e con  $\hat{L}_3$ , cioè è invariante per rotazioni nel sistema del laboratorio, vale ancora la concatenazione di gruppi (66) e, di conseguenza l'autofunzione  $\Phi(\gamma, \theta_i)$  sarà autostato simultaneo di  $\hat{L}'^2 = \hat{L}^2$  e  $\hat{L}_3$  con autovalori  $L(L+1)\hbar^2$  e  $M\hbar$ , oltreché di  $\tau$  e  $\nu \in 0, 1, 2, \dots, [\frac{\tau}{3}]$ <sup>12</sup>. Se  $\hbar K$  è la proiezione del momento angolare lungo l'asse  $z$  del riferimento solidale, si dimostra [12, pag. 142] che l'autofunzione della Hamiltoniana  $\hat{g}(\gamma, \theta_1, \theta_2, \theta_3)$  si può esprimere come sovrapposizione di elementi di matrice di Wigner,

$$\Phi(\gamma, \theta_i) = \sum_{K=-L}^L g_K^{L, \tau, \nu}(\gamma) D_{MK}^L(\theta_1, \theta_2, \theta_3) \quad (119)$$

dal momento che sono autostati della componente azimutale del momento angolare nei due riferimenti con autovalori  $-\hbar M$  e  $-\hbar K$  e del momento angolare totale, con autovalore  $\hbar^2 L(L+1)$ . Inoltre, come nel caso dell'oscillatore armonico, vale la seguente regola di selezione (cfr. relazione (72)) sui momenti angolari:

$$L = 2K, 2K - 2, 2K - 3, \dots, K \quad (120)$$

La più generale autofunzione dell'Hamiltoniana  $\gamma$ -instabile avrà, quindi, la forma:

$$B(\beta)\Phi(\gamma, \theta_i) \equiv |\Lambda\tau\nu LM\rangle = \sum_{K=-L}^L B_\tau(\beta) g_K^{L, \tau, \nu}(\gamma) D_{MK}^L(\theta_1, \theta_2, \theta_3) \quad (121)$$

che, nei prodotti scalari, dovrà essere integrata nell'elemento di volume curvilineo, dipendente dal determinante del tensore metrico  $G$ :

$$dV = |\sqrt{g}| \prod_{i=1}^5 q_i = 4B_2^{\frac{5}{2}} |a_2| |3a_0^2 - 2a_2^2| \sin \theta_2 da_0 da_2 d\theta_1 d\theta_2 d\theta_3. \quad (122)$$

Dopo aver presentato la forma più generale di una hamiltoniana  $\gamma$ -instabile e della sua soluzione, introduciamo un caso particolare di potenziale di vibrazione, che dipende dalla quarta potenza del parametro  $\beta$ : è il cosiddetto *oscillatore quartico*, di equazione

$$V(\beta) = \frac{1}{2} C_4 \beta^4 = \frac{1}{2} C_4 \left( \sum_{\mu} |\hat{\alpha}_{2\mu}|^2 \right)^2. \quad (123)$$

Come si osserva dalla figura a pagina seguente, questo potenziale ha un minimo nell'origine, come l'oscillatore armonico, ma la dipendenza quartica nel parametro di deformazione permette scostamenti dalla configurazione di equilibrio sferica più circoscritti. Da un punto di vista più rigoroso, il potenziale quartico rappresenta il *punto critico* nella transizione di fase quantistica fra un nucleo sferico  $\gamma$ -instabile e un nucleo deformato  $\gamma$ -instabile, singolarità che emerge solo dopo aver studiato l'andamento del parametro di controllo, cioè il punto di minimo  $\bar{\beta}(\eta)$  di un potenziale di prova della forma di Landau

