



UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

FACOLTÀ DI INGEGNERIA

DIPARTIMENTO DI TECNICA E GESTIONE DEI SISTEMI INDUSTRIALI

TESI DI LAUREA MAGISTRALE

IN

INGEGNERIA DELL'INNOVAZIONE DEL PRODOTTO

**APPLICAZIONE DELL'ENERGIA LOCALE DI DEFORMAZIONE  
PER LA PREVISIONE DELLA RESISTENZA STATICA E A  
FATICA DI COMPONENTI DI INTERESSE INDUSTRIALE**

**Relatore:** Ch.mo Prof. Filippo Berto

**Correlatore:** Dott. Ing. Alberto Campagnolo

**Laureando:** Marco Bernardini

**Matricola:** 1080221

ANNO ACCADEMICO 2014-2015



# Ringraziamenti

---

*Desidero ringraziare tutte le persone che hanno contribuito a rendere indimenticabili questi cinque anni che ricorderò sicuramente con grande nostalgia.*

*Innanzitutto devo ringraziare i miei genitori che mi hanno dato la possibilità di intraprendere e completare gli studi universitari, spronandomi e supportandomi con i loro saggi e preziosi consigli in ogni mia decisione e in ogni mia iniziativa.*

*Un ringraziamento speciale a Jolanda, la mia ragazza, per essere stata sempre presente e per aver ininterrottamente ricambiato il mio amore anche nei momenti in cui non sono riuscito ad esprimerlo appieno. Devo ringraziarla inoltre per la determinazione che mi ha costantemente trasmesso in questi anni e che mi ha aiutato ad ottenere sempre ottimi risultati.*

*Ringrazio mio fratello Giovanni per la simpatia e l'allegria che ha sempre saputo mantenere a casa e per essere riuscito a sopportarmi anche nei momenti di maggior tensione e nervosismo.*

*Ringrazio le mie nonne, i miei zii e i miei cugini per avermi sempre incoraggiato nel proseguo degli studi.*

*Un grazie a tutti i miei compagni di corso per questi anni trascorsi insieme, in particolare ad Axel R., amico e compagno che ha sempre saputo supportarmi sia nella scuola che nella vita.*

*Un ringraziamento va anche a tutti gli amici che ho avuto modo di conoscere a Jönköping in Svezia, in particolare Eduardo G. C. e Bernhard N., che hanno contribuito a rendere i cinque mesi trascorsi in Erasmus una delle esperienze più belle della mia vita, che ricorderò sempre con grande gioia.*

*Ringrazio i miei ex coinquilini Andrea C., Alberto Z. e Mattia V., con i quali ho condiviso momenti indimenticabili che non smetterò mai di ricordare con grande nostalgia.*

*Ringrazio inoltre i miei amici Giacomo C., Andrea C., Alberto Z., Alessandro B., Alessandro P. A. e Marco M. per le bellissime esperienze trascorse assieme e per la stima che hanno sempre nutrito per me in questi anni.*

*Ringrazio il Professor Filippo Berto e l'Ingegnere Alberto Campagnolo per il prezioso aiuto che mi hanno dato in questi mesi durante l'attività di tesi. Li ringrazio per essere stati sempre disponibili ad offrirmi sostegno e preziosi consigli e per la fiducia che hanno sempre dimostrato nei miei confronti.*

*Un ringraziamento va inoltre alla Rulli Rulmeca S.p.A. di Almè (BG), in particolare al Presidente Dottor Marco Ghisalberti e all'A.D. Dottor Fabio Ghisalberti per avermi ospitato in qualità di tirocinante e tesista e all'Ingegnere Marco Cincera e all'Ingegnere Francesco Chebat per avermi supportato costantemente nelle mie attività in azienda e per avermi dato la possibilità di rendere più completa la mia preparazione universitaria fino ad allora quasi esclusivamente teorica.*

# Indice

---

<i>Sommario</i> .....	V
<b>Capitolo I: Introduzione alla teoria dei metodi di analisi agli elementi finiti</b> .....	1
1.1 Introduzione .....	3
1.2 Il concetto di Analisi agli Elementi Finiti.....	3
1.3 I Nodi .....	5
1.4 Gli Elementi.....	6
1.5 Approccio Diretto .....	7
1.6 Assemblaggio del Sistema Globale di Equazioni .....	9
1.7 Risoluzione del Sistema Globale di Equazioni.....	10
1.8 Condizioni al contorno.....	12
1.9 Funzioni di Approssimazione .....	13
1.10 Funzioni di forma .....	17
1.11 Conclusioni.....	19
<b>Capitolo II: Effetti tridimensionali in dischi criccati sottoposti ad un carico di modo II</b> .....	21
2.1 Introduzione .....	23
2.2 Frame analitico: campi di tensione e deformazione dovuti a modo II.....	23
2.3 Densità di energia di deformazione associata ad un carico di modo II .....	25
2.4 Densità di energia di deformazione associata ad un carico di Modo III.....	26
2.5 Analisi agli elementi finiti di dischi tridimensionali .....	28
2.6 Discussione dei risultati ottenuti dalle analisi.....	30
2.6.1 <i>Campi di tensione</i> .....	30

2.6.2	<i>Fattori di Intensificazione delle Tensioni</i> .....	45
2.7	La densità di energia di deformazione calcolata lungo lo spessore del disco ...	48
2.7.1	<i>Variazione della SED nel modello tridimensionale con condizioni al contorno di tipo Free-Free</i> .....	51
2.8	Conclusioni.....	54
<b>Capitolo III: effetti tridimensionali su dischi intagliati sottoposti ad un carico di modo III al variare delle condizioni al contorno</b> .....		56
3.1	Introduzione.....	57
3.2	Frame analitico: tensioni e campi di spostamento nel caso di modo III.....	57
3.2.1	<i>Free-free</i> .....	58
3.2.2	<i>Free-clamped</i> .....	59
3.3	Densità di energia di deformazione (SED) a seguito di un carico di modo III	60
3.3.1	<i>SED con condizioni al contorno di tipo free-free</i> .....	60
3.3.2	<i>SED con condizioni al contorno di tipo free-clamped</i> .....	62
3.4	Analisi agli elementi finiti di dischi tridimensionali criccati .....	63
3.5	Discussione dei risultati.....	65
3.5.1	<i>Campi di tensione in condizioni free-free</i> .....	65
3.5.2	<i>Notch Stress Intensity Factors in condizioni free-free</i> .....	77
3.5.3	<i>Analisi delle tensioni nei casi free-clamped</i> .....	80
3.5.4	<i>Notch Stress Intensity Factors in condizione free-clamped</i> .....	92
3.5.5	<i>Densità di energia di deformazione (SED) lungo lo spessore</i> .....	95
3.6	Conclusioni.....	102
<b>Capitolo IV: Un approccio energetico per la verifica a fatica delle giunzioni saldate</b> .....		103
4.1	Introduzione .....	105
4.2	Verifica a fatica di giunzioni saldate secondo la normativa UNI-CNR 10011.....	106

4.3	La densità di energia di deformazione per la verifica a fatica di giunti saldati .....	108
4.4	Previsione della vita a fatica di rulli con testata saldata .....	119
4.4.1	<i>Creazione dei modelli</i> .....	124
4.4.2	<i>Prove sperimentali sui rulli</i> .....	147
4.5	Conclusioni .....	150
	<i>Bibliografia</i> .....	153



# Sommario

---

L'analisi del comportamento strutturale di componenti meccanici sottoposti a sollecitazioni statiche o a fatica è di fondamentale importanza in ambito ingegneristico. Qualora nel materiale fossero presenti difetti (cricche) o il componente fosse caratterizzato da irregolarità della geometria come intagli a spigolo vivo, l'andamento delle tensioni nel materiale sollecitato da un carico può diventare estremamente complesso. Risulta di solito efficace creare dei modelli elementari, studiarne il comportamento meccanico e dedurre poi quello di modelli reali tipicamente più complessi.

I metodi di analisi agli elementi finiti, implementati in vari codici di calcolo commercializzati come ANSYS<sup>®</sup>, ABAQUS<sup>®</sup> o STRAUS<sup>®</sup>, costituiscono lo strumento che permette all'ingegnere di definire e risolvere il modello del componente meccanico di interesse, per conoscerne il comportamento strutturale a seguito di un carico applicato. Tutte le analisi contenute in questo studio sono state svolte utilizzando il codice di calcolo ANSYS<sup>®</sup>.

Il primo capitolo è un'introduzione alla teoria dei metodi agli elementi finiti, con lo scopo di dare al lettore la possibilità di comprendere il funzionamento dello strumento di calcolo utilizzato per ottenere i risultati delle analisi strutturali raccolte nei capitoli successivi.

Nel secondo capitolo sono raccolti i risultati ottenuti dall'analisi di un disco tridimensionale criccato sottoposto ad una sollecitazione di modo II. Si è voluto focalizzare l'attenzione sugli effetti di bordo, sui campi di tensione indotti dovuti alla tridimensionalità del componente e sui diversi comportamenti che può avere il disco al variare delle proprie caratteristiche geometriche.

Si è ritenuto altrettanto interessante indagare il comportamento di un disco indebolito da un intaglio a spigolo vivo con angolo di apertura di 60° sollecitato da un carico di modo III. E' stata analizzata la variabilità dello stato di tensione nel materiale al variare delle

caratteristiche geometriche del disco e delle condizioni al contorno applicate alle facce dell'intaglio. I risultati e le riflessioni nate da questo studio sono contenute nel terzo capitolo. Sia nel capitolo 2 che nel capitolo 3, viene sottolineata l'efficacia dell'utilizzo della densità di energia di deformazione lineare elastica (*Strain Energy Density*) per la valutazione dell'intensità dello stato tensionale nel disco, soggetto a tensioni di modo misto.

Nel quarto ed ultimo capitolo è trattato il tema della verifica a fatica delle giunzioni saldate. Quello che si vuole evidenziare, ancora una volta, è l'importanza che la *Strain Energy Density (SED)* ricopre nelle analisi strutturali. Oltre ad essere una grandezza adatta per la valutazione dello stato di tensione di un componente, essa risulta essere di fondamentale importanza anche per considerazioni sul comportamento a fatica del materiale. Come si vedrà infatti, a partire dal calcolo della *SED*, è possibile prevedere in modo accurato la vita di un componente soggetto ad un carico di fatica. L'approccio in *SED* sta avendo grande successo soprattutto quando si ha a che fare con geometrie complesse, indebolite da cricche o intagli, e in particolar modo con giunti saldati, come si vedrà nel corso del quarto capitolo. Nella prima parte del capitolo il metodo è presentato dal punto di vista teorico, raccontando gli sviluppi che, negli anni, hanno portato alla sua attuale definizione. Nella seconda parte, è illustrata un'applicazione concreta del metodo, la verifica a fatica delle giunzioni saldate presenti nei rulli prodotti dalla *Rulli Rulmeca S.p.A.* di Almè (BG). Come si vedrà, grazie a questo studio svolto in collaborazione con l'azienda, si è potuto verificare l'efficacia e l'affidabilità dell'approccio in *SED* anche per problematiche aziendali concrete.

# **CAPITOLO I**

## **INTRODUZIONE ALLA TEORIA DEI METODI DI ANALISI AGLI ELEMENTI FINITI**



## 1.1 Introduzione

L'obiettivo di questo capitolo è dare al lettore dei cenni di teoria dei metodi di analisi agli elementi finiti (*Finite Elements Methods, FEM*), per meglio comprendere quanto descritto nei capitoli seguenti. La materia è molto ampia e complessa, ma non è scopo di questa tesi analizzare in modo approfondito questo aspetto. Non verranno perciò analizzati in dettaglio gli algoritmi con i quali i codici di calcolo come ABAQUS<sup>®</sup> o ANSYS<sup>®</sup> svolgono le analisi dei modelli FEM, bensì verranno spiegati i concetti chiave su cui la modellazione agli elementi finiti si basa.

## 1.2 Il concetto di Analisi agli Elementi Finiti

L'analisi agli elementi finiti (*Finite Element Analysis, FEA*) è una potente tecnica computazionale per ottenere soluzioni approssimate dei problemi ingegneristici reali, caratterizzati da complessi domini soggetti alle più generiche condizioni al contorno. L'analisi agli elementi finiti è diventata uno strumento essenziale nella progettazione in ambito ingegneristico, dove si vuole conoscere in modo dettagliato un particolare fenomeno fisico di interesse. Un fenomeno fisico si manifesta nella materia continua (solidi, liquidi o gas), coinvolgendo moltissime variabili di campo. Le variabili di campo variano di punto in punto nella materia continua, generando perciò un numero infinito di soluzioni nel dominio. Un continuo con un ben definito contorno viene chiamato dominio.

Le basi dell'analisi agli elementi finiti si appoggiano sulla scomposizione del dominio in un numero finito di subdomini (elementi), per i quali la sistematica soluzione approssimata viene costruita applicando uno dei tre seguenti metodi: il metodo diretto, il metodo della minima energia potenziale e il metodo dei residui pesati. Come detto nell'introduzione, non si entrerà nel dettaglio di questi due metodi, per i quali si rimanda ad un qualsiasi manuale sulla teoria delle analisi agli elementi finiti. La FEA, quindi, riduce il problema reale ad un numero finito di incognite, dividendo il dominio in elementi ed esprimendo le variabili di campo incognite per mezzo delle funzioni di approssimazione assunte all'interno di ogni elemento. Queste funzioni (anche chiamate funzioni di interpolazione) sono definite a partire dai valori che le variabili di campo

assumono in certi punti specifici, detti nodi. I nodi, normalmente, sono disposti lungo il contorno degli elementi e connettono elementi adiacenti. Dei comuni problemi ingegneristici e le loro corrispondenti discretizzazioni FEA sono illustrate in Fig.1.1.

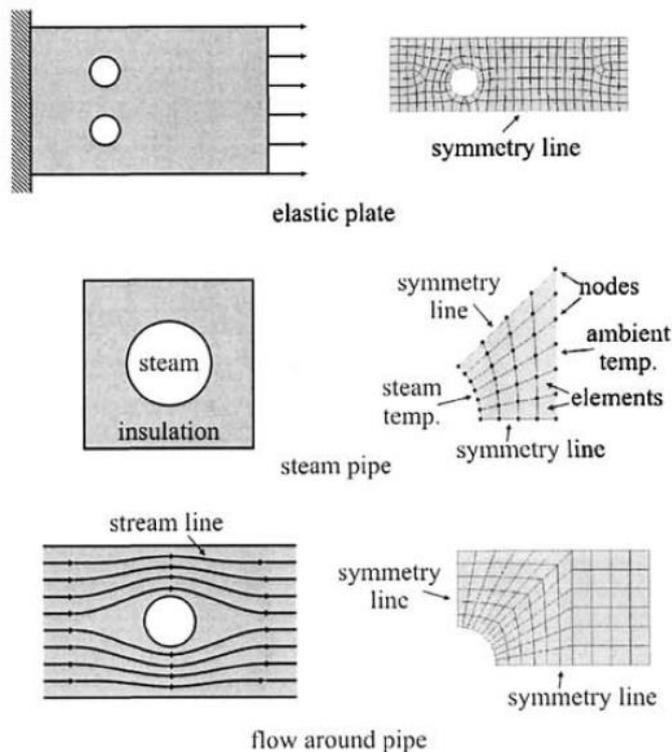


Fig.1.1 FEA representation of practical engineering problems.

Il metodo di analisi agli elementi finiti si può riassumere nei seguenti steps principali:

- Discretizzazione del dominio in un numero finito di sottodomini detti elementi (questa è l'operazione di creazione della *mesh*, che in inglese significa "maglia").
- Selezione delle funzioni di interpolazione.
- Sviluppo della matrice di rigidezza del sottodominio.
- Assemblaggio delle matrici di rigidezza di ogni sottodominio per ottenere la matrice globale per l'intero dominio.
- Definizione delle condizioni al contorno.
- Soluzione delle equazioni.
- Analisi aggiuntive (se desiderate).

Come già detto, ci sono tre approcci principali per costruire una soluzione approssimata basata sul concetto dell'analisi agli elementi finiti:

**Approccio Diretto (Direct Approach):** Questo approccio è usato solo per problemi relativamente semplici, e viene spesso utilizzato per spiegare il concetto dell'analisi agli elementi finiti e i suoi steps principali.

**Residui pesati (Weighted Residuals):** Questo è un metodo versatile, che permette l'applicazione della FEA a problemi complessi. Esso coinvolge l'approssimazione del comportamento funzionale delle variabili dipendenti nell'equazione differenziale che governa il fenomeno. Quando si sostituisce la forma approssimata nell'equazione differenziale si ottiene un errore detto "residuo". Questo errore deve essere tale da diventare nullo se considerato in una media pesata su tutto il dominio. Se le funzioni peso corrispondono alle cosiddette funzioni di forma degli elementi (paragrafo 4.10), questo metodo è detto di *Galerkin*.

**Approccio Variazionale (Variational Approach):** Questo approccio si basa sulla funzione Potenziale Totale, funzione degli spostamenti che, se minimizzata rispetto agli spostamenti stessi, dà luogo ad un insieme di equazioni di equilibrio. Così, per definire uno stato di equilibrio statico, è possibile ricorrere al metodo del "minimo potenziale", anche detto "metodo variazionale" o di *Rayleigh-Ritz*.

In notazione matriciale, il sistema globale di equazioni può essere così scritto:

$$\mathbf{K} \mathbf{u} = \mathbf{f}$$

dove  $\mathbf{K}$  è la matrice di rigidità del sistema,  $\mathbf{u}$  il vettore delle incognite, e  $\mathbf{f}$  il vettore delle forze. A seconda della natura del problema,  $\mathbf{K}$  potrebbe essere dipendente da  $\mathbf{u}$  ( $\mathbf{K} = \mathbf{K}(\mathbf{u})$ ) e  $\mathbf{f}$  potrebbe essere dipendente dal tempo ( $\mathbf{f} = \mathbf{f}(t)$ ).

### 1.3 I Nodi

Come mostrato in Fig.1.2, la trasformazione di problemi pratici ingegneristici in una rappresentazione matematica, è ottenuta discretizzando il dominio di interesse in

---

elementi (sottodomini). Questi elementi sono connessi tra loro dai nodi comuni. La posizione di un nodo è specificata dalle sue coordinate nello spazio, dove il problema fisico si può manifestare. Le incognite nodali nella matrice del sistema di equazioni rappresentano una delle principali variabili di campo. Le variabili nodali assegnate ad un elemento sono chiamate i gradi di libertà dell'elemento.

I nodi comuni mostrati in Fig.1.2 conferiscono continuità alle variabili nodali (gradi di libertà). I gradi di libertà di un nodo sono dettati dalla natura fisica del problema e dal tipo di elemento. La tabella 1.1 presenta i gradi di libertà e le corrispondenti forze generalizzate usate nelle analisi agli elementi finiti in diversi problemi fisici.

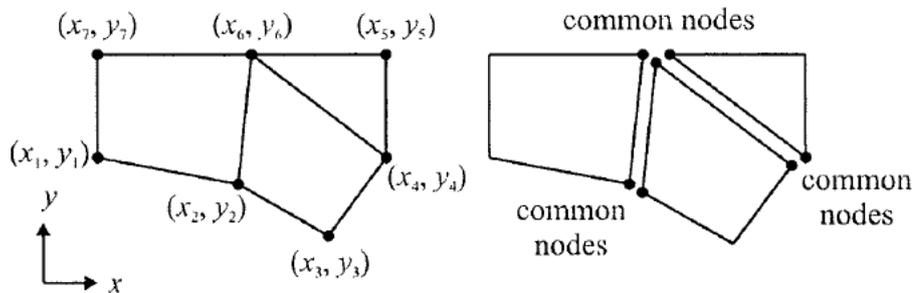


Fig.1.2 Division of a domain into subdomains (elements).

Ramo ingegneristico	Grado di Libertà (GdL)	Vettore delle forze
Strutturale	Spostamento	Forze meccaniche
Conduzione di calore	Temperatura	Flusso di calore
Elettrostatica	Potenziale elettrico	Densità di carica

Tab.1.1 Gradi di libertà e vettori delle forze in FEA in vari rami dell'ingegneria.

## 1.4 Gli Elementi

A seconda della geometria e della natura fisica del problema, il dominio di interesse può essere discretizzato utilizzando elementi linea, area o volume. Alcuni tra i più comuni elementi nelle analisi agli elementi finiti sono mostrati in Fig.1.3.

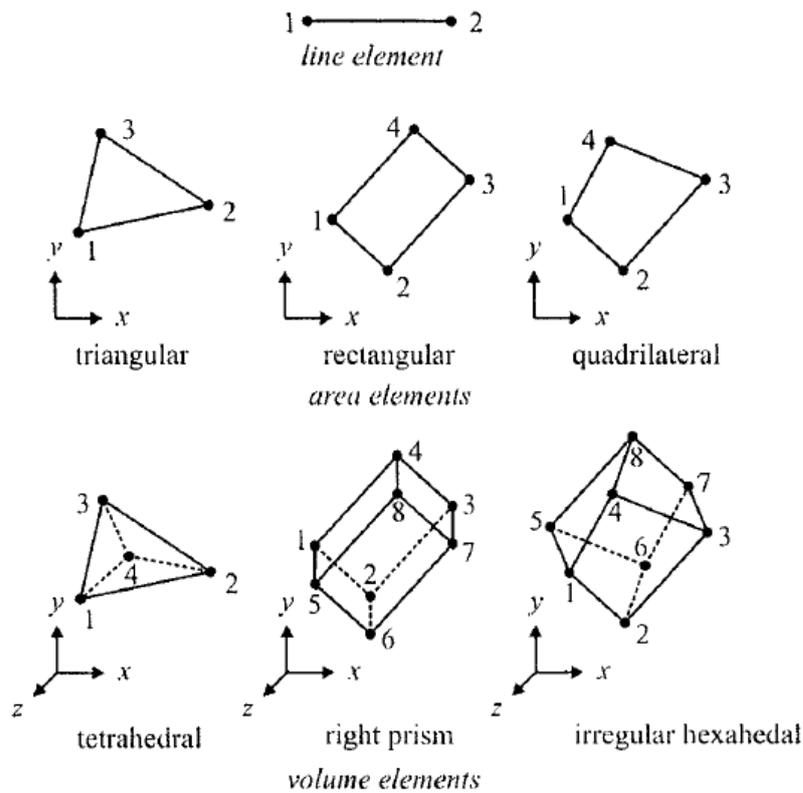


Fig.1.3 Description of line, area and volume elements with node numbers at the element level.

## 1.5 Approccio Diretto

Sebbene non si voglia scendere nel dettaglio per quanto riguarda le procedure risolutive delle analisi agli elementi finiti implementate nei codici di calcolo commercializzati, verrà ora spiegato in breve l'approccio più semplice, quello diretto, in quanto può aiutare a capire la "filosofia" che è alla base della risoluzione di un problema fisico utilizzando la FEA.

Nonostante l'approccio diretto sia utilizzabile solo per problemi semplici, coinvolge tutti gli steps fondamentali di una tipica analisi agli elementi finiti. Questo approccio verrà ora spiegato utilizzando un sistema molla lineare.

Come mostrato in Fig.1.4, una molla lineare di rigidezza  $k$  ha due nodi. Ogni nodo è soggetto a forze assiali  $f_1$  e  $f_2$ , che causano uno spostamento dei nodi  $u_1$  e  $u_2$  nella direzione definita come positiva.

Sotto l'azione di queste forze nodali, la deformazione risultante della molla diventa:

$$u = u_1 - u_2$$

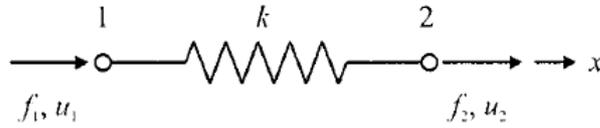


Fig. 1.4 Free-body diagram of a linear spring element.

che è legata alla forza agente sulla molla dall'espressione:

$$f_1 = ku = k(u_1 - u_2)$$

L'equilibrio delle forze richiede che:

$$f_2 = -f_1$$

Quindi:

$$f_2 = k(u_2 - u_1)$$

Combinando le equazioni e riscrivendo le equazioni risultanti in forma matriciale:

$$\begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{Bmatrix}$$

nella quale  $\mathbf{u}^{(e)}$  è il vettore delle incognite nodali che rappresenta gli spostamenti e  $\mathbf{k}^{(e)}$  e  $\mathbf{f}^{(e)}$  sono rispettivamente la matrice caratteristica dell'elemento (matrice di rigidezza) e il vettore delle forze agenti sull'elemento. L'apice (e) rappresenta il numero con cui è identificato l'elemento. Nota la rigidezza  $k$  e le forze esterne  $f_1$  e  $f_2$  è possibile trovare il vettore  $\mathbf{u}$  delle incognite.

## 1.6 Assemblaggio del Sistema Globale di Equazioni

La modellazione di un problema ingegneristico con gli elementi finiti richiede l'assemblaggio delle matrici caratteristiche (matrici di rigidezza) e i vettori delle forze di ogni singolo elemento, portando al sistema globale di equazioni

$$\mathbf{K} \mathbf{u} = \mathbf{f}$$

dove  $\mathbf{K}$  è il risultato dell'assemblaggio delle matrici caratteristiche degli elementi (la matrice di rigidezza del sistema) e  $\mathbf{f}$  è il risultato dell'assemblaggio dei vettori delle forze (il vettore delle forze agenti sul sistema globale). Il vettore delle incognite nodali è rappresentato da  $\mathbf{u}$ .

La matrice del sistema globale,  $\mathbf{K}$ , viene ottenuta dalla somma dei coefficienti delle matrici "estese" degli elementi,  $k^{(e)}$ , che può essere scritta così:

$$\mathbf{K} = \sum_{e=1}^E k^{(e)}$$

nella quale il parametro  $E$  denota il numero totale di elementi. Le matrici caratteristiche "estese" degli elementi hanno la stessa dimensione della matrice del sistema globale, ma con righe e colonne di zeri in corrispondenza dei nodi che non fanno parte di quell'elemento ( $e$ ). La dimensione della matrice del sistema globale è definita dal numero totale di nodi presenti nel sistema.

Analogamente, il vettore delle forze del sistema globale ( $\mathbf{f}$ ), è ottenuto dalla somma dei vettori delle forze "estesi" dei singoli elementi ( $f^{(e)}$ ). La somma può essere così scritta:

$$\mathbf{f} = \sum_{e=1}^E f^{(e)}$$

I vettori delle forze "estesi" dei singoli elementi hanno la stessa dimensione del vettore delle forze del sistema globale, ma hanno righe di zeri in corrispondenza dei nodi non associati con il particolare elemento ( $e$ ). La dimensione del vettore delle forze globale è anch'esso determinato dal numero complessivo di nodi presenti nel sistema.

### 1.7 Risoluzione del Sistema Globale di Equazioni

Affinché il sistema globale di equazioni abbia soluzione unica, il determinante della matrice del sistema globale deve essere diverso da zero. La matrice, però, ha per sua natura un autovalore nullo, che comporta anche determinante nullo. Perciò la soluzione non può mai essere unica. L'autovettore corrispondente all'autovalore nullo rappresenta il modo traslatorio, e i restanti autovalori diversi da zero sono legati ai modi di deformazione.

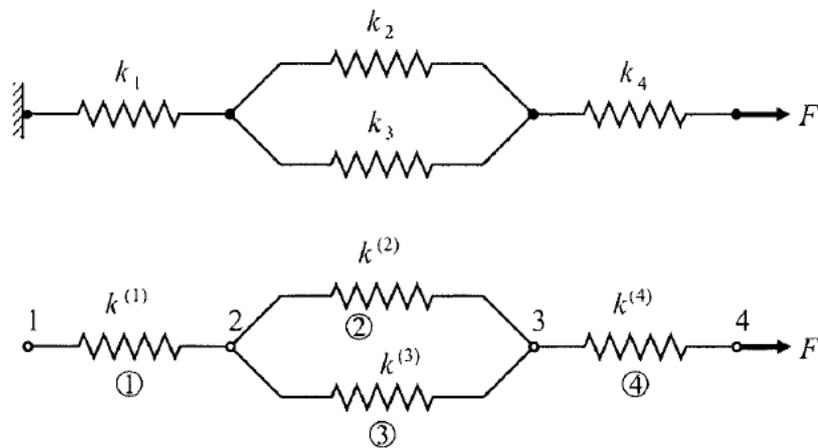


Fig.1.5 System of linear springs (top) and corresponding FEA model (bottom).

Per esempio, la matrice di rigidezza di un sistema come quello di Fig.1.5, costruita seguendo la procedura spiegata nel paragrafo precedente, è:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_{11}^{(1)} & k_{12}^{(1)} & 0 & 0 \\ k_{21}^{(1)} & (k_{22}^{(1)} + k_{11}^{(2)} + k_{11}^{(3)}) & (k_{12}^{(2)} + k_{12}^{(3)}) & 0 \\ 0 & (k_{21}^{(2)} + k_{21}^{(3)}) & (k_{22}^{(2)} + k_{22}^{(3)} + k_{11}^{(4)}) & k_{12}^{(4)} \\ 0 & 0 & k_{21}^{(4)} & k_{22}^{(4)} \end{bmatrix}$$

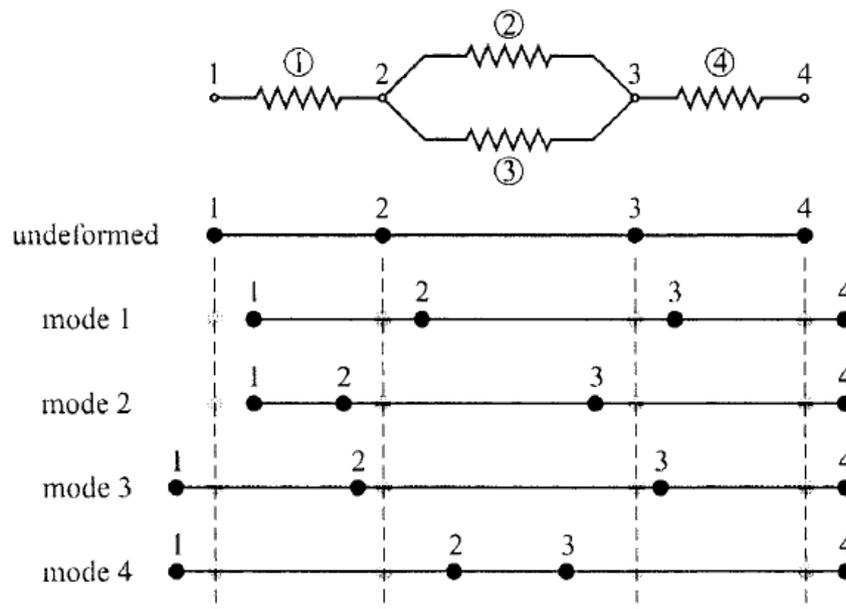
Sostituendo degli specifici valori come  $k_{11}^{(e)} = k_{22}^{(e)} = k^{(e)}$  e  $k_{12}^{(e)} = k_{21}^{(e)} = -k^{(e)}$ , la matrice del sistema globale diventa:

$$\mathbf{K} = k^{(e)} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

con i suoi autovalori  $\lambda_1 = 0$ ,  $\lambda_2 = 2$ ,  $\lambda_3 = 3 - \sqrt{5}$  e  $\lambda_4 = 3 + \sqrt{5}$ . Gli autovettori corrispondenti sono:

$$\mathbf{u}^{(1)} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{u}^{(2)} = \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{u}^{(3)} = \begin{Bmatrix} -1 \\ 2 - \sqrt{5} \\ -2 + \sqrt{5} \\ 1 \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{u}^{(4)} = \begin{Bmatrix} -1 \\ 2 + \sqrt{5} \\ -2 - \sqrt{5} \\ 1 \end{Bmatrix}$$

Ognuno di questi autovettori rappresenta un possibile modo di soluzione. Il contributo di ognuno di questi modi di soluzione è illustrato in Fig.1.6.



**Fig.1.6** Possible solution modes for the system of linear springs.

Affinché il sistema globale di equazioni abbia un'unica soluzione, la matrice del sistema globale deve essere resa non singolare eliminando l'autovalore nullo. Ciò è ottenuto

introducendo le cosiddette condizioni al contorno, in modo da sopprimere il modo traslatorio della soluzione, corrispondente all'autovalore nullo.

### 1.8 Condizioni al contorno

Come mostrato in Fig.1.7, il nodo 1 è vincolato nello spostamento. Questo vincolo viene soddisfatto imponendo la condizione al contorno  $u_1 = 0$ . Sia gli spostamenti nodali,  $u_i$ , che le forze nodali,  $f_i$ , possono essere specificate in un dato nodo. Non è fisicamente possibile specificarle entrambi però, quindi la forza nodale  $f_1$  rimane una delle incognite. Gli spostamenti nodali,  $u_2$ ,  $u_3$  e  $u_4$  sono trattati come incognite, e le corrispondenti forze nodali hanno valore  $f_2 = 0$ ,  $f_3 = 0$  e  $f_4 = F$ .

Questi specifici valori sono introdotti nel sistema globale di equazioni:

$$k^{(e)} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 = 0 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 = 0 \\ f_3 = 0 \\ f_4 = F \end{Bmatrix}$$

portando alle seguenti equazioni:

$$k^{(e)} \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ F \end{Bmatrix}$$

e

$$-k^{(e)}u_2 = f_1$$

La matrice  $3 \times 3$  dei coefficienti, ora non è più singolare, e le soluzioni del sistema sono così ottenute:

$$u_2 = \frac{F}{k^{(e)}}, \quad u_3 = \frac{3}{2} \frac{F}{k^{(e)}}, \quad u_4 = \frac{5}{2} \frac{F}{k^{(e)}}$$

e la incognita forza nodale  $f_1$  è determinata come  $f_1 = -F$ . La soluzione finale fisicamente accettabile è mostrata in Fig.1.7.

---

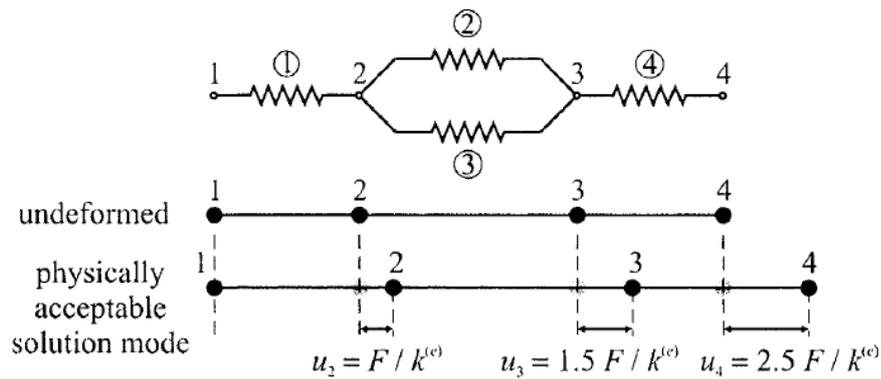


Fig.1.7 Physically acceptable solution mode for the system of linear springs.

Qui si è visto qual è il procedimento da seguire per la risoluzione di un semplicissimo sistema monodimensionale a 4 elementi e 4 nodi con l'approccio diretto. Questo tipo di approccio in realtà è utilizzato dai codici di calcolo come ANSYS<sup>®</sup> solamente per problemi molto semplici. Come detto prima, per problemi più complessi, si ricorre all'utilizzo di metodi più sofisticati come quello dei residui pesati o quello del minimo potenziale, anch'essi implementati nei codici di calcolo commercializzati.

## 1.9 Funzioni di Approssimazione

Con la soluzione del sistema globale di equazioni si ottengono i valori assunti dalle variabili di campo in corrispondenza dei nodi. Il passaggio successivo consiste nel ritornare ad avere un sistema continuo a partire dal sistema discreto ottenuto con l'analisi agli elementi finiti. Per fare ciò è necessario interpolare in qualche modo i risultati ottenuti nei nodi per ottenere delle variabili di campo che variano in modo continuo nell'elemento e quindi nel sistema. La variazione delle variabili di campo  $\varphi^{(e)}$  in un elemento è approssimata da un'appropriata scelta di funzioni, come mostrato in Fig.1.8.

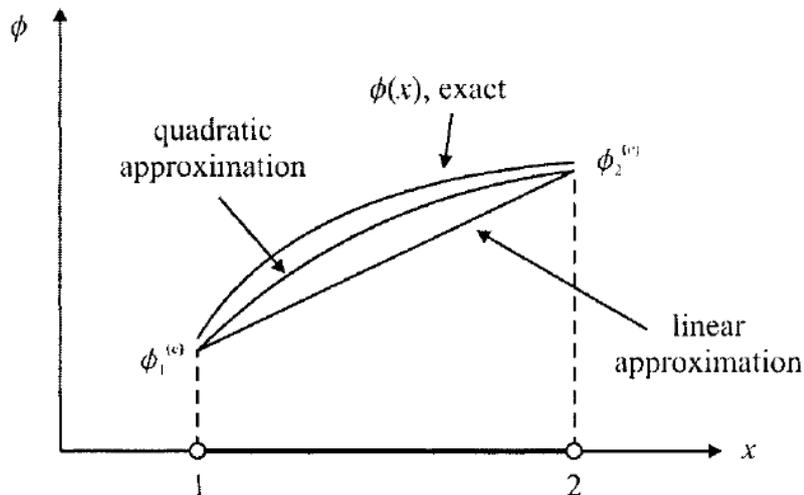


Fig.1.8 Element approximation functions.

La selezione di queste funzioni è la parte più fondamentale del metodo agli elementi finiti. Le funzioni di approssimazione devono essere affidabili, nel senso che più la mesh diventa fitta (elementi di dimensione sempre più piccola), più la funzione deve convergere alla soluzione esatta in modo monotono. Convergenze oscillanti non sono affidabili in quanto è possibile osservare un aumento dell'errore al diminuire della dimensione degli elementi della mesh. Convergenze monotone e oscillatorie sono mostrate in Fig.1.9.

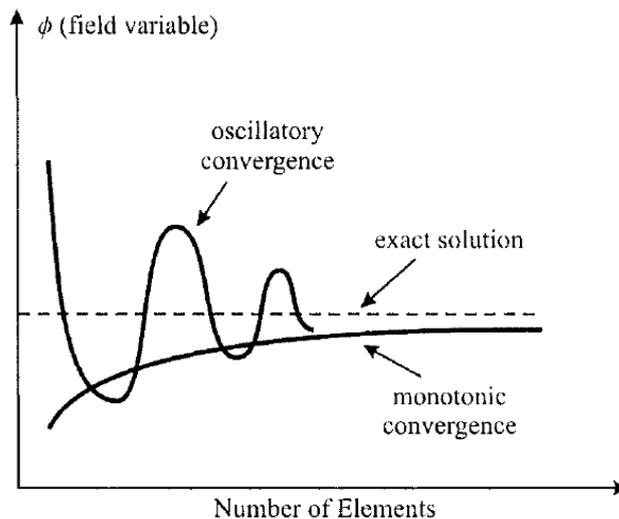


Fig. 1.9 Oscillatory and monotonic convergence of approximate solution.

Le funzioni di approssimazione più comuni sono di tipo polinomiale, in quanto le loro derivate e integrali sono piuttosto continue in confronto ad altre funzioni.

Per raggiungere una soluzione convergente in modo monotono, le polinomiali scelte come funzioni di approssimazione devono soddisfare quattro requisiti:

**Requisito 1.** Andamento continuo della funzione all'interno dell'elemento – non devono esserci punti angolosi o salti.

**Requisito 2.** Compatibilità nei nodi comuni, nei bordi o nelle superfici tra elementi adiacenti – non devono esserci buchi tra gli elementi.

Gli elementi che soddisfano i requisiti di compatibilità e continuità sono detti elementi conformi (Fig. 1.10).

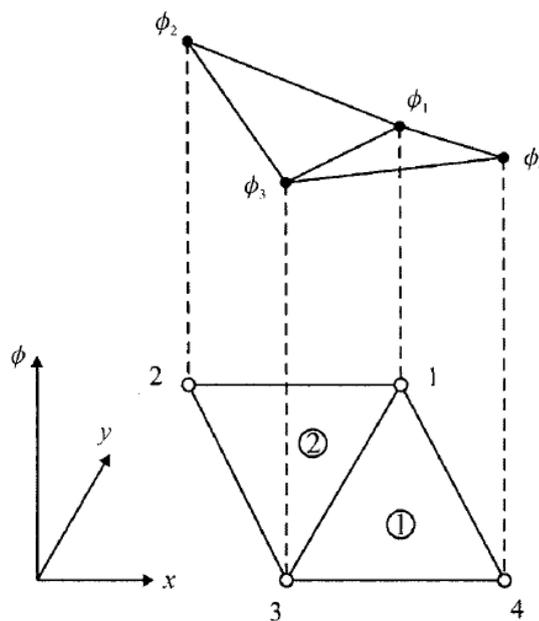
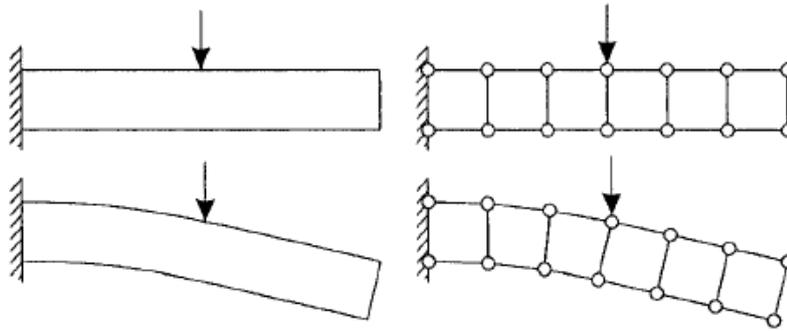


Fig. 1.10 Compatibility of approximation functions.

**Requisito 3.** Completezza, permettendo movimenti rigidi dell'elemento e assicurando una variazione costante della variabili di campo  $\phi$  e delle sue derivate all'interno dell'elemento.

Il motivo di quest'ultimo requisito è meglio spiegato considerando una trave a sbalzo sottoposta ad un carico concentrato nella mezzeria (Fig.1.11). A seguito di tale carico, la

deformazione avviene solamente alla sinistra della forza applicata. La sezione della trave a destra del carico è soggetta solamente ad una traslazione rigida e ad una rotazione (spostamento costante e deformazione nulla), non vi sono tensioni o deformazioni. Perciò, la funzione di approssimazione nell'elemento deve poter permettere tale comportamento. Polinomi completi soddisfano tale requisito.



**Fig.1.11** A cantilever beam loaded at the middle and its FEA model.

Un polinomio completo di ordine  $n$ , in una dimensione, può essere così scritto in forma compatta:

$$P_n(x) = \sum_{k=1}^{n+1} a_k x^{k-1}$$

la quale porta ai polinomi completi di ordine 0, 1 e 2 (costanti, lineari e quadratici) così scritti:

$$P_0(x) = a_1$$

$$P_1(x) = a_1 + a_2 x$$

$$P_2(x) = a_1 + a_2 x + a_3 x^2$$

In due dimensioni invece, la forma compatta di un polinomio completo di ordine  $n$  può essere scritta come segue:

$$P_n(x) = \sum_{k=1}^{\frac{(n+1)(n+2)}{2}} a_k x^i y^j \quad i + j \leq n$$

Polinomi completi costanti, lineari e quadratici in 2 dimensioni possono essere così scritti:

$$P_0(x, y) = a_1$$

$$P_1(x, y) = a_1 + a_2x + a_3y$$

$$P_2(x, y) = a_1 + a_2x + a_3y + a_4x^2 + a_5xy + a_6y^2$$

Il triangolo di Pascal mostrato in Fig.1.12 è utile come guida per includere i termini appropriati per ottenere funzioni di approssimazione complete di qualsiasi ordine.

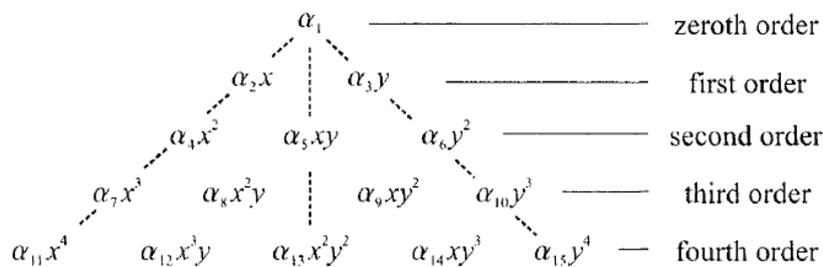


Fig. 1.12 Pascal's triangle for complete polynomials.

L'ordine del polinomio usato come funzione di approssimazione è dettato dal numero totale di nodi presenti in un elemento. In particolare, il numero dei coefficienti  $a_i$  nella funzione di approssimazione deve essere pari al numero di nodi in un elemento.

**Requisito 4.** Isotropia geometrica per avere lo stesso comportamento in ogni direzione.

Funzioni di approssimazione che soddisfano questi quattro requisiti sono presenti in tutti i codici di calcolo commercializzati e assicurano convergenza monotona della soluzione al diminuire della dimensione degli elementi.

### 1.10 Funzioni di forma

Le funzioni di forma costituiscono un sottoinsieme delle funzioni di approssimazione degli elementi. Non possono essere scelte in modo arbitrario. Come detto nel precedente paragrafo, le funzioni di approssimazione vengono scelte in modo che siano polinomi completi che hanno come incognite delle coordinate generalizzate. Per un elemento

monodimensionale con  $m$  nodi come mostrato in Fig.1.13, la funzione di approssimazione per la variabile di campo  $\varphi(x)$  è un polinomio di ordine  $(m - 1)$

$$\varphi^{(e)}(x) = a_1 + a_2x + a_3x^2 + \dots + a_{m-1}x^{m-2} + a_mx^{m-1}$$

o

$$\varphi^{(e)}(x) = \mathbf{g}^T \mathbf{a}$$

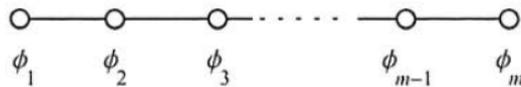
dove

$$\mathbf{g}^T = \{1 \quad x \quad x^2 \quad \dots \quad x^{m-1}\}$$

e

$$\mathbf{a}^T = \{a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad \dots \quad a_m\}$$

Si noti che il numero delle coordinate generalizzate ( $a_i, i = 1, 2, \dots, m$ ) è pari al numero di nodi compresi nell'elemento.



**Fig.1.13** A one-dimensional element with  $m$  nodes.

La variabile di campo  $\varphi^{(e)}(x)$  può essere espressa all'interno dell'elemento anche usando i suoi valori nodali  $\varphi_i$  ( $i = 1, m$ ) nella forma

$$\varphi^{(e)}(x) = N_1\varphi_1 + N_2\varphi_2 + \dots + N_{m-1}\varphi_{m-1} + N_m\varphi_m$$

o

$$\varphi^{(e)}(x) = \mathbf{N}^T \boldsymbol{\varphi}$$

dove

$$\mathbf{N}^T = \{N_1 \quad N_2 \quad \dots \quad N_m\}$$

e

---

$$\boldsymbol{\varphi}^T = \{\varphi_1 \quad \varphi_2 \quad \dots \quad \varphi_m\}$$

dove  $N_i$  ( $i = 1, m$ ) sono chiamate funzioni di forma. Queste funzioni sono associate al nodo  $i$  e devono assumere valore unitario al nodo  $i$  e valore nullo in tutti gli altri nodi (Fig.1.14-15). Inoltre, devono avere lo stesso ordine della variazione polinomiale interpretata dalla funzione di approssimazione dell'elemento.

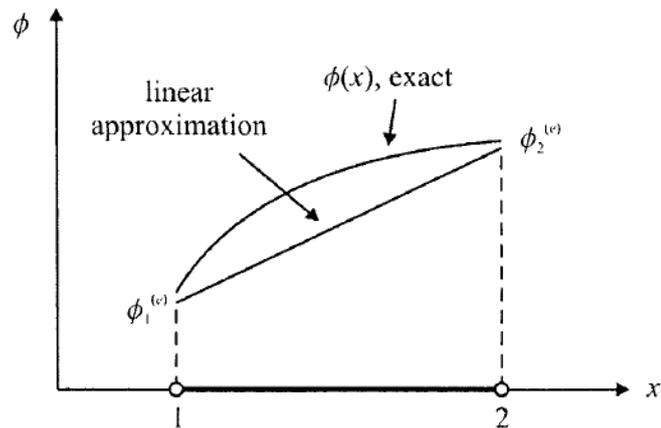


Fig.1.14 Linear approximation for the field variable  $\phi$  within a line element.

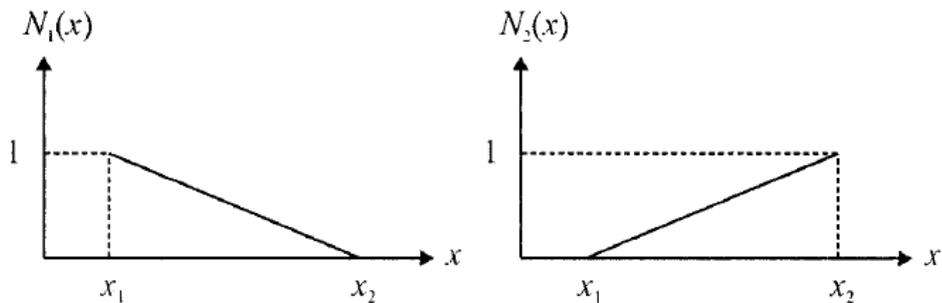


Fig.1.15 Variation of linear shape function within a 1-D line element.

### 1.11 Conclusioni

In questo capitolo sono stati spiegati, in modo molto generale, i principali steps seguiti da un qualsiasi codice di calcolo come ANSYS® o ABAQUS® nella risoluzione di una generica analisi agli elementi finiti. E' stato spiegato il concetto di discretizzazione del dominio in un numero finito di elementi, si è parlato delle funzioni di approssimazione,

si è visto come viene creata la matrice caratteristica degli elementi e come queste vengano assemblate tra loro per costituire la matrice di rigidezza del sistema globale, è stato spiegato cosa sono le condizioni al contorno e perché devono essere imposte, infine si è visto come un modello agli elementi finiti può essere risolto con l'approccio diretto. Sono stati solo accennati gli altri due metodi di risoluzione più complessi, il metodo variazionale e quello dei residui pesati, generalmente molto più usati dai codici di calcolo nella risoluzione dei problemi.

## **CAPITOLO II**

# **EFFETTI TRIDIMENSIONALI IN DISCHI CRICCATI SOTTOPOSTI AD UN CARICO DI MODO II**



## 2.1 Introduzione

Nello studio del comportamento strutturale di un componente è fondamentale poter conoscere l'intensità e l'andamento dei campi di tensione indotti. L'analisi degli effetti tridimensionali in dischi criccati sottoposti ad un carico di modo II, descritta in questo capitolo, si raffigura come una continuazione dello studio iniziato da A. Campagnolo, F. Berto e P. Lazzarin [1]. Il componente studiato è costituito da un disco indebolito da una cricca di lunghezza pari al suo raggio e di larghezza pari alla sua profondità. La semplicità della geometria rende più agevole l'analisi e la successiva interpretazione dei risultati. A causa degli effetti tridimensionali, l'applicazione di un carico nominale di modo II provoca l'insorgere di campi di tensione di modi cosiddetti accoppiati, sollecitazioni di modo I e III indotte. Non solo la natura e l'intensità dei modi indotti, ma anche il loro grado di singolarità, dipendono dalle condizioni di vincolo applicate ai fianchi della cricca, in accordo con quanto evidenziato in Rif. [2] nel caso di intaglio a spigolo vivo. È stato analizzato il cosiddetto caso *Free-Free* (condizioni al contorno che prevedono entrambi i fianchi della cricca liberi da vincoli) in quanto ritenuto di maggior interesse applicativo. In prossimità delle superfici libere, l'andamento dei campi di tensione è irregolare a causa degli effetti di bordo e si discosta da quanto previsto dalle formulazioni analitiche presenti in letteratura. In queste zone risulta impossibile determinare in modo univoco un *Notch Stress Intensity Factor (NSIF)*. In tali circostanze, per la valutazione dello stato tensionale nel materiale, è risultato essere molto più efficace utilizzare un approccio energetico locale, concentrandosi sul calcolo della densità di energia di deformazione lineare elastica (*Strain Energy Density, SED*) in un volume di controllo opportunamente selezionato ed analizzato [1].

## 2.2 Frame analitico: campi di tensione e deformazione dovuti a modo II

In questa sezione è riassunto il frame analitico che fornisce le espressioni dei campi singolari di tensione e spostamento in prossimità dell'apice di cricca in un componente sottoposto ad un carico di modo II. La trattazione è valida per materiali isotropi e omogenei in condizioni lineari elastiche.

Le espressioni dei campi di tensione in campo elastico nelle vicinanze di una cricca con entrambi i fianchi liberi da vincoli, soggetta ad un carico arbitrario, sono dati dalla soluzione delle equazioni di Williams [3].

Gli spostamenti  $u_x$  e  $u_y$  da applicare lungo gli assi  $x$  e  $y$  in un modello tridimensionale per ottenere le desiderate condizioni al contorno di Modo II sono espressi dalle seguenti equazioni riportate in Rif. [4].  $r$  è la distanza radiale dall'apice della cricca e  $\vartheta$  è l'angolo misurato in riferimento alla bisettrice della cricca (Fig. 2.1):

$$u_x = -\frac{r^{\frac{1}{2}}}{2\mu} b_1 \left[ \left( k + \frac{3}{2} \right) \sin \frac{1}{2} \vartheta - \frac{1}{2} \sin \left( -\frac{3}{2} \right) \vartheta \right]$$
$$u_y = \frac{r^{\frac{1}{2}}}{2\mu} b_1 \left[ \left( k - \frac{3}{2} \right) \cos \frac{1}{2} \vartheta + \frac{1}{2} \cos \left( \frac{3}{2} \right) \vartheta \right]$$

$\mu$  è il modulo di elasticità trasversale e  $k$  la costante di Kolosov in condizioni di tensione piana:

$$\mu = \frac{E}{2(1 + \nu)},$$
$$k = \frac{3 - \nu}{1 + \nu}.$$

con  $\nu$  coefficiente di Poisson ed  $E$  modulo di Young. In tutte le seguenti analisi si è fatto riferimento ad un tipico acciaio da costruzione con modulo elastico di 206000 MPa e coefficiente di Poisson pari a 0,3.

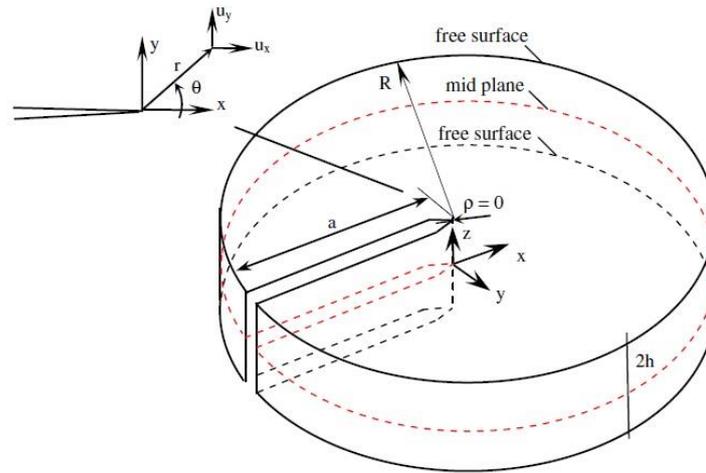


Fig. 2.1 Geometry of the plate and coordinate system with  $z = 0$  in the mid-plane.

Il coefficiente  $b_1$  è legato allo *Stress Intensity Factor* di modo II dalla seguente relazione:

$$b_1 = -\frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi}}$$

Il grado di singolarità delle tensioni governate dal modo II varia a seconda dell'angolo di apertura dell'intaglio che genera l'intensificazione delle tensioni. Nel caso in esame si è in presenza di una cricca, perciò l'angolo di apertura è nullo e il grado di singolarità del campo di tensione legato a sollecitazioni di modo II è pari a 0,5 [3].

### 2.3 Densità di energia di deformazione associata ad un carico di modo II

L'espressione della densità di energia di deformazione totale  $W$  proposta da *Beltrami* nel 1885 [5] per uno stato di tensione tridimensionale è:

$$W(r, \vartheta) = \frac{1}{2E} [\sigma_{\theta\theta}^2 + \sigma_{rr}^2 + \sigma_{zz}^2 - 2\nu(\sigma_{\theta\theta}\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta}\sigma_{zz} + \sigma_{rr}\sigma_{zz}) + 2(1 + \nu)(\sigma_{r\vartheta}^2 + \sigma_{rz}^2 + \sigma_{\theta z}^2)]$$

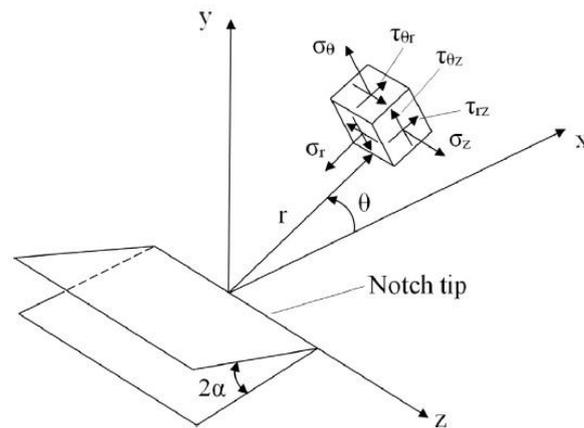


Fig. 2.2 Cylindrical reference system for stress field.

Nel caso di modo II puro le componenti di tensione diverse da zero nei pressi dell'apice di cricca sono  $\sigma_\theta$ ,  $\sigma_r$ ,  $\sigma_{r\theta}$  e  $\sigma_z$ , perciò l'espressione dell'energia diventa:

$$W(r, \vartheta) = \frac{1}{2E} [\sigma_{\theta\theta}^2 + \sigma_{rr}^2 + \sigma_{zz}^2 - 2\nu(\sigma_{\theta\theta}\sigma_{rr} + \sigma_{\vartheta\vartheta}\sigma_{zz} + \sigma_{rr}\sigma_{zz}) + 2(1 + \nu)(\sigma_{r\theta}^2)]$$

Sostituendo alle componenti di tensione le relative espressioni in funzione dell'*NSIF* di modo II ( $K_{II}$ ) con un angolo di apertura dell'intaglio  $2\alpha = 0$  (cricca), si ottiene [6]:

$$\overline{W_{II}} = \frac{1}{E} \left( \frac{I_2}{2\pi} \right) \frac{K_{II}^2}{R_0}$$

Dove  $I_2$  è l'integrale delle funzioni angolari che dipendono dall'angolo di apertura  $2\alpha$  dell'intaglio e dal coefficiente di Poisson  $\nu$ . Per  $\nu = 0.3$  e  $2\alpha = 0$ , risulta  $I_2 = 2.145$ .  $R_0$  è il raggio e altezza del volume di controllo cilindrico preso in considerazione per il calcolo della *SED* (*Strain Energy Density*).

