Università degli Studi di Padova

DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA DELL'INFORMAZIONE
Corso di Laurea in Ingegneria dell'Informazione

Tesi di Laurea Triennale

Teoria dei Giochi ed Applicazione all'Ingegneria dell'Informazione

Candidato:
Raffaele Maffei
Matricola 591422-INF

Relatore:
Prof. Leonardo Badia

Anno Accademico 2012–2013

Dietro ogni traguardo c'è una nuova partenza.
Dietro ogni risultato, un'altra sfida.

Madre Teresa

Abstract

La tesi illustra i principali fondamenti della Teoria dei Giochi, una branca della Matematica che analizza situazioni di conflitto tra due o più individui e vi ricerca soluzioni competitive o cooperative mediante specifici modelli. Saranno introdotte alcune definizioni basilari, necessarie per comprendere a pieno gli esempi successivi. Per i problemi di natura conflittuale, come sarà spiegato in seguito, l'equilibrio di Nash giocherà il ruolo fondamentale nello sviluppo della soluzione. L'approccio iniziale verrà esteso a strategie miste, giochi dinamici e casi di complessità crescente. Per concludere, verranno proposte alcune applicazioni relative al mondo delle Telecomunicazioni, modellando situazioni di conflitto simili a ciò che succede nei sistemi reali.

Indice

Introduzione

Lo scopo di questa tesi è quello di illustrare i principali fondamenti della Teoria dei Giochi. Quando parliamo di **gioco** nella vita quotidiana, si può subito pensare, ad esempio, ad un gioco di società, da tavolo, di carte oppure ad un videogioco. Il significato più profondo della parola *gioco* è descritto matematicamente dai modelli studiati e sviluppati dalla Teoria dei Giochi.

La **Teoria dei Giochi [TdG]** è una branca della Matematica che analizza situazioni di conflitto e ne ricerca soluzioni competitive o cooperative mediante specifici modelli, fornendo validi strumenti per lo studio delle decisioni individuali, in situazioni in cui vi sono interazioni tra due o più soggetti [17]. Le decisioni di un soggetto possono influire sui risultati conseguibili da parte di un rivale, finalizzate al massimo guadagno del soggetto stesso.

Oltre allo studio di giochi intesi nel senso comune del termine, la TdG si applica prevalentemente a giochi creati artificialmente.

Grazie alle metodologie sviluppate dalla TdG, un modello di gioco può essere studiato per trovarne la *soluzione ottima*, ossia quella sequenza di azioni che, in una determinata situazione, porterebbe un giocatore alla massima utilità percepibile.

Cenni storici

Le prime rudimentali nozioni di TdG nacquero nel XVIII secolo, ma il vero e proprio sviluppo della teoria ebbe inizio nel 1920, con il lavoro dei matematici Émile Borel (1871-1956) e John von Neumann (1903-1957) [1, 2]. Un evento particolarmente significativo durante lo sviluppo della teoria, fu la pubblicazione del libro scritto da von Neumann e Morgenstern, *Theory of games and economic behavior* (1944), il quale aprì un orizzonte verso nuove teorie [3]. Agli albori degli anni '50, John F. Nash sviluppò un concetto chiave della teoria (equilibrio di Nash) ed iniziò lo studio della negoziazione tra più soggetti [4, 5, 7, 6]. Subito dopo il lavoro di Nash, i modelli della TdG iniziarono ad essere utilizzati nell'economia e nelle scienze politiche [9], mentre gli psicologi iniziarono a studiare il comportamento dei soggetti umani nelle situazioni di conflitto [10]. Negli anni '70, la TdG venne utilizzata come strumento nello studio della biologia evoluzionistica [11, 12]. In seguito, i suoi metodi arrivarono a dominare l'intera teoria microeconomica [13] e le scienze comportamentali [14]. Nel 1994, John C. Harsanyi (1920-2000), John F. Nash (1928-) e Reinhard Selten (1930-) vinsero il premio Nobel per le scienze economiche, grazie alle loro scoperte nel campo della TdG.

Proprio per il suo vastissimo campo di applicabilità, al giorno d'oggi la TdG sta guadagnando l'attenzione di diverse discipline (scientifiche e non) che richiedono una particolare formulazione matematica applicabile a situazioni di conflitto e problemi decisionali. Ad esempio, in [9] la TdG è stata applicata alla politica, in [10, 14] alla psicologia e alle scienze sociali, in [11, 12] alla biologia ed ecologia, mentre in [13] all'economia.

In questa trattazione, vedremo qualche esempio di applicazione generale ed, entrando un po' più nel campo ingegneristico, alle moderne reti wireless [21, 22].

Sommario dei capitoli successivi

Nel primo capitolo della tesi vedremo le principali notazioni e definizioni utilizzate nel resto della trattazione. Classificheremo le varie tipologie di gioco, definendo infine il modello matematico nella sua forma più generale.

Nel secondo capitolo porremo la nostra attenzione principalmente sui giochi statici. Definiremo l'equilibrio di Nash e cosa esso rappresenti nel modello di un gioco. In particolare, vedremo che il suddetto equilibrio non sempre esisterà. Introdurremo, infine, l'aleatorietà nel sistema e vedremo cosa implichi nella ricerca dell'Equilibrio di Nash.

Nel terzo capitolo daremo qualche cenno ai giochi dinamici. In particolare, vedremo giochi dinamici ad informazione perfetta e la loro rappresentazione in forma estesa. Segue il metodo di "Induzione a Ritroso" per trovare un equilibrio di Nash in un gioco dinamico.

Nell'ultimo capitolo vedremo alcuni esempi applicativi della TdG, in particolare nelle Telecomunicazioni. Vedremo situazioni congruenti con i modelli visti nei capitoli precedenti, proponendo un'analisi e relativa soluzione.

Seguono, infine, le conclusioni e gli sviluppi futuri.

Capitolo 1

Definizioni e Proprietà

In questo capitolo parleremo della TdG nel senso più generale, introducendo le principali notazioni, le diverse classificazioni, le terminologie ed il modello matematico adottato nello studio delle situazioni di conflitto.

1.1 Terminologia, notazione e classificazione

Un **gioco strategico** è un modello di interazione tra due o più soggetti investiti di poteri decisionali [17]. Definiamo questo genere di soggetti come **giocatori** (spesso viene anche adottato il termine di **decisori**). Ogni giocatore ha, a sua disposizione, un insieme di **azioni** (o **strategie**) *ordinabili* secondo un criterio di **preferenza**. Per compiere un'azione, il giocatore effettua una **mossa**. Ad ogni strategia corrisponde un **utilità** (o **payoff**), che caratterizza numericamente la preferenza del giocatore: spesso numeri più elevati corrispondono a risultati più graditi [17]. La caratterizzazione di un payoff è arbitraria in senso *cardinale* (il valore numerico non è rilevante), ma importante in senso *ordinale*: ad esempio, per ogni coppia di strategie a e b, il giocatore preferisce a rispetto a b se e solo se $u(a) > u(b)$; in simboli, $a \succeq b \Leftrightarrow u(a) > u(b)$ [21, 17].

Il modello descrive l'interazione tra i giocatori assumendo che ogni giocatore possa essere influenzato dalle azioni di *tutti* i giocatori (sia le sue che quelle degli altri).

Possiamo, quindi, individuare due importanti classi di giochi:

- **Giochi non cooperativi**, nei quali i giocatori non possono stipulare accordi vincolanti tra loro, indipendentemente dai loro obiettivi. I giochi non cooperativi vengono anche chiamati, in maniera del tutto equivalente, *giochi competitivi* [18];

- **Giochi cooperativi**, in cui i giocatori perseguono un fine comune, almeno per la durata del gioco, tendendo ad associarsi per migliorare il proprio profitto [18].

Per creare un conflitto, e quindi applicare i risultati della TdG, è necessario che i giocatori siano *almeno due* (in giochi non cooperativi).

Un'altra importante classificazione può essere fatta sulla base dell'*informazione* disponibile ai giocatori.

Gli Scacchi. Gli Scacchi sono un gioco da tavolo di strategia che vede opposti due avversari, detti Bianco e Nero, sulla base del colore dei pezzi con cui giocano. L'obiettivo del gioco è dare *scacco matto*, ovvero attaccare il re avversario senza che esso abbia la possibilità di sfuggirvi.

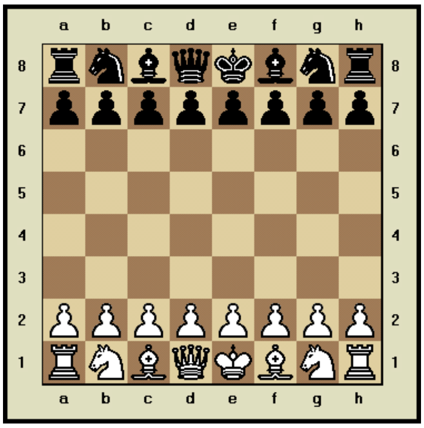

Figura 1.1: Gioco degli Scacchi.

La Morra Cinese. La Morra Cinese è un gioco di mano popolare, a due giocatori, conosciuto anche come *Sasso, Carta, Forbice* (oppure *Rock, Paper, Scissors*). I due giocatori tengono la mano chiusa a pugno e, dopo un tempo prestabilito, ogni giocatore cambia immediatamente il pugno in una delle tre possibili forme: sasso, carta o forbice. Lo scopo è sconfiggere l'avversario scegliendo una forma in grado di battere quella dell'altro, secondo le seguenti regole: il sasso spezza le forbici, le forbici tagliano la carta, la carta avvolge il sasso. Se i due giocatori scelgono la stessa forma, il gioco finisce in parità.

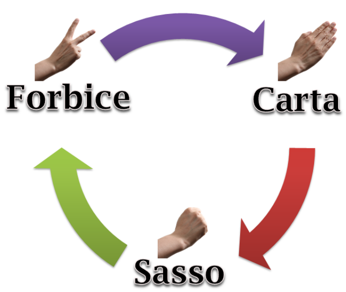

Figura 1.2: La Morra Cinese.

