

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA
FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Tesi di laurea triennale in
INGEGNERIA MECCATRONICA

**Modellizzazione e controllo di
un satellite geostazionario**

Relatore
Prof. Augusto Ferrante

Candidato
Alessandro D'Amico
Matr. 594626

Anno Accademico 2010/2011

INDICE

1 Sommario	3
2 Modello matematico	3
2.1 Sistema fisico terra-satellite.....	4
2.2 Derivazione del modello di stato.....	5
2.3 Linearizzazione e derivazione della funzione di trasferimento.....	6
2.4 Analisi della funzione di trasferimento.....	8
2.4.2 Risposta impulsiva.....	10
3 Stabilizzazione mediante controllore PI	11
3.1 Analisi con controllore PI.....	11
4 Stabilizzazione mediante controllore PD	12
4.1 Analisi con controllore PD.....	12
5 Stabilizzazione mediante controllore PID	13
5.1 Analisi con controllore PID.....	13
6 Stabilizzazione mediante sintesi diretta	15
6.1 Sintesi diretta del controllore.....	15
6.2 Simulazioni.....	17
6.2.1 Diagramma di Nyquist e risposta al gradino.....	18
6.2.2 Comportamento con immissione di disturbi.....	20
6.2.3 Comportamento con simulazione attrazione lunare.....	21
Appendice A	24
Concetto di stabilità.....	24
Criteri di stabilità per polinomi.....	25
Criterio di Routh.....	25
Criteri di stabilità ad anello chiuso.....	28
Criterio di Nyquist.....	28
Stabilità al variare del guadagno di anello.....	30
Bibliografia	32

1 SOMMARIO

In questa trattazione verrà esposta la modellizzazione matematica e la progettazione di un sistema di controllo per un satellite artificiale. Tale sistema, sulla base del modello matematico che descrive il comportamento del sistema terra-satellite, dovrà permettere di mantenere costantemente un'orbita di tipo geostazionario intervenendo sui propulsori del satellite anche in presenza di perturbazioni esterne.

Come prima cosa verrà descritto il sistema fisico e verranno individuate le leggi della fisica che regolano tutti i fenomeni. Verranno anche fissate le grandezze fisiche e i parametri fondamentali per descrivere lo stato del sistema. Successivamente si passerà alla modellizzazione del sistema arrivando, sotto opportune ipotesi, a derivare le equazioni differenziali che modellano il comportamento del satellite in orbita. Poi, essendo il sistema non lineare, si passerà alla linearizzazione dello stesso attorno ad un punto di equilibrio (un'orbita particolare) e una volta fatto ciò se ne ricaverà la sua funzione di trasferimento.

Ottenuta la funzione di trasferimento si passerà alla progettazione di un controllore in grado di stabilizzare il satellite ad una certa posizione angolare rispetto alla terra.

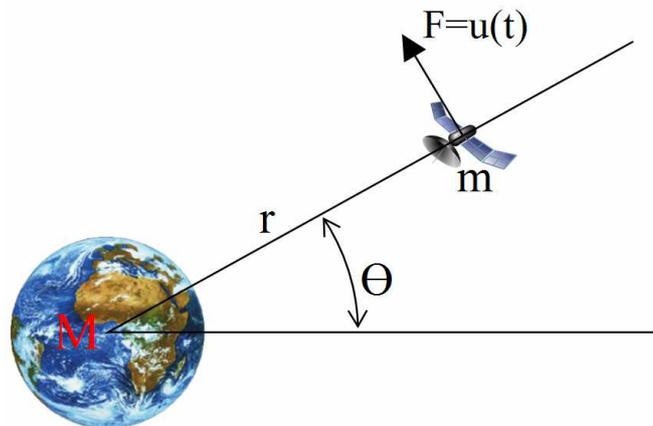
La progettazione del sistema di controllo avverrà basandosi su più soluzioni valutandone di volta in volta le capacità di stabilizzazione e le prestazioni.

In particolare si effettuerà una sintesi diretta del controllore e una successiva analisi in simulazione.

Capitolo 2

2.1 Sistema fisico terra-satellite

Il sistema può essere semplificato considerando la terra e il satellite come due masse puntiformi rispettivamente M e m . Assumendo un sistema di riferimento ortogonale al piano dell'orbita con origine nel centro della terra, indichiamo con r la distanza del satellite dal centro della terra e con Θ l'elevazione rispetto all'asse x , esse diventeranno inoltre alcune delle variabili di stato di controllo del nostro sistema. L'ingresso del sistema è $u(t)$ il quale rappresenta la forza tangenziale di controllo che il satellite può attuare grazie a getti di gas emessi attraverso appositi ugelli. Assumiamo inoltre come parametro nominale ω la velocità angolare del satellite pari a quella di rotazione terrestre così da sincronizzare la rotazione del satellite con la rotazione terrestre (orbita geostazionaria).



Le masse di satellite e terra interagiscono secondo la legge di gravitazione universale instaurando

tra loro una forza di attrazione pari a $F = \frac{G \cdot M \cdot m}{r^2}$

Con G pari alla costante gravitazionale universale .

Allo stesso tempo il satellite è in rotazione rispetto al centro della terra e ruota con la velocità angolare ω . Ciò comporta la presenza della forza centrifuga la quale tende ad allontanare il satellite dalla terra. Nel momento in cui la forza di attrazione gravitazionale è equilibrata alla forza centrifuga, r rimane costante così da far compiere al satellite un'orbita circolare.

Nella modellizzazione qui trattata ci avvarremo dell'ipotesi che l'orbita del satellite sia sempre di forma circolare.

2.2 Derivazione del modello di stato

Dalla descrizione precedente si scelgono come variabili di stato r , \dot{r} , ϑ , $\dot{\vartheta}$ dove \dot{r} rappresenta la derivata rispetto al tempo del raggio cioè la velocità radiale del satellite, e $\dot{\vartheta}$ è la velocità angolare del moto lungo l'orbita.

Variabili di stato:

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r \\ \dot{r} \\ \vartheta \\ \dot{\vartheta} \end{bmatrix} \quad y = \vartheta$$

Ora calcoliamo la derivata di ciascuna variabile di stato.

$$\dot{x}_1 = x_2 = \dot{r} \quad (2.2.1)$$

$$\dot{x}_3 = \dot{\vartheta} = \dot{x}_4 = \omega \quad (2.2.3)$$

Lungo la direzione radiale si ha la somma vettoriale tra forza gravitazionale e forza centrifuga:

$$F_R = m \cdot a = m \cdot \ddot{r}$$

$$F_{Rtot} = F_{gravitaz} + F_{centrif} = -\frac{G \cdot M}{r^2} + \omega^2 \cdot r \cdot m$$

da cui:

$$\dot{x}_2 = \ddot{r} = a = -\frac{G \cdot M}{r^2} + \frac{\omega^2 \cdot r}{m} \cdot m$$

Definisco $K = G \cdot M$ per cui sostituendo si ottiene:

$$\ddot{r} = -\frac{K}{r^2} + \omega^2 \cdot r \Rightarrow \dot{x}_2 = -\frac{K}{x_1^2} + x_4^2 \cdot r \quad (2.2.2)$$

$$\dot{x}_4 = \frac{d}{dt}[J\omega] = C_T$$

dove J è il momento di inerzia del satellite considerando la rotazione in orbita. $J = m \cdot r^2$ in quanto il satellite, come già detto, è considerato una massa puntiforme. Dall'espressione di J possiamo dedurre che esso non sia costante dato che il raggio può variare nella dinamica del sistema.

$$C_T = \dot{J}\omega + J\dot{\omega}$$

derivando il momento di inerzia J si ottiene:

$$\dot{J} = \frac{d}{dt} J = m \frac{d}{dt}(r^2) = m \cdot 2r \cdot \dot{r}$$

perciò vale:

$$C_T = 2 \cdot m \cdot r \cdot \dot{r} \cdot \omega + m \cdot r^2 \cdot \dot{\omega} = u \cdot r \quad \text{con} \quad \dot{\omega} = \dot{x}_4$$

$$\Rightarrow \dot{x}_4 = \frac{1}{m \cdot r^2} (u \cdot r - 2m \cdot r \cdot \dot{r} \cdot \omega) = -\frac{2 \cdot \dot{r} \cdot \omega}{r} + \frac{u}{m \cdot r} = -\frac{2 \cdot x_2 \cdot x_4}{x_1} + \frac{u}{m \cdot x_1} \quad (2.2.4)$$

Unendo la (2.2.1) (2.2.2) (2.2.3) (2.2.4) otteniamo la matrice \dot{X} :

$$\dot{X} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ -\frac{K}{x_1^2} + x_4^2 \cdot x_1 \\ x_4 \\ -2 \cdot \frac{x_2 \cdot x_4}{x_1} + \frac{1}{m} \cdot \frac{u}{x_1} \end{bmatrix}$$

2.3 Linearizzazione e derivazione della funzione di trasferimento

Come si può notare dalle equazioni ricavate nel capitolo precedente il sistema non risulta essere lineare.

Per studiare in modo semplice e quindi realizzare il controllo di questo sistema è necessario che esso sia lineare. Per ovviare a questo problema ci concentreremo nell'analizzare il comportamento del sistema in un suo particolare stato di equilibrio che si ha quando il satellite è nella così detta orbita geostazionaria. Nell'intorno di questo punto di equilibrio il comportamento del sistema si può considerare, con una buona approssimazione, di tipo lineare.

Per prima cosa cerchiamo di quantificare il punto di equilibrio.

Essendo in orbita geostazionaria non è difficile intuire che la velocità di rotazione in orbita del satellite ω sarà pari alla velocità di rotazione della terra attorno al proprio asse ω_0 .

La terra compie una rotazione completa (2π radianti) in 24 ore, semplicemente quindi ω_0 varrà:

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{24h} = \frac{2\pi}{24 \cdot 3600 \text{sec}} = 72,722 \cdot 10^{-6} \frac{\text{rad}}{\text{sec}}$$

Ora come, accennato prima, nel momento in cui la forza centrifuga è tale da compensare perfettamente la forza gravitazionale si ha l'equilibrio lungo la direzione radiale. Tale equilibrio permette al satellite di rimanere costantemente in un'orbita fissa. Imponendo quindi al sistema la velocità di rotazione $\omega = \omega_0$ (condizione di geosincronismo) è possibile ricavare il raggio R_0 per cui esso risulta in equilibrio geostazionario. In formule:

$$-\frac{K}{x_1^2} + x_4^2 \cdot x_1 = -\frac{K}{R_0^2} + \omega_0^2 \cdot R_0 \Rightarrow R_0 = \sqrt[3]{\frac{K}{\omega_0^2}} = 42235,41 \text{Km}$$

L'analisi che seguirà sarà quindi orientata a linearizzare il sistema attorno al suo punto di equilibrio geostazionario caratterizzato perciò da una velocità di rotazione in orbita pari a ω_0 , e da una distanza R_0 dal centro della terra.