#### 2.4 Densità di energia di deformazione associata ad un carico di Modo III

Nel caso di modo III puro solamente  $\sigma_{rz}$  e  $\sigma_{\vartheta z}$  sono le componenti di tensione non nulle e perciò l'espressione dell'energia diventa:

$$W_3(r, \theta) = \frac{1 + \nu}{E} (\sigma_{rz}^2 + \sigma_{\theta z}^2)$$

Sostituendo alle componenti di tensione le relative espressioni in funzione dell'*NSIF* di Modo III e considerando ancora un angolo di apertura dell'intaglio  $2\alpha = 0$ , si ottiene [1]:

$$\overline{W_{III}} = \frac{1}{E} \left( \frac{1 + \nu}{\pi} \right) \frac{K_{III}^2}{R_0}$$

$R_0$  è un parametro dipendente dalle caratteristiche meccaniche del materiale, dalla geometria dell'intaglio e dalle condizioni di carico. La rottura fragile di un materiale avviene quando il valore medio della densità di energia di deformazione, calcolato in un volume di controllo di raggio  $R_0$  che abbraccia l'apice dell'intaglio (Fig. 2.3), è pari al valore critico di energia di deformazione tipico del materiale,  $W_c$  [6]. In presenza di una modalità di carico di Modo II si ha:

$$W_c = \frac{\tau_c^2}{2G} = (1 + \nu) \frac{\tau_c^2}{E}$$

dove  $\tau_c$  è la resistenza a taglio del materiale.

In condizioni di lineare elasticità, imponendo  $\overline{W_{III}} = W_c$ , si ottiene l'espressione del raggio del volume di controllo nel caso di una cricca:

$$R_0 = \frac{1}{\pi} \left( \frac{K_{IIIc}}{\tau_c} \right)^2$$

che, come si è visto dalla dimostrazione, dipende dalle caratteristiche meccaniche del materiale, dalle caratteristiche geometriche dell'intaglio e dalla modalità di applicazione del carico.

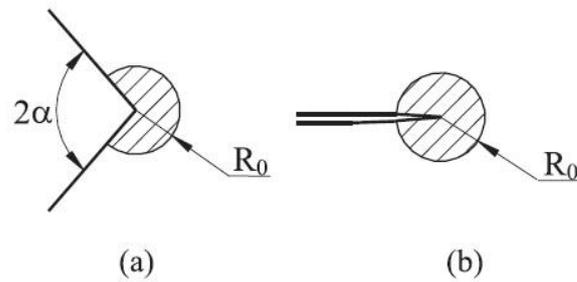


Fig. 2.3 Control volume for sharp V-notches (a) and cracks (b).

## 2.5 Analisi agli elementi finiti di dischi tridimensionali

Come anticipato, col metodo di analisi agli elementi finiti, sono stati studiati gli effetti tridimensionali in un disco indebolito da una cricca e soggetto ad un carico nominale di modo II. Tutti i modelli sono stati creati con il codice Ansys (versione 15.0). Volendo apprezzare gli eventuali modi accoppiati indotti dalla sollecitazione imposta, in particolare il modo III, responsabile di uno spostamento dei nodi  $u_z$  fuori dal piano, sono state eseguite analisi FEM tridimensionali.

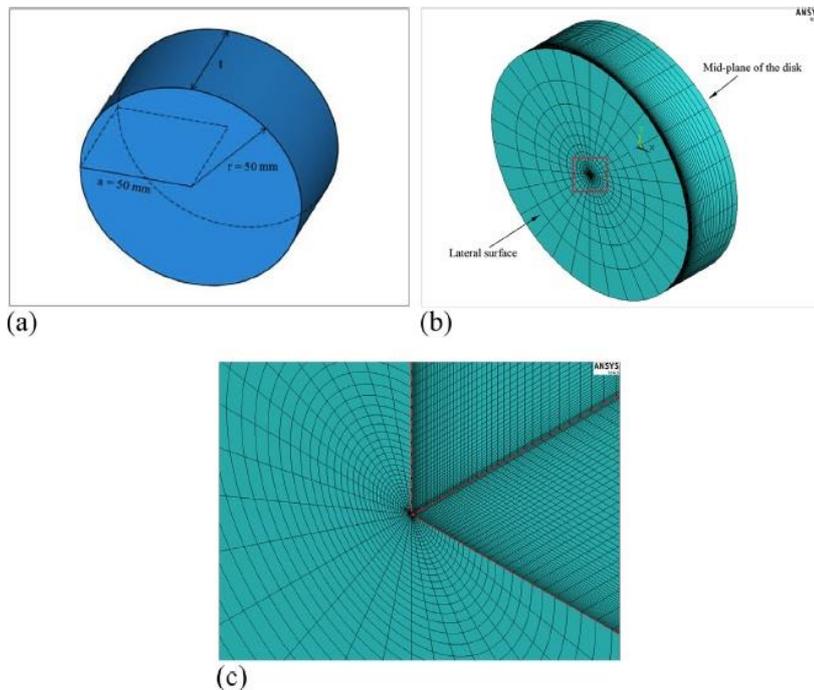


Fig. 2.4 (a) Disc geometry. (b) Overall view of the finite element mesh. (c) Detail of finite element mesh sectioned at crack tip

---

Le analisi delle tensioni e dei *SIFs* sono state effettuate al variare di un parametro geometrico del disco, lo spessore  $t$ . Il diametro ( $2r$ ) e la profondità della cricca ( $a$ ) sono mantenuti costanti in tutte le analisi e valgono rispettivamente 100 mm e 50 mm. Ciò che varia è lo spessore  $t$  del disco (Fig. 2. 4), più precisamente il rapporto adimensionale  $t/a$ . Sono stati indagati i seguenti casi di  $t/a$ : 0.5, 1.0, 2.0, 4.0. Il coefficiente di Poisson e il modulo di Young sono costanti in ogni modello e pari rispettivamente a 0.3 e 206 GPa.

Per contenere il numero di elementi senza diminuire la qualità della mesh, il modello rappresenta solo metà del disco reale. Ciò è reso possibile grazie alla proprietà di simmetria geometrica del componente e del carico applicato rispetto al piano medio (*mid-plane of the disk*). Il *pattern* della mesh creata è riportato in Fig. 2. 4. La mesh si infittisce radialmente avvicinandosi al centro del disco, in modo da avere elementi di dimensione molto piccola in prossimità dell'apice di cricca e ottenere una maggiore accuratezza dei risultati.

Nel modello tridimensionale sono stati utilizzati elementi solidi a 20 nodi (*20-node brick elements, BRICK 186*).

Utilizzando le equazioni sopra riportate, gli spostamenti  $u_x$  e  $u_y$  sono stati applicati ai nodi della superficie cilindrica del modello agli elementi finiti, in funzione della coordinata angolare  $\vartheta$ . Il valore dello *Stress Intensity Factor* applicato in tutti i modelli è pari a  $2.5 \text{ MPa}\cdot\text{m}^{0.5}$ . Il corrispondente *range* di spostamento lungo l'asse x, misurato confrontando i nodi a  $\vartheta = 180^\circ$  e  $\vartheta = -180^\circ$ , è pari a  $\Delta u_x = 0.271 \text{ mm}$  (Fig. 2.5).

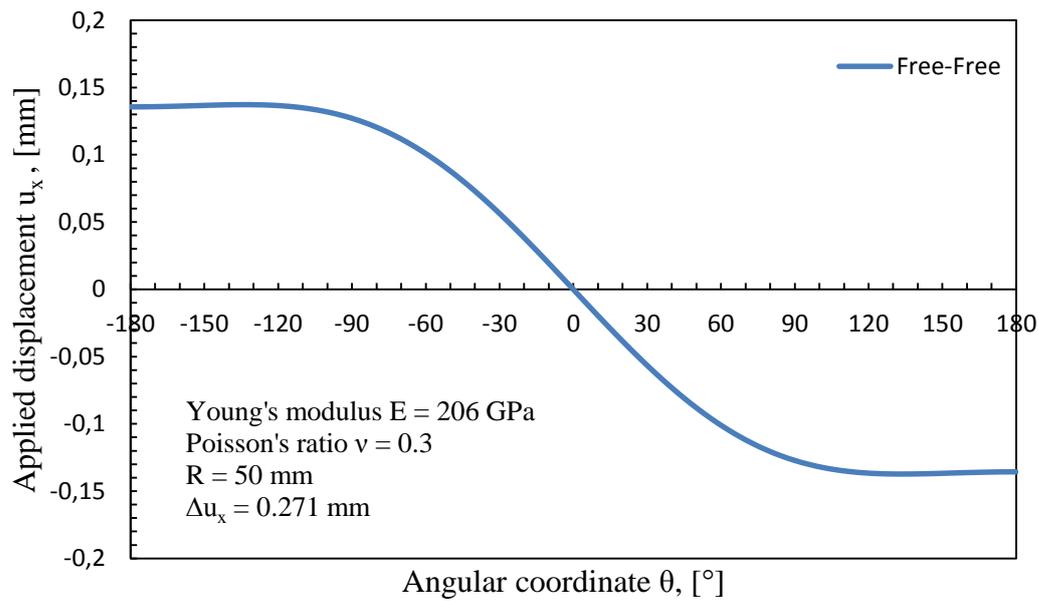


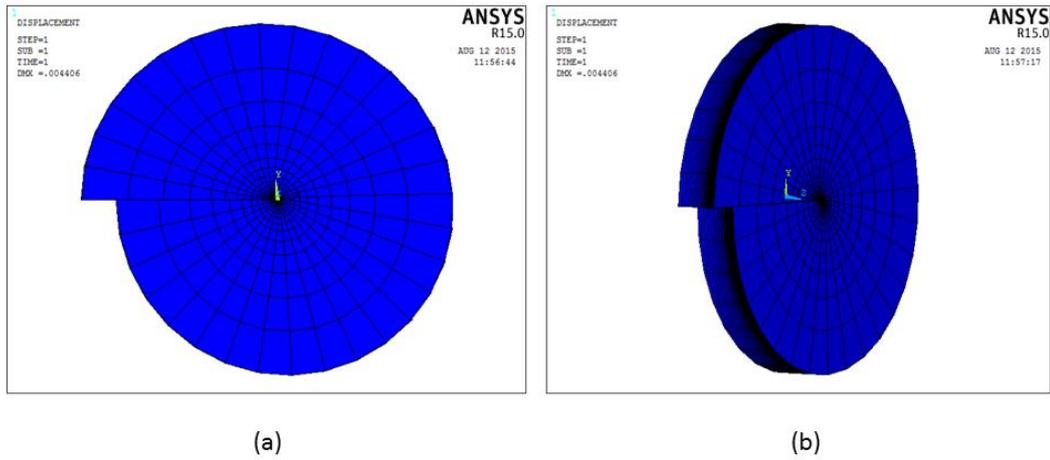
Fig. 2.5 Applied displacement  $u_x$  as a function of the angular coordinate  $\theta$ . Free-Free case

## 2.6 Discussione dei risultati ottenuti dalle analisi

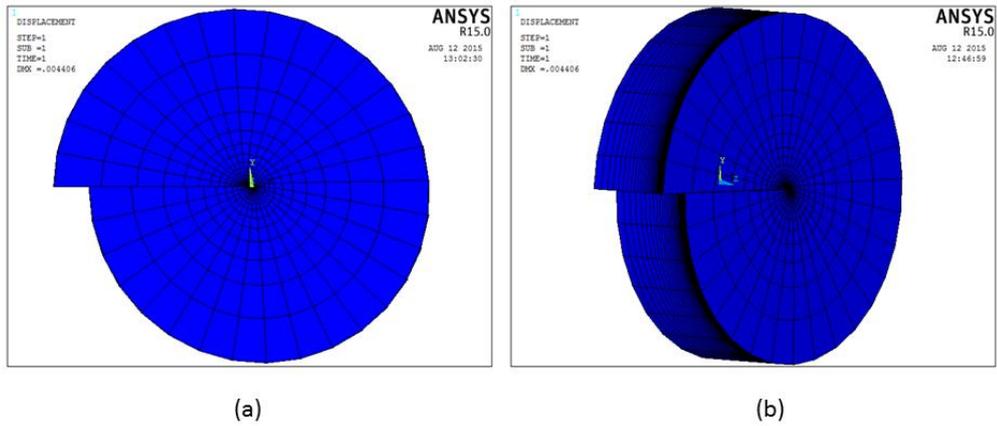
Come già anticipato, a causa degli effetti tridimensionali, l'applicazione di un carico nominale di modo II, induce dei campi di tensione governati da modi indotti. Questi modi, detti anche accoppiati, verranno ora illustrati in dettaglio sulla base dei risultati delle analisi agli elementi finiti.

### 2.6.1 Campi di tensione

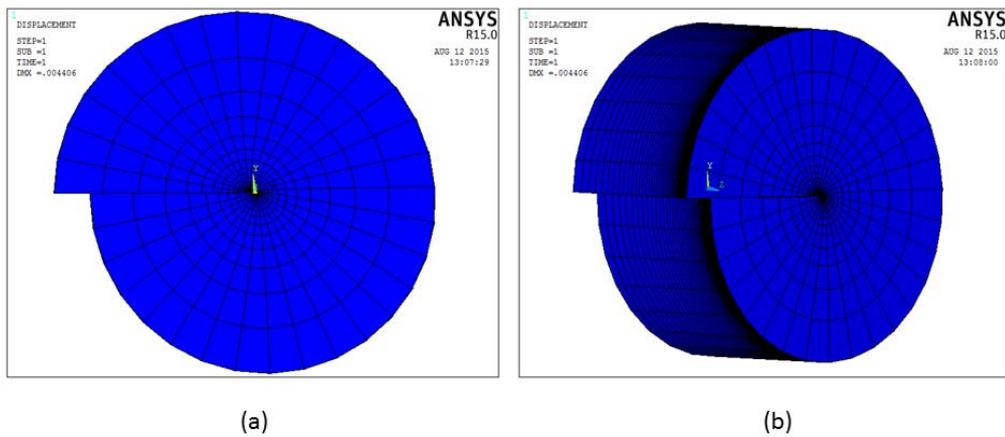
La deformazione dei quattro modelli studiati, a seguito dell'applicazione degli spostamenti  $u_x$  e  $u_y$  di modo II è raffigurata in Fig. 2.6-7-8-9.



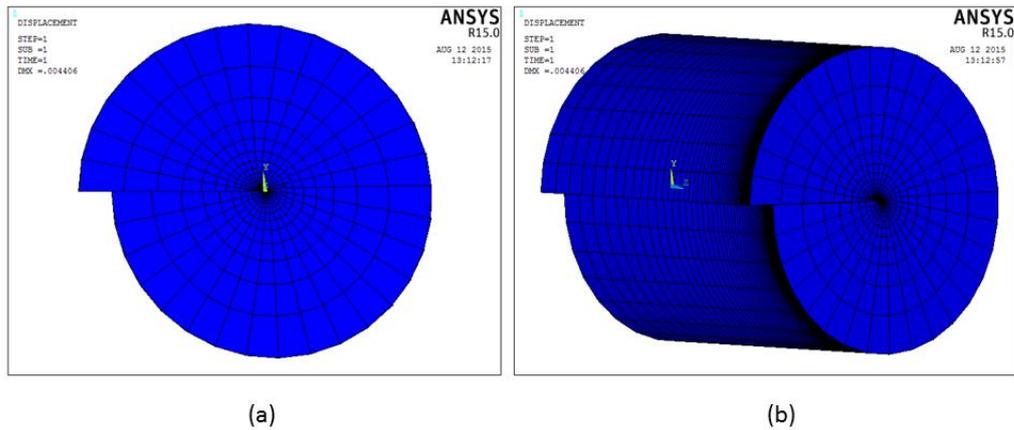
**Fig. 2.6**  $t/a = 0.5$ : (a) Front view of the deformed shape of the disc under mode II loading conditions. (b) 3-D view of the deformed shape of the disc under mode II loading conditions.



**Fig. 2.7**  $t/a = 1$ : (a) Front view of the deformed shape of the disc under mode II loading conditions. (b) 3-D view of the deformed shape of the disc under mode II loading conditions.



**Fig. 2.8**  $t/a = 2$ : (a) Front view of the deformed shape of the disc under mode II loading conditions. (b) 3-D view of the deformed shape of the disc under mode II loading conditions.



**Fig. 2.9**  $t/a = 4$ : (a) Front view of the deformed shape of the disc under mode II loading conditions. (b) 3-D view of the deformed shape of the disc under mode II loading conditions.

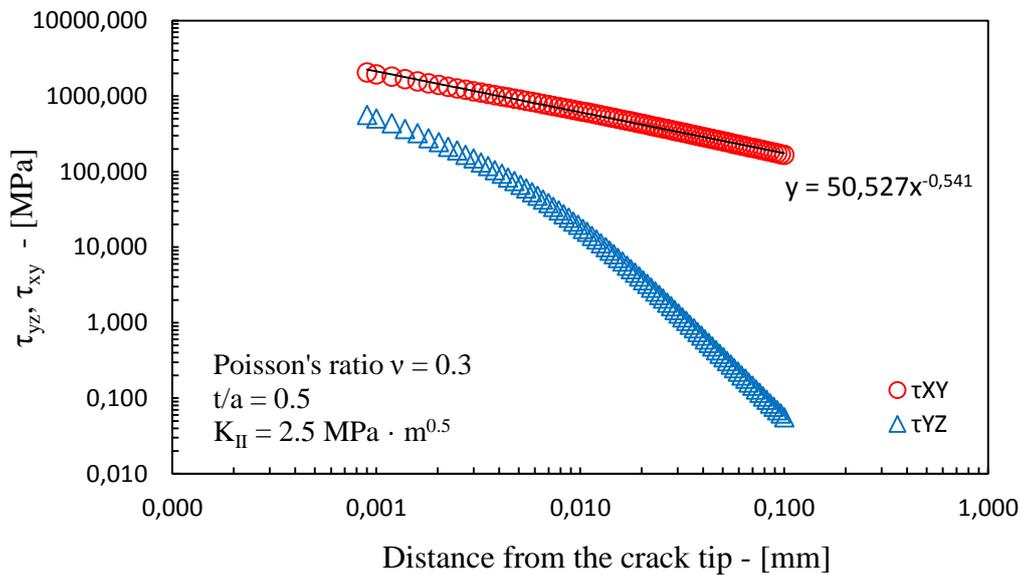
Le tensioni e gli *Stress Intensity Factors* sono stati ricavati dal modello agli elementi finiti lungo la bisettrice della cricca, a varie distanze dalla superficie libera del disco,  $s$  (0, 0.25, 0.5, 1, 2 mm).

Lungo la bisettrice della cricca, il sistema di riferimento cilindrico  $r-\theta-z$  coincide con il sistema di riferimento cartesiano  $x-y-z$ , perciò  $\sigma_\theta = \sigma_y$ ,  $\tau_{r\theta} = \tau_{xy}$  e  $\tau_{\theta z} = \tau_{yz}$ .

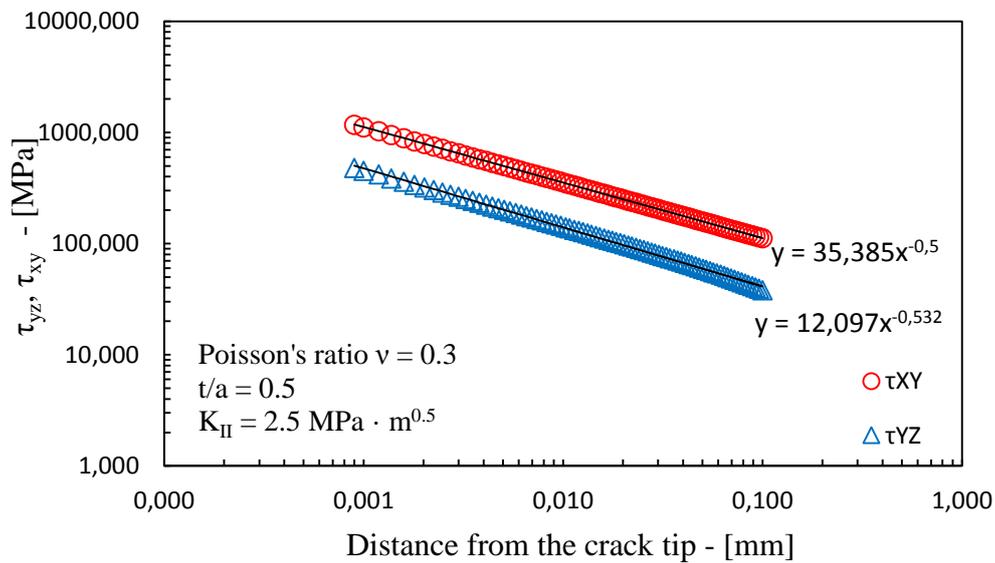
Ponendosi lungo la bisettrice della cricca è inoltre possibile disaccoppiare gli eventuali tre modi di sollecitazione presenti. Le tensioni  $\sigma_y$  saranno legate al solo modo I, le  $\tau_{xy}$  al solo modo II e le  $\tau_{yz}$  al solo modo III. Così facendo l'analisi degli stati di sollecitazione risulta molto più agevole.

Vengono ora riportati, in scala doppio logaritmica, i grafici ottenuti dalle analisi ( $t/a = 0.5, 1, 2$  e  $4$ ). Quando i dati si dispongono lungo una linea retta, è riportata anche l'equazione della funzione che meglio interpola i punti. La funzione è esponenziale e in scala doppio logaritmica è rappresentata da una retta. Il valore dell'esponente della variabile indica la pendenza della retta e corrisponde al grado di singolarità del campo di tensione.

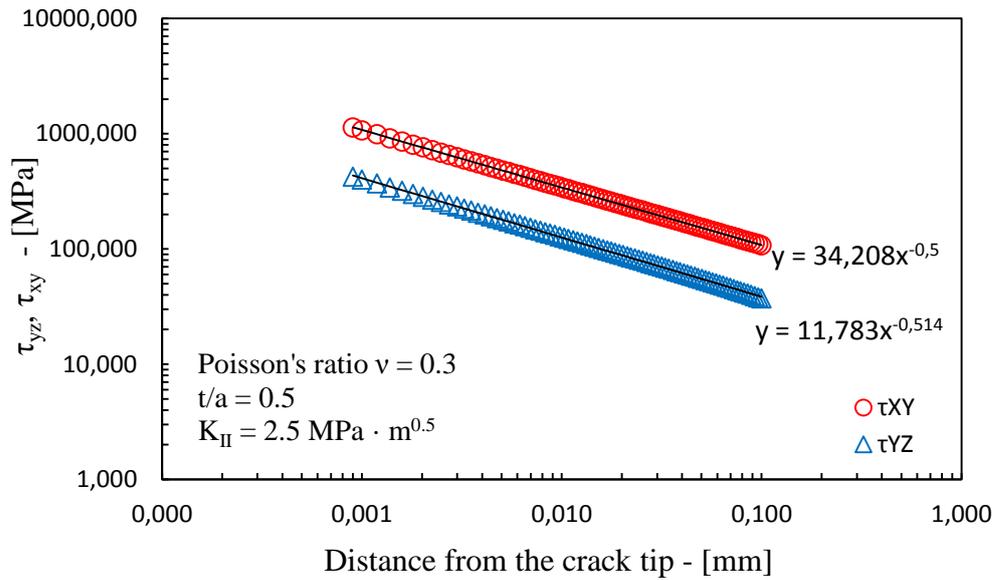
Caso  $t/a = 0.5$



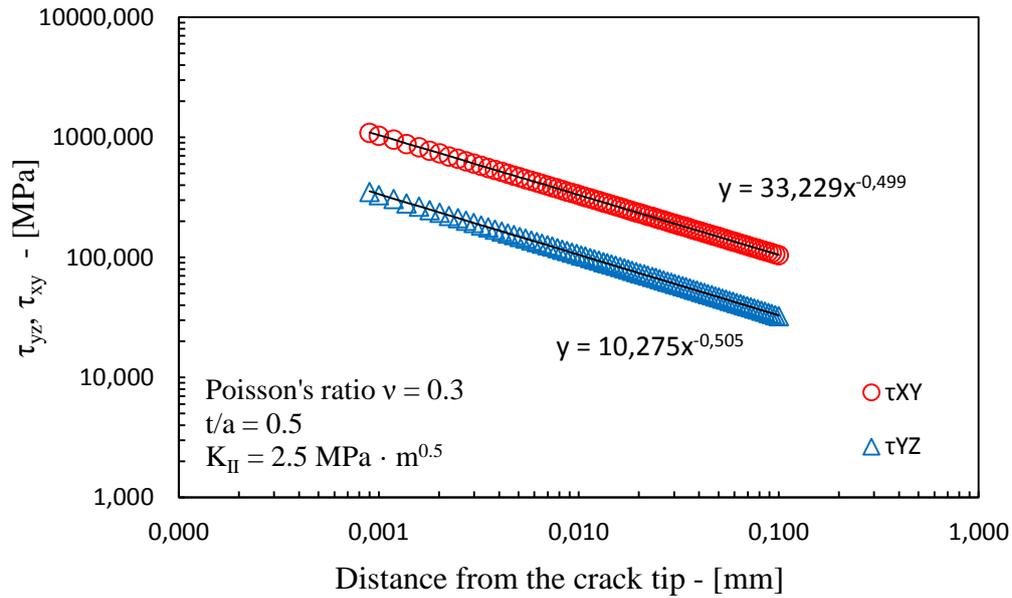
**Fig. 2.10** Free-Free: stresses  $\tau_{xy}$  and  $\tau_{yz}$  on crack bisector line at  $s/t = 0$  from disc surface (lateral surface),  $t/a = 0.5$ .



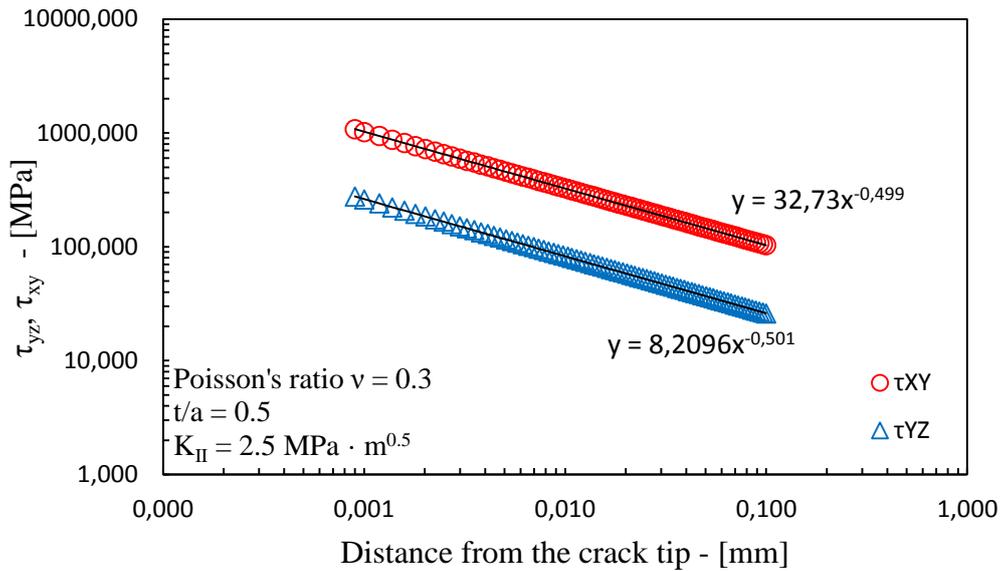
**Fig. 2.11** Free-Free: stresses  $\tau_{xy}$  and  $\tau_{yz}$  on crack bisector line at  $s/t = 0.01$  from disc surface (lateral surface),  $t/a = 0.5$ .



**Fig. 2.12** Free-Free: stresses  $\tau_{xy}$  and  $\tau_{yz}$  on crack bisector line at  $s/t = 0.02$  from disc surface (lateral surface),  $t/a = 0.5$ .



**Fig. 2.13** Free-Free: stresses  $\tau_{xy}$  and  $\tau_{yz}$  on crack bisector line at  $s/t = 0.04$  from disc surface (lateral surface),  $t/a = 0.5$ .



**Fig. 2.14** Free-Free: stresses  $\tau_{xy}$  and  $\tau_{yz}$  on crack bisector line at  $s/t = 0.08$  from disc surface (lateral surface),  $t/a = 0.5$ .

In accordo con quanto verificato in Rif. [1] nel caso *free-free* (entrambi i fianchi della cricca liberi da condizioni di vincolo) le uniche componenti di tensione non nulle lungo la bisettrice della cricca sono le  $\tau_{xy}$  e le  $\tau_{yz}$ . Ciò significa che una sollecitazione nominale di modo II applicata, induce uno stato di tensione accoppiato di modo III.

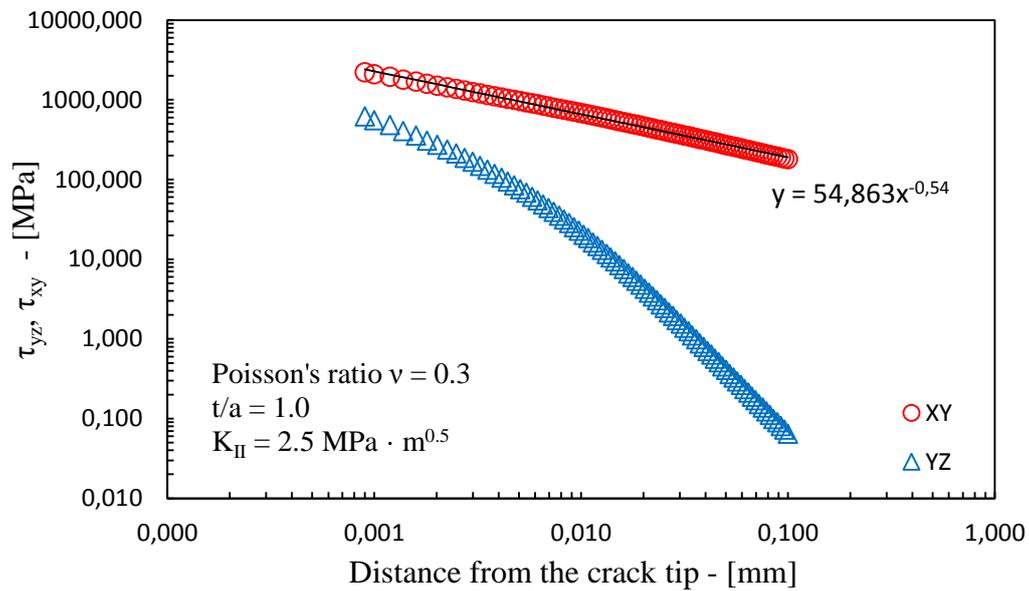
Le Fig. 2.10-11-12-13-14 mostrano l'andamento radiale delle tensioni lungo la bisettrice della cricca, a partire da una certa distanza dall'apice. I risultati ottenuti in prossimità dell'apice sono stati trascurati perché quasi privi di significato. Infatti, le tensioni vicino all'apice tendono teoricamente all'infinito, ma, lavorando con elementi di dimensione finita, i valori ottenuti dal codice di calcolo sono molto approssimativi.

Si può osservare come l'autovalore di modo III, ( $\lambda_3$ ), calcolato ad una distanza dalla superficie libera maggiore di  $s = 0.5$  mm, coincida quasi perfettamente con il valore teorico pari a 0.5, derivante dalla soluzione delle equazioni di Williams [3]. Per  $s = 0.25$  mm esso si discosta di circa il 6 % dalla soluzione teorica. Sulla superficie libera invece,  $s = 0$  mm, non è possibile identificare una zona in cui il campo di tensione abbia un andamento con grado di singolarità costante, non è quindi definibile in modo univoco il valore dell'autovalore  $\lambda_3$ .

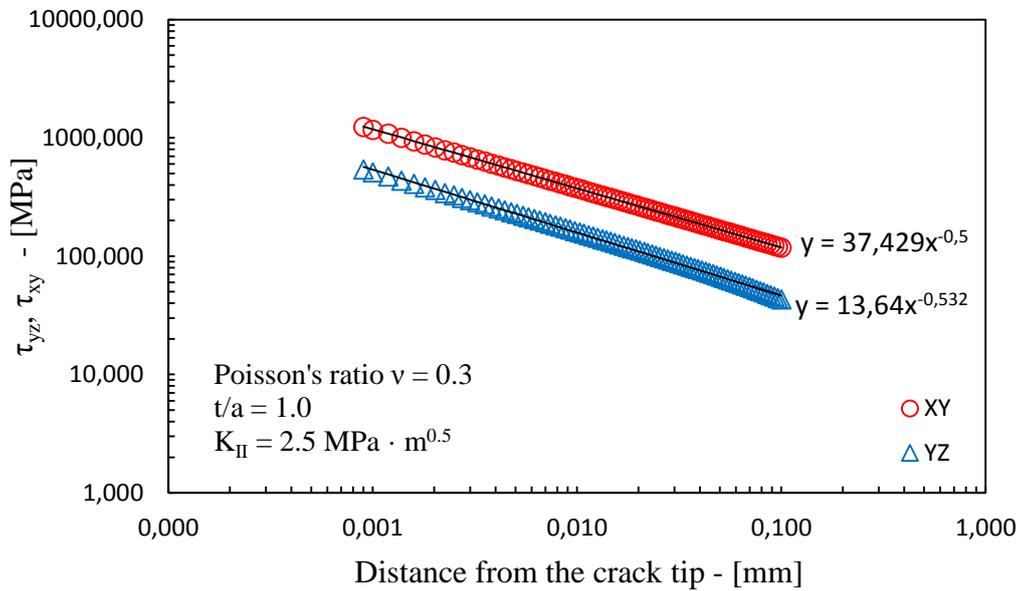
Anche l'autovalore  $\lambda_2$ , relativo al modo II applicato, ha andamento molto regolare muovendosi lungo lo spessore del disco. Per  $s \geq 0.25$  mm è circa coincidente al valore teorico pari a 0.5. Nella superficie libera invece, quanto ottenuto dal modello agli elementi finiti non è in accordo con quanto descritto da *Bazant and Estenssoro* [7], ovvero che in presenza di un cosiddetto *corner point*, come nel caso di una superficie libera, l'autovalore di modo II è pari a  $\lambda_2 = 0.4$ . L'autovalore ottenuto dal modello risulta essere più elevato del 15% ( $\lambda_2 = 0.46$ ).

Sia per il modo II che per il modo III, risulta perciò impossibile definire in modo esatto il valore dello *Stress Intensity Factor* nelle immediate vicinanze della superficie libera. Per quanto concerne il modo II, non è possibile calcolare il valore esatto del  $K_{II}$  solamente in corrispondenza della superficie laterale del disco, dove però le tensioni mantengono una singolarità regolare (i dati giacciono su una retta); analizzando il modo III invece, si evidenzia come, oltre a non riuscire a definire in modo corretto il valore del  $K_{III}$  per  $s \leq 0.25$  mm, in corrispondenza della superficie libera le tensioni non presentano nemmeno un grado di singolarità regolare. In quest'ultimo caso risulta perciò impossibile identificare l'autovalore di modo III e non ha nemmeno senso parlare di *Strees Intensity Factor*.

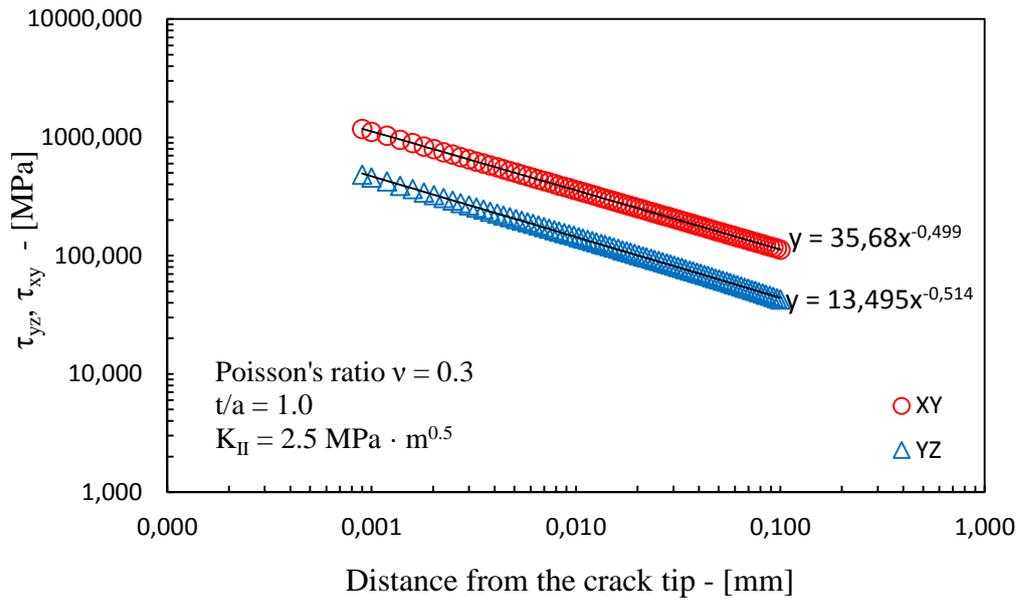
Caso  $t/a = 1$



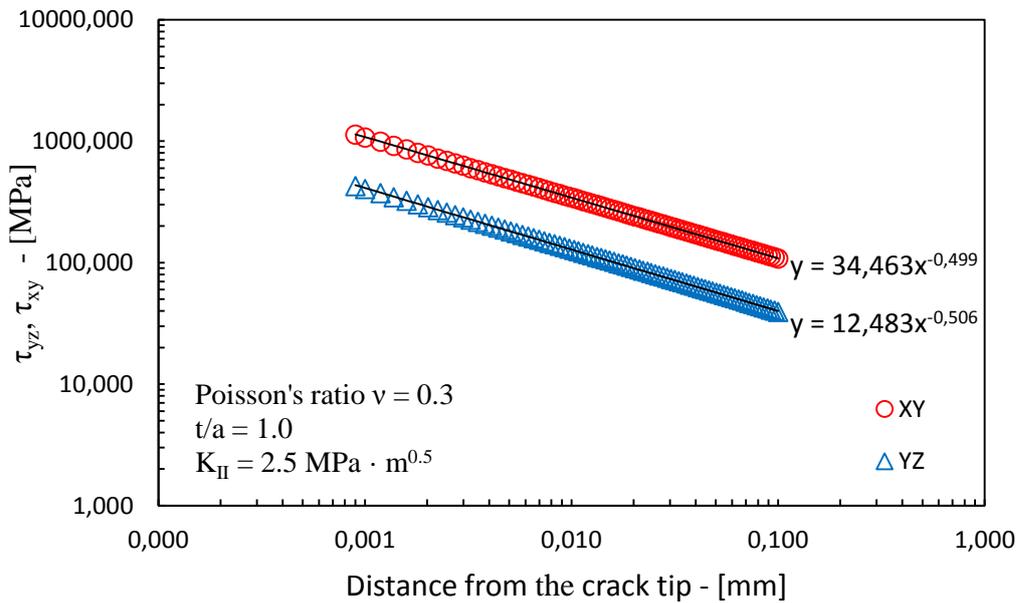
**Fig. 2.15** Free-Free: stresses  $\tau_{xy}$  and  $\tau_{yz}$  on crack bisector line at  $s/t = 0$  from disc surface (lateral surface),  $t/a = 1$ .



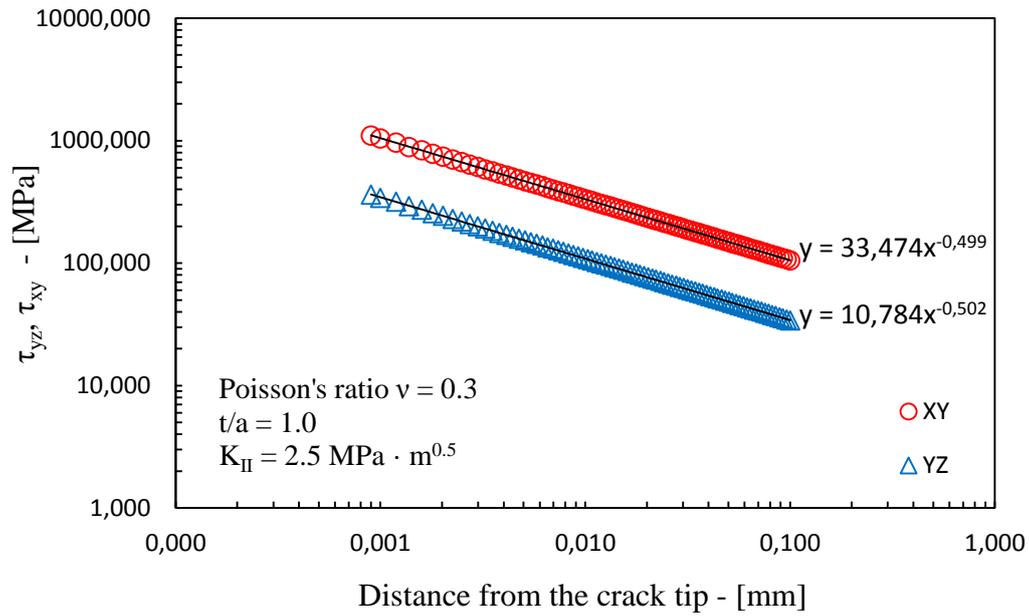
**Fig. 2.16** Free-Free: stresses  $\tau_{xy}$  and  $\tau_{yz}$  on crack bisector line at  $s/t = 0.005$  from disc surface (lateral surface),  $t/a = 1$ .



**Fig. 2.17** Free-Free: stresses  $\tau_{xy}$  and  $\tau_{yz}$  on crack bisector line at  $s/t = 0.01$  from disc surface (lateral surface),  $t/a = 1$ .

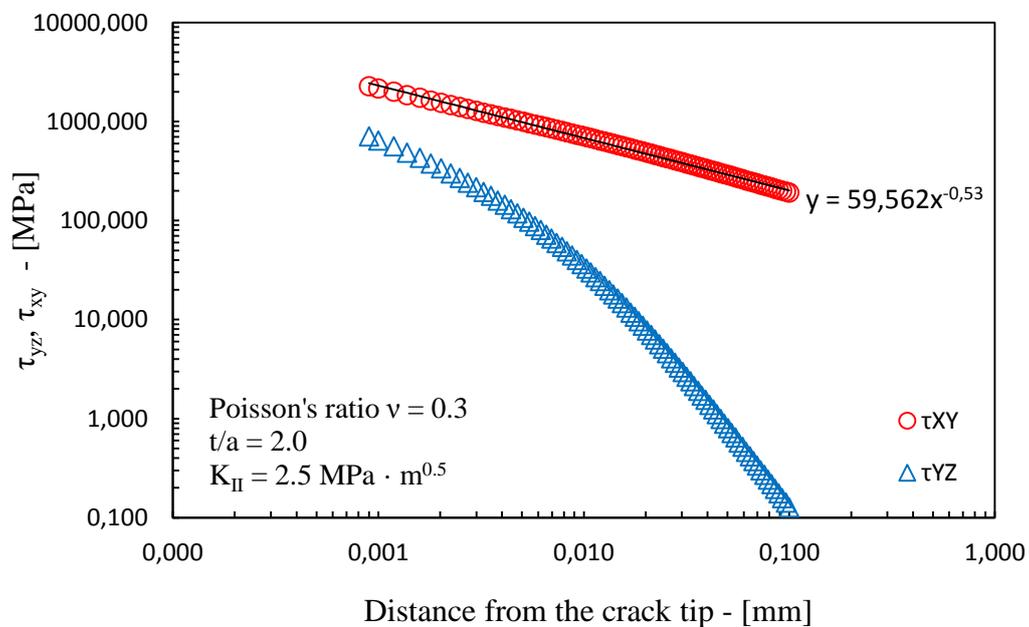


**Fig. 2.18** Free-Free: stresses  $\tau_{xy}$  and  $\tau_{yz}$  on crack bisector line at  $s/t = 0.02$  from disc surface (lateral surface),  $t/a = 1$ .

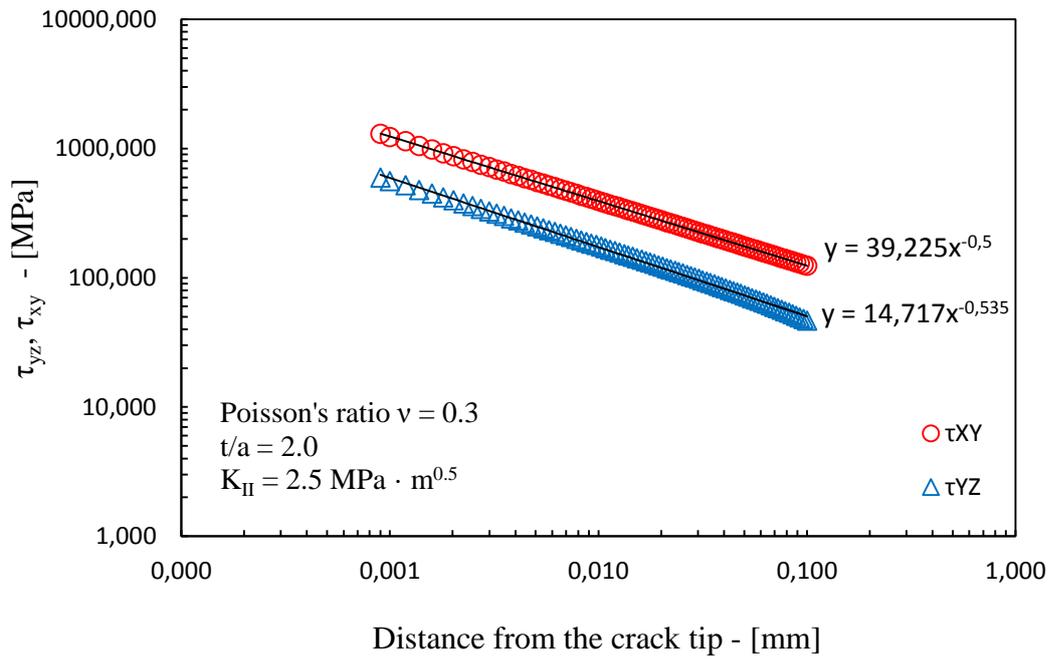


**Fig. 2.19** Free-Free: stresses  $\tau_{xy}$  and  $\tau_{yz}$  on crack bisector line at  $s/t = 0.02$  from disc surface (lateral surface),  $t/a = 1$ .

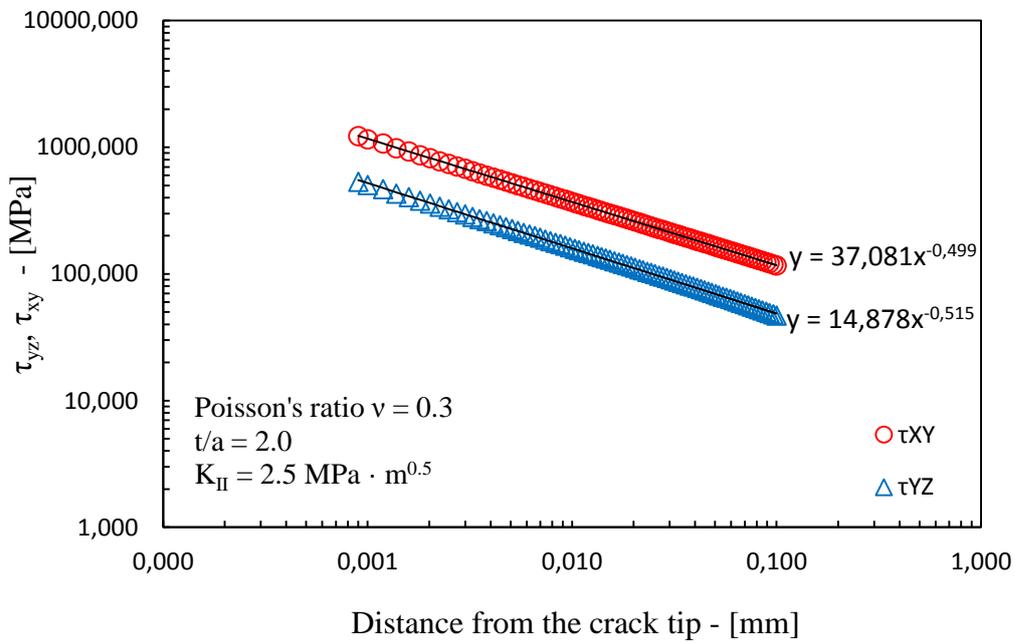
Caso  $t/a = 2$



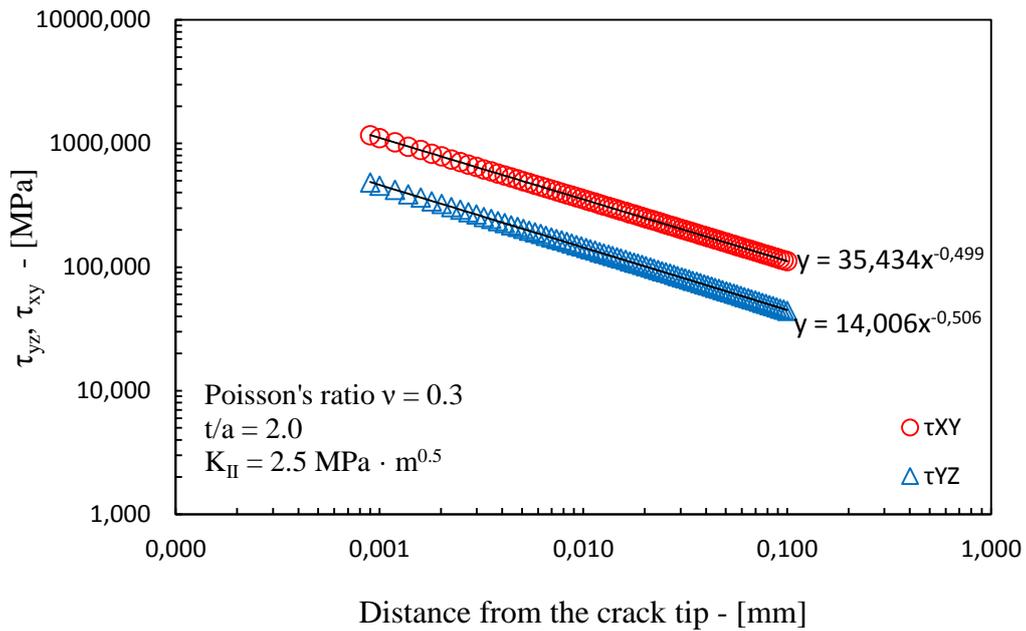
**Fig. 2.20** Free-Free: stresses  $\tau_{xy}$  and  $\tau_{yz}$  on crack bisector line at  $s/t = 0$  from disc surface (lateral surface),  $t/a = 2$ .



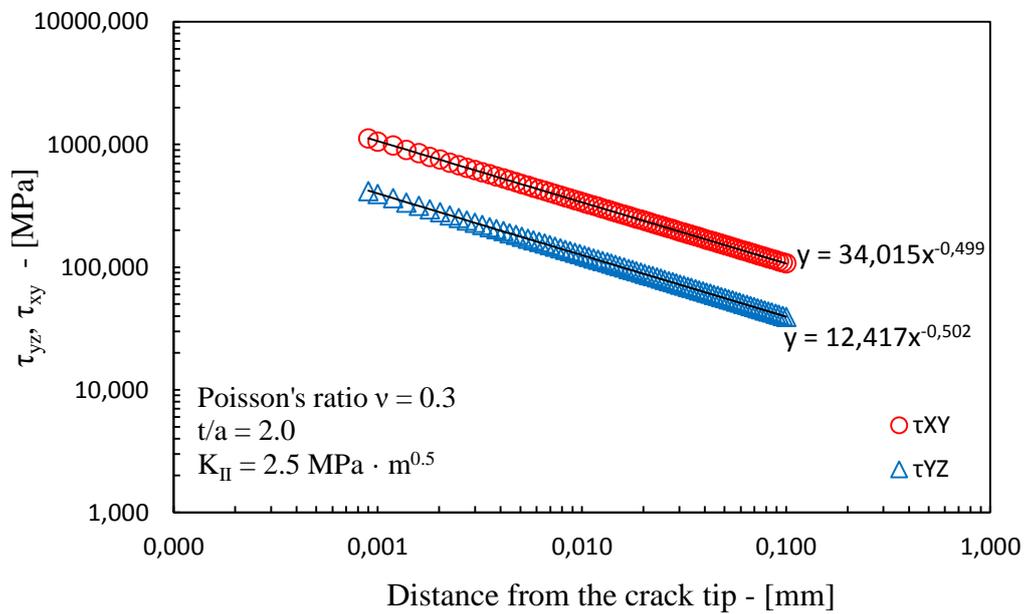
**Fig. 2.21** Free-Free: stresses  $\tau_{xy}$  and  $\tau_{yz}$  on crack bisector line at  $s/t = 0.0025$  from disc surface (lateral surface),  $t/a = 2$ .



**Fig. 2.22** Free-Free: stresses  $\tau_{xy}$  and  $\tau_{yz}$  on crack bisector line at  $s/t = 0.005$  from disc surface (lateral surface),  $t/a = 2$ .

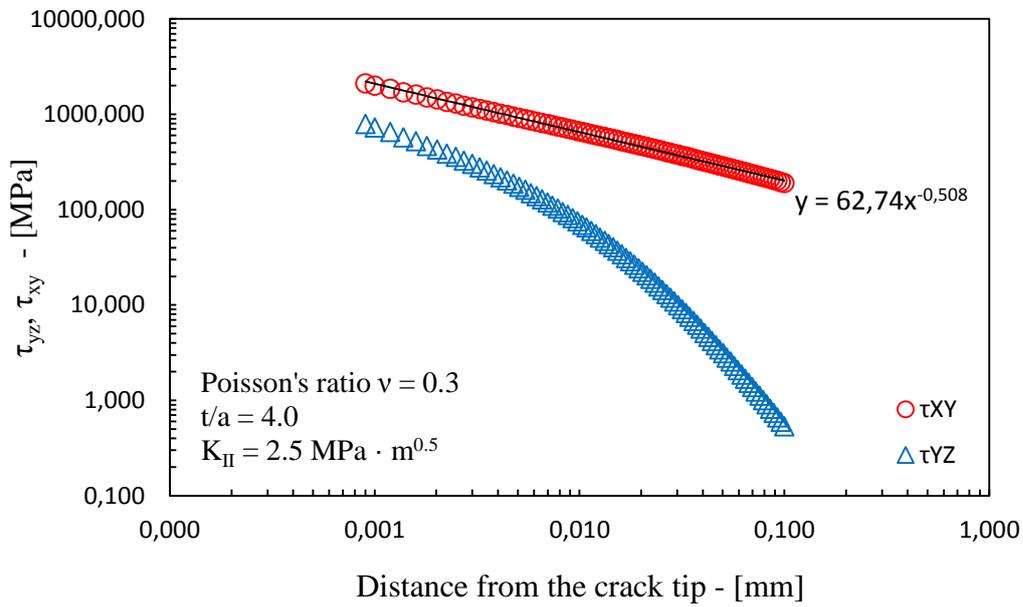


**Fig. 2.23** Free-Free: stresses  $\tau_{xy}$  and  $\tau_{yz}$  on crack bisector line at  $s/t = 0.01$  from disc surface (lateral surface),  $t/a = 2$ .

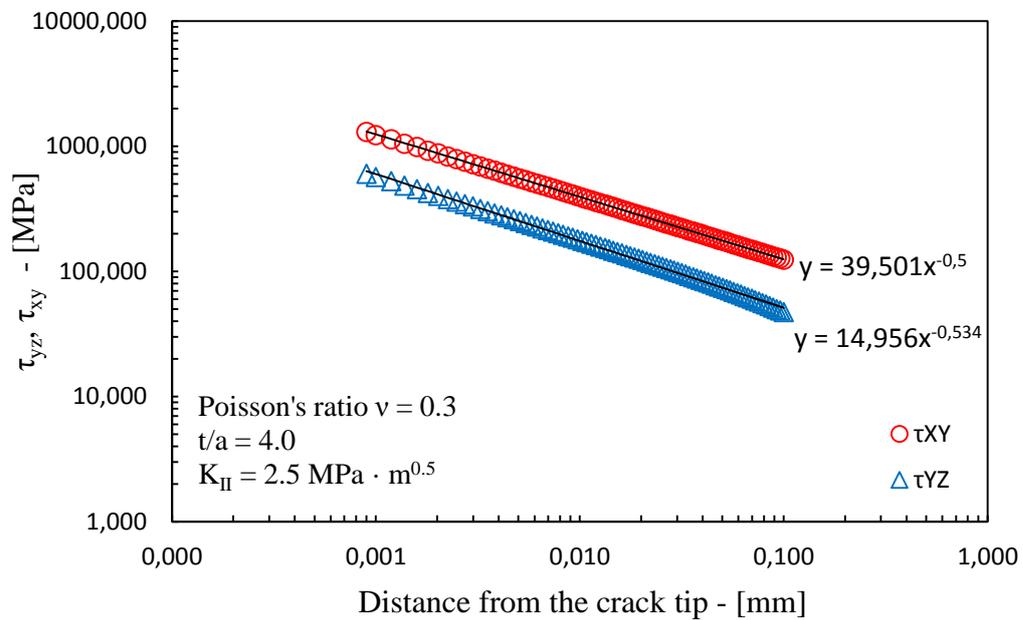


**Fig. 2.24** Free-Free: stresses  $\tau_{xy}$  and  $\tau_{yz}$  on crack bisector line at  $s/t = 0.02$  from disc surface (lateral surface),  $t/a = 2$ .

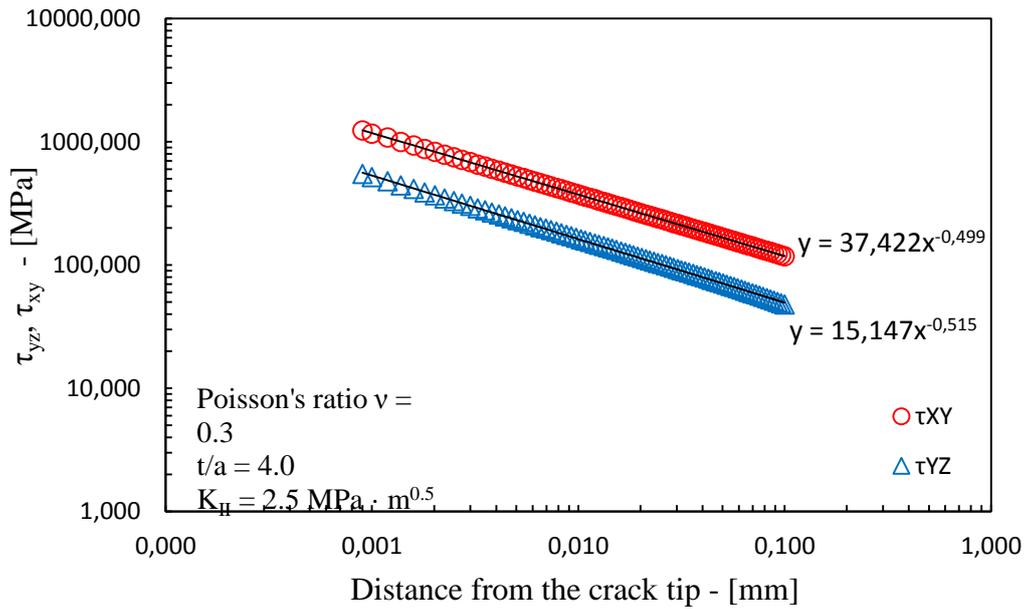
Caso  $t/a = 4$



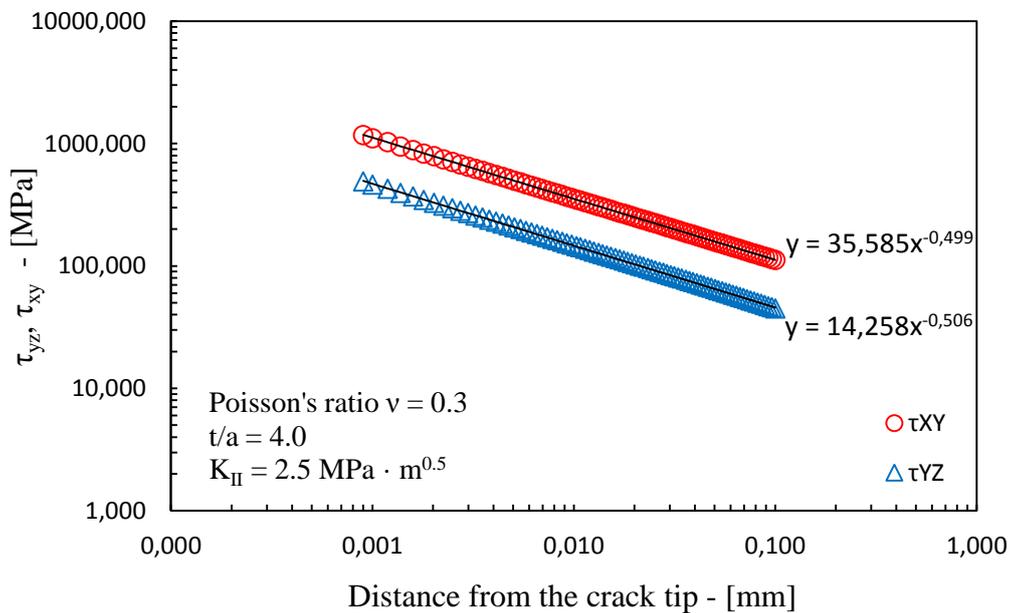
**Fig. 2.25** Free-Free: stresses  $\tau_{xy}$  and  $\tau_{yz}$  on crack bisector line at  $s/t = 0$  from disc surface (lateral surface),  $t/a = 4$ .