L'espressione *Rock-Paper-Scissors* (spesso abbreviata in RPS) viene utilizzata anche nel contesto di *wargames*[1] e videogiochi strategici per indicare un certo tipo di relazione fra diversi generi di armamenti. La relazione RPS vale quando ogni tipo di unità risulta forte contro certi tipi di unità nemiche e, contemporaneamente, debole contro altri. Nei giochi di simulazione bellica, la logica RPS è in parte legata alla ricerca del "realismo". Ad esempio, in un gioco di simulazione bellica medievale, un'arma come una catapulta può colpire rovinosamente (ma lentamente) solo a distanza: risulterebbe, quindi, alla mercé di unità capaci di avvicinarsi rapidamente ad essa.

La Scopa e lo Scopone. La Scopa è un gioco di carte italiano e, tradizionalmente, si gioca con un mazzo di 40 carte suddivise nei quattro semi: Spade, Coppe, Bastoni e Denari. Lo Scopone è una variante della Scopa e si gioca esclusivamente in 4 giocatori, tipicamente a coppie. Nella fase iniziale, il mazziere distribuisce 9 carte a ciascun giocatore, mettendo le rimanenti 4 sul tavolo, oppure decide di distribuire tutte le carte, conteggiandone 10 per ognuno. Questa seconda variante viene chiamata *Scopone Scientifico*, in quanto si riduce la componente aleatoria della prima giocata. Lo scopo del gioco è vincere totalizzando un punteggio superiore a quello degli avversari. Il calcolo del punteggio finale è leggermente complesso ed esula dallo scopo di questa tesi.

Figura 1.3: Carte da Scopa.

Nell'ampia classe dei giochi, distinguiamo tre categorie [18]:

- **Giochi ad informazione perfetta**, se tutti gli individui sono a conoscenza delle possibili azioni e delle utilità percepibili da ogni soggetto per ogni singola mossa eseguita da esso;
- **Giochi ad informazione completa**, se gli individui possiedono tutte le informazioni sul contesto e sulle decisioni prese degli avversari, ma non necessariamente su tutte le loro possibili azioni;
- **Giochi ad informazione imperfetta**, se almeno un individuo non possiede alcuna informazione sulle possibili azioni e sulle utilità percepibili dagli avversari.

[1] Il wargame ("Gioco di guerra") è una categoria di gioco strategico, che generalmente ricostruisce eventi militari storici o immaginari. Nella sua forma tradizionale, è un gioco da tavolo composto da un certo numero di pedine (o miniature) rappresentanti le varie forze in campo, e dalle regole necessarie al combattimento [20].

Riportando gli esempi sopra citati, il gioco degli Scacchi è ad informazione perfetta: difatti, i giocatori sono sempre informati sull'ultima mossa dell'avversario; la Morra Cinese è un gioco ad informazione completa: i giocatori hanno tutte le informazioni sul contesto e sulle decisioni dell'avversario, ma non conoscono la strategia che sceglierà quest'ultimo; lo Scopone, infine, è un gioco ad informazione imperfetta: ogni giocatore non conosce le carte che hanno in mano gli altri giocatori, quindi l'informazione che ha è solo *parziale*. Se l'obiettivo è la vittoria, un giocatore di Scopone giocherà seguendo la sua strategia, possibilmente la migliore per lui ed il suo compagno, in base all'informazione che ha e che riuscirà a trarre proseguendo nel gioco.

Informazione perfetta o completa?

Sebbene la differenza sia sottile, nei giochi ad informazione perfetta ogni individuo conosce preventivamente tutte le mosse eseguite dagli altri; nei giochi ad informazione completa si richiede, ad esempio, di decidere simultaneamente la propria mossa, in segreto, per poi giocarla contemporaneamente, senza poter valutare gli effetti della mossa avversaria durante l'elaborazione della propria strategia.

I giochi a informazione perfetta sono *sequenziali*, ovvero a turni. In questo modo, la mossa di un giocatore può essere effettivamente basata su una conoscenza completa del contesto (incluse tutte le mosse avversarie rilevanti).

Un gioco a informazione perfetta è un gioco a informazione completa, ma non è vero il contrario [18, 19].

Un'ulteriore classificazione può essere fatta secondo la *tempistica* delle azioni [18].

- **Giochi statici**, in cui i giocatori operano scelte *simultanee* (oppure scelte prive di informazioni sulle strategie avversarie);
- **Giochi dinamici**, nei quali le scelte dei giocatori avvengono in maniera *sequenziale*: si dice che il tempo ha "effetto strategico".

Combinando tra loro le varie classificazioni, otteniamo diverse tipologie di gioco.

Per semplicità, d'ora in avanti tratteremo solo **giochi non cooperativi a due giocatori**. In particolare, porremo la nostra attenzione sui giochi statici, dando qualche breve cenno per quelli dinamici.

1.2 Il modello matematico

In questa sezione vedremo, nel dettaglio, come descrivere un gioco tramite un modello matematico. Faremo delle opportune *ipotesi di lavoro*, in modo da poter lavorare con un modello matematicamente trattabile; sebbene, in linea di principio, il modello sarà semplice, vedremo che risulterà essere un utile strumento per analizzare diverse situazioni di conflitto.

1.2.1 Ipotesi del modello

Le due fondamentali ipotesi che facciamo (e che, da in questo momento in poi, riterremo sempre valide) è che entrambi i soggetti siano **razionali** ed **intelligenti**.

Con il termine *razionale* intendiamo una persona in grado di ordinare le sue preferenze su un insieme di risultati, e che queste preferenze soddisfino un insieme di assiomi (o credenze) per lo più ragionevoli dal suo punto di vista.

Il termine *intelligente*, invece, serve ad indicare la capacità logica di saper riconoscere le azioni necessarie per massimizzare il proprio profitto.

Conseguentemente, la *soluzione* di un gioco è una descrizione sistematica dei risultati che possono emergere in un determinato modello, compatibili con le ipotesi di intelligenza e razionalità dei giocatori [17, 19].

1.2.2 Descrizione matematica

Definizione 1.1. *Un* ***gioco strategico*** *è composto da:*

- *un insieme finito N di* ***giocatori****, $N = (g_1, \ldots, g_n)$;*
- *per ogni giocatore g_i, un insieme finito di* ***strategie*** *S_i;*
- *per ogni giocatore, un insieme P_i di* ***preferenze****, $P_i \subseteq S_1 \times \ldots \times S_n = S$.*

Nella definizione più generale di gioco strategico [17], il numero dei giocatori è pari alla cardinalità di N, indicata con n. Ogni giocatore g_i può scegliere la propria strategia da un insieme di azioni S_i.

Supponiamo che ciascun giocatore scelga una strategia $s_i \in S_i$. Definiamo **profilo** una combinazione di strategie $\mathbf{s} = (s_i)_{i\in[1,\ldots,n]} = (s_1, s_2, \ldots, s_n)$ alla quale corrisponde un risultato (o **payoff**) [17].

Il **payoff** è un numero reale che esprime il valore del risultato ottenuto, ed è definito in relazione alle preferenze di ciascun giocatore: *payoff elevato implica preferenza.*

La relazione di preferenza associata all'i-esimo giocatore, può essere espressa attraverso una **funzione di utilità** u_i (o più comunemente chiamata **funzione di payoff**), che tipicamente fa corrispondere valori più elevati a risultati più graditi. La funzione u_i è una funzione di più variabili a valori scalari reali (quindi, ordinabili secondo una relazione d'ordine):

$$u_i : S_1 \times S_2 \times \ldots \times S_n \longrightarrow \mathbb{R}$$

Possiamo, dunque, intuire che l'obiettivo di *ogni* giocatore sarà quello di *massimizzare la propria funzione di utilità.* Fondamentalmente, è come se ciascun giocatore si chiedesse: *"Qual è la migliore scelta che posso fare, sapendo che ogni altro individuo giocherà seguendo gli stessi princìpi?"*

Non è detto che la scelta migliore sia migliore in senso assoluto, ma con il termine "migliore" intendiamo la strategia che *massimizzi il proprio payoff*, a prescindere dalle strategie scelte dagli avversari.

Ciascun individuo ha un proprio ordine di preferenze sull'insieme S dei possibili risultati (in base all'ipotesi di *razionalità*), ossia delle conseguenze che si verificherebbero allorquando ciascun giocatore compia una determinata azione. Il fatto che le preferenze del decisore siano definite su S e non sul proprio insieme S_i, è proprio quello che distingue un gioco da un problema decisionale in condizioni di rischio: l'interazione con gli altri giocatori non è trascurabile[2] [19].

Per concludere la notazione sui profili, definiamo il **profilo degli avversari** di g_i:

$$\mathbf{s}_{-i} = (s_1, s_2, \ldots, s_{i-1}, s_{i+1}, \ldots, s_n)$$

Il pedice "$-i$" rappresenta la totalità dei giocatori *meno* il giocatore g_i.

In generale, le funzioni di utilità sono n. La domanda che a questo punto ci poniamo è: *esiste un profilo di strategie* $\boldsymbol{s}$ *tale per cui ogni giocatore massimizzi la propria utilità?*

John F. Nash, in [4], cercò di dare una risposta a questa domanda, formulando il concetto chiave di equilibrio di Nash.

[2]La differenza tra profili e preferenze potrebbe sembrare sottile, in realtà è ben definita. Un *profilo* è una generica combinazione di strategie, ognuna delle quali è la scelta di ciascun giocatore; una *preferenza* è una combinazione di strategie che soddisfa una particolare relazione d'ordine. In altre parole, i profili descrivono tutte le scelte di tutti i giocatori, mentre le preferenze descrivono i payoff di ciascun giocatore.

Capitolo 2

Giochi Statici

In questo capitolo svilupperemo il concetto più importante della TdG: l'equilibrio di Nash. Vedremo che esso ricoprirà un ruolo fondamentale nell'analisi di un gioco strategico, in particolare fornirà notevoli implicazioni nella ricerca della soluzione ottima per ogni singolo giocatore [17].

La tipologia di gioco più interessante della TdG, trova posto nella categoria dei **giochi statici**. Come già detto precedentemente, i giochi statici sono giochi in cui ogni individuo opera la propria scelta simultaneamente agli altri [18]. La Morra Cinese è un esempio di gioco statico.