Consideriamo quindi delle nuove variabili di stato "centrate" nel punto di equilibrio:

$$Z = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 - R_0 \\ x_2 - 0 \\ x_3 - \omega_0 \cdot t \\ x_4 - \omega_0 \end{bmatrix}$$

osservando le equazioni precedenti possiamo ricavare:

$$\dot{Z} = \begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ \dot{z}_3 \\ \dot{z}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 - \omega_0 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} \quad y = x_3 \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_1 + R_0 \\ z_2 \\ z_3 + \omega_0 \cdot t \\ z_4 + \omega_0 \end{bmatrix}$$

$$\dot{Z} = \begin{bmatrix} z_2 \\ -\frac{K}{(z_1 + R_0)^2} + (z_1 + R_0) \cdot (z_4 + \omega_0)^2 \\ z_4 \\ -\frac{2z_2 \cdot (z_4 + \omega_0)}{(z_1 + R_0)} + \frac{1}{m} \cdot \frac{u}{(z_1 + R_0)} \end{bmatrix}$$

deriviamo le 4 equazioni di stato e costruiamo lo Jacobiano del sistema, valutandolo nell'orbita di equilibrio e otteniamo la matrice di stato A:

$$A = \frac{\delta \dot{f}}{\delta z} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3\omega_0^2 & 0 & 0 & 2R_0\omega_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2\omega_0/R_0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ricaviamo anche le matrici B e C e l'espressione dell'uscita y

$$B = \frac{\delta f}{\delta u} \Big|_{\substack{z=0 \\ u=0}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1/mR_0 \end{bmatrix} \quad C = [0 \quad 0 \quad 1 \quad 0] \quad D = [0] \quad y = x_3 - \omega_0 t = z_3$$

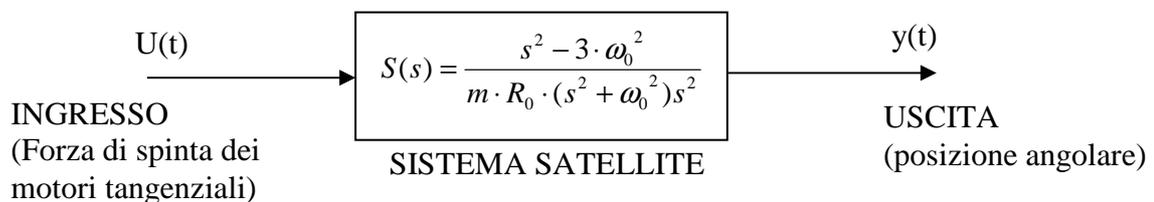
Come si vede, la matrice D è nulla: infatti, l'uscita non ha alcuna dipendenza dall'ingresso u; inoltre, il fatto che D=0 implica che la funzione di trasferimento del modello è razionale e propria, vale infatti la relazione:

La funzione di trasferimento di un modello di stato è sempre una funzione razionale propria	⇔	D=0
---	---	-----

Possiamo quindi ricavarci la funzione di trasferimento del sistema satellite S(s) attraverso la relazione $S(s) = C(sI - A)^{-1}B$, dove A B e C sono le matrici appena ricavate e I è la matrice d'identità.

$$S(s) = [0 \quad 0 \quad 1 \quad 0] \cdot \left(s \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3\omega_0^2 & 0 & 0 & 2R_0\omega_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2\omega_0/R_0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right)^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1/mR_0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S(s) = \frac{s^2 - 3 \cdot \omega_0^2}{m \cdot R_0 \cdot (s^2 + \omega_0^2)s^2}$$



Tale modellizzazione lineare è valida solamente in un intorno dell'orbita geostazionaria pertanto lo studio che seguirà riguardante la progettazione del sistema di controllo terrà conto come ipotesi che il satellite si trovi già in una posizione prossima all'orbita di equilibrio.

2.4 Analisi della funzione di trasferimento

$$S(s) = \frac{s^2 - 3 \cdot \omega_0^2}{m \cdot R_0 \cdot (s^2 + \omega_0^2) s^2}$$

Caratteristiche fisiche del sistema in analisi:

CARATTERISTICA	DESCRIZIONE	VALORE
M	Massa della terra	$5,9742 \times 10^{24}$ kg
m	Massa del satellite	1000 Kg
G	Costante gravitazionale universale	$6,67 \cdot 10^{-11} \frac{N \cdot m^2}{Kg^2}$
R_0	Raggio orbita di equilibrio	42235,412 Km
ω_0	Velocità rotazione terrestre	$72,722 \cdot 10^{-6} \frac{rad}{sec}$

Mediante l'utilizzo di Matlab verrà creato il sistema satellite a partire dalle matrici di stato A B C D, verrà poi calcolata la funzione di trasferimento.

LISTATO DEL PROGRAMMA MATLAB:

```

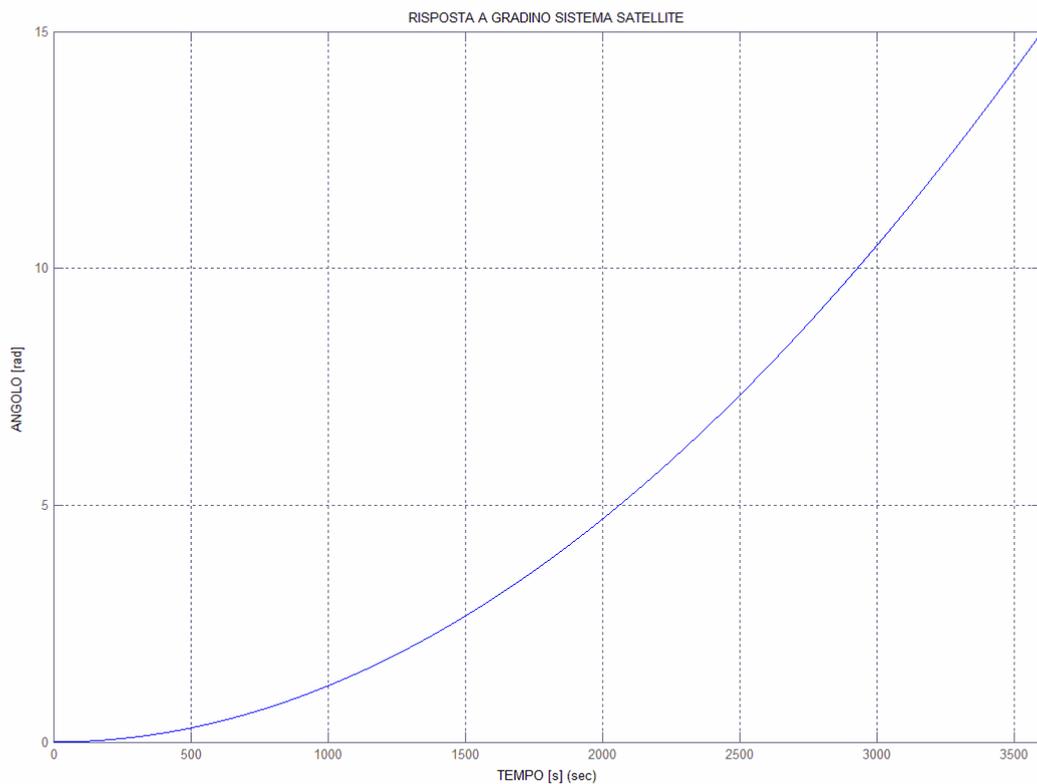
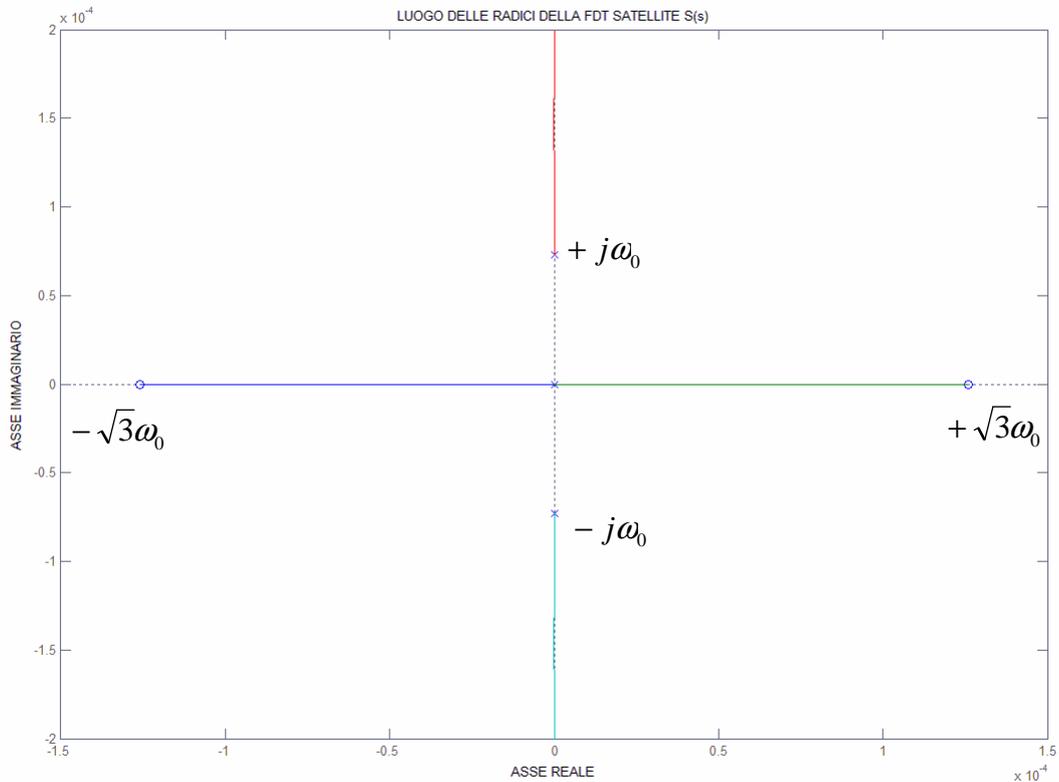
clc
clear all
close all

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% CARATTERISTICHE FISICHE SISTEMA %%%%%%%%%%
%MASSA TERRA [Kg]
M=5.9736*(10^24);
%MASSA SATELLITE [Kg]
m=1000;
%COSTANTE DI GRAVITAZIONE UNIVERSALE G[N m^2/Kg^2]
G=6.67*(10^-11);
%VELOCITA' ANGOLARE DI RIVOLUZIONE TERRESTRE w0[Rad/sec]
w0=(2*pi)/(24*3600)
%RAGGIO ORBITA DI EQUILIBRIO geostazionario R0[Km]
R0=nthroot(((G*M)/w0^2),3)

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% SISTEMA NON CONTROLLATO %%%%%%%%%%
%DEFINIZIONE DELLE MATRICI DI STATO
A= [0 1 0 0; 3*(w0*w0) 0 0 2*R0*w0; 0 0 0 1; 0 -((2*w0)/R0) 0 0];
B= [0; 0; 0; (1/(m*R0))];
C= [0 0 1 0];
D= 0;
%CREAZIONE DEL SISTEMA
sat= ss(A,B,C,D)
%DEFINIZIONE DELLA FUNZIONE DI TRASFERIMENTO
num=[1 0 -3*w0^2]
den=[m*R0 0 m*R0*w0^2 0 0]
fnc=tf(num,den)

%TRACCIAMENTO DEL LUOGO DELLE RADICI
figure(1)
rlocus(fnc)

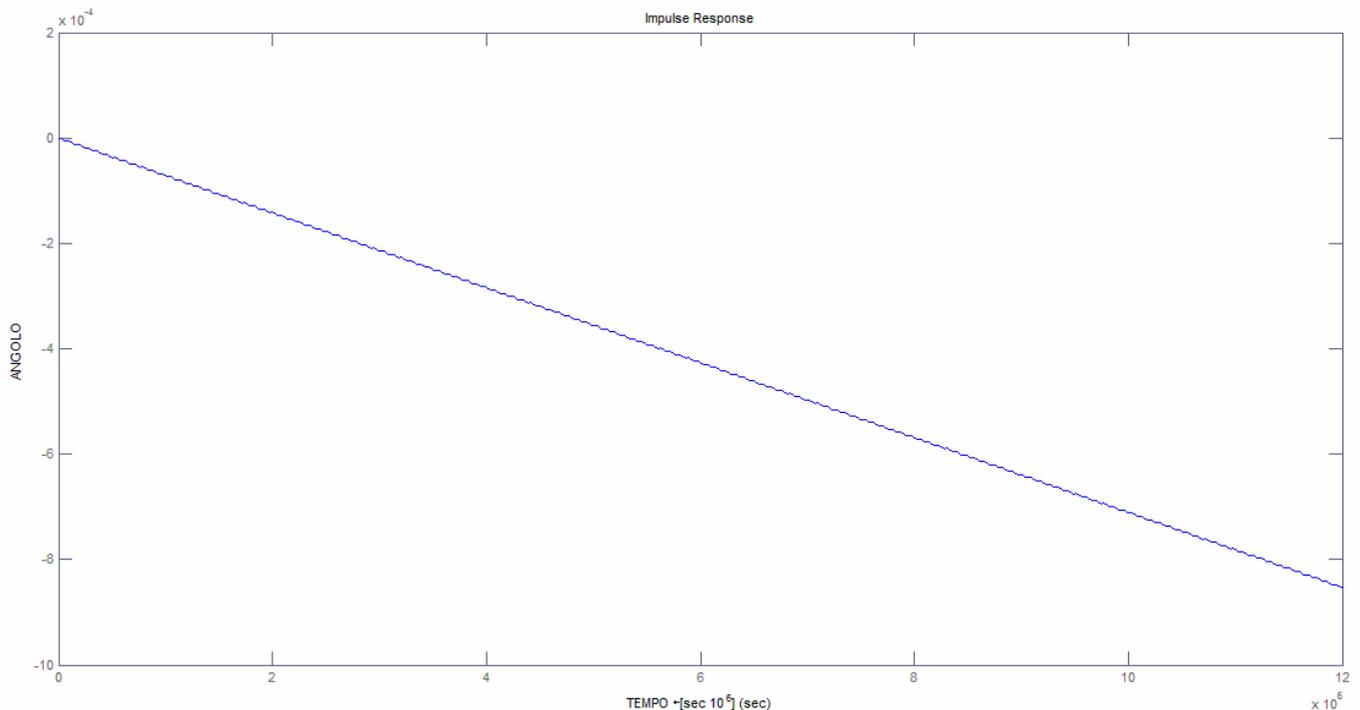
```