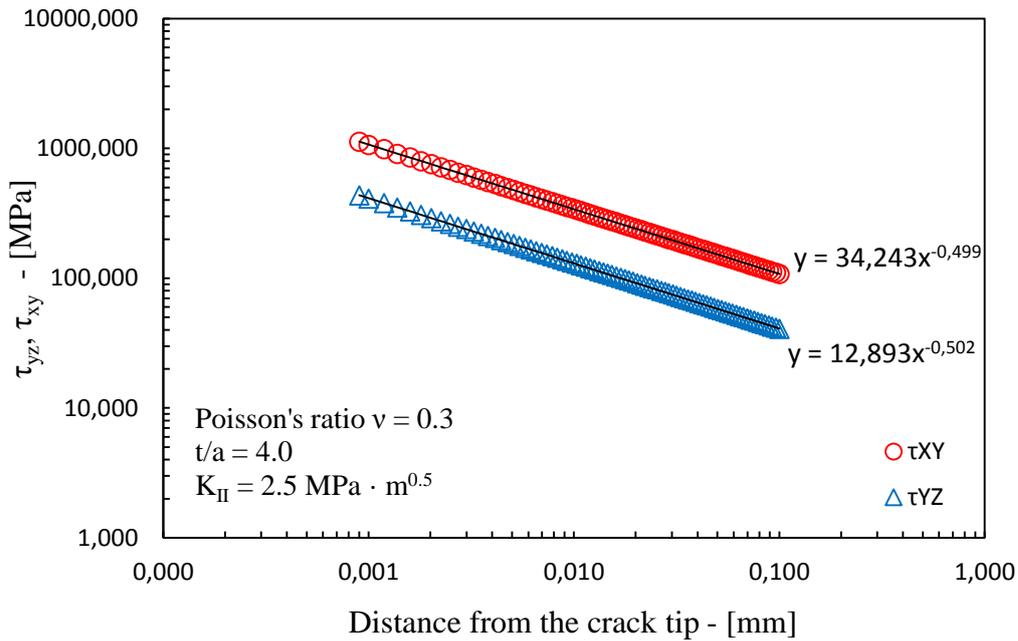
**Fig. 2.26** Free-Free: stresses  $\tau_{xy}$  and  $\tau_{yz}$  on crack bisector line at  $s/t = 0.00125$  from disc surface (lateral surface),  $t/a = 4$ .



**Fig. 2.27** Free-Free: stresses  $\tau_{xy}$  and  $\tau_{yz}$  on crack bisector line at  $s/t = 0.0025$  from disc surface (lateral surface),  $t/a = 4$ .



**Fig. 2.28** Free-Free: stresses  $\tau_{xy}$  and  $\tau_{yz}$  on crack bisector line at  $s/t = 0.005$  from disc surface (lateral surface),  $t/a = 4$ .



**Fig. 2.29** Free-Free: stresses  $\tau_{xy}$  and  $\tau_{yz}$  on crack bisector line at  $s/t = 0.01$  from disc surface (lateral surface),  $t/a = 4$ .

Le pendenze delle curve restano pressoché invariate al variare dello spessore del disco. L'unica differenza sostanziale si ha in corrispondenza della superficie libera per il valore dell'autovalore  $\lambda_2$ . In tutti i casi si discosta in modo non indifferente dal valore teorico pari a 0.4 ma la differenza diventa più consistente all'aumentare dello spessore del disco. Per  $t/a = 0.5$  si registra un valore di  $\lambda_2$  pari a 0.46 che aumenta fino a raggiungere il massimo per  $t/a = 4$  dove assume un valore di 0.5. In tutti i casi risulta impossibile calcolare in modo corretto il valore dello *Stress Intensity Factor* di Modo II in corrispondenza della superficie libera.

La seconda osservazione riguarda l'intensità dei campi di tensione al variare dello spessore del disco. Si è registrato infatti un incremento delle tensioni di Modo III indotte lungo la bisettrice della cricca all'aumentare dello spessore del disco. L'aumento del valore delle  $\tau_{yz}$  è tanto più consistente quanto più ci si allontana dalla superficie libera. Trascurando ciò che si è ottenuto per  $s = 0$ , si nota un incremento medio percentuale delle tensioni  $\tau_{yz}$ , tra  $t/a = 0.5$  e 2, che va da un 26% per  $s = 0.25$  mm fino ad arrivare al 58% per  $s = 2$  mm. Per quanto riguarda il campo di tensioni di Modo II gli

incrementi percentuali sono molto più contenuti e diminuiscono all'aumentare della distanza dalla superficie libera. Tralasciando i valori per  $s = 0$ , gli incrementi vanno da un massimo pari all'11% in corrispondenza di  $s = 0.25$  mm fino a scendere al 4.5% per  $s = 2$  mm.

### 2.6.2 Fattori di Intensificazione delle Tensioni

Per poter valutare qual è la sezione più critica del disco dal punto di vista strutturale, si è analizzato l'andamento degli *Stress Intensity Factors* di modo II e III lungo tutto lo spessore del componente. I *SIFs* vengono calcolati con le equazioni di *Irwin* [8]. Tali equazioni hanno valenza solamente per piccole distanze dall'apice di cricca. Si è scelto di posizionarsi ad una distanza dall'apice pari a 0.5 mm, abbastanza grande da poter identificare un univoco grado di singolarità nei modelli e sufficientemente piccola da poter far uso delle equazioni di *Irwin*:

$$K_{II} = \sqrt{2\pi} \cdot \tau_{xy} \cdot x^{1-\lambda_2} = \sqrt{2\pi} \cdot \tau_{xy} \cdot x^{0.5}$$

$$K_{III} = \frac{\sqrt{2\pi}}{2\lambda_3} \cdot \tau_{yz} \cdot x^{1-\lambda_3} = \sqrt{2\pi} \cdot \tau_{yz} \cdot x^{0.5}$$

0.5 mm è inoltre una posizione di favore per come è stata creata la mesh. E' infatti possibile selezionare un *path* di nodi lungo tutto lo spessore del disco (*through-the-thickness*).

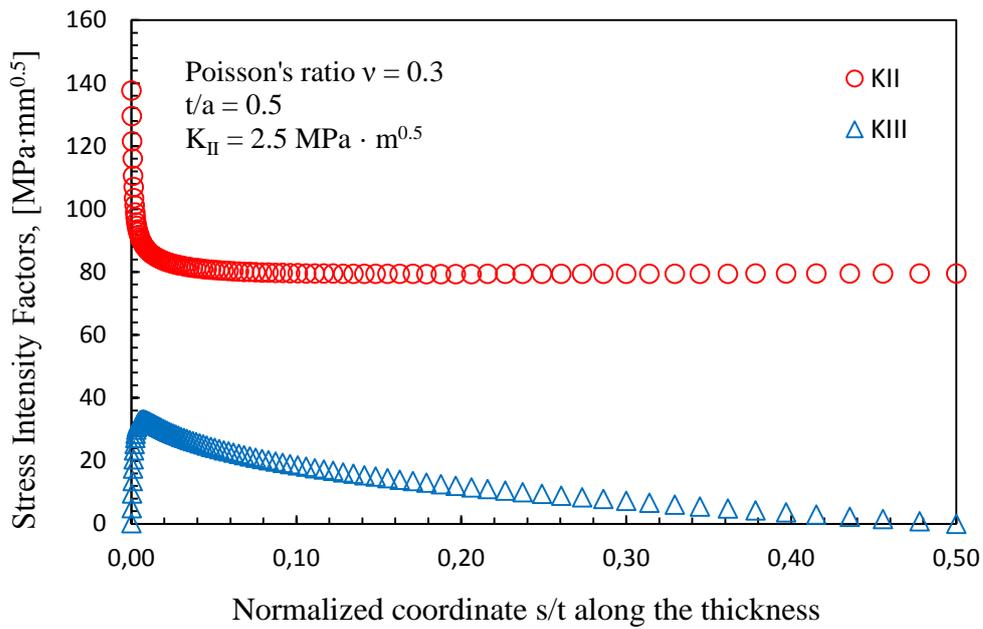


Fig. 2.30 Free-Free: through the thickness distribution of KII and KIII for  $t/a = 0.5$ ,  $x = 0.05 \text{ mm}$

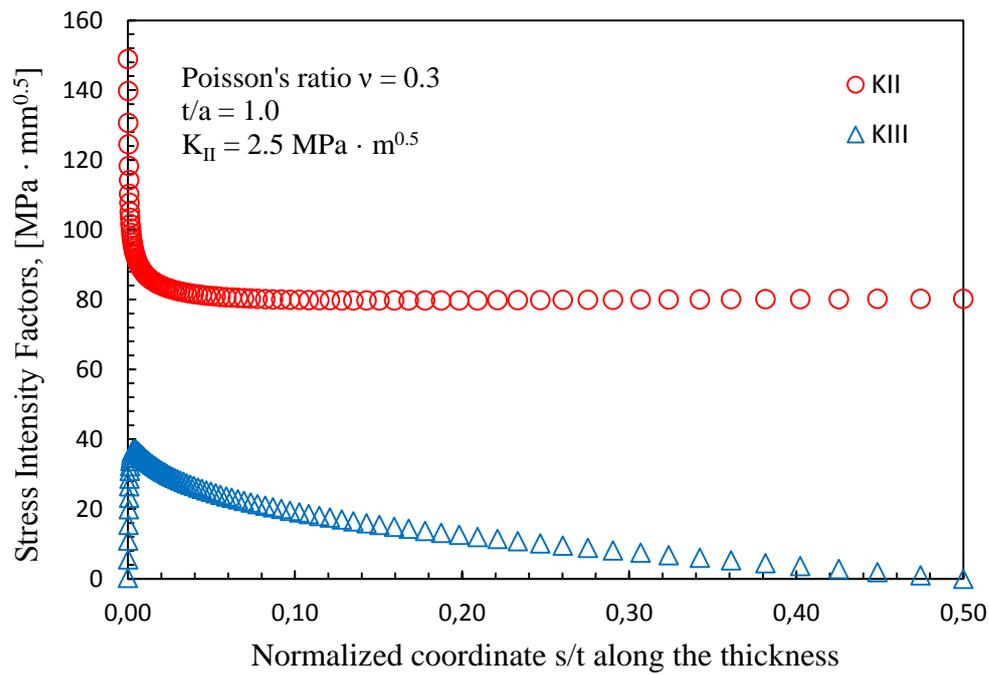


Fig. 2.31 Free-Free: through the thickness distribution of KII and KIII for  $t/a = 1$ ,  $x = 0.05 \text{ mm}$

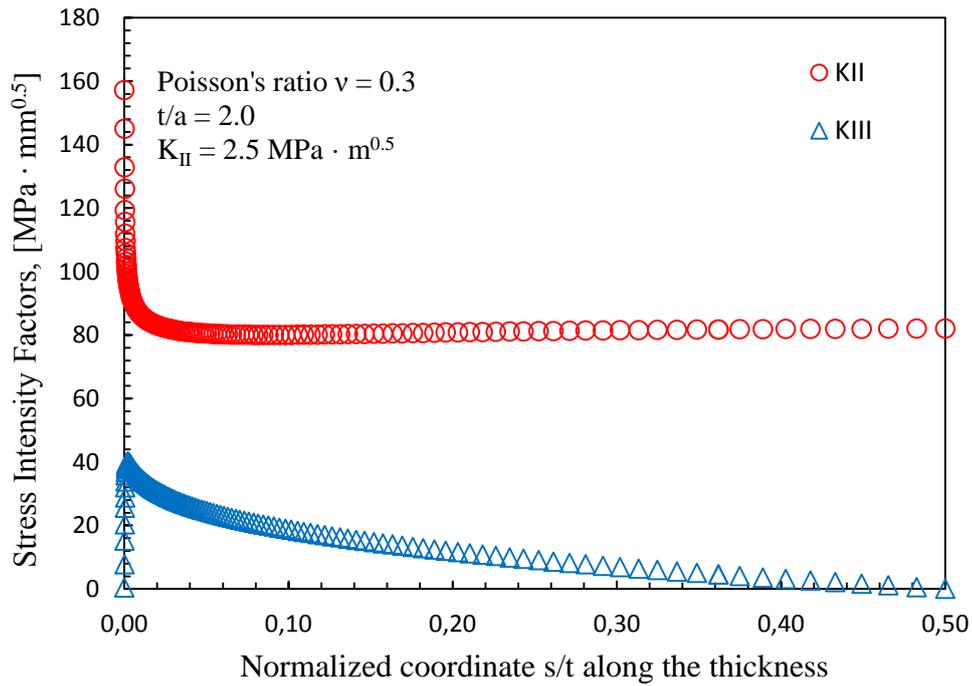


Fig. 2.32 Free-Free: through the thickness distribution of KII and KIII for  $t/a = 2$ ,  $x = 0.05 \text{ mm}$

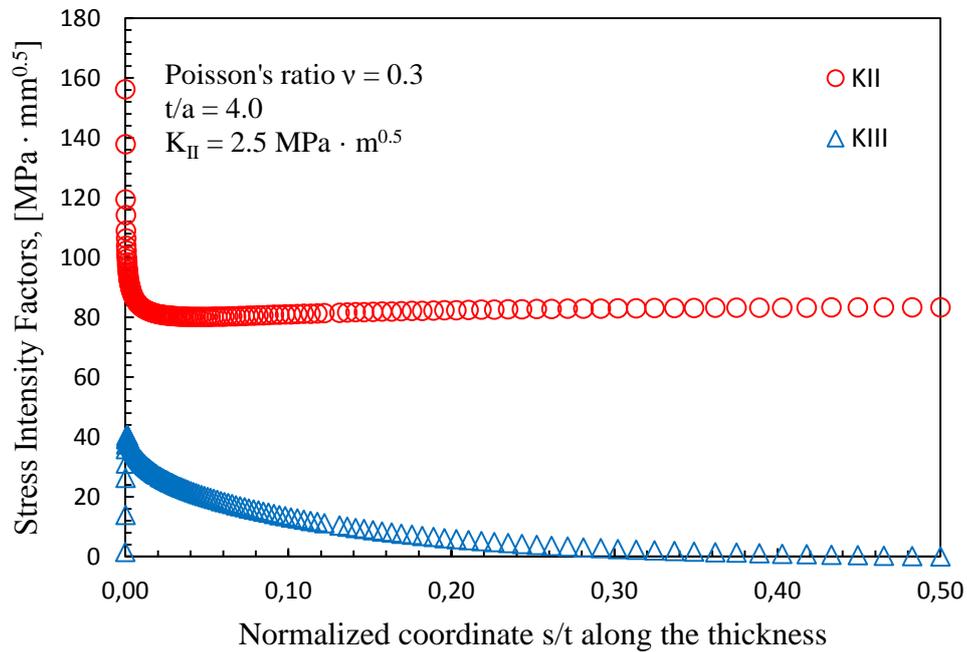


Fig. 2.33 Free-Free: through the thickness distribution of KII and KIII for  $t/a = 2$ ,  $x = 0.05 \text{ mm}$

Nei grafici di Fig. 2.30-31-32-33 sono riportati i valori di  $K_{II}$  e  $K_{III}$  calcolati anche per  $s \leq 0.25 \text{ mm}$  ( $s/t \leq 0.01$ ) i quali, anche se non hanno significato fisico per quanto detto

prima, mostrano quale sarebbe l'andamento teorico. Per  $s \leq 0.25$  mm è stato supposto che gli autovalori di modo II e III siano pari al valore teorico 0.5.

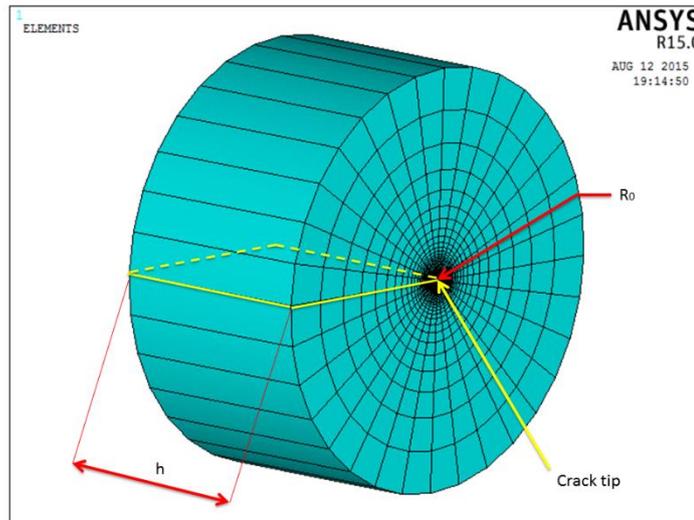
Il  $K_{II}$  è massimo in corrispondenza della superficie libera e diminuisce rapidamente fino a diventare costante creando un *plateau* che si protende per tutto lo spessore fino al piano medio. All'aumentare dello spessore, il *plateau* tende a sparire lasciando spazio ad un punto di minimo vicino alla superficie libera e ad un punto di massimo relativo in corrispondenza del piano medio. Il  $K_{III}$  è nullo sia nella superficie libera che nel piano medio, e presenta il suo massimo in prossimità della superficie laterale, a circa 0.075 mm dalla stessa. L'andamento è analogo in tutti e quattro i casi studiati ma il valore del picco di massimo che si registra *sotto pelle* cresce all'aumentare di  $t/a$ . In particolare, tra  $t/a = 0.5$  e  $t/a = 4$ , si ha un incremento percentuale del 25%. A parità di profondità della cricca e di diametro del disco, il modo III indotto risulta quindi essere tanto più "pericoloso" quanto maggiore è lo spessore del disco.

## 2.7 La densità di energia di deformazione calcolata lungo lo spessore del disco

Come abbiamo visto nel precedente paragrafo, il corretto calcolo degli *Stress Intensity Factors* di modo II e III non è possibile in prossimità della superficie libera. Nasce perciò la necessità di trovare un'altra grandezza che possa indicare l'entità e quindi la pericolosità delle sollecitazioni a cui il materiale è sottoposto, anche laddove gli *SIFs* non possono essere calcolati.

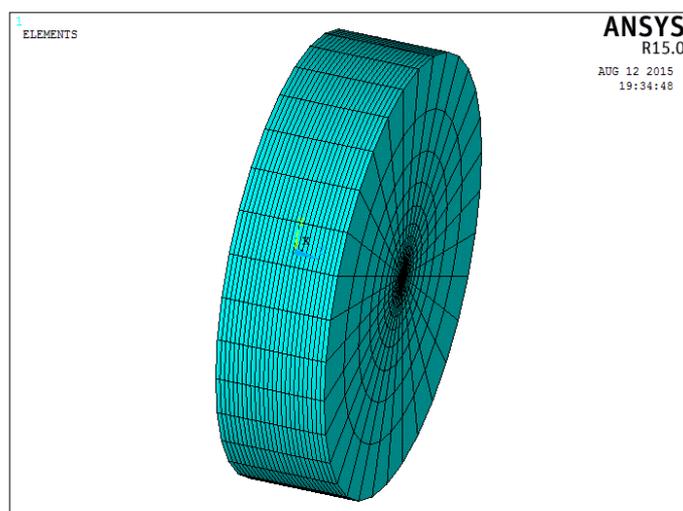
La densità di energia di deformazione (*Strain Energy Density, SED*), mediata all'interno di un volume di controllo predefinito, è una grandezza in grado di quantificare in un unico valore l'intensità di tutti gli stati di tensione a cui il materiale è sottoposto. La SED dà inoltre all'ingegnere importanti informazioni sulla resistenza strutturale del componente. Essa gioca infatti un ruolo cruciale nel processo di frattura [9], e influenza inoltre la propagazione della cricca [10].

Avendo a che fare con un modello agli elementi finiti tridimensionale, il volume di controllo per il calcolo della densità di energia è anch'esso tridimensionale ed è un cilindro di raggio  $R_0$  e altezza  $h$ , con  $h$  circa uguale a  $R_0$  (Fig. 2.34).



**Fig. 2.34** Control volume with a radius  $R_0$  equal to the height  $h$  (1 mm) embracing the crack tip.

$R_0$  è una proprietà del materiale che varia a seconda della modalità di carico a cui è sottoposto [1] [6], ma, per semplicità, si è posto  $R_0 = h = 1$  mm, abbastanza piccolo da poter apprezzare gli effetti tridimensionali lungo lo spessore. Per poter selezionare un volume cilindrico di raggio e altezza 1 mm si è prima suddiviso il disco in vari volumi concentrici tra cui uno del raggio desiderato, e poi si è creata la mesh con un numero di suddivisioni lungo lo spessore pari alla metà dello spessore  $t$  e uno *spacing ratio* unitario, in modo da ottenere elementi di profondità 1 mm (Fig. 2.35).



**Fig. 2.35** Three-dimensional model of the disk for  $t/a = 1$ , with 1 mm-long elements through the thickness.

La *SED* mediata (*average SED*), a differenza di quella calcolata in modo puntuale (*point-wise SED*), può essere facilmente calcolata usando anche una mesh rada, dal momento che dipende direttamente dagli spostamenti nodali. Inoltre, una volta nota la *average SED*, è possibile ricavare a posteriori il valore degli *Stress Intensity Factors* utilizzando semplici espressioni che legano questi alla *SED* locale [11] [12].

Un approccio energetico come quello della *SED* mediata nel volume di controllo, permette di valutare agevolmente la presenza di effetti tridimensionali che comportano l'insorgere di sollecitazioni legate a modi indotti da quello applicato. Al contrario dei Fattori di Intensificazione delle Tensioni, infatti, la densità di energia di deformazione racchiude in un'unica grandezza gli effetti dovuti a tutti e tre i modi eventualmente presenti nel modello.

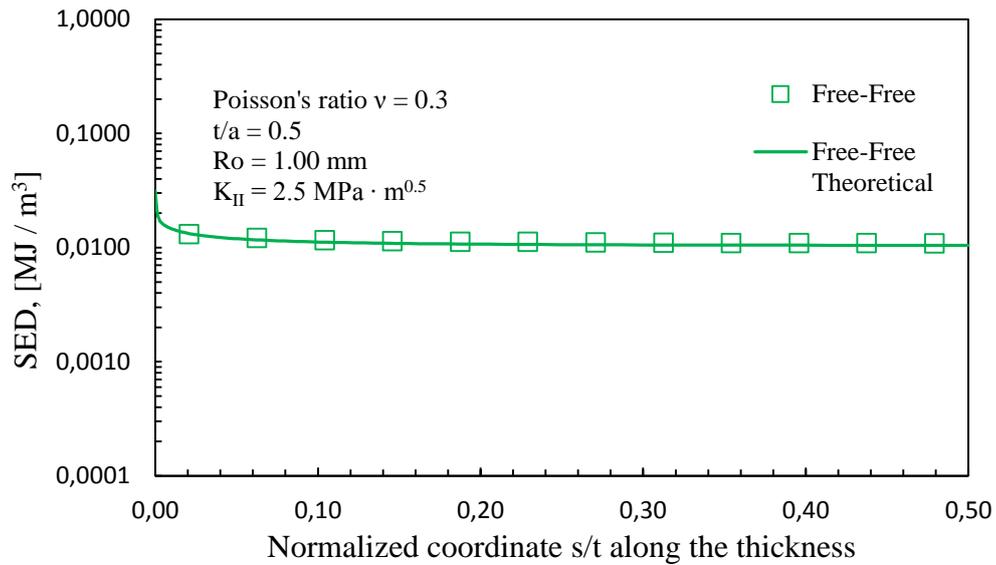
Con un approccio in *SED* è possibile capire facilmente se gli effetti lungo lo spessore giocano un ruolo importante o meno nella valutazione della frattura di un particolare materiale. Alcuni materiali fragili sono caratterizzati da raggi di controllo molto piccoli e la sensibilità al gradiente di tensione è molto forte. D'altra parte, materiali più duttili, hanno la capacità di mediare le tensioni in un volume più grande e per questa ragione sono meno sensibili alle variazioni del campo di tensione lungo lo spessore del disco. La *SED*, una volta che il volume di controllo è stato accuratamente modellato lungo lo spessore del disco, è capace di quantificare gli effetti tridimensionali correlati alla sensibilità del materiale, dando quindi preziose informazioni per la valutazione della frattura. Un altro fondamentale vantaggio è che la *SED* è automaticamente sensibile alle varie condizioni al contorno applicate.

L'approccio energetico può essere usato sia nel caso di componente criccato, come in questo caso, che di componente intagliato con un intaglio a spigolo vivo (*Sharp V-shaped Notch*), come si vedrà nel prossimo capitolo. Qui nasce un altro vantaggio importante dell'utilizzo della densità di energia di deformazione; è possibile infatti confrontare la gravità degli stati di sollecitazione presenti in un componente criccato, con quelli in un componente intagliato con angolo di apertura dell'intaglio  $\alpha$  qualsiasi. Le unità di misura delle *SED* calcolate nei due casi hanno infatti la stessa unità di misura. Con l'utilizzo degli *Stress Intensity Factors* e dei *Notch-Stress Intensity Factors* invece, le unità di misura dipendono dagli autovalori di modo I, II e III, che dipendono a

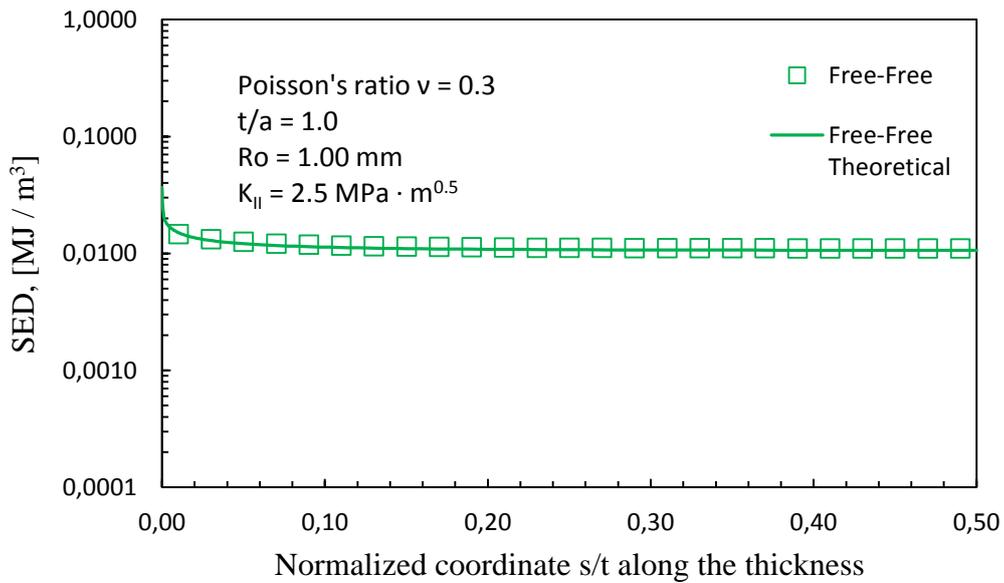
---

loro volta dall'angolo di apertura dell'intaglio; risulta perciò impossibile il confronto della gravità degli stati tensionali al variare dell'angolo.

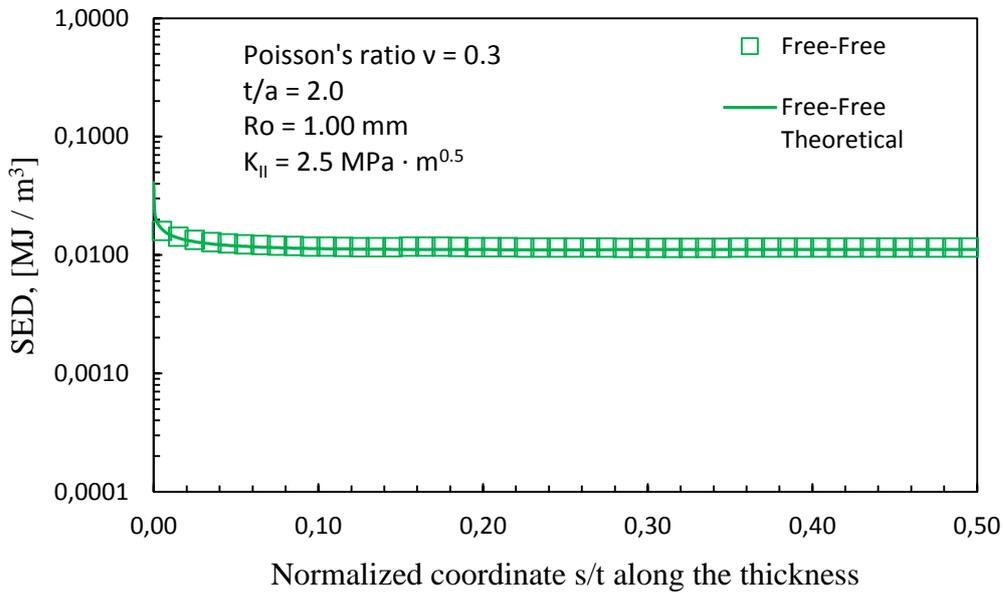
2.7.1 Variatione della SED nel modello tridimensionale con condizioni al contorno di tipo free-free.



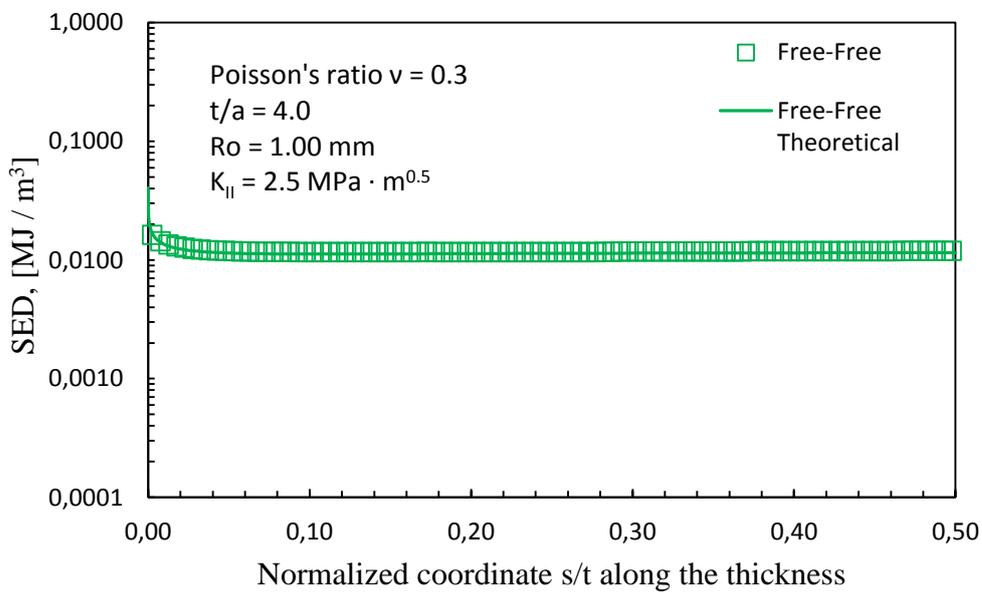
**Fig. 2.36** Through the thickness SED distribution for  $t/a = 0.5$ . Control radius  $R_0 = 1.00$  mm. DOF stands for degrees of freedom in the FE model (displacement  $u_x, u_y, u_z$ ).



**Fig. 2.37** Through the thickness SED distribution for  $t/a = 1.0$ . Control radius  $R_0 = 1.00$  mm. DOF stands for degrees of freedom in the FE model (displacement  $u_x, u_y, u_z$ ).



**Fig. 2.38** Through the thickness SED distribution for  $t/a = 2.0$ . Control radius  $R_0 = 1.00 \text{ mm}$ . DOF stands for degrees of freedom in the FE model (displacement  $u_x, u_y, u_z$ ).



**Fig. 2.39** Through the thickness SED distribution for  $t/a = 4.0$ . Control radius  $R_0 = 1.00 \text{ mm}$ . DOF stands for degrees of freedom in the FE model (displacement  $u_x, u_y, u_z$ ).

La densità di energia di deformazione nel volume di controllo cilindrico che abbraccia l'apice di cricca è stata estratta dal modello tridimensionale agli elementi finiti. Una alla volta, sono stati selezionati i volumi di controllo cilindrici di raggio e altezza unitaria, a partire dalla superficie libera fino ad arrivare al piano medio. Per ognuno di questi è stato estratto il valore dell'energia di deformazione, somma di tutti gli elementi in essi presenti, che poi è stato diviso per il volume del cilindro per trovare la densità di energia mediata nel volume di controllo. Per ognuno dei cilindretti lungo lo spessore è stato riportato in grafico il valore della *SED* in essi calcolati. Questa procedura è stata svolta per tutti e quattro i casi studiati, al variare del rapporto adimensionale  $t/a$ . Le Fig. 2.36-37-38-39 riportano questi valori rispettivamente per i casi  $t/a = 0.5, 1, 2$  e  $4$ . I valori riportati nelle figure rappresentano il contributo del modo II applicato, combinato con il modo III indotto.

E' interessante vedere che, a differenza di quanto accade in un disco criccato sollecitato a modo III [1], la posizione del massimo valore della *SED* lungo lo spessore non cambia al variare di  $t/a$ . Esso infatti si presenta sempre in corrispondenza della superficie libera del disco. L'andamento della *SED* è poi decrescente fino a stabilizzarsi in un *plateau*, poco distante dalla superficie libera. Il valore della densità di energia rimane poi costante fino al piano medio. Ciò che cambia tra i vari modelli è il valore del picco massimo, il quale aumenta all'aumentare di  $t/a$ , passando da  $0,0131 \text{ MJ/m}^3$  per  $t/a = 0.5$  a  $0,0162 \text{ MJ/m}^3$  per  $t/a = 4.0$ . Il valore della *SED* nel piano medio invece è pressoché lo stesso nei quattro modelli e si attesta attorno ad un valore pari a  $0,0115 \text{ MJ/m}^3$ , circa il 25% in meno del valore registrato sulla superficie libera.

Per verificare la validità dei modelli si è confrontato il risultato sperimentale della *SED* lungo lo spessore con i valori teorici che possono essere calcolati sommando i contributi di modo II e III utilizzando le equazioni viste nei paragrafi 2.3 e 2.4. Il valore teorico della *SED*, mediato su un volume di controllo avente raggio  $R_0 = 1 \text{ mm}$ , ha quindi la seguente espressione in funzione di  $K_{II}$  e  $K_{III}$ :

$$\overline{W_{th}} = \overline{W_{II}} + \overline{W_{III}} = \frac{1}{E} \left( \frac{I_2}{2\pi} \right) \frac{K_{II}^2}{R_0} + \frac{1}{E} \left( \frac{1+\nu}{\pi} \right) \frac{K_{III}^2}{R_0}$$

dove  $I_2$  è l'integrale delle funzioni angolari e dipende dall'angolo di apertura dell'intaglio  $2\alpha$  e dal coefficiente di Poisson  $\nu$ . Per  $2\alpha = 0$ ,  $\nu = 0.3$ ,  $I_2$  risulta pari a 2.145.

Dai grafici sopra riportati è possibile apprezzare un notevole accordo tra i risultati sperimentali, identificati dai punti, e i valori teorici, rappresentati dalla linea curva continua. Si può perciò concludere che utilizzando le espressioni teoriche viste per il calcolo della SED nel caso di modo II e modo III, è possibile predire molto bene gli effetti tridimensionali presenti nel modello. Si può inoltre ottenere la posizione dei massimi valori della densità di energia nel modello, dove lo stato di sollecitazione è il più critico per la resistenza strutturale del componente; conoscere queste informazioni è uno degli scopi principali di molte analisi strutturali.

## 2.8 Conclusioni

Partendo dai risultati ottenuti dallo studio svolto nel Rif. [1], si è analizzato il caso di un disco criccato sollecitato a modo II con condizioni al contorno di tipo *Free-Free*. Con un modello agli elementi finiti, si sono potuti apprezzare chiaramente gli effetti tridimensionali generati nel disco dalla sollecitazione di modo II. Una sollecitazione applicata di modo II comporta l'insorgere di uno stato di tensione indotto di modo III. E' facile immaginare che, nel caso una delle due facce della cricca fosse stata vincolata (caso *Free-Clamped*), oltre ad uno stato di sollecitazione indotto di modo III si sarebbe generato anche il modo I [1].

Per quantificare l'entità dello stato di sollecitazione sono stati determinati gli andamenti degli *Stress Intensity Factors* di modo II e III sulla base dei risultati del modello agli elementi finiti. Si è visto però che in una piccola zona vicino alla superficie libera del disco, a causa degli effetti di bordo, gli autovalori ottenuti si discostano dalle previsioni teoriche e risulta perciò impossibile definire in modo esatto i fattori di intensificazione delle tensioni.

Si è scelto perciò di ricorrere ad una grandezza energetica, la densità di energia di deformazione mediata in un volume di controllo cilindrico che abbraccia l'apice di cricca. Grazie alla SED si è potuto quantificare lo stato di tensione locale lungo lo spessore del disco, anche in corrispondenza della superficie libera.

---

I risultati ottenuti sperimentalmente sono stati confrontati con quelli ottenuti per via teorica, risultando i due essere in perfetto accordo.

Per una maggiore completezza dello studio, analoghe analisi possono essere svolte nel caso di intaglio a spigolo vivo con angolo di apertura  $2\alpha$  generico. Nel prossimo capitolo sono illustrati i risultati ottenuti dall'analisi agli elementi finiti di dischi indeboliti da un intaglio a spigolo vivo con angolo di apertura  $60^\circ$  sollecitati a modo III.



## **CAPITOLO III**

# **EFFETTI TRIDIMENSIONALI SU DISCHI INTAGLIATI SOTTOPOSTI AD UN CARICO DI MODO III AL VARIARE DELLE CONDIZIONI AL CONTORNO**



### 3.1 Introduzione

Gli effetti tridimensionali che nascono dall'applicazione di uno stato di tensione su un disco criccato sono stati trattati da A. Campagnolo *et al.* [1] nel caso di modo III applicato, e nel precedente capitolo nel caso di modo II applicato.

Per estendere più in generale i risultati fin qui ottenuti, si vuole analizzare ciò che comportano gli effetti tridimensionali su dischi intagliati, con angolo di apertura dell'intaglio  $2\alpha$  non nullo, sottoposti ad uno stato di sollecitazione di modo III.

In questo caso è interessante analizzare come varia lo stato tensionale nel disco al variare delle condizioni al contorno: condizione *Free-Free* (entrambe le facce dell'intaglio sono libere da vincoli) e condizione *Free-Clamped* (una delle due facce è vincolata).

Nella prima parte del capitolo è riportato il *frame* analitico con le equazioni che consentono di applicare una sollecitazione di modo III tramite spostamenti  $u_z$ , mettere in relazione le componenti di tensione con gli *Stress Intensity Factors*, calcolare la *Strain Energy Density* mediata all'interno di un volume di controllo.

Nella seconda parte sono raccolti e discussi i risultati relativi allo stato tensionale nel disco, ottenuti per via numerica dalla risoluzione del modello agli elementi finiti: prima le componenti di tensione e gli *Stress Intensity Factors*, poi i risultati ottenuti in termini di densità di energia di deformazione.

### 3.2 Frame analitico: tensioni e campi di spostamento nel caso di modo III

Questa sezione riassume il *frame* analitico riportando le espressioni dei campi singolari di tensione e di spostamento in prossimità dell'apice dell'intaglio a V. Vengono riportate le espressioni al variare delle condizioni al contorno nelle facce dell'intaglio. Anche in questo studio viene preso in considerazione un materiale isotropo e omogeneo.

---

### 3.2.1 *Free-free*

In presenza di un intaglio a spigolo vivo con le superfici non vincolate (condizione *free-free*), la distribuzione delle tensioni dovute ad un carico di modo III è [2] [16] [17]:

$$\sigma_{rz} = \frac{K_{3,F-F}}{\sqrt{2\pi}} 2\lambda_3 r^{\lambda_3-1} [\sin(\lambda_3 \theta)]$$

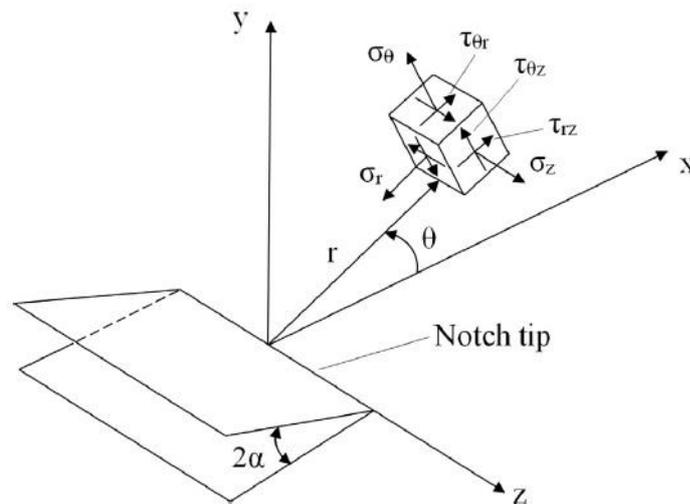
$$\sigma_{\theta z} = \frac{K_{3,F-F}}{\sqrt{2\pi}} 2\lambda_3 r^{\lambda_3-1} [\cos(\lambda_3 \theta)]$$

L'unica componente di spostamento diversa da zero è:

$$u_z = \frac{K_{3,F-F}}{G} \sqrt{\frac{2}{\pi}} r^{\lambda_3} [\sin(\lambda_3 \theta)] = 2(1 + \nu) \frac{K_{3,F-F}}{E} \sqrt{\frac{2}{\pi}} r^{\lambda_3} [\sin(\lambda_3 \theta)]$$

dove G è il modulo tangenziale elastico, E il modulo di Young e  $\nu$  il coefficiente di Poisson.

Le espressioni precedenti sono date in un sistema di riferimento cilindrico centrato all'apice dell'intaglio (Fig. 3.1);  $r$  è la coordinata radiale,  $\theta$  è l'angolo misurato dalla bisettrice dell'intaglio e  $z$  è la coordinata fuori dal piano.



**Fig. 3.1** Cylindrical reference system for stress field.

Il parametro  $K_{3,F-F}$  rappresenta il *Notch Stress Intensity Factor (NSIF)* di modo III nel caso *free-free*. Il grado di singolarità dipende dall'autovalore di modo III,  $\lambda_3$ , che varia in funzione dell'angolo di apertura dell'intaglio  $2\alpha$ . Con condizioni al contorno di tipo *free-free*,  $\lambda_3$  è il più piccolo autovalore reale della seguente equazione agli autovalori [2] [15]:

$$\cos \lambda_3 \gamma = 0 \quad \text{con} \quad \lambda_3 = \frac{\pi}{2\gamma}$$

dove

$$\gamma = \pi - \alpha.$$

### 3.2.2 *Free-clamped*

Nel caso di un intaglio a spigolo vivo con una faccia libera e l'altra vincolata dal movimento (condizione *free-clamped*), la distribuzione delle tensioni dovute ad un carico di modo III è [2] [15]:

$$\sigma_{rz} = \frac{K_{3,F-C}}{\sqrt{2\pi}} 2\kappa_3 r^{\kappa_3-1} [\sin(\kappa_3 \theta) + \cos(\kappa_3 \theta)]$$

$$\sigma_{\theta z} = \frac{K_{3,F-C}}{\sqrt{2\pi}} 2\kappa_3 r^{\kappa_3-1} [\cos(\kappa_3 \theta) - \sin(\kappa_3 \theta)]$$

L'unica componente di spostamento diversa da zero è:

$$\begin{aligned} u_z &= \frac{K_{3,F-C}}{G} \sqrt{\frac{2}{\pi}} r^{\kappa_3} [\sin(\kappa_3 \theta) + \cos(\kappa_3 \theta)] \\ &= 2(1 + \nu) \frac{K_{3,F-C}}{E} \sqrt{\frac{2}{\pi}} r^{\kappa_3} [\sin(\kappa_3 \theta) + \cos(\kappa_3 \theta)] \end{aligned}$$

Anche in questo caso le espressioni precedenti si riferiscono ad un sistema di coordinate polari come mostrato in Fig. 3.1

Il parametro  $K_{3,F-C}$  rappresenta il *Notch Stress Intensity Factor (NSIF)* di modo III nel caso *free-clamped*, mentre  $\kappa_3$  è l'autovalore di modo III dipendente dall'angolo di

---

apertura dell'intaglio  $2\alpha$ . In condizione *free-clamped*,  $\kappa_3$  è il più piccolo autovalore della seguente equazione agli autovalori [2]:

$$\cos 2\kappa_3\gamma = 0 \quad \text{con} \quad \lambda_3 = \frac{\pi}{4\gamma}$$

dove

$$\gamma = \pi - \alpha.$$

### 3.3 Densità di energia di deformazione (SED) a seguito di un carico di modo III

Per uno stato di tensione triassiale, l'equazione della densità di energia di deformazione totale  $W$  è:

$$W(r, \vartheta) = \frac{1}{2E} [\sigma_{\theta\theta}^2 + \sigma_{rr}^2 + \sigma_{zz}^2 - 2\nu(\sigma_{\theta}\sigma_{rr} + \sigma_{\vartheta\vartheta}\sigma_{zz} + \sigma_{rr}\sigma_{zz}) + 2(1 + \nu)(\sigma_{r\vartheta}^2 + \sigma_{rz}^2 + \sigma_{\theta z}^2)]$$

In caso di condizione di carico di puro modo III, solo le componenti di tensione  $\sigma_{rz}$  e  $\sigma_{\theta z}$  sono diverse da zero e l'equazione diventa:

$$W_3(r, \theta) = \frac{1 + \nu}{E} (\sigma_{rz}^2 + \sigma_{\theta z}^2)$$

#### 3.3.1 SED con condizioni al contorno di tipo free-free

Sostituendo in  $W_3$  le espressioni delle componenti di tensione  $\sigma_{rz}$  e  $\sigma_{\theta z}$  nel caso di intaglio a spigolo vivo sollecitato a modo III, e integrando in un settore circolare di raggio  $R_0$ , si ottiene l'equazione dell'energia elastica  $E(R_0)$  nel settore circolare:

$$\begin{aligned} E(R_0) &= \int_A W_3(r, \theta) dA = \frac{1}{E} \int_{-\gamma}^{\gamma} \int_0^{R_0} (1 + \nu) (\sigma_{rz}^2 + \sigma_{\theta z}^2) r dr d\theta \\ &= \frac{(1 + \nu)}{E} K_{3,F-F}^2 R_0^{2\lambda_3} \end{aligned}$$

Per ottenere la densità di energia di deformazione mediata nel settore circolare è sufficiente dividere l'espressione di  $E(R_0)$  per l'area  $A(R_0)$ :

$$\overline{W}_3 = \frac{E(R_0)}{A(R_0)} = \frac{(1+\nu)}{E} \frac{K_{3,F-F}^2 R_0^{2\lambda_3}}{\gamma R_0^2} = \frac{1}{E} \frac{1+\nu}{(\pi-\alpha)} \frac{K_{3,F-F}^2}{R_0^{2(1-\lambda_3)}}$$

Come già detto nel precedente capitolo, la densità di energia di deformazione media è strettamente legata con la frattura [9] e la propagazione di una cricca nel materiale [10]. Ogni materiale è caratterizzato da un valore di energia critica  $W_c$ , superato il quale si manifesta la frattura. E' possibile perciò valutare la resistenza strutturale di un materiale confrontando la densità di energia di deformazione media calcolata nel settore circolare, con il valore critico  $W_c$  [6].

Per esempio, per un materiale fragile, la densità di energia critica in condizioni di carico di modo III, ha la seguente espressione:

$$W_c = \frac{\tau_c^2}{2G} = (1+\nu) \frac{\tau_c^2}{E}$$

in cui  $\tau_c$  è la resistenza al taglio del materiale.

In condizioni lineari elastiche, imponendo  $\overline{W}_3 = W_c$ , si ottiene:

$$\left(\frac{1}{\pi-\alpha}\right) K_{3c,F-F}^2 R_{0,F-F}^{2(\lambda_3-1)} = \tau_c^2$$

risolvendo l'equazione si ottiene l'espressione del raggio di controllo  $R_0$  per la condizione *free-free*:

$$R_{0,F-F} = \left(\frac{1}{\pi-\alpha} \cdot \frac{K_{3c,F-F}^2}{\tau_c^2}\right)^{\frac{1}{2(1-\lambda_3)}}$$

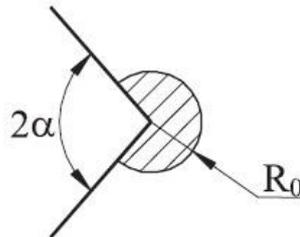


Fig. 3.2 Control volume for sharp V-notches.

---

### 3.3.2 *SED con condizioni al contorno di tipo free-clamped*

Nel caso di intagli a spigolo vivo in condizioni *free-clamped* sottoposti ad un carico di modo III, sostituendo nell'espressione di  $W_3$  quelle delle tensioni  $\sigma_{rz}$  e  $\sigma_{\theta z}$ , si ottiene l'espressione dell'energia elastica in un settore circolare di raggio  $R_0$  che circonda l'apice dell'intaglio:

$$\begin{aligned} E(R_0) &= \int_A W_3(r, \theta) dA = \frac{1}{E} \int_{-\gamma}^{\gamma} \int_0^{R_0} (1 + \nu) (\sigma_{rz}^2 + \sigma_{\theta z}^2) r dr d\theta \\ &= \frac{(1 + \nu)}{E} K_{3,F-C}^2 R_0^{2\kappa_3} \end{aligned}$$

Anche in questo caso, la densità di energia media è data dal rapporto tra l'energia elastica  $E(R_0)$  e l'area del settore circolare  $A(R_0)$ :

$$\overline{W}_3 = \frac{E(R_0)}{A(R_0)} = \frac{\frac{(1 + \nu)}{E} K_{3,F-C}^2 R_0^{2\kappa_3}}{\gamma R_0^2} = \frac{1}{E} \frac{1 + \nu}{(\pi - \alpha)} \frac{K_{3,F-C}^2}{R_0^{2(1-\kappa_3)}}$$

Come detto prima, in accordo con il metodo della SED media di *Lazzarin e Zambardi* [6], la frattura di un materiale in condizioni lineari elastiche avviene quando la densità di energia media  $\overline{W}_3$ , calcolata in un volume di controllo di raggio  $R_0$  circostante l'apice dell'intaglio, è pari al valore critico  $W_c$  del materiale. Dall'uguaglianza  $\overline{W}_3 = W_c$ , si ottiene l'espressione per il calcolo del raggio di controllo  $R_0$  nel caso *free-clamped*, in funzione delle caratteristiche meccaniche del materiale e dell'angolo di apertura dell'intaglio  $2\alpha$ , con sollecitazione di modo III:

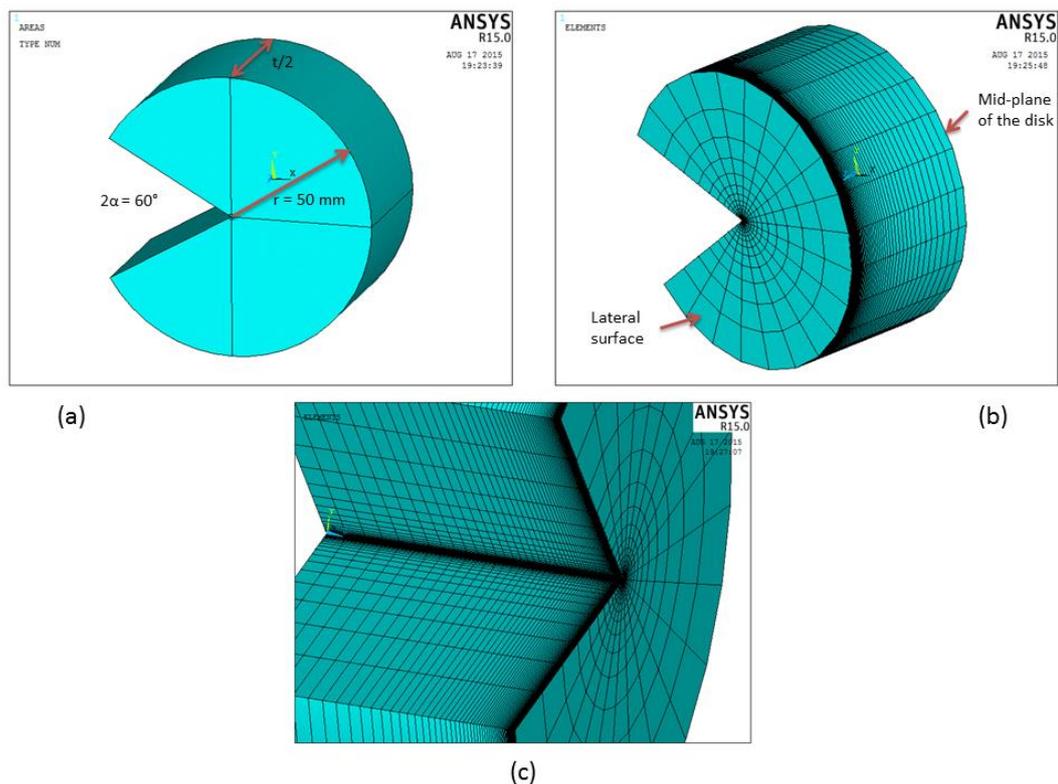
$$R_{0,F-C} = \left( \frac{1}{\pi - \alpha} \cdot \frac{K_{3C,F-C}^2}{\tau_c^2} \right)^{\frac{1}{2(1-\kappa_3)}}$$

Tutte le espressioni ottenute fin qui valgono per un intaglio generico di apertura  $2\alpha$ .

### 3.4 Analisi agli elementi finiti di dischi tridimensionali intagliati

Come anticipato nell'introduzione, al fine di esaminare gli effetti tridimensionali che si manifestano in un componente intagliato a seguito dell'applicazione di un carico di modo III, è stato creato il modello agli elementi finiti di un disco indebolito con un intaglio a spigolo vivo di apertura  $60^\circ$ . Per la creazione e la risoluzione del modello è stato usato il codice Ansys (versione 15.0). A causa dello spostamento  $u_z$  fuori dal piano si è dovuto creare un modello tridimensionale.

Le analisi delle tensioni, NSIFs e SED sono state fatte per dischi di diametro 100 mm con profondità dell'intaglio  $a$  pari al raggio  $r = 50$  mm (Fig. 3.3). Ciò che cambia tra i quattro modelli studiati è lo spessore  $t$  del disco, il quale assume valore 25, 50, 100 e 200 mm. I quattro modelli verranno identificati dal valore assunto dal rapporto adimensionale  $t/a$ , pari rispettivamente a 0.5, 1, 2 e 4.



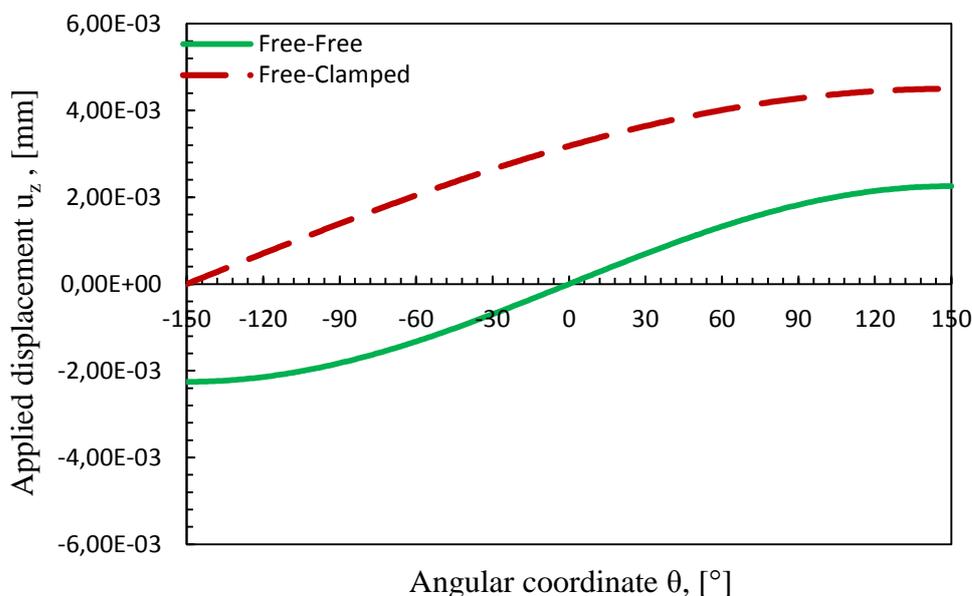
**Fig. 3.3** (a) Disc geometry. (b) Overall view of the finite element mesh. (c) Detail of finite element mesh at V-notch tip.

---

In tutti i modelli il materiale è lo stesso ed ha modulo di Young  $E = 206 \text{ GPa}$  e coefficiente di Poisson  $\nu = 0.3$ .

Per limitare il numero di elementi presenti nei modelli e quindi alleggerire l'analisi, nel caso *free-free* si è modellato solo un quarto del disco, sfruttando la doppia simmetria geometrica, una rispetto al piano medio e l'altra rispetto al piano ortogonale a quello medio e passante per l'apice dell'intaglio. Nel caso *free-clamped* invece si è dovuto modellare metà disco in quanto le condizioni al contorno applicate alle facce dell'intaglio comportano la perdita della seconda simmetria. Tutti i modelli sono composti da elementi *brick* a 20 nodi (*BRICK 186*).

La sollecitazione di modo III è stata applicata imponendo ai nodi della superficie esterna del disco gli spostamenti  $u_z$  dati dalle espressioni riportate nel paragrafo 3.2.1 nel caso *free-free* e 3.2.2 nel caso *free-clamped*, al variare della coordinata  $\theta$  nel sistema di riferimento cilindrico centrato nell'apice dell'intaglio. Sia nel caso *free-free* che in quello *free-clamped* si è imposto un  $\Delta u_z$  tra il nodo a  $+150^\circ$  e quello a  $-150^\circ$  pari a  $4.50 \cdot 10^{-3} \text{ mm}$  (Fig. 3.4). A questo  $\Delta u_z$  corrisponde un  $K_{3, F-F} = 1.351 \text{ MPa} \cdot \text{m}^{0.4}$  (*free-free*) e un  $K_{3, F-C} = 0.776 \text{ MPa} \cdot \text{m}^{0.7}$  (*free-clamped*).