$$V(\beta) = c_1(\eta)\beta^2 + c_2(\eta)\beta^4 \quad (124)$$

al variare del parametro d'ordine  $\eta$ . Si dimostra, infatti, che la derivata seconda del minimo  $\bar{\beta}(\eta)$  rispetto a  $\eta$  presenta una discontinuità in corrispondenza del valore di  $\eta$  che annulla il coefficiente  $c_1(\eta)$ , cioè in prossimità di un potenziale quartico puro. Una Hamiltoniana (115) con potenziale anarmonico (123), tuttavia, non risulta risolubile in modo analitico anche se soluzioni numeriche sono tuttora disponibili, come quella proposta da J.M. Arias, C.E. Alonso et al. [17, pag.4], che verranno confrontati con la soluzione numerica matriciale proposta nell'ultima sezione. Una alternativa al calcolo numerico delle soluzioni dell'Hamiltoniana è rappresentata dalla modellizzazione del potenziale quartico con una buca infinita di potenziale, proposta da F. Iachello, che permette di trovare soluzioni analitiche dell'Hamiltoniana che, all'interno della buca, è analoga a quella di una particella libera nello spazio a cinque dimensioni, quindi invariante per rotazioni e traslazioni, cioè rispetto a rappresentazioni del gruppo euclideo a 5 dimensioni,  $E(5)$ .

<sup>12</sup>Le parentesi quadre indicano la funzione *parte intera*,  $f(x) = [x]$ .

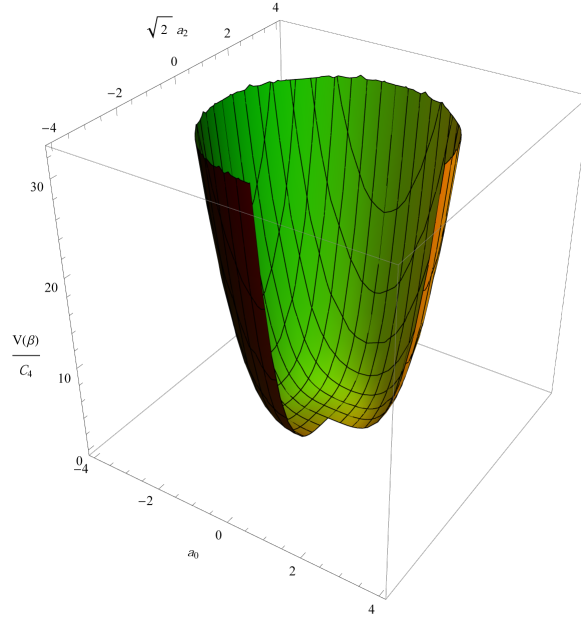


Figura 4: *Potenziale nucleare collettivo dell'oscillatore quartico in unità di  $C_4$  in funzione dei parametri di deformazione intrinseci  $a_{20} \equiv a_0$  e  $a_{22} = a_{2-2} \equiv a_2$ . Un potenziale così costruito è indipendente dalla variabile  $\gamma$ , pertanto nello spazio di coordinate  $(\beta, \gamma)$  presenta una simmetria assiale.*

### 4.3 Una soluzione approssimata: il metodo matriciale

Non essendo un problema analitico, la ricerca degli autovalori dell'oscillatore quartico può essere affrontata con un approccio approssimato di tipo matriciale, che consiste nel calcolo degli elementi di matrice dell'operatore Hamiltoniano (115) con il potenziale (123) fra due autostati dell'oscillatore armonico, scelta che permette di abbreviare i calcoli attraverso il formalismo della seconda quantizzazione. Naturalmente, le autoenergie dell'oscillatore quartico non sono più autostati di  $\hat{N}$ , il contatore del numero totale di fononi dell'oscillatore armonico, cioè non è più possibile individuare le nuove autoenergie per mezzo del numero quantico  $N = 2n_\beta + \tau \equiv 2\xi + \tau - 2$ , ma ci sarà una dipendenza diversa degli autovalori dai due numeri quantici  $\xi$  e  $\tau$ , non conoscibile analiticamente<sup>14</sup>. Denotando con  $|\xi\tau\nu LM\rangle$  gli autostati dell'oscillatore quartico, è possibile sviluppare gli autostati anarmonici in serie come sovrapposizione di autostati di  $\hat{\mathcal{H}}_{h.o.}$ , indicati con  $|n_A\rangle \equiv |n_{A2}, n_{A1}, n_{A0}, n_{A-1}, n_{A-2}\rangle$ , cioè

$$|\xi\tau\nu LM\rangle = \sum_{n_A} \langle n_A | \xi\tau\nu LM \rangle |n_A\rangle \quad (125)$$