Per descrivere matematicamente il modello di un gioco statico, utilizzeremo la rappresentazione in **forma strategica** (o **forma normale**). Grazie a questa forma, potremo modellare il gioco per mezzo di una **bimatrice** (o **matrice dei payoff**), la quale conterrà tutte le possibili combinazioni di strategie e, per ogni coppia di strategie, il corrispondente payoff. Sebbene questo approccio possa essere molto utile per sviluppare calcoli, non è vantaggioso per descrivere giochi sequenziali [17].

2.1 Strategie Pure

In questa sezione affronteremo il modello di gioco statico, supponendo che ogni giocatore scelga *deterministicamente* la propria strategia.

Una strategia **pura** (o *deterministica*) descrive la scelta che farà un giocatore in qualsiasi situazione si trovi ad affrontare. Seguendo la notazione sviluppata nel capitolo precedente, S_i è l'insieme di strategie pure del giocatore g_i.

2.1.1 Equilibrio di Nash in Strategie Pure

Definizione 2.1. *Un profilo di strategie* $\boldsymbol{s}^*$ *è un* ***Equilibrio di Nash in strategie pure [EN]*** *se*

$$u_i(\boldsymbol{s}^*) \geq u_i(s, \boldsymbol{s}^*_{-i})\,,\ \forall\, g_i \in N\,,\ \forall\, s \in S_i$$

dove $u_i(s, \boldsymbol{s}^*_{-i}) = u_i(s^*_1, s^*_2, \ldots, s^*_{i-1}, s, s^*_{i+1}, \ldots, s^*_n)$.

La funzione u_i è la stessa, sia a sinistra che a destra dell'operatore, pertanto abbiamo a che fare con un confronto tra due profili relativi allo stesso giocatore.
Espandendo i vettori nella disuguaglianza, otteniamo dunque

$$u_i(s_1^*, s_2^*, \dots, s_{i-1}^*, s_i^*, s_{i+1}^*, \dots, s_n^*) \geq u_i(s_1^*, s_2^*, \dots, s_{i-1}^*, s, s_{i+1}^*, \dots, s_n^*)$$

Come possiamo desumere direttamente dalla definizione matematica di EN, se g_i giocasse una qualunque strategia a sua disposizione diversa da s_i^*, mentre tutti gli altri giocassero la strategia $s^* \in \mathbf{s}_{-i}^*$, potrebbe solo peggiorare il proprio payoff o, al più lasciarlo invariato. Quindi, se i giocatori raggiungessero un EN, nessuno potrebbe migliorare il proprio risultato pensando di cambiare unilateralmente la propria strategia. Poiché questo vale per tutti i giocatori, deduciamo che se *esistesse* un EN e fosse *unico*, esso rappresenterebbe la *soluzione* del gioco, in quanto nessuno dei giocatori avrebbe alcun incentivo ad allontanarsi dall'equilibrio.

Il contributo più importante dato da John F. Nash alla TdG, è l'invenzione (e successiva dimostrazione matematica dell'esistenza) di questo equilibrio [4]. Tuttavia, non è detto che l'equilibrio sia unico: in particolare, nei giochi in cui gli individui adottano esclusivamente strategie pure, un equilibrio di Nash può non esistere.

Vediamo, ora, uno degli esempi classici della TdG.

Esempio 2.1 (Il Dilemma del Prigioniero [17]). *Due sospetti vengono arrestati e tenuti in due celle separate. Le autorità hanno solo qualche indizio contro di loro, ma non hanno alcuna prova per il crimine compiuto. L'unica maniera per incastrarli definitivamente è che uno di loro incolpi l'altro. Se entrambi non parleranno, saranno solo accusati di un crimine minore, rimanendo in prigione solo un anno. Se uno (e solo uno) di loro parlerà accusando l'altro, sarà subito libero, lasciando l'altro in carcere per quattro anni. Se entrambi parleranno, ambedue rimarranno in prigione per tre anni.*

La situazione può essere modellata come un gioco strategico, in particolare come un *gioco statico ad informazione completa.*

Giocatori: i due sospetti;
Strategie: ogni giocatore può decidere se Tacere (T) o Parlare (P), quindi

$$S_1 = \{T, P\}$$
$$S_2 = \{T, P\}$$

Preferenze: le azioni sono 2 per entrambi i giocatori. Pertanto, le preferenze sono 4. Indichiamo con P_1 e P_2 l'insieme di preferenze rispettivamente del primo e del secondo sospetto. Secondo l'ipotesi di razionalità dei giocatori, ordiniamo le preferenze dalla migliore alla peggiore[1]:

$$P_1 = \{(P, T), (T, T), (P, P), (T, P)\}$$
$$P_2 = \{(T, P), (T, T), (P, P), (P, T)\}$$

[1]le coppie sono ordinate in modo che la la preferenza (x, y) sia definita come $x \in S_1$ e $y \in S_2$.

Scegliamo le funzioni di utilità in modo che rispecchino l'ordine delle preferenze. Per il primo sospetto scegliamo una funzione u_1 tale per cui

$$u_1(P,T) > u_1(T,T) > u_1(P,P) > u_1(T,P)$$

In particolare, ad ogni profilo assegniamo, arbitrariamente, il rispettivo payoff (in questo caso, il payoff rappresenta gli anni di reclusione):

$$\begin{gathered} u_1(P,T) = 0 \\ u_1(T,T) = -1 \\ u_1(P,P) = -3 \\ u_1(T,P) = -4 \end{gathered}$$

Per quanto riguarda il secondo sospetto, il ragionamento è analogo. Per compattezza, rappresentiamo il modello del gioco in forma normale:

		Sospetto 2	
		T	P
Sospetto 1	T	$-1, -1$	$-4, 0$
	P	$0, -4$	$-3, -3$

Tabella 2.1: Il Dilemma del Prigioniero.

In questa bimatrice, le righe corrispondono alle due possibili azioni del primo sospetto, mentre le colonne alle due possibili del secondo. Le coppie di valori nelle caselle corrispondono ai payoff dei singoli sospetti.

Ad esempio, supponiamo che venga scelto il profilo (T,P). Ciò significa che:

- il primo sospetto sceglie T, mentre il secondo sceglie P;
- il payoff è $(-4, 0)$, ovvero $u_1(T,P) = -4$, $u_2(T,P) = 0$.

Ponendo la nostra attenzione sulla matrice dei payoff, il *"Dilemma del Prigioniero"* modella una situazione nella quale entrambi i giocatori guadagnerebbero se collaborassero tra di loro: difatti, ciascun sospetto preferirebbe che entrambi scegliessero di tacere piuttosto che parlare. In un gioco non cooperativo, però, ogni giocatore vorrebbe trarne il massimo profitto, pertanto avrebbe un incentivo nel parlare qualsiasi sia la scelta dell'altro.

Qual è, dunque, la scelta migliore per entrambi?

Analizziamo i profili del gioco, cercando un possibile EN.

- (T,T) non è un EN. Infatti, se il secondo sospetto scegliesse di tacere, il payoff del primo sospetto aumenterebbe se decidesse di parlare. Possiamo rendercene conto "fissando" la prima colonna della bimatrice ed osservando il primo valore nelle caselle (infatti passerebbe da -1 a 0, dunque non soddisferebbe la disuguaglianza nella definizione di EN);

- (P, T) non è un EN. Se il primo sospetto scegliesse di parlare ed il secondo di tacere, quest'ultimo ridurrebbe il suo payoff; infatti, "fissando" la seconda riga e cambiando colonna, il secondo valore passerebbe da -3 a -4;
- (T, P) non è un EN. Possiamo seguire lo stesso ragionamento del punto precedente, in maniera duale;
- (P, P) è un EN, ed è l'unico: dal punto di vista del singolo sospetto, è la *migliore scelta* che possa fare, in quanto non potrebbe pentirsi d'averlo scelto. In altre parole, non avrebbe alcun incentivo nel cambiare unilateralmente la propria scelta, poiché lo porterebbe solo a peggiorare il proprio payoff.

Vediamo un altro esempio nel quale entrambi i giocatori preferirebbero cooperare piuttosto che non cooperare.

Esempio 2.2 (Battaglia dei Sessi [17])**.** *Una giovane coppia vorrebbe andare ad un concerto. Ne sono disponibili due: uno di Bach (B) ed uno di Stravinsky (S). Lui vorrebbe assistere a quello di Bach, mentre lei a quello di Stravinsky. Entrambi, però, scelgono senza sapere cosa deciderà l'altro, ma preferirebbero andare assieme allo stesso concerto, piuttosto che stare da soli in due luoghi separati.*

Modelliamo la situazione con la seguente bimatrice:

		Donna	
		B	S
Uomo	B	$2,1$	$0,0$
	S	$0,0$	$1,2$

Tabella 2.2: La Battaglia dei Sessi.

In questo gioco esistono due EN: (B, B), (S, S). Deduciamo, quindi, che entrambi preferirebbero andare al concerto di Bach oppure a quello di Stravinsky; per come abbiamo modellato il gioco, l'obiettivo comune è *stare entrambi assieme*, da non confondere con quello che in realtà ciascuno di loro vorrebbe fare.

Per concludere, è opportuno fare una breve riflessione sul significato profondo di EN.

Abbiamo visto, infatti, come esso rappresenti una situazione nella quale nessun giocatore avrebbe interesse a cambiare unilateralmente la propria strategia, in quanto lo porterebbe solamente a peggiorare il proprio payoff. L'EN rappresenta, quindi, la situazione nella quale la totalità dei giocatori si viene a trovare se *ogni componente del gruppo fa ciò che è meglio per sé*, cioè mira a massimizzare il proprio profitto a prescindere dalle scelte degli avversari. Tuttavia, non è detto che l'EN sia la soluzione migliore per tutti. Infatti, se è vero che in un EN il singolo giocatore non può aumentare il proprio guadagno cambiando solo la propria strategia, non è affatto detto che un gruppo di giocatori, o, al limite tutti, non possano aumentare il proprio profitto allontanandosi congiuntamente dall'equilibrio.

2.1.2 Funzione di Miglior Risposta

Per trovare gli equilibri in un gioco finito, possiamo sempre applicare la definizione di EN ad ogni profilo di strategie. Ciò può essere ragionevole se ogni giocatore ha a disposizione solo un insieme ristretto di azioni. In giochi più complessi, è più conveniente calcolare gli EN con le **funzioni di miglior risposta** (BRF - Best Response Functions) [17].