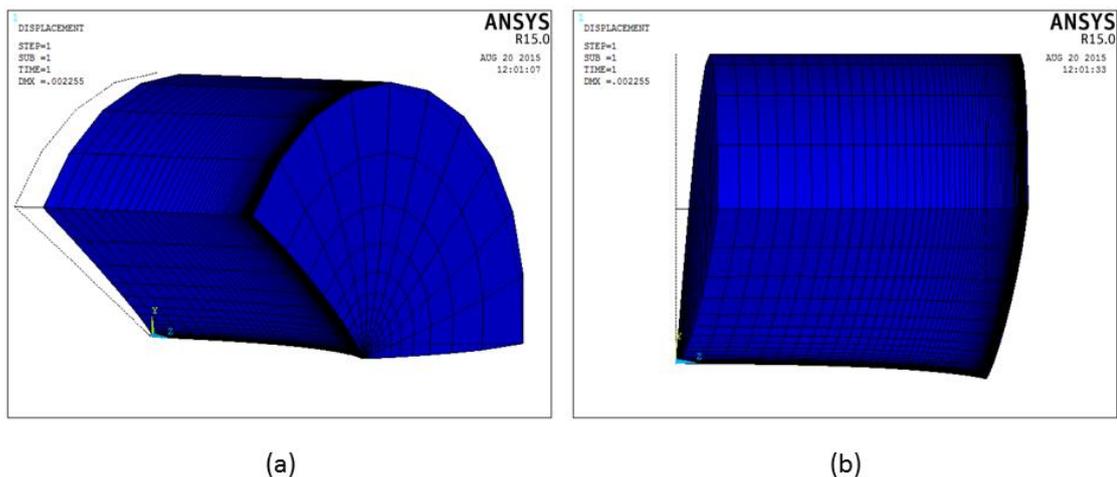
**Fig. 3.4** Applied displacement  $u_z$  as a function of the angular coordinate  $\theta$ . Free-Free and Free-Clamped cases.

### 3.5 Discussione dei risultati

A causa degli effetti tridimensionali, l'applicazione di uno stato di tensione di modo III ad un disco intagliato, comporta l'insorgere di sollecitazioni di modi indotti I e II, in modo dipendente dalle condizioni al contorno. I modi indotti sono analizzati sulla base dei risultati ottenuti dai modelli agli elementi finiti, seguendo procedimenti analoghi a quelli visti nel capitolo 2.

#### 3.5.1 Campi di tensione in condizioni free-free

Le tensioni e i *Notch-Stress Intensity Factors* sono stati ricavati lungo la bisettrice dell'intaglio a varie distanze  $s$  dalla superficie libera (0, 0.25, 0.5, 1, 2 mm). Analizzando le componenti di tensione lungo la bisettrice dell'intaglio i modi I, II e III sono disaccoppiati tra loro, e l'analisi dei risultati risulta essere più semplice e chiara. Il sistema di riferimento cilindrico  $r-\theta-z$  lungo la bisettrice corrisponde al sistema di riferimento cartesiano  $x-y-z$ . Per le componenti di tensione vale quindi:  $\sigma_\theta = \sigma_y$  (Modo I),  $\tau_{r\theta} = \tau_{xy}$  (Modo II) e  $\tau_{\theta z} = \tau_{yz}$  (Modo III).



**Fig. 3.5** Free-free,  $t/a = 2.0$ : (a) 3-D view of the deformed shape of the disc under Mode III loading conditions. (b) Lateral view of the deformed shape of the disc under Mode III loading conditions.

I grafici seguenti riportano i risultati ottenuti in termini di tensioni lungo la bisettrice al variare di  $s/t$  e di  $t/a$ . Nei casi *free-free* le uniche componenti di tensione diverse da zero

sono le  $\tau_{xy}$  e le  $\tau_{yz}$ , ciò significa che con queste condizioni al contorno, uno stato di sollecitazione di modo III applicato, ne induce uno di modo II. Questo si è verificato sempre, indipendentemente dal valore di  $t/a$  o dalla distanza dalla superficie libera. I grafici vengono ulteriormente commentati alla fine del paragrafo 3.5.1.4.

Caso  $t/a = 0.5$

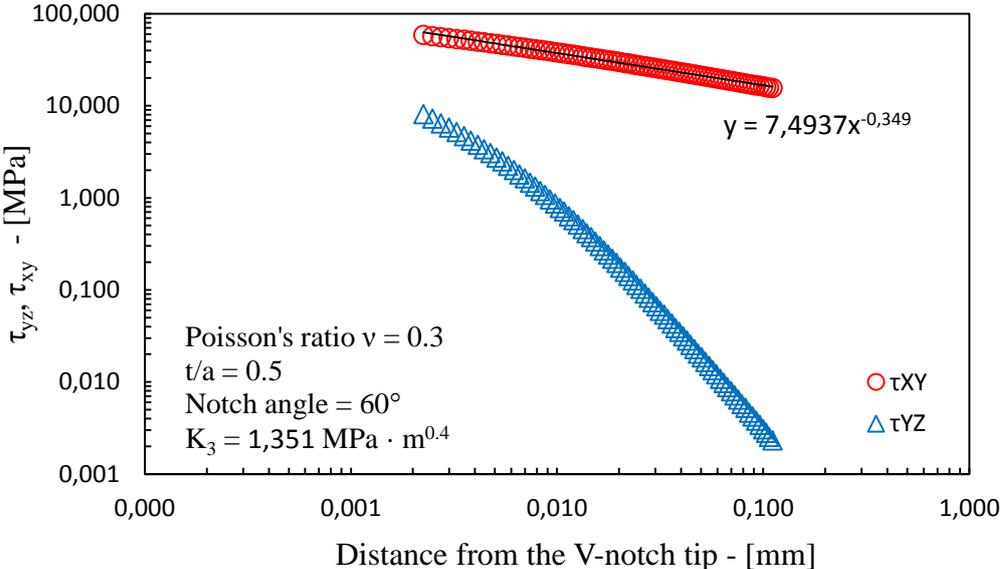


Fig. 3.6 Free-free: stresses  $\tau_{xy}$  and  $\tau_{yz}$  at V-notch bisector line at  $s/t = 0$  from disc surface,  $t/a = 0.5$

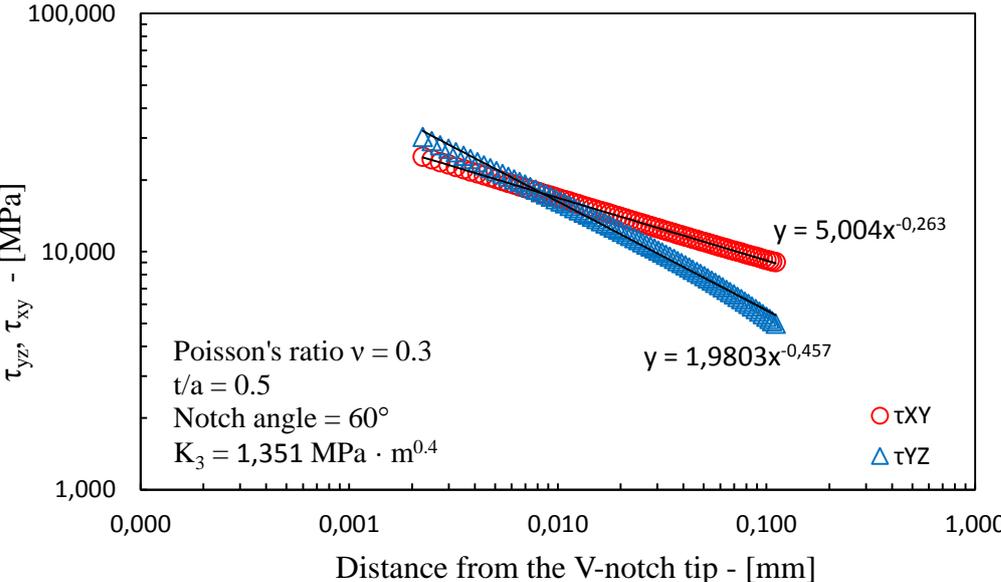


Fig. 3.7 Free-free: stresses  $\tau_{xy}$  and  $\tau_{yz}$  at V-notch bisector line at  $s/t = 0.25$  from disc surface,  $t/a = 0.5$ .

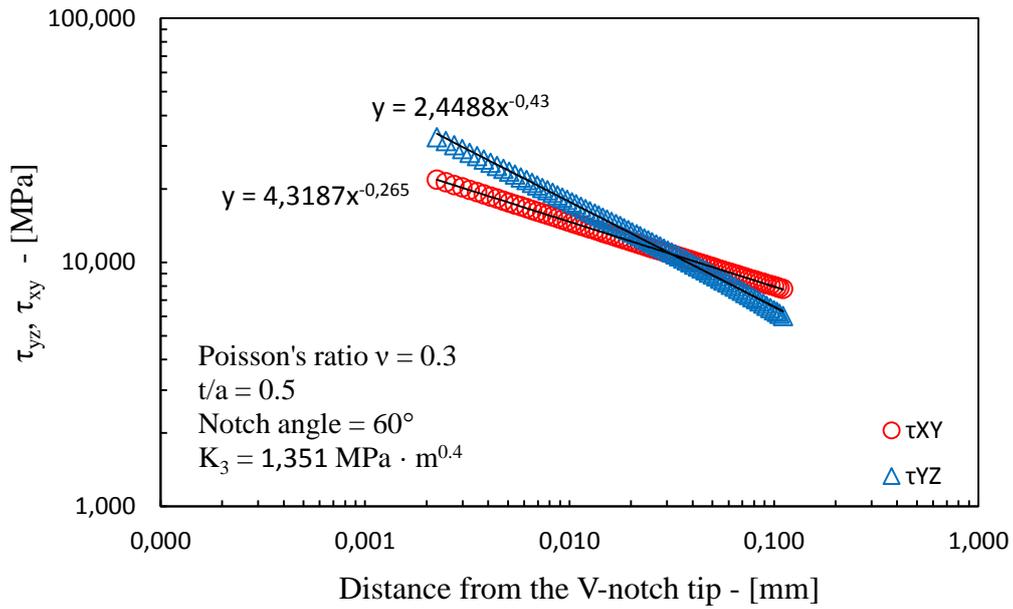


Fig. 3.8 Free-free: stresses  $\tau_{xy}$  and  $\tau_{yz}$  at V-notch bisector line at  $s/t = 0.5$  from disc surface,  $t/a = 0.5$ .

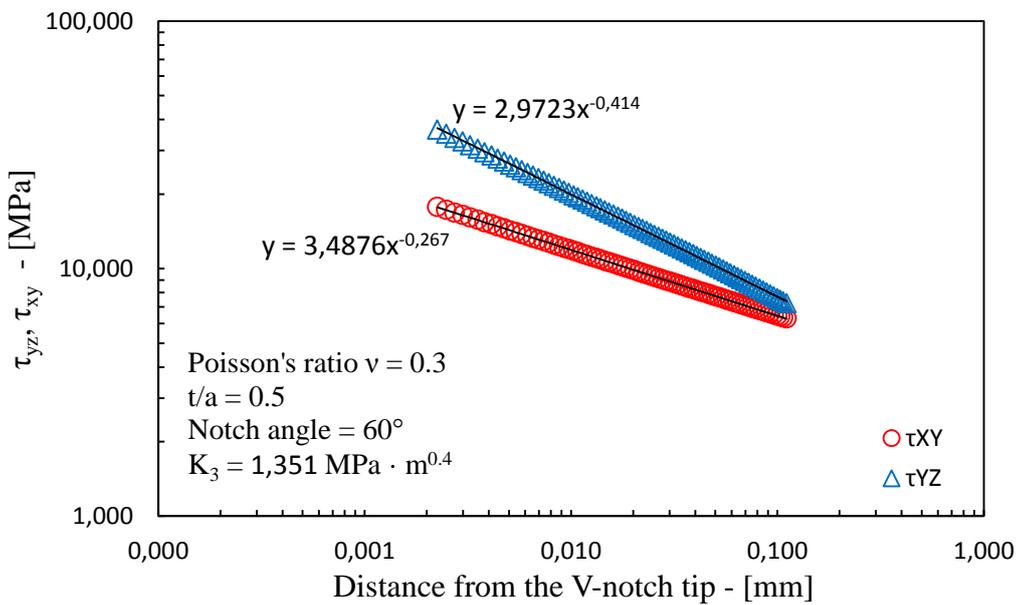
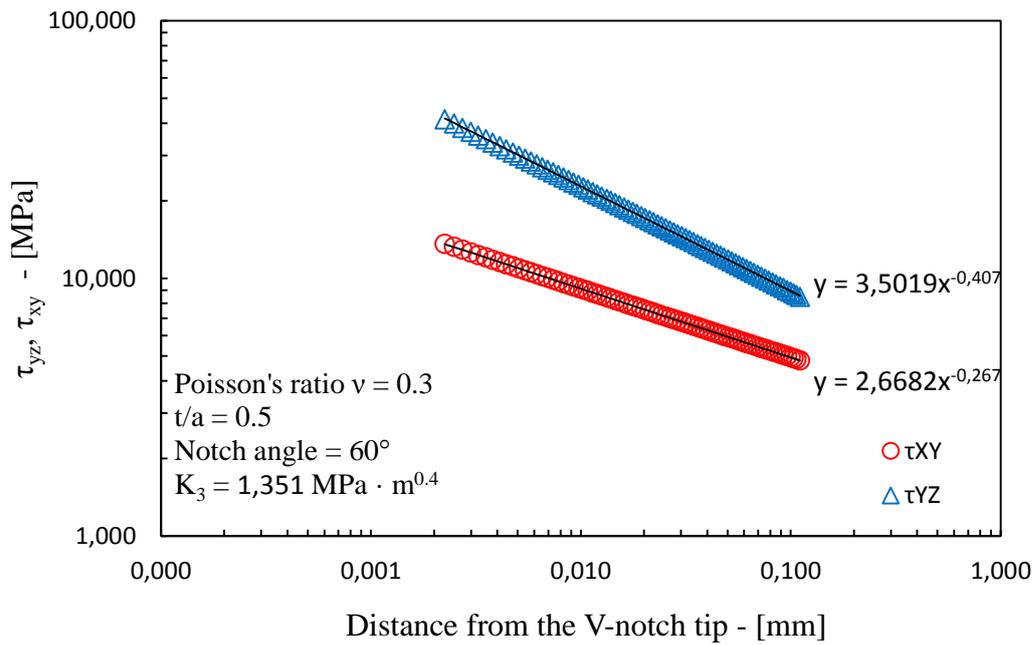
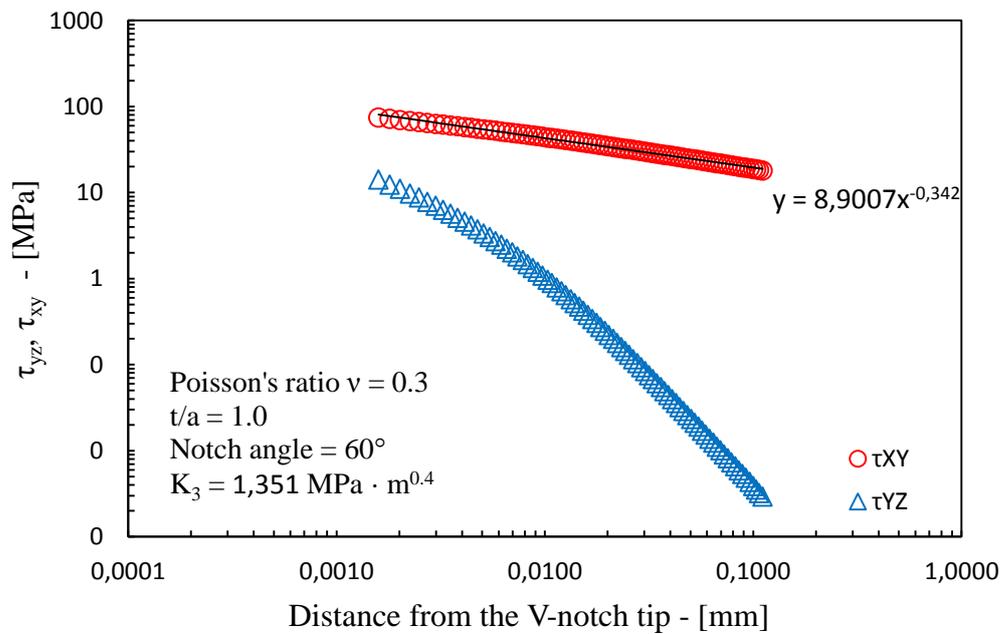


Fig. 3.9 Free-free: stresses  $\tau_{xy}$  and  $\tau_{yz}$  at V-notch bisector line at  $s/t = 1$  from disc surface,  $t/a = 0.5$ .



**Fig. 3.10** Free-free: stresses  $\tau_{xy}$  and  $\tau_{yz}$  at V-notch bisector line at  $s/t = 2$  from disc surface,  $t/a = 0.5$

*Caso  $t/a = 1.0$*



**Fig. 3.11** Free-free: stresses  $\tau_{xy}$  and  $\tau_{yz}$  at V-notch bisector line at  $s/t = 0$  from disc surface,  $t/a = 1$

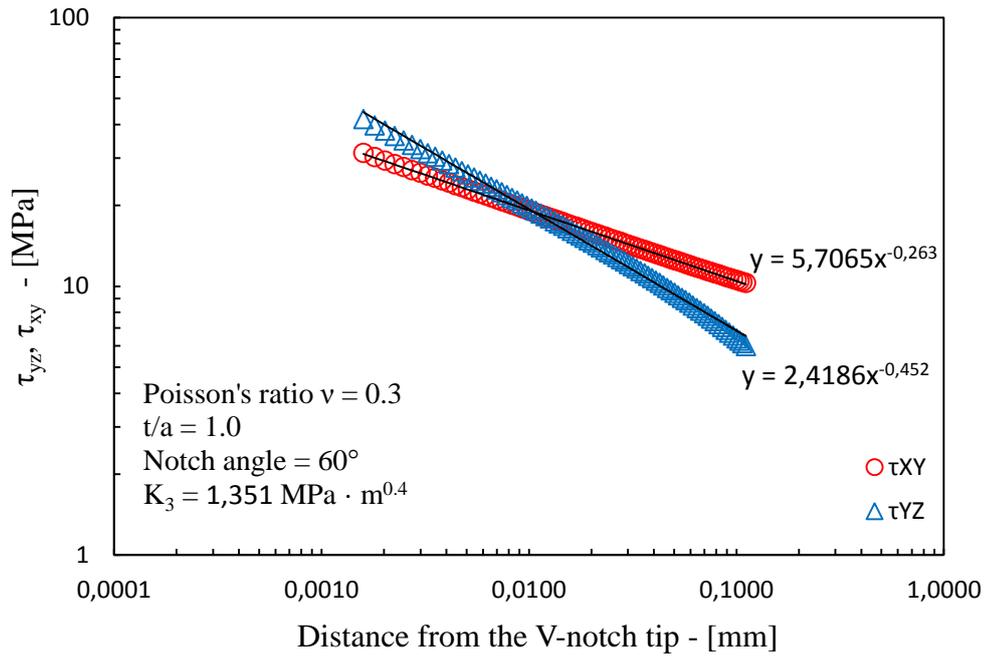


Fig. 3.12 Free-free: stresses  $\tau_{xy}$  and  $\tau_{yz}$  at V-notch bisector line at  $s/t = 0.25$  from disc surface,  $t/a = 1$ .

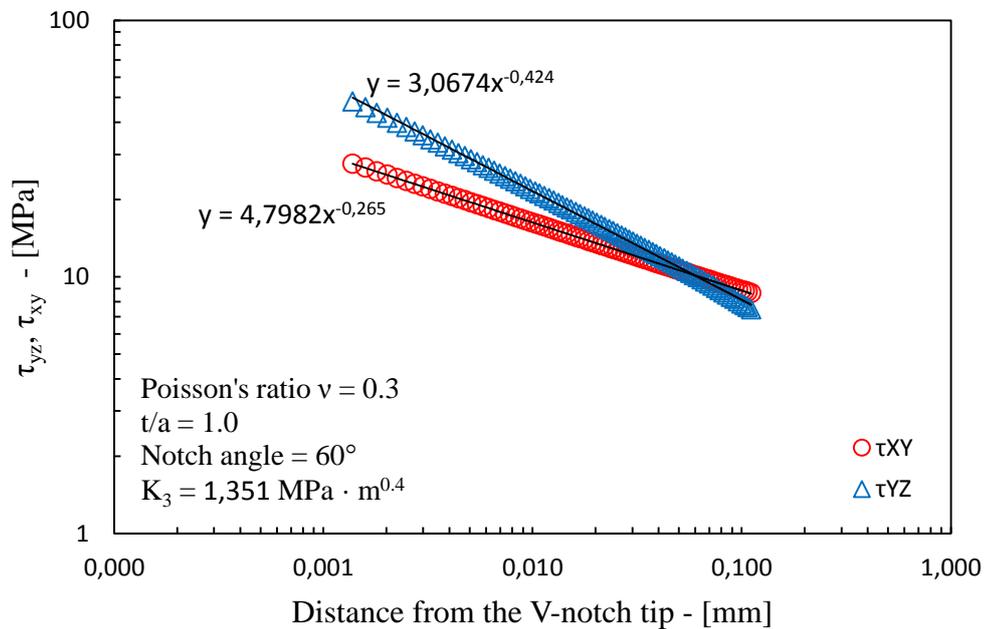
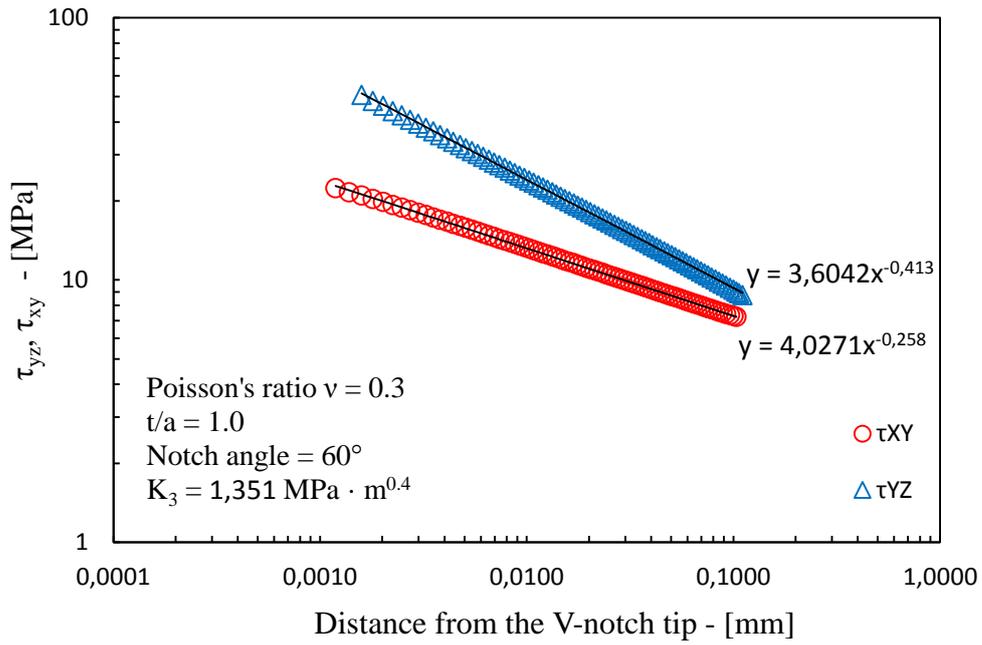
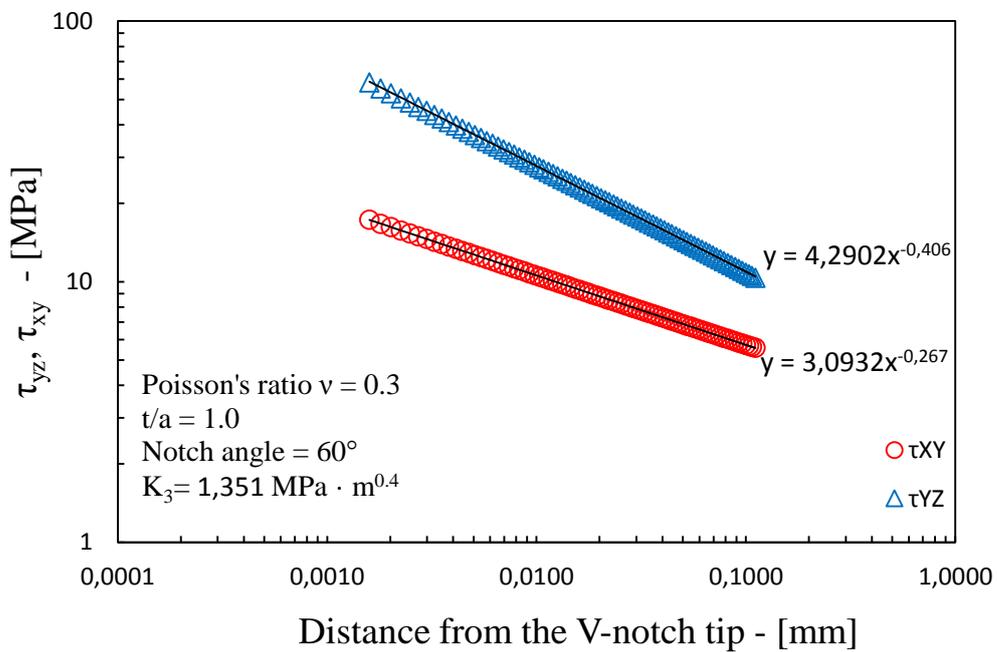


Fig. 3.13 Free-free: stresses  $\tau_{xy}$  and  $\tau_{yz}$  at V-notch bisector line at  $s/t = 0.5$  from disc surface,  $t/a = 1$ .



**Fig. 3.14** Free-free: stresses  $\tau_{xy}$  and  $\tau_{yz}$  at V-notch bisector line at  $s/t = 1$  from disc surface,  $t/a = 1$ .



**Fig. 3.15** Free-free: stresses  $\tau_{xy}$  and  $\tau_{yz}$  at V-notch bisector line at  $s/t = 2$  from disc surface,  $t/a = 1$ .

*Caso  $t/a = 2.0$*

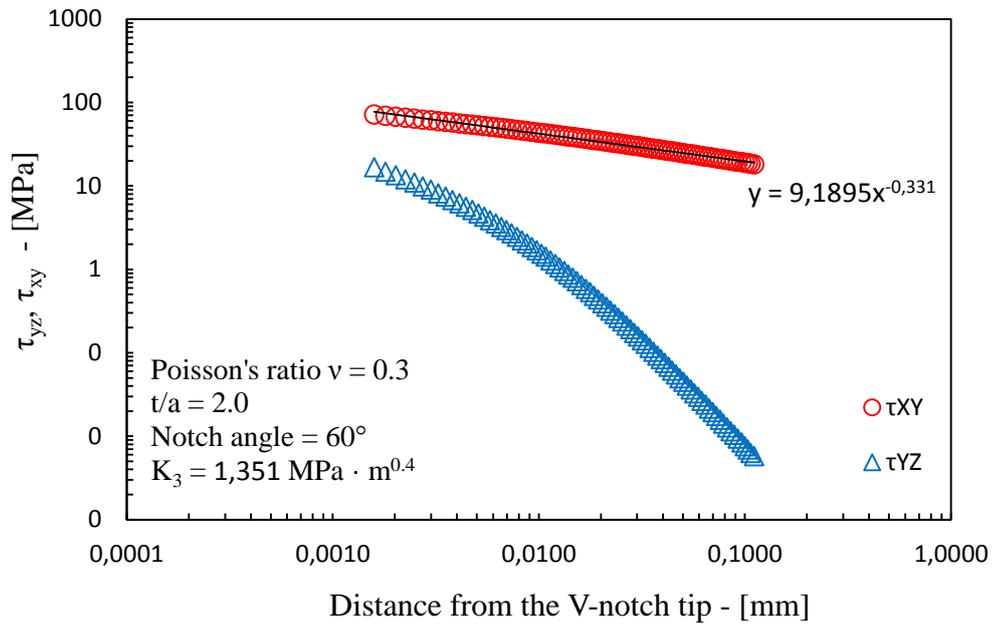


Fig. 3.16 Free-free: stresses  $\tau_{xy}$  and  $\tau_{yz}$  at V-notch bisector line at  $s/t = 0$  from disc surface,  $t/a = 2$ .

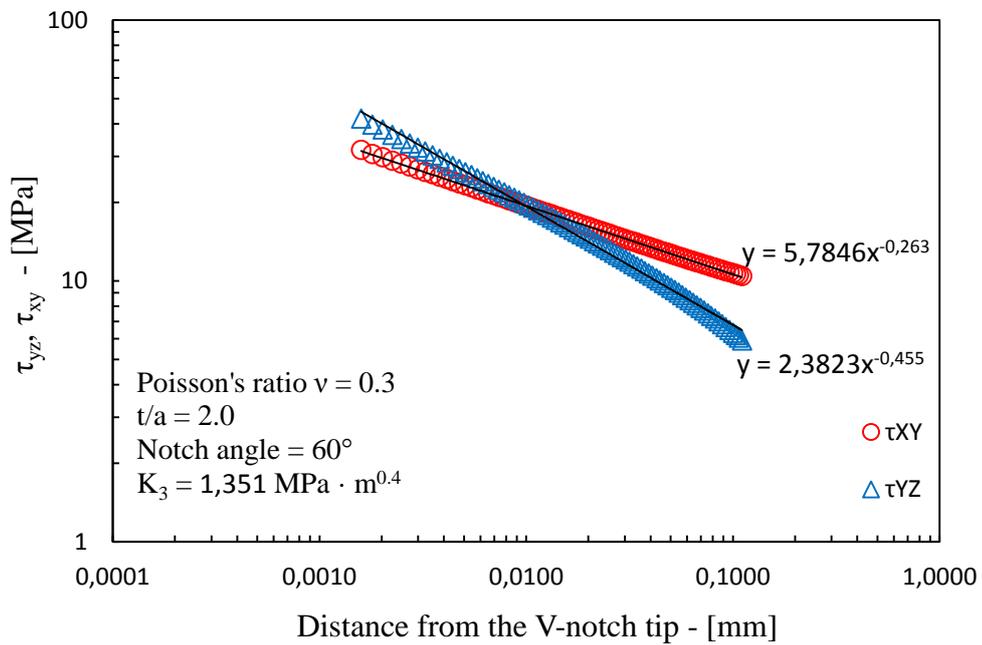
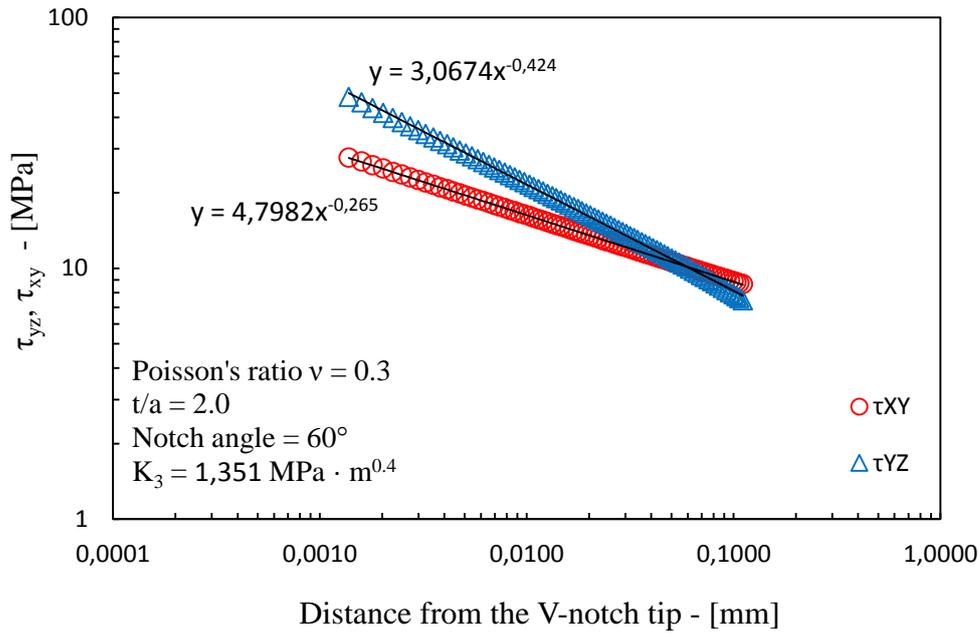
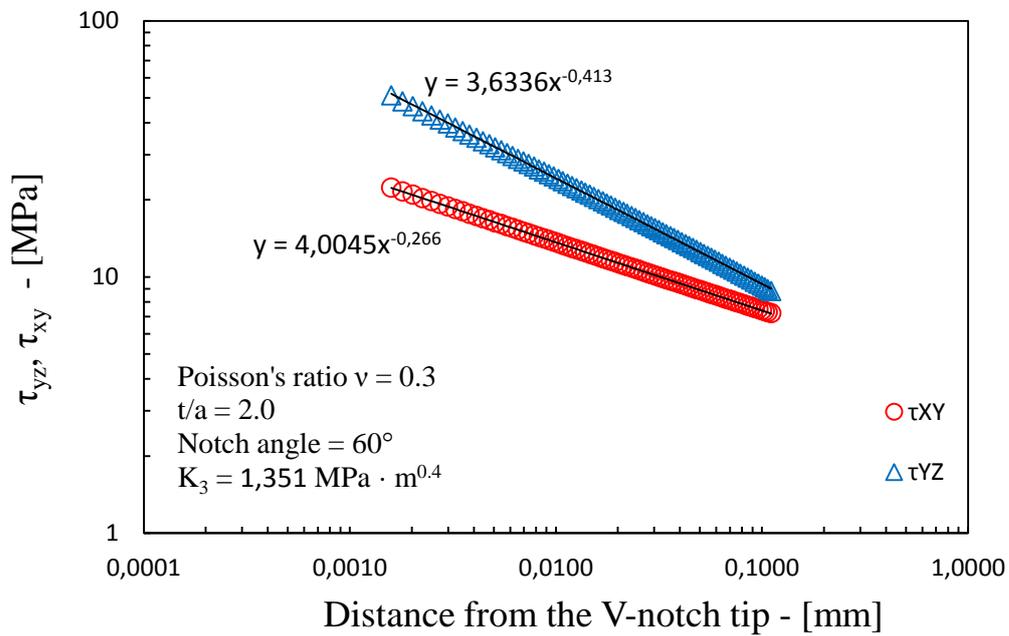


Fig. 3.17 Free-free: stresses  $\tau_{xy}$  and  $\tau_{yz}$  at V-notch bisector line at  $s/t = 0.25$  from disc surface,  $t/a = 2$ .



**Fig. 3.18** Free-free: stresses  $\tau_{xy}$  and  $\tau_{yz}$  at V-notch bisector line at  $s/t = 0.5$  from disc surface,  $t/a = 2$ .



**Fig. 3.19** Free-free: stresses  $\tau_{xy}$  and  $\tau_{yz}$  at V-notch bisector line at  $s/t = 1$  from disc surface,  $t/a = 2$ .

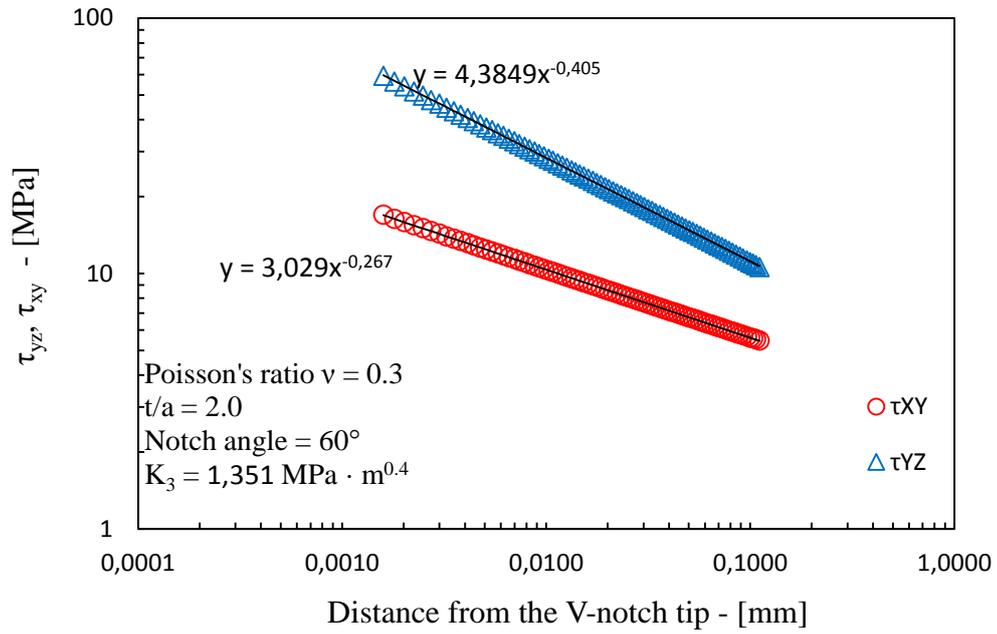


Fig. 3.20 Free-free: stresses  $\tau_{xy}$  and  $\tau_{yz}$  at V-notch bisector line at  $s/t = 2$  from disc surface,  $t/a = 2$ .

Caso  $t/a = 4$

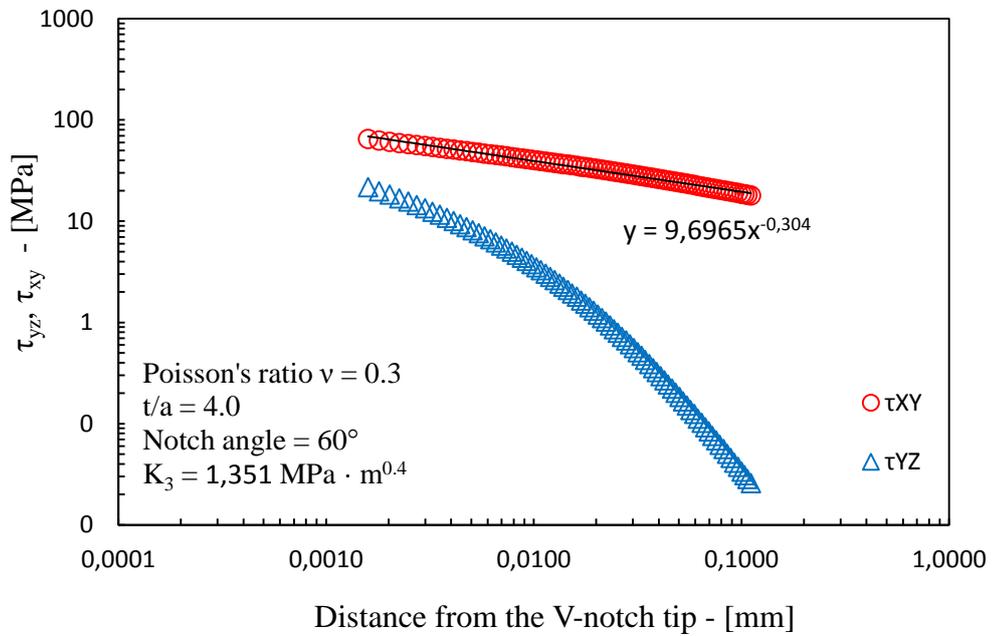
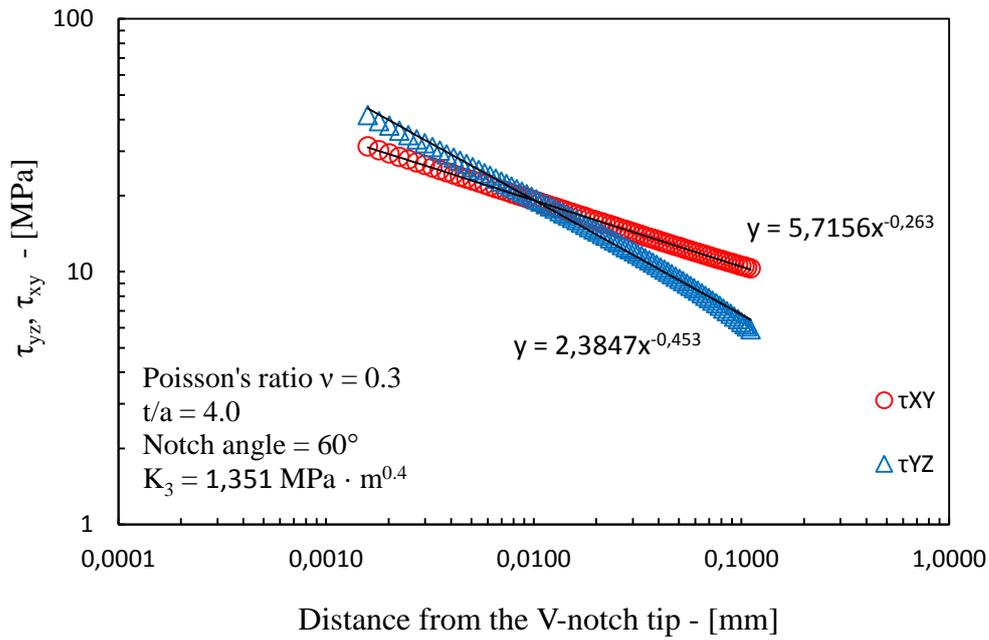
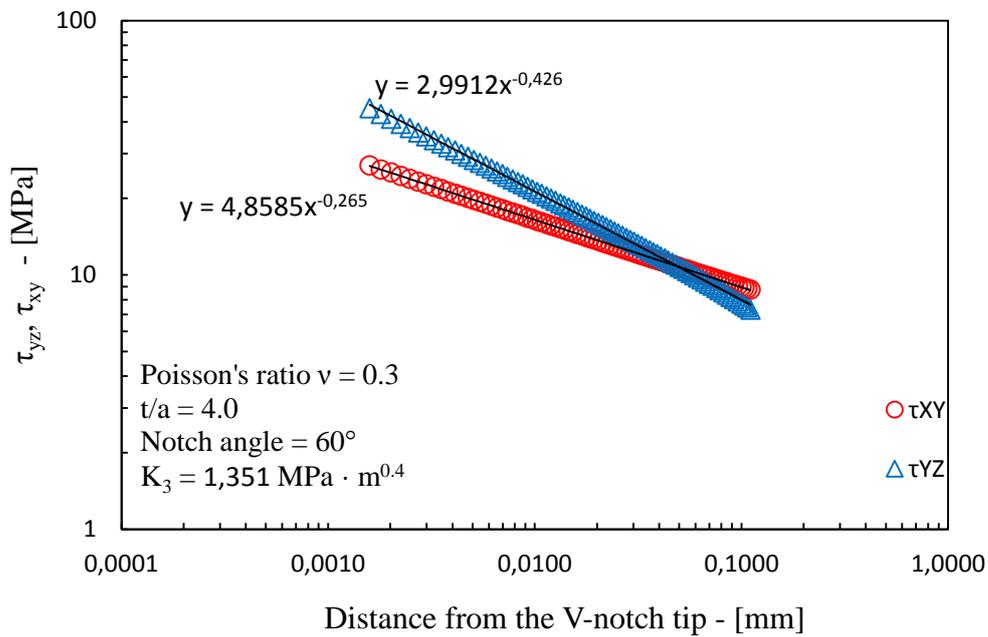


Fig. 3.21 Free-free: stresses  $\tau_{xy}$  and  $\tau_{yz}$  at V-notch bisector line at  $s/t = 0$  from disc surface,  $t/a = 4$ .



**Fig. 3.22** Free-free: stresses  $\tau_{xy}$  and  $\tau_{yz}$  at V-notch bisector line at  $s/t = 0.25$  from disc surface,  $t/a = 4$ .



**Fig. 3.23** Free-free: stresses  $\tau_{xy}$  and  $\tau_{yz}$  at V-notch bisector line at  $s/t = 0.5$  from disc surface,  $t/a = 4$ .

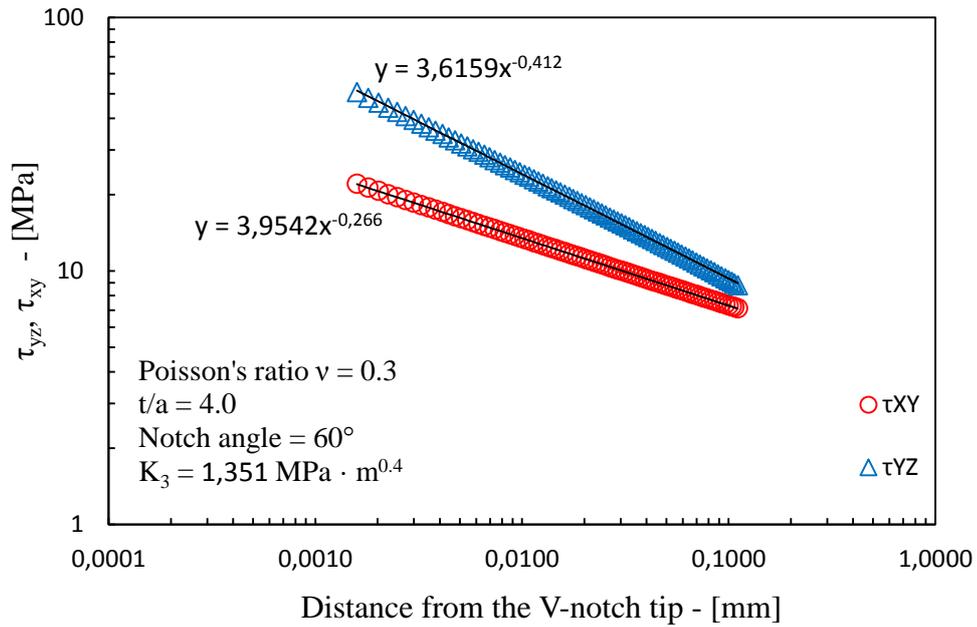


Fig. 3.24 Free-free: stresses  $\tau_{xy}$  and  $\tau_{yz}$  at V-notch bisector line at  $s/t = 1$  from disc surface,  $t/a = 4$ .

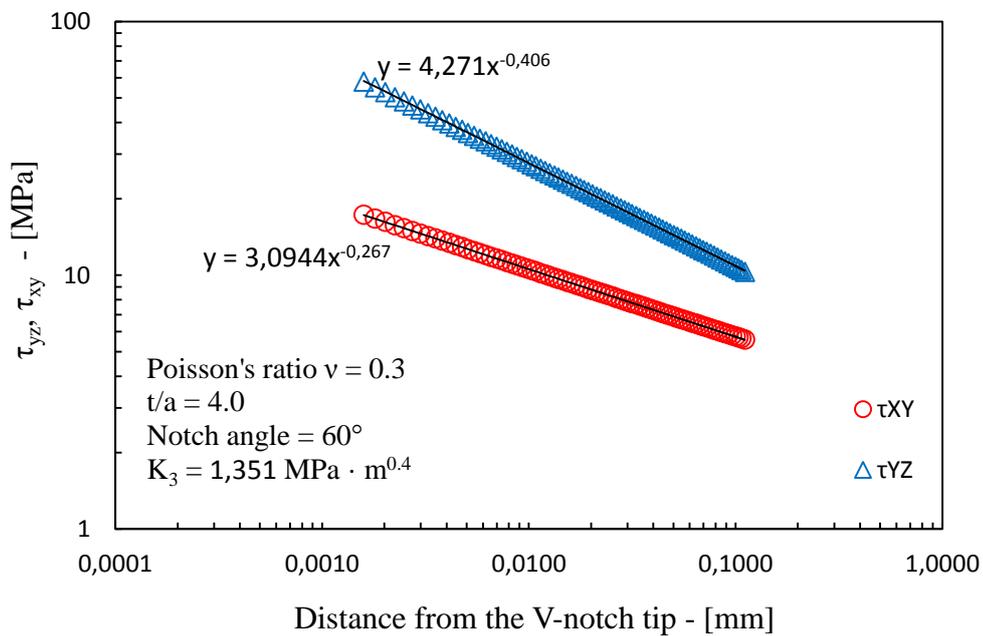


Fig. 3.25 Free-free: stresses  $\tau_{xy}$  and  $\tau_{yz}$  at V-notch bisector line at  $s/t = 2$  from disc surface,  $t/a = 4$ .

Servendosi delle espressioni riportate nel paragrafo 3.2.1 per il calcolo dell'autovalore di modo III, ad un angolo di apertura dell'intaglio  $2\alpha$  pari a  $60^\circ$ , corrisponde un valore  $\lambda_3 = 0.6$ . Il grado di singolarità delle tensioni legate al modo III nelle vicinanze dell'apice dell'intaglio è quindi pari a  $1 - \lambda_3 = 0.4$ . Nelle vicinanze della superficie libera del disco, i dati ottenuti dalla soluzione del modello FEM non sono in accordo con quelli teorici. Al variare del rapporto adimensionale  $t/a$  i risultati sostanzialmente non cambiano: solamente per  $s/t \geq 1$  si ottiene un grado di singolarità delle tensioni di modo III che si avvicina molto a quello teorico. Risulta perciò impossibile definire in modo esatto il *NSIF* di modo III per  $s/t \leq 1$ . Inoltre, in corrispondenza della superficie libera, non è nemmeno possibile identificare un grado di singolarità delle tensioni (i dati non si dispongono lungo una retta) e non ha quindi senso parlare di *Notch Stress Intensity Factor* di modo III.

L'autovalore dell'indotto modo II è il più piccolo autovalore che si ottiene risolvendo la seguente equazione in  $\gamma$  [2] [13]:

$$\gamma \sin(2\beta^*) - \sin(2\gamma\beta^*) = 0$$

dove  $\beta^*$  è il supplementare del semi angolo di apertura dell'intaglio (Fig. 3.26).



**Fig. 3.26** Restrain in V-notch boundaries: (a) free-free, (b) free-fixed.

Detto  $\lambda_2$  l'autovalore di modo II, risolvendo l'equazione per  $\beta = 30^\circ$ , si ottiene  $\lambda_2 = 0.731$ . Il grado di singolarità corrispondente è quindi pari a  $1 - \lambda_2 = 0.269$ . I risultati numerici ottenuti dal modello FEM rispecchiano molto fedelmente quelli teorici. Dai grafici precedenti si evince come il grado di singolarità pari a 0.269 sia ben mantenuto fino a distanze molto prossime alla superficie libera. A differenza delle tensioni di modo

III, quelle di modo II mantengono un andamento regolare, con grado di singolarità costante, anche sulla superficie libera. Sul piano libero, il grado di singolarità dipende da  $t/a$ . All'aumentare di  $t/a$  l'autovalore  $\lambda_2$  aumenta, e il grado di singolarità diminuisce. Per  $t/a = 0.25$  si ha  $\lambda_2 = 0.65$ ; questo valore sale fino a  $\lambda_2 = 0.7$  per  $t/a = 4$ . Il valore teorico dell'autovalore di modo II sulla superficie libera è 0.4 [7], ma la pendenza delle rette nei grafici si discosta di molto dal valore atteso. Ciò detto, è possibile calcolare un valore realistico dell'*NSIF* di modo II lungo tutto lo spessore del disco, eccetto per  $s/t \leq 0.25$ , non

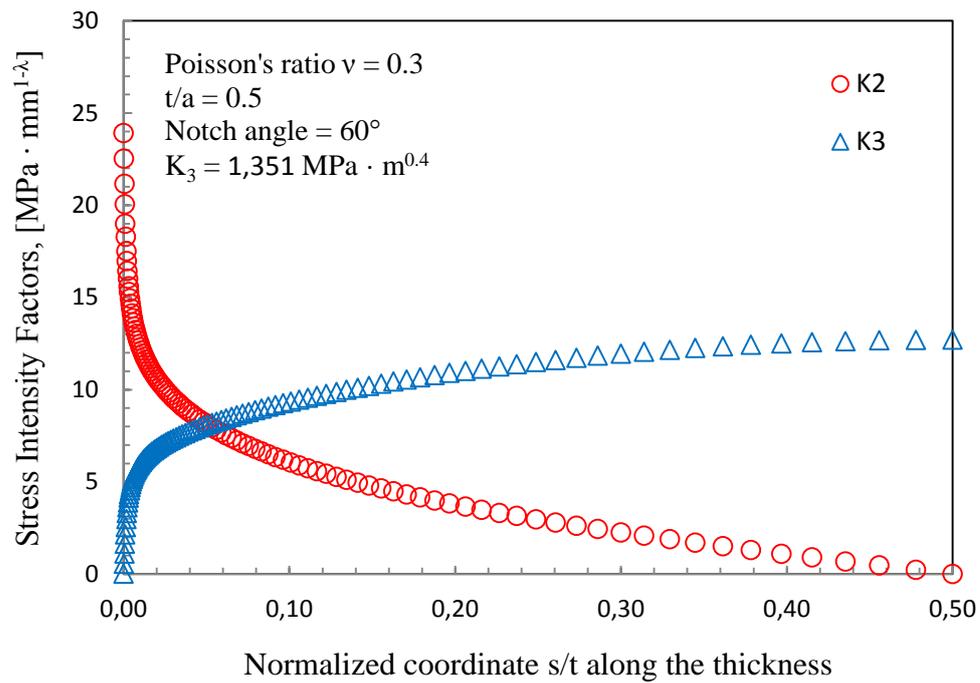
### 3.5.2 Notch Stress Intensity Factors in condizioni free-free

Per valutare gli *NSIFs* in ANSYS®, come nel capitolo 2, è stato creato un *path* ad una distanza  $x = 0.05$  mm dall'apice della cricca, lungo lo spessore del disco. Per il calcolo si è fatto uso delle equazioni di *Gross e Mendelson* [14]:

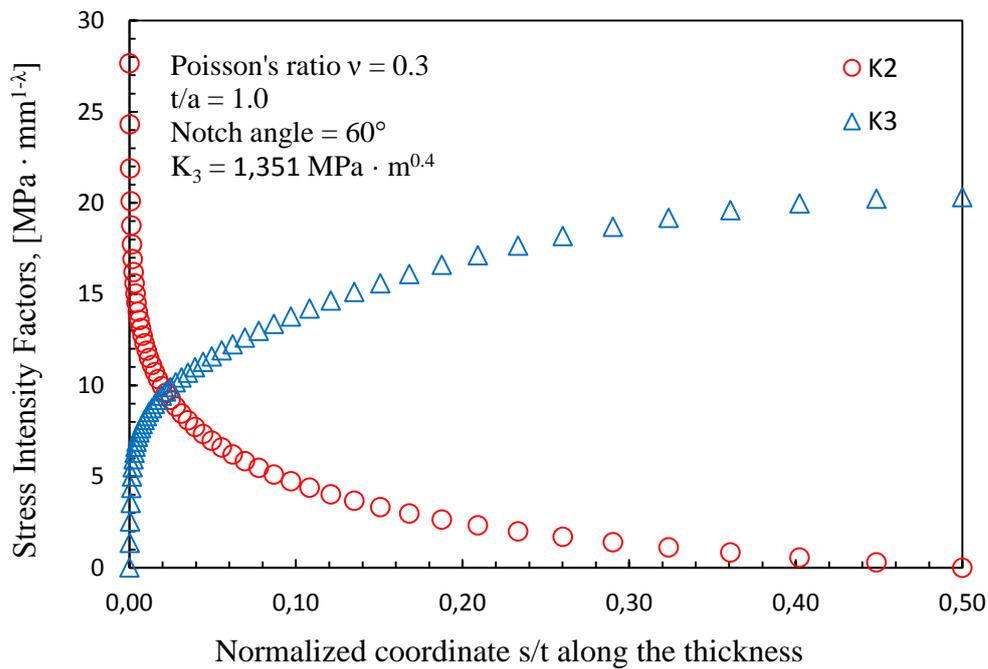
$$K_2 = \sqrt{2\pi} \cdot \tau_{xy} \cdot x^{1-\lambda_2} = \sqrt{2\pi} \cdot \tau_{xy} \cdot x^{0.269}$$

$$K_3 = \frac{\sqrt{2\pi}}{2\lambda_3} \cdot \tau_{yz} \cdot x^{1-\lambda_3} = \frac{\sqrt{2\pi}}{1.2} \cdot \tau_{yz} \cdot x^{0.4}$$

Nei successivi grafici sono riportati i valori di  $K_2$  e  $K_3$  calcolati lungo lo spessore dei dischi. I valori di  $K_3$  per  $s < 1$  mm e di  $K_2$  per  $s < 0.25$  mm sebbene non realistici, sono stati calcolati con un grado di singolarità pari a quello teorico.



**Fig. 3.27** Free-free: through the thickness distribution of  $K_2$  and  $K_3$  for  $t/a = 0.5$ ,  $x = 0.05$  mm.



**Fig. 3.28** Free-free: through the thickness distribution of  $K_2$  and  $K_3$  for  $t/a = 1.0$ ,  $x = 0.05$  mm.

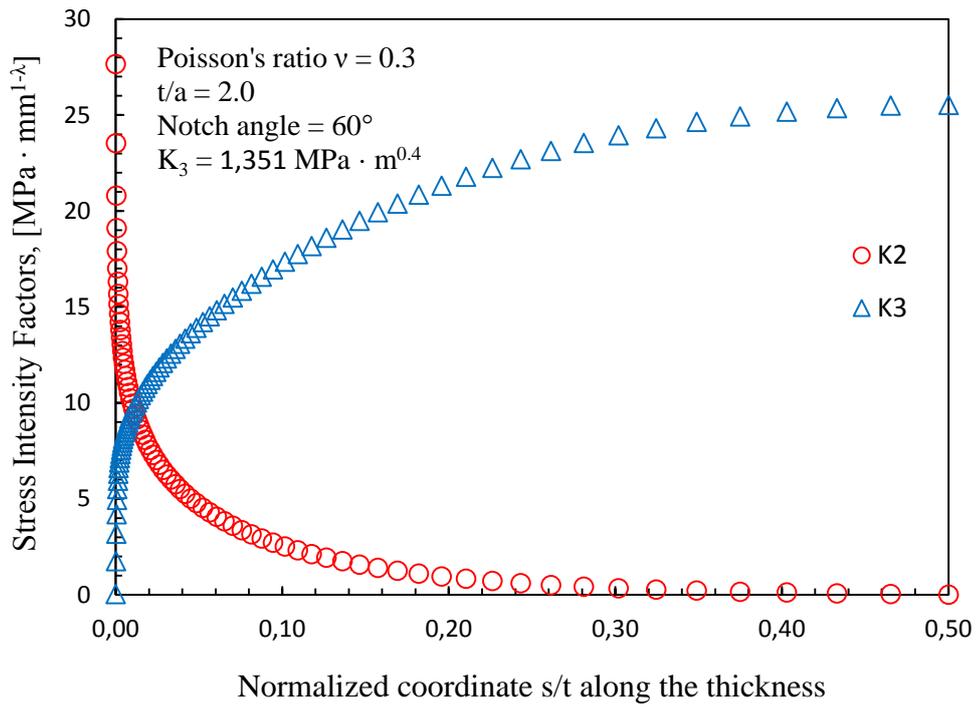


Fig. 3.29 Free-free: through the thickness distribution of  $K_2$  and  $K_3$  for  $t/a = 2.0$ ,  $x = 0.05$  mm.

