

Università degli Studi di Padova

Dipartimento di Fisica e Astronomia
"Galileo Galilei"

Corso di Laurea Triennale in Astronomia

Anno accademico 2016/2017

Inflazione assistita

Candidata: Serena Giardiello Matricola: 1099019

Relatore: Prof. Sabino Matarrese

Abstract

In questo elaborato si presentano dettagli della teoria dell'Inflazione cosmologica: da una breve presentazione iniziale di ciò che conosciamo dell'Universo primordiale, si passa ad una descrizione dinamica dell'Universo, sottolineando i problemi che insorgono se si volessero spiegare alcune osservazioni con la sola teoria del Big Bang caldo. Si presenta quindi la dinamica dell'Inflazione ed in particolare il modello di Inflazione assistita.

Nelle parti generali della tesi sono stati utilizzati gli articoli di review [1] e [2].

Indice

1	Introduzione	3
2	Metrica e dinamica dell'Universo	5
2.1	Il tempo conforme	6
2.2	L'orizzonte delle particelle e degli eventi	7
2.3	Equazioni dinamiche	7
3	Problemi con il modello del Big Bang	11
3.1	Problema dell'orizzonte	11
3.2	Problema della piattezza	12
3.3	Il problema dei relitti cosmici	13
4	L'inflazione	14
4.1	Soluzione del problema della piattezza	15
4.2	Soluzione del problema dell'omogeneità	16
4.3	Soluzione del problema dei relitti cosmici	17
4.4	Condizioni per l'Inflazione	17
4.5	Il diagramma conforme dell'Inflazione	18
4.6	Modellare l'Inflazione	20
4.7	L'approssimazione di Slow-Roll	21
4.7.1	Relazione tra Inflazione ed approssimazione di Slow-Roll	22
4.8	Durata dell'Inflazione	23
4.9	Il reheating	23
4.10	Perturbazioni di densità	24
5	Il modello di Inflazione assistita	26
5.1	Dinamica	26
5.2	Calcolo dell'indice spettrale n	28
5.3	Potenziali con diverse pendenze	29
5.4	Conclusioni	31
	Bibliografia	32

1 Introduzione

In base alle energie accessibili attualmente alla fisica delle particelle ($\sim 1 \text{ TeV}$) si può descrivere con efficacia la storia dell'Universo primordiale a partire dai primi 10^{-10} secondi:

- A 10^{-10} s , $\sim 100 \text{ GeV}$, la simmetria tra forza elettromagnetica e quella debole si rompe
- A 10^{-4} s si formano gli adroni dal confinamento dei quark e dei gluoni
- Al decrescere della temperatura le annichilazioni tra le coppie di particelle più pesanti prevale sulla loro creazione, lasciando un residuo di protoni e neutroni mantenuti in equilibrio dalle interazioni elettromagnetiche
- Ad 1 s prima i neutrini si disaccoppiano dalla materia, poi si annichilano elettroni e positroni. Sopravvive solo una parte su un miliardo di materia dall'asimmetria iniziale tra materia e antimateria. Il restante fluido di barioni e fotoni è in equilibrio
- A 3 minuti dal Big Bang, cominciano le reazioni di nucleosintesi che portano alla formazione dei nuclei di H, He e Li primordiali
- A 10^4 anni c'è l'equivalenza tra radiazione e materia
- A 380.000 anni c'è il disaccoppiamento tra fotoni e materia nel momento della ricombinazione degli atomi di idrogeno: si passa da un plasma ad un gas neutro. La radiazione emessa rispecchia il perfetto equilibrio termodinamico tra materia e radiazione delle epoche precedenti, generando lo spettro di corpo nero della Cosmic Microwave Background CMB
- Dalle iniziali fluttuazioni di densità della materia (che si rispecchiano in fluttuazioni di temperatura della CMB), si generano per collasso gravitazionale le stelle e le galassie, che formano le strutture su grande scala attualmente osservate

La teoria del Big Bang caldo riesce a spiegare molti aspetti dell'Universo: la sua espansione (necessaria per la correlazione redshift-distanza scoperta da Hubble); la sua età (in accordo con i dati osservativi); l'abbondanza di elementi leggeri (H, He, Li) tramite la nucleosintesi primordiale; l'esistenza di un fondo di radiazione come la CMB; la formazione di strutture a partire da disomogeneità primordiali tramite collasso gravitazionale. Nonostante ciò, rimangono irrisolti problemi

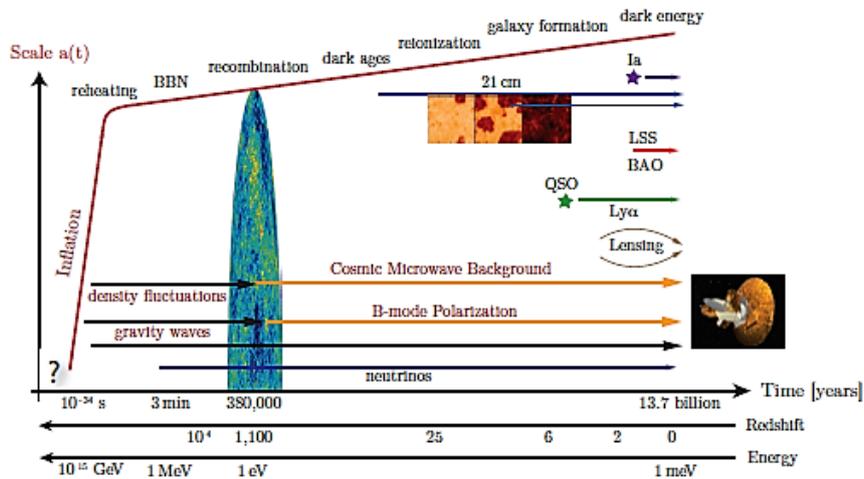


Figura 1: Storia schematica dell'Universo che mostra anche eventi precedenti ai 10^{-10}_s

fondamentali, tra cui la spiegazione dell'isotropia della CMB e allo stesso tempo delle sue (seppur piccole) fluttuazioni di temperatura, per cui è stata sviluppata la teoria dell'inflazione. L'inflazione è una fase di espansione accelerata dell'Universo primordiale, che potrebbe essere avvenuta 10^{-34}_s dopo la singolarità del Big Bang. L'isotropia osservata viene spiegata con questa espansione: le fluttuazioni quantistiche microscopiche vengono stirate da essa, uscendo dall'orizzonte fisico a quel tempo cosmico e rimanendo congelate (poiché al di fuori dell'orizzonte fisico non ci può essere un rapporto causa-effetto). Poco tempo prima del disaccoppiamento dei fotoni dalla materia (che genera la CMB) queste fluttuazioni rientrano nello stesso orizzonte, durante la normale espansione prevista dal modello del Big Bang, e possono di nuovo essere influenzate dalla fisica causale e generare le anisotropie osservate.

L'inflazione assistita [3] è uno dei tanti modelli inflazionari che considera la presenza di più campi scalari per sostenere l'espansione dell'Universo.

2 Metrica e dinamica dell'Universo

Da numerose osservazioni, tra cui anche lo studio della CMB, l'Universo appare omogeneo ed isotropo su grande scala (oltre le centinaia di Mpc). L'isotropia è l'invarianza per rotazioni spaziali, l'omogeneità è l'invarianza per traslazioni, quindi affermare che l'Universo possieda entrambe le proprietà significa assumere che risulti uguale per qualsiasi osservatore fondamentale (un osservatore solidale con il fluido cosmico) che lo osservi ad un determinato tempo cosmico. Questo è il Principio Cosmologico. Assumendo solo questo principio, la metrica per descrivere un Universo in espansione è quella di Friedmann-Robertson-Walker ¹ (FRW):

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \left(\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \right) \quad (1)$$

dove k è la costante di curvatura dell'Universo (la coordinata r è riscalata in modo tale che k possa essere uguale a 0, 1 o -1 a seconda che lo spazio sia piatto, a curvatura positiva o negativa), mentre $a(t)$ è il fattore di scala dell'Universo, che indica come variano le distanze fisiche con l'espansione: $R = a(t) \times r$ (dove R è la distanza fisica e r la distanza comovente, una distanza fissa del sistema solidale al fluido cosmico).