Come si può notare dal luogo delle radici il sistema satellite è intrinsecamente instabile in quanto presenta due poli nell'origine e una coppia di poli complessi coniugati a parte reale nulla.

$$S(s) = \frac{s^2 - 3 \cdot \omega_0^2}{m \cdot R_0 \cdot (s^2 + \omega_0^2) s^2} = \frac{1}{m \cdot R_0} \cdot \frac{(s + \sqrt{3}\omega_0)(s - \sqrt{3}\omega_0)}{(s^2 + \omega_0^2) s^2} \Rightarrow S(s) = \frac{1}{m \cdot R_0} \cdot \frac{(s + \sqrt{3}\omega_0)(s - \sqrt{3}\omega_0)}{s^2(s + j\omega_0)(s - j\omega_0)}$$

2.4.2 Risposta impulsiva della funzione di trasferimento



Come si può notare la risposta del sistema all'impulso deriva verso meno infinito.

Questo fatto trova immediato riscontro nella realtà del sistema, basta infatti immaginare di avere il satellite in orbita geostazionaria (ruota quindi alla stessa velocità angolare terrestre) e di solleccitarlo idealmente con un impulso di forza tangenziale all'orbita (ingresso del sistema).

Come si può intuire esso inizierà a ruotare a una velocità angolare superiore a quella terrestre, di conseguenza la propria velocità angolare relativa a quella terrestre non sarà nulla.

Ciò comporterà la continua variazione dell'angolo di posizione in orbita rispetto alla terra che di fatto è l'uscita del sistema.

Ecco quindi che emerge la necessità di adottare un sistema di controllo che possa agire sui motori del satellite affinché esso non perda la posizione desiderata anche a seguito di minimi interventi dall'esterno.

Listato Matlab della simulazione:

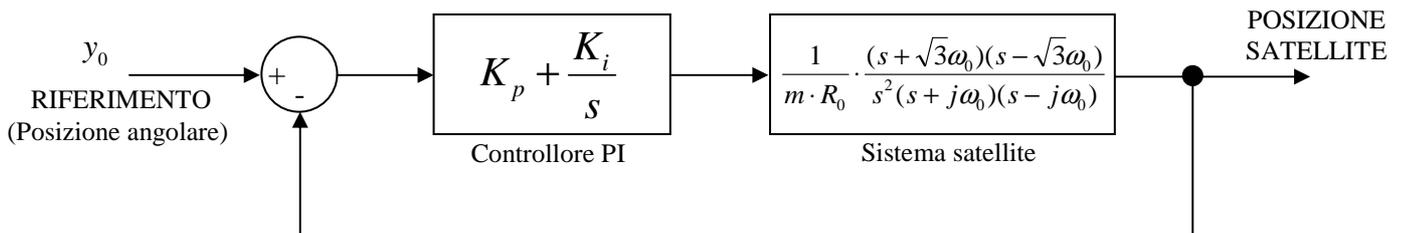
```
clc
clear all
close all
%MASSA TERRA [Kg]
M=5.9736*(10^24);
%MASSA SATELLITE [Kg]
m=1000;
%COSTANTE DI GRAVITAZIONE UNIVERSALE G[N m^2/Kg^2]
G=6.67*(10^-11);
%VELOCITA' ANGOLARE DI RIVOLUZIONE TERRESTRE w0[Rad/sec]
w0=(2*pi)/(24*3600)
%RAGGIO ORBITA DI EQUILIBRIO geostazonario R0[Km]
R0=nthroot(((G*M)/w0^2),3)
%DEFINIZIONE DELLA FUNZIONE DI TRASFERIMENTO
num=[1 0 -3*w0^2];
den=[1 0 w0^2 0 0]*m*R0;
sat=tf(num,den);
%RISPOSTA IMPULSIVA
impulse(sat);
```

Capitolo 3

Stabilizzazione mediante controllore PI

3.1 Analisi con controllore PI

Cerchiamo ora di rendere stabile il sistema mediante l'utilizzo di un controllore di tipo PI ad azione proporzionale e integrativa inserito in un circuito a retroazione come quello di seguito riportato.



Tale schema ha come funzione di trasferimento la relazione $H(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{CD(s)}{1+CC(s)}$ dove $CD(s)$

rappresenta la funzione di trasferimento di azione diretta, mentre $CC(s)$ rappresenta la funzione di trasferimento della catena chiusa.

Per prima cosa calcoliamo $H(s)$ e verifichiamo che per qualche valore di K_p e K_i essa risulti BIBO stabile, ossia che il controllore PI sia effettivamente in grado di stabilizzare il sistema.

Studiamo quindi la funzione di trasferimento della catena di azione diretta ossia: $PI(s) \cdot S(s)$

$$\begin{aligned}
 PI(s) \cdot S(s) &= \left(K_p + \frac{K_i}{s} \right) \cdot \left(\frac{1}{m \cdot R_0} \cdot \frac{(s + \sqrt{3}\omega_0)(s - \sqrt{3}\omega_0)}{s^2(s + j\omega_0)(s - j\omega_0)} \right) = \left(\frac{sK_p + K_i}{s} \right) \cdot \left(\frac{2.368e-8 \cdot s^2 + 1.284e-27 \cdot s - 3.756e-16}{s^4 + 5.288e-9 \cdot s^2} \right) \\
 &= \left(\frac{sK_p + K_i}{s} \right) \cdot \left(\frac{2.368e-8 \cdot s^2 + 1.284e-27 \cdot s - 3.756e-16}{s^4 + 5.288e-9 \cdot s^2} \right) \\
 &= 42235412 \cdot s^4 + 1,223 \cdot s^3 + \left(\frac{K_i}{K_p} \right) \cdot s^2 - 15,86E-9 \cdot s - \left(\frac{K_i}{K_p} \cdot 15,86E-9 \right)
 \end{aligned}$$

Tale polinomio non è Hurwitziano in quanto non soddisfa la condizione necessaria affinché lo sia, più precisamente non ha tutti i coefficienti positivi.

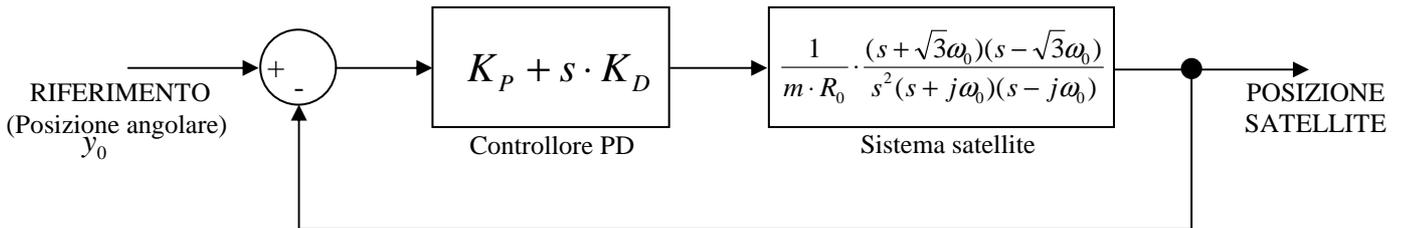
Ciò significa che il sistema reatrazionato controllato con un controllore di tipo PI non risulterà in alcun caso stabile pertanto tale controllore è da ritenersi inopportuno in questa applicazione e non verrà preso in considerazione.

Capitolo 4

Stabilizzazione mediante controllore PD

4.1 Analisi con controllore PD

Passiamo ora all'analisi del comportamento del sistema retroazionato dotato di controllore di tipo PD avente quindi proprietà proporzionali e derivate.



Tale schema ha come funzione di trasferimento la relazione $H(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{CD(s)}{1+CC(s)}$ dove $CD(s)$ rappresenta la funzione di trasferimento di azione diretta, mentre $CC(s)$ rappresenta la funzione di trasferimento della catena chiusa.

Calcoliamo anche qui $H(s)$ e verifichiamo che per qualche valore di K_p e K_d essa risulti BIBO stabile, ossia che il controllore PD sia effettivamente in grado di stabilizzare il sistema.

Studiamo quindi anche qui la funzione di trasferimento della catena di azione diretta: $PD(s) \cdot S(s)$

$$PD(s) \cdot S(s) = \left(K_p + s \cdot K_d \right) \cdot \left(\frac{1}{m \cdot R_0} \cdot \frac{(s + \sqrt{3}\omega_0)(s - \sqrt{3}\omega_0)}{s^2(s + j\omega_0)(s - j\omega_0)} \right) = \left(K_p + s \cdot K_d \right) \cdot \left(\frac{2.368e-8 \cdot s^2 + 1.284e-27 \cdot s - 3.756e-16}{s^4 + 5.288e-9 \cdot s^2} \right)$$

$$N(s) = PD(s) \cdot S(s)$$

$$D(s) = 1 + PD(s) \cdot S(s) = 1 + \left(K_p + s \cdot K_d \right) \cdot \left(\frac{2.368e-8 \cdot s^2 + 1.284e-27 \cdot s - 3.756e-16}{s^4 + 5.288e-9 \cdot s^2} \right)$$

$$D(s) = s^4 + (K_d \cdot 2.368E-8) \cdot s^3 + (K_p \cdot 2.368E-8 + K_d \cdot 1.284E-27 + 5.288E-9) \cdot s^2 + (K_p \cdot 1.284E-27 - K_d \cdot 3.756E-16) \cdot s - (K_p \cdot 3.756E-16)$$

Ora per garantire la stabilità è necessario che tutti gli zeri di $D(s)$ (ossia i poli della funzione corrispondente al sistema retroazionato) siano nel semipiano sinistro del piano complesso.