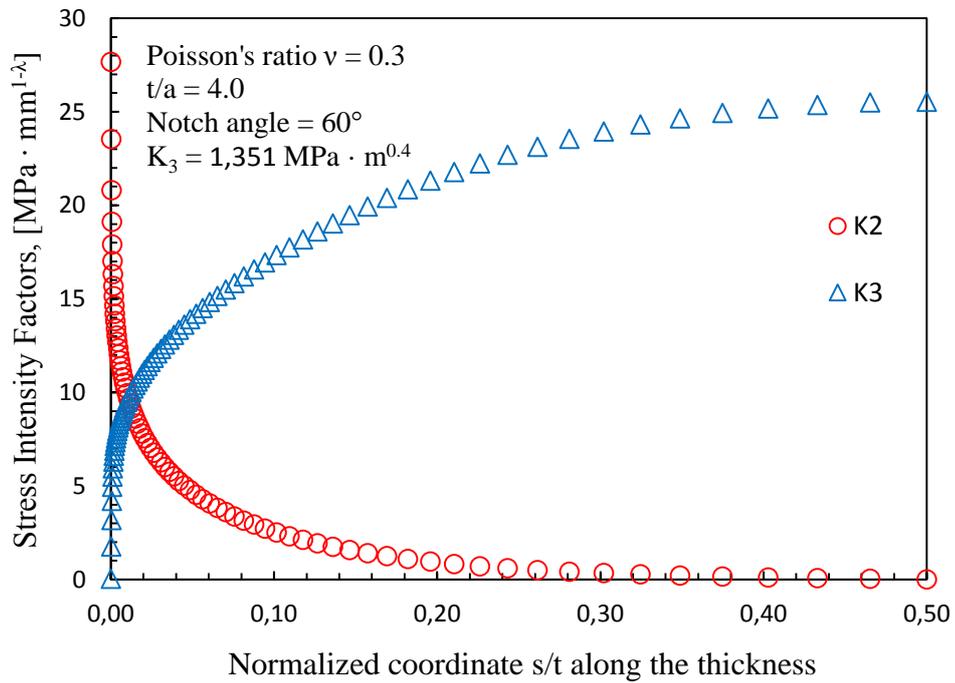
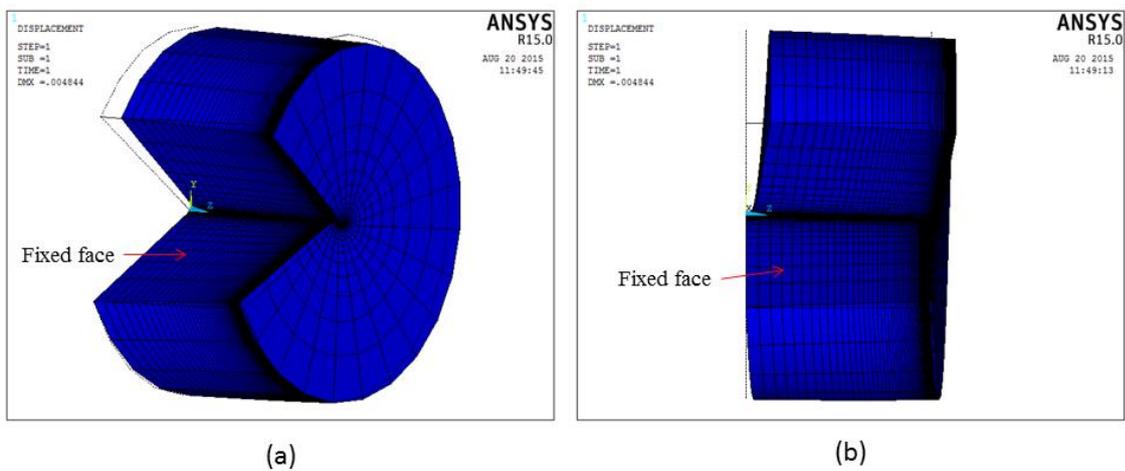


Fig. 3.30 Free-free: through the thickness distribution of  $K_2$  and  $K_3$  for  $t/a = 4.0$ ,  $x = 0.05$  mm.

L'andamento degli *NSIFs* di modo II e di modo III rimane pressoché invariato al variare del rapporto adimensionale  $t/a$ .  $K_{II}$  è massimo sulla superficie libera disco, per poi tendere a zero sul piano medio.  $K_{III}$  ha andamento opposto, è nullo sulla superficie libera e cresce fino ad assumere valore massimo sul piano medio. Questo punto di massimo decresce al diminuire dello spessore del disco, tende a zero con  $t/a$  che tende a zero. E' un risultato atteso in quanto uno stato di sollecitazione di modo III non può esistere in due dimensioni.

### 3.5.3 *Analisi delle tensioni nei casi free-clamped*

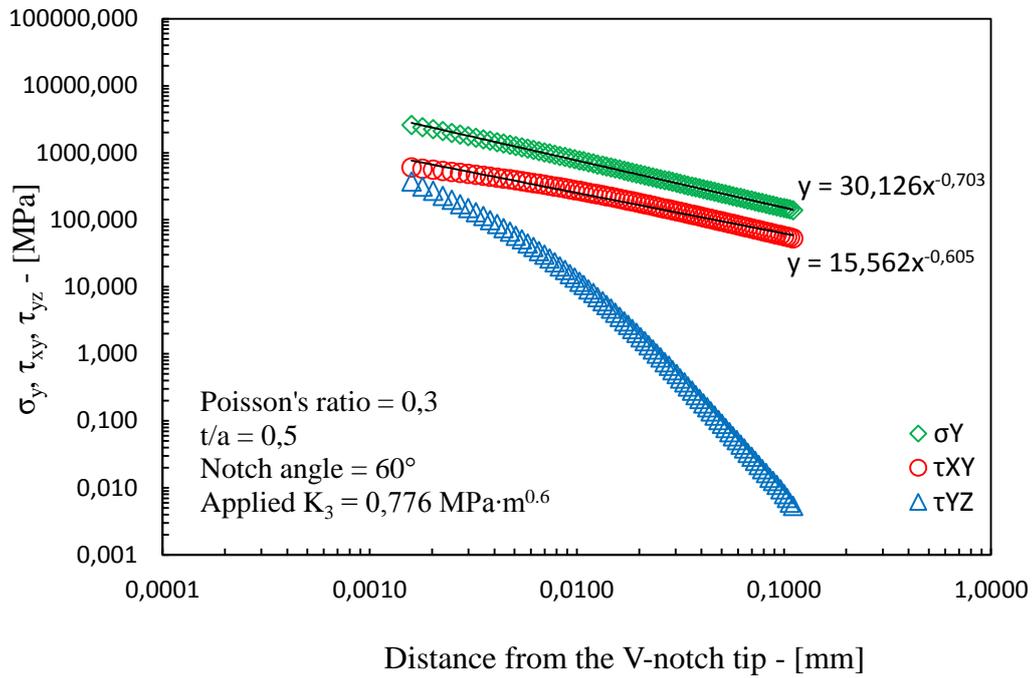


**Fig. 3.31** Free-clamped,  $t/a = 2.0$ : (a) 3-D view of the deformed shape of the disc under Mode III loading conditions. (b) Lateral view of the deformed shape of the disc under Mode III loading conditions.

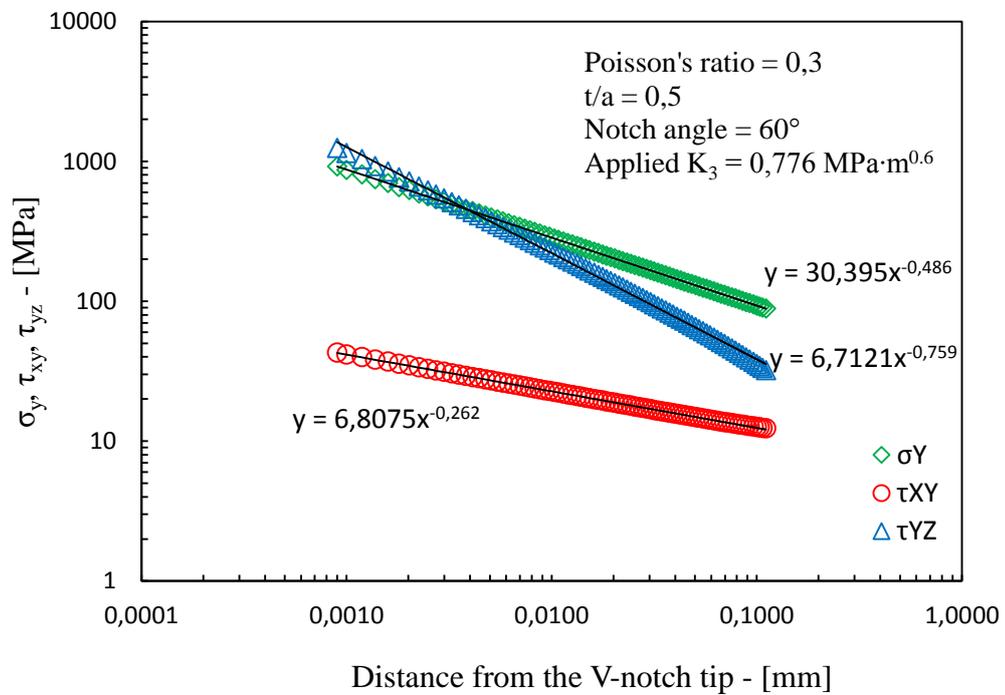
Se ai fianchi dell'intaglio a spigolo vivo vengono imposte condizioni al contorno di tipo *free-clamped* (un fianco libero da vincoli e l'altro vincolato negli spostamenti  $u_z$ ), l'applicazione di uno stato di sollecitazione di modo III comporta l'insorgere di uno stato tensionale misto di modo I, II e III. Le componenti di tensione diverse da zero lungo la bisettrice dell'intaglio sono infatti tre:  $\sigma_y$  (modo I),  $\tau_{xy}$  (modo II) e  $\tau_{yz}$  (modo III).

Vengono ora riportati i grafici che raccolgono i risultati analitici ottenuti e alla fine del paragrafo 3.5.3.4 i commenti.

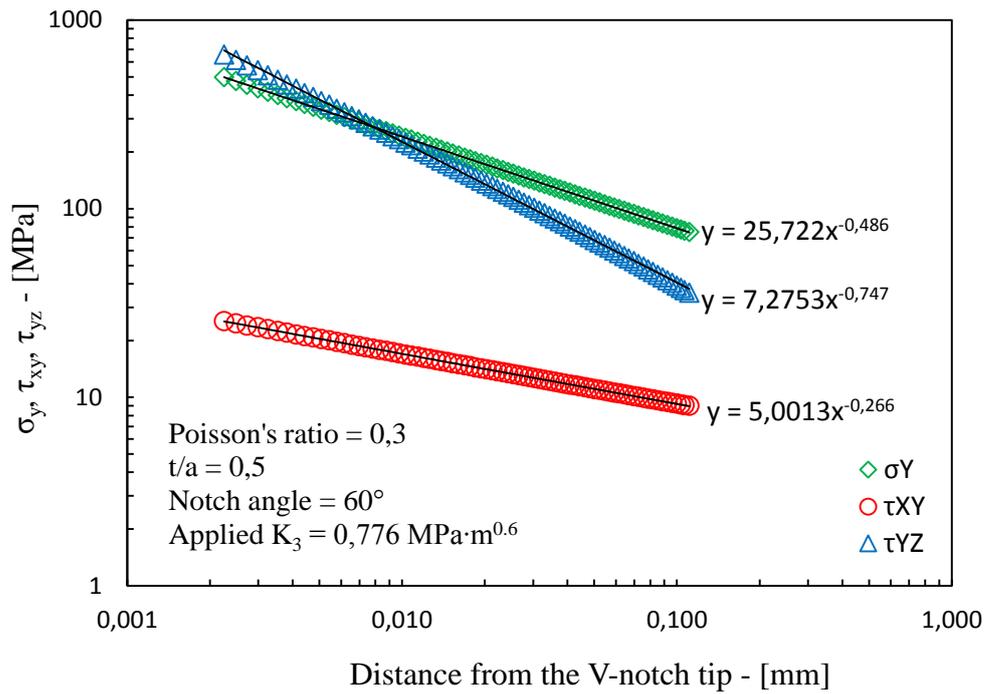
Caso  $t/a = 0.5$



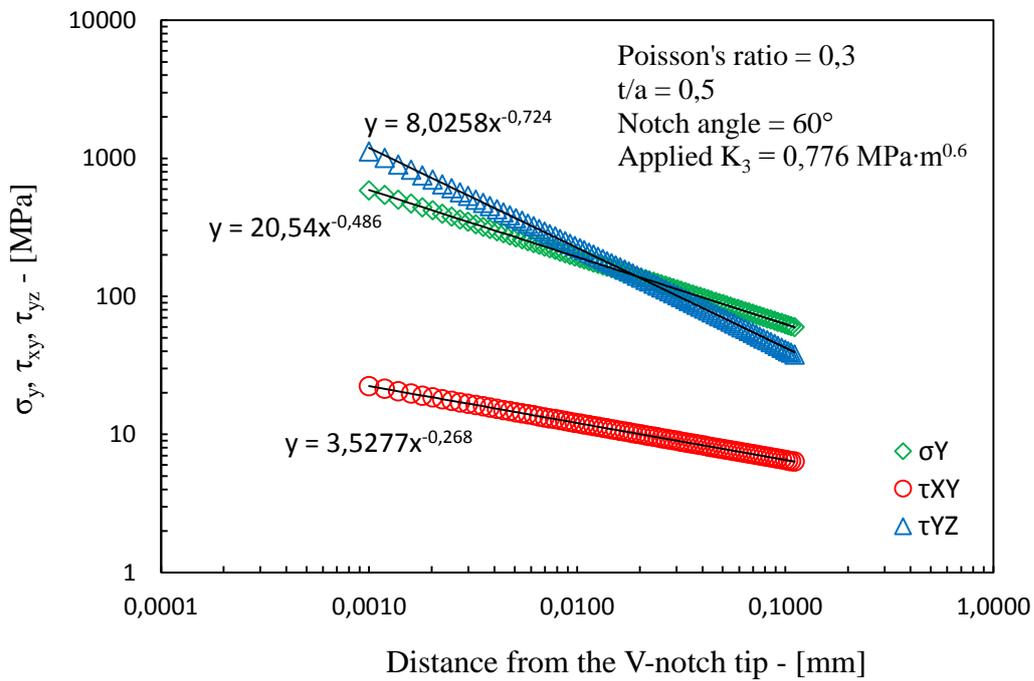
**Fig. 3.32** Free-clamped: stresses  $\sigma_y$ ,  $\tau_{xy}$  and  $\tau_{yx}$  on V-notch bisector line at  $s/t = 0$  from disc surface,  $t/a = 0.5$ .



**Fig. 3.33** Free-clamped: stresses  $\sigma_y$ ,  $\tau_{xy}$  and  $\tau_{yx}$  on V-notch bisector line at  $s/t = 0.25$  from disc surface,  $t/a = 0.5$ .



**Fig. 3.34** Free-clamped: stresses  $\sigma_y$ ,  $\tau_{xy}$  and  $\tau_{yx}$  on V-notch bisector line at  $s/t = 0.5$  from disc surface,  $t/a = 0.5$ .



**Fig. 3.35** Free-clamped: stresses  $\sigma_y$ ,  $\tau_{xy}$  and  $\tau_{yx}$  on V-notch bisector line at  $s/t = 1$  from disc surface,  $t/a = 0.5$ .

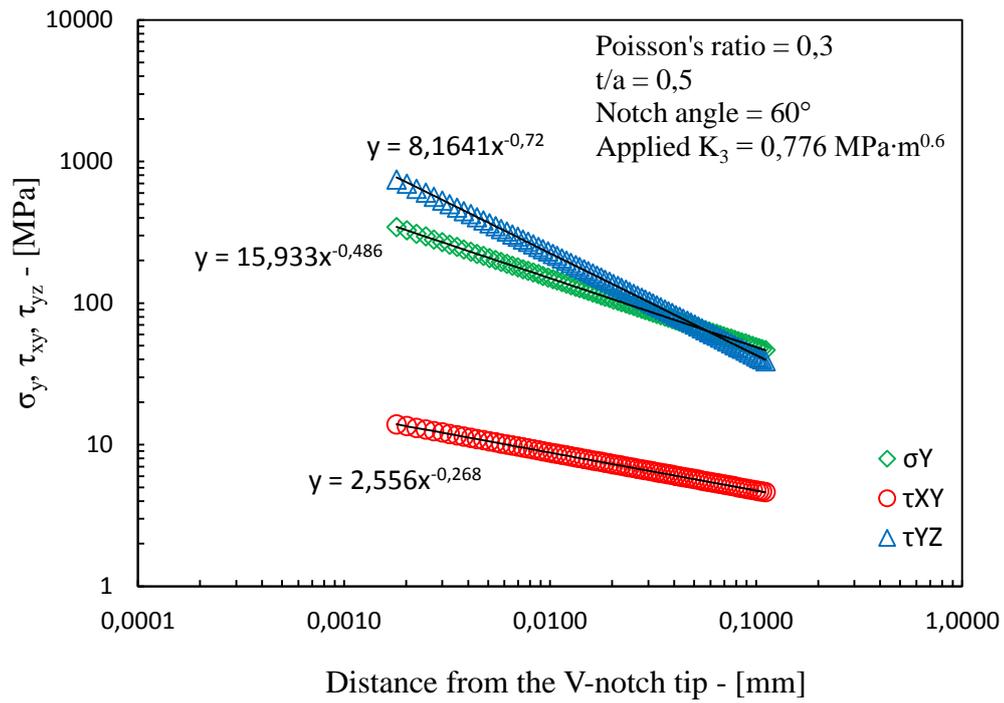


Fig. 3.36 Free-clamped: stresses  $\sigma_y$ ,  $\tau_{xy}$  and  $\tau_{yx}$  on V-notch bisector line at  $s/t = 2$  from disc surface,  $t/a = 0.5$ .

Caso  $t/a = 1.0$

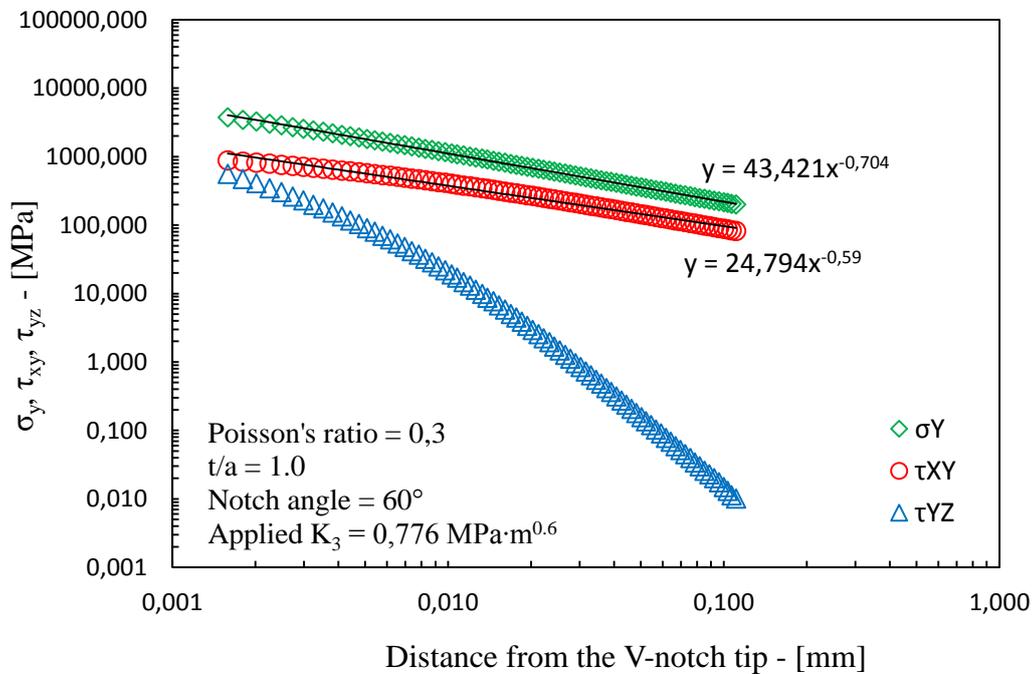
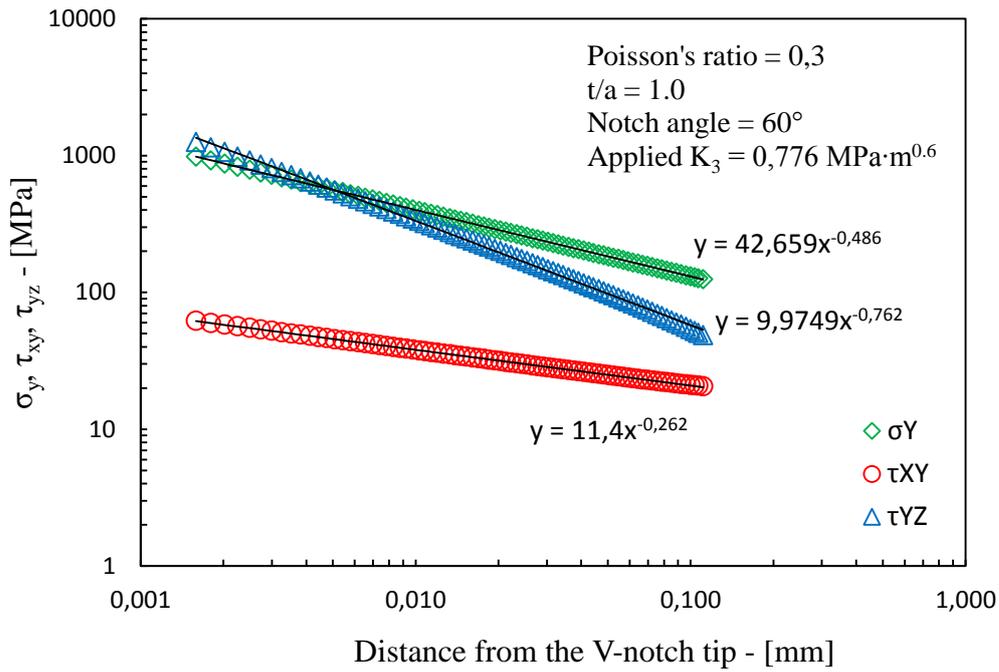
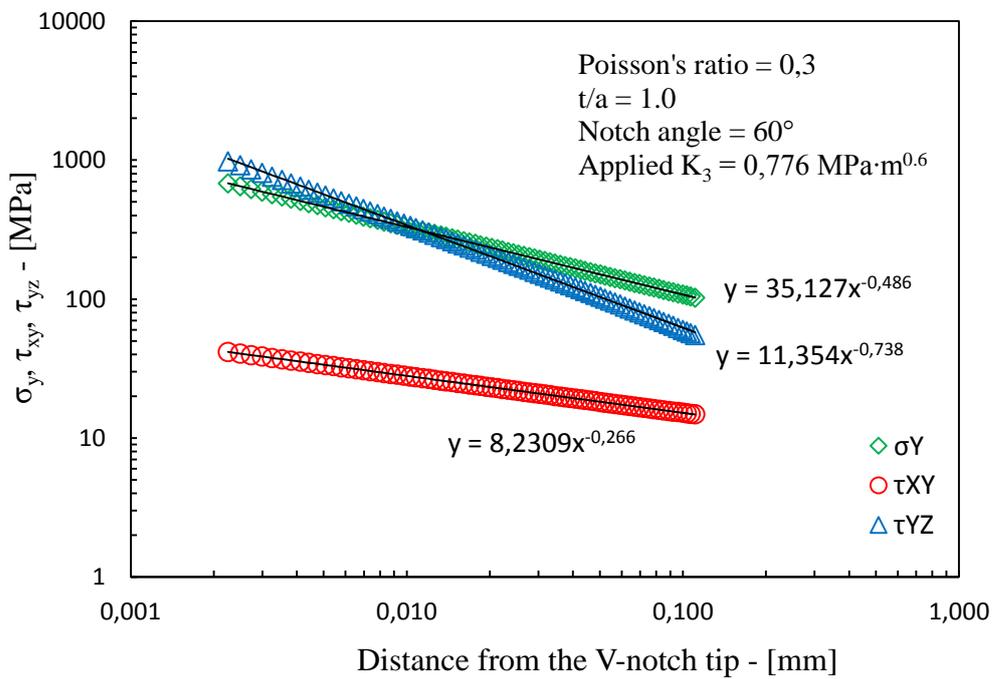


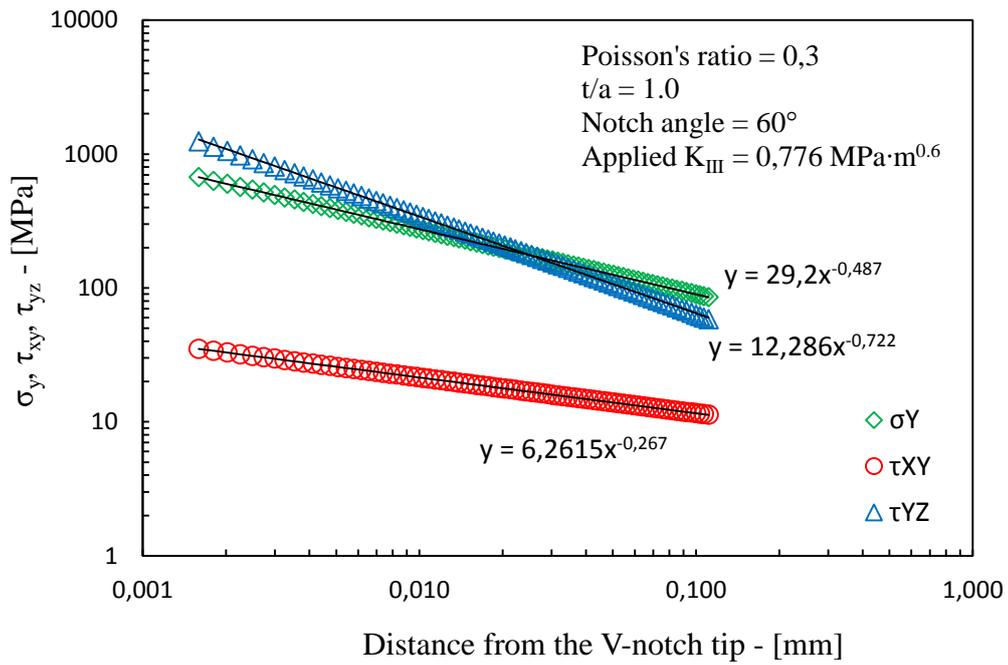
Fig. 3.37 Free-clamped: stresses  $\sigma_y$ ,  $\tau_{xy}$  and  $\tau_{yx}$  on V-notch bisector line at  $s/t = 0$  from disc surface,  $t/a = 1$ .



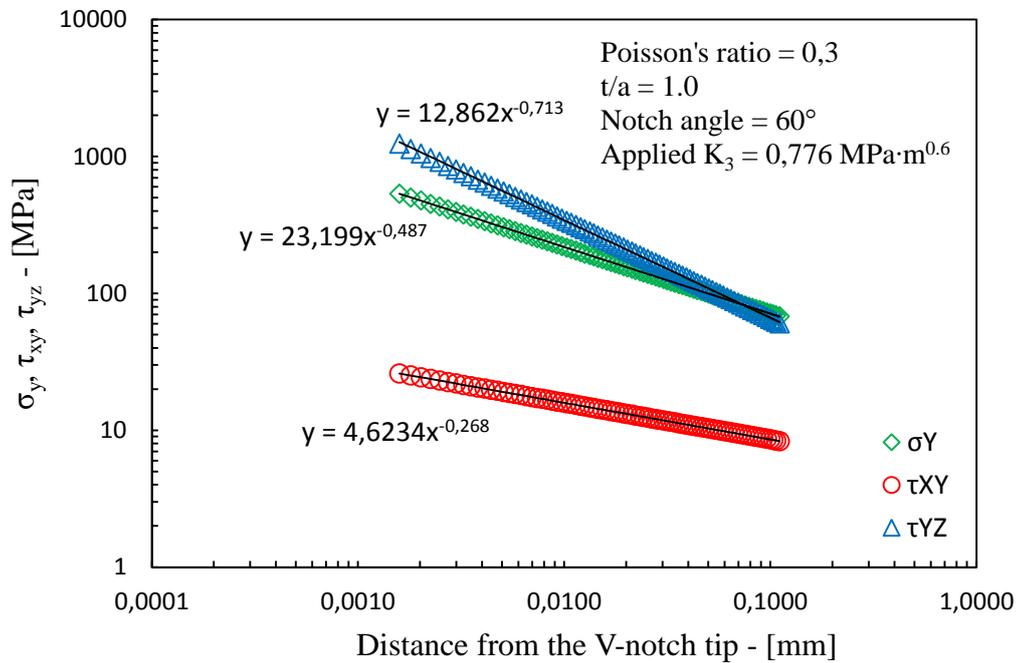
**Fig. 3.38** Free-clamped: stresses  $\sigma_y$ ,  $\tau_{xy}$  and  $\tau_{yx}$  on V-notch bisector line at  $s/t = 0.25$  from disc surface,  $t/a = 1$ .



**Fig. 3.39** Free-clamped: stresses  $\sigma_y$ ,  $\tau_{xy}$  and  $\tau_{yx}$  on V-notch bisector line at  $s/t = 0.5$  from disc surface,  $t/a = 1$ .

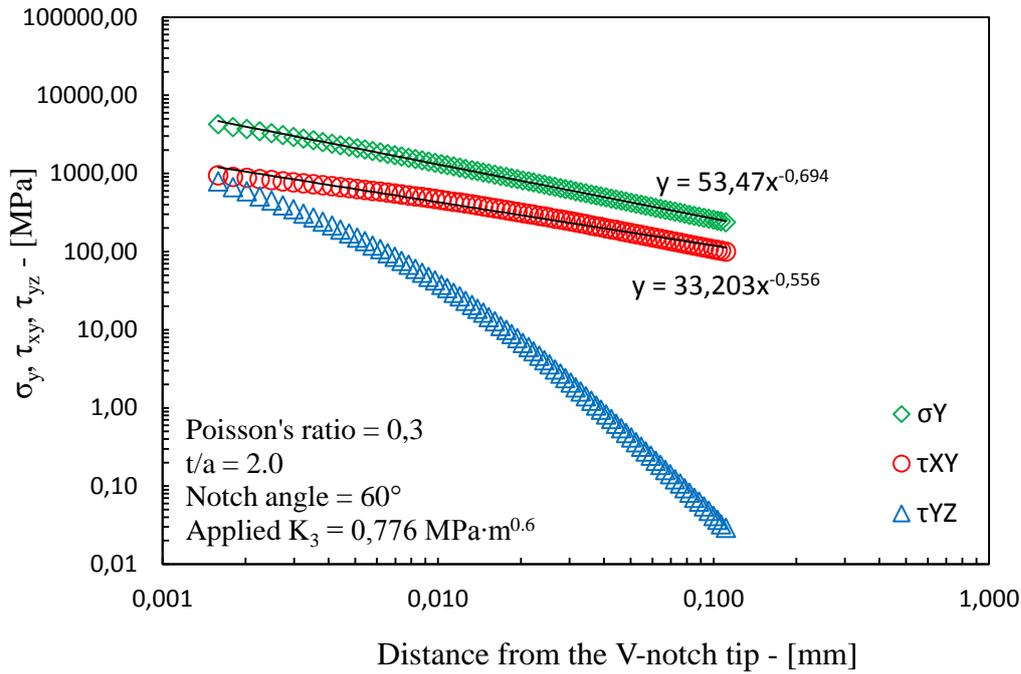


**Fig. 3.40** Free-clamped: stresses  $\sigma_y$ ,  $\tau_{xy}$  and  $\tau_{yx}$  on V-notch bisector line at  $s/t = 1$  from disc surface,  $t/a = 1$ .

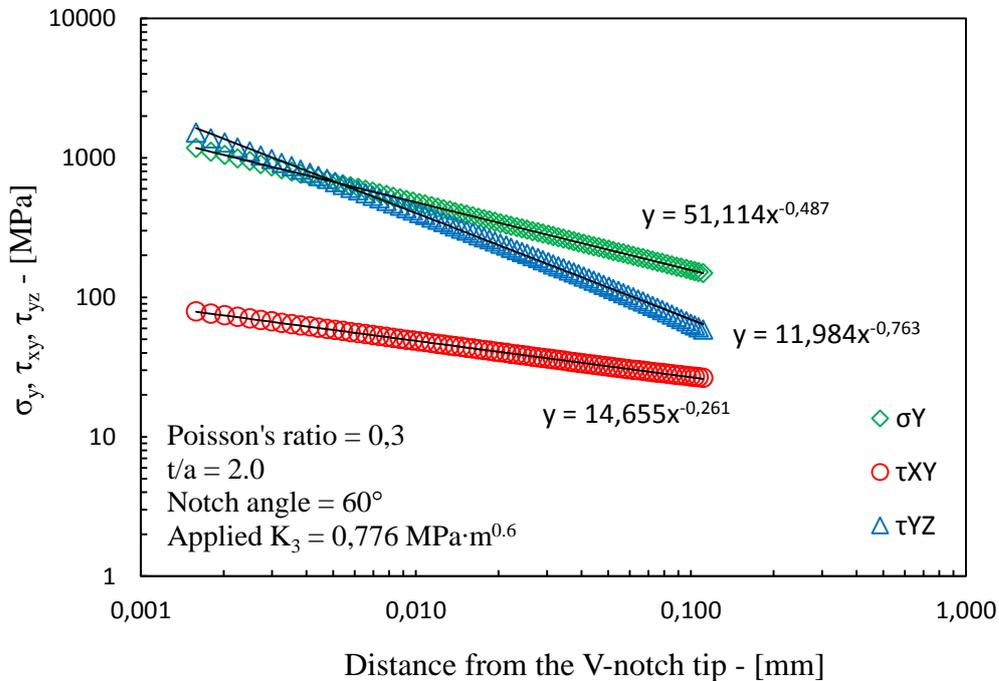


**Fig. 3.41** Free-clamped: stresses  $\sigma_y$ ,  $\tau_{xy}$  and  $\tau_{yx}$  on V-notch bisector line at  $s/t = 2$  from disc surface,  $t/a = 1$ .

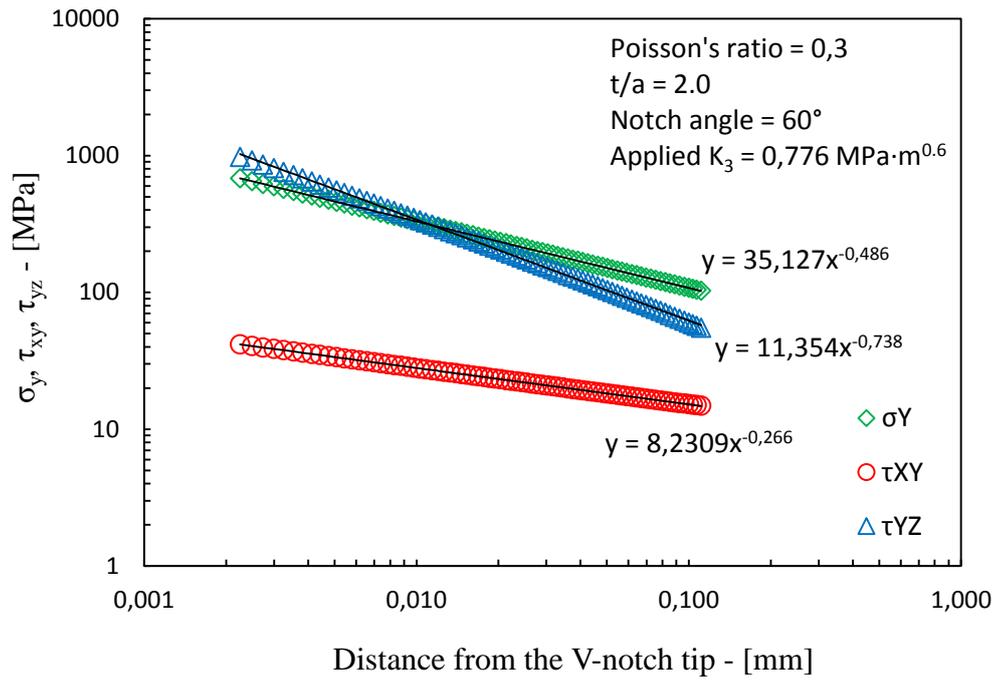
Caso  $t/a = 2.0$



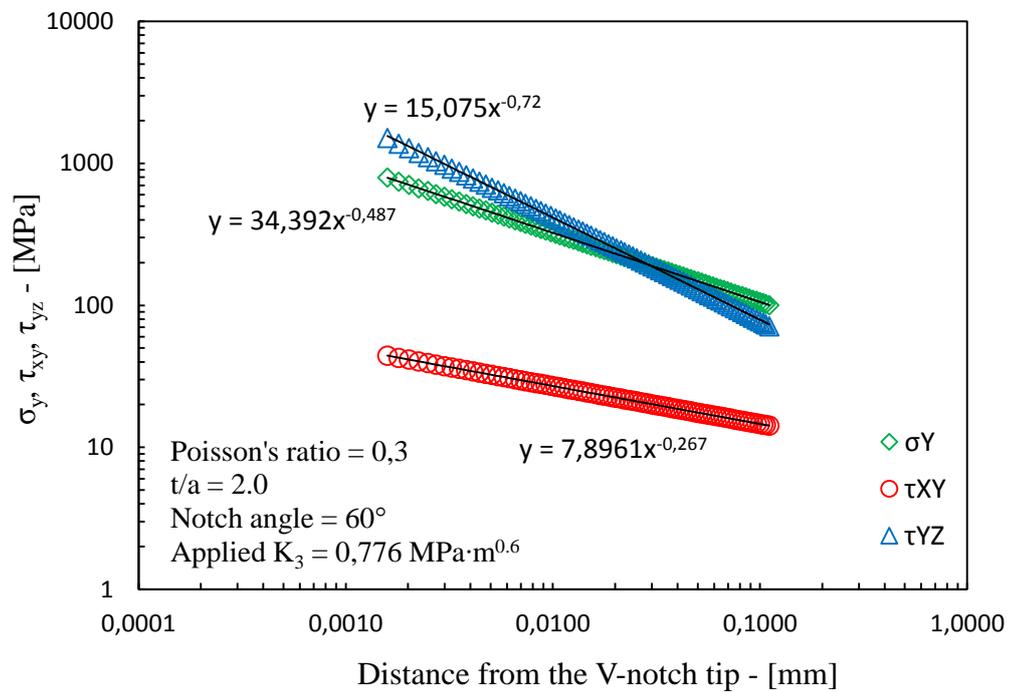
**Fig. 3.42** Free-clamped: stresses  $\sigma_y$ ,  $\tau_{xy}$  and  $\tau_{yx}$  on V-notch bisector line at  $s/t = 0$  from disc surface,  $t/a = 2$ .



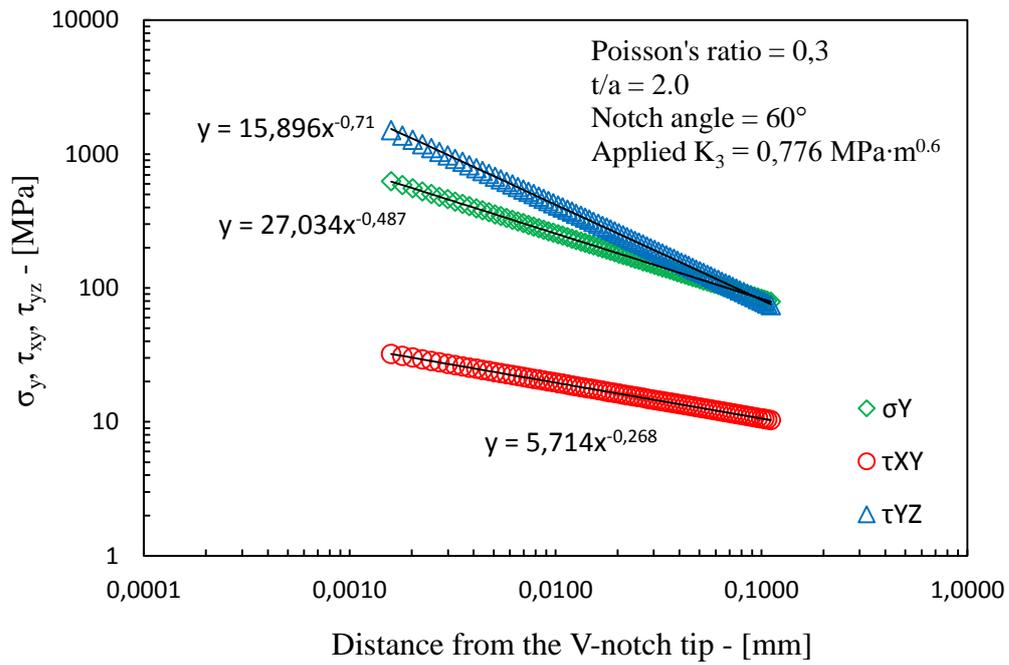
**Fig. 3.43** Free-clamped: stresses  $\sigma_y$ ,  $\tau_{xy}$  and  $\tau_{yx}$  on V-notch bisector line at  $s/t = 0.25$  from disc surface,  $t/a = 2$ .



**Fig. 3.44** Free-clamped: stresses  $\sigma_y$ ,  $\tau_{xy}$  and  $\tau_{yx}$  on V-notch bisector line at  $s/t = 0.5$  from disc surface,  $t/a = 2$ .

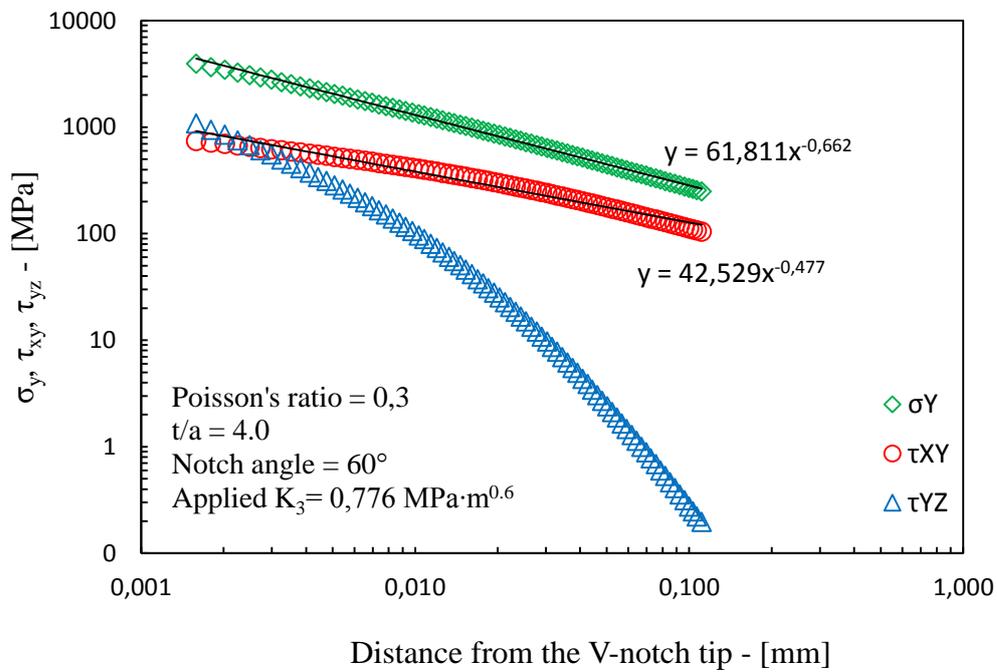


**Fig. 3.45** Free-clamped: stresses  $\sigma_y$ ,  $\tau_{xy}$  and  $\tau_{yx}$  on V-notch bisector line at  $s/t = 1$  from disc surface,  $t/a = 2$ .

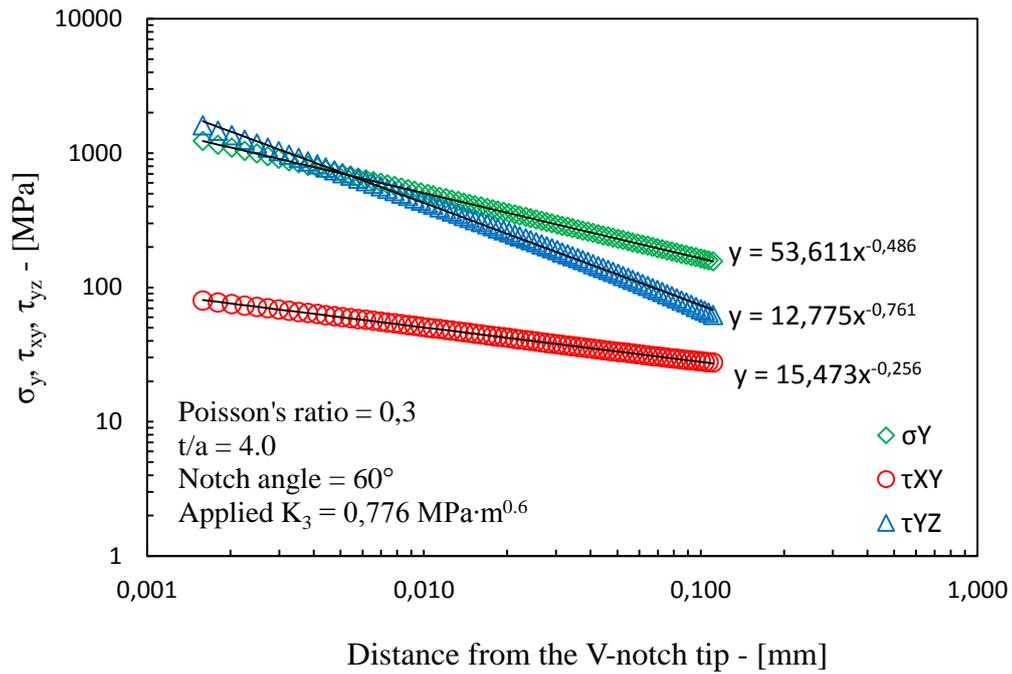


**Fig. 3.46** Free-clamped: stresses  $\sigma_y$ ,  $\tau_{xy}$  and  $\tau_{yx}$  on V-notch bisector line at  $s/t = 2$  from disc surface,  $t/a = 2$ .

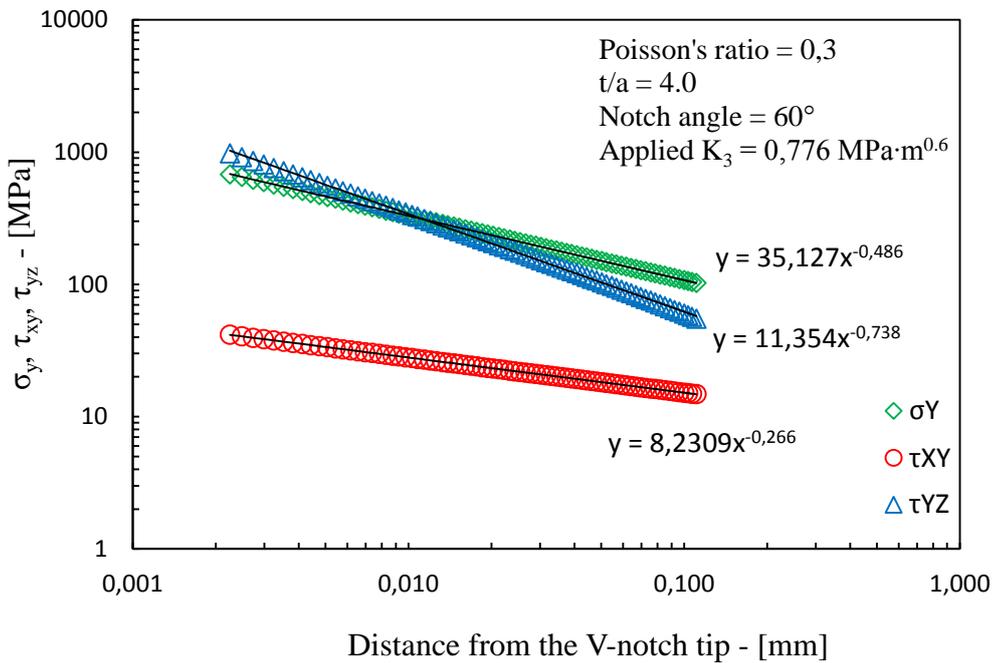
Caso  $t/a = 4.0$



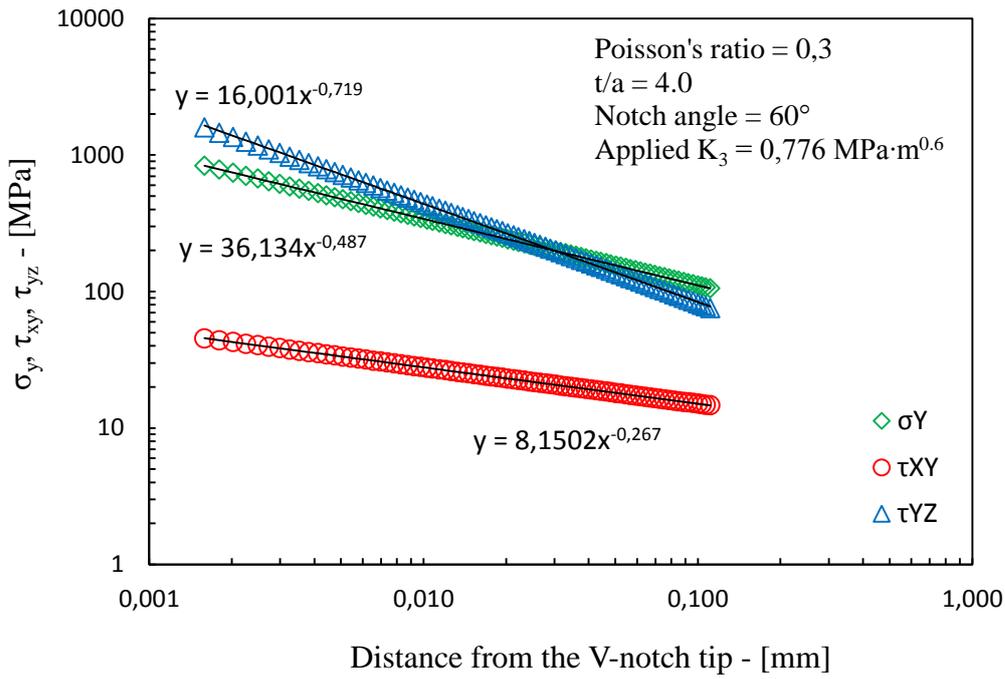
**Fig. 3.47** Free-clamped: stresses  $\sigma_y$ ,  $\tau_{xy}$  and  $\tau_{yx}$  on V-notch bisector line at  $s/t = 0$  from disc surface,  $t/a = 4$ .



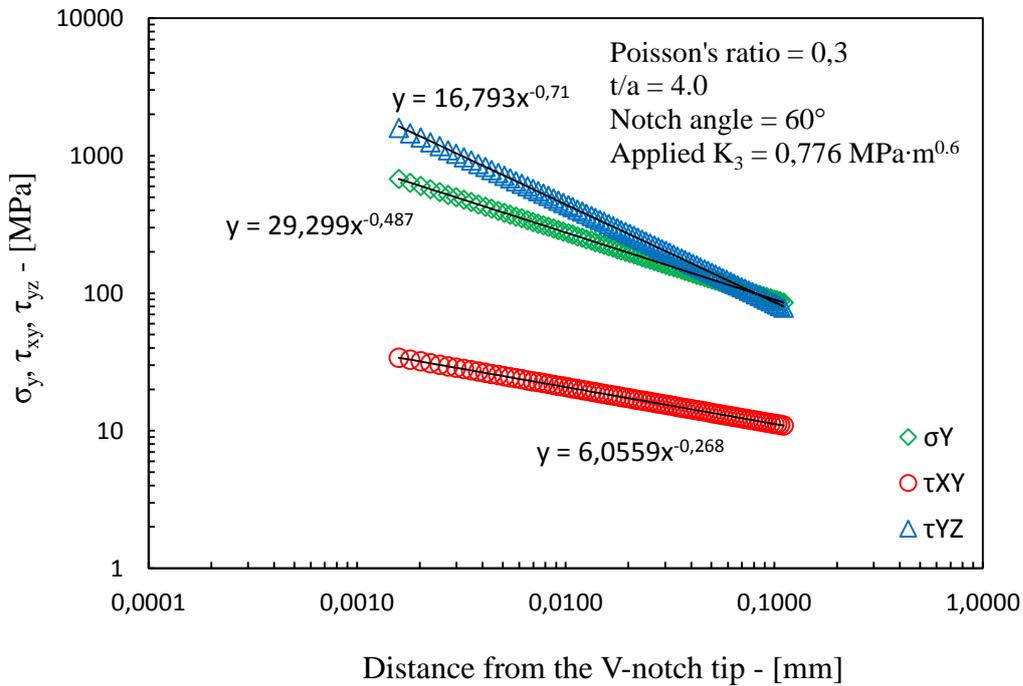
**Fig. 3.48** Free-clamped: stresses  $\sigma_y$ ,  $\tau_{xy}$  and  $\tau_{yx}$  on V-notch bisector line at  $s/t = 0.25$  from disc surface,  $t/a = 4$ .



**Fig. 3.49** Free-clamped: stresses  $\sigma_y$ ,  $\tau_{xy}$  and  $\tau_{yx}$  on V-notch bisector line at  $s/t = 0.5$  from disc surface,  $t/a = 4$ .



**Fig. 3.50** Free-clamped: stresses  $\sigma_y$ ,  $\tau_{xy}$  and  $\tau_{yx}$  on V-notch bisector line at  $s/t = 1$  from disc surface,  $t/a = 4$ .



**Fig. 3.51** Free-clamped: stresses  $\sigma_y$ ,  $\tau_{xy}$  and  $\tau_{yx}$  on V-notch bisector line at  $s/t = 2$  from disc surface,  $t/a = 4$ .

Dall'equazione vista nel paragrafo 3.2.2, per un angolo di apertura dell'intaglio di  $60^\circ$ , si ottiene un autovalore  $\kappa_3 = 0.3$ . Il grado di singolarità lungo la bisettrice dell'intaglio è quindi pari a  $1 - \kappa_3 = 0.7$ . Dai grafici sopra riportati è possibile osservare come i risultati analitici ottenuti per il campo di tensione di modo III (componente  $\tau_{yz}$ ) siano in accordo con quelli attesi dalla teoria. Per  $s/t = 2$  infatti, il grado di singolarità delle tensioni  $\tau_{yz}$  si discosta di poco da quello teorico (0.71) e anche per  $s/t = 1$  la variazione è contenuta. Per  $s/t < 1$  invece, la pendenza delle rette nei diagrammi doppio logaritmici è sensibilmente maggiore di 0.7, e aumenta al diminuire di  $s/t$ , fino a  $s/t = 0.25$ . In questa zona non è perciò possibile calcolare un valore realistico del *Notch Stress Intensity Factor*  $K_3$ . Sulla superficie libera non è riconoscibile un grado di singolarità costante, le tensioni  $\tau_{yz}$  hanno infatti un andamento parabolico decrescente e tendono a zero allontanandosi dall'apice dell'intaglio. Su questo piano non ha perciò senso parlare di *NSIF*  $K_3$ . Quanto più lo spessore del disco aumenta ( $t/a$  crescente), tanto più i risultati numerici sono fedeli ai valori attesi dalla teoria.

Anche gli autovalori dei modi indotti I e II dipendono dall'angolo di apertura dell'intaglio e risolvono le equazioni di *Williams* [13]:

$$\lambda_1 \sin(2\beta^*) + \sin(2\lambda_1\beta^*) = 0$$

$$\lambda_2 \sin(2\beta^*) - \sin(2\lambda_2\beta^*) = 0$$

Per  $\beta^* = \frac{5}{6}\pi$  si ha  $\lambda_1 = 0.512$  e  $\lambda_2 = 0.731$ . I gradi di singolarità corrispondenti sono rispettivamente  $1 - \lambda_1 = 0.488$  e  $1 - \lambda_2 = 0.269$ .

I risultati numerici sono in fedele accordo con quelli teorici. Le pendenze delle rette sulle quali si dispongono le  $\sigma_y$  e le  $\tau_{xy}$  approssimano bene i valori attesi dalla teoria. Piccole variazioni delle pendenze si hanno fino a  $s/t = 0.25$ . Sulla superficie libera invece, i gradi di singolarità ottenuti dal modello agli elementi finiti sono sensibilmente diversi da quelli previsti. I risultati rimangono pressoché invariati al variare di  $t/a$ . E' quindi possibile calcolare un valore realistico degli *NSIFs* di modo I e II per  $s/t \geq 0.25$  ma non sulla superficie libera.

Concludendo, le differenze tra i dati ottenuti in condizioni di tipo *free-free* e quelli ottenuti nel caso *free-clamped* sono principalmente tre: nel caso *free-clamped* è presente

---

la componente di tensione  $\sigma_y$  legata al modo I che nel caso *free-free* è nulla; il grado di singolarità del campo di tensione di modo III in condizione *free-clamped* è più che raddoppiato, passando da 0.4 a 0.7; com'è intuibile aspettarsi, i valori delle tensioni lungo la bisettrice dell'intaglio sono sensibilmente maggiori (circa un ordine di grandezza) nel caso *free-clamped* rispetto al caso *free-free*.

#### 3.5.4 Notch Stress Intensity Factors in condizione free-clamped

Dal modello FEM sono state analizzate le componenti di tensione  $\sigma_y$ ,  $\tau_{xy}$  e  $\tau_{yz}$  lungo un *path* di nodi ad una distanza  $x = 0.05$  mm dall'apice dell'intaglio. Per le ragioni della scelta  $x = 0.05$  mm vedere capitolo 2. Con tali componenti di tensione, sono stati calcolati gli *NSIFs* di modo I, II e III servendosi delle equazioni di *Gross* e *Mendelson* [14]:

$$K_1 = \sqrt{2\pi} \cdot \sigma_y \cdot x^{1-\lambda_1} = \sqrt{2\pi} \cdot \sigma_y \cdot x^{0.488}$$

$$K_2 = \sqrt{2\pi} \cdot \tau_{xy} \cdot x^{1-\lambda_2} = \sqrt{2\pi} \cdot \tau_{xy} \cdot x^{0.269}$$

$$K_3 = \frac{\sqrt{2\pi}}{2\kappa_3} \cdot \tau_{yz} \cdot x^{1-\kappa_3} = 2\sqrt{2\pi} \cdot \tau_{yz} \cdot x^{0.7}$$

Nei grafici seguenti sono riportati gli andamenti di  $K_1$ ,  $K_2$  e  $K_3$  lungo lo spessore del disco. Gli *NSIFs* sono stati calcolati anche nelle zone in prossimità della superficie libera utilizzando gli autovalori previsti dalla teoria.

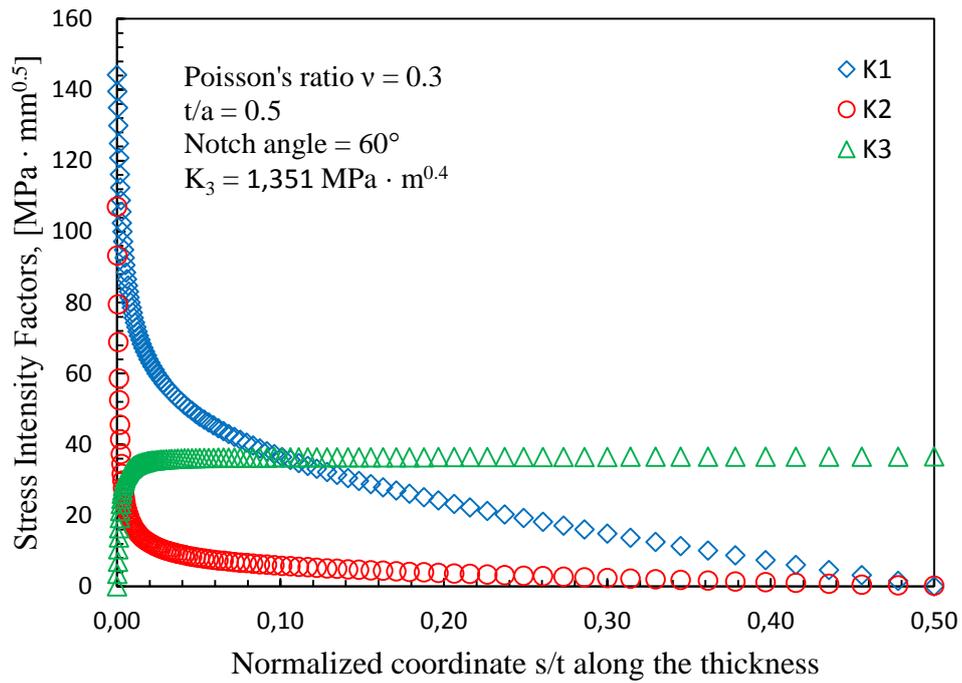


Fig. 3.52 Free-clamped: through the thickness distribution of  $K_I$ ,  $K_{II}$  and  $K_{III}$  for  $t/a = 0.5$ ,  $x = 0.05$  mm.