La metrica può essere riscritta con un cambio di coordinate:

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \left(d\chi^2 + \Phi_k(\chi^2)(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \right) \quad (2)$$

dove

$$r^2 = \Phi_k(\chi^2) \equiv \begin{cases} \sinh^2(\chi) & k = -1 \\ \chi^2 & k = 0 \\ \sin^2(\chi) & k = 1 \end{cases} \quad (3)$$

Una fondamentale quantità è il parametro di Hubble

$$H \equiv \frac{\dot{a}}{a} \quad (4)$$

(con \dot{a} che rappresenta la derivata rispetto al tempo) che ha le dimensioni dell'inverso di un tempo e rappresenta il tasso di espansione dell'Universo. Il tempo scala caratteristico di un Universo omogeneo sarà dunque $t \sim H^{-1}$, e la sua lunghezza caratteristica $d \sim H^{-1}$ ($c = 1$).

¹Si assumono c e \hbar uguali ad uno, e la massa di Planck m_{Pl} al posto della costante di gravitazione G : $G \equiv m_{Pl}^{-2}$.

2.1 Il tempo conforme

Si definisce il tempo conforme come

$$\tau = \int \frac{dt}{a(t)} \quad (5)$$

che diventa molto utile per riscrivere la FRW:

$$ds^2 = a^2(t) \left[-d\tau^2 + d\chi^2 + \Phi_k(\chi^2)(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \right] \quad (6)$$

In questo modo, considerando la propagazione radiale di un fotone ($d\theta = d\phi = 0$), si ottiene

$$ds^2 = a^2(t)(-d\tau^2 + d\chi^2) \quad (7)$$

e poiché per un fotone $ds^2 = 0$, il suo moto sarà descritto dalla geodetica $\chi(\tau) = \pm\tau + \text{cost.}$ e il cono luce espresso nel tempo conforme risulta piatto, e non curvo come nel caso in cui si utilizzi il tempo fisico t (influenzato dal fattore di scala $a(t)$).

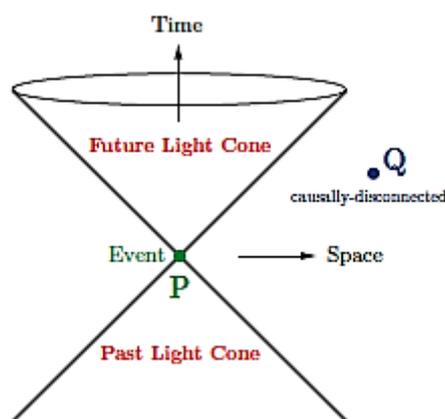


Figura 2: Cono luce descritto con tempo conforme. Le geodetiche nulle, date da $ds^2 = 0$, formano il cono luce, inclinato di 45° , e rappresentano le traiettorie dei fotoni. Gli eventi collegati causalmente sono quelli all'interno del cono luce, descritti da geodetiche di tipo tempo $ds^2 < 0$.

2.2 L'orizzonte delle particelle e degli eventi

L'orizzonte delle particelle (comovente) è la massima distanza comovente che la luce può attraversare tra un tempo iniziale t_i ed uno t :

$$\chi_p(\tau) = \tau - \tau_i = \int_{t_i}^t \frac{dt}{a(t)}. \quad (8)$$

Si associa spesso $t_i \equiv 0$, che sarebbe l'istante del Big Bang, dato dalla singolarità $a(t_i \equiv 0) \equiv 0$. La dimensione fisica dell'orizzonte è $d_p(t) = a(t) \chi_p$, e rappresenta la distanza massima su cui un evento può essere causalmente collegato ad uno del passato.

Si definisce invece orizzonte degli eventi la distanza dalla quale un segnale inviato nel passato non potrà più essere ricevuto nel futuro (per cui non c'è più contatto causale):

$$\chi > \chi_e = \int_{\tau}^{\tau_{max}} d\tau = \tau_{max} - \tau \quad (9)$$

con distanza fisica $d_e(t) = a(t) \chi_e$.

2.3 Equazioni dinamiche

Le equazioni dinamiche dell'Universo si ricavano a partire dalle equazione di Einstein:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = 8\pi G T_{\mu\nu} \quad (10)$$

dove $g_{\mu\nu}$ è il tensore metrico, $R_{\mu\nu}$ il tensore di Ricci, che include derivate del tensore metrico, ed R è una sua contrazione. Il membro di sinistra rappresenta quindi la curvatura dello spazio. Il termine $T_{\mu\nu}$ rappresenta invece il tensore energia-impulso, che dà informazione sulle sorgenti della curvatura stessa: le densità di materia e di energia, più i loro contributi di pressione.

Inserendo il tensore metrico della FRW nelle equazioni di Einstein, si ottengono le due equazioni di Friedmann:

$$H^2 = \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi}{3m_{Pl}^2} \rho - \frac{k}{a^2} \quad (11)$$

$$\dot{H} + H^2 = \frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi}{3m_{Pl}^2} (\rho + 3p). \quad (12)$$

La prima rappresenta un analogo dell'equazione di conservazione dell'energia mentre la seconda un'equazione dinamica vera e propria, un'estensione della legge di

gravitazione di Newton in uno spazio curvo. Si nota che per la materia ordinaria, per cui $p+3\rho > 0$, si avrebbe espansione ($\dot{a} > 0$) ma decelerata ($\ddot{a} < 0$), implicando la presenza della singolarità del Big Bang nel passato: $a(t \equiv 0) \equiv 0$.

Dalla combinazione delle due equazioni di Friedmann, si ottiene l'equazione di continuità dei fluidi

$$\dot{\rho} + 3H(\rho + p) = 0 \quad (13)$$

dove il contributo di $3H\rho$ rappresenta la riduzione della pressione al crescere del volume con l'espansione, mentre $3Hp$ la riduzione di energia dovuta al lavoro termodinamico compiuto nell'espansione stessa. La stessa equazione può essere riscritta:

$$\frac{d \ln \rho}{d \ln a} = -3(1 + w) \quad (14)$$

definendo il parametro $w = \frac{p}{\rho}$. Integrando la (14), per w costante, si ottiene

$$\rho \propto a^{-3(1+w)}. \quad (15)$$

Ponendo $k = 0$, e inserendo nella (11), si ottiene anche l'evoluzione temporale di $a(t)$:

$$a(t) \propto \begin{cases} t^{\frac{2}{3(1+w)}} & w \neq -1 \\ e^{Ht} & w = -1 \end{cases} \quad (16)$$

che varia a seconda dell'equazione di stato considerata:

Tabella 1: La prima equazione di stato è per un Universo dominato da materia non relativistica, per cui $p = 0$; la seconda per un Universo dominato da radiazione $p = \frac{\rho}{3}$; l'ultima per un Universo dominato dalla costante cosmologica Λ , per cui si ha pressione negativa $p = -\rho$ ed espansione accelerata $\ddot{a} > 0$ (si ha anche $\dot{\rho} = 0$ dall'equazione dei fluidi).

MD	$w = 0$	$\rho \propto a^{-3}$	$a(t) \propto t^{2/3}$	$a(\tau) \propto \tau^2$	$\tau_i = 0$
RD	$w = \frac{1}{3}$	$\rho \propto a^{-4}$	$a(t) \propto t^{1/2}$	$a(\tau) \propto \tau$	$\tau_i = 0$
Λ	$w = -1$	$\rho \propto a^0$	$a(t) \propto e^{Ht}$	$a(\tau) \propto -\tau^{-1}$	$\tau_i \propto -\infty$

Se $k = 0$, per ogni $H(t)$ la densità sarà uguale ad una densità critica $\rho = \rho_c = \frac{3m_{Pl}^2 H^2}{8\pi}$, per cui si può definire il parametro di densità:

$$\Omega(t) \equiv \frac{\rho(t)}{\rho_c} \quad (17)$$

che può riferirsi ad una delle componenti dell'Universo o alla densità totale. Il parametro così definito è uguale a

$$\Omega(t) = \frac{8\pi\rho(t)}{3m_{Pl}^2 H(t)^2} \quad (18)$$

che rappresenta il rapporto tra il contributo di energia potenziale di autogravità dell'Universo e quello di espansione: se $\Omega(t) > 1$ prevale la componente di autogravità (infatti si avrebbe $\rho(t) > \rho_c$) e l'Universo sarebbe a curvatura positiva, quindi chiuso², perché avrebbe più densità di quella richiesta per un Universo piatto.