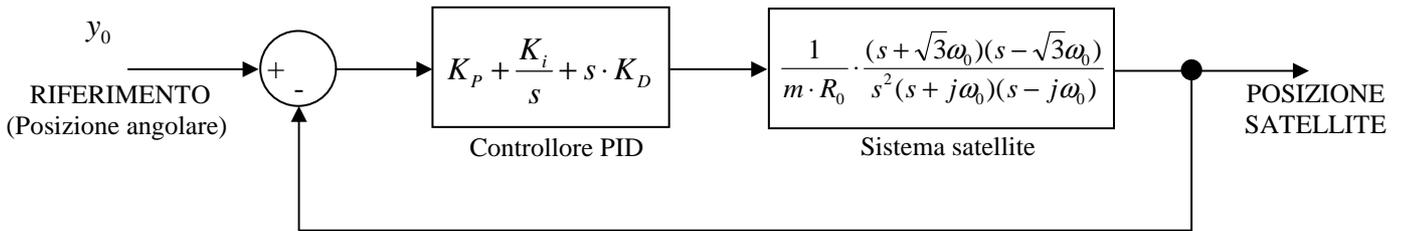
Ma come si può notare subito il termine noto ha segno negativo in quanto K_p (guadagno proporzionale) è per definizione sempre positivo. Ciò fa sì che la condizione necessaria, sebbene non sufficiente, alla stabilità richiesta dal teorema di Routh venga a mancare ponendoci di fatto nella situazione precedente avendo un sistema instabile per ogni scelta di K_p e di K_d positivi.

Capitolo 5

Stabilizzazione mediante controllore PID

4.1 Analisi con controllore PID

Veniamo ora ad analizzare il sistema retroazionato con controllore PID ad azione proporzionale integrativa e derivativa.



$H(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{CD(s)}{1 + CC(s)}$ dove $CD(s)$ rappresenta la funzione di trasferimento di azione diretta, mentre $CC(s)$ rappresenta la funzione di trasferimento della catena chiusa.

Funzione di trasferimento parametrica del sistema satellite:

$$S(s) \frac{1}{m \cdot R_0} \cdot \frac{(s + \sqrt{3}\omega_0)(s - \sqrt{3}\omega_0)}{s^2(s + j\omega_0)(s - j\omega_0)} = \frac{s^2 - 3 \cdot \omega_0^2}{m \cdot R_0 \cdot s \cdot (s^2 + \omega_0^2)}$$

funzione di trasferimento del controllore PID:

$$PID(s) = K_p + \frac{K_i}{s} + s \cdot K_D$$

Ricaviamo le funzioni di trasferimento di catena diretta e di catena chiusa del sistema retroazionato:

$$CD(s) = PID(s) \cdot S(s) = \frac{(K_D \cdot s^2 + K_p \cdot s + K_i) \cdot (s^2 - 3\omega_0^2)}{m \cdot R_0 \cdot s^3 \cdot (s^2 + \omega_0^2)}$$

$$CC(s) = PID(s) \cdot S(s) \cdot 1 = \frac{(K_D \cdot s^2 + K_p \cdot s + K_i) \cdot (s^2 - 3\omega_0^2)}{m \cdot R_0 \cdot s^3 \cdot (s^2 + \omega_0^2)}$$

Calcoliamo quindi $H(s)$:

$$H(s) = \frac{CD(s)}{1 + CC(s)} = \frac{\frac{(K_D \cdot s^2 + K_p \cdot s + K_i) \cdot (s^2 - 3\omega_0^2)}{m \cdot R_0 \cdot s^3 \cdot (s^2 + \omega_0^2)}}{1 + \frac{(K_D \cdot s^2 + K_p \cdot s + K_i) \cdot (s^2 - 3\omega_0^2)}{m \cdot R_0 \cdot s^3 \cdot (s^2 + \omega_0^2)}}$$

sviluppando i conti si ottiene H(s) in forma parametrica:

$$H(s) = \frac{(K_D \cdot s^2 + K_P \cdot s + K_I) \cdot (s^2 - 3\omega_0^2)}{s^5 \cdot (m \cdot R_0) + s^4 \cdot (K_D) + s^3 \cdot (m \cdot R_0 \cdot \omega_0^2 + K_P) + s^2 \cdot (K_I - 3 \cdot K_D \cdot \omega_0^2) + s(-3 \cdot K_D \cdot \omega_0) - 3 \cdot K_I \cdot \omega_0^2}$$

Si può notare immediatamente che il denominatore così com'è non ha tutti i coefficienti positivi (basta osservare il termine noto sempre negativo) pertanto non soddisfa la condizione necessaria al teorema di Routh. Si evince dunque che il sistema non risulta stabile in quanto il denominatore ha sicuramente almeno un polo a parte reale non negativa pertanto nemmeno la soluzione PID permette di stabilizzare il sistema.

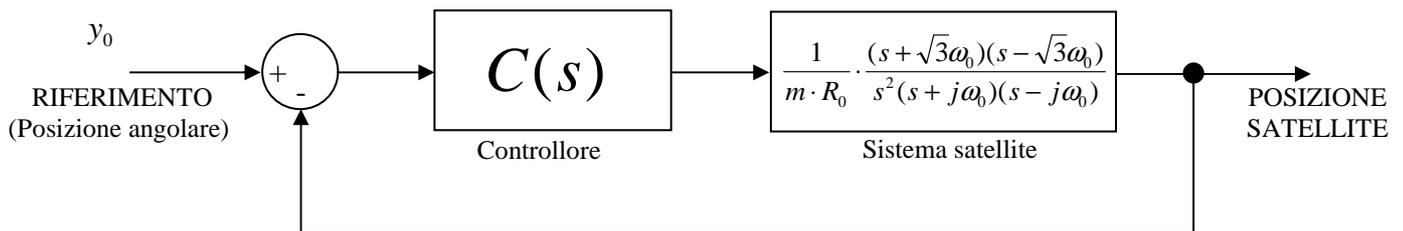
Capitolo 6

Stabilizzazione mediante sintesi diretta

6.1 Sintesi diretta del controllore

Come visto fino ad ora nessun controllore tra PI, PD e PID è risultato in grado di stabilizzare il sistema satellite. Per trovare quindi una soluzione al problema stabilità passiamo ora ad una sintesi diretta del controllore.

Consideriamo il solito sistema retroazionato dove $C(s)$ rappresenta la funzione di trasferimento del controllore da sintetizzare:



Come al solito la funzione di trasferimento risulta $H(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{CD(s)}{1 + CC(s)}$ dove $CD(s)$ rappresenta la trasfereza di azione diretta, mentre $CC(s)$ quella della catena chiusa.

Definiamo: $C(s) = \frac{M(s)}{L(s)}$ e $S(s) = \frac{\frac{1}{m \cdot R_0} \cdot (s + \sqrt{3}\omega_0)(s - \sqrt{3}\omega_0)}{s^2(s + j\omega_0)(s - j\omega_0)} = \frac{B(s)}{A(s)}$

$H(s)$ diviene:

$$H(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{B(s) \cdot M(s)}{A(s) \cdot L(s) + B(s) \cdot M(s)}$$

chiamiamo ora $n = 4$ il grado di $A(s)$, n_c il grado di $L(s)$ e \bar{n} il grado di $D(s)$.

Il nostro fine è quello di individuare una funzione $C(s)$ tale per cui $D(s)$ risulti pari a un polinomio Hurwitziano da noi desiderato che chiameremo $Pdes(s)$.

$$D(s) = A(s) \cdot L(s) + B(s) \cdot M(s) = Pdes(s)$$

$Pdes(s)$ sarà nella forma:

$$s^{\bar{n}} + p_{\bar{n}-1} \cdot s^{\bar{n}-1} + \dots + p_1 \cdot s + p_0$$

Monico in quanto sia $A(s)$ che $L(s)$ sono monici.

L'uguaglianza $A(s) \cdot L(s) + B(s) \cdot M(s) = s^{\bar{n}} + p_{\bar{n}-1} \cdot s^{\bar{n}-1} + \dots + p_1 \cdot s + p_0$ genera per tanto un sistema lineare di $n_c + n = \bar{n}$ equazioni in $2 \cdot n_c + 1$ incognite.

Si può dimostrare che tale sistema ha un'unica soluzione se valgono le relazioni:

$$n_c = n - 1 \qquad \bar{n} = 2n - 1$$

Nel caso in esame si avranno quindi:

$$n = 4$$

$$n_c = n - 1 = 3$$

$$\bar{n} = 2n - 1 = 7$$

C(s) deve essere una funzione di trasferimento propria, sarà pertanto nella forma:

$$C(s) = \frac{a_3 \cdot s^3 + a_2 \cdot s^2 + a_1 \cdot s + a_0}{s^3 + b_2 \cdot s^2 + b_1 \cdot s + b_0}$$

con $a_3, a_2, a_1, a_0, b_2, b_1, b_0$ da determinare.

Scegliamo ora Pdes(s), ossia imponiamo la posizione dei poli della funzione H(s).

Per questa applicazione sono stati scelti i seguenti poli:

$$\left. \begin{array}{l} P_0 = -0.1 \\ P_1 = -0.1 \\ P_2 = -0.2 \\ P_3 = -0.2 \\ P_4 = -0.3 \\ P_5 = -0.3 \\ P_6 = -0.4 \end{array} \right\} \text{Poli con dinamica dominante}$$

originati dal polinomio:

$$Pdes(s) = (s + 0.1)^2 \cdot (s + 0.2)^2 \cdot (s + 0.3)^2 \cdot (s + 0.4)$$

L'uguaglianza tra il denominatore di H(s) e il polinomio desiderato Pdes(s)

$$D(s) = A(s) \cdot L(s) + B(s) \cdot M(s) = (s + 0.1)^2 \cdot (s + 0.2)^2 \cdot (s + 0.3)^2 \cdot (s + 0.4) = Pdes(s)$$

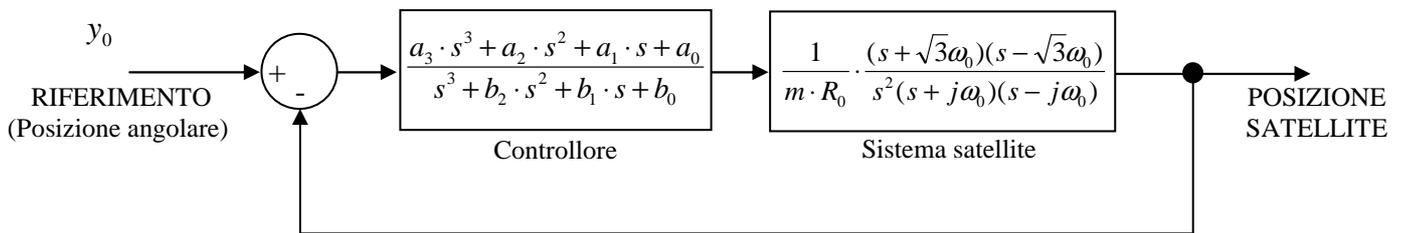
genera il sistema:

$$\left\{ \begin{array}{l} b_2 = 1.6 \\ \frac{a_3}{m \cdot R_0} + \omega_0^2 + b_1 = 1.06 \\ \frac{a_2}{m \cdot R_0} + b_2 \cdot \omega_0^2 + b_0 = 0.376 \\ \frac{-3 \cdot a_3 \cdot \omega_0^2}{m \cdot R_0} + \frac{a_1}{m \cdot R_0} + b_1 \cdot \omega^2 = 76.9 \cdot 10^{-3} \\ \frac{-3 \cdot a_2 \cdot \omega_0^2}{m \cdot R_0} + \frac{a_0}{m \cdot R_0} + b_0 \cdot \omega^2 = 904 \cdot 10^{-3} \\ \frac{-3 \cdot a_1 \cdot \omega_0^2}{m \cdot R_0} = 5.64 \cdot 10^{-4} \\ \frac{-3 \cdot a_0 \cdot \omega_0^2}{m \cdot R_0} = 1.44 \cdot 10^{-5} \end{array} \right.$$