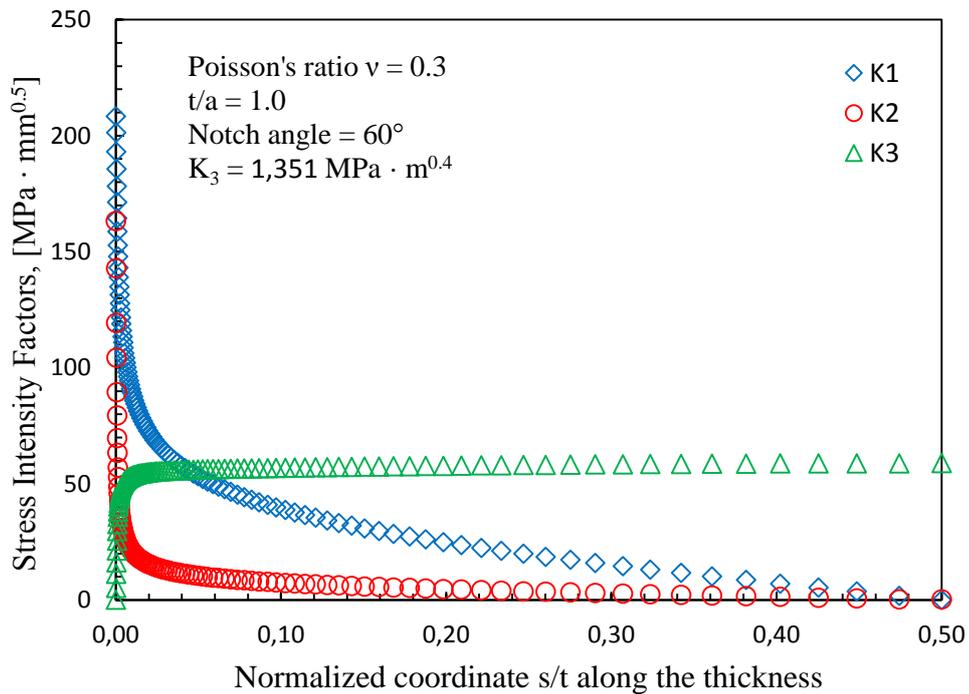
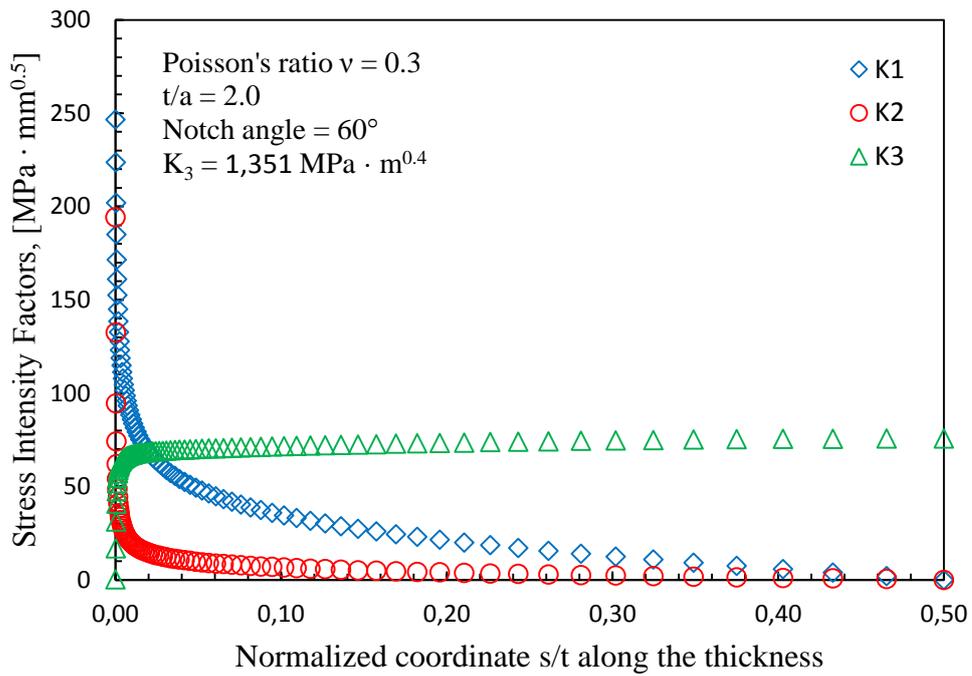
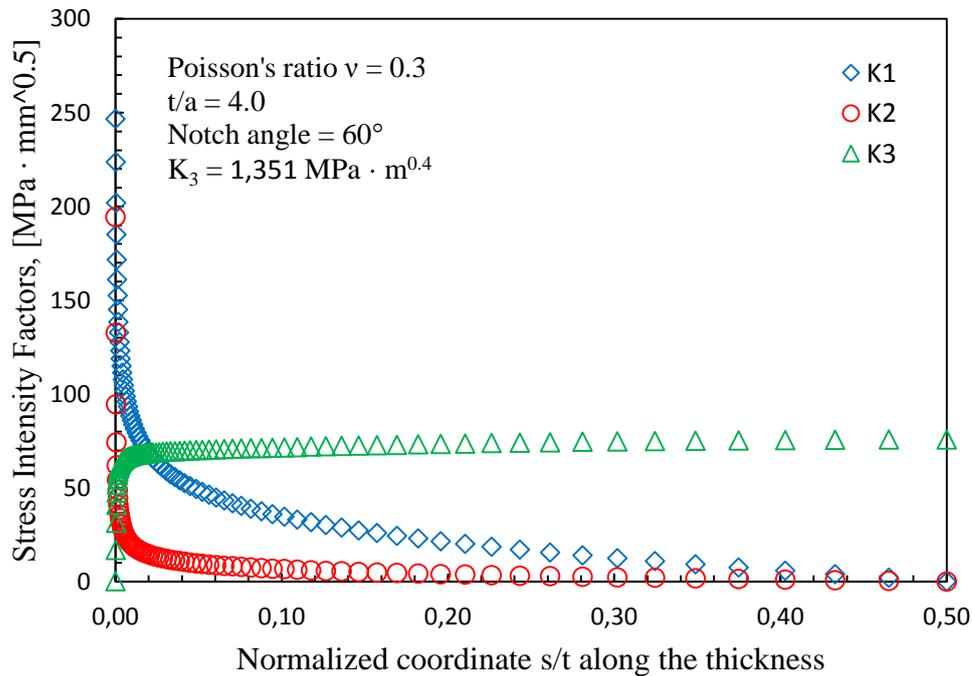


Fig. 3.53 Free-clamped: through the thickness distribution of  $K_I$ ,  $K_{II}$  and  $K_{III}$  for  $t/a = 1.0$ ,  $x = 0.05$  mm.



**Fig. 3.54** Free-clamped: through the thickness distribution of  $K_I$ ,  $K_{II}$  and  $K_{III}$  for  $t/a = 2.0$ ,  $x = 0.05$  mm.



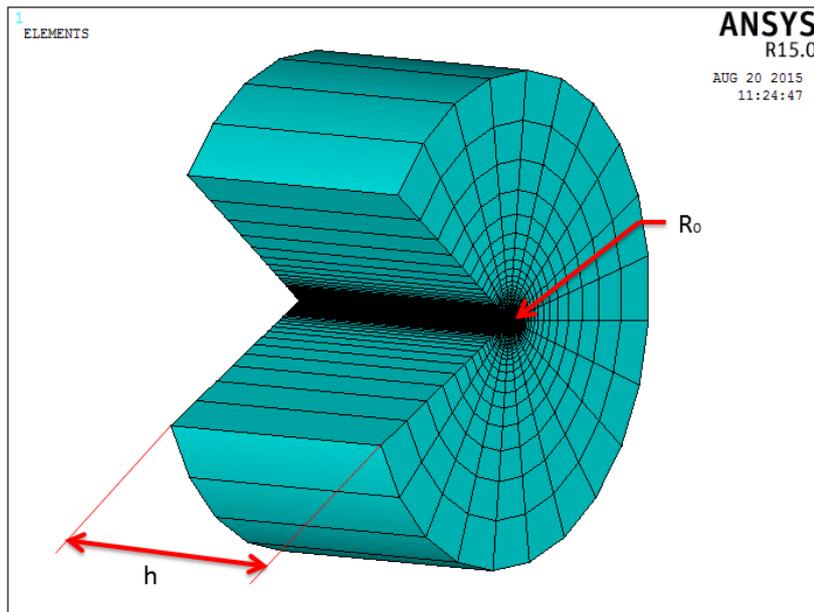
**Fig. 3.55** Free-clamped: through the thickness distribution of  $K_I$ ,  $K_{II}$  and  $K_{III}$  for  $t/a = 4.0$ ,  $x = 0.05$  mm.

Gli andamenti di  $K_2$  e  $K_3$  nel caso *free-clamped* sono analoghi a quelli nel caso *free-free*: il modo II ha valore massimo sulla superficie libera e andamento decrescente fino ad assumere valore nullo nel piano medio; il modo III è nullo sulla superficie libera, cresce rapidamente all'aumentare di  $s/t$  per poi avere andamento asintotico fino ad assumere valore massimo nel piano medio. Benché gli andamenti siano analoghi al caso *free-free*, il valore assunto dagli *NSIFs* in condizione *free-clamped* è sensibilmente più alto, risultato atteso in quanto una delle due facce dell'intaglio è vincolata. L'andamento del modo I è analogo a quello del modo II ma con intensità maggiore lungo tutto lo spessore del disco.

### 3.5.5 Densità di energia di deformazione (SED) lungo lo spessore

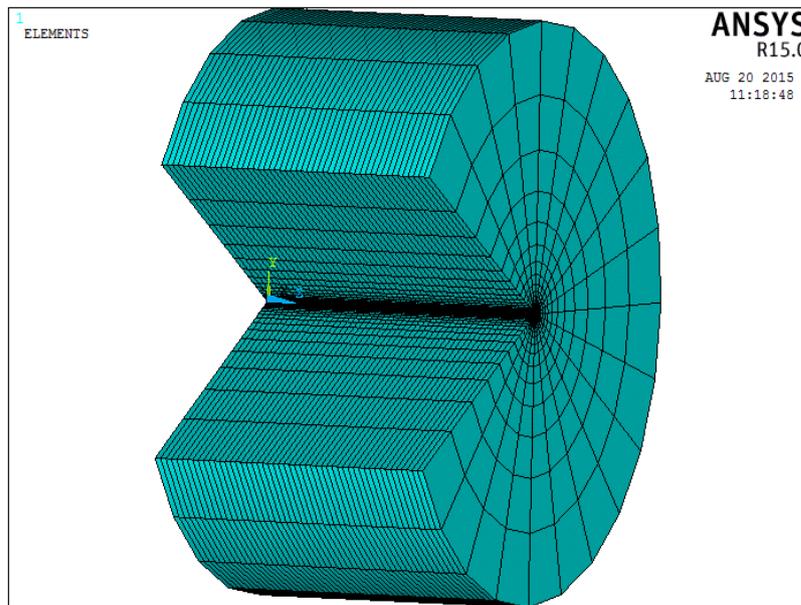
Come con il disco criccato, anche in presenza di intaglio non è stato possibile calcolare in modo realistico il valore dei *Notch Stress Intensity Factors* in corrispondenza della superficie libera. Per valutare l'intensità dello stato di tensione lungo lo spessore del disco, anche nelle zone in cui non è stato possibile in calcolo degli *NSIFs*, viene analizzata la densità di energia di deformazione mediata in un volume di controllo cilindrico di raggio  $R_0$ , che abbraccia l'apice dell'intaglio.

Il volume di controllo scelto per il calcolo della *SED* è un cilindro di raggio  $R_0 = 1$  mm e altezza  $h = 1$  mm. Anche se il raggio  $R_0$  è una caratteristica del materiale, viene qui scelto pari a 1 mm per semplificare la creazione del modello FEM. E' comunque abbastanza piccolo da permettere di apprezzare gli effetti tridimensionali presenti nel disco all'apice dell'intaglio (Fig. 3.56).



**Fig. 3.56** Control volume with a radius  $R_0$  equal to the height  $h$  (1 mm) embracing the V-Notch tip.

Per il calcolo della densità di energia di deformazione, è stato creato un secondo modello del disco caratterizzato da elementi di lunghezza 1 mm lungo tutto lo spessore. Nel fare l'estrusione 3D in ANSYS®, è stato per questo usato un numero di divisioni pari alla metà dello spessore del disco e uno *spating ratio* unitario (Fig. 3.57). Per semplicità, la mesh radiale è rimasta la stessa del primo modello con il quale sono state calcolate le componenti dello stato di tensione. Tuttavia, per calcolare la densità di energia di deformazione sarebbe stata sufficiente una mesh più rada, in quanto i risultati in *SED* sono insensibili alla dimensione degli elementi (*mesh insensitive*).



**Fig. 3.57** Three-dimensional model of the disk for  $t/a = 2$ , with 1 mm long elements through the thickness.

Una volta ottenuti i risultati in *SED* dal modello FEM, è possibile calcolare i *Notch Stress Intensity Factors* a posteriori utilizzando semplici espressioni che legano la *SED* locale agli *NSIFs* [11] [12].

Grazie all'indipendenza dell'unità di misura della *SED* dall'angolo di apertura dell'intaglio, se richiesto, è permesso per esempio confrontare l'intensità di uno stato di sollecitazione di un componente criccato con quello di uno intagliato, soggetti alla stessa condizione di carico.

Per verificare l'affidabilità dei risultati numerici ottenuti dai modelli, vengono di seguito riportate le espressioni per il calcolo della *SED* noti i *Notch Stress Intensity Factors*, sia in condizioni *free-free* che *free-clamped*.

#### *SED in funzione degli NSIFs in condizioni al contorno free-free*

Per quanto riguarda il contributo dato dal modo III, è possibile usare l'equazione vista nel paragrafo 3.3.1, che lega la densità di energia media  $\overline{W}_3$  al  $K_{3,F-F}$  in funzione del raggio  $R_0$  e dell'angolo di apertura dell'intaglio. Il contributo di modo II può essere approssimativamente calcolato seguendo l'espressione di  $\overline{W}_2$  per componenti intagliati

---

proposta da *Lazzarin e Zambardi* [6], essendo il campo di tensione  $\tau_{xy}$  fedele al grado di singolarità teorico pari a 0.269, fatta eccezione di una piccola zona nei pressi della superficie libera. Il valore teorico della *SED* mediata in un volume di controllo avente raggio  $R_0 = 1$  mm, può essere quindi calcolato in funzione di  $K_2$  e  $K_3$  lungo lo spessore del disco con la seguente espressione:

$$\overline{W_{th}} = \overline{W_1} + \overline{W_2} = \frac{1}{E} \left( \frac{I_2}{4\lambda_2\gamma} \right) \frac{K_{2,F-F}^2}{R_0^{2(1-\lambda_2)}} + \frac{1}{E} \frac{1+\nu}{\gamma} \frac{K_{3,F-F}^2}{R_0^{2(1-\lambda_3)}}$$

dove  $I_2$  è l'integrale delle funzioni angolari di tensione e dipende dall'angolo di apertura dell'intaglio  $2\alpha$  e dal rapporto di Poisson  $\nu$ . Per  $\nu = 0.3$  e  $2\alpha = 60^\circ$ ,  $I_2$  risulta pari a 1.6479. Sostituendo  $\gamma = \frac{5}{6}\pi$ ,  $\lambda_2 = 0.731$  e  $\nu = 0.3$  si ottiene:

$$\overline{W_{th}} = \overline{W_1} + \overline{W_2} = \frac{1}{E} \left( \frac{1.6479}{2.924 \cdot \frac{5}{6}\pi} \right) \frac{K_{2,F-F}^2}{R_0^{0.538}} + \frac{1}{E} \left( \frac{1.3}{\frac{5}{6}\pi} \right) \frac{K_{3,F-F}^2}{R_0^{0.8}}$$

#### *SED in funzione degli NSIFs in condizioni al contorno free-clamped*

Per quanto riguarda il contributo di modo III, è possibile utilizzare l'equazione vista nel paragrafo 3.3.2, che lega la densità di energia media  $\overline{W_3}$  al  $K_{3,F-C}$  in funzione del raggio  $R_0$  e dell'angolo di apertura dell'intaglio. I contributi di modo I e II possono essere approssimativamente calcolati seguendo le espressioni di  $\overline{W_1}$  e  $\overline{W_2}$  per componenti intagliati proposta da *Lazzarin e Zambardi* [6], essendo i campi di tensione  $\sigma_y$  e  $\tau_{xy}$  in accordo con il grado di singolarità teorico, pari rispettivamente a 0.488 e 0.269, fatta eccezione di una piccola zona nei pressi della superficie libera. I valori teorici della *SED* mediata in un volume di controllo avente raggio  $R_0 = 1$  mm può essere calcolata quindi in funzione di  $K_1$ ,  $K_2$  e  $K_3$  lungo lo spessore del disco con la seguente espressione:

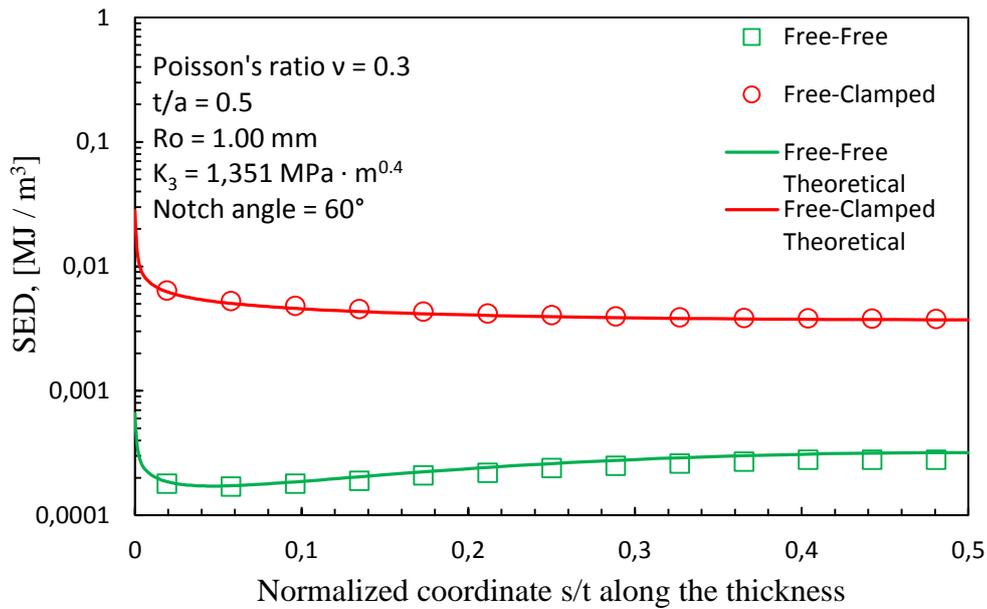
$$\begin{aligned} \overline{W_{th}} &= \overline{W_1} + \overline{W_2} + \overline{W_3} = \\ &= \frac{1}{E} \left( \frac{I_1}{4\lambda_1\gamma} \right) \frac{K_{1,F-C}^2}{R_0^{2(1-\lambda_1)}} + \frac{1}{E} \left( \frac{I_2}{4\lambda_2\gamma} \right) \frac{K_{2,F-C}^2}{R_0^{2(1-\lambda_2)}} + \frac{1}{E} \frac{1+\nu}{\gamma} \frac{K_{3,F-C}^2}{R_0^{2(1-\lambda_3)}} \end{aligned}$$

dove  $I_1$  e  $I_2$  sono gli integrali delle funzioni angolari di tensione, le quali dipendono dall'angolo di apertura dell'intaglio  $2\alpha$  e dal coefficiente di Poisson  $\nu$ . Per  $\nu = 0.3$  e  $2\alpha =$

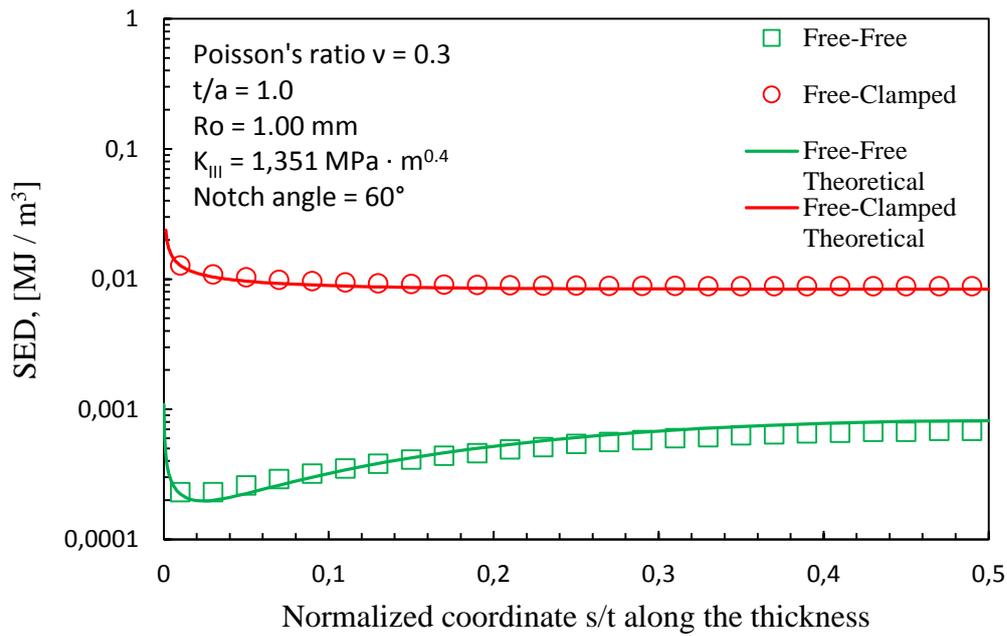
60° si ha  $I_1 = 0.8066$  e  $I_2 = 1.6479$ . Sostituendo  $\lambda_1 = 0.512$ ,  $\lambda_2 = 0.731$ ,  $\gamma = \frac{5}{6}\pi$  e  $\nu = 0.3$  si ottiene:

$$\begin{aligned} \overline{W}_{th} &= \overline{W}_1 + \overline{W}_2 + \overline{W}_3 = \\ &= \frac{1}{E} \left( \frac{0.8066}{2.048 \cdot \frac{5}{6}\pi} \right) \frac{K_1^2}{R_0^{0.976}} + \frac{1}{E} \left( \frac{1.6479}{2.924 \cdot \frac{5}{6}\pi} \right) \frac{K_2^2}{R_0^{0.538}} + \frac{1}{E} \left( \frac{1.3}{\frac{5}{6}\pi} \right) \frac{K_3^2}{R_0^{1.4}} \end{aligned}$$

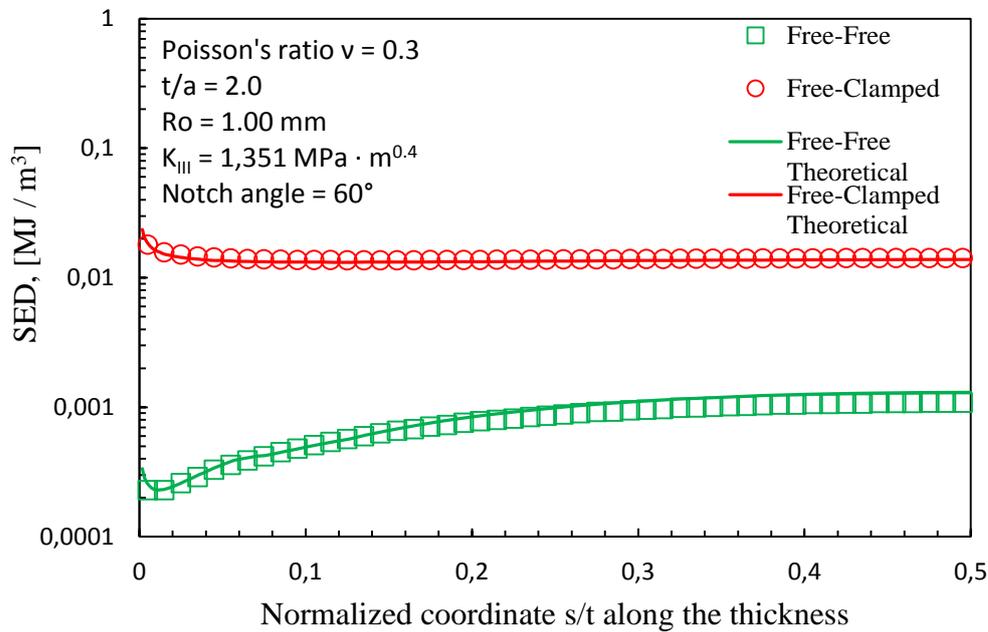
Nei seguenti grafici sono riportati sia i valori della *SED* lungo lo spessore del disco ottenuti dal modello FEM (identificati dai *markers*) che quelli derivanti dalle espressioni analitiche sopra riportate (linee continue). E' possibile notare un'ottima accordanza tra risultati sperimentali e teorici.



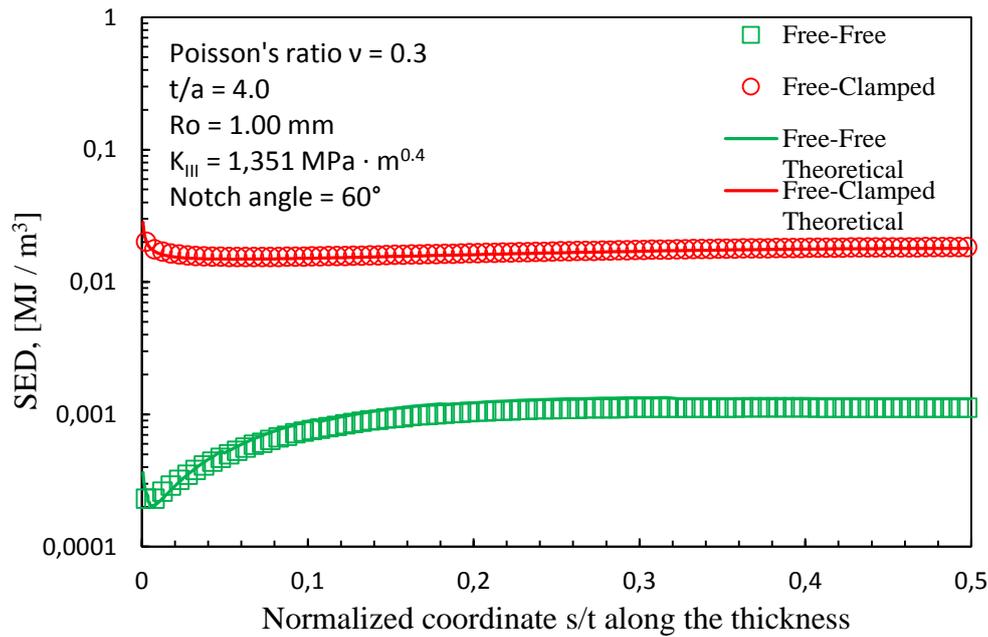
**Fig. 3.58** Through the thickness SED distribution for  $t/a = 0.5$ . Control radius  $R_0 = 1.00 \text{ mm}$ . DOF stands for degrees of freedom in the FE model (displacement  $u_x$ ,  $u_y$  e  $u_z$ ).



**Fig. 3.59** Through the thickness SED distribution for  $t/a = 1.0$ . Control radius  $R_0 = 1.00 \text{ mm}$ . DOF stands for degrees of freedom in the FE model (displacement  $u_x, u_y$  e  $u_z$ ).



**Fig. 3.60** Through the thickness SED distribution for  $t/a = 2.0$ . Control radius  $R_0 = 1.00 \text{ mm}$ . DOF stands for degrees of freedom in the FE model (displacement  $u_x, u_y$  e  $u_z$ ).



**Fig. 3.61** Through the thickness SED distribution for  $t/a = 4.0$ . Control radius  $R_0 = 1.00$  mm. DOF stands for degrees of freedom in the FE model (displacement  $u_x$ ,  $u_y$  e  $u_z$ ).

Dai grafici si evince che, in condizioni al contorno di tipo *free-clamped*, la zona in cui lo stato di tensione risulta essere più critico è la superficie libera del disco. Lungo lo spessore, si ha un andamento decrescente della *SED*, tanto più accentuato quanto più piccolo è il rapporto  $t/a$ : per  $t/a = 0.5$ , la variazione in *SED* tra superficie libera e piano medio è pari al 68%, mentre per  $t/a = 4.0$  è pari ad appena il 9%.

Nel caso *free-free* invece, è sul piano medio che lo stato di tensione risulta essere più critico. In particolare si nota un massimo relativo in corrispondenza della superficie libera, un minimo assoluto poco distante da essa e un massimo assoluto nel piano medio. L'incremento del valore della *SED* tra superficie libera e piano medio è tanto più importante quanto maggiore è il rapporto  $t/a$ : per  $t/a = 0.5$  la variazione è del 55%, mentre per  $t/a = 4.0$  sale al 390 %.

Come prevedibile, l'intensità del campo di tensione è maggiore nel caso *free-clamped* con valori della *SED* circa un ordine di grandezza più grandi di quelli del caso *free-free* lungo tutto lo spessore.

---

Infine, si nota che le curve nei grafici tendono a traslare verso valori più elevati all'aumentare dello spessore del disco. Ciò significa che, a parità di carico applicato, lo stato di tensione presente nel materiale è tanto più grave quanto più lo spessore del disco aumenta rispetto alla profondità della cricca ( $t/a >$ )

### 3.6 Conclusioni

In questo capitolo sono stati analizzati gli effetti tridimensionali che si manifestano in un disco intagliato sottoposto ad un carico di modo III. In particolare si è visto che, in funzione delle condizioni al contorno applicate ai fianchi dell'intaglio, si manifestano campi di tensione di natura e intensità diversa. Se i fianchi dell'intaglio sono liberi da vincoli (caso *free-free*), oltre alle tensioni di modo III applicato, si manifestano tensioni legate al modo II; se ad uno dei due fianchi dell'intaglio viene impedito lo spostamento lungo l'asse  $z$  (caso *free-clamped*), l'applicazione del modo III implica l'insorgere di uno stato di tensione più complesso che vede la presenza contemporanea di tensioni legate al modo I, II e III. Inoltre, a parità di carico applicato, lo stato di tensione generale a cui è sottoposto il disco ha intensità maggiore nel secondo caso rispetto al primo.

A causa degli effetti di bordo, non è stato possibile eseguire un calcolo realistico degli *NSIFs* in prossimità della superficie libera e quindi valutare l'intensità dello stato di sollecitazione in quella zona. Si è perciò ricorso al calcolo della densità di energia di deformazione, con la quale si è potuto valutare la gravità dello stato di tensione lungo tutto lo spessore del disco. Si è inoltre sottolineato come, in termini di *SED*, sia possibile confrontare i risultati ottenuti su modelli con angoli di apertura dell'intaglio diversi tra loro.

Potrebbe essere interessante analizzare, al variare dell'angolo di apertura dell'intaglio  $2\alpha$ , se gli stati di tensione legati ai modi indotti si manifestino in modo diverso. Riteniamo che non vi possano essere grandi differenze nell'andamento delle tensioni. Gli autovalori di modo I, II e III assumerebbero valori diversi in funzione di  $2\alpha$  e di conseguenza si manifesterebbero diversi gradi di singolarità delle tensioni nelle vicinanze dell'apice dell'intaglio.

## **CAPITOLO IV**

# **UN APPROCCIO ENERGETICO PER LA VERIFICA A FATICA DELLE GIUNZIONI SALDATE**



## 4.1 Introduzione

La saldatura è usata da molte industrie quale metodo efficiente ed economico per realizzare la giunzione di parti metalliche. Tuttavia, la natura del processo di saldatura provoca generalmente un'inferiore resistenza alla fatica delle giunzioni saldate rispetto a quella delle parti da unire insieme. Nel contempo, le saldature tendono a modificare le proprietà geometriche o a variare la sezione della struttura. Il risultato è che anche nelle strutture ben progettate, i giunti saldati sono tipicamente i più soggetti a rotture.

Esistono numerose e differenti norme che descrivono i metodi per valutare la resistenza alla fatica delle giunzioni saldate, per esempio la *Eurocode 3*, la *ASME Boiler and Pressure Vessel Code*, la *Swedish Regulations for Welded Steel Structures* e la *British Standard BS7608*. Esse hanno tutte un approccio alquanto simile, nel presente capitolo verranno illustrate le caratteristiche principali dell'approccio alla verifica a fatica relative all' *Eurocode 3*.

La norma UNI-CNR 10011, contenuta nell'Eurocodice 3, prende in considerazione un numero limitato di prove sperimentali. I cordoni di saldatura e i giunti possono però avere forme molto diverse tra loro. Per i casi non considerati dalla norma, si rende quindi necessario seguire altre strade. Tra i vari metodi proposti in letteratura viene di seguito analizzato un metodo che utilizza un approccio di tipo energetico e che è stato messo a punto dal gruppo di ricerca del compianto Prof. P. Lazzarin dell'Università di Padova. Tale metodo si basa sul calcolo della densità di energia di deformazione elastica (*Strain Energy Density, SED*).

Nel corso del capitolo si provvederà ad illustrare sia le basi teoriche e gli sviluppi che il metodo ha avuto negli anni, sia la sua applicazione eseguita per la prima volta in ambito industriale e quindi ad un problema concreto affrontato in collaborazione con l'azienda *Rulli Rulmeca S.p.A.* di Almè (BG), leader mondiale nella progettazione e produzione di rulli per il trasporto su nastro.

## 4.2 Verifica a fatica di giunzioni saldate secondo la normativa UNI-CNR 10011

Una tra le principali normative europee per la progettazione di giunti saldati è la UNI-CNR 10011. Secondo tale normativa, il parametro decisivo per la resistenza a fatica delle giunzioni saldate è la geometria del giunto. I giunti saldati vengono infatti classificati in 14 classi in base alle proprie caratteristiche geometriche. In Fig.4.1 è riportato un esempio tratto dalla normativa. La classe è riportata nella colonna di sinistra della figura e rappresenta il  $\Delta\sigma_{nom}$ , applicato a monte e a valle del giunto, che garantisce una vita a fatica di  $2 \cdot 10^6$  cicli, con una probabilità di sopravvivenza del 97.7%.

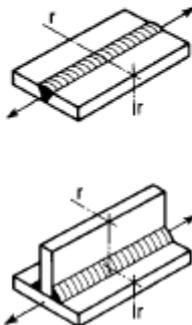
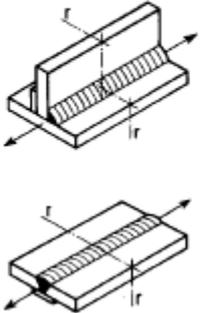
$\Delta\sigma_A^*$ N/mm <sup>2</sup>	Particolare strutturale (rr = sezione di rottura)	Indicazioni
<b>Gruppo II.1 — Particolari saldati — Giunti longitudinali</b>		
140		Saldatura automatica a piena penetrazione od a cordoni d'angolo esente da discontinuità longitudinali in superficie dovute ad arresti e riprese.
112	id.	Saldatura automatica di normale fattura.
100	id.	Saldatura manuale.
100		Saldatura su piatto di sostegno.

Fig.4.1 Example of the Eurocode 3 classes.

Oltre a classificare i giunti in classi, la normativa raccoglie centinaia di dati sperimentali ottenuti da altrettante prove di rottura a fatica. Questi risultati si trovano nel grafico di Fig.4. 2 tratto dalla normativa stessa. Il grafico è in scala doppio logaritmica, sulle ascisse vi sono il numero  $N$  di cicli a fatica e sulle ordinate il  $\Delta\sigma_{nom}$  applicato. Vi sono 14 curve, ognuna delle quali raccoglie i risultati sperimentali ottenuti da una particolare classe di giunto.

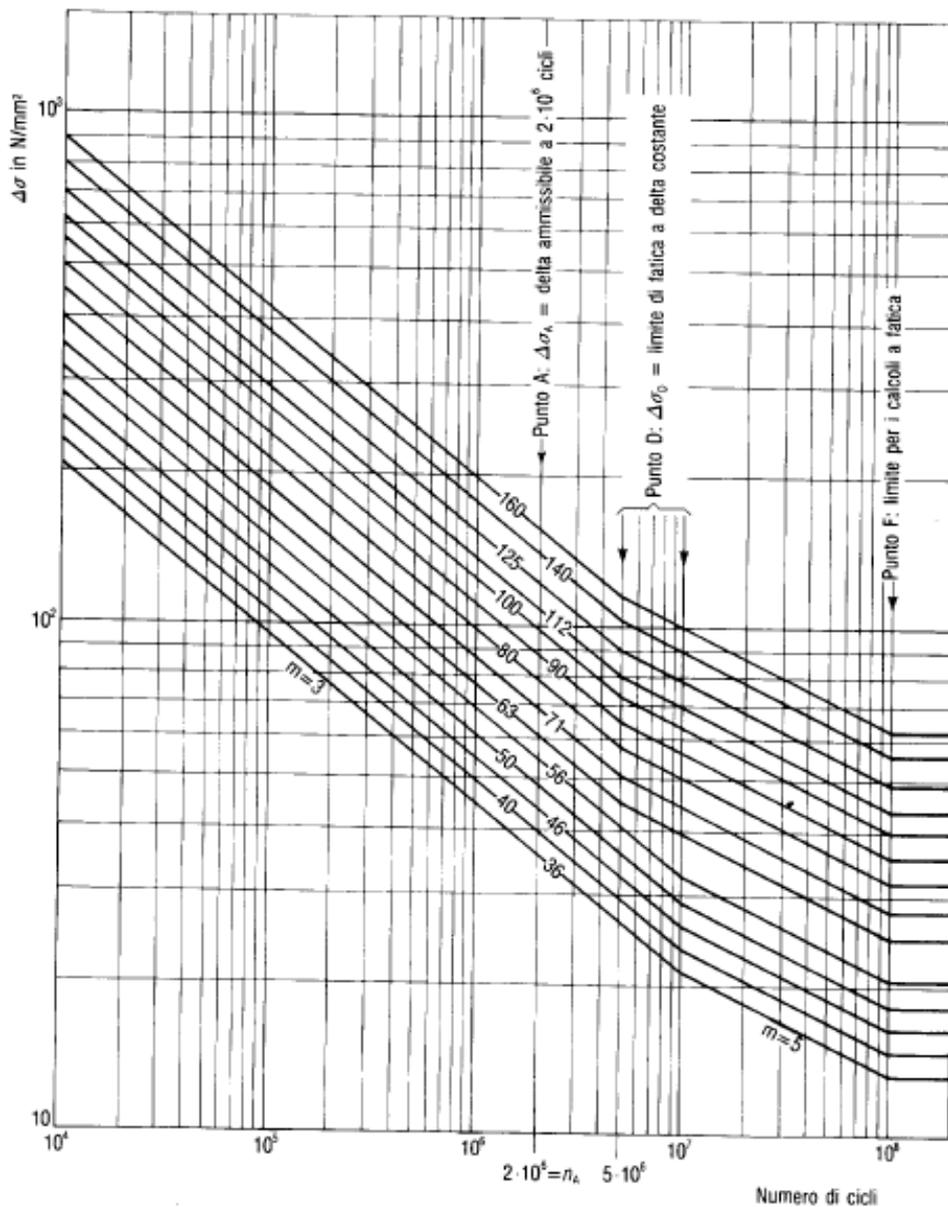


Fig.4. 2 Eurocode 3: experimental curves of welded joints fatigue life.

La verifica delle giunzioni saldate tramite la UNI-CNR 10011 segue perciò i seguenti steps: si procede dapprima al calcolo del range di tensione nominale a cui è sottoposto il giunto a monte e a valle, si classifica il giunto in base alle sue caratteristiche geometriche (la classe del giunto può inoltre essere penalizzata o incrementata in funzione dello spessore del piatto principale, della probabilità di sopravvivenza con la quale si sceglie di progettare, delle tensioni residue eventualmente distese), infine si verifica la vita a fatica con il grafico di Fig.4. 2. Questo approccio è di tipo probabilistico in quanto si basa su dati sperimentali, caratterizzati da una sensibile dispersione statistica.

Capita spesso che nei problemi reali si abbia a che fare con giunti saldati di geometria diversa da quelle classificate in normativa. Inoltre, non sempre è possibile definire il range di tensione nominale che sollecita il giunto, per esempio a causa della geometria troppo complessa della struttura. Nasce perciò la necessità di ricercare una diversa procedura per la verifica a fatica dei giunti saldati. Nel prossimo paragrafo vengono illustrate le basi teoriche del metodo energetico locale per la verifica a fatica dei giunti saldati proposto da *P. Livieri* e *P. Lazzarin*[18].

### **4.3 La densità di energia di deformazione per la verifica a fatica di giunti saldati**

Tutti i criteri proposti in letteratura per la valutazione della resistenza a fatica dei giunti saldati sono strettamente legati alla particolare geometria che questi possono avere e quindi al modello strutturale assunto nell'analisi delle tensioni e delle deformazioni. Ogni criterio si distingue dall'altro a seconda del parametro che viene ritenuto significativo per la valutazione del comportamento e della vita a fatica del giunto [19] [20].

Predire il comportamento a fatica di un giunto saldato non è affatto semplice. Ciò è dovuto alla modifica del materiale a livello microscopico, dovuta alla natura stessa del processo di saldatura. Le proprietà del materiale variano in modo significativo lungo il cordone e la Zona Termicamente Alterata (ZTA). Risulta inoltre difficile definire in modo preciso la geometria del cordone di saldatura. Il raggio di curvatura del piede del

cordone varia da caso a caso. Vi sono tecniche di saldatura che permettono di controllare più di altre questa geometria ma in nessun caso si può avere una precisione perfetta. Un problema cruciale è quindi riuscire a definire un modello strutturale con una geometria sufficientemente precisa dal punto di vista scientifico ma al tempo stesso semplice da definire per l'impiego in ambito industriale [21] [22] [23].

L'approccio previsto dall'Eurocodice 3, prevede una certa relazione tra il range di tensione nominale e la vita a fatica del giunto. Lo svantaggio principale di tale approccio è l'elevato indice di dispersione che risulta da un'analisi di regressione tra i due parametri. La resistenza a fatica è un fenomeno locale, perciò il danneggiamento del materiale non dovrebbe essere legato a tensioni nominali bensì a tensioni locali al piede del cordone.

Un altro problema è che le reali geometrie dei cordoni di saldatura sono così varie che un'analisi agli elementi finiti di ognuna di esse richiederebbe un tempo computazionale così grande che nella pratica non è realizzabile. E' necessario perciò trovare delle ipotesi che permettano di semplificare il problema ma al tempo stesso predire in modo corretto la vita a fatica dei giunti saldati.

In questo ambito, uno dei più celebri criteri locali che sono stati proposti in letteratura per stati di sollecitazione e deformazione bidimensionali, considera nullo il raggio al piede del cordone e i *Notch Stress Intensity Factors* il parametro che meglio si addice alla previsione della vita a fatica del giunto. Nell'approccio con gli *NSIFs* la regione del piede del cordone è modellata come un intaglio a spigolo vivo con angolo di apertura  $2\alpha$  (Fig.4.3) e si suppone che la frattura a fatica avvenga a partire dal piede del cordone, dove si ha l'effetto di intaglio.

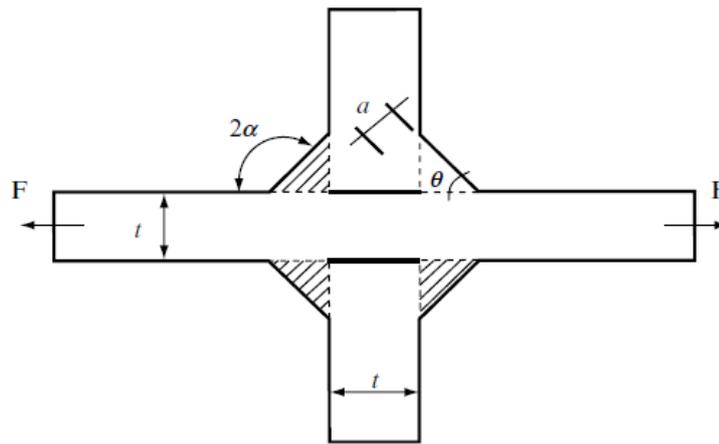


Fig.4.3 Geometry of the welded joint

Dai risultati sperimentali si è verificato come questo parametro si leghi alla vita a fatica del componente molto meglio del range di tensioni nominali usato dall'Eurocodice 3. I punti nel grafico doppio logaritmico  $\Delta K - N$  si dispongono con un indice di dispersione sensibilmente inferiore rispetto a quello che si può ottenere da un grafico  $\Delta\sigma_{nom} - N$  (Fig.4.4), dove  $N$  è il numero di cicli dopo i quali si verifica la rottura a fatica del materiale.

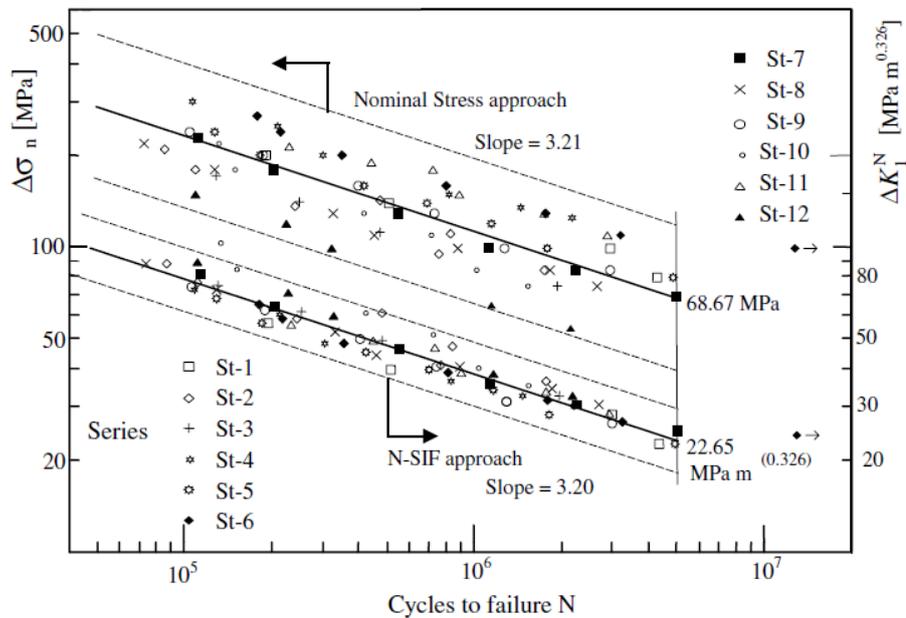


Fig.4.4 Fatigue data for as-welded joints in terms of nominal stress and NSIFs ranges (after Lazzarin and Tovo [24]). Original experimental data taken from Maddox [25] and Gurney [26].

Con questo approccio è stato possibile riunire in un'unica banda, con indice di dispersione contenuto, i risultati sperimentali ottenuti da giunti saldati caratterizzati da spessori variabili ma da un ugual angolo  $2\alpha$  tra il piatto principale e il cordone. Uno svantaggio di questo approccio è quello di non poter confrontare i risultati ottenuti da giunti saldati con angoli  $2\alpha$  diversi tra loro. L'unità di misura degli *NSIFs* infatti dipende dagli autovalori del modo di sollecitazione, che dipendono a loro volta dall'angolo di apertura dell'intaglio [14]:

$$K_1^N = \sqrt{2\pi} \lim_{r \rightarrow 0^+} r^{1-\lambda_1} \sigma_{\theta\theta}(r)$$

$$K_2^N = \sqrt{2\pi} \lim_{r \rightarrow 0^+} r^{1-\lambda_2} \sigma_{r\theta}(r)$$

Per superare tale limitazione, è stato proposto un nuovo metodo di approccio locale per la previsione della vita a fatica dei giunti. In questo nuovo criterio, è la densità di energia di deformazione (*Strain Energy Density, SED*) ad essere ritenuta il parametro da legare al numero di cicli a rottura. Inizialmente il criterio è stato sviluppato per problemi bidimensionali come quelli dell'approccio agli *NSIFs*. Nei modelli bidimensionali lo stato di tensione nei pressi dell'apice dell'intaglio è governato solo dagli *NSIFs* di modo I e II. E' quindi possibile determinare in forma chiusa l'espressione del range di variazione dell'energia di deformazione elastica nel caso di sollecitazione a fatica, in una ben definita regione *A* attorno all'apice dell'intaglio (Fig.4.5):

$$\Delta\bar{W} = \frac{\Delta E}{A}$$

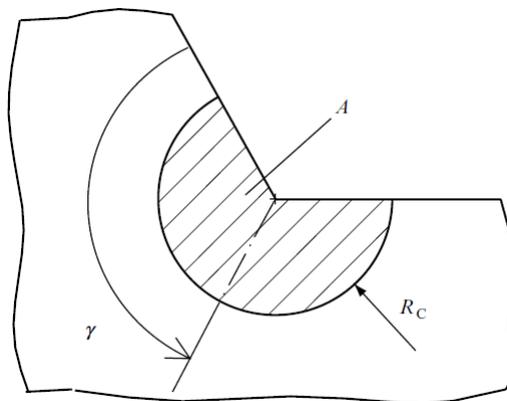


Fig.4.5 Critical volume (area) surrounding the notch tip

Inoltre, se l'angolo  $2\alpha$  nel giunto saldato è superiore ai  $102^\circ$ , il modo II non presenta più un carattere singolare, ed è perciò legittimo assumere che abbia contribuito trascurabile rispetto al modo I, in una zona nei pressi del piede del cordone (apice dell'intaglio). L'espressione della densità di energia è quindi la seguente [6]:

$$\Delta\bar{W} = \frac{1}{E} \cdot e_1 \cdot (\Delta K_1^N)^2 \cdot (R_C)^{2(\lambda_1-1)}$$

dove  $e_1$  rappresenta una funzione di forma che dipende principalmente dall'angolo di apertura  $2\alpha$ . Tale funzione è diagrammata in Fig.4.6 in condizioni di deformazione piana.

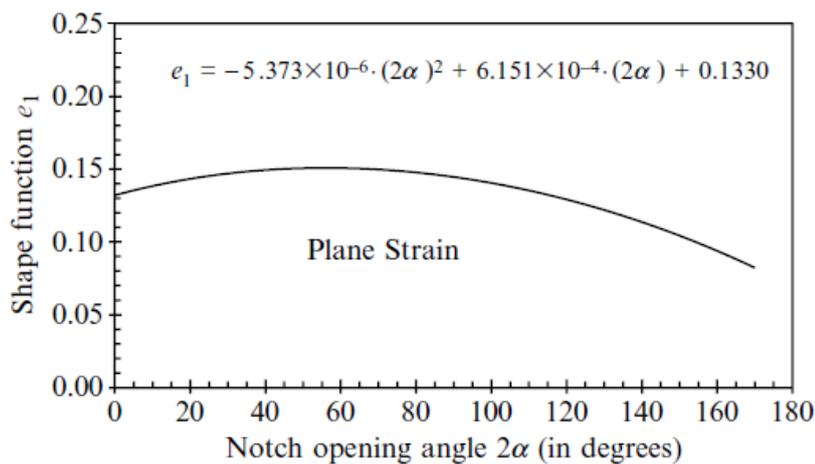


Fig.4.6 Best fitting of the shape function  $e_1$  against the notch opening angle according to Ref. [6].

La relazione tra la densità di energia in campo lineare elastico e la frattura dei materiali era già stata dimostrata da vari autori tra cui *Sih* [27].

Ciò che deve essere definito è il raggio del settore circolare (o del volume nel caso 3D) che abbraccia il piede del cordone. Il raggio  $R_C$  è tale che, se la densità di energia elastica calcolata e mediata all'interno di quell'area uguaglia o supera un valore critico tipico del materiale, si ha la rottura. E' bene notare che:

- Il valore del raggio critico  $R_C$  dipende principalmente dal materiale. Più il materiale è fragile e minore è  $R_C$ .

- $R_C$  dipende inoltre dall'ipotesi di rottura. Se si usa la densità di energia di deformazione deviatorica (*Von Mises*) invece che la densità di energia di deformazione totale (*Beltrami*), il valore di  $R_C$  sarà ovviamente diverso. Perciò, un confronto tra diversi valori di  $R_C$  deve essere fatto a parità di ipotesi di rottura.

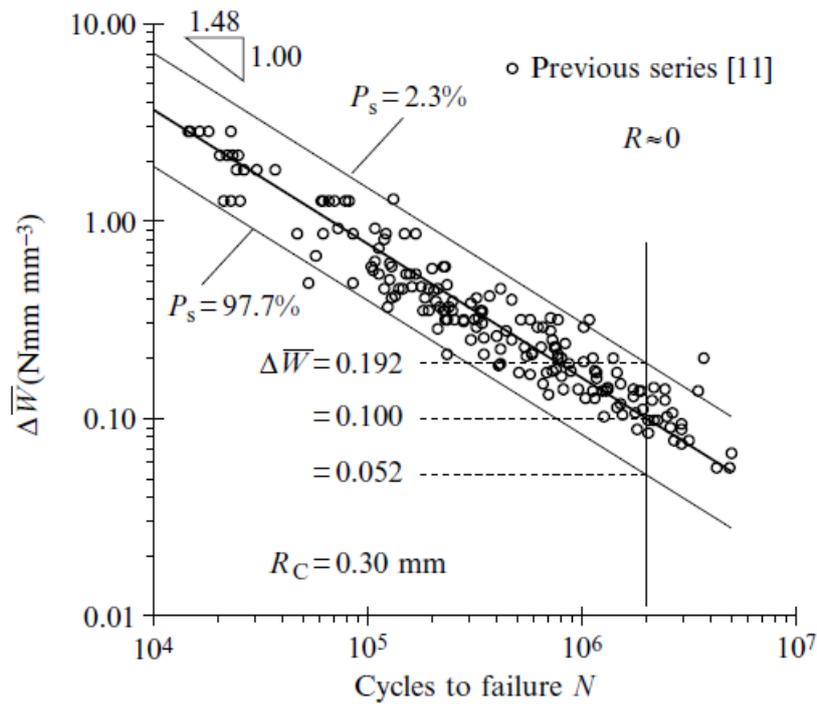
Usando l'ipotesi di Beltrami l'espressione di  $R_C$  è la seguente [6]:

$$R_C = \left( \frac{\Delta K_{1A}^N}{f_1 \Delta \sigma_A} \right)^{\frac{1}{1-\lambda_1}}$$

dove  $\lambda_1$  e  $f_1$  dipendono dall'angolo di apertura dell'intaglio a spigolo vivo  $2\alpha$  ( $f_1 = 2.065$  e  $\lambda_1 = 0.674$  quando  $2\alpha = 135^\circ$ ), mentre  $\Delta K_{1A}^N$  e  $\Delta \sigma_A$  sono i valori di riferimento rispettivamente dell'*NSIF* e della tensione nominale, per la fatica ad alto numero di cicli. A  $N_A = 5 \times 10^6$  cicli e in presenza di un rapporto di ciclo  $R = 0$ , il valore medio di  $\Delta K_{1A}^N = 211 \text{ MPa mm}^{0.326}$  è stato dato in Rif. [6]. Introducendo questo valore nell'equazione, si ottiene  $R_C = 0.28 \text{ mm}$ . Successivamente, *Taylor et al.* [28] hanno determinato analiticamente e sperimentalmente un valore del parametro di lunghezza caratteristica del materiale  $a_0$  (il parametro di *El-Haddad* [29]) pari a 0.31 e 0.43 mm rispettivamente. Se l'intaglio a spigolo vivo degenera in una cricca ( $2\alpha = 0$ ,  $\lambda_1 = 0.5$  e  $f_1 = 1.93$  (vedi Rif. [6]), l'equazione diventa:

$$R_C = \frac{0.85}{\pi} \left( \frac{\Delta K_{th}}{\Delta \sigma_A} \right)^2 = 0.85 a_0$$

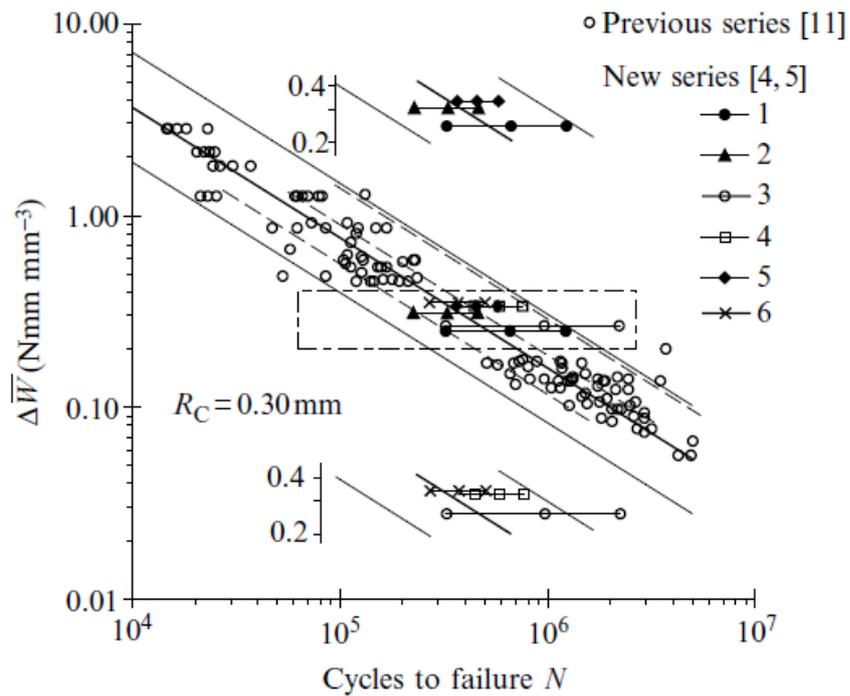
e, usando i dati di *Taylor*, si ottiene una stima di  $R_C$  compresa tra 0.26 e 0.36 mm. I successivi grafici sono stati ottenuti da *Lazzarin et al.* [30] con un  $R_C = 0.3 \text{ mm}$ . In Fig.4.7 il range di tensione nominale dell'Eurocodice 3 è stato sostituito dal range di variazione della densità di energia di deformazione, allo scopo di ottenere un indice di dispersione dei risultati sensibilmente ridotto e un grafico che fosse in grado di contenere in modo completo l'influenza degli spessori e degli altri parametri geometrici.



**Fig.4.7** Fatigue strength in terms of total strain energy averaged in the area of radius  $R_C$ . The scatter band is related to mean values  $\pm$  two standard deviations. All the joints were ‘as-welded’[31].