Consideriamo l'i-esimo giocatore, g_i. Per ogni azione degli altri giocatori, g_{-i}, le strategie di g_i conducono a varie utilità. Siamo interessati alle migliori azioni di g_i, ovvero quelle che, data la scelta di un altro giocatore, rendono il payoff di g_i il più alto possibile. Nella *"Battaglia dei Sessi"*, ad esempio, B è la migliore scelta del primo giocatore, se anche il secondo scegliesse B; S è la migliore scelta del primo giocatore se anche il secondo scegliesse S. In particolare, in questo gioco, il primo giocatore ha solo una migliore azione per ogni azione del secondo giocatore [17].

Definiamo con $B_i(\mathbf{s}_{-i})$ l'insieme delle migliori azioni di g_i, dove $\mathbf{s}_{-i}$ è il profilo di strategie degli avversari. Dunque, nella *"Battaglia dei Sessi"*, abbiamo $B_1(B) = \{B\}$ e $B_1(S) = \{S\}$. Più precisamente,

$$B_i(\mathbf{s}_{-i}) = \arg\max_{s \in S_i} u_i(s, \mathbf{s}_{-i})$$

ovvero

$$B_i(\mathbf{s}_{-i}) = \{\widehat{s} \in S_i : u_i(\widehat{s}, \mathbf{s}_{-i}) \geq u_i(s, \mathbf{s}_{-i}), \forall\, s \in S_i\}$$

Notiamo che nella definizione di $B_i(\mathbf{s}_{-i})$ non è affatto detto che l'insieme contenga un solo elemento: ciò significa che potremmo trovare più di una miglior risposta ad ogni azione degli altri giocatori. Pertanto, ogni azione $\widehat{s_i}$ intrapresa da g_i, è considerata la **miglior risposta** di g_i ad ogni strategia scelta dagli avversari [17].

Chiamiamo B_i la **funzione di miglior risposta** dell'i-esimo giocatore.

Utilizzare la BRF per trovare gli EN

Abbiamo visto che un EN è un profilo di strategie rispetto al quale nessun giocatore ha interesse ad essere l'unico a cambiare la propria strategia. Utilizzando la terminologia appena sviluppata, possiamo definire un EN come un profilo di strategie, nel quale l'azione di ogni giocatore è una migliore risposta alle azioni degli altri giocatori [17].

Proposizione 2.1. *Il profilo $\boldsymbol{s}^*$ è un EN di un gioco strategico con preferenze ordinabili se e solo se l'azione di ogni giocatore è una migliore risposta alle azioni degli altri giocatori. In simboli,*

$$s_i^* \in B_i(\boldsymbol{s}_{-i}^*), \forall\, g_i \in N, i = 1, \ldots, n$$

Se ogni giocatore g_i ha una sola miglior risposta per ogni profilo $\mathbf{s}_{-i}$, possiamo scrivere la suddetta condizione sotto forma di equazione.

In questo caso, per ogni giocatore g_i e per ogni profilo $\mathbf{s}_{-i}$, denotiamo il singolo elemento di $B_i(\mathbf{s}_{-i})$ con $b_i(\mathbf{s}_{-i})$. Dunque,

$$B_i(\mathbf{s}_{-i}) = \{b_i(\mathbf{s}_{-i})\}, \forall\, i = 1, \ldots, n$$

Pertanto,

$$s_i^* = b_i(\mathbf{s}_{-i}^*)\,,\ \forall\, g_i \in N$$

è un sistema di n equazioni in n incognite s_i^*, dove n è il numero di giocatori [17]. Nel caso più semplice, ovvero per $n = 2$,

$$\begin{aligned} s_1^* &= b_1(s_2^*) \\ s_2^* &= b_2(s_1^*) \end{aligned}$$

Quindi, in un gioco a due giocatori, nel quale ogni giocatore ha una singola miglior risposta per ogni azione dell'avversario, la coppia (s_1^*, s_2^*) è un EN se e solo se l'azione s_1^* è la miglior risposta del primo giocatore all'azione s_2^* del secondo e, contemporaneamente, l'azione s_2^* è la miglior risposta del secondo giocatore all'azione s_1^* del primo.

Graficamente, possiamo annotare la miglior risposta con il simbolo * sugli elementi della bimatrice [17].

Esempio 2.3. *La seguente bimatrice descrive un gioco non cooperativo a due giocatori. Le azioni di g_1 sono $S_1 = \{T, M, B\}$ mentre le azioni di g_2 sono $S_2 = \{L, C, R\}$. I payoff dei giocatori sono annotati nelle caselle della bimatrice.*

			g_2	
		L	C	R
	T	$1, 2^*$	$2^*, 1$	$1^*, 0$
g_1	M	$2^*, 1^*$	$0, 1^*$	$0, 0$
	B	$0, 1$	$0, 0$	$1^*, 2^*$

Tabella 2.3: Esempio di calcolo della BRF.

Per calcolare le migliori risposte di g_1, ad esempio, "fissiamo" una colonna e troviamo il più grande payoff disponibile sulle righe, concentrandoci sui primi elementi nelle caselle. In maniera del tutto analoga, per calcolare le migliori risposte di g_2, "fissiamo" una riga e troviamo il più grande payoff disponibile sulle colonne, ponendo la nostra attenzione sui secondi elementi nelle caselle.

In questo esempio, notiamo che per ogni colonna esiste *almeno* una miglior risposta di g_1 alle azioni di g_2, mentre per ogni riga esiste *almeno* una miglior risposta di g_2 alle azioni di g_1.

Per la proposizione precedente, quindi, le caselle con entrambi i payoff segnati da asterischi sono EN. In questo caso, (M, L) e (B, R) sono gli EN del gioco.

Ricordiamo ancora una volta che, in via del tutto generale, non è detto che esistano caselle con entrambi i payoff segnati dal simbolo *, proprio perché non è detto che esista l'EN in strategie pure.

Il seguente esempio dimostra tale affermazione.

Esempio 2.4 (MATCHING PENNIES [17]). *Due giocatori hanno una moneta ciascuno e scelgono, simultaneamente, se mostrare all'altro Testa (T) o Croce (C) con la propria moneta. Se mostrassero entrambi lo stesso lato della moneta, il secondo giocatore pagherebbe il primo con 1 \$; se, invece, mostrassero due lati diversi, sarà il primo giocatore a pagare il secondo con 1 \$. L'obiettivo dei giocatori è vincere più denaro possibile.*

Modelliamo questo gioco con la seguente bimatrice:

		g_2	
		T	C
g_1	T	$1^*, -1$	$-1, 1^*$
	C	$-1, 1^*$	$1^*, -1$

Tabella 2.4: Matching Pennies.

Nella rappresentazione matriciale sono marcate le migliori risposte di ciascun giocatore. Non esiste, dunque, alcuna casella con due migliori risposte contemporanee: difatti, in questo gioco, non esiste alcun EN in strategie pure.

2.2 Strategie Miste

In questa sezione parleremo di giochi (non cooperativi) che coinvolgono strategie miste. Estenderemo la nozione di Equilibrio di Nash, analizzando modelli di gioco nei quali ciascun giocatore sceglierà la propria strategia seguendo una legge probabilistica.

In un gioco strategico, una strategia **mista** (o *probabilistica*) σ_i è una distribuzione di probabilità definita sull'insieme delle possibili strategie pure del giocatore i. Denotiamo con $\sigma_i(s)$ la probabilità che σ_i assegna alla strategia pura $s \in S_i$. Secondo le leggi della probabilità [25],

$$\sum_{s \in S_i} \sigma_i(s) = 1$$

Una strategia pura s può essere vista come caso particolare di strategia mista σ_i, con $\sigma_i(s) = 1$ [21].

Denotiamo con Σ_i l'**insieme delle strategie miste** relative al giocatore i-esimo. Analogamente al caso di strategie pure, definiamo il **profilo di strategie miste**:

$$\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$$

La **funzione di utilità attesa** (o **payoff atteso**) di g_i è la somma dei payoff di ogni profilo, pesati sulle rispettive probabilità:

$$u_i(\boldsymbol{\sigma}) = \sum_{s \in S_i} \sigma_i(s)\, u_i(\mathbf{s}) \tag{2.1}$$

dove $\mathbf{s} = (s, \boldsymbol{\sigma}_{-i})$.

Prima di vedere qualche esempio, estendiamo il concetto di relazione d'ordine tra le preferenze di ciascun giocatore, nei giochi in cui gli individui adottano strategie miste.

2.2.1 Assioma di Indipendenza

Nei giochi in cui sono coinvolte strategie miste, è necessario ridefinire il concetto di "relazione d'ordine" delle preferenze, in modo da garantire l'ipotesi di razionalità introdotta all'inizio della trattazione. Von Neumann e Morgenstern estesero questo concetto, sviluppando quello che in letteratura viene chiamato *"Assioma di Indipendenza"* [3].

Assioma 2.1 (di Indipendenza)**.** *Per ogni strategia $p, q, r \in S_i$ e $a \in [0,1]$, $p \succeq q$ se e solo se $ap + (1-a)r \succeq aq + (1-a)r$.*

L'assioma di indipendenza è spesso violato quando i giocatori sono umani. Vediamo un esempio [21].

Supponiamo di voler trasmettere un video in streaming. Fissata la velocità di connessione, sono possibili tre esiti distinti: video ad alta qualità, video a bassa qualità, nessun video.

Supponiamo di dover scegliere una tra le seguenti due opzioni:

A. La connessione garantisce un video ad alta qualità con probabilità 0.49 e nessun video con probabilità 0.51;

B. La connessione garantisce un video a bassa qualità con probabilità 0.98 e nessun video con probabilità 0.02;

Quale delle due opzioni converrebbe scegliere?
Supponiamo, inoltre, di dover scegliere una tra le seguenti due opzioni:

C. La connessione garantisce un video ad alta qualità con probabilità 0.001 e nessun video con probabilità 0.999;

D. La connessione garantisce un video a bassa qualità con probabilità 0.002 e nessun video con probabilità 0.998;

Ancora una volta, quale delle due opzioni converrebbe scegliere?