Risolvendo si ottiene:

$$\begin{cases} a_0 = -3.8333 \cdot 10^{13} \\ a_1 = -1.5014 \cdot 10^{15} \\ a_2 = -1.8121 \cdot 10^{21} \\ a_3 = -7.0975 \cdot 10^{22} \\ b_0 = 4.2906 \cdot 10^{10} \\ b_1 = 1.6804 \cdot 10^{22} \\ b_2 = 1.6 \end{cases}$$

Il sistema retroazionato sarà dunque



6.2 Simulazioni

6.2.1 Diagramma di Nyquist e risposta a gradino

Come prima cosa effettueremo la simulazione in matlab della risposta ad un gradino del sistema in retroazione controllato dal controllore appena sintetizzato. Verrà inoltre tracciato il diagramma di Nyquist.

```
clc
clear all
close all

%%%%%%%%%%%%%% CARATTERISTICHE FISICHE SISTEMA %%%%%%%%%%%%%%%

%MASSA TERRA [Kg]
M=5.9736*(10^24);
%MASSA SATELLITE [Kg]
m=1000;
%COSTANTE DI GRAVITAZIONE UNIVERSALE G[N m^2/Kg^2]
G=6.67*(10^-11);
%VELOCITA' ANGOLARE DI RIVOLUZIONE TERRESTRE w0[Rad/sec]
w0=(2*pi)/(24*3600)

%RAGGIO ORBITA DI EQUILIBRIO geostazionario R0[Km]
R0=nthroot(((G*M)/w0^2),3)

%DEFINIZIONE DELLE MATRICI DI STATO
A= [0 1 0 0; 3*(w0*w0) 0 0 2*R0*w0; 0 0 0 1; 0 -((2*w0)/R0) 0 0];
B= [0; 0; 0; (1/(m*R0))];
C= [0 0 1 0];
D= 0;
%CREAZIONE DEL SISTEMA
sat= ss(A,B,C,D);

%DEFINIZIONE DELLA FUNZIONE DI TRASFERIMENTO DEL CONTROLLORE
a0=-3.833382070250972*10^13;
a1=-1.501407977514964*10^15;
a2=-1.812152792991541*10^21;
a3=-7.097543101432838*10^22;
b0=4.290642341677332*10^10;
b1=1.68048848145787*10^12;
b2=1.6;

M=[a3 a2 a1 a0];
L=[1 b2 b1 b0];
cs=tf(M,L);

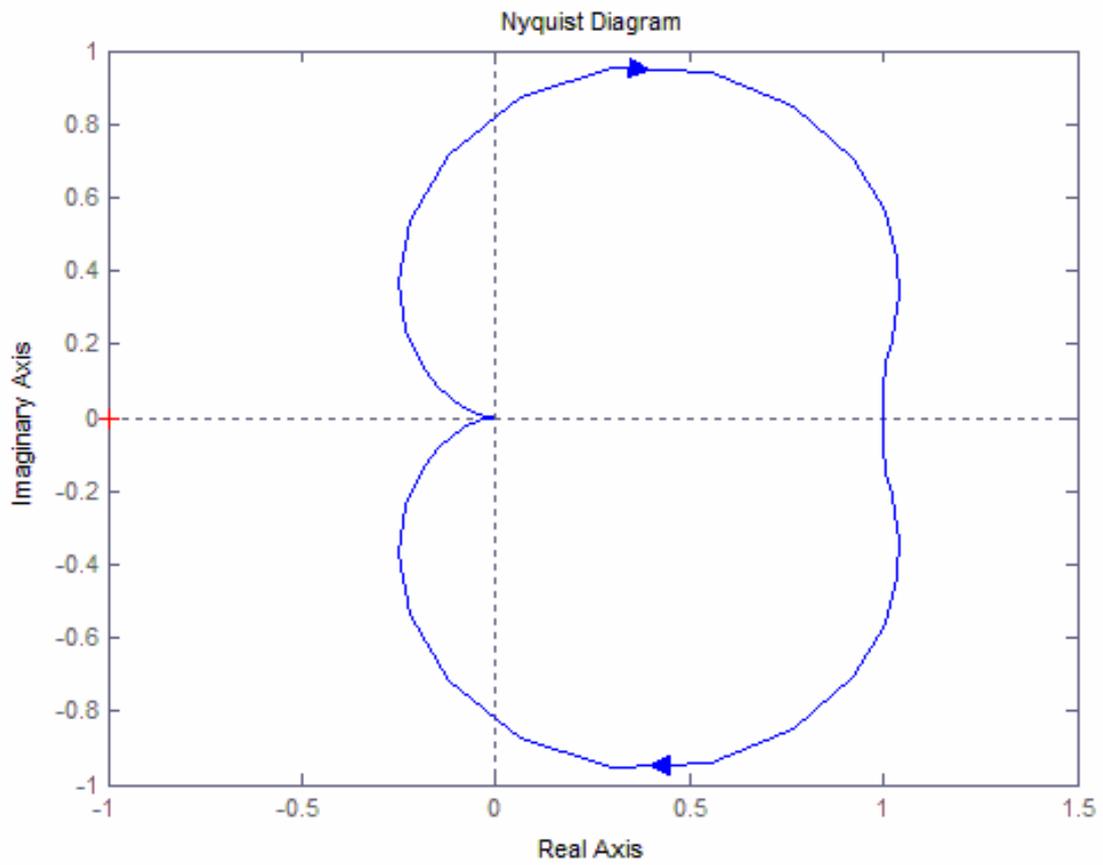
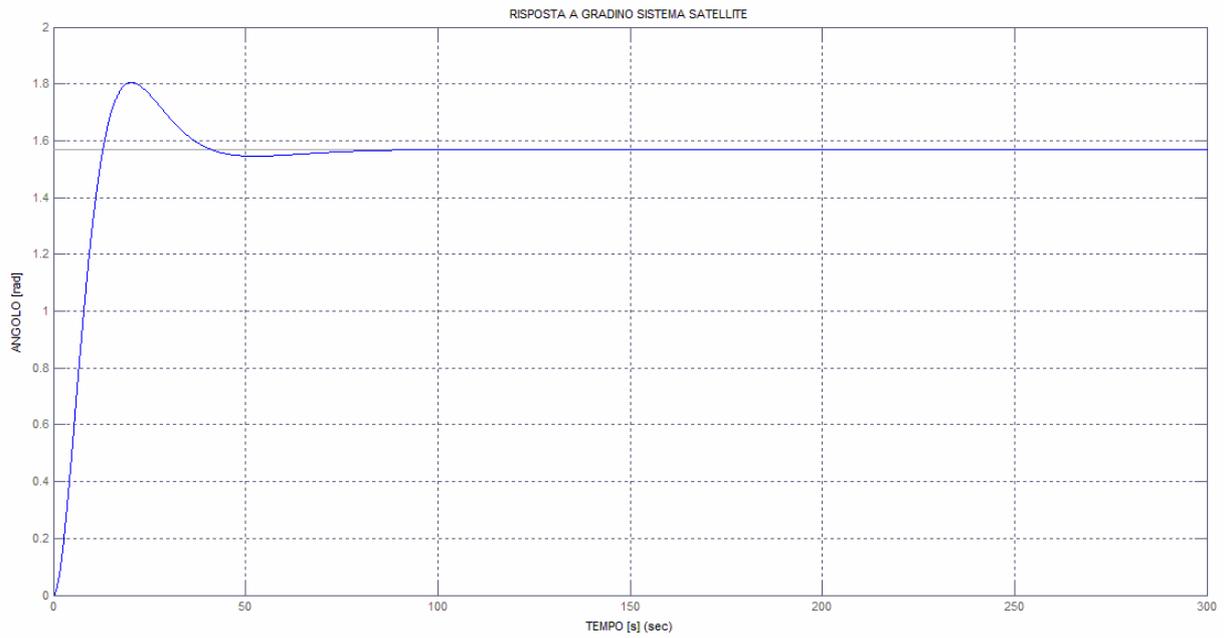
%FUNZIONE DI TRASFERIMENTO SISTEMA RETROAZIONATO
Hs=((cs*sat)/(1+(cs*sat)));

%TEMPO DI SIMULAZIONE
t=0:0.01:300;

%DEFINISCO UN GRADINO DI AMPIEZZA 1.57 (pi/2) COME INGRESSO
u=1.57*ones(size(t));

%RISPOSTA A GRADINO
figure(1),lsim(Hs,u,t),grid
title('RISPOSTA A GRADINO SISTEMA SATELLITE')
xlabel('TEMPO [s]')
ylabel('ANGOLO [rad]')
figure(2),nyquist(Hs)
```

Output del listato matlab:

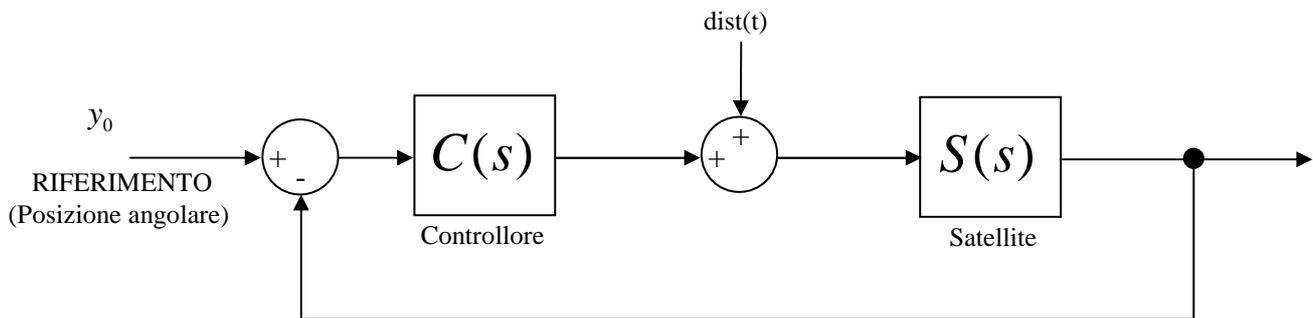


6.2.2 Comportamento con immissione di disturbi

Veniamo ora alla simulazione della risposta del sistema con presenza di disturbi. La presenza di disturbi è un aspetto sempre presente nella realtà dei sistemi, pertanto esso rappresenta uno dei punti cruciali da tenere in considerazione sia nella fase di progettazione che in quella di realizzazione.

Modifichiamo quindi lo schema del sistema introducendo, appunto, una fonte di disturbo che nella fattispecie è collocata tra controllore e sistema satellite.

Consideriamo quindi il seguente schema:

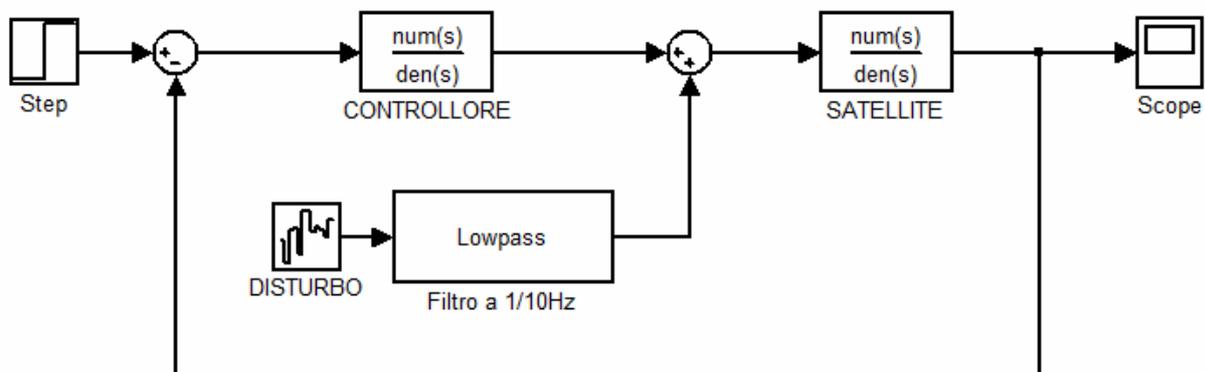


Dove $dist(t)$ rappresenta il segnale di disturbo che va a sommarsi all'ingresso del sistema satellite.