Dal momento che  $N$  non è più un buon numero quantico, esistono elementi di matrice non banali fuori dalla diagonale che, data l'autoaggiuntezza dell'operatore hamiltoniano, soddisfano la relazione di simmetria

$$\langle n_A | \hat{\mathcal{H}}_{q.o.} |n_B\rangle = \langle n_B | \hat{\mathcal{H}}_{q.o.} |n_A\rangle, \quad (126)$$

ove  $|n_A\rangle$ , e  $|n_B\rangle$  sono due autostati dell'oscillatore armonico. Esplicitando l'operatore Hamiltoniano dell'oscillatore quartico in termini degli operatori di creazione e distruzione (60) e (61) è possibile semplificare il calcolo degli elementi di matrice (126). Per il termine cinetico si procede in modo analogo all'oscillatore armonico:

$$\langle n_A | \hat{T} |n_B\rangle = \frac{1}{2B_2} \langle n_A | \sum_{\mu} |\hat{\pi}_{2\mu}|^2 |n_B\rangle \quad (127)$$

Il calcolo degli elementi di matrice del termine di potenziale, decisamente più complicato del precedente, può essere abbreviato scrivendo l'operatore  $\beta^4$  come prodotto di due potenziali quadratici e inserendo la relazione di completezza per gli autostati dell'oscillatore armonico:

$$\langle n_A | \hat{V} |n_B\rangle = \frac{1}{2} C_4 \langle n_A | \left[ \sum_{\mu} |\hat{\alpha}_{2\mu}|^2 \right]^2 |n_B\rangle = \frac{1}{2} C_4 \langle n_A | \hat{\beta}^4 |n_B\rangle \quad (128)$$

$$= \frac{1}{2} C_4 \langle n_A | \hat{\beta}^2 \hat{\beta}^2 |n_B\rangle = \frac{1}{2} C_4 \sum_{\{n_C\}} \langle n_A | \hat{\beta}^2 |n_C\rangle \langle n_C | \hat{\beta}^2 |n_B\rangle \quad (129)$$

<sup>14</sup>Numericamente è possibile dimostrare, considerando i coefficienti dello sviluppo (142) negli autostati di oscillatore armonico che  $\xi$  conserva il significato che ha nei casi E(5) [17] e U(5), di numero di zeri della parte radiale della funzione d'onda, dipendente solo da  $\beta$ .