In alcuni studi sperimentali [16], molti giocatori preferirebbero scegliere B rispetto ad A, e C rispetto a D: queste scelte, però, violerebbero l'assioma. La scelta di B rispetto ad A, in combinazione con l'assioma stesso, implica che è preferibile avere, quasi con certezza, un video a bassa qualità, anziché avere un video ad alta qualità con probabilità $\frac{1}{2}$. Ma la scelta di C rispetto a D implica esattamente il contrario. Questa contraddizione è chiamata *Paradosso di Allais* [15].

Il principale problema che sorge nella percezione delle due coppie di opzioni, si deve alla presenza di un guadagno certo nella prima. Questo altera significativamente il comportamento dei soggetti umani. La certezza, infatti, risulta sempre assai preferita da coloro che sono avversi al rischio.

L'assioma, tuttavia, sembrerebbe una ragionevole regola di decisione. Sorge, dunque, una domanda: come può, un agente programmabile, violare l'assioma simulando il comportamento umano? Come si comporterebbe un programma se dovesse prendere una decisione?

Ai fini della trattazione e per motivi analitici, stabiliamo che l'assioma di indipendenza sia sempre verificato. Quindi, il giocatore g_i sceglierà di assegnare la probabilità $\sigma_{i,p}$ anzichè $\sigma_{i,q}$, se e solo se la prima lo condurrà ad un payoff atteso più elevato. In simboli:

$$\sigma_{i,p} \succeq \sigma_{i,q} \Longleftrightarrow \sum_{s \in S_i} \sigma_{i,p}(s)\; u_i(\mathbf{s}) \geq \sum_{s \in S_i} \sigma_{i,q}(s)\; u_i(\mathbf{s})$$

2.2.2 Equilibrio di Nash in Strategie Miste

Definizione 2.2. *Un profilo di strategie $\boldsymbol{\sigma}^* \in \Sigma$ è un **Equilibrio di Nash in strategie miste [EN]** se*

$$u_i(\boldsymbol{\sigma}^*) \geq u_i(\sigma, \boldsymbol{\sigma}^*_{-i})\,,\; \forall\, g_i \in N\,,\; \forall\, \sigma \in \Sigma_i$$

dove $u_i(\sigma, \boldsymbol{\sigma}^*_{-i}) = u_i(\sigma^*_1, \sigma^*_2, \ldots, \sigma^*_{i-1}, \sigma, \sigma^*_{i+1}, \ldots, \sigma^*_n)$.

La definizione (2.2) generalizza la nozione di EN data precedentemente. L'importanza delle strategie miste è ulteriormente rafforzata dal Teorema di Nash [4, 5]. Questo teorema è un risultato di notevole interesse nell'intera teoria.

Teorema 2.1 (Nash)**.** *Ogni gioco finito in forma strategica ammette almeno un Equilibrio di Nash in strategie miste.*

Il Teorema di Nash non descrive un metodo per trovare un EN. È comunque un risultato considerevole, in quanto fornisce una condizione *sufficiente* affinchè un gioco abbia almeno un EN in strategie miste: difatti, è sufficiente che il gioco sia *finito*, ovvero

$$|N| < +\infty\;,\; |S_i| < +\infty\;,\; \forall\, i = 1 \ldots n$$

Ciò non entra in contraddizione con quanto detto per un EN in strategie pure: se il gioco è finito, un EN in strategie pure *può non* esistere, ma secondo il Teorema (2.1), esiste sempre almeno un EN in strategie miste.

Per chiarire il concetto, riprendiamo il problema riportato nell'esempio 2.4. Abbiamo dimostrato che il gioco "Matching Pennies" non possiede alcun EN in strategie pure. Supponiamo, ora, che g_1 scelga T con una probabilità p, e che g_2 scelga T con una probabilità q (conseguentemente, g_1 sceglierà C con probabilità $1-p$, mentre g_2 sceglierà C con probabilità $1-q$). In simboli,

$$\sigma_1(T) = p \ , \ \sigma_2(T) = q$$

Calcoliamo le funzioni di payoff atteso:

$$\begin{aligned} u_1(p,q) &= (-1)\cdot pq + 1\cdot p(1-q) + 1\cdot(1-p)q + (-1)\cdot(1-p)(1-q) = \\ &= -4pq + 2p + 2q - 1 \\ u_2(p,q) &= 1\cdot pq + (-1)\cdot p(1-q) + (-1)\cdot(1-p)q + 1\cdot(1-p)(1-q) = \\ &= 4pq - 2p - 2q + 1 \end{aligned}$$

Poichè l'obiettivo di ciascun giocatore è quello di massimizzare la propria vincita, proviamo a massimizzare, ad esempio, $u_1(p,q)$. Calcoliamo entrambe le derivate parziali e poniamo il gradiente uguale a zero, in modo da trovarne gli eventuali punti critici:

$$\nabla u_1 = 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} \partial_p u_1 = -4q + 2 = 0 \\ \partial_q u_1 = -4p + 2 = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} q = \frac{1}{2} \\ p = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Pertanto, l'unico punto critico è situato in $(p,q) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ e

$$u_1\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = 0 \tag{2.2}$$

Ciò significa che, se $p = \frac{1}{2}$ e $q = \frac{1}{2}$, g_1 si aspetta di vincere 0 \$. Studiamo la natura del punto critico, calcolando le derivate parziali seconde, e le derivate seconde miste:

$$\partial^2_{pp} u_1 = \partial^2_{qq} u_1 = 0$$

Poichè le derivate parziali (prime) sono continue (o equivalentemente, u_1 è di classe C^1 nel proprio dominio), vale il Teorema di Schwarz:

$$\partial^2_{pq} u_1 = \partial^2_{qp} u_1 = -4$$

Dunque, la matrice Hessiana, H_1, è

$$H_1 = \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ -4 & 0 \end{bmatrix}$$

il cui determinante è

$$\det(H_1) = -16$$

Ciò implica che H_1 è indefinita. Concludiamo dicendo che il punto $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ è *di sella* per u_1. Possiamo seguire lo stesso ragionamento per $u_2(p,q)$.

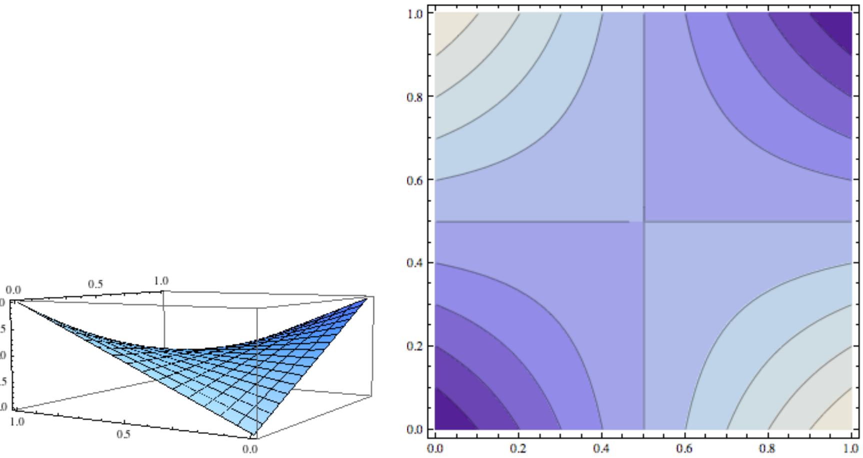

Figura 2.1: Punto di Sella per “Matching Pennies”.

Le soluzioni dell’equazione $u_1(p, q) = 0$ sono

$$\mathsf{S} = \left\{ (p, q) : p = \frac{1}{2}\; \forall\, q \in [0, 1]\ ,\ q = \frac{1}{2}\; \forall\, p \in [0, 1] \right\}$$

Questo è un notevole risultato, in quanto, in questo esempio, ci permette di affermare che la *miglior* strategia per entrambi i giocatori, è quella di scegliere le proprie azioni con probabilità $\frac{1}{2}$.

Difatti, se g_1 scegliesse $p = \frac{1}{4}$ e g_2 scegliesse $q = \frac{1}{2}$, la situazione non cambierebbe, in quanto, al tentativo di “sbilanciare” il gioco da parte di g_1, si contrappone la scelta di g_2.

Conseguentemente, le strategie miste $\sigma_1 = \frac{1}{2}$ e $\sigma_2 = \frac{1}{2}$ costituiscono un EN per il gioco in esame.

Ottimo Paretiano

In un gioco strategico, un metodo per identificare l’EN desiderato è quello di confrontare i profili di strategie seguendo il principio di **ottimalità di Pareto** [22]. Prima di introdurre questo concetto, definiamo la Superiorità di Pareto.

Definizione 2.3 (Superiorità di Pareto)**.** *Il profilo di strategie $\bar{\mathbf{s}}$ è **Pareto-Superiore** al profilo $\boldsymbol{s}$ se*

$$u_i(\bar{s}, \bar{\boldsymbol{s}}_{-i}) \geq u_i(s, \boldsymbol{s}_{-i})\ ,\ \forall\, g_i \in N\ ,\ \forall\, s \in S_i$$

con uguaglianza stretta per al più un giocatore.

In altre parole, il profilo di strategie $\bar{\mathbf{s}}$ è Pareto-Superiore al profilo $\mathbf{s}$ se il payoff del giocatore i può essere incrementato cambiando da $\mathbf{s}$ a $\bar{\mathbf{s}}$, senza diminuire il payoff degli altri giocatori. Il profilo $\mathbf{s}$ è definito **Pareto-Inferiore** al profilo di strategie $\bar{\mathbf{s}}$. Per raggiungere il profilo $\bar{\mathbf{s}}$, gli altri giocatori potrebbero dover cambiare le proprie strategie simultaneamente.

Definizione 2.4 (Ottimo di Pareto). *Il profilo di strategie $\boldsymbol{s}^o$ è **Pareto-Ottimale** (o Pareto-Efficiente, o Ottimo Paretiano) **[OP]** se non esistono altri profili di strategie che siano Pareto-Superiori a $\boldsymbol{s}^o$.*

In un profilo di strategie Pareto-Ottimale, *nessuno può aumentare il proprio payoff a meno di diminuire quello di almeno un giocatore.* Non è detto che un Ottimo Paretiano sia un EN.

Un gioco può avere più di un profilo che sia Pareto-Ottimale; l'insieme di questi profili è chiamato **Frontiera di Pareto** [22].