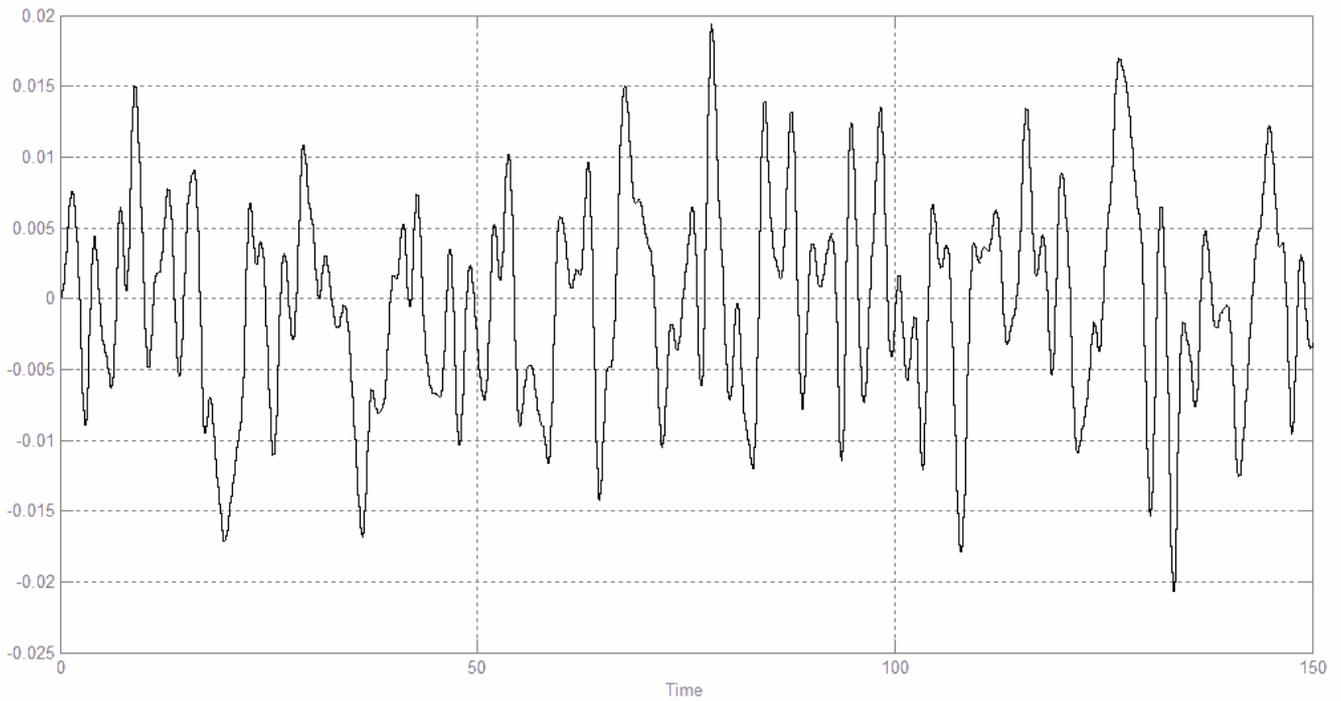
Il disturbo in questo caso rappresenta una forza indesiderata che si somma alla spinta prodotta dal motore del satellite. La presenza di questa forza indesiderata è un aspetto molto realistico nel sistema qui studiato. Basti pensare ad esempio all'influenza gravitazionale esercitata dalla luna o da altri pianeti vicini sul satellite stesso.

Nel nostro caso assumiamo che $dist(t)$ sia un segnale di rumore bianco con distribuzione gaussiana. L'ampiezza di banda del disturbo è filtrata a 1/10 di Hz.

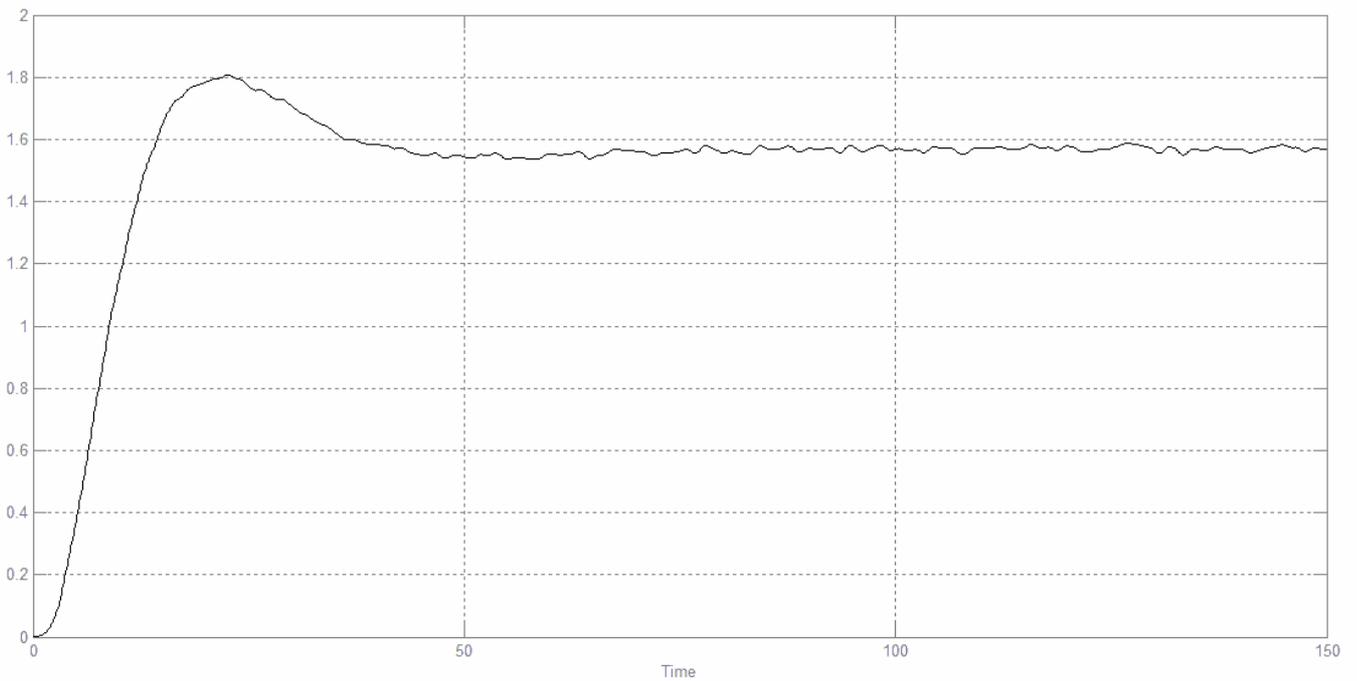
Per effettuare la simulazione questa volta si è usato lo strumento di Matlab SimuLink con il seguente circuito:



Disturbo inserito nel sistema:



Risposta del sistema al gradino con inserimento del disturbo



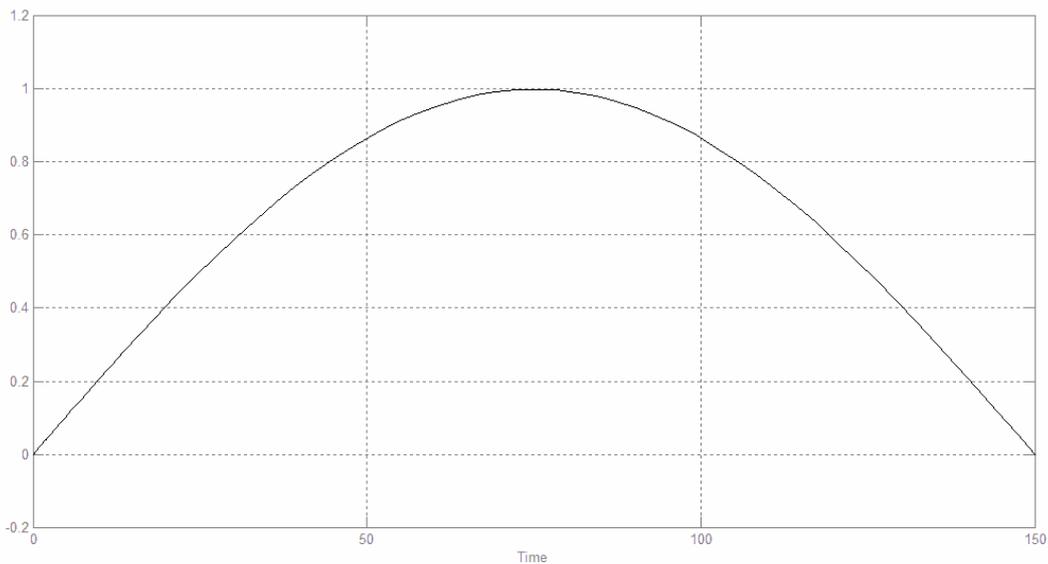
Come si nota dalla risposta il satellite sebbene perturbato rimane nell'intorno del punto di equilibrio grazie appunto al controllo realizzato.

6.2.3 Comportamento con simulazione attrazione gravitazionale lunare

Vediamo ora una simulazione del comportamento del sistema in un caso reale.

Il caso preso in considerazione è il passaggio del satellite in un'area dello spazio in cui l'attrazione gravitazionale lunare non è del tutto trascurabile.

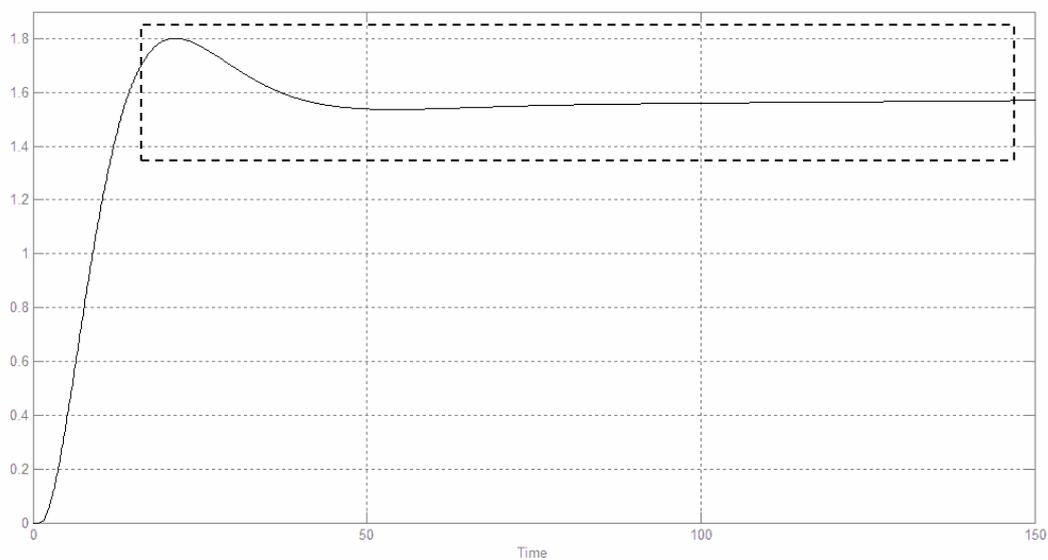
Semplifichiamo la forza gravitazionale lunare sul satellite con un segnale che chiamiamo $\text{moon}(t)$ il cui andamento è qui di seguito riportato:



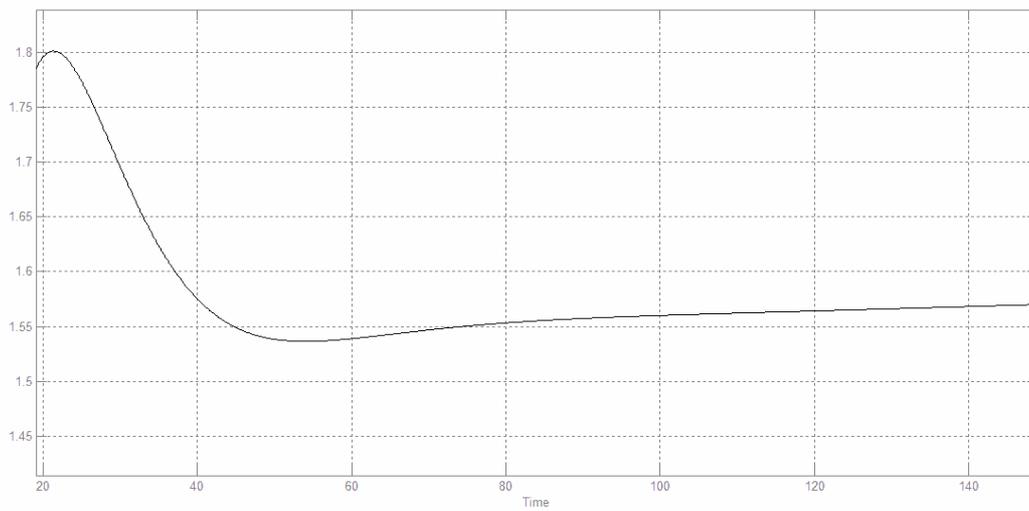
L'andamento vuole simulare appunto il passaggio "ravvicinato" (circa 160.000Km) della luna dal satellite ed è stato approssimato a sinusoidale.