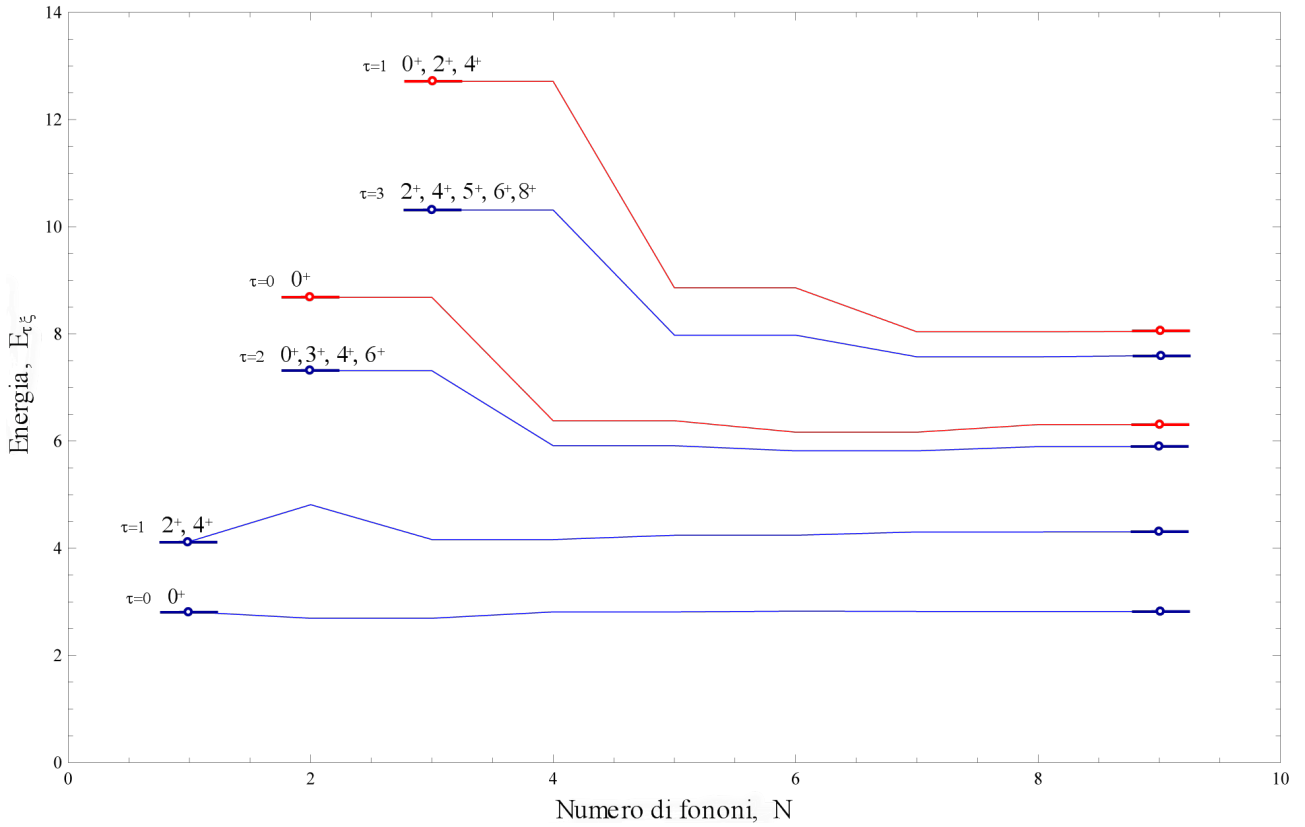


Figura 6: Andamento dei primi sei autovalori dell'energia dell'oscillatore quartico in funzione del numero di fononi massimo contenuto negli autostati dell'oscillatore armonico. Come previsto, sia le spezzate della banda  $\xi = 1$  (in blu) sia quelle della banda  $\xi = 2$  (in rosso) sembrano convergere all'autovalore esatto dell'energia all'aumentare della precisione del metodo.

di liquido quantistico. L'intento è stato quello di ripercorrere i passaggi fondamentali per la comprensione del modello, riportando a suffragio dei risultati i passaggi algebrici più significativi, come si è fatto nella derivazione dei termini energetici per le vibrazioni classiche di una goccia di fluido carico, nella costruzione dell'operatore momento angolare per l'oscillatore armonico e nel passaggio dell'energia cinetica dai parametri di deformazione del sistema del laboratorio alle coordinate intrinseche, quest'ultimo affrontato in modo sistematico da Eisenberg e Greiner [6]. Con un'attenzione particolare al modo di oscillazione di quadrupolo, si è cercato di descrivere i tratti essenziali di questo modello dalla definizione di quei parametri che codificano le deformazioni superficiali del nucleo fino alla costruzione dell'Hamiltoniana di Bohr, passando per lo studio dell'oscillatore armonico, che costituisce un importante caso limite di riferimento. Proprio facendo leva sul formalismo della seconda quantizzazione introdotto per l'oscillatore armonico è stato possibile risolvere numericamente l'Hamiltoniana dell'oscillatore quartico, un caso non analitico, che costituisce l'anello di congiunzione fra i nuclei sferici e i nuclei deformati  $\gamma$ - instabili. Il successivo confronto con altri valori presenti in letteratura, infine, ha confermato l'affidabilità del metodo matriciale, che, a partire dalle molteplicità degli autovalori, ha permesso di ricostruire lo spettro di questo caso anarmonico e di riconoscerne la natura  $\gamma$ - instabile.