A titolo di esempio, nel *"Dilemma del Prigioniero"*, il profilo (P, P) è un EN, ma non un è OP; i profili (T, T), (T, P) e (P, T) sono OP ma non EN. In *"Matching Pennies"*, adottando strategie pure, non esiste un EN ma ogni profilo è OP.

Capitolo 3

Giochi Dinamici

La rappresentazione di un gioco in forma normale spesso assume che i giocatori eseguano le proprie mosse simultaneamente, senza conoscere quello che sceglieranno i loro avversari. Questa è un'assunzione ragionevole in alcune tipologie di gioco, come ad esempio *"Il Dilemma del Prigioniero"*. Ad ogni modo, in molte altre situazioni, i giocatori possono avere un tipo di interazione *sequenziale*: ciò significa che un giocatore è condizionato dalla scelta effettuata dal giocatore precedente. La classe di giochi appartenenti a questa categoria prende il nome di **giochi dinamici**.

Per questa tipologia di gioco, a differenza dei giochi statici, è conveniente utilizzare la rappresentazione in **forma estesa**. Essa, infatti, descrive il gioco mediante un **albero**. Ogni nodo interno, chiamato **nodo decisionale**, costituisce il complesso delle scelte effettuate in precedenza.
La prima mossa del gioco viene effettuata partendo dalla *radice*; si scorre, poi, lungo un percorso determinato dalle scelte dei giocatori, giungendo ad un **nodo terminale** (chiamato anche *foglia*), al quale sono associati i payoff dei singoli giocatori. I **rami**, infine, sono messi in relazione con le decisioni prese dai giocatori stessi. Ogni nodo decisionale, dunque, descrive in maniera compatta la "storia passata" del gioco [22].

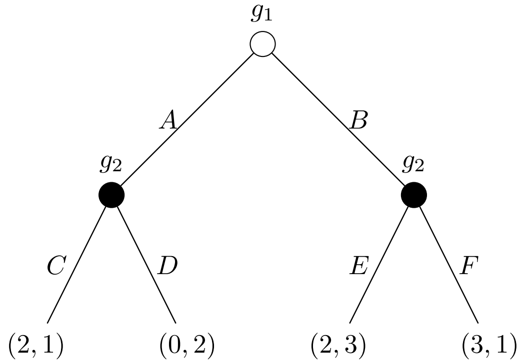

Figura 3.1: Esempio di gioco dinamico rappresentato in forma estesa.

3.1 Giochi Dinamici ad Informazione Perfetta

Definizione 3.1. *Un **gioco dinamico ad informazione perfetta** è composto da:*

- *un insieme finito N di **giocatori**, $N = (g_1, \ldots, g_n)$;*
- *per ogni giocatore g_i, un insieme di **azioni** A_i;*
- *una sequenza di azioni intraprese dai giocatori, h (chiamata anche **storia** del gioco);*
- *per ogni giocatore g_i, un insieme P_i di **preferenze**, definite sulla storia passata del gioco.*

Nella rappresentazione di un gioco dinamico in forma estesa, ad ogni nodo corrisponde *univocamente* una storia ed un giocatore [17].

Definizione 3.2. *La **strategia** di g_i è una funzione $\mathcal{S}_i$ che ad* ogni *storia h assegna un'azione appartenente all'insieme di azioni possibili dopo h stesso, $A_i(h)$ [17].*

In via del tutto generale, $A_i(h) \subseteq A_i$.

La definizione (3.2) è decisamente diversa dalla nozione di strategia data precedentemente per i giochi statici.

Un **profilo** di strategie $\mathbf{s} \in \times_{i=1\ldots n}\mathcal{S}_i$ determina completamente la storia del gioco. Il gioco si conclude quando si giunge ad un nodo terminale, o in maniera equivalente, quando *la storia è completamente determinata* [17].

Esempio 3.1 (North-South-West-East). *Consideriamo il seguente gioco dinamico in forma estesa:*

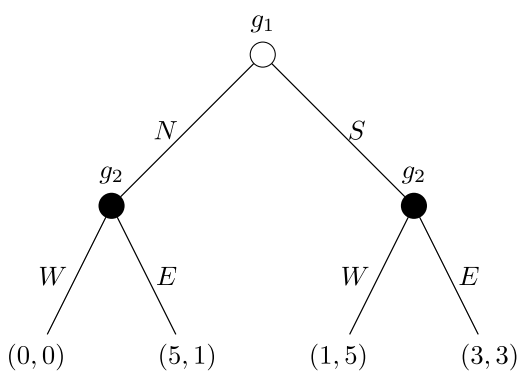

Figura 3.2: Rappresentazione in forma estesa dell'esempio NSWE.

Giocatori: g_1 e g_2.
Azioni: $A_1 = \{N, S\}$, $A_2 = \{E, W\}$.

Primo passo: la storia del gioco ancora non esiste, quindi $h = \emptyset$. Supponiamo che g_1 scelga per primo: poiché $h = \emptyset$, $A_1(\emptyset) = A_1$, il che implica $\mathcal{S}_1 = A_1$. Dunque g_1 ha due strategie:

$$\mathcal{S}_1 = \{N, S\}$$

le quali possono "costruire" due storie distinte: $h = \{N\}$ oppure $h = \{S\}$. Supponiamo che g_1 scelga N.

Secondo passo: la mossa successiva spetta a g_2, il quale sceglierà la propria azione *sapendo* che g_1 ha optato per N.

Le possibili strategie di g_2 sono quattro, poiché dipendono dalla totalità delle possibili storie (in questo caso, g_2 ha due azioni per ogni possibile storia):

$$\mathcal{S}_2 = \{EE, EW, WE, WW\}$$

(fissata una strategia, ad esempio EW, si legge: "Scegli E se g_1 sceglie N; scegli W se g_1 sceglie S."). Per completezza, rappresentiamo il gioco dinamico in forma strategica.

		g_2			
		EE	EW	WE	WW
g_1	N	$5, 1$	$5, 1$	$0, 0$	$0, 0$
	S	$3, 3$	$1, 5$	$3, 3$	$1, 5$

Tabella 3.1: Rappresentazione in forma strategica dell'esempio NSWE.

Nelle caselle della bimatrice sono rappresentati i payoff dei singoli giocatori secondo le due funzioni di utilità, u_1 e u_2.

A titolo di esempio, supponiamo che venga scelto il profilo $\mathbf{s} = (N, EW)$. Allora:

$$u_1(N, EW) = 5$$
$$u_2(N, EW) = 1$$

La rappresentazione di un gioco dinamico in forma strategica non è molto conveniente: infatti, sembra che nelle caselle ci siano payoff ripetuti, il che potrebbe creare un po' di confusione. Per questo motivo, per un gioco dinamico, è preferibile adottare la rappresentazione in forma estesa.

3.1.1 Equilibrio di Nash nei Giochi Dinamici

In questa sezione applichiamo la definizione generale di EN (2.1) alla categoria di giochi dinamici, adattando la notazione al contesto.

Definizione 3.3. *Un* ***Equilibrio di Nash in strategie pure [EN]*** *per un gioco dinamico è un particolare profilo* $\boldsymbol{s}^*$ *tale per cui*

$$u_i(\boldsymbol{s}^*) \geq u_i(s, \boldsymbol{s}^*_{-i}) \, , \forall \, g_i \in N \, , \forall \, s \in \mathcal{S}_i$$

dove $u_i(s, \boldsymbol{s}^*_{-i}) = u_i(s^*_1, s^*_2, \ldots, s^*_{i-1}, s, s^*_{i+1}, \ldots, s^*_n)$.

In particolare, vediamo che la definizione generale di EN non entra in contraddizione con quanto detto per i giochi statici. Vediamo un interessante risultato, noto come *Teorema di Zermelo-Kuhn*[8].

Teorema 3.1 (Zermelo-Kuhn)**.** *Un gioco finito ad informazione perfetta ha un equilibrio di Nash in strategie pure.*

Secondo il suddetto Teorema, condizione sufficiente (ma non necessaria) per garantire un EN in strategie pure, è che un gioco sia finito, ad informazione perfetta e rappresentabile in forma estesa. Conseguentemente, un gioco dinamico ad informazione perfetta, ammette almeno un EN in strategie pure.

Tale equilibrio può essere trovato attraverso il procedimento noto come **induzione a ritroso**.

3.1.2 Induzione A Ritroso

Per applicare il metodo di **induzione a ritroso** e conseguentemente, trovare un EN in un gioco dinamico ad informazione perfetta, riprendiamo brevemente l'esempio 3.1.

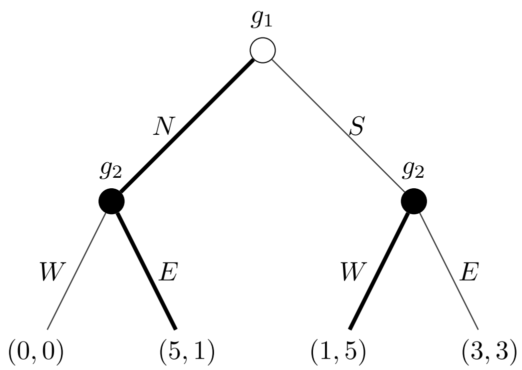

Figura 3.3: Induzione a ritroso nell'esempio NSWE.

In questo gioco, g_2 è a conoscenza del fatto che sarà lui stesso ad avere l'ultima mossa. Per ogni possibile storia, quindi, può predire la sua scelta migliore.

Ad esempio, se la storia è $h = \{S\}$, allora g_2 è incentivato a scegliere W, in quanto questa mossa lo conduce ad un payoff più elevato; per lo stesso motivo, se

g_1 sceglie N, g_2 sceglie E. In maniera del tutto analoga, g_1 si comporta seguendo lo stesso principio: preferisce scegliere N piuttosto che S.

Nella rappresentazione in forma estesa (3.3), i rami che rappresentano le *migliori scelte* di ciascun giocatore (ovvero quelle che lo conducono ad un payoff più elevato), sono evidenziati con una linea più spessa.

Il termine "a ritroso" deriva dal fatto che il metodo si applica inizialmente ai nodi terminali, risalendo l'albero e giungendo infine alla radice.

Procediamo dapprima analizzando le azioni di g_2, calcolandone le migliori scelte e risalendo poi al livello precedente; ripetiamo il metodo in maniera analoga per g_1, giungendo infine alla radice dell'albero.