Le misure [5] dei parametri di densità delle varie componenti dell'Universo mostrano al tempo cosmico attuale che

$$\Omega_b = 0.04 \quad \Omega_{dm} = 0.31 \quad \Omega_\Lambda = 0.69 \quad (19)$$

dove Ω_b è il contributo di materia barionica, la materia condensata in stelle e galassie, Ω_{dm} è quello della materia oscura (predominante rispetto alla materia ordinaria), e Ω_Λ quello dell'energia oscura, che prevale sugli altri termini e determina l'espansione accelerata osservata nell'Universo attuale. Dalla somma di tutti i parametri, si vede che al tempo cosmico attuale $\Omega(t_0) \sim 1$, e ciò comporta una quasi piatezza dello spazio, come risulta evidente riscrivendo l'equazione di Friedmann (11) in funzione di $\Omega(a)$:

$$1 - \Omega(a) = \frac{-k}{(aH)^2}. \quad (20)$$

Il problema di come si sia ottenuta questa piatezza è un'altra questione irrisolta della teoria del Big Bang, e spiegata da quella dell'inflazione.

Il redshift cosmologico è collegato all'espansione dell'Universo tramite il fattore di scala. Il rapporto tra frequenza di emissione ad un certo t e frequenza osservata è:

$$\frac{d\nu_e}{d\nu_o} = 1 + z = \frac{a(t_0)}{a(t_e)}. \quad (21)$$

²La chiusura dell'Universo per $k = 1$ risulta evidente dall'equazione (3): se $r^2 = \sin^2(\chi)$, allora la coordinata comovente r ha valori finiti, quindi il volume comovente è finito

Dall'evoluzione della frequenza con l'espansione si ricava l'evoluzione della temperatura della radiazione, imponendo ad esempio che l'emissione della CMB mantenga la forma di corpo nero ad ogni tempo cosmico. Si ottiene così

$$T \propto \frac{1}{a(t)}. \quad (22)$$

Nell'era della radiazione (in cui è predominante la densità di radiazione su quella di materia) la relazione tra tempo e temperatura si ricava sapendo che $a(t) \propto t^{1/2}$, ottenendo quindi:

$$t \propto \left(\frac{10^{10} K}{T} \right)^2, \quad (23)$$

da cui si ricavano gli istanti di tempo dell'Universo primordiale corrispondenti alle temperature (e alle energie) considerate.

3 Problemi con il modello del Big Bang

Oltre ai problemi già citati dell'isotropia osservata della CMB, delle sue anisotropie e della piattezza dell'Universo, la teoria del Big Bang non prevede una spiegazione neanche per la diluizione di relitti cosmici primordiali la cui creazione è prevista dalla teoria delle particelle ma di cui non abbiamo osservazioni.

3.1 Problema dell'orizzonte

L'orizzonte comovente delle particelle può essere riscritto in funzione del raggio di Hubble comovente $(aH)^{-1}$:

$$\chi_p = \tau = \int_0^t \frac{dt'}{a(t')} = \int_0^a \frac{da}{Ha^2} = \int_0^a \frac{d \ln a}{Ha}. \quad (24)$$

Poiché in un Universo dominato da un fluido di equazione di stato w si ha:

$$(aH)^{-1} = H_0^{-1} a^{\frac{1}{2}(1+3w)} \quad (25)$$

e a seconda del segno di $(1 + 3w)$ si ha crescita o decrescita del raggio di Hubble. Nell'espansione convenzionale prevista dal modello del Big Bang, $w \gtrsim 0$, quindi $(aH)^{-1}$ cresce e l'orizzonte comovente, che rappresenta la distanza su cui ci può essere contatto causale tra due eventi:

$$\tau \propto a^{\frac{1}{2}(1+3w)} \quad (26)$$

cresce con il tempo. Se si considera in particolare il caso di Universo dominato da materia e da radiazione:

$$\tau \propto \begin{cases} a & RD (w = \frac{1}{3}) \\ a^{1/2} & MD (w = 0) \end{cases} \quad (27)$$

si può predire la dimensione del raggio di Hubble al tempo del disaccoppiamento (circa 380.000 anni dopo il Big Bang), che sarà sicuramente minore della dimensione del raggio di Hubble al tempo cosmico attuale.

Da questa stima si può ottenere la scala angolare su cui si dovrebbe vedere la CMB isotropa: le regioni isotrope non dovrebbero superare la scala di 2 gradi. Ma, al contrario, è molto più ampia la scala su cui si osserva l'isotropia del fondo cosmico, e rimane irrisolto il problema di come regioni che a priori non sarebbero potute essere in contatto causale (poiché separate da scale angolari maggiori rispetto alla dimensione stimata del raggio di Hubble a quell'epoca) siano potute entrare in equilibrio termodinamico.

Allo stesso modo, le anisotropie osservate sono su scale troppo grandi (da qualche grado in sù) per essere state create dal Big Bang al disaccoppiamento, poiché le dimensioni del raggio di Hubble al disaccoppiamento sottendono solo circa un grado.

3.2 Problema della piattezza

L'equazione (20), che lega la piattezza alla differenza $|1 - \Omega(a)|$, dipende sempre dal raggio comovente di Hubble:

$$|1 - \Omega(a)| = \frac{|k|}{(aH)^2}. \quad (28)$$

che si sa decrescere con il tempo cosmico. Allora la differenza $|1 - \Omega(a)|$ può solo crescere, allontanando sempre di più il parametro di densità da 1, quindi rendendo l'Universo sempre meno piatto. Confrontando ciò con la quasi piattezza osservata al tempo cosmico attuale, si può dedurre che nei primi istanti di vita dell'Universo il parametro stesso fosse molto più vicino ad uno che oggi. Considerando gli andamenti del fattore di scala $a(t)$ nel caso di $k = 0$ (Ω molto vicino ad uno) per le varie equazioni di stato (tabella 1), e inserendo nella (25), si ricava l'evoluzione della differenza con il tempo:

$$|1 - \Omega| \propto t^{2/3} \quad \text{MD} \quad (29)$$

$$|1 - \Omega| \propto t \quad \text{RD} \quad (30)$$

e si possono calcolare i valori per i vari tempi cosmici, ad esempio:

$$|1 - \Omega| < \mathcal{O}(10^{-16}) \quad \text{nucleosintesi } (t \sim 1s). \quad (31)$$

Il valore $\Omega = 1$ è un punto di equilibrio instabile, poiché differenziando l'equazione (25) e inserendo l'equazione di continuità (14) si ottiene:

$$\frac{d\Omega}{d \ln a} = (1 + 3w)\Omega(\Omega - 1) \quad (32)$$

e nel caso in cui $1 + 3w > 0$ si ha $\frac{d|\Omega-1|}{d \ln a} > 0$.

Ciò vuol dire che per ottenere la piattezza attualmente osservata c'è bisogno di un'unica precisa configurazione iniziale, quella in cui il parametro di densità iniziale sia un $\mathcal{O}(1)$, e che quindi la densità iniziale non sia né maggiore né minore, altrimenti l'Universo o si espanderebbe troppo velocemente, diventando praticamente vuoto, o ricollasserebbe subito. La condizione diventa ancora più pesante se si considera che la velocità iniziale del fluido cosmico deve essere esattamente quella richiesta in ogni punto, quindi anche tra regioni causalmente disconnesse.

3.3 Il problema dei relitti cosmici

Si prevede che siano stati creati nei primi istanti di vita dell'Universo delle particelle e dei residui non attualmente osservati, come i monopoli magnetici. Una buona teoria dovrebbe conciliarsi con queste previsioni della teoria delle particelle e spiegare quindi come questi relitti siano scomparsi. La teoria del Big Bang però prevede che i relitti cosmici siano diluiti dall'espansione più lentamente della radiazione (la densità delle particelle va come a^{-3} , quella della radiazione come a^{-4} per effetto del redshift cosmologico), quindi dovrebbero essere dominanti nell'Universo, contrariamente a quello che si osserva.

4 L'inflazione

Sia il problema dell'orizzonte che quello della piattezza sono generati dal fatto che il raggio di Hubble comovente $(aH)^{-1}$ può solo crescere nel modello del Big Bang. La soluzione prevista dalla teoria inflazionaria è che ci sia quindi un periodo sufficientemente vicino al Big Bang in cui il raggio di Hubble decresce.