Il successo di questo modello in spettroscopia e struttura nucleare lo rende tuttora uno stimolante 'laboratorio' per la ricerca di nuove soluzioni della Hamiltoniana, nonché il punto di partenza per la formulazione di modelli più articolati e avanzati, che tengono in considerazione la natura discreta della materia nucleare, come il *Modello a Bosoni Interagenti* (Interacting Boson Model) di Iachello e Arima.



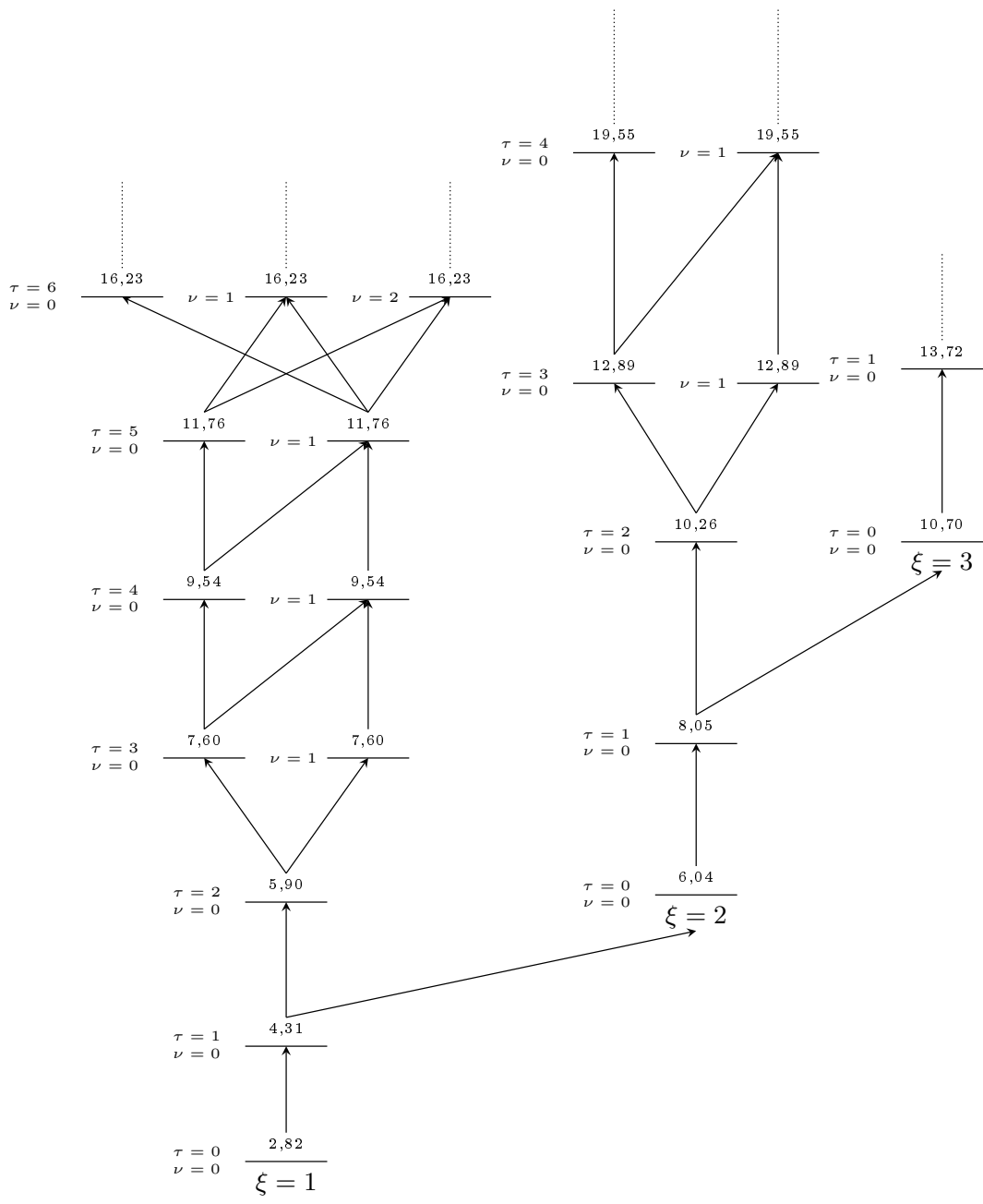


Figura 7: Spettro schematico per l'oscillatore quartico. Gli autovalori sono riportati sopra i livelli energetici, in unità di  $\hbar$  e delle costanti dell'oscillatore  $B_2$ ,  $C_2$  e  $C_4$  e rappresentano il risultato ottenuto nel caso a  $N=9$  fononi. Le frecce che collegano i livelli energetici indicano la possibilità di una o più transizioni di quadrupolo elettrico E2, rispettando le regole di selezione. Ne segue che non tutti gli stati di un multipletto  $\tau$  possono transire a un dato stato di un multipletto con  $\tau + 1$ . Per completezza, oltre al numero quantico di banda,  $\xi$ , sono riportati anche i valori di  $\tau$  e  $\nu$ , che individuano stati differenti di momento angolare.

## Riferimenti bibliografici

- [1] Peter Ring, Peter Schuck, *The nuclear many-body problem*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, (1980).
- [2] Emilio Segrè, *Nuclei e particelle*, Zanichelli, Bologna, (1982).
- [3] John Lilley, *Nuclear Physics, principles and applications*, John Wiley & Sons, Manchester, (2001).
- [4] Kris Heyde, *Basic ideas and concepts in nuclear physics*, Institute Of Physics Publishing, London, (1994).
- [5] R. F. Casten, *Nuclear structure from a simple perspective*, Oxford University Press, New York, (1990).
- [6] Judah M. Eisenberg, Walter Greiner, *Nuclear Theory, Nuclear Models*, vol. 1, North-Holland Publishing Company, Amsterdam, (1975).