Per ipotesi nella simulazione tale forza ha verso opposto a quello positivo di spinta dei motori pertanto tende a "frenare" la rotazione in orbita.

Simulando la risposta del sistema si ha:



si può notare una leggera diminuzione dell'angolo durante il picco di attrazione gravitazionale lunare nell'ingrandimento tratteggiato riportato nel diagramma seguente.



Ciò è spiegabile nel fatto che il disturbo dovuto al passaggio della luna tende a far diminuire la velocità di rotazione del satellite che rimane in ritardo rispetto alla rotazione terrestre allontanandosi di fatto dalla posizione di equilibrio geostazionario e facendo diminuire quindi l'angolo relativo con la terra.

Il sistema di controllo rileva l'errore e compensa con la spinta dei motori riportando poi il satellite nello stato di equilibrio voluto.

Appendice A

Stabilità e criteri per determinarla

Concetto di stabilità

Il concetto di stabilità è piuttosto generale e può essere definito in diversi contesti. Per i problemi di interesse nell'area dei controlli automatici, si fa sempre esplicito riferimento alla stabilità di un punto di equilibrio di un sistema dinamico.

Stabilità di un punto di equilibrio

Sia dato un sistema dinamico tempo continuo, rappresentato in variabili di stato:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \\ y(t) = g(x(t), u(t)) \\ x(0) = x_0, \end{cases}$$

dove $x \in \mathbb{R}^n$ e $y \in \mathbb{R}^m$

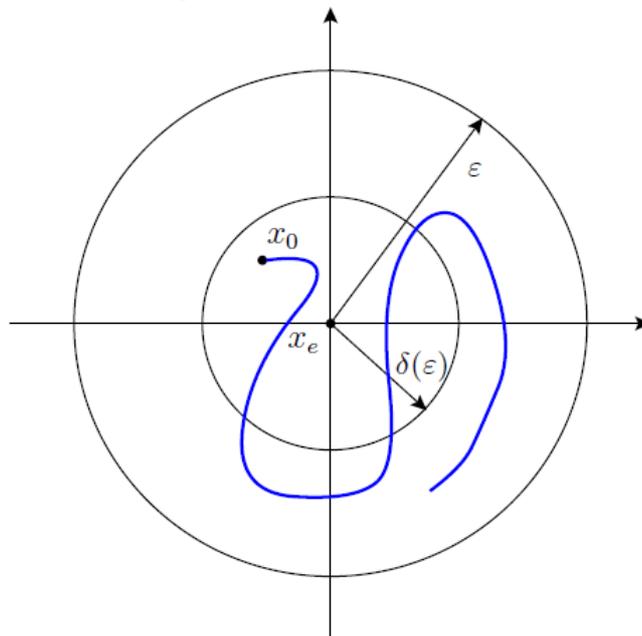
Si definisce **punto di equilibrio** un punto dello spazio di stato nel quale il sistema permane in uno stato di quiete (una volta fissato un ingresso costante U), cioè, tale per cui:

$$\dot{x}(t) = f(x(t), U) = 0.$$

Sia x_e un punto di equilibrio. Esso si dirà localmente stabile se:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \|x_0 - x_e\| \leq \delta(\varepsilon) \longrightarrow \|x(t, x_0) - x_e\| \leq \varepsilon, \forall t > 0.$$

Questo significa che, partendo da una condizione iniziale x_0 "vicina" ad un punto di equilibrio localmente stabile x_e , la "traiettoria" seguita dal sistema non si allontana mai più di ε da x_e .



Interpretazione grafica del concetto di stabilità locale di un punto di equilibrio.

Per un sistema lineare la stabilità locale implica quella globale, ovvero, la condizione sopra enunciata se vale per un x_0 , allora sarà valida per ogni scelta di x_0 .

Sia x_e un punto di equilibrio. Esso si dirà asintoticamente stabile, se è stabile ed inoltre:

$$\exists \delta_a > 0 : \|x_0 - x_e\| \leq \delta_a \quad \longrightarrow \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t, x_0) - x_e\| = 0.$$

Stabilità ingresso limitato-uscita limitata

Un sistema dinamico si dice BIBO stabile (bounded input - bounded output) se ad ogni segnale in ingresso di ampiezza limitata corrisponde un'uscita anch'essa limitata, cioè:

$$\exists U, Y < +\infty : \forall u : |u(t)| \leq U, \forall t \geq 0 \quad \longrightarrow \quad |y(t)| \leq Y, \forall t \geq 0.$$

Per i sistemi lineari e stazionari vale il seguente teorema:

Teorema 1 (Stabilità BIBO per sistemi lineari)

Un sistema lineare è stabile in senso BIBO se e solo se:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |w(\tau)| d\tau < \infty$$

dove $w(\tau)$ denota la risposta impulsiva del sistema.

Criteri di stabilità per polinomi

Poichè la stabilità di un sistema lineare è diretta conseguenza della posizione dei suoi poli nel piano complesso, risulta evidente l'importanza di poter determinare in quale semipiano sono posizionate le radici di un polinomio (ovvero del denominatore della funzione di trasferimento).

I metodi che analizzeremo saranno in grado di fornire informazioni sul numero delle radici a parte reale positiva, negativa o nulla di un polinomio (non forniranno informazioni circa la loro posizione esatta nel piano complesso).

Criterio di Routh

Sia dato un generico polinomio:

$$P_n(s) = s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0.$$

Risulta evidente che tale polinomio può essere scomposto nella somma di due polinomi, uno contenente le potenze pari ed uno quelle dispari, cioè:

$$\begin{aligned} P_n(s) &= \underbrace{s^n + a_{n-2} s^{n-2} + a_{n-4} s^{n-4} + \dots}_{Q_n(s)} + \underbrace{a_{n-1} s^{n-1} + a_{n-3} s^{n-3} + a_{n-5} s^{n-5} + \dots}_{Q_{n-1}(s)} \\ &= Q_n(s) + Q_{n-1}(s). \end{aligned}$$

A questo punto, effettuiamo le seguenti divisioni successive:

$$\frac{Q_n(s)}{Q_{n-1}(s)} = q_{n-1} s + \frac{Q_{n-2}(s)}{Q_{n-1}(s)}$$

$$\frac{Q_{n-1}(s)}{Q_{n-2}(s)} = q_{n-2} s + \frac{Q_{n-3}(s)}{Q_{n-2}(s)}$$

...

Queste divisioni si possono reiterare finchè non si ottiene un polinomio di grado 0 (costante). Poichè $Q_i(s)$ è formato solo da potenze pari (se i è pari) o solo dispari (se i è dispari), possiamo utilizzare la seguente notazione:

$$Q_i(s) = \sum_j \alpha_{i,j} s^j$$

dove l'indice j assume i valori $i, i - 2, i - 4, \dots$ fino a 0 se i è pari, o fino ad 1 se i è dispari. Inoltre, assumeremo che:

$$\begin{aligned} \alpha_{n,j} &= a_j && \text{per } j = n, n - 2, n - 4, \dots \\ \alpha_{n-1,j} &= a_j && \text{per } j = n - 1, n - 3, n - 5, \dots \end{aligned}$$

Gli elementi i,j disposti opportunamente costituiscono quella che si chiama Tabella di Routh.

Vale il seguente teorema:

Condizione necessaria e sufficiente affinché tutte le radici di un polinomio siano a parte reale minore di zero, è che gli i_i siano strettamente dello stesso segno per tutti i valori di i da 0 a n .

n	$\alpha_{n,n}$	$\alpha_{n,n-2}$	$\alpha_{n,n-4}$	\dots
$n - 1$	$\alpha_{n-1,n-1}$	$\alpha_{n-1,n-3}$	$\alpha_{n-1,n-5}$	\dots
$n - 2$	$\alpha_{n-2,n-2}$	$\alpha_{n-2,n-4}$	$\alpha_{n-2,n-6}$	\dots
$n - 3$	$\alpha_{n-3,n-3}$	$\alpha_{n-3,n-5}$	$\alpha_{n-3,n-7}$	\dots
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	
2	$\alpha_{2,2}$	$\alpha_{2,0}$		
1	$\alpha_{1,1}$			
0	$\alpha_{0,0}$			

Tabella di Routh

E' possibile calcolare gli elementi di ciascuna riga a partire da quelli delle due righe precedenti (purchè la seconda di queste non inizi con un elemento nullo), utilizzando la formula:

$$\alpha_{i,j} = - \frac{\begin{vmatrix} \alpha_{i+2,i+2} & \alpha_{i+2,j} \\ \alpha_{i+1,i+1} & \alpha_{i+1,j-1} \end{vmatrix}}{\alpha_{i+1,i+1}} = \alpha_{i+2,j} - \frac{\alpha_{i+2,i+2} \alpha_{i+1,j-1}}{\alpha_{i+1,i+1}}$$

che corrispondono ai coefficienti del polinomio resto della divisione di Q_{i+2} per Q_{i+1} .

Casi critici del criterio di Routh

Durante la compilazione della tabella di Routh è possibile incorrere nei seguenti casi critici:

- Il primo termine di una riga è nullo. In questo caso la costruzione della tabella non può proseguire in quanto si incorrerebbe in una divisione per zero. Una possibile soluzione è quella di sostituire al posto dell'elemento nullo il valore $+\varepsilon$ o $-\varepsilon$ ($\varepsilon > 0$ infinitesimo) e proseguire con la costruzione della tabella. Le variazioni di segno degli elementi in prima colonna non subiranno modifiche per $\varepsilon \rightarrow 0$. Un metodo alternativo è quello di moltiplicare il polinomio originale per un polinomio del primo ordine, come ad esempio $(s + 1)$ e ricostruire la tabella, tenendo presente l'aggiunta fittizia di una radice stabile al polinomio di partenza.

- Tutti i termini di una riga sono nulli. Questa condizione si può verificare solo nelle righe di indice dispari. Supponiamo che tale indice sia $2m-1$. Allora si considera la riga immediatamente precedente ($2m$) e la si scrive come:

$$b_{2m} s^{2m} + b_{2m-2} s^{2m-2} + \dots + b_0 = 0.$$

A questo punto effettuiamo la derivata dell'espressione sovrastante, inseriamo i coefficienti ottenuti nella riga $2m-1$ e proseguiamo con la costruzione della tabella.