Il percorso composto dalle scelte migliori che collega la radice ad una foglia, descrive il profilo che costituisce un EN.

Pertanto, il profilo $\mathbf{s}^* = (N, E)$ è un EN del gioco (ed è anche l'unico).

Capitolo 4

Applicazioni

In questo capitolo vedremo alcune situazioni relative al mondo delle Telecomunicazioni, nelle quali è possibile costruire un modello di gioco per studiare una situazione di conflitto e trovarne una soluzione. In particolare, applicheremo i risultati della TdG alle reti di comunicazione wireless [21, 22].

4.1 Routing - Forwarder's Dilemma

Supponiamo che due utenti, p_1 e p_2, vogliano trasmettere un pacchetto dati rispettivamente verso dst_1 e dst_2, utilizzando l'altro utente come "inoltratore". Supponiamo, inoltre, che la comunicazione tra un utente ed il suo rispettivo ricevitore sia possibile solo se l'altro utente accetti di inoltrare i pacchetti.

Lo scopo di ciascun utente è riuscire a stabilire una comunicazione con il proprio ricevitore.

Se p_1 inoltra il pacchetto di p_2, il *costo* d'inoltro è pari ad una quantità fissata C, $0 < C \ll 1$, la quale rappresenta l'energia ed il costo computazionale speso da p_1 per l'azione d'inoltro. Così facendo, p_1 abilita la comunicazione tra p_2 e dst_2, la quale porta p_2 ad ottenere il massimo beneficio. Assumiamo che il gioco sia simmetrico, in modo che il ragionamento si possa applicare a p_2 in maniera perfettamente duale.

Il dilemma è il seguente: p_1 è tentato di scartare il pacchetto che dovrebbe inoltrare, poiché questa scelta eviterebbe un dispendio di risorse; ma se p_2 ragionasse nello stesso modo, allora anche il pacchetto che p_1 vorrebbe inviare a dst_1 verrebbe scartato. Conseguentemente, nessuno trarrebbe alcun beneficio.

Questo semplice modello è utilizzato per studiare l'instradamento di pacchetti in una rete di comunicazione (*routing*), appartenenti alla classe di problemi affrontati al livello 3 della pila protocollare ISO-OSI (*Network Layer*) [24].

Modelliamo tale situazione come un gioco strategico. In particolare, il *Forwarder's Dilemma* è una rivisitazione del *"Dilemma del Prigioniero"*: può essere dunque modellato come un *gioco statico non cooperativo ad informazione completa.*

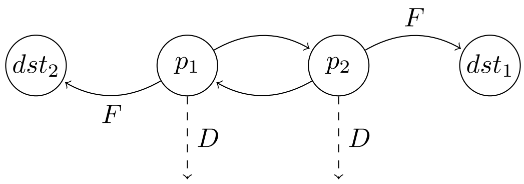

Figura 4.1: Forwarder's Dilemma.

Giocatori: i due utenti, p_1 e p_2;
Strategie: ogni utente può decidere se Inoltrare (*Forward* - F) o Scartare (*Drop* - D) il pacchetto, quindi

$$S_1 = \{F, D\}$$
$$S_2 = \{F, D\}$$

Preferenze: entrambi gli utenti preferiscono risparmiare risorse piuttosto che spenderle per inoltrare un pacchetto che non è il loro.

$$P_1 = \{(D, F), (F, F), (D, D), (F, D)\}$$
$$P_2 = \{(F, D), (F, F), (D, D), (D, F)\}$$

Poichè il gioco è statico, è conveniente rappresentarlo in forma strategica:

		p_2	
		F	D
p_1	F	$1-C, 1-C$	$-C, 1$
	D	$1, -C$	$0, 0$

Tabella 4.1: Forwarder's Dilemma.

Per l'analisi della soluzione, valgono le stesse considerazioni del *"Dilemma del Prigioniero"* (2.1), pertanto l'unico EN in strategie pure è (D, D).

4.2 Medium Access Control - Multiple Access Game

In questo esempio introduciamo il problema dell'accesso al mezzo di trasmissione. La questione è ampiamente studiata in Telecomunicazioni [24], in quanto il mezzo di trasmissione rappresenta l'"oggetto conteso" tra due o più utenti per effettuare una comunicazione. Questo problema appartiene alla classe di quelli affrontati al livello 2 della pila protocollare ISO-OSI (*Data Link Layer*) [24].

Questa situazione è modellata secondo il gioco *"Hawk-Dove"* [17].

Supponiamo che due utenti, p_1 e p_2 vogliano accedere ad un canale di comunicazione wireless condiviso per inviare pacchetti dati ai loro ricevitori, rispettivamente re_1 e re_2. Supponiamo che, in un intervallo di tempo prestabilito, ciascun utente abbia un pacchetto da trasmettere e possa decidere se accedere al canale per spedirlo o attendere. Assumiamo che p_1, p_2, re_1 e re_2 si trovino l'uno alla portata dell'altro, in modo che le trasmissioni interferiscano tra loro.

Se p_1 trasmette il proprio pacchetto, il costo d'invio è pari a C, $0 < C \ll 1$; se p_2 decide di attendere nello stesso intervallo di tempo in cui p_1 trasmette, il pacchetto viene inviato con successo, altrimenti si verifica una collisione. Se la collisione non si presenta, p_1 trae il massimo beneficio dalla trasmissione.

In una rete di comunicazione wireless, questa circostanza si verifica facilmente quando si attua il protocollo *Slotted ALOHA* [24].

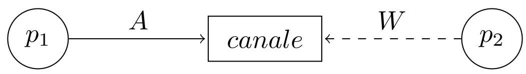

Figura 4.2: Accesso al canale nel Multiple Access Game.

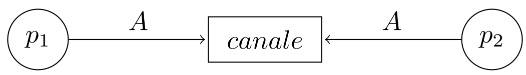

Figura 4.3: Collisione nel Multiple Access Game.

Modelliamo tale situazione come un gioco strategico. In particolare, il *Multiple Access Game* può essere modellato come un *gioco statico non cooperativo ad informazione completa.*

Giocatori: i due utenti, p_1 e p_2;
Strategie: ogni utente può decidere se Accedere (*Access* - A) al mezzo per trasmettere, o Aspettare (*Wait* - W), quindi

$$S_1 = \{A, W\}$$
$$S_2 = \{A, W\}$$

Preferenze: entrambi gli utenti preferiscono accedere subito al mezzo piuttosto che aspettare.

$$P_1 = \{(A,W),(W,W),(W,A),(A,A)\}$$
$$P_2 = \{(W,A),(W,W),(A,W),(A,A)\}$$

Poiché il gioco è statico, è conveniente rappresentarlo in forma strategica:

		p_2 W	p_2 A
p_1	W	$0,0$	$0,1-C$
	A	$1-C,0$	$-C,-C$

Tabella 4.2: Multiple Access Game in forma strategica.

Utilizziamo le BRF per trovare un eventuale EN:

$$B_1(W) = \{A\}$$
$$B_1(A) = \{W\}$$

$$B_2(W) = \{A\}$$
$$B_2(A) = \{W\}$$

Per una migliore visualizzazione, riportiamo i risultati delle BRF nella bimatrice, denotandole con un asterisco:

		p_2 W	p_2 A
p_1	W	$0,0$	$0^*,1-C^*$
	A	$1-C^*,0^*$	$-C,-C$

Tabella 4.3: Multiple Access Game in forma strategica (BRF).

Pertanto, in questo modello esistono due EN in strategie pure: $(0,1-C)$ e $(1-C,0)$. Ciò significa che se un utente decide di trasmettere, l'altro non si pente se sceglie di attendere: difatti, il verificarsi di una collisione non giova a nessuno dei due.

Variante - MAG Dinamico

Supponiamo di avere una situazione nella quale la sequenzialità delle azioni sia necessaria. L'utente p_1 decide per primo.

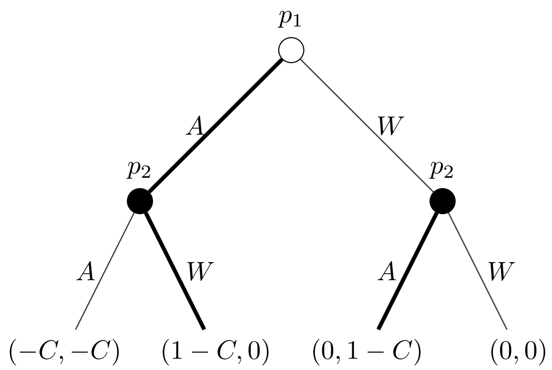

Figura 4.4: Medium Access Game dinamico.

Poichè il gioco è finito, ad informazione perfetta e rappresentabile in forma estesa, vale il Teorema di Zermelo-Kuhn (3.1): il gioco ammette almeno un EN.

Secondo il procedimento di induzione a ritroso (3.1.2), il profilo $\mathbf{s}^* = (A, W)$ è un EN.

4.3 Power Control - Jamming Game

In una rete di comunicazione, è possibile che due o più utenti interferiscano tra loro accedendo contemporaneamente allo stesso canale. Questo esempio fa riferimento alle tematiche affrontate al livello 1 della pila protocollare ISO-OSI (*Physical Layer*) [24].

Supponiamo che l'utente p_1 voglia inviare un pacchetto dati al ricevitore re_1 in ogni intervallo temporale. Assumiamo che il mezzo di trasmissione wireless sia diviso in due canali, x ed y, secondo il principio FDMA (*Frequency Division Multiple Access*) [24].

L'obiettivo dell'utente malintenzionato p_2 è quello di prevenire una corretta trasmissione da parte di p_1, trasmettendo allo stesso istante e nello stesso canale. Nelle comunicazioni wireless, questo fenomeno viene chiamato *jamming* (disturbo).

L'obiettivo di p_1 è quello di riuscire a trasmettere un pacchetto con successo, nonostante la presenza di p_2.

Supponiamo che p_1 e re_1 siano sincronizzati, il che significa che re_1 è abilitato a ricevere sempre un pacchetto, a meno che p_1 non sia disturbato da p_2.