Il raggio di Hubble comovente $(aH)^{-1}$ rappresenta fisicamente la distanza alla quale le particelle sono in contatto causale in un determinato tempo cosmico, mentre l'orizzonte comovente delle particelle ne è l'integrale, quindi rappresenta la distanza alla quale le particelle possono comunicare da un tempo iniziale ad uno finale, ad esempio dal Big Bang fino al tempo attuale

$$\tau = \int_0^t \frac{dt'}{a(t')} = \int_0^a \frac{d \ln a'}{Ha'}. \quad (33)$$

Se si considera una distanza superiore all'orizzonte comovente, non ci potrà essere mai stata comunicazione tra particelle diverse (quindi non potranno aver raggiunto l'equilibrio termodinamico su quella distanza in nessun tempo cosmico), mentre il raggio di Hubble di un certo tempo cosmico potrebbe essere maggiore di quello ad un tempo diverso, per cui le particelle possono entrare in contatto su distanze differenti ad istanti diversi.

Quello che prevede l'inflazione è proprio che in tempi molto remoti il raggio di Hubble fosse molto più grande di quello attuale e si sia poi ridotto; in questo modo, la regione di Universo visibile prima dell'inflazione risultava molto più grande di quella attuale. Ciò corrisponde ad un τ dominato soprattutto dal raggio di Hubble primordiale.

Alla fine dell'inflazione il raggio di Hubble deve ricominciare a crescere per rientrare nelle condizioni dinamiche della teoria del Big Bang, ma sarà comunque all'interno di una regione resa omogenea dall'equilibrio termodinamico generatosi tra le particelle sul raggio di Hubble iniziale, molto più grande di quello attuale.

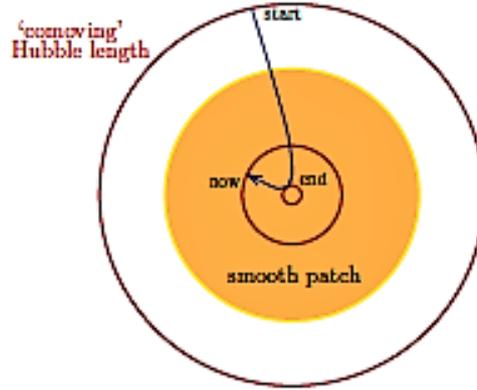


Figura 3: Evoluzione del raggio di Hubble: forte decrescita con l'inflazione e dopo la sua fine ricrescita fino al raggio attuale. La sua dimensione attuale cade entro una regione omogenea.

4.1 Soluzione del problema della piattezza

Riproponendo l'equazione di Friedmann scritta rispetto al parametro di densità:

$$|1 - \Omega(a)| = \frac{|k|}{(aH)^2}. \quad (34)$$

il problema della piattezza è risolto praticamente per definizione: al decrescere del raggio di Hubble, il parametro $\Omega(a)$ è spinto sempre di più verso 1. L'inflazione verrà modellata in modo tale che questa differenza diventi sufficientemente piccola, così che una successiva fase di riespansione di $(aH)^{-1}$ non vada ad aumentare troppo la differenza e $\Omega(a) \simeq 1$ fino al presente. In questo modo $k \simeq 0$, che, nel caso più generale in cui diventi rilevante il contributo della costante cosmologica Λ , porta a richiedere che

$$|1 - \Omega - \Omega_\Lambda| = \frac{|k|}{(aH)^2} \quad (35)$$

quindi che $\Omega + \Omega_\Lambda \simeq 1$. Più che richiedere che la densità di materia sia uguale a quella critica, si richiede quindi che tutti i contributi di densità contribuiscano a generare la piattezza (equilibrio tra autogravità, che tende a dare curvatura positiva allo spazio, ed espansione, che tende ad "aprire" l'Universo).

4.2 Soluzione del problema dell'omogeneità

L'espansione inflazionaria risolve anche il problema dell'omogeneità, poiché richiedere un raggio di Hubble decrescente equivale ad assicurare che

$$\int_{t_*}^{t_{dec}} \frac{dt}{a(t)} \gg \int_{t_{dec}}^{t_0} \frac{dt}{a(t)} \quad (36)$$

quindi, come già detto, che le particelle siano in contatto causale su distanze maggiori di quelle dell'Universo attuale nel periodo prima del disaccoppiamento, che ha generato la CMB. Fisicamente, l'omogeneità è generata dall'espansione superluminale delle perturbazioni primordiali, che escono quindi dal raggio di Hubble; praticamente il raggio di Hubble diventa più piccolo della loro lunghezza d'onda comoving, "appiattendolo" le perturbazioni su una scala maggiore rispetto a quella attuale (per cui vediamo omogeneità su tutto l'Universo oggi).

Allo stesso modo, in tempi cosmici più recenti e dopo la fine dell'inflazione (ma prima del disaccoppiamento), il rientro delle perturbazioni entro il raggio di Hubble comporta la creazione delle variazioni di densità che poi, collassando, hanno portato alla formazione delle strutture su grande scala. La scala delle perturbazioni generate è così compatibile con quella osservata.

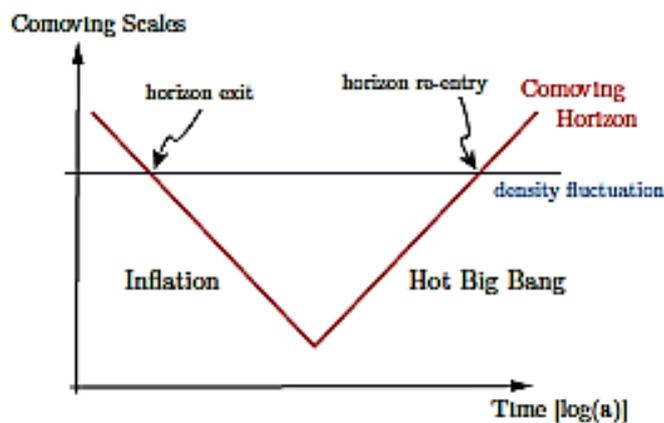


Figura 4: Evoluzione del raggio di Hubble: entrata del raggio di Hubble comoving entro le fluttuazioni di densità durante l'Inflazione e uscita nella seguente espansione convenzionale.

4.3 Soluzione del problema dei relitti cosmici

Anche il problema dei relitti viene risolto dalla rapida espansione inflazionaria, poiché la loro densità decresce più velocemente della densità di energia del campo che genera l'inflazione e diventa quindi trascurabile. Le abbondanze attuali vengono ricreate richiedendo che la densità di energia possa essere convertita dopo l'inflazione in densità di materia convenzionale. Questa fase è nota come *reheating*. Durante questa fase i relitti non dovranno essere ricreati, per cui la temperatura non dovrà raggiungere valori tali da permettere la loro creazione. Il reheating permette di tornare al modello del Big Bang e di recuperare tutte le sue previsioni in accordo con le osservazioni.

4.4 Condizioni per l'Inflazione

La condizione di un raggio comoviente di Hubble decrescente è equivalente ad altre due condizioni, che sono meno collegate alle esigenze osservative ma che descrivono fisicamente ciò che avviene durante l'inflazione:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{aH} \right) < 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d^2 a}{dt^2} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \rho + 3p < 0. \quad (37)$$

La prima equivalenza è data riscrivendo

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{aH} \right) = \frac{-\ddot{a}}{(aH)^2} \quad (38)$$

per cui richiedere che questo sia minore di zero equivale a richiedere che ci sia espansione accelerata:

$$\frac{d^2 a}{dt^2} > 0. \quad (39)$$

Si può collegare questa condizione anche al parametro di Hubble:

$$\frac{\ddot{a}}{a} = H^2 \left(1 + \frac{\dot{H}}{H^2} \right) = H^2 (1 - \varepsilon) \quad \text{dove quindi} \quad \varepsilon = -\frac{\dot{H}}{H^2} \quad (40)$$

imponendo che

$$\varepsilon = -\frac{\dot{H}}{H^2} = -\frac{d \ln H}{H dt} = -\frac{d \ln H}{dN} < 1. \quad (41)$$

Si è definito $dN = H dt = d \ln a$, con N che rappresenta quante volte il fattore di scala a si è espanso di un fattore e .

Inserendo la condizione $\ddot{a} > 0$ nell'equazione di Friedmann (12), si ottiene la seconda equivalenza

$$p < -\frac{\rho}{3} \quad (42)$$

ovvero, l'espansione accelerata è fornita da una pressione negativa. Un ampio tipo di andamenti soddisfa questa condizione, ad esempio anche l'espansione data dalla costante cosmologica, che prevede $p = -\rho$ ed un'evoluzione esponenziale del fattore di scala $a(t) \propto e^{Ht}$.