In tutti e due i casi precedenti, si conclude immediatamente che il polinomio non è stabile. L'ulteriore costruzione della tabella serve solo per localizzare esattamente il numero di radici a destra e a sinistra del piano complesso.

Se nella costruzione della tabella di Routh appare un coefficiente nullo o negativo in una qualunque posizione, se ne può subito concludere che il polinomio non è stabile.

Criteri di stabilità ad anello chiuso

Qui analizzeremo i criteri di stabilità grafici per sistemi ad anello chiuso (in retroazione). E' da notare che l'uso del criterio algebrico di Routh, è di utilizzo immediato a questo fine. In particolare faremo riferimento allo schema in retroazione unitaria riportato nella seguente figura:

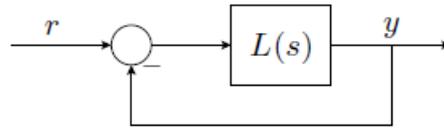


Fig.1.1

E' possibile verificare che uno schema in retroazione non unitaria è riconducibile ad uno schema in retroazione unitaria con le stesse proprietà di stabilità.

Criterio di stabilità di Nyquist

Il criterio di stabilità di Nyquist consente di determinare la stabilità dell'anello chiuso analizzando il diagramma di Nyquist della funzione ad anello aperto. Al fine di poter enunciare questo criterio, è necessario introdurre il cosiddetto principio dell'argomento (o lemma di Cauchy).

Principio dell'argomento (Lemma di Cauchy):

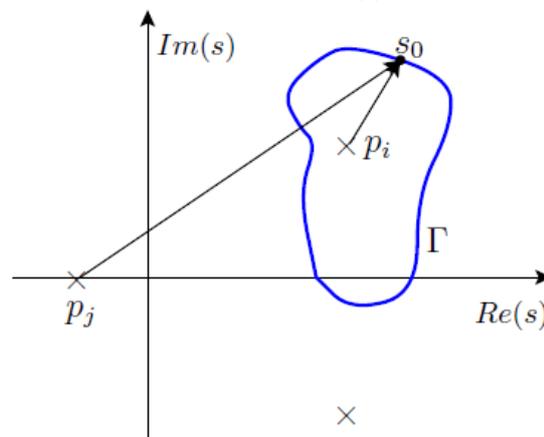
Sia data una generica funzione di variabile complessa $F(s)$; supponiamo di poter scrivere questa funzione come:

$$F(s) \triangleq \frac{\prod_{i=1}^m (s - z_i)}{\prod_{i=1}^n (s - p_i)}$$

Sia Γ una qualunque curva chiusa nel piano percorsa in senso orario che non passa ne per i poli, ne per gli zeri di $F(s)$. Analizzando la fase di $F(s)$ risulta che:

$$\angle F(s) = \sum_{i=1}^m \angle (s - z_i) - \sum_{i=1}^n \angle (s - p_i)$$

Supponiamo adesso di far percorrere alla variabile complessa s la curva chiusa Γ in senso orario, ed andiamo a valutare la variazione di fase di $F(s)$, indicata con $\angle F(s)$.



Dalla figura sovrastante risulta evidente che:

$$\Delta \angle F(s) = \begin{cases} -2\pi & , \text{ se } p_i \text{ è interno a } \Gamma \\ 0 & , \text{ se } p_i \text{ è esterno a } \Gamma \end{cases}$$

Dall'analisi della fase precedentemente citata si ha che:

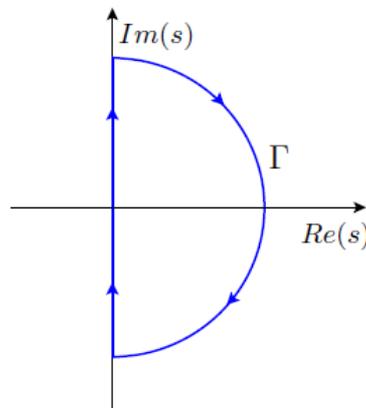
$$\Delta\angle F(s) = \sum_{i=1}^m \Delta\angle(s - z_i) - \sum_{i=1}^n \Delta\angle(s - p_i) = -2\pi(N_{z\Gamma}^F - N_{p\Gamma}^F)$$

dove $N_{z\Gamma}^F$ e $N_{p\Gamma}^F$ denotano rispettivamente il numero di zeri e di poli di $F(s)$ interni alla curva Γ . Possiamo quindi riformulare il risultato di questo lemma come:

$$N_{or}^F = N_{z\Gamma}^F - N_{p\Gamma}^F$$

dove N_{or}^F denota il numero di rotazioni orarie intorno all'origine di $F(s)$ per s che percorre la curva Γ in senso orario.

Il criterio di stabilità di Nyquist è una diretta conseguenza del lemma di Cauchy. Consideriamo infatti la curva Γ riportata nella figura successiva. Tale curva si suppone estesa all'infinito, per cui circonda tutti gli zeri e poli nel semipiano destro.



Applicando il principio dell'argomento alla funzione $F(s) \triangleq 1 + L(s) = 1 + G(s)H(s)$ si ottiene:

$$N_{or}^F = N_{zd}^F - N_{pd}^F$$

Dove con N_{zd} e N_{pd} si denotano rispettivamente gli zeri e i poli di $F(s)$ nel semipiano destro. Risulta però evidente che gli zeri di $F(s)$ coincidono con i poli di $\tilde{G}(s)$, mentre i poli di $F(s)$ coincidono con quelli di $L(s)$. Possiamo quindi affermare che:

$$N_{pd}^{AC} = N_{pd}^{AA} + N_{or}^F$$

dove AC sta per Anello Chiuso, AA per Anello Aperto, e N_{or}^F è il numero di rotazioni orarie del diagramma di Nyquist di F intorno a 0.

Per semplicità, risulta più conveniente tracciare il diagramma di Nyquist di $L(s)$ (anzichè di $F(s) = 1 + L(s)$) e considerare le rotazioni orarie intorno al punto $(-1,0)$.

Teorema (Criterio di Nyquist)

Sia dato il sistema di fig.1. Condizione necessaria e sufficiente per la stabilità asintotica del sistema è che:

$$N_{aor-1}^L = N_{pd}^{AA}$$

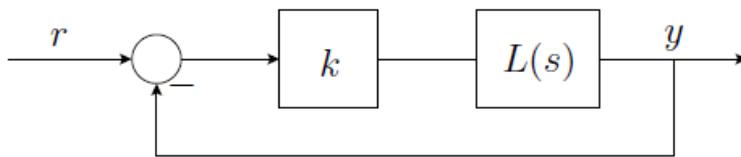
dove N_{aor-1}^L denota il numero di rotazioni antiorarie del diagramma di Nyquist di $L(j\omega)$ intorno al punto $(-1,0)$.

Dalla relazione $N_{pd}^{AC} = N_{pd}^{AA} + N_{or}^F$, si osserva che:

- Rotazioni orarie di $L(j\omega)$ aggiungono instabilità al sistema ad anello chiuso rispetto a quelle dell'anello aperto.
- Rotazioni antiorarie di $L(j\omega)$ neutralizzano eventuali instabilità ad anello aperto.
- Se il diagramma di $L(j\omega)$ passa per il punto $(-1,0)$, il sistema ad anello chiuso ha almeno un polo sull'asse immaginario.
- Per studiare la stabilità di un sistema con retroazione positiva è sufficiente applicare il criterio considerando le rotazioni intorno al punto $(1,0)$.

Discussione della stabilità al variare del guadagno di anello

Consideriamo lo schema



in cui:

$$L(s) = \frac{1}{s(1 + s\tau_1)(1 + s\tau_2)} \quad \tau_1, \tau_2 > 0.$$

Sia $-\alpha$ il punto di intersezione di $L(j\omega)$ con l'asse reale. Il diagramma di Nyquist è portato in Fig. 2. Assumiamo per ora $K=1$.

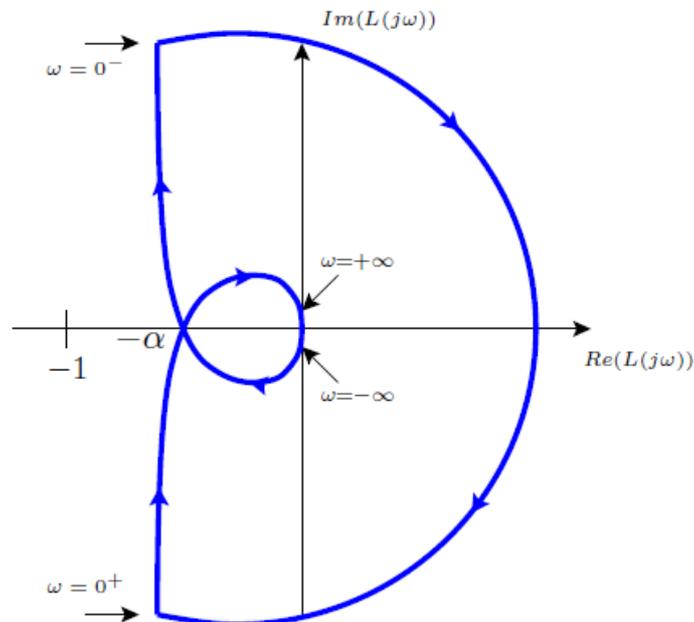


Fig.2

Poichè il sistema ad anello aperto non ha poli a parte reale strettamente positiva, per il criterio di Nyquist, il sistema ad anello chiuso sarà stabile se e solo se il diagramma di $L(j\omega)$ non compie rotazioni orarie intorno al punto $(-1,0)$.

Vogliamo adesso valutare per quali valori di k il sistema in retroazione è stabile.

Consideriamo $k > 0$. Poichè l'effetto di k sul diagramma di Nyquist comporta una variazione del modulo ad ogni singola frequenza, è evidente che il punto critico da considerare sarà quello di intersezione con l'asse delle ascisse. Un valore di k eccessivamente elevato comporterà uno

spostamento del punto $-\alpha$ verso sinistra oltre il punto $(-1,0)$, dando luogo a 2 rotazioni orarie intorno a tale punto. E' chiaro dunque che i valori di k tali da dare origine a un sistema stabile sono dati da:

$$0 < k < \frac{1}{\alpha}.$$

Consideriamo adesso i valori di $k < 0$. In questo caso dobbiamo analizzare le rotazioni orarie intorno al punto $(1,0)$. Essendo la richiusura effettuata all'infinito, avremo sempre una rotazione oraria intorno a tale punto (indipendentemente dal valore di k).

Possiamo quindi riepilogare i risultati trovati:

- $k < 0 \longrightarrow$ anello chiuso instabile con 1 polo a destra.
- $0 < k < \frac{1}{\alpha} \longrightarrow$ anello chiuso asintoticamente stabile.
- $k > \frac{1}{\alpha} \longrightarrow$ anello chiuso instabile con 2 poli a destra.

Nella discussione precedente abbiamo visto come un aumento eccessivo del guadagno possa portare il sistema ad anello chiuso in condizione di instabilità, mentre un valore molto piccolo produce un effetto stabilizzante. Questa è in effetti una situazione comune, ma non è sempre valida. Possono esistere casi in cui si verifica esattamente il fenomeno opposto, oppure casi in cui gli intervalli di stabilità sono disgiunti.

Bibliografia

- Ferrante Augusto - Lepschy Antonio - Viaro Umberto (2000)
Introduzione ai controlli automatici
- Ricci Giuseppe - Valcher Maria Elena
Segnali e sistemi
- Bertocco Matteo - Sona Alessandro
Introduzione alle misure elettroniche
- Fornasini E. - Marchesini G.
Appunti di teoria dei sistemi
- Rocco Paolo
Dispense di automatica
- Laura Giarrè
Appunti sui controllori