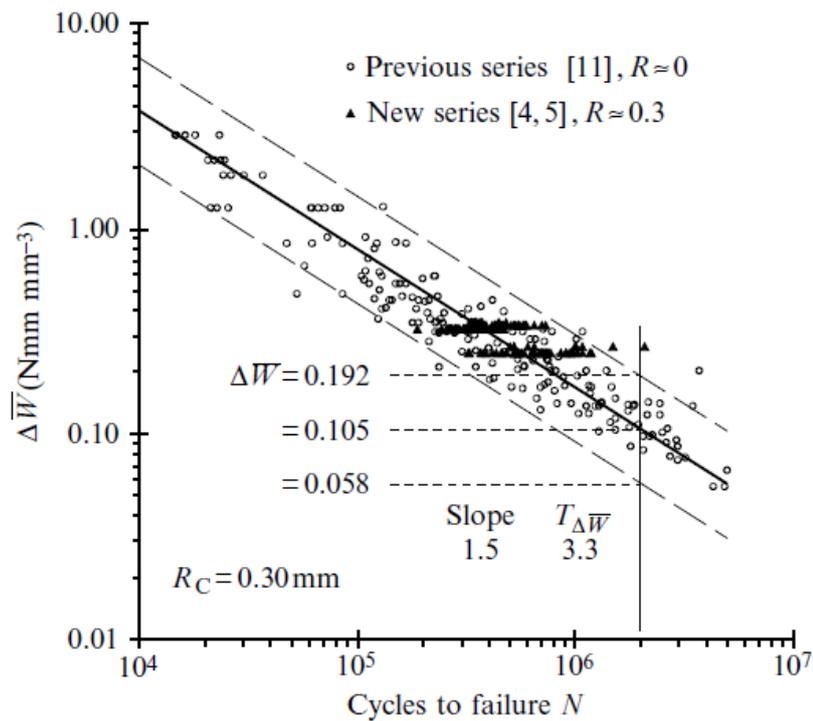
Rispetto ai grafici con le curve  $\Delta\sigma - N$  si è ottenuto una riduzione dell’indice di dispersione, tra il 2.3 e il 97.7% di probabilità di sopravvivenza, del 45%, passando da 5.36 a 3.7.

Altri grafici sono stati ottenuti successivamente aggiungendo altre serie di dati sperimentali, ottenuti variando il rapporto di ciclo  $R$ , l’angolo  $\theta$  che definisce il cordone di saldatura, il raggio al piede del cordone ( $\rho$ ) e rilassando le tensioni dopo il processo (Fig.4.8). In figura Fig.4.8 si può osservare come i dati delle nuove serie rimangono quasi completamente compresi nella banda di dispersione di Fig.4.7, a dimostrazione del fatto che con la densità di energia di deformazione elastica è possibile ottenere un’unica banda di dispersione contenente i dati di vita a fatica validi per giunti saldati di geometria e modalità di carico diverse.



**Fig.4.8** Fatigue strength of the new 6 series compared with that of the previous series. Points represent mean values  $\pm 2$  standard deviations. Continuous lines are for the previous band and dashed lines for the new band (2.3-97.7% probabilities of survival) [31].

Infine, è stata definita un curva comune a tutti i dati raccolti (Fig.4.9). Dato che i risultati ottenuti dalle nuove serie sono contenuti nella precedente banda di dispersione, è stata definita un'unica banda basata sull'energia di deformazione, utile agli ingegneri coinvolti in problemi di resistenza a fatica e valida sia per giunti saldati 'as-welded' che 'stress relieved'.



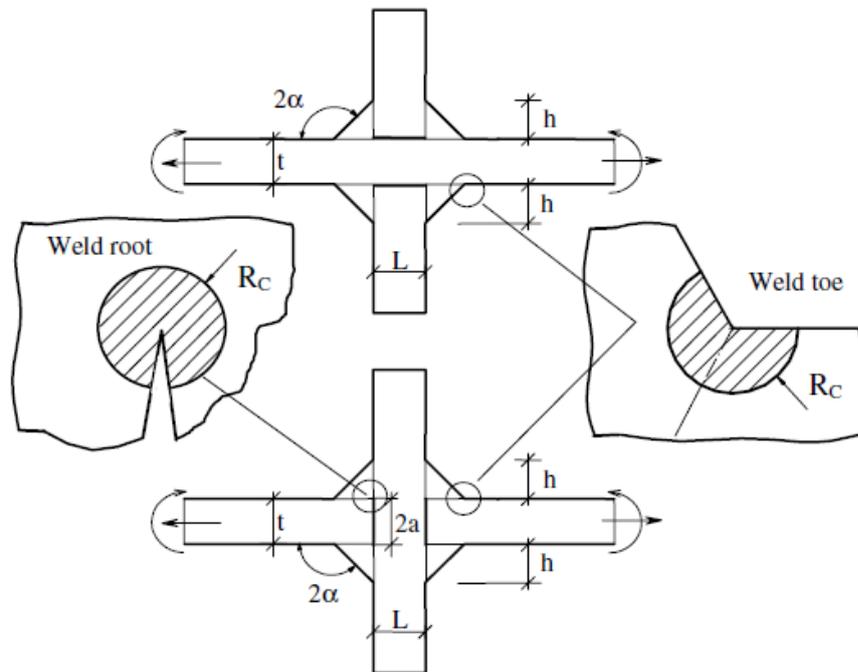
**Fig.4.9** Strain energy-based scatter band summarizing more than 300 fatigue strength data of steel welded joints subjected to traction and bending loads (the main plate thickness ranging from 6 to 100 mm, the weld flank angle from 30 to 70°)[31].

Il motivo della dispersione statistica dei risultati sperimentali è legato alla variabilità dei parametri geometrici quali il raggio al piede del cordone e l'angolo dei fianchi; la variabilità dei parametri è dovuta alla natura stessa del processo di saldatura. Infatti questi parametri sono troppo difficili da controllare in ambito industriale.

Nonostante l'estrema variabilità dei parametri tra le varie serie di dati, la dispersione statistica è sensibilmente inferiore a quella dell'Eurocodice 3 e dell'approccio agli *NSIFs*. L'approccio in *SED* perciò può essere ritenuto sufficientemente accurato per gli scopi industriali ed è un importante strumento, che può essere utilizzato dall'ingegnere che deve confrontarsi con il problema della previsione della vita a fatica di giunti saldati.

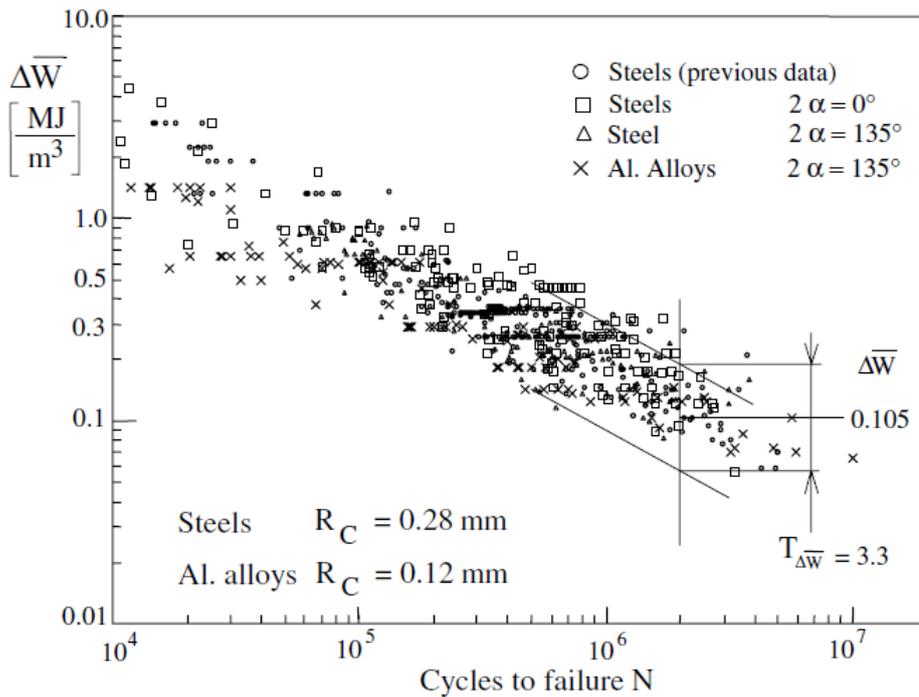
Finora si è descritto il metodo *SED* solo nel caso di rotture a fatica che avvengono a partire dal piede del cordone. Il metodo è valido anche per rotture che si manifestano dalla radice (Fig.4.10). A causa della mancata penetrazione del cordone di saldatura, la

radice è l'apice di una cricca che propagandosi causa la rottura del giunto. Dal momento che l'unità di misura dell'energia di deformazione non dipende dall'angolo di apertura dell'intaglio (diversamente dall'unità di misura degli *NSIFs*), è stato possibile raggruppare in un'unica banda di dispersione i risultati ottenuti dalle prove sperimentali di rottura dei giunti avvenute sia a partire dal piede che dalla radice del cordone.



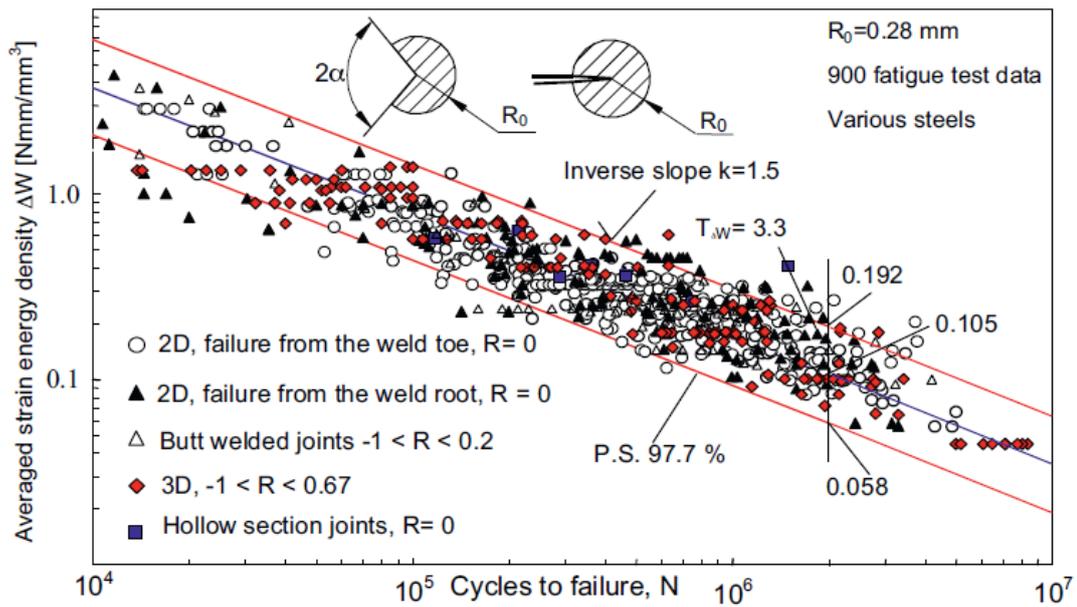
**Fig.4.10** Geometrical parameters and critical volume (area) at the weld toes or roots [18].

La valutazione della densità di energia di deformazione locale necessita di precise informazioni relative alla dimensione del volume di controllo. Come abbiamo visto prima, ad un angolo di apertura dell'intaglio pari a  $135^\circ$  corrisponde un  $R_c = 0.28$  mm mentre per  $2\alpha = 0$  si ha  $R_c = 0.36$  mm. In favore di sicurezza, nei calcoli effettuati da *Livieri e Lazzarin* in [18] si è usato  $R_c = 0.28$  mm anche per il caso della cricca (rottura alla radice). I risultati ottenuti sono raccolti nel diagramma di Fig.4.11, nel quale è illustrata la banda che contiene i risultati sperimentali ottenuti con alluminio e acciaio, per rotture al piede e alla radice e per diverse geometrie.



**Fig.4.11** Strain energy-based scatter band summarizing about 650 fatigue data of welded joints made of steel or aluminum alloy subjected to tension and bending loads (the main plate thickness ranging from 3 to 100 mm, the weld flank angle from 0° to 150°) [18].

Tutti i dati sperimentali sono stati ottenuti con l'ipotesi di lineare elasticità e deformazione piana. La prima ipotesi rimane valida anche in presenza di plasticizzazione in piccola scala attorno all'apice di cricca o intaglio. Ciò è permesso grazie alla riformulazione fatta da *Lazzarin e Zambardi* [33] dell'approccio in *ESSED* che ora non è più applicato all'apice dell'intaglio ma ad un settore circolare di dimensione finita che circonda l'apice stesso. L'ipotesi di lineare elasticità spiega perché l'approccio in *SED* non venga utilizzato per rotture a fatica a basso numero di cicli, bensì solo per  $N > 10^4$ , come si può notare da tutti i diagrammi riportati sopra. La seconda ipotesi è stata superata in seguito con altre prove sperimentali con geometrie che presentavano grande varietà di spessori del piatto principale (da 6 a 100 mm), dell'irrigidimento trasversale (da 3 a 200 mm) e dei fianchi del cordone (da 110° a 150°). La prossima figura include inoltre dati ottenuti da giunti 'as welded' e 'stress relieved' e da rotture alla radice e al piede. Vengono inoltre inclusi in questa banda risultati derivanti dall'applicazione di storie di carico con rapporto di ciclo variabile e stati di tensione e deformazione tridimensionali (Fig.4.12) [32].



**Fig.4.12** Fatigue strength of welded joints as a function of the averaged local strain energy density;  $R$  is the nominal load ratio [32].

I 900 dati sperimentali rappresentati in Fig.4.12 si mostrano in forte accordo con i risultati ottenuti negli anni precedenti. Sono state dimostrate ampiamente le robuste basi di questo approccio che può quindi essere applicato per la verifica a fatica di qualsiasi tipologia di giunto saldato sia che la rottura avvenga alla radice che al piede del cordone.

Nel prossimo paragrafo viene descritto l'approccio in *SED* per la prima volta applicato per la risoluzione di un caso industriale, ovvero la verifica a fatica delle giunzioni saldate tra le testate e il tubo di un rullo.

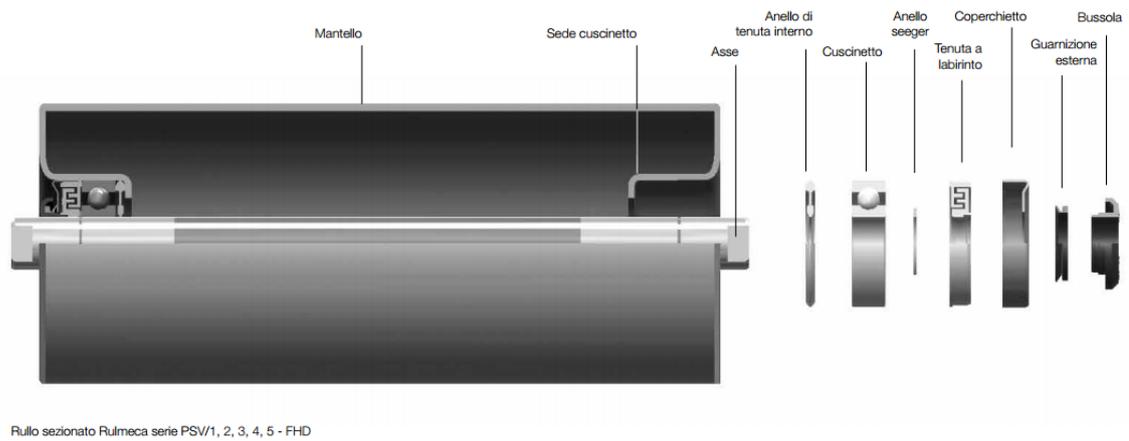
#### 4.4 Previsione della vita a fatica di rulli con testata saldata

In collaborazione con l'azienda *Rulli Rulmeca S.p.A.*, si è potuto convalidare il metodo *SED* come strumento per la verifica a fatica delle giunzioni saldate in un contesto aziendale. I rulli della categoria PSV prodotti dalla *Rulli Rulmeca S.p.A.* (Fig.4.123) sono caratterizzati da una giunzione saldata che unisce testata e tubo e su tale giunzione si è verificata la validità del metodo *SED*. In collaborazione con l'azienda, sono state

parallelamente svolte analisi FEM e prove sperimentali di rottura a fatica dei rulli PSV. Come previsto dal metodo *SED*, le analisi FEM avevano come obiettivo la determinazione del range di *SED* ( $\Delta\bar{W}$ ) nel volume di controllo critico che abbraccia l'apice della radice del cordone di saldatura, quando il rullo è sottoposto ad un carico noto. Noto il  $\Delta\bar{W}$  dall'analisi numerica e il numero di cicli a rottura dalla prova sperimentale, è possibile individuare un punto in un grafico  $\Delta\bar{W}$ -*N* in scala doppio logaritmica (come quello di figura Fig.4.12). L'obiettivo era verificare se anche i punti sperimentali derivanti dalle prove di rottura a fatica fatte sui rulli PSV, fossero contenuti nella banda di dispersione di Fig.4.12. Se ciò fosse verificato, sarebbe una conferma ulteriore della validità e della accuratezza di tale banda che può essere utilizzata per la stima della vita a fatica di giunti saldati di geometria generica sollecitati da un carico altrettanto generico. Di seguito viene illustrato in modo dettagliato lo studio effettuato.

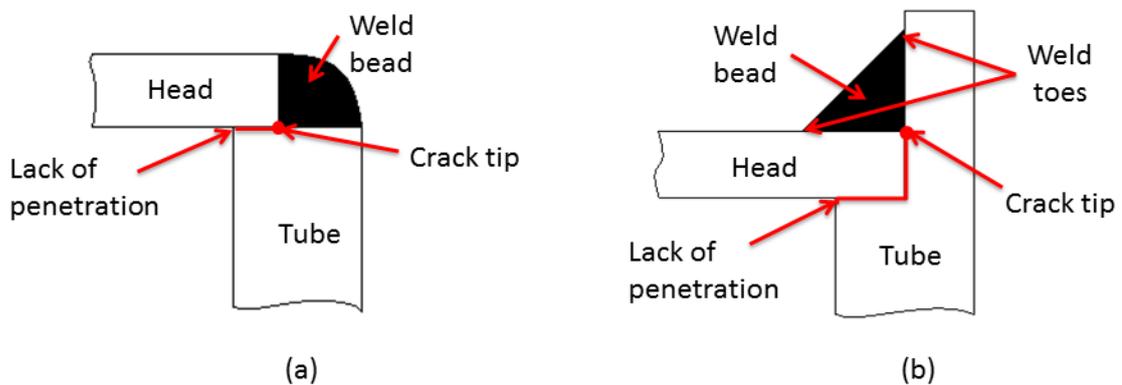


**Fig.4.13** PSV roller by *Rulli Rulmecca S.p.A.*



**Fig.4.14** Section view of a PSV roller by *Rulli Rulmecca S.p.A.*

In Fig.4.13 e Fig.4.14 sono illustrati i rulli PSV prodotti dalla *Rulli Rulmecca S.p.A.* Tubo, testata e asse sono in acciaio. Internamente alla testata è posizionato il cuscinetto che ha l'anello interno in contatto con l'asse del rullo e quello esterno con la sede del cuscinetto ricavata nella testata. Quando il rullo è in esercizio, è vincolato alla struttura che lo sorregge tramite l'asse che fuoriesce leggermente dal cuscinetto che viene inserito nei fori predisposti. La testata è legata al tubo con una saldatura ad arco continua che può essere di due tipi: lungo la circonferenza esterna del tubo (Fig.4.15-a) o internamente al tubo (Fig.4.15-b). Per comodità, d'ora in avanti la prima tipologia di saldatura sarà chiamata "saldatura esterna" mentre la seconda "saldatura interna"

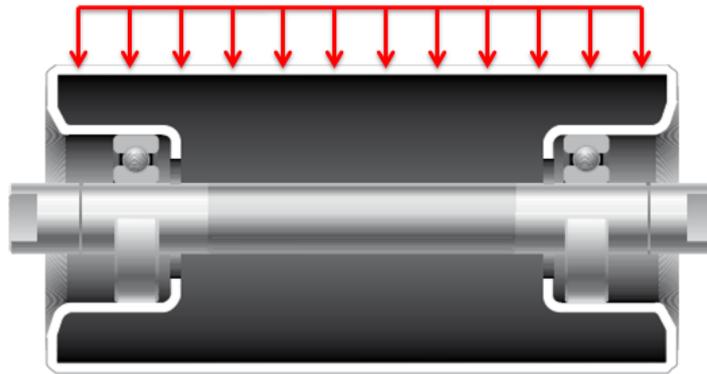


**Fig.4.15** Section view of the weld joint: external welding (a), internal welding (b).

La zona più critica, in entrambe le geometrie, è quella caratterizzata dalla mancanza di penetrazione nella parte in cui testata e tubo sono in contatto. La mancanza di continuità del materiale indebolisce il sistema e la zona tra tubo e testata si configura come una cricca (Fig.4.15). La rottura si manifesterà perciò a partire dall'apice di cricca, propagandosi attraverso il cordone di saldatura fino al completo distacco della testata dal tubo. In Fig.4.16 si può apprezzare la modalità di rottura di questi rulli sottoposti ad un carico distribuito sul tubo mentre ruotano attorno al proprio asse a velocità costante (Fig.4.17).



**Fig.4.16** Typical failure of the rollers. The crack propagates from the crack tip due to the lack of penetration in the weld joint.



**Fig.4.17** Load applied to the rollers

Il volume di controllo, nel quale verrà calcolato il valore della densità di energia di deformazione elastica media, deve quindi essere centrato all'apice della cricca generata dalla mancanza di penetrazione. In questo caso il volume sarà un settore di toroide, di raggio e profondità 0.28 mm [18]. Per il calcolo della *SED* si è fatto uso del codice di calcolo agli elementi finiti ANSYS® (versione 15.0). I modelli creati sono tridimensionali in quanto lo stato di tensione e deformazione che deriva dall'applicazione del carico sul rullo è triassiale. Sfruttando la doppia simmetria del sistema (una simmetria rispetto al piano contenente l'asse e l'altra rispetto al piano ortogonale all'asse e passante per la mezzeria del tubo), solo un quarto dell'intero rullo è stato modellato, al fine di ridurre il numero di nodi e quindi contenere il tempo computazionale di ciascuna analisi.

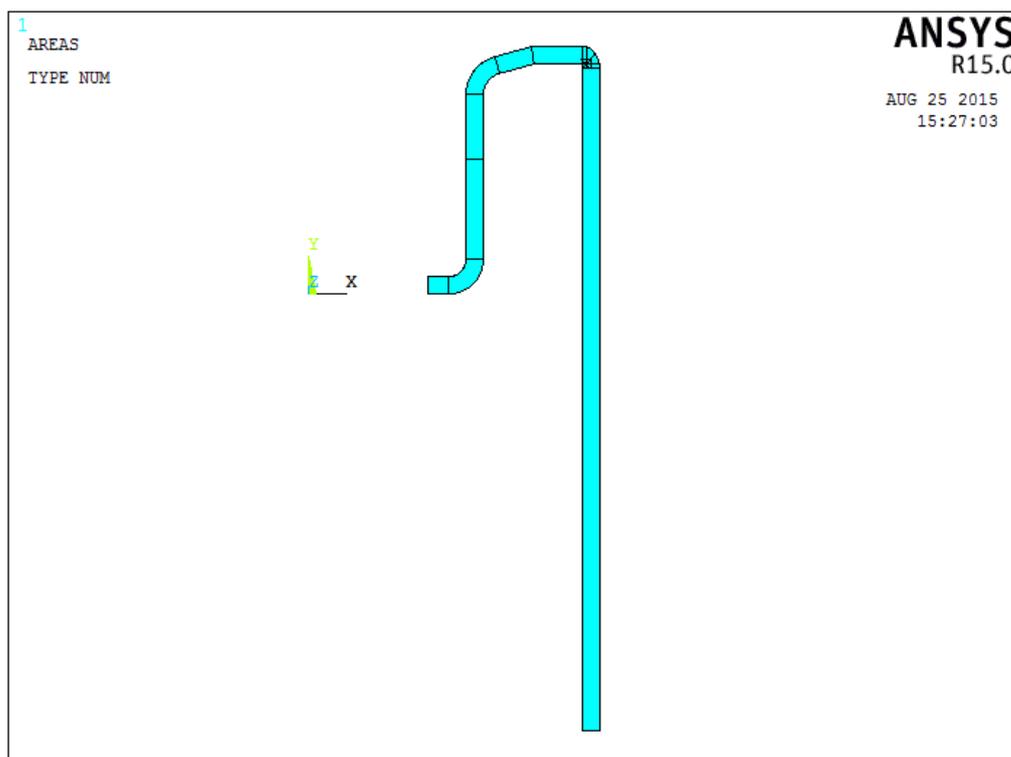
Per ciascun rullo sono stati risolti due modelli, il primo detto "a mesh equispaziata" (con *spating ratio* unitario nella terza dimensione) e il secondo "a mesh non equispaziata" (con *spating ratio* calcolato *ad hoc*). Il primo è servito a individuare in quale punto del toroide si manifesta il massimo valore di *SED* (zona critica), confrontando i valori ottenuti tra 0° e 180° rispetto alla direzione del carico. Il secondo ha permesso di calcolare l'esatto valore di densità di energia media con il quale è stato possibile prevedere la vita a fatica del giunto saldato, modellando un volume di controllo di raggio e altezza 0.28 mm centrato all'apice di cricca, a cavallo della zona critica.

Sono stati analizzati vari rulli con spessori, testate e geometria del cordone diverse tra loro, ma il procedimento seguito per il calcolo della *SED* è stato analogo. Nel seguito viene spiegata in modo dettagliato l'analisi di un rullo con saldatura esterna, mentre per i rulli a saldatura interna vengono riportati i risultati e le considerazioni più significative.

#### 4.4.1 Creazione dei modelli

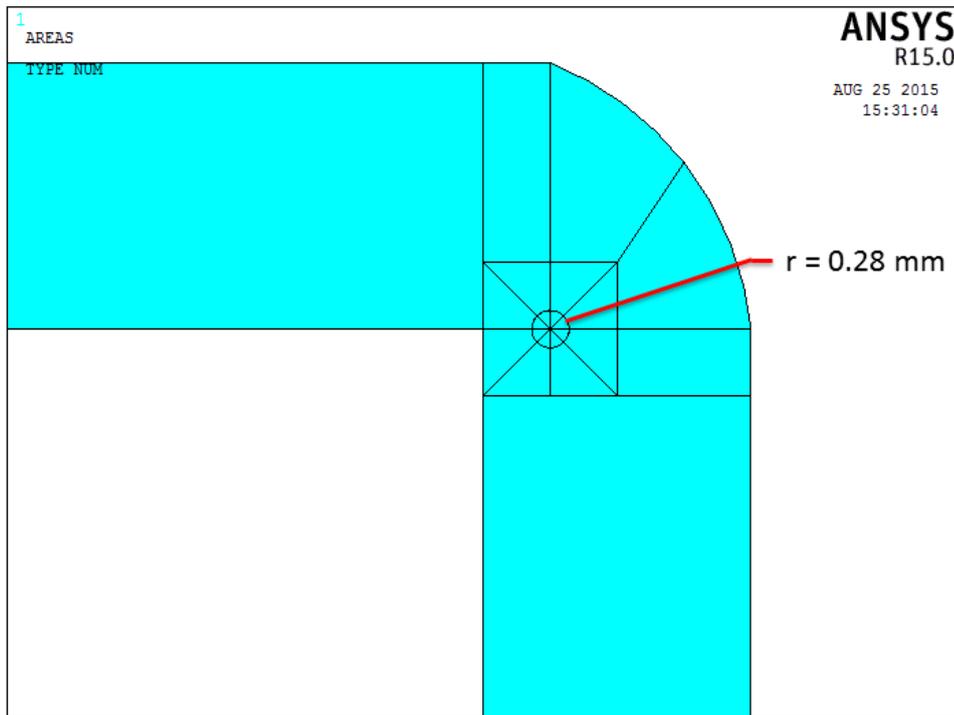
##### *Saldatura esterna*

Dai disegni CAD forniti dall'azienda, dopo la definizione dei *keypoints* nel piano, è stato creato il modello bidimensionale di testata, rullo e saldatura (Fig.4.18).

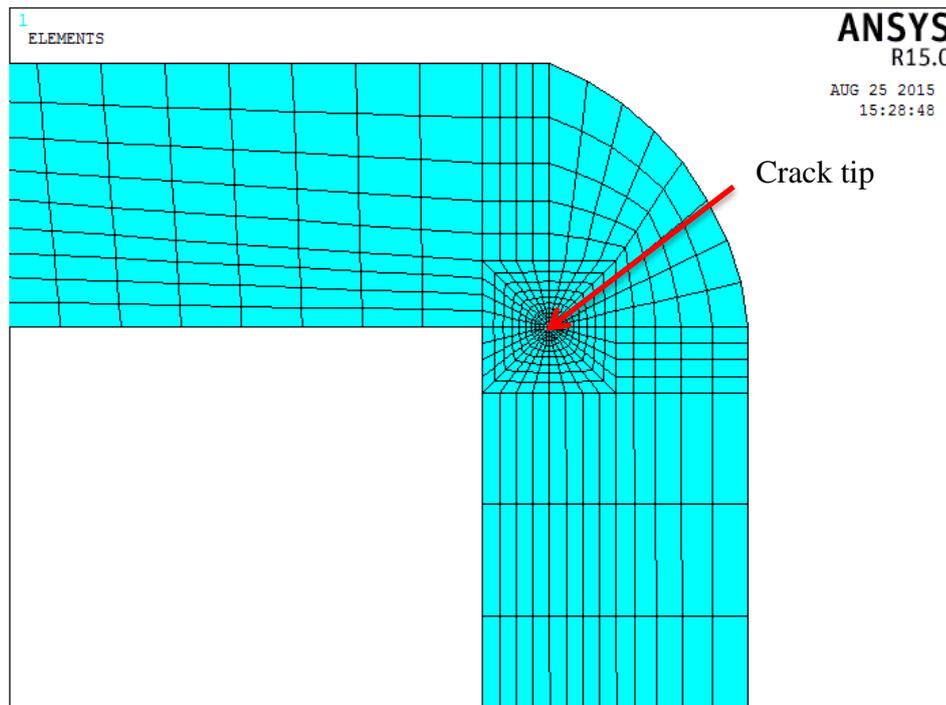


**Fig.4.18** Areas for the creation of the 3D model by the revolution about the axis

La Fig.4.19 rappresenta in dettaglio la zona circostante all'apice di cricca. Le aree centrate nell'apice della cricca sono state create per poter creare la mesh di Fig.4.20 e per ottenere il volume di controllo toroidale di raggio 0.28 mm.



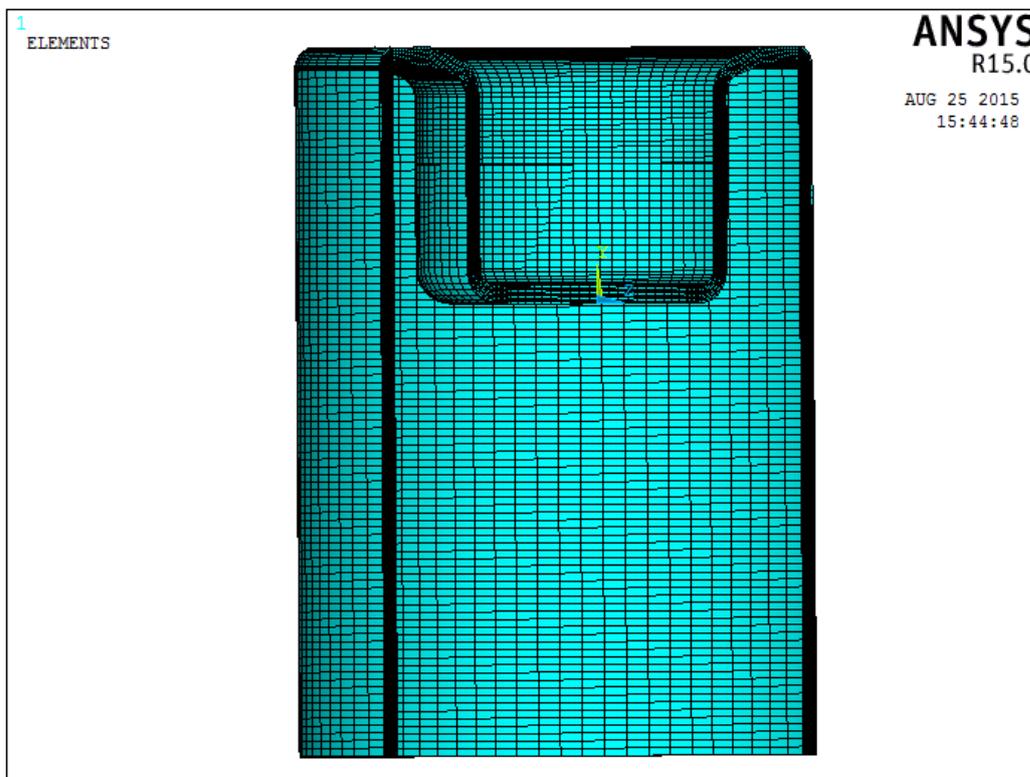
**Fig.4.19** Focus on the areas created around the crack tip, in order to build the control volume with radius 0.28 mm.



**Fig.4.20** Focus on the mesh created around the crack tip.

Tale mesh permette di svolgere analisi sufficientemente accurate nei dintorni dell'apice, dove le tensioni hanno andamento singolare. Non è necessario utilizzare mesh troppo fitte in quanto il metodo *SED* è *mesh-insensitive* in quanto il calcolo dell'energia è legato agli spostamenti nodali.

Dopo aver realizzato il modello piano si è eseguita la rivoluzione delle area attorno all'asse del rullo con un angolo di rivoluzione di  $180^\circ$ , *spating ratio* unitario e numero di divisioni pari a 36, una ogni  $5^\circ$  (Fig.4.21).



**Fig.4.21** General view of the mesh of the three-dimensional model

Dopo aver applicato le due simmetrie, una rispetto al piano contenente l'asse e l'altra rispetto al piano di mezzeria, è stata applicata la condizione di carico uniformemente distribuito sui nodi del tubo come in Fig.4.22.

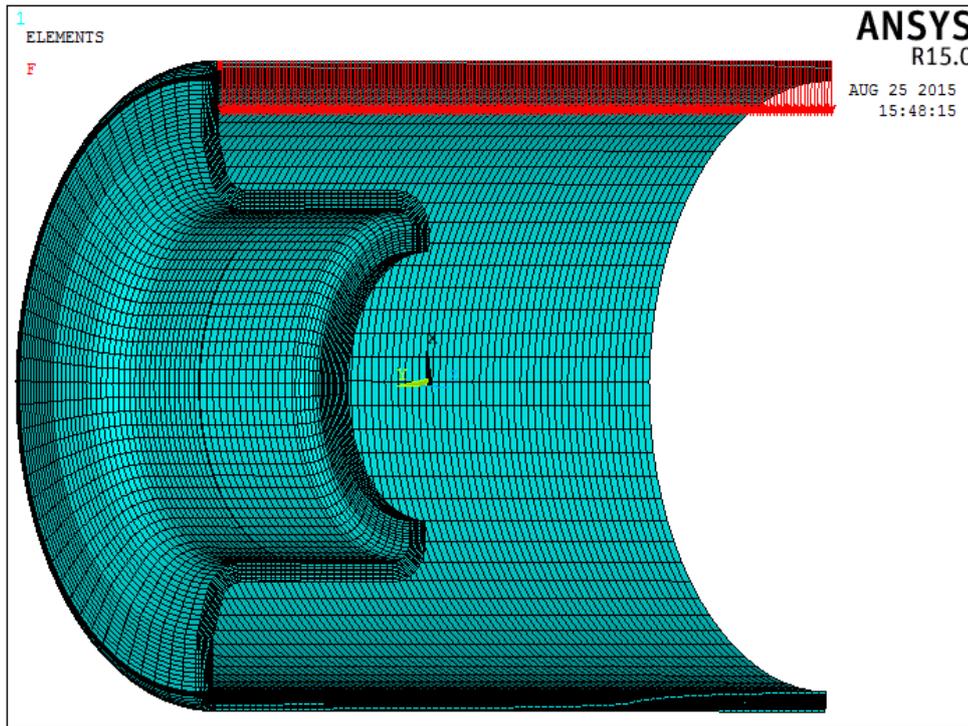
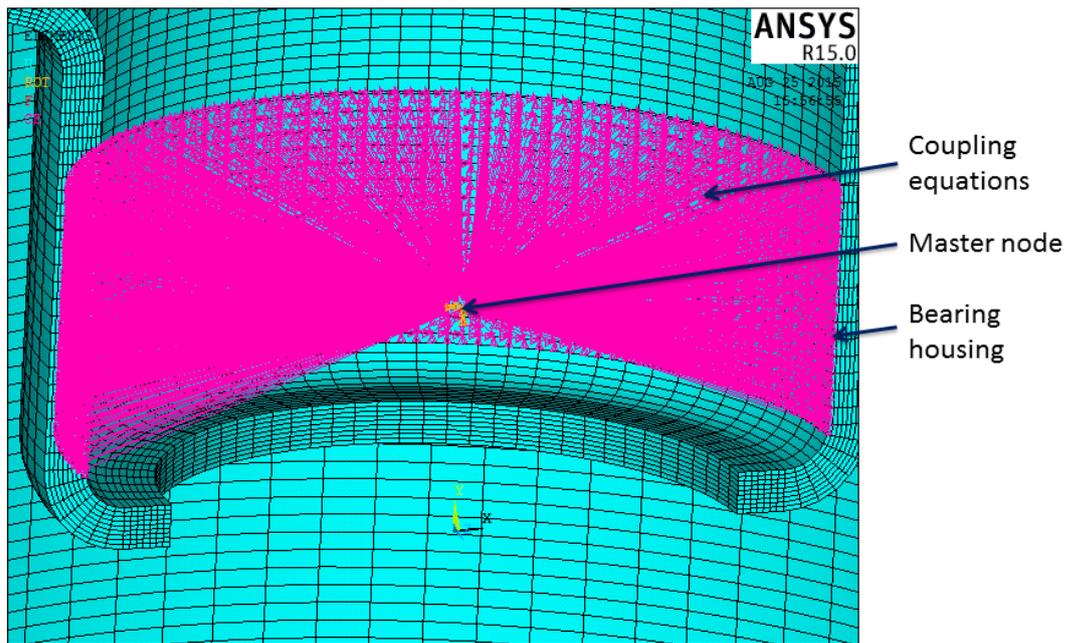


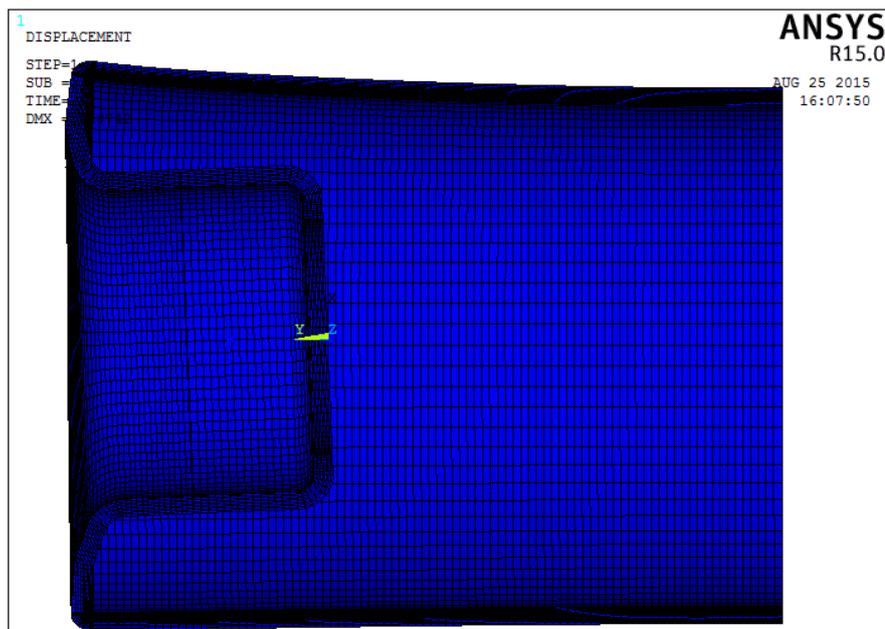
Fig.4.22 Application of concentrated loads on nodes in order to create a distributed load

Per simulare la presenza del cuscinetto nella sede interna alla testata si è seguita la procedura CERIG. Questa procedura consiste nel vincolare i nodi della superficie della sede, a contatto con l'anello esterno del cuscinetto, ad un *master node*, posizionato nel centro geometrico del cuscinetto, con elementi infinitamente rigidi (Fig.4.23). In questo modo, applicando delle condizioni di vincolo al nodo maestro, queste vengono applicate direttamente anche a ciascun nodo ad esso accoppiato. I vincoli applicati al *master node* sono i seguenti: spostamento lungo asse  $x$  e  $z$  nulli e rotazioni attorno all'asse  $x$  e  $y$  nulle. Applicando questi vincoli si è visto che sono ben simulate le condizioni di vincolo generate dalla presenza di un cuscinetto.



**Fig.4.23** Bearing house: focus on the constraints between the master node and the nodes on the surface of the bearing house (CERIG).

Dopo aver applicato al modello le condizioni al contorno e i carichi precedentemente descritti, si procede alla risoluzione del modello agli elementi finiti. La Fig.4.23 mostra la deformata in scala amplificata.



**Fig.4.24** Deformed shape of the roller under load condition

A seguito dell'applicazione del carico sul rullo, la mancata penetrazione nel processo di saldatura si manifesta come una "cricca comunque innescata" che si propaga a partire dal proprio apice (Fig.4.25). Mentre a  $0^\circ$  rispetto alla direzione di applicazione del carico le tensioni sono di trazione e la cricca tende ad aprirsi (Fig.4.25-a), in posizione diametralmente opposta, a  $180^\circ$ , le tensioni sono di compressione e la cricca è portata a chiudersi (Fig.4.25-b). Ciò significa che lungo il cordone lo stato di tensione varia grado per grado ed è necessario trovare qual è il punto più critico in termini di densità di energia di deformazione lineare elastica. A questo scopo è stato selezionato il volume toroidale che abbraccia l'apice di cricca (Fig.4.26-b).

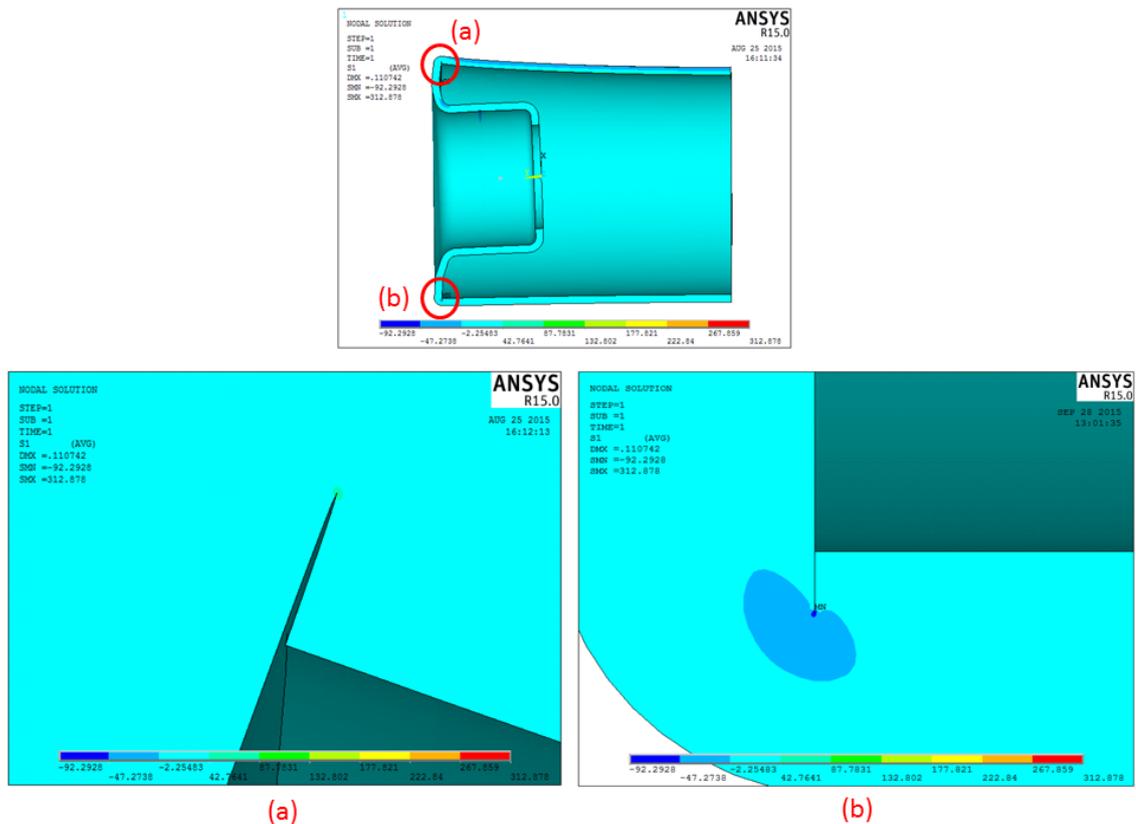


Fig.4.25 Focus on the deformed shape at the crack tip

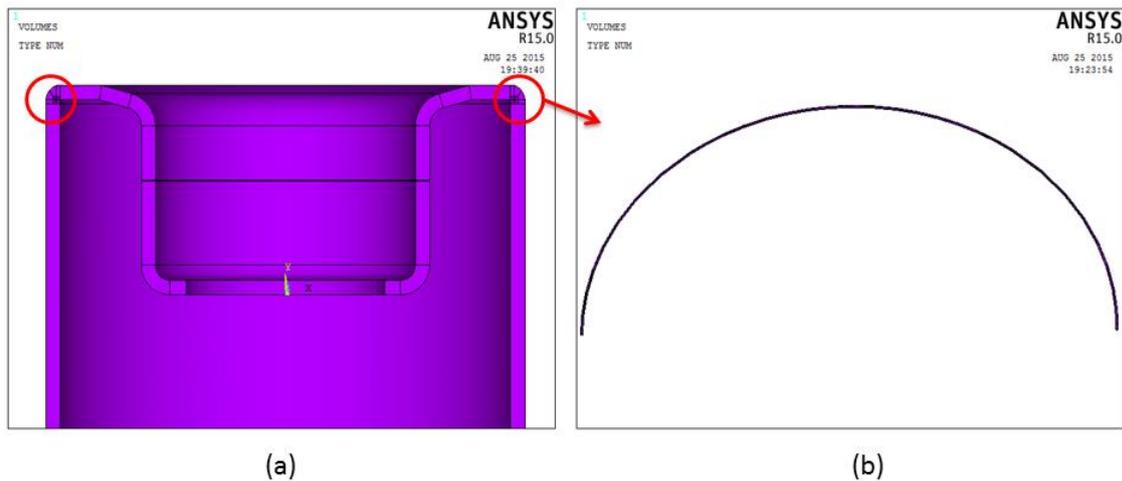


Fig.4.26 Focus on the toroidal volume embracing the crack tip

Per come è stata costruita la mesh nella terza dimensione, il toroide è suddiviso in 36 gruppi di elementi, che individuano 36 volumi di raggio 0.28 mm che abbracciano l'apice della cricca. Per ognuno di questi volumi è stato calcolato il valore della densità di energia di deformazione lineare elastica media. I risultati ottenuti sono riportati in Fig.4.27, dove in ascisse è riportata la coordinata angolare che identifica la posizione del volume rispetto alla direzione di applicazione del carico sul rullo.

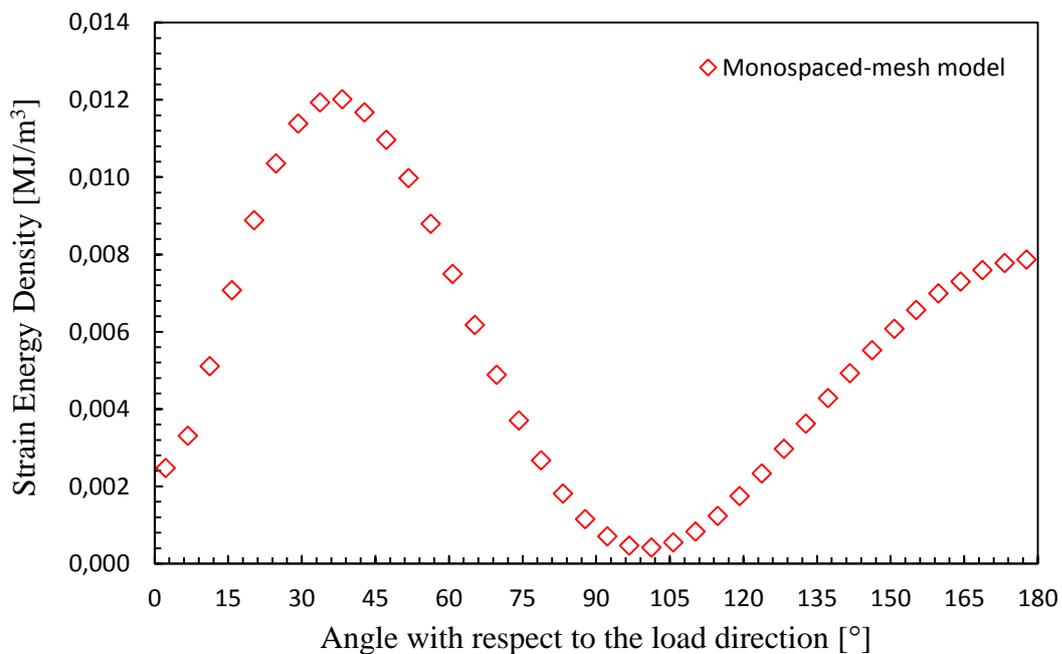


Fig.4.27 Strain energy density through the toroidal volume embracing the crack tip

Il grafico evidenzia la presenza di due massimi: un massimo relativo a  $180^\circ$  ed uno assoluto a circa  $38^\circ$ . Nella Fig.4.25 si evidenzia come le tensioni all'apice della cricca siano di compressione a  $180^\circ$  rispetto alla direzione di applicazione del carico, e di trazione a  $38^\circ$ . Il massimo assoluto perciò, si riferisce a tensioni di trazione, e di conseguenza questa è la posizione critica. Per valutare la vita a fatica della giunzione saldata con il metodo *SED* è necessario calcolare il valore della densità di energia di deformazione media in un volume di controllo di raggio e profondità 0.28 mm, in corrispondenza dei  $38^\circ$ .

A questo proposito è stato creato un secondo modello, con mesh non equispaziata nella terza dimensione, bensì caratterizzata da uno *spating ratio* calcolato *ad hoc* per avere un volume di profondità 0.28 mm in corrispondenza dei  $38^\circ$ . Per fare ciò è necessario spezzare la rivoluzione di  $180^\circ$  in due rivoluzioni minori, una di  $38^\circ$  e la seconda che va a completare i restanti  $180^\circ - 38^\circ = 142^\circ$ . Nella prima rivoluzione si è deciso di adottare un numero di divisioni pari a 8 ed è stato calcolato uno *spating ratio* con il quale si possono ottenere elementi di profondità pari a 0.14 mm in corrispondenza dei  $38^\circ$ , ovvero all'ultima suddivisione (si noti che 0.14 mm è la metà di 0.28 mm). A partire dai  $38^\circ$  raggiunti, si è eseguita una seconda rivoluzione delle aree con numero di divisioni pari a 32 e uno *spating ratio* tale per cui gli elementi appartenenti alla prima suddivisione (quelli in corrispondenza dell'angolo di  $38^\circ$ ) avessero una profondità di 0.14 mm. Quello che si è ottenuto infine, è un modello tridimensionale del rullo con elementi di profondità 0.14 mm a cavallo dei  $38^\circ$ , che, uniti tra loro, danno origine ad un volume di controllo di profondità 0.28 (Fig.4.28).

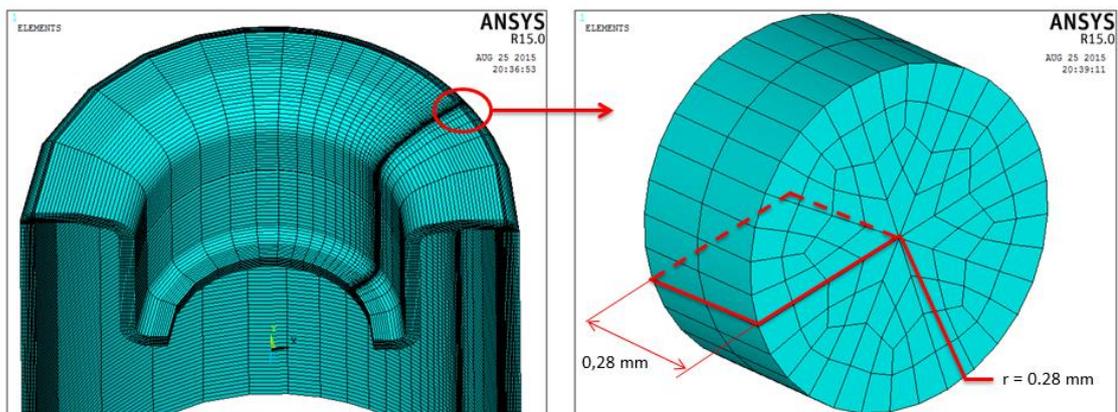


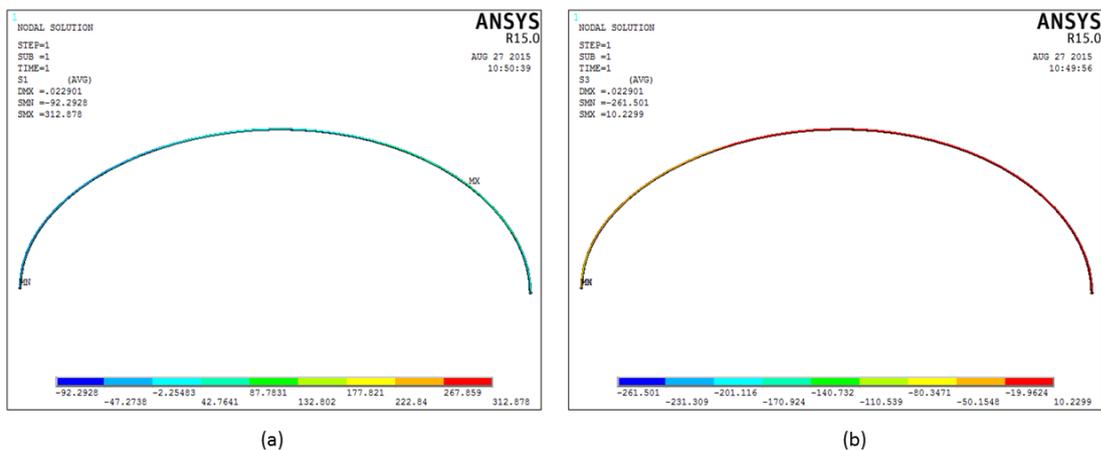
Fig.4.28 Focus on the critical control volume with radius and high equal to 0.28 mm

Dopo aver ottenuto la soluzione del modello, è stata calcolata la *SED* media nel volume di controllo critico di Fig.4.28. Questo valore corrisponde al  $W_{max}$  registrato nel volume di controllo durante un ciclo a fatica. Si noti che il grafico di Fig.4.12 lega il numero di cicli a rottura con il range di *SED* ( $\Delta\bar{W}$ ) a cui è sottoposto il volume di controllo. Per poter utilizzare il grafico di Fig.4.12 è necessario perciò calcolare il valore di  $\Delta\bar{W}$  a partire dal  $W_{max}$  ricavato dall'analisi numerica.

Innanzitutto, bisogna definire qual è il rapporto di ciclo (*R*) applicato al giunto. *R* è così definito in un ciclo di fatica:

$$R = \frac{\sigma_{min}}{\sigma_{max}}$$

dove  $\sigma_{min}$  e  $\sigma_{max}$  sono rispettivamente la tensione minima e massima registrata nel volume di controllo durante un ciclo a fatica. Nei problemi reali, la definizione corretta di *R* non è semplice. In Fig.4.29 sono mostrati rispettivamente il *contour plot* della 1<sup>a</sup> e della 3<sup>a</sup> tensione principale nel toroide di raggio 0.28 mm che abbraccia l'apice di cricca. Il valore massimo di tensione è circa 312 MPa, mentre quello minimo di compressione è di circa 261 MPa, perciò in questo caso vale  $R \approx -1$ .



**Fig.4.29** Contour plot of the 1st principal stress (a) and of the 3rd principal stress (b) in the toroidal volume embracing the crack tip.

Tuttavia, i rulli studiati sono *as welded*, ovvero non hanno subito un processo di rilassamento delle tensioni residue causate al processo di saldatura. La normativa suggerisce che in tali condizioni, in via approssimativa e in vantaggio di sicurezza, si

consideri il rapporto di ciclo  $R = 0$  invece di  $R = -1$ . In presenza delle tensioni residue di trazione infatti, il livello medio di tensione viene alzato e il rapporto di ciclo da -1 diventa circa pari a 0. La Fig.4.31 rappresenta schematicamente quanto spiegato. I valori delle tensioni non si riferiscono a quelli di questo modello ma sono solo indicativi.

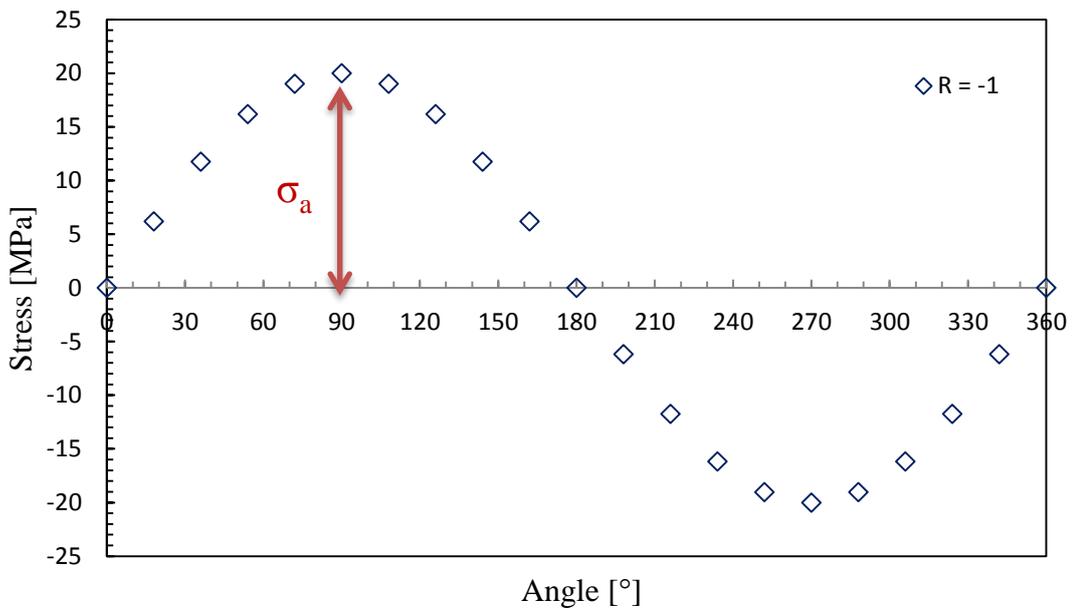


Fig.4.30 Example of a hypothetical load distribution along the toroidal volume.  $R = -1$ .