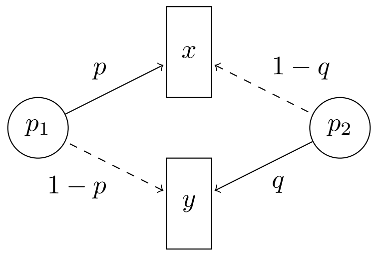

Figura 4.5: Jamming Game.

Modelliamo tale situazione come un gioco strategico. In particolare, il *Jamming Game* è una rivisitazione del gioco *"Matching Pennies"*: può essere dunque modellato come un *gioco statico non cooperativo ad informazione imperfetta.*

Giocatori: i due utenti, p_1 e p_2;
Strategie: p_1 può decidere se trasmettere sul canale x con probabilità p oppure sul canale y con probabilità $1-p$; analogamente, p_2 può decidere se disturbare sul canale x con probabilità q oppure sul canale y con probabilità $1-q$.

$$\Sigma_1 = \{p, 1-p\}$$
$$\Sigma_2 = \{q, 1-q\}$$

Rappresentiamo il gioco in forma strategica:

		p_2	
		x	y
p_1	x	$-1, 1$	$1, -1$
	y	$1, -1$	$-1, 1$

Tabella 4.4: Jamming Game.

Calcoliamo i payoff attesi, u_1 e u_2:

$$u_1(p, q) = -4pq + 2p + 2q - 1$$
$$u_2(p, q) = 4pq - 2p - 2q + 1$$

Seguendo lo stesso ragionamento per il gioco "Matching Pennies" (2.4), l'unico punto critico di u_1 è situato in $(p, q) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ e

$$u_1\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = 0$$

Argomentazione analoga per p_2.

Pertanto, l'unico EN in strategie miste è il profilo $\boldsymbol{\sigma}^* = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

Conclusioni

La TdG è una disciplina decisamente affascinante. In questa trattazione abbiamo visto solo la “punta dell'iceberg”, semplificandone alcuni concetti senza però perdere la generalità che questa teoria ha da offrire. La popolarità della TdG nel campo delle Telecomunicazioni (e non solo), la rende un utile strumento per studiare quelli che vengono chiamati “trade-off ingegneristici” ovvero particolari situazioni di conflitto nelle quali è necessario adottare un compromesso. Grazie alla TdG, in via del tutto teorica, è possibile trovare il compromesso ottimo tra due o più variabili in gioco. Ad esempio, in [24], nella fase di progettazione di un quantizzatore uniforme, potrebbe essere lecito chiedersi: *“Dato uno specifico SNR, qual è il miglior compromesso tra la tensione di saturazione, v_{sat}, ed il numero di bit, b?”*

Il campo di applicazione è vasto e questo rende la teoria un utile strumento per approcciarsi a problemi di tipo decisionale. Tuttavia, questa disciplina non rappresenta lo strumento universale per eccellenza, proprio perché fa uso di ipotesi restrittive che ne limitano il campo di applicabilità.

Sviluppi futuri

L'attenzione rivolta alla TdG sta crescendo in maniera esponenziale, in particolare nelle Telecomunicazioni. L'interesse a risolvere problemi di natura conflittuale, porta la TdG ad occupare uno dei ruoli più importanti nello studio di diverse problematiche, come ad esempio il *routing*, il QoS (*Quality of Service*) ed il TCP *Congestion Control* [24]. Altre interessanti applicazioni si possono trovare in [23].

Citiamo alcune questioni emergenti, in cui la TdG potrebbe essere un utile strumento per approcciarsi al problema:

- **Reti Intelligenti (*Cognitive Radio*):** le reti “intelligenti” sono particolari reti di comunicazione atte a far fronte al problema dell'inefficienza dello spettro wireless. In questo particolare contesto, è necessario che i nodi della rete si adattino dinamicamente all'ambiente, apprendendo dagli esiti delle decisioni passate [26]. Nelle future reti wireless ci si aspetta un adattamento più sofisticato di quello attuale, integrando l'abilità di apprendimento, in modo da risolvere problemi complessi come l'utilizzo efficiente dello spettro wireless [27].

- **Cooperazione nei Sistemi Wireless:** nelle reti di comunicazione wireless, le comunicazioni cooperative trovano un notevole interesse. La TdG potrebbe essere un valido ausilio per comprendere al meglio alcune tipologie di problemi che coinvolgono *cooperazione* e *negoziazione*, come il problema dell'accesso dinamico nello spettro wireless [28]. Una soluzione a questo problema potrebbe essere quella di concedere agli utenti il potere di negoziazione, in modo da utilizzare lo spettro in maniera dinamica, basandosi sull'effettiva disponibilità del canale [29].

Elenco delle tabelle

Elenco delle figure

Bibliografia

[1] Émile Borel, 1921. *La théorie du jeu et les equations intégrales à noyau symétrique*, Comptes Rendus Hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences (Paris) 173, 1304-1308.

[2] John von Neumann, 1928. *Zur Theorie der Gesellschaftsspiele*, Mathematische Annalen 100, 295-320.

[3] John von Neumann, Oskar Morgenstern, 1944. *Theory of games and economic behavior*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey.

[4] John F. Nash, 1950. *Equilibrium points in N-person games*, Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America 36, 48-49.

[5] John F. Nash, 1950. *Non-cooperative games*, Doctoral dissertation, Princeton University, Princeton, New Jersey.

[6] John F. Nash, 1950. *The bargaining problem*, Econometrica 18, 155-162.

[7] John F. Nash, 1951. *Non-cooperative games*, Annals of Mathematics 54, 286-295.

[8] E. Zermelo 1913. *Uber eine Anwendung der Mengenlehre auf die Theorie des Schachspiels*, Proc. Fifth Congress Mathematicians, Cambridge University Press 1913, 501-504

[9] Steven J. Brams, Peter C. Fishburn, 1978. *Approval voting*, American Political Science Review 72, 831-847.

[10] Roger Brown, 1986. *Social psychology, the second edition*, Free Press, New York.

[11] Jane H. Brockmann, Alan Grafen, Richard Dawkins, 1979. *Evolutionarily stable nesting strategy in a digger wasp*, Journal of Theoretical Biology 77, 473-496.

[12] Michael G. Bulmer, 1994. *Theoretical evolutionary ecology*, Sunderland, MA: Sinauer Associates.

[13] John Bryant, 1994. *Coordination theory, the stag hunt and macroeconomics*, Problems of coordination in economic activity, James W. Friedman ed., 207-225, Boston, MA: Kluwer.

[14] Fudenberg, Drew, David K. Levine, 1998. *The theory of learning in games*, Cambridge, MA: MIT Press.

[15] M. Allais, 1953. *Le comportement de l'homme rationnel devant de risque: Critique des postulats et axiomes de l'ecole americaine*, Econometrica 21, 503-546.

[16] D. Kahneman, A. Tversky, 1979. *Prospect theory: An analysis of decision under risk*, Econometrica 47, 263-291.

[17] Martin J. Osborne, 2004. *An Introduction to Game Theory*, Oxford University Press, New York.

[18] Robert Gibbons, 2010. *Teoria dei Giochi*, il Mulino, Bologna.

[19] A. Agnetis. *Introduzione alla Teoria dei Giochi*, Dipartimento di Ingegneria dell'Informazione, Università di Siena.

[20] Wikipedia. *Teoria dei Giochi*, `http://it.wikipedia.org/Teoria_dei_giochi`

[21] Allen B. MacKenzie, Luiz A. DaSilva, 2006. *Game Theory for Wireless Engineers*, Morgan and Claypool Publishers, USA.

[22] Mark Felegyhazi, Jean-Pierre Hubaux, 2006. *Game Theory in Wireless Networks: A Tutorial*, EPFL, Switzerland.

[23] V. Srivastava, J. Neel, A. B. MacKenzie, R. Menon, L. A. DaSilva, J. E. Hicks, J. H. Reed, R. P. Gilles, 2005. *Using game theory to analyze wireless ad hoc networks*, IEEE Communication Surveys and Tutorials.

[24] Nevio Benvenuto, Michele Zorzi, 2010. *Principles of Communications Networks and Systems*, John Wiley & Sons Ltd., GB.

[25] Dimitri P. Bertsekas, John N. Tsitsiklis, 2008. *Introduction To Probability, Second Edition*, Athena Scientific, Nashua.

[26] J. Mitola III, 2006. *Cognitive Radio Architecture: The Engineering Foundations of Radio XML*, John Wiley & Sons Ltd., GB.

[27] L. Badia, M. Zorzi, 2008. *Dynamic utility and price based radio resource management for rate adaptive traffic*, ACM/Baltzer/Wiley Wireless Networks, October 2008.
`http://www.dei.unipd.it/~badia/papers/2007_WINET_utibww.pdf`

[28] L. Badia, M. Levorato, F. Librino, M. Zorzi, 2010. *Cooperation techniques for wireless systems from networking perspective*, IEEE Wireless Communications Magazine, April 2010.
`http://www.dei.unipd.it/~badia/papers/2010_WComm_proof_BADIA_LAYOUT.pdf`

[29] E. A. Jorswieck, L. Badia, T. Fahldieck, D. Gesbert, S. Gustafsson, M. Haardt, Ka-Ming Ho, E. Karipidis, A. Kortke, E. G. Larsson, H. Mark, M. Nawrocki, R. Piesiewicz, F. Römer, M. Schubert, J. Sykora, P. Trommelen, B. van den Ende, M. Zorzi, 2010. *Resource Sharing in Wireless Networks: The SAPHYRE Approach*, Future Network and Mobile Summit, 2010.

Ringraziamenti

Desidero ringraziare tutti coloro che hanno contribuito alla realizzazione di questo elaborato ed in particolare il prof. Leonardo Badia per la cortese disponibilità.

Grazie ai miei genitori per avermi concesso una seconda opportunità, per la comprensione, la presenza ed il costante supporto.

Grazie ai miei nonni per non aver mai smesso di credere in me.

Grazie ad Elena per ogni parola, per aver illuminato la mia strada, per avermi preso per mano, per l'inesauribile pazienza ed il preziosissimo aiuto offertomi in ogni circostanza.

Grazie infine a chi, in questi anni, ha saputo starmi accanto senza giudicare, a chi mi ha permesso di imparare dai propri errori e a chi, nonostante tutto, continua a volermi bene.