4.5 Il diagramma conforme dell'Inflazione

Il problema dell'Inflazione può essere meglio visualizzato con il tempo conforme $d\tau = dt/a(t)$, con geodetiche espresse dall'equazione (7) e coni luce non curvi. L'evoluzione del fattore di scala rispetto al tempo conforme sarebbe

$$a(\tau) \propto \begin{cases} \tau & RD \\ \tau^2 & MD \end{cases} \quad (43)$$

nel caso di un Universo dominato solo da radiazione o da materia. Questo implica necessariamente l'esistenza della singolarità del Big Bang al tempo $\tau_i = 0$: $a(\tau_i = 0) = 0$.

Il diagramma conforme del modello classico rappresenta bene il problema dell'orizzonte: al tempo del disaccoppiamento, i vari punti sono in contatto causale con tutti i punti all'interno dei loro coni luce del passato. Si nota che i vari coni luce non si intersecano, essendoci una distanza temporale limitata tra il τ_{dec} del disaccoppiamento e il τ_i del Big Bang: i punti della superficie di ultimo scattering, che ha generato la CMB, sono causalmente disconnessi (figura 5).

Durante l'inflazione invece, assumendo $H \approx cost$, il fattore di scala va come

$$a(\tau) = -\frac{1}{H\tau} \quad (44)$$

per cui la singolarità $a(\tau) = 0$ è spinta a tempi infinitamente lontani del passato $\tau_i \rightarrow -\infty$. A $\tau = 0$ invece il fattore di scala diventa infinito, cioè l'inflazione continua all'infinito, con $\tau = 0$ corrispondente a $t \rightarrow +\infty$. Questo perché si è assunto un modello di de Sitter con H costante, ma ovviamente l'inflazione dovrà finire ad un certo punto, quindi questa approssimazione è valida solo per i momenti iniziali. La superficie con $\tau = 0$ corrisponderà quindi non al Big Bang, spostato ad un tempo conforme molto negativo, ma alla fine dell'inflazione: i coni luce di punti diversi alla ricombinazione possono estendersi oltre il Big Bang apparente ed intersecarsi, così che entrano in equilibrio. Praticamente, è come se l'Inflazione avesse aggiunto tempo conforme (figura 6).

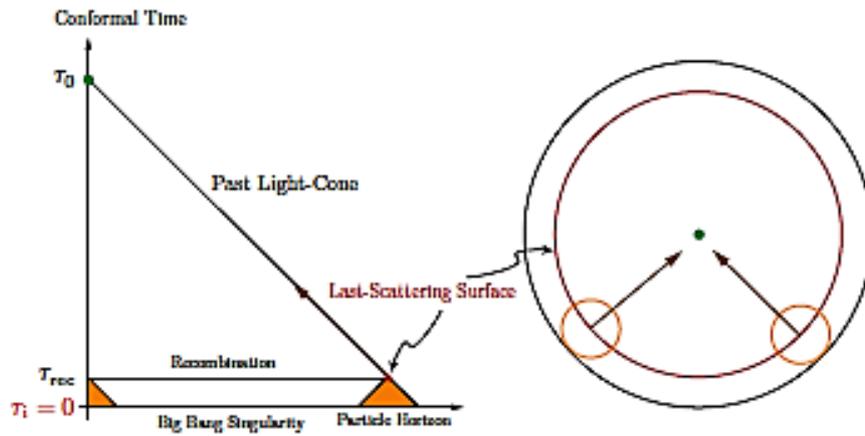


Figura 5: Diagramma conforme del modello classico del Big Bang

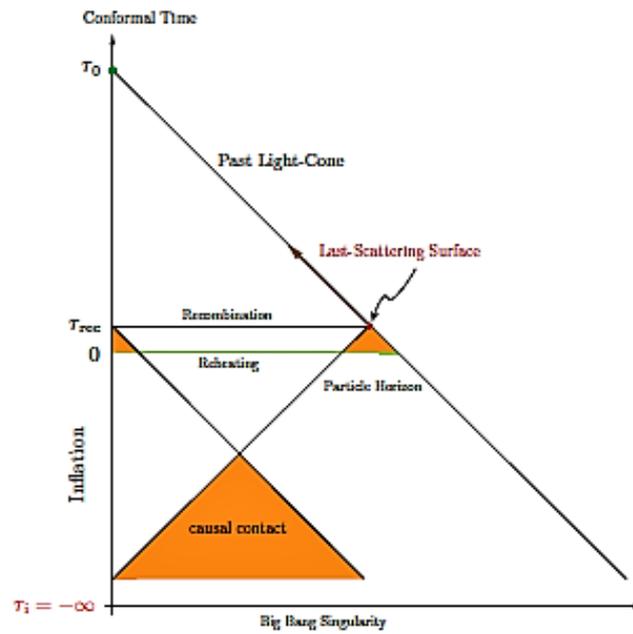


Figura 6: Diagramma conforme del modello inflazionario: i coni luce si intersecano in un tempo conforme precedente a $\tau = 0$ se l'inflazione dura per almeno $N = 60$.

4.6 Modellare l'Inflazione

Il più semplice modello di Inflazione coinvolge un singolo campo scalare ϕ , chiamato *inflatone*. Per ottenere la dinamica del campo scalare, si scrive l'integrale sullo spazio e sul tempo della Lagrangiana dipendente dal potenziale $V(\phi)$ (che rappresenta l'energia interna associata ad un certo ϕ); si scrive il tensore energia-impulso corrispondente $T_{\mu\nu}^{(\phi)}$ assumendo la metrica di FRW e si prende la parte omogenea del campo $\phi(x)$. Il tensore energia-impulso scalare prende la forma di un fluido perfetto con

$$\rho_\phi = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi) \quad (45)$$

$$p_\phi = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V(\phi). \quad (46)$$

Il termine $\frac{1}{2}\dot{\phi}^2$ rappresenta l'energia cinetica del campo, mentre $V(\phi)$ quella potenziale: il campo scalare come ogni sistema fisico cerca di minimizzare la sua energia libera raggiungendo il minimo del potenziale, ma una condizione importante per l'inflazione è che questo minimo non venga raggiunto subito.

L'equazione del moto risultante è

$$\omega_\phi \equiv \frac{p_\phi}{\rho_\phi} = \frac{\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V(\phi)}{\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi)} \quad (47)$$

e si verifica che l'espansione accelerata $\omega_\phi < -\frac{1}{3}$ si ottiene se il potenziale $V(\phi)$ domina sul termine cinetico $\frac{1}{2}\dot{\phi}^2$ (quindi se si è lontani dal minimo del potenziale). Le equazioni del moto per un campo scalare omogeneo si ricavano sostituendo le espressioni precedenti per la pressione (45) e la densità (46) e inserendole nell'equazione di Friedmann (11) e in quella dei fluidi (13):

$$H^2 = \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi}{3m_{Pl}^2}\rho_\phi = \frac{8\pi}{3m_{Pl}^2}\left(V(\phi) + \frac{1}{2}\dot{\phi}^2\right) \quad (48)$$

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + V'(\phi) = 0 \quad (49)$$

con il primo che indica la derivata rispetto a ϕ : $V'(\phi) = \frac{dV(\phi)}{d\phi}$. Nell'equazione di Friedmann si è trascurato il termine di curvatura k poiché con l'inflazione diventa subito trascurabile.

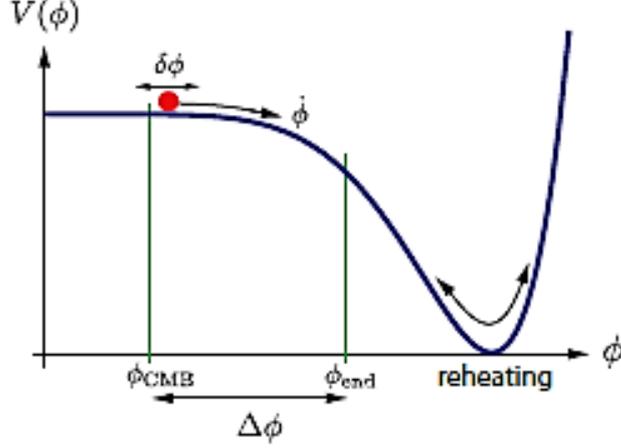


Figura 7: Esempio di potenziale di un inflatone: l'Inflazione dura finché il campo è lontano dal minimo del potenziale e $V(\phi)$ prevale su $\frac{1}{2}\dot{\phi}^2$; termina quando $V(\phi) \approx \frac{1}{2}\dot{\phi}^2$. Le perturbazioni della CMB vengono create dalle fluttuazioni $\delta\phi$ quando $a(\phi_{CMB}) \sim e^{-60} a(\phi_{fin})$.