- [7] Aage Bohr, Ben N. Mottelson, *Nuclear structure*, Volume II: Nuclear Deformations, World Scientific Publishing, Singapore, (1975).
- [8] L. Prochniak, S. G. Rohozinski, *Quadrupole collective states within the Bohr collective Hamiltonian*, Journal of Physics G: Nuclear and particle physics, **36**, 123101, (2009).
- [9] Lorenzo Fortunato, *Solutions of the Bohr Hamiltonian, a compendium*, European Physics Journal A, **26**, s01, 1-30, (2005).
- [10] J. Van De Wiele, *Rotations et moments angulaires en mécanique quantique*, Annales de Physique Française **26**, N°6, (2001).
- [11] Judah M. Eisenberg, Walter Greiner, *Nuclear Theory, Excitation mechanisms of the nucleus*, vol. 2, North-Holland Publishing Company, Amsterdam, (1976).
- [12] Walter Greiner, Joachim A. Maruhn, *Nuclear models*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, (1996).
- [13] Francesco Iachello, *Lie Algebras and Applications*, Lecture Notes Physics, **708**, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, (2006).
- [14] D.J.Rowe, K.T.Hecht, *Representation of the five-dimensional harmonic oscillator with scalar valued  $U(5) \supset SO(5) \supset SO(3)$ -coupled VCS wave functions*, Journal of Mathematical Physics, Vol. **36**, No. **9**, American Institute of Physics, (1995).
- [15] Kenichi Konishi, Giampietro Paffuti, *Meccanica Quantistica: nuova introduzione*, Edizioni Plus - Pisa University Press, Pisa, (2005).
- [16] Lorenzo Fortunato, *Nuclei at the top of their shape*, Europhysics News, vol. **40**, N° **2**, pp. 25-29, (2009).
- [17] J. M. Arias, C.E. Alonso, J .Dukelsky, A. Frank, J.E. Garcia Ramos, A. Vitturi, *The  $U(5)$  transition in the Interacting Boson Model and the  $E(5)$  critical point symmetry*, Physical Review C, vol. **68**, N° **4**, American Physical Society, (2003).
- [18] David Lawrence Hill, John Archibald Wheeler, *Nuclear Constitution and the Interpretation of Fission Phenomena*, Physical Review **89**, 1102–1145, American Physical Society, (1953).