4.7 L'approssimazione di Slow-Roll

Questa approssimazione per descrivere l'Inflazione è collegata al fatto che il campo scalare deve essere sufficientemente piatto perché il minimo del potenziale, che ne segna la fine, non sia raggiunto subito; è come se dovesse appunto "rotolare lentamente" verso esso.

Uno dei parametri di slow-roll, ε , è già stato presentato nell'equazione (40) in cui era stato collegato all'evoluzione del parametro di Hubble, $\varepsilon = -\frac{\dot{H}}{H^2}$:

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi}{3m_{Pl}^2}(\rho_\phi + 3p_\phi) = -\frac{4\pi}{3m_{Pl}^2}\rho_\phi(1 + 3\omega_\phi) = -\frac{H^2}{2}(1 + 3\omega_\phi) = H^2(1 - \varepsilon) \quad (50)$$

con ε che rispetto al campo scalare diventa

$$\varepsilon \equiv -\frac{3}{2}(1 + \omega_\phi) = \frac{1}{2}\frac{\dot{\phi}^2}{H^2}. \quad (51)$$

L'espansione accelerata si verifica quindi finché $\varepsilon < 1$, che corrisponde a

$$\frac{1}{2}\frac{\dot{\phi}^2}{H^2} = \frac{\frac{1}{2}\dot{\phi}^2}{\frac{8\pi}{3m_{Pl}^2}\left(V(\phi) + \frac{1}{2}\dot{\phi}^2\right)} < 1 \quad \text{quindi a} \quad \dot{\phi}^2 \ll V(\phi) \quad (52)$$

come già detto.

L'espansione accelerata sarà sostenuta per un tempo sufficientemente lungo se

anche la derivata seconda di ϕ è abbastanza piccola rispetto agli altri due termini dell'equazione (49):

$$|\ddot{\phi}| \ll |3H(\dot{\phi})|, |V'(\phi)|. \quad (53)$$

Ciò equivale a richiedere che anche il secondo parametro di slow-roll sia molto piccolo:

$$\eta = -\frac{\ddot{\phi}}{H\dot{\phi}} = \varepsilon - \frac{1}{2\varepsilon} \frac{d\varepsilon}{dN}. \quad (54)$$

I due parametri possono essere anche riscritti rispetto alla forma del potenziale:

$$\varepsilon_V(\phi) \equiv \frac{m_{Pl}^2}{16\pi} \left(\frac{V'}{V}\right)^2 \quad ; \quad \eta_V \equiv \frac{m_{Pl}^2}{8\pi} \left(\frac{V''}{V}\right) \quad (55)$$

e diventano evidentemente una misura della pendenza e della curvatura del potenziale. Nel regime di slow-roll devono essere soddisfatte

$$\varepsilon_V \ll 1 \quad ; \quad |\eta_V| \ll 1 \quad (56)$$

e le equazioni dinamiche possono essere approssimate a

$$H^2 \approx \frac{8\pi}{3m_{Pl}^2} V(\phi) \approx \text{cost} \quad (57)$$

$$\dot{\phi} \approx -\frac{V'}{3H}. \quad (58)$$

4.7.1 Relazione tra Inflazione ed approssimazione di Slow-Roll

Questa approssimazione è strettamente collegata con la condizione che rende possibile l'Inflazione, anche se si può ottenere $\ddot{a} > 0$ per vari altri tipi di andamenti, diversi dall'espansione esponenziale. Un esempio è l'espansione a legge di potenza $a \propto t^p$ (con pressione $p > 1$) che è soluzione del potenziale [4]

$$V(\phi) = V_0 \exp \left[-\sqrt{\frac{16\pi}{p}} \frac{\phi}{m_{Pl}} \right]. \quad (59)$$

Dall'equazione (50) si è verificato che si ha inflazione se $\varepsilon = -\frac{\dot{H}}{H^2} = \frac{m_{Pl}^2}{16\pi} \left(\frac{V'}{V}\right)^2 < 1$ (con la seconda equazione che deriva proprio dall'approssimazione di slow-roll). Quindi se vengono soddisfatte le condizioni dell'approssimazione, l'inflazione avviene:

Slow-Roll \implies Inflazione,

mentre non si può dire lo stesso del contrario, ovvero che l'inflazione avviene solo in presenza di questa approssimazione.

Affiché ci sia inflazione prolungata, bisogna considerare anche il parametro $|\eta| < 1$, perché il potenziale potrebbe essere abbastanza piatto, ma non per un range sufficientemente ampio di valori di ϕ .

4.8 Durata dell'Inflazione

L'Inflazione termina quando non si ha più espansione accelerata, ovvero se

$$\varepsilon(\phi_{fin}) \equiv 1. \quad (60)$$

La quantità di Inflazione necessaria viene calcolata tramite il numero N già definito nell'equazione (41) e che quantifica l'espansione considerando la variazione dell'esponente di e nel passare dal fattore di scala iniziale a quello finale:

$$\begin{aligned} N &\equiv \ln \frac{a(t_{fin})}{a(t_{in})} = \int_{t_{in}}^{t_{fin}} H dt = \int_{\phi_{in}}^{\phi_{fin}} \frac{H}{\dot{\phi}} d\phi \\ &\simeq -\frac{8\pi}{m_{Pl}^2} \int_{\phi_{in}}^{\phi_{fin}} \frac{V}{V'} d\phi = -\int_{\phi_{in}}^{\phi_{fin}} \frac{d\phi}{\sqrt{2\varepsilon_V}}. \end{aligned} \quad (61)$$

Esprimendo N in funzione del potenziale non c'è bisogno di risolvere le equazioni del moto, e non cambia se si moltiplica V per una costante.

Per risolvere i problemi dell'orizzonte e della piattezza è necessario un minimo di $N_{tot} \equiv \ln \frac{a(t_{fin})}{a(t_{in})} \gtrsim 60$ (valore che dipende dai dettagli del reheating). Le fluttuazioni osservate nella CMB sono state create a $N_{CMB} \approx 40 - 60$ prima della fine dell'inflazione, da cui si ottiene il valore del campo ϕ_{CMB} nel momento corrispondente:

$$N_{CMB} = -\int_{\phi_{CMB}}^{\phi_{fin}} \frac{d\phi}{\sqrt{2\varepsilon_V}} \approx 40 - 60. \quad (62)$$

4.9 Il reheating

L'inflazione comporta un'estrema riduzione della densità di materia. Il reheating è il processo alla fine dell'Inflazione in cui la densità di energia libera dell'inflatone

viene convertita in materia ordinaria. Ciò avviene quando vengono violate le condizioni alla base dell'approssimazione di SR, per cui l'inflatone raggiunge il minimo del potenziale e oscillando intorno ad esso decade nella materia convenzionale.

4.10 Perturbazioni di densità

L'Inflazione ha come importante proprietà il riuscire a spiegare lo spettro delle perturbazioni di densità e anche delle onde gravitazionali generate nell'Universo primordiale. Le perturbazioni di densità generano variazioni di temperatura nella CMB, le onde gravitazionali genererebbero anche delle variazioni nella sua polarizzazione. Gli studi sulle strutture su grande scala, generate dal collasso gravitazionale delle perturbazioni di densità, fanno assunzioni sulla forma iniziale di questi spettri: le onde gravitazionali si considerano trascurabili e lo spettro delle perturbazioni di densità si assume che abbia invarianza di scala.

Le perturbazioni di densità $\delta\rho(t, x)$ sono generate da fluttuazioni del campo $\delta\phi(t, x)$, che determinano una lieve disomogeneità nell'evoluzione delle varie zone, poiché punti con diversa ϕ usciranno in tempi leggermente diversi dalla fase inflazionaria. Le fluttuazioni quantistiche vengono create su varie lunghezze di scala, quindi hanno uno spettro di numeri d'onda comoventi k , per cui le perturbazioni del campo scalare $\delta\phi(t, x)$ possono essere espanse in k

$$\delta\phi = \sum_k (\delta\phi)_\mathbf{k} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}.$$

Le fluttuazioni cosmologicamente rilevanti sono all'inizio entro il raggio di Hubble

$$k^{-1} \ll (aH)^{-1} \quad \rightarrow \quad k \gg aH$$

poi con l'inflazione il raggio di Hubble comovente si restringe mentre il numero d'onda comovente k rimane costante ed esce dall'orizzonte

$$k < aH,$$

lasciando le rispettive perturbazioni "congelate" fino al loro rientro dopo la fine dell'inflazione.

L'ampiezza delle perturbazioni di densità $\delta_H(k)$ dipende dal valore del numero d'onda al momento in cui la scala considerata attraversa il raggio di Hubble durante l'inflazione, quindi dalle proprietà del potenziale inflazionario a quel tempo

cosmico.

Il parametro N già definito nell'equazione (61) dipende dalla scala data da k :

$$N \simeq 62 - \ln \frac{k}{a_0 H_0},$$

e le scale di nostro interesse hanno attraversato il raggio di Hubble a $N \simeq 60$ prima dell'inflazione. Poiché N dipende da ϕ e per l'approssimazione di SR $k \simeq e^N$, si ottiene il valore di ϕ corrispondente tramite la relazione

$$\frac{d \ln k}{d\phi} = \frac{8\pi}{m_{\text{Pl}}^2} \frac{V}{V'}.$$

Le approssimazioni usate per descrivere lo spettro delle perturbazioni sono quella di Slow-Roll e un'approssimazione a legge di potenza

$$\delta_H^2(k) \propto k^{n-1}$$

con n che è l'indice spettrale, dato da

$$n - 1 = \frac{d \ln \delta_H^2(k)}{d \ln k}. \quad (63)$$

L'approssimazione a legge di potenza è valida perché sono osservabili solo un range limitato di scale, da 1 a 10^4 Mpc, che corrispondono ad un $\Delta \ln k \simeq 9$.

I diversi modelli di Inflazione prevedono vari modi di formazione delle strutture su larga scala, quindi diversi valori dei parametri considerati; ad esempio, il modello di un inflatone a legge di potenza prevede un qualsiasi valore di $n < 1$.

Le osservazioni hanno lo scopo di dare dei limiti ai vari parametri, ad esempio l'indice spettrale n è vicino ad uno, all'invarianza di scala, ma sono molti i modelli inflazionari che prevedono questo valore, per cui misure più precise permettono di discernere meglio tra i vari modelli e di eliminare quelli in disaccordo con i dati.

5 Il modello di Inflazione assistita

I modelli di Inflazione sono molti, e si distinguono in base al potenziale scelto. Ad esempio:

$$\begin{aligned}
 \text{Inflazione caotica polinomiale} \quad & V(\phi) = \frac{1}{2}m^2\phi^2 \\
 & V(\phi) = \lambda\phi^4 \\
 \text{Inflazione a legge di potenza} \quad & V(\phi) = V_0 \exp \left[-\sqrt{\frac{16\pi}{p}} \frac{\phi}{m_{Pl}} \right] \\
 \text{Inflazione 'naturale'} \quad & V(\phi) = V_0 \left[1 + \cos \frac{\phi}{f} \right] \\
 \text{Inflazione intermedia} \quad & V(\phi) \propto \phi^{-\beta} \\
 & \dots
 \end{aligned} \tag{64}$$

Possono essere realizzati modelli di Inflazione con più di un campo scalare, come proprio quello di Inflazione assistita. Il modello viene chiamato così perché i vari campi scalari presenti rendono possibile l'inflazione anche se i singoli campi hanno un potenziale troppo ripido per sostenerla da soli.

Vengono considerati campi scalari con potenziali esponenziali del tipo dell'equazione (59), e anche se si considerano più campi scalari si assume che solo uno di essi diventi dinamicamente dominante per lungo tempo, mentre gli altri decadono rapidamente verso il minimo dei rispettivi potenziali.

5.1 Dinamica

Per semplicità si considerano all'inizio m campi scalari ϕ_i con lo stesso potenziale:

$$V(\phi_i) = V_0 \exp \left[-\sqrt{\frac{16\pi}{p}} \frac{\phi_i}{m_{Pl}} \right]. \tag{65}$$

I campi non sono accoppiati poiché ogni potenziale dipende dal proprio ϕ_i , quindi si influenzano a vicenda solo tramite i loro effetti sull'espansione.

Le equazioni del moto sono date dalla somma su m nell'eq (48) e dalla (49):

$$H^2 = \frac{8\pi}{3m_{Pl}^2} \sum_{i=1}^m \left(V(\phi_i) + \frac{1}{2} \dot{\phi}_i^2 \right) \tag{66}$$

$$\ddot{\phi}_i + 3H\dot{\phi}_i + V'(\phi_i) = 0 \tag{67}$$

con i campi che si sommano additivamente.

Se ci fosse solo un singolo campo scalare, la soluzione sarebbe quella a legge di potenza:

$$a(t) \propto t^p \quad (68)$$

con p che è la pressione. La soluzione è inflazionaria solo se

$$a(\ddot{t}) > 0 \quad \leftrightarrow \quad p(p-1)t^{p-2} > 0 \quad \leftrightarrow \quad p > 1 \quad (69)$$

quindi per un potenziale sufficientemente piatto.

Si considera prima la soluzione particolare in cui tutti i campi scalari sono uguali: $\phi_1 = \phi_2 = \dots = \phi_m$

$$H^2 = \frac{8\pi}{3m_{Pl}^2} \left(V(\phi_1) + \frac{1}{2} \dot{\phi}_1^2 \right) \quad (70)$$

$$\ddot{\phi}_1 + 3H\dot{\phi}_1 + V'(\phi_1) = 0. \quad (71)$$

Il modello con questi m campi uguali sarà dunque equivalente ad uno con un campo singolo $\tilde{\phi}$ definito come somma di questi campi:

$$\tilde{\phi}_1^2 = m\phi_1^2; \quad \tilde{V} = mV(\phi_1); \quad \tilde{p} = mp. \quad (72)$$

Quindi, se il singolo campo avesse $p < 1$ e non potesse sostenere l'inflazione singolarmente, questa può essere garantita da un numero sufficientemente alto di campi scalari, per cui

$$\tilde{p} = mp > 1. \quad (73)$$

Anche se la soluzione con i campi scalari tutti uguali è solo una in particolare, si dimostra che è l'attrattore del sistema, ovvero la soluzione a cui tendono tutte le configurazioni del sistema per un tempo sufficientemente lungo. Si può definire la differenza tra i singoli campi scalari e il campo preso come riferimento, ϕ_1 :

$$\psi_i = \phi_i - \phi_1 \quad \text{con} \quad i = 2, \dots, m. \quad (74)$$

La nuova equazione del moto di ψ_i così definito è quella di un campo scalare in un potenziale effettivo V_{eff}

$$\ddot{\psi}_i + 3H\dot{\psi}_i + \frac{\partial V_{eff}(\phi_1, \psi_i)}{\partial \psi_i} = 0 \quad (75)$$

che risulti equivalente a

$$\ddot{\phi}_i - \ddot{\phi}_1 + 3H\dot{\phi}_i - 3H\dot{\phi}_1 + \frac{\partial V(\phi_i)}{\partial \phi_i} - \frac{\partial V(\phi_1)}{\partial \phi_1} = 0. \quad (76)$$

Quindi il potenziale effettivo dovrà essere tale che

$$\frac{\partial V_{eff}(\phi_1, \psi_i)}{\partial \psi_i} = \frac{\partial V(\phi_i)}{\partial \phi_i} - \frac{\partial V(\phi_1)}{\partial \phi_1}, \quad (77)$$

ovvero

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_{eff}(\phi_1, \psi_i)}{\partial \psi_i} &= \frac{V_0}{m_{Pl}} \sqrt{\frac{16\pi}{p}} \exp\left(-\sqrt{\frac{16\pi}{p}} \frac{\phi_1}{m_{Pl}}\right) \\ &\times \left[\exp\left(-\sqrt{\frac{16\pi}{p}} \frac{\psi_i}{m_{Pl}}\right) - 1 \right] \end{aligned} \quad (78)$$

e V_{eff} risulta quindi

$$\begin{aligned} V_{eff} &= V_0 \sqrt{\frac{16\pi}{p}} \exp\left(-\sqrt{\frac{16\pi}{p}} \frac{\phi_1}{m_{Pl}}\right) \\ &\times \left[\sqrt{\frac{p}{16\pi}} \exp\left(-\sqrt{\frac{16\pi}{p}} \frac{\psi_i}{m_{Pl}}\right) + \frac{\psi_i}{m_{Pl}} \right]. \end{aligned} \quad (79)$$

Il minimo del potenziale effettivo $V_{eff}(\psi_i)$ è dato da $\frac{\partial V_{eff}(\phi_1, \psi_i)}{\partial \psi_i} = 0$, quindi da $\psi_i = 0$ per ogni $i = 2, \dots, m$. Si è verificato quindi che la soluzione con tutti i campi uguali è l'attrattore, e che quindi solo un campo ϕ_1 diventa dinamicamente importante. Gli altri campi raggiungono il minimo del loro potenziale effettivo, diventando uguali a ϕ_1 , in un tempo che varia a seconda della differenza iniziale da esso ψ_i e in base alla frizione fornita dal fattore di espansione H .

5.2 Calcolo dell'indice spettrale n

Si considera in particolare il valore assunto in questo contesto dall'indice spettrale n delle perturbazioni di densità. Dalle assunzioni fatte, si ottiene:

$$1 - n = -2 \frac{\dot{H}}{H^2} = \frac{m_{Pl}^2}{8\pi} \left(\frac{\partial V(\phi_1)/\partial \phi_1}{V(\phi_1)} \right)^2 = \frac{2}{mp}. \quad (80)$$

L'indice spettrale è uguale a quello prodotto da un singolo campo scalare con $\tilde{p} = mp$. Risulta evidente che maggiore è il valore di m , quindi il numero di

campi scalari (uguali) presenti, più si è vicini all'invarianza di scala dello spettro $n \sim 1$ (equazione (63)). Anche in questo caso, se il campo individualmente ha una pendenza $p < 1$, quindi non è inflazionario, molti campi sono necessari affinché n assuma un valore sufficientemente prossimo ad 1 (ad esempio $n > 0.7$) per spiegare le strutture osservate.

5.3 Potenziali con diverse pendenze

Si considera adesso il caso ancora più generale di potenziali con pendenze diverse date da differenti p_i :

$$V_i(\phi_i) = V_0 \exp \left[- \sqrt{\frac{16\pi}{p_i}} \frac{\phi_i}{m_{Pl}} \right] \quad (81)$$

mentre V_0 rimane lo stesso, poiché cambiarlo significa traslare il campo scalare di una costante, e lasciarlo uguale fissa lo zero di tutti i campi.

Si suppone che dopo lunghi tempi si stabilisca un rapporto fisso tra le densità di energia dei diversi campi rispetto ad un campo ϕ_1 :

$$\frac{\dot{\phi}_i^2}{\dot{\phi}_1^2} = \frac{V_i}{V_1} = C_i. \quad (82)$$

Per ricavare il valore della costante C_i si usano le equazioni dinamiche riscritte in approssimazione di Slow-Roll:

$$H^2 \simeq \frac{8\pi}{3m_{Pl}^2} \sum_{i=1}^m V(\phi_i) \quad (83)$$

$$3H\dot{\phi}_i + V'(\phi_i) \simeq 0, \quad (84)$$

dalle quali si ricava

$$\dot{\phi}_i^2 \simeq \frac{2}{3p_i} \frac{V_i^2(\phi_i)}{\sum_{i=1}^m V_i(\phi_i)} \quad (85)$$

e sostituendo nell'equazione (82):

$$\frac{\dot{\phi}_i^2}{\dot{\phi}_1^2} = \frac{V_i^2 p_1}{V_1^2 p_i} = \frac{p_1}{p_i} C_i^2 = C_i \quad \rightarrow \quad C_i = \frac{p_i}{p_1}. \quad (86)$$

In ciò che segue l'approssimazione di SR non è più necessaria. Integrando la parte cinetica dell'equazione (82) si ricava:

$$\phi_i = \sqrt{\frac{p_i}{p_1}} \phi_1 + \alpha_i \quad (87)$$

con α_i costante di integrazione. La relazione di scala precisa si trova assicurando che anche i potenziali scalino allo stesso modo dei termini cinetici come nell'equazione (82):

$$\alpha_i = -\sqrt{\frac{p_i}{16\pi}} m_{Pl} \ln \frac{p_i}{p_1}. \quad (88)$$

Analogamente a quanto fatto considerando la soluzione con tutti i campi uguali, si può usare la relazione di scala tra ogni campo e quello di riferimento e tra i potenziali per ridurre le equazioni del moto ad un singolo grado di libertà ϕ_1 :

$$H^2 = \frac{8\pi}{3m_{Pl}^2} \frac{\sum_{i=1}^m p_i}{p_1} \left(V(\phi_1) + \frac{1}{2} \dot{\phi}_1^2 \right) \quad (89)$$

$$\ddot{\phi}_1 + 3H\dot{\phi}_1 + V'(\phi_1) = 0. \quad (90)$$

Di nuovo, si può ricondurre tutto ad un sistema con un singolo campo scalare con la ridefinizione:

$$\tilde{\phi}_1^2 = \frac{\sum_{i=1}^m p_i}{p_1} \phi_1^2; \quad \tilde{V} = \frac{\sum_{i=1}^m p_i}{p_1} V; \quad \tilde{p} = \sum_{i=1}^m p_i, \quad (91)$$

di cui l'equazione (72) è il caso particolare con le pendenze tutte uguali. Ancora una volta, è evidente che la presenza di più campi scalari vada a sostenere ed aumentare l'espansione $a \propto t^{\tilde{p}}$, provvedendo un $\tilde{p} > 1$ anche se i singoli p_i non lo fossero.

Anche la soluzione con i campi scalari in rapporti fissi con quello dominante è l'attrattore del sistema: si generalizza quanto già fatto definendo

$$\psi_i = \phi_i - \sqrt{\frac{p_i}{p_1}} \phi_1 - \alpha_i \quad \text{con } i = 2, \dots, m \quad (92)$$

e riscrivendo l'equazione (75) con il nuovo potenziale efficace:

$$\begin{aligned} \ddot{\psi}_i + 3H\dot{\psi}_i &= \frac{V_0}{m_{Pl}} \sqrt{\frac{16\pi}{p_i}} \exp\left(-\sqrt{\frac{16\pi}{p_1}} \frac{\phi_1}{m_{Pl}}\right) \\ &\times \frac{p_i}{p_1} \left[\exp\left(-\sqrt{\frac{16\pi}{p_i}} \frac{\psi_i}{m_{Pl}}\right) - 1 \right]. \end{aligned} \quad (93)$$

Anche adesso i potenziali effettivi si annullano in $\psi_i = 0$ per cui si tende a questa soluzione con i campi scalari in rapporti ben definiti con quello dominante ϕ_1 .

Per calcolare l'indice spettrale in questo caso, si segue lo stesso procedimento del caso particolare con p tutte uguali, ottenendo lo stesso risultato

$$1 - n = \frac{2}{\tilde{p}} = \frac{2}{\sum_{i=1}^m p_i} \quad (94)$$

e per cui valgono le stesse considerazioni.

5.4 Conclusioni

Il modello di Inflazione assistita considera la presenza di molti campi scalari nell'Universo primordiale, e nel caso di campi con andamento a legge di potenza e potenziali esponenziali si dimostra che dopo lungo tempo i campi scalano tra di loro, e che solo uno di essi diventa dinamicamente rilevante, mentre gli altri raggiungono subito il minimo del loro potenziale.

I vari campi si "assistono" nel generare un periodo inflazionario, perché anche se i potenziali dei singoli campi fossero troppo ripidi ($p_i < 1$) e di conseguenza non inflazionari, la legge di espansione è vincolata dalla soluzione $t^{\tilde{p}}$ con $\tilde{p} = \sum_{i=1}^m p_i$, quindi dipende dalla totalità dei campi. Questo si spiega con il fatto che mentre il singolo campo avverte la forza data dalla pendenza del proprio potenziale, e tende a raggiungere in fretta il suo minimo, sperimenta anche una frizione per l'espansione generata dagli altri campi presenti.

L'indice n dello spettro delle perturbazioni di densità è portato sempre più vicino all'invarianza di scala quanti più campi ci sono, quindi per \tilde{p} maggiore, e ciò risulta in accordo con le osservazioni.

Riferimenti bibliografici

- [1] D. Baumann (2012) "Lectures on Inflation", preprint [hep-th/09075424](#).
- [2] A. R. Liddle (1999) "An introduction to cosmological inflation", preprint [astro-ph/9901124](#).
- [3] A. R. Liddle, A. Mazumdar and F. E. Schunck (1998) "Assisted Inflation", *Phys. Rev. D* **58**, 061301.
- [4] F. Lucchin and S. Matarrese (1985) "Power Law Inflation", *Phys. Rev. D* **32**, 1316.
- [5] Planck Collaboration, P.A.R. Ade et al. (2016) "Planck 2015 results. XIII. Cosmological parameters", *Astron. Astrophys.* **594**, A13.