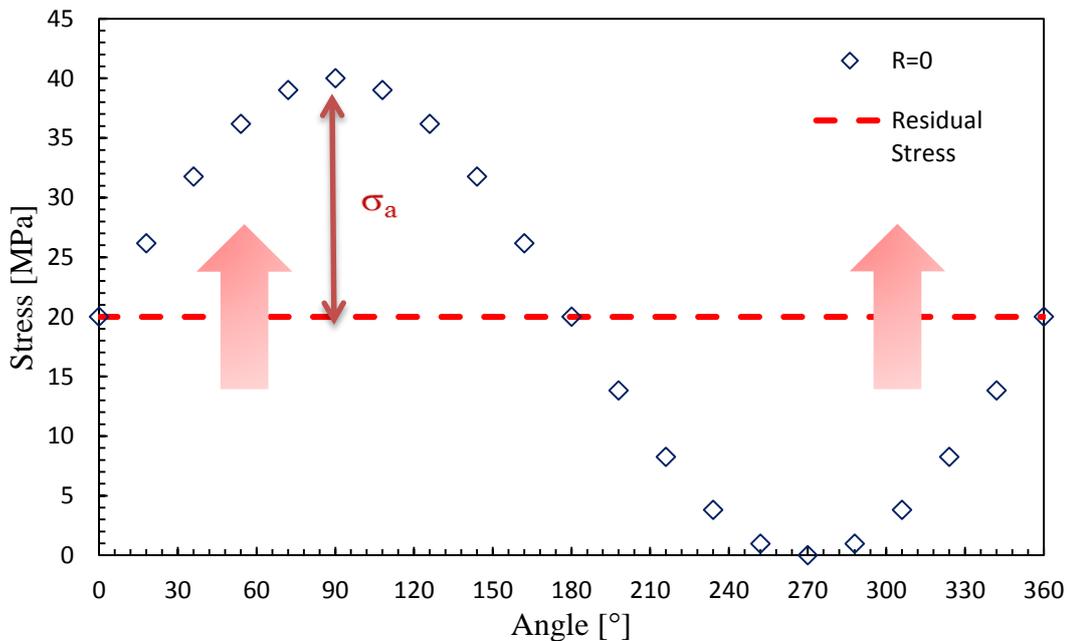


Fig.4.31 Example: if you add a residual stress (equal to the previous  $\sigma_a$ ) to the load distribution of Fig.4.30, you obtain a load ratio  $R = 0$

Nel modello FEM si ha  $R = -1$  e vale:

$$\Delta\sigma^{R=-1} = 2 \times \sigma_{max}^{R=-1}$$

Il valore di  $SED$  ottenuto dal modello FEM è legato al valore massimo di tensione di trazione registrato. Dato che la densità di energia di deformazione è proporzionale al quadrato della tensione, segue la seguente relazione:

$$\Delta\bar{W}^{R=-1} = 4 \times \bar{W}_{max}^{R=-1}.$$

Aggiungendo l'ipotesi *as welded*, da  $R = -1$  si passa a  $R = 0$  e si ha che:

$$\Delta\sigma^{R=0} = \Delta\sigma^{R=-1}$$

Infine vale la seguente relazione:

$$\Delta\bar{W}^{R=0} = 4 \times \bar{W}_{max}^{R=-1}$$

Bisogna però tenere conto anche del cosiddetto coefficiente  $C_w$  [35]. Per definire tale coefficiente prendiamo in considerazione il caso di una sollecitazione a fatica in cui il rapporto di ciclo sia nullo ( $R=0$ ). Il range di energia in un ciclo completo a fatica è rappresentato in Fig.4.32.

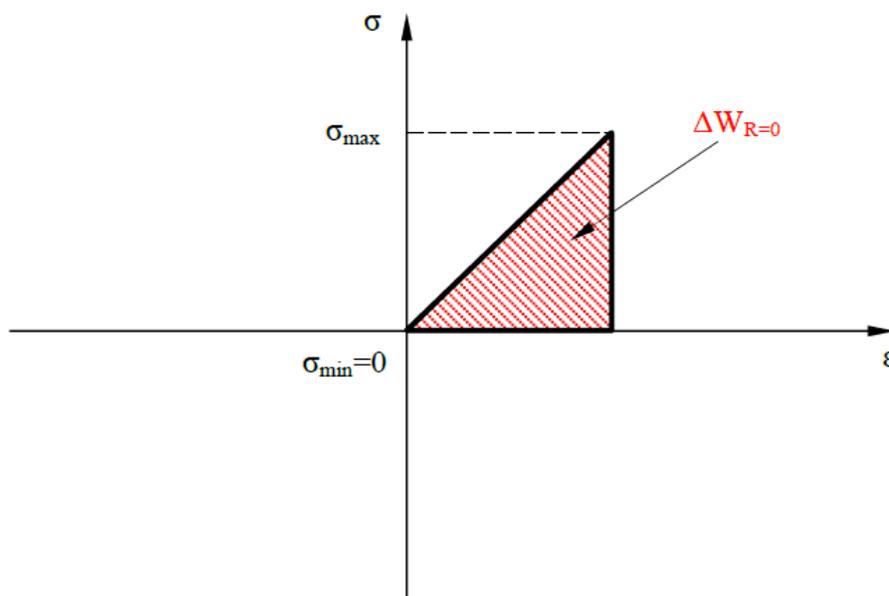


Fig.4.32 Range of energy with a load ratio equal to zero ( $R = 0$ )

In accordo con la Fig.4.32 vale la seguente relazione:

$$\Delta W_{R=0} = \frac{\Delta\sigma^2}{2E} = \frac{(\sigma_{max} - \sigma_{min})^2}{2E}$$

Se ora prendiamo in considerazione il caso in cui il rapporto di ciclo è  $< 0$ , il range di energia è rappresentato in Fig.4.33.

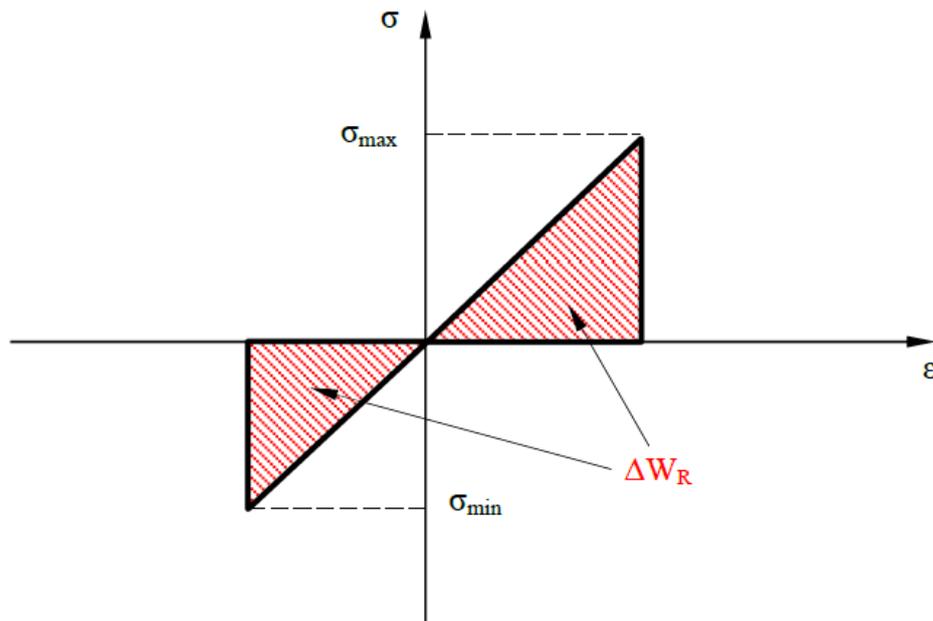


Fig.4.33 Range of energy with a load ratio equal to zero ( $R < 0$ )

In accordo con la Fig.4.33 vale la seguente relazione:

$$\Delta W_R = \frac{\sigma_{max}^2}{2E} + \frac{\sigma_{min}^2}{2E} = \frac{\sigma_{max}^2 + \sigma_{min}^2}{2E} = \frac{\sigma_{max}^2(1 + R^2)}{2E}$$

dato che:

$$R = \frac{\sigma_{min}}{\sigma_{max}}$$

segue:

$$\sigma_{min} = R \cdot \sigma_{max}$$

Sostituendo l'espressione di  $\sigma_{min}$  in quella di  $\Delta W_{R=0}$  si ottiene:

$$\Delta W_{R=0,equivalente} = \frac{\Delta\sigma^2}{2E} = \frac{(\sigma_{max} - \sigma_{min})^2}{2E} = \frac{(\sigma_{max} - R \cdot \sigma_{max})^2}{2E} = \frac{\sigma_{max}^2 \cdot (1 - R)^2}{2E}$$

Confrontando ora le espressioni del range di energia nel caso  $R=0$  e nel caso generico  $R < 0$  si ottiene l'equazione del fattore  $C_W$ :

$$C_W = \frac{\Delta W_R}{\Delta W_{R=0,equivalente}} = \frac{\frac{\sigma_{max}^2 \cdot (1 + R^2)}{2E}}{\frac{\sigma_{max}^2 \cdot (1 - R)^2}{2E}} = \frac{1 + R^2}{(1 - R)^2}$$

valida per  $R \leq 0$ .

In Fig.4. 34 è rappresentato l'andamento del  $C_W$  al variare di  $R$  compreso tra -1 e 1 (valori di maggior interesse applicativo) [35].

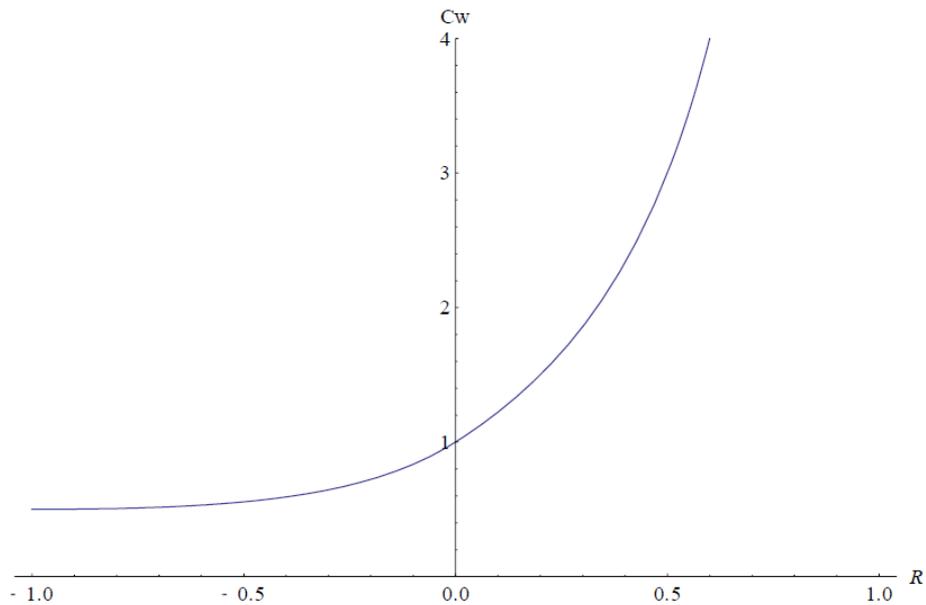


Fig.4. 34  $C_W$  for  $-1 < R < 1$

Il toroide lungo il quale abbiamo calcolato la  $SED$  è soggetto ad un rapporto di ciclo  $R=0$ . Risulta quindi  $C_W = 1$  e rimane valida l'equazione che lega il range di energia al valore di  $SED$  calcolato dal modello FEM:

$$\Delta \bar{W}^{R=0} = 4 \times \bar{W}_{max}^{R=-1}$$

I valori  $\Delta\bar{W}$  ottenuti dai modelli dei rulli con saldatura esterna sono riassunti nella seguente tabella 4.1:

Modelli	Diametro Testata [mm]	Lunghezza Rullo [mm]	Carico di Prova [N]	$\bar{W}_{max}$ Trazione [MJ/m <sup>3</sup> ]	Angolo [°]	$\Delta\bar{W}$ [MJ/m <sup>3</sup> ]
#1	153	530	4620	$6.82 \cdot 10^{-3}$	30	$2.73 \cdot 10^{-2}$
#2	127	315	6270	$1.2 \cdot 10^{-2}$	38	$4,8 \cdot 10^{-2}$
#3	153	530	6660	$1,21 \cdot 10^{-2}$	34	$4,84 \cdot 10^{-2}$
#4	153	530	4150	$7.82 \cdot 10^{-3}$	27	$3.128 \cdot 10^{-2}$
#5	127	600	4660	$5.8 \cdot 10^{-3}$	32	$2.32 \cdot 10^{-2}$
#6	153	530	5366	$9.675 \cdot 10^{-3}$	32	$3.87 \cdot 10^{-2}$

Tab. 4.1 Results from the finite element analysis of the rollers with external welding

Per verificare che una eventuale rottura a fatica del rullo non si possa manifestare anche a partire da altre zone del tubo o della testata, è stato analizzato l'andamento delle tensioni su questi due componenti utilizzando dei *contour plots* (Fig.4.35 e Fig.4.36).

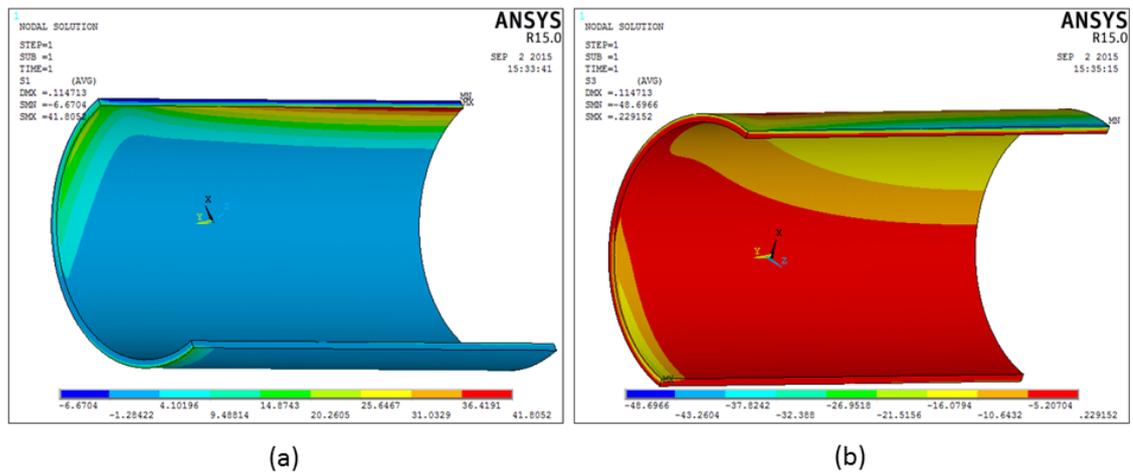
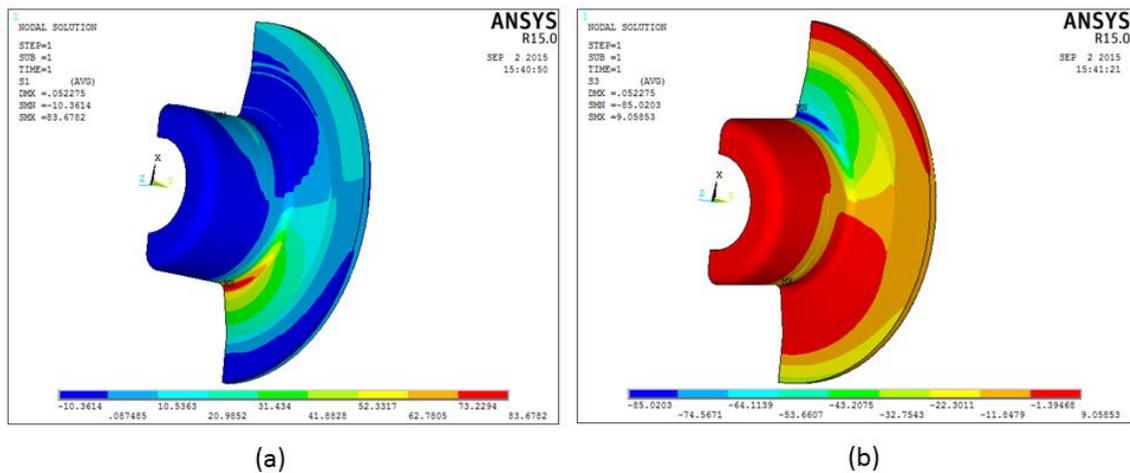


Fig.4.35 Tube: contour plot of the 1<sup>st</sup> principal stress (a) and of the 3<sup>rd</sup> principal stress (b).



**Fig.4.36** Head: contour plot of the 1<sup>st</sup> principal stress (a) and of the 3<sup>rd</sup> principal stress (b).

La sezione più critica per il tubo è quella di mezzeria, mentre per la testata è la zona interna con il raggio di curvatura. Il rapporto di ciclo a cui è sottoposto il tubo nella sua sezione più critica è circa pari a 0, mentre per la testata  $R \approx -1$ . In entrambi i casi l'ampiezza di tensione a cui sono sottoposti i due componenti è nettamente inferiore al limite di fatica dell'acciaio. Si può concludere che una eventuale rottura del rullo non si manifesterà mai a partire da queste due zone, bensì la cricca propagherà a partire dalla radice del cordone di saldatura.

### *Saldatura interna*

La creazione e l'analisi dei modelli dei rulli con saldatura interna segue procedure analoghe a quelle descritte nel precedente paragrafo. Il cordone di saldatura è stata schematizzata in Fig.4.15-b, nella quale è possibile notare due piedi di saldatura (*V-notch*) e una radice (cricca). A differenza del caso precedente, è necessario controllare in primo luogo quale di queste tre zone sia la più critica in termini di *SED*. A questo proposito la mesh è stata creata in modo tale da infittirsi avvicinandosi agli apici di intaglio e cricca individuati, e affinché vi fosse un volume di controllo di raggio 0.28 mm che li abbracci. La mesh del modello bidimensionale è riportata in Fig.4.37

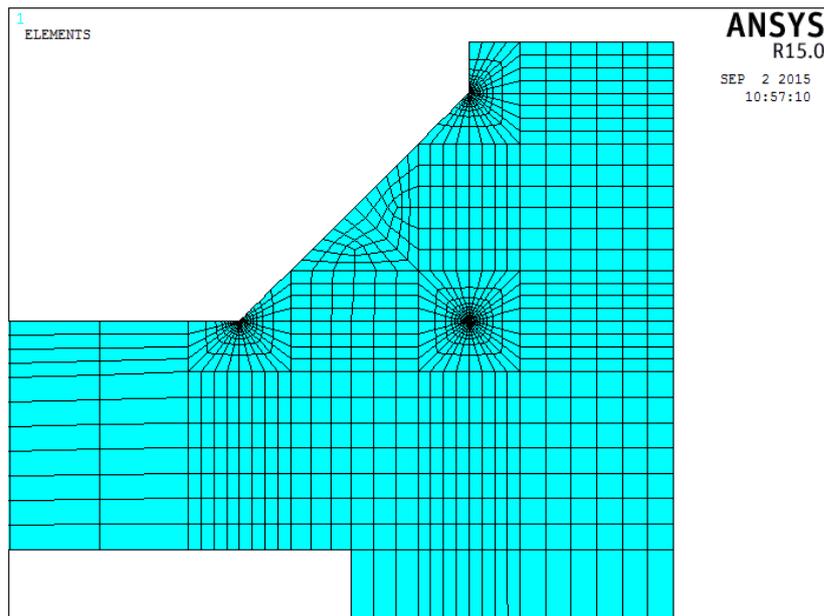


Fig.4.37 Bidimensional model: view of the mesh

I risultati ottenuti dall'analisi del modello tridimensionale, ottenuto per rivoluzione del modello 2D attorno all'asse del rullo (Fig.4.38), hanno dimostrato che la zona del cordone di saldatura più critica, in termini di  $SED$ , è la radice. Per alleggerire le analisi, i modelli sono stati rifatti infittendo la mesh solamente alla radice del cordone.

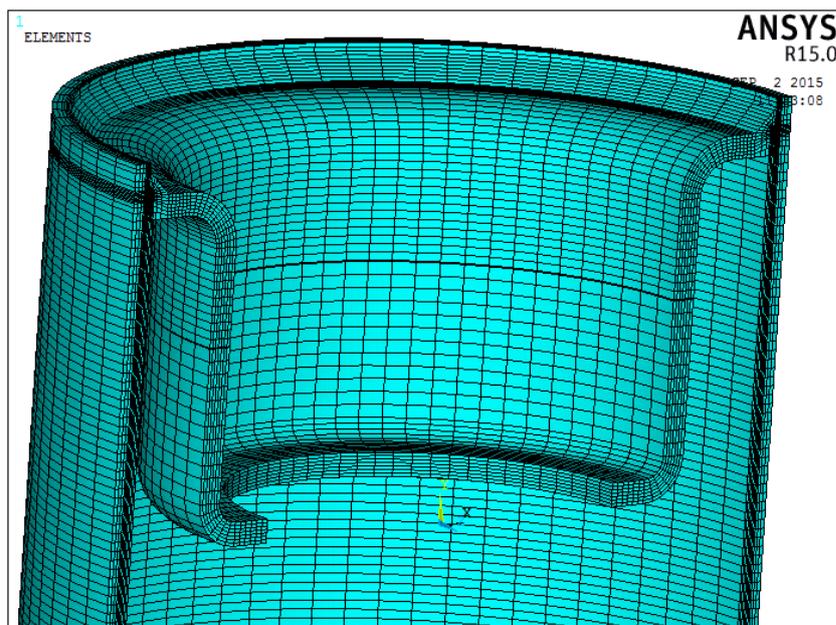


Fig.4.38 General mesh view of the three-dimensional model.

Nei rulli a saldatura interna, tra la testata e il tubo vi è un gioco di 0.2 mm per facilitare l'inserimento dell'una nell'altro. Si è voluto vedere se la presenza di questo gioco potesse in qualche modo alterare i risultati di energia di deformazione all'apice di cricca. Oltre a svolgere le analisi senza modellare il gioco (Fig.4.39), si è poi proceduto considerandolo (Fig.4.40).

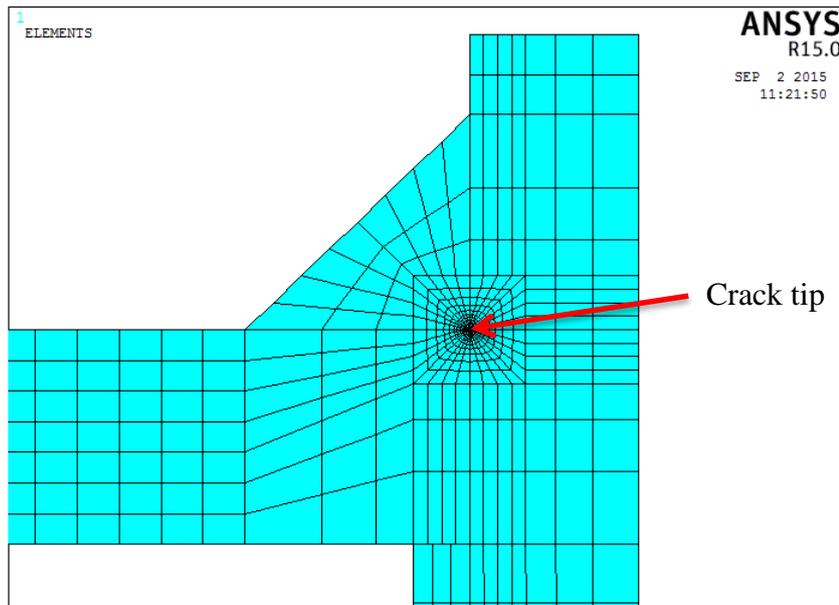


Fig.4.39 Bi-dimensional model: view of the 2D mesh without clearance.

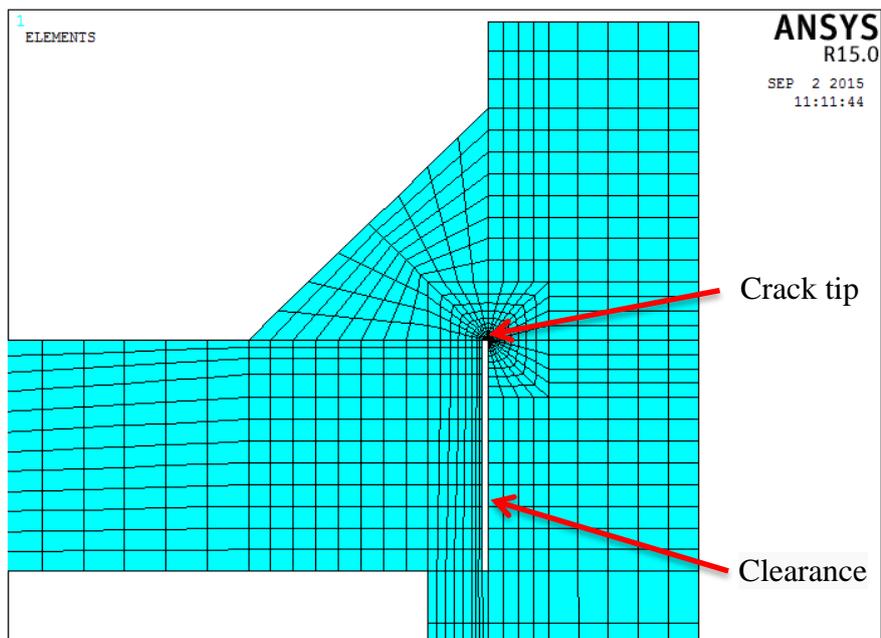
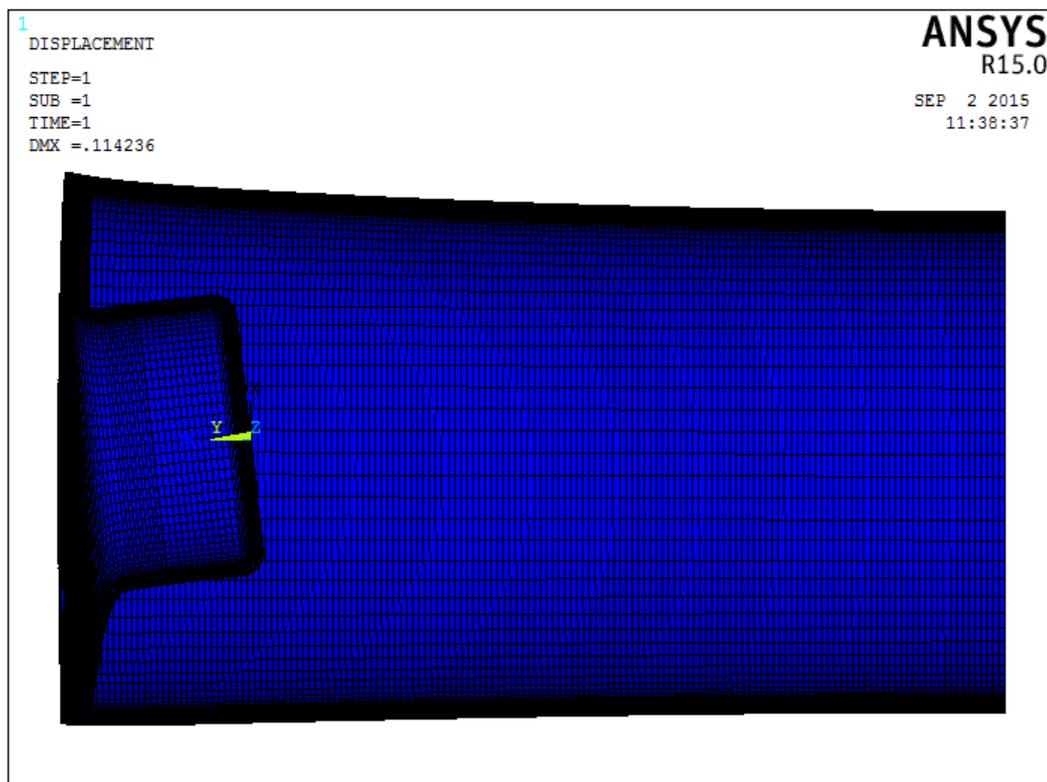


Fig.4.40 Bidimensional model: view of the 2D mesh with clearance.

---

I risultati ottenuti dal modello con gioco si discostano di meno del 10% da quelli ottenuti senza gioco. Per semplicità, si è deciso di non includere più la presenza del gioco nei modelli.

La modalità di carico, la simulazione della presenza dei cuscinetti e le simmetrie, sono state applicate in modo analogo a quanto fatto per i rulli a saldatura esterna. La deformata ottenuta in ogni modello è analoga a quella di Fig.4.41.



**Fig.4.41** Tridimensional model: deformed shape

Eseguendo uno zoom alla radice di saldatura si può notare l'apertura o la chiusura della cricca, rispettivamente a  $0^\circ$  e  $180^\circ$  rispetto alla direzione di applicazione del carico (Fig.4.42).

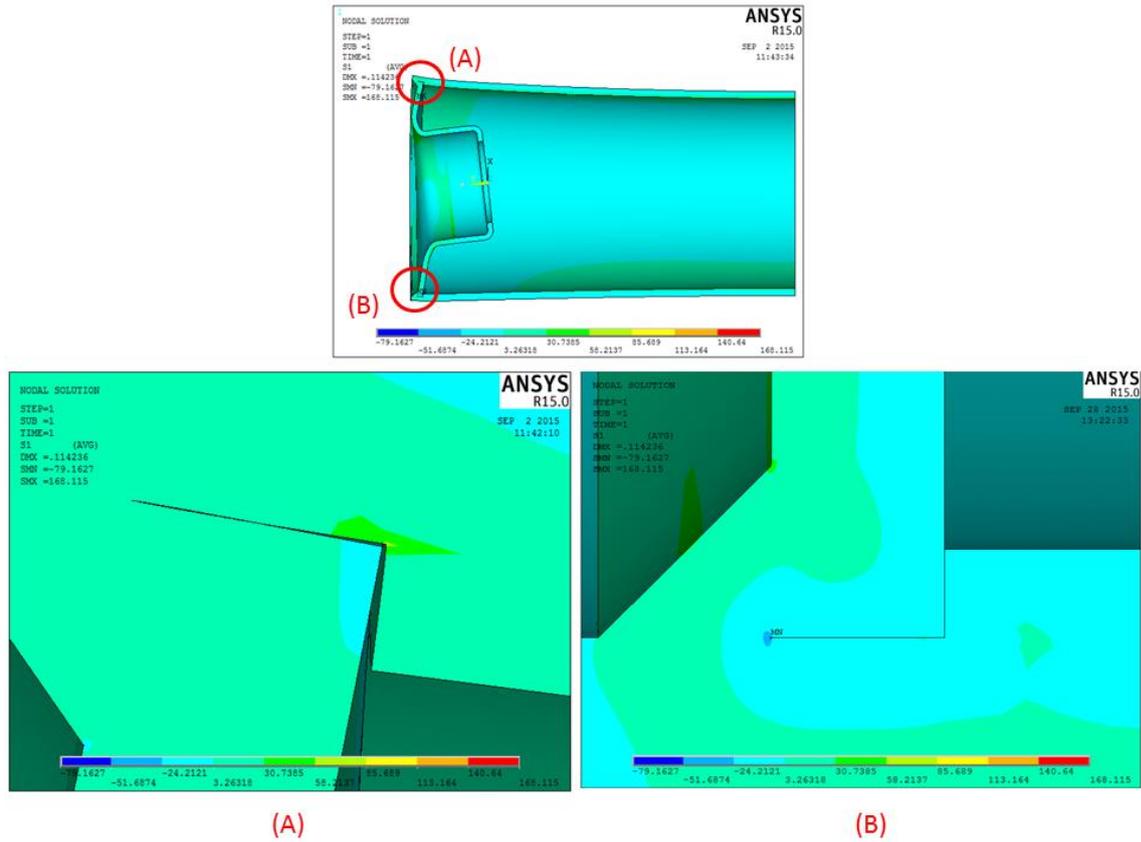


Fig.4.42 Deformed shape with zoomed view on crack at 0° and 180° with respect to the load direction.

La zona più critica nel volume toroidale che abbraccia l'apice di cricca è stata ricavata come per i rulli a saldatura esterna, valutando l'andamento della SED lungo il toroide (Fig.4.43).

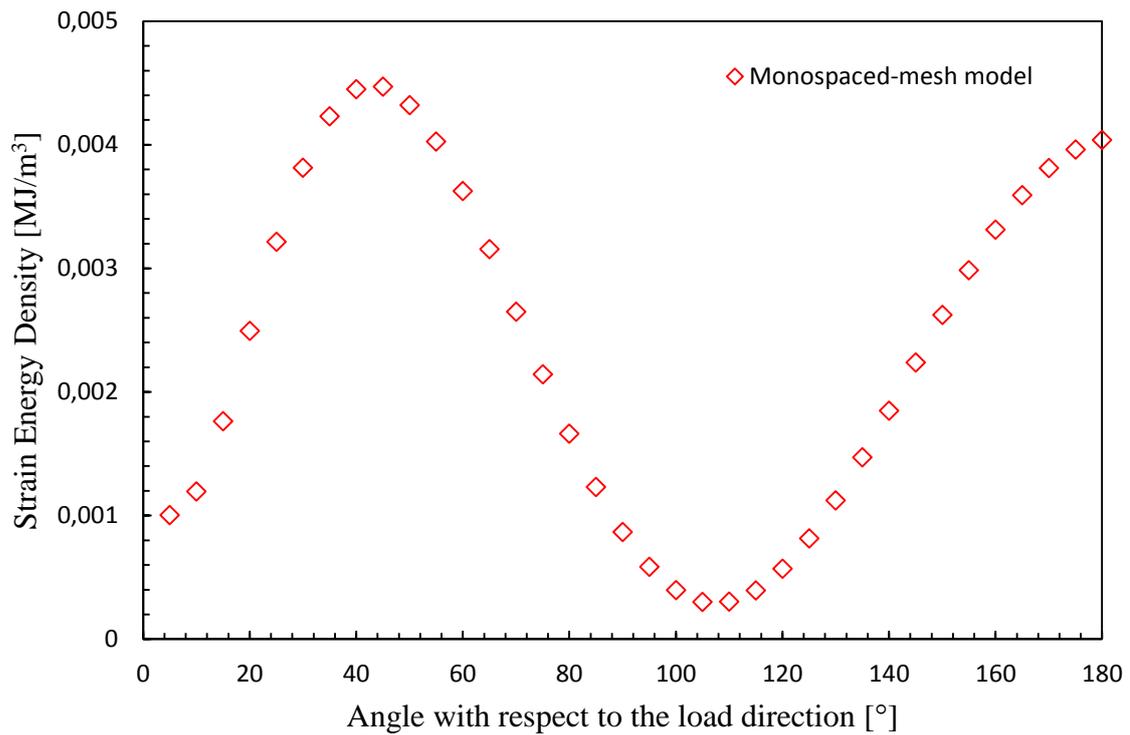


Fig.4.43 SED distribution through the toroidal volume embracing the crack tip.

In ogni modello si è riscontrata la presenza di due massimi, uno assoluto attorno ai 40° ed uno relativo a 180°. Come si è visto anche dalla Fig.4.42, il massimo assoluto si riferisce a tensioni di trazione, mentre quello relativo a tensioni di compressione. Si è perciò proceduto al calcolo della *SED* in corrispondenza dei 40°.

Come con i rulli a saldatura esterna, per ciascun modello con mesh equispaziata ne è stato creato un altro con mesh che si infittisce avvicinandosi alla zona critica del toroide (Fig.4.44), con *spating ratio* calcolato *ad hoc* per ottenere il volume di controllo di raggio e profondità 0.28 mm a cavallo dell'angolo critico (Fig.4.45).

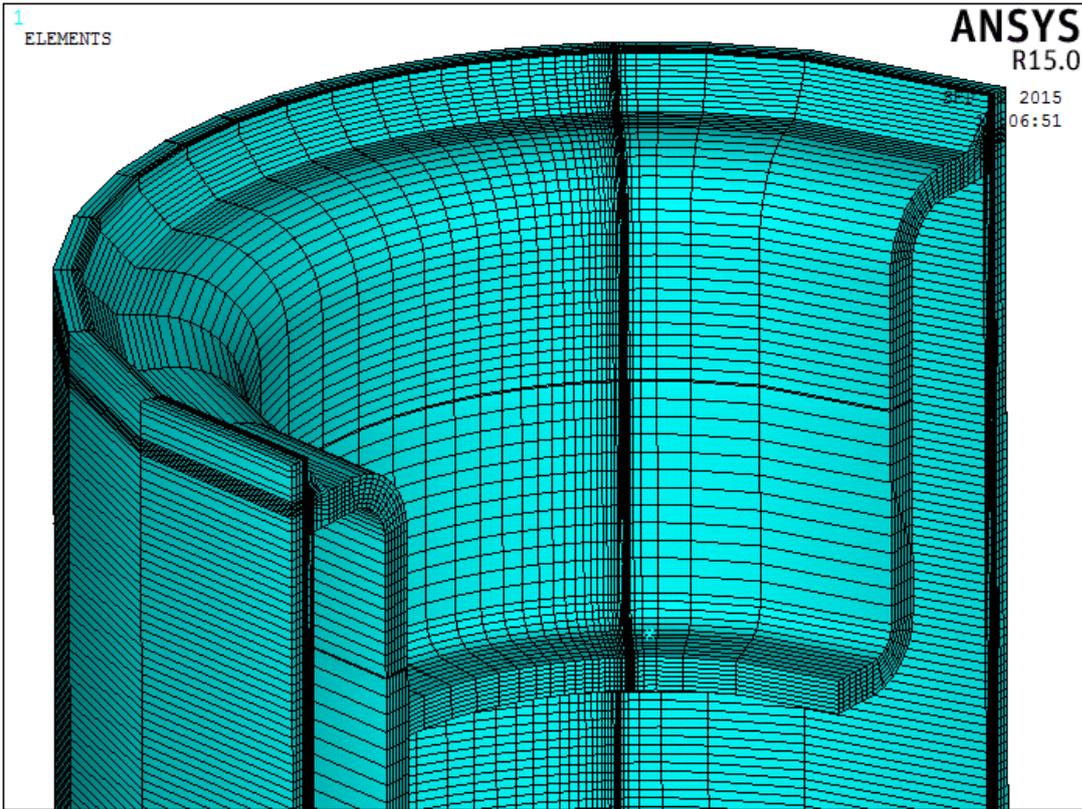


Fig.4.44 Tridimensional model: view of the mesh in the second models. Creation of the control volume for the calculation of the critical SED.

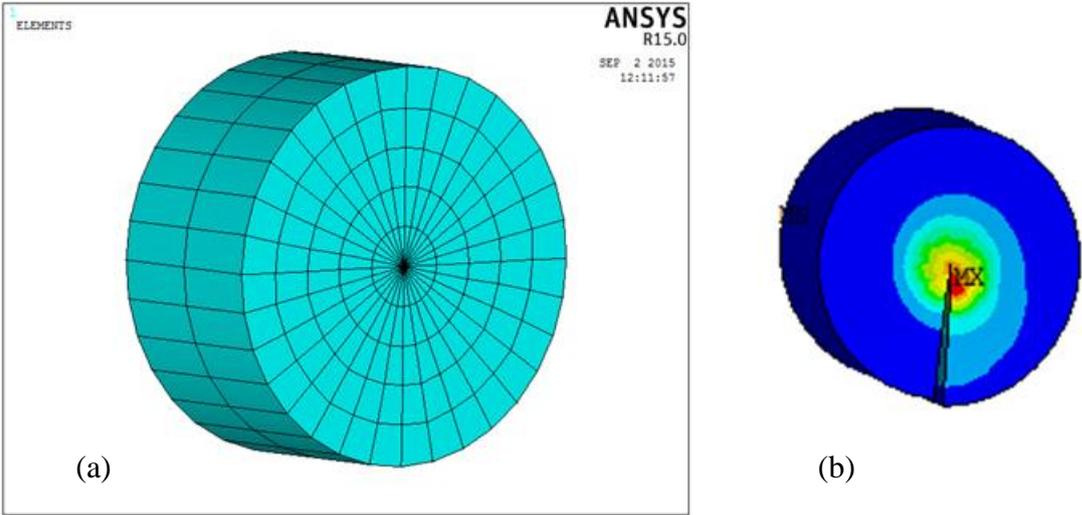
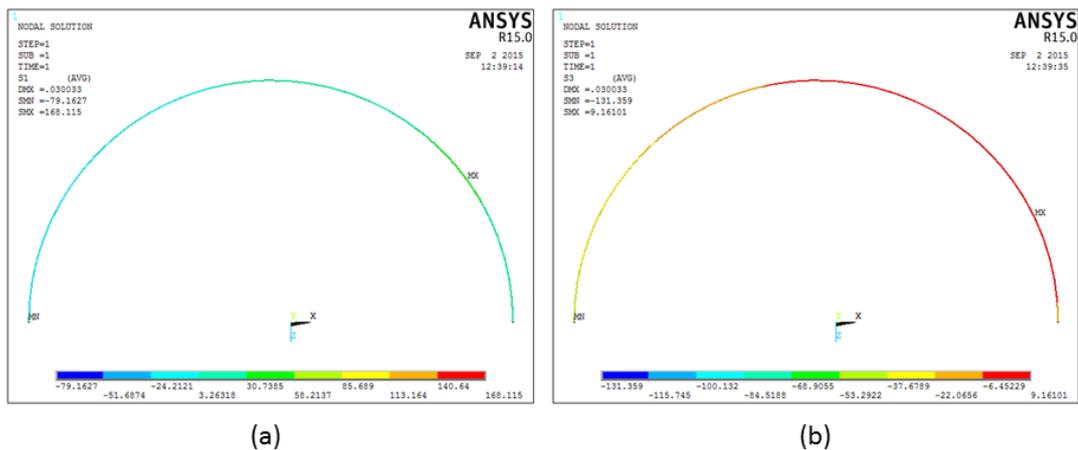


Fig.4.45 Control volume with radius and high equal to 0.28 mm: (a) mesh view; (b) SED distribution in the volume, deformed shape.



**Fig.4.46** Contour plot of the 1<sup>st</sup> principal stress (a) and of the 3<sup>rd</sup> principal stress (b) in the toroidal volume embracing the crack tip.

Dalla Fig.4.46 si evince che il rapporto di ciclo a cui è sottoposto il volume toroidale che abbraccia l'apice di cricca è circa -1. Anche in questo caso i rulli sono *as welded*, perciò valgono le stesse considerazioni fatte per il modelli dei rulli con saldatura esterna. Per ottenere il range di densità di energia di deformazione applicato al toroide bisogna moltiplicare per un fattore 4 la  $SED$  critica ( $\bar{W}_{max}$ ) ottenuta dai modelli *FEM*.

In tabella 4.2 sono raccolti i risultati ottenuti dall'analisi dei modelli con saldatura interna.

Modelli	Diametro Testata [mm]	Lunghezza Rullo [mm]	Carico di Prova [N]	$\bar{W}_{max}$ Trazione [MJ/m <sup>3</sup> ]	Angolo [°]	$\Delta\bar{W}$ [MJ/m <sup>3</sup> ]
#1	133	465	7260	$7.083 \cdot 10^{-3}$	35	$2.833 \cdot 10^{-2}$
#2	133	670	7260	$4.11 \cdot 10^{-3}$	40	$1.644 \cdot 10^{-2}$
#3	159	465	7710	$6.882 \cdot 10^{-3}$	40	$2.752 \cdot 10^{-2}$
#4	159	670	7710	$4.54 \cdot 10^{-3}$	40	$1.816 \cdot 10^{-2}$
#5	194	670	8230	$4.496 \cdot 10^{-3}$	45	$1.798 \cdot 10^{-2}$
#6	194	900	8230	$3.584 \cdot 10^{-3}$	40	$1.433 \cdot 10^{-2}$

**Tab. 4.2** Results from the finite element analysis of the rollers with internal welding

Come era stato fatto per i rulli a saldatura interna, si è verificato che, sotto un carico pari a quello di targa applicato, il cedimento a fatica non avvenga a partire dalla radice del cordone di saldatura, bensì da altre parti del rullo. A tal proposito si è analizzato l'andamento delle tensioni sul tubo e sulla testata (Fig.4.47 e Fig.4.48). Viene riportato solo l'esempio del rullo #5 ma anche per gli altri rulli valgono considerazioni analoghe.

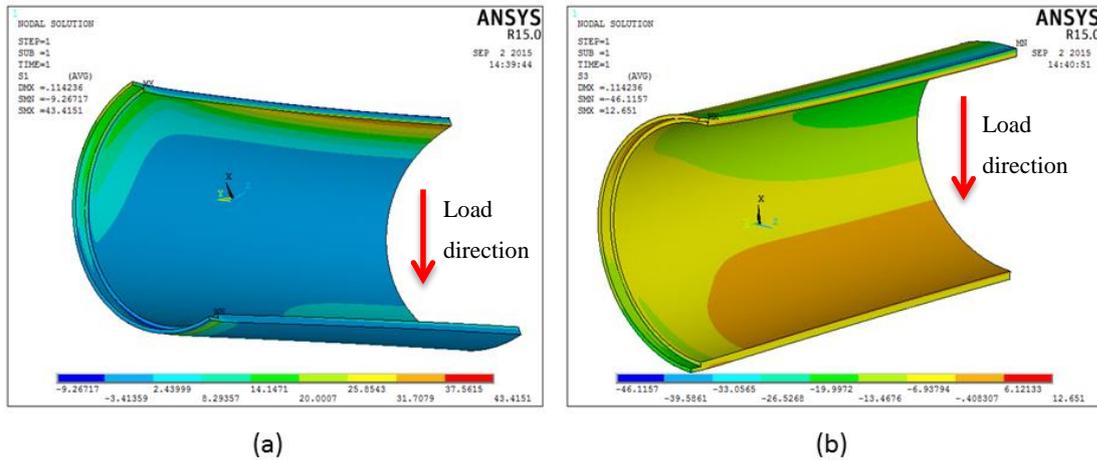


Fig.4.47 Tube: Contour plot of the 1<sup>st</sup> principal tension (a) and the 3<sup>rd</sup> principal tension.

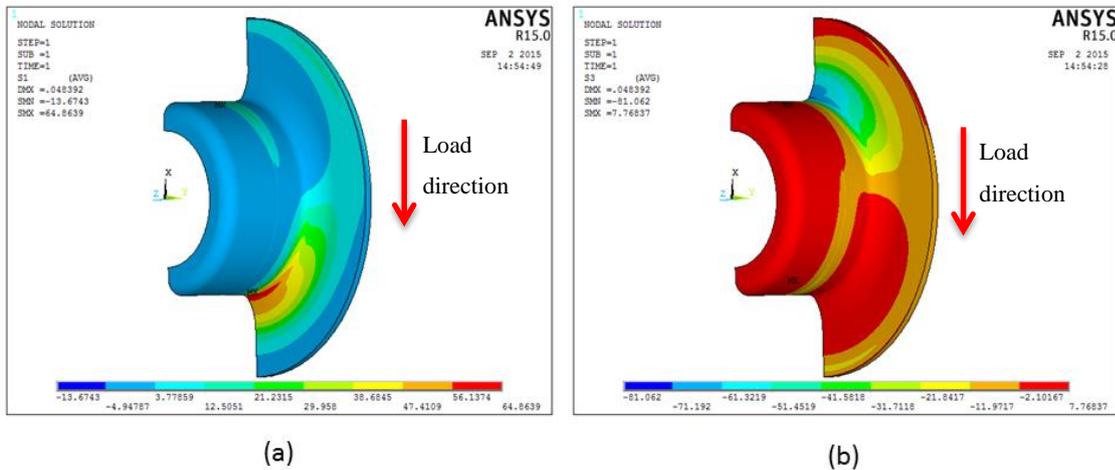


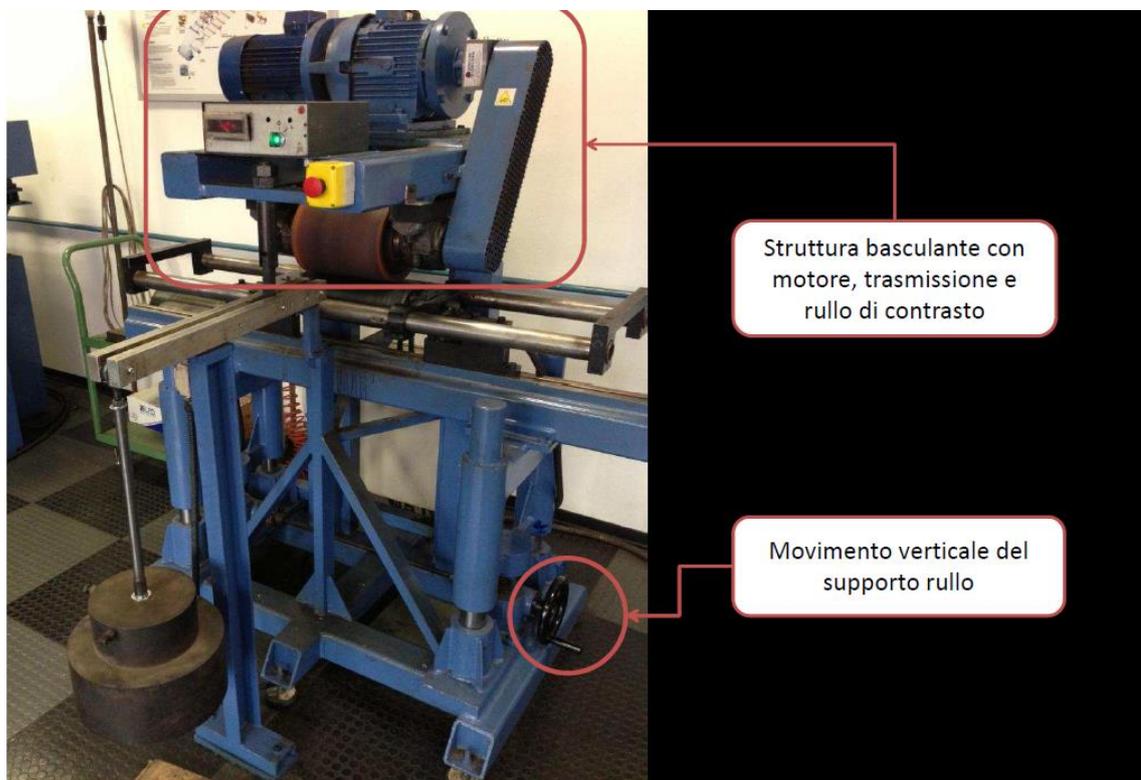
Fig.4.48 Head: Contour plot of the 1<sup>st</sup> principal stress (a) and of the 3<sup>rd</sup> principal stress (b).

La sezione più critica per il tubo è quella di mezzeria mentre per la testata è la zona interna come evidenziato in Fig.4.48. Il rapporto di ciclo a cui è sottoposto il tubo nella sua sezione più critica è circa pari a 0, mentre per la testata  $R \approx -1$ . In entrambi i casi l'ampiezza di tensione a cui sono sottoposti è nettamente inferiore al limite di fatica dell'acciaio. Si può concludere che una eventuale rottura del rullo non si manifesterà a

partire da queste due zone, bensì la cricca propagherà a partire dalla radice del cordone di saldatura.

#### 4.4.2 *Prove sperimentali sui rulli*

Nel laboratorio dell'azienda *Rulli Rulmeca S.p.A.* sono state eseguite molte prove sperimentali. Queste prove prevedevano l'applicazione di un carico distribuito sul rullo che ruotava con velocità angolare nota. In Fig.4.49, Fig.4.50 e Fig.4.51 è rappresentata la macchina di prova.



**Fig.4.49** Macchina di prova – figura 1

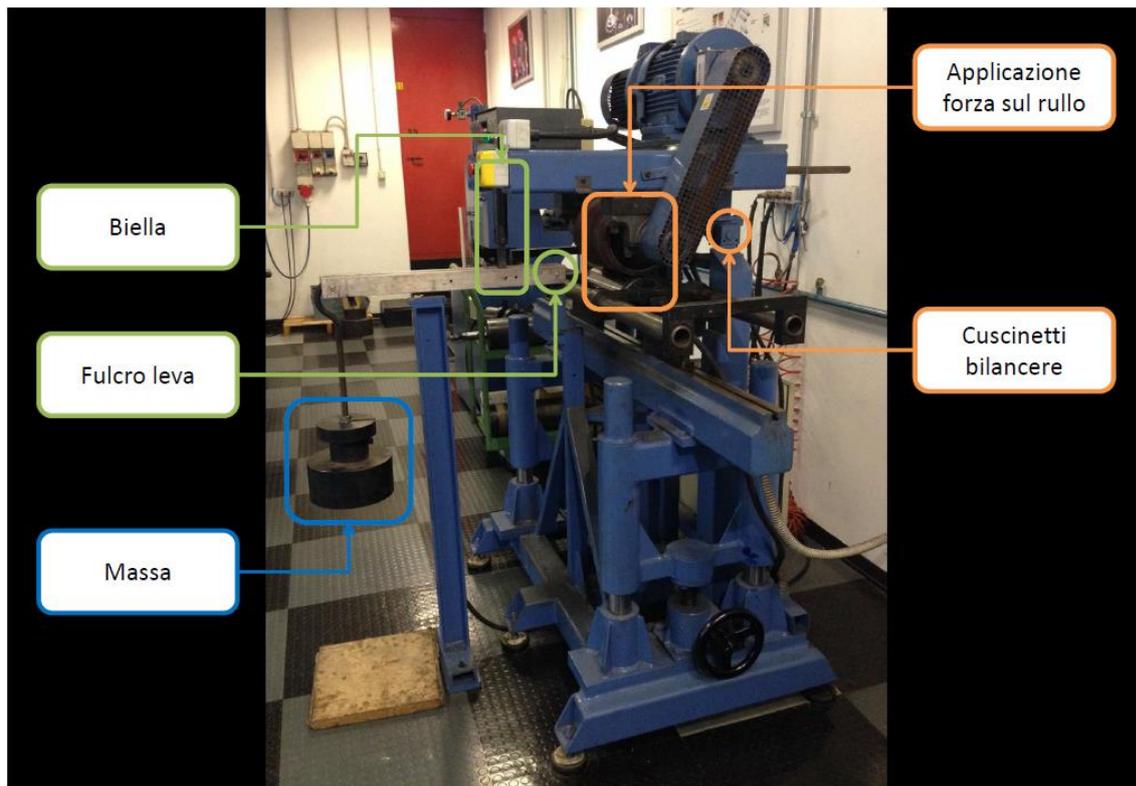


Fig.4.50 Macchina di prova – figura 2

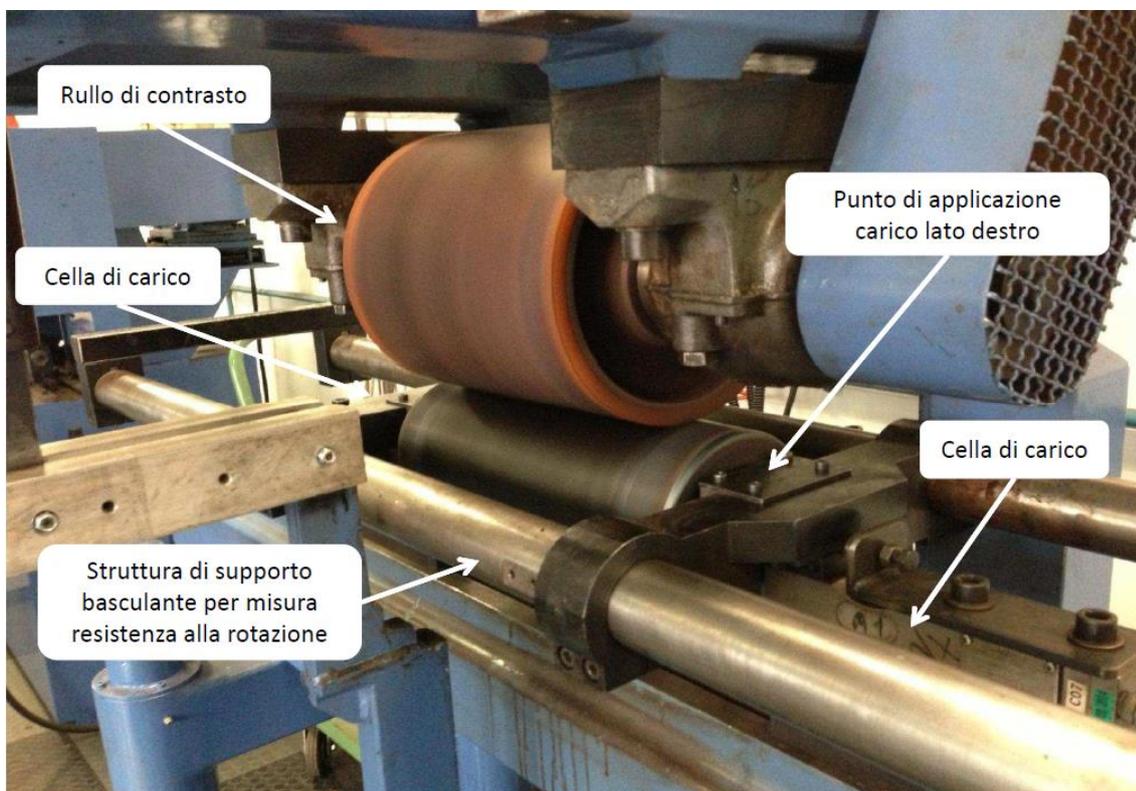


Fig.4.51 Macchina di prova – figura 3

Le celle di carico applicate alle due estremità del rullo in prova, permettono di monitorare il carico applicato, mentre un cronometro calcola la vita del rullo fino alla rottura. Note la durata del rullo in ore e la sua velocità di rotazione, è possibile calcolare il numero di cicli a fatica dopo i quali si è manifestata la rottura.

Come si è visto, con le analisi agli elementi finiti è stato possibile legare ad un valore del carico di targa applicato sul rullo, un valore della *SED* critica registrata alla radice del cordone di saldatura (Tab. 4.1 e Tab. 4.2). Se si cambia il valore della forza applicata ma si mantiene costante la geometria del rullo, non è necessario eseguire un'ulteriore analisi FEM per calcolare il nuovo valore di *SED* che si registra nel volume di controllo. Infatti, dato che la densità di energia di deformazione è proporzionale al quadrato della tensione, e che la tensione è direttamente proporzionale alla forza applicata, è possibile stabilire una proporzione semplice tra tensione (quindi anche forza) e *SED*:

$$\frac{F_1}{\bar{W}_{1max}} = \frac{F_2}{\bar{W}_{2max}}$$

Se con il pedice 1 identifichiamo i valori delle analisi FEM effettuate e con il pedice 2 quelli di una prova sperimentale, noto il carico  $F_2$  applicato e noti i risultati di un'analisi FEM preliminare, è possibile ricavare il valore della *SED* critica relativa al carico  $F_2$ . Così facendo, per varie geometrie di rullo, sono state svolte molte prove sperimentali cambiando il valore del carico applicato e quindi della *SED*, registrando il numero di cicli a rottura. Le rotture si sono sempre verificate a partire dalla radice del cordone di saldatura (Fig.4.16).

Il numero di cicli dopo i quali si verificava la rottura a fatica della giunzione saldata è stato messo in relazione con il valore del range di *SED* applicato alla radice del cordone in un grafico  $\Delta W$ -N in scala doppio logaritmica (Fig.4.52). Questo tipo di grafico è analogo a quello di Fig.4.12. In Fig.4.52 sono riportate le rette che delimitano la banda di dispersione proposta da *Lazzarin* e il suo gruppo di ricerca (Fig.4.12). Si può notare come i punti sperimentali siano ben compresi all'interno della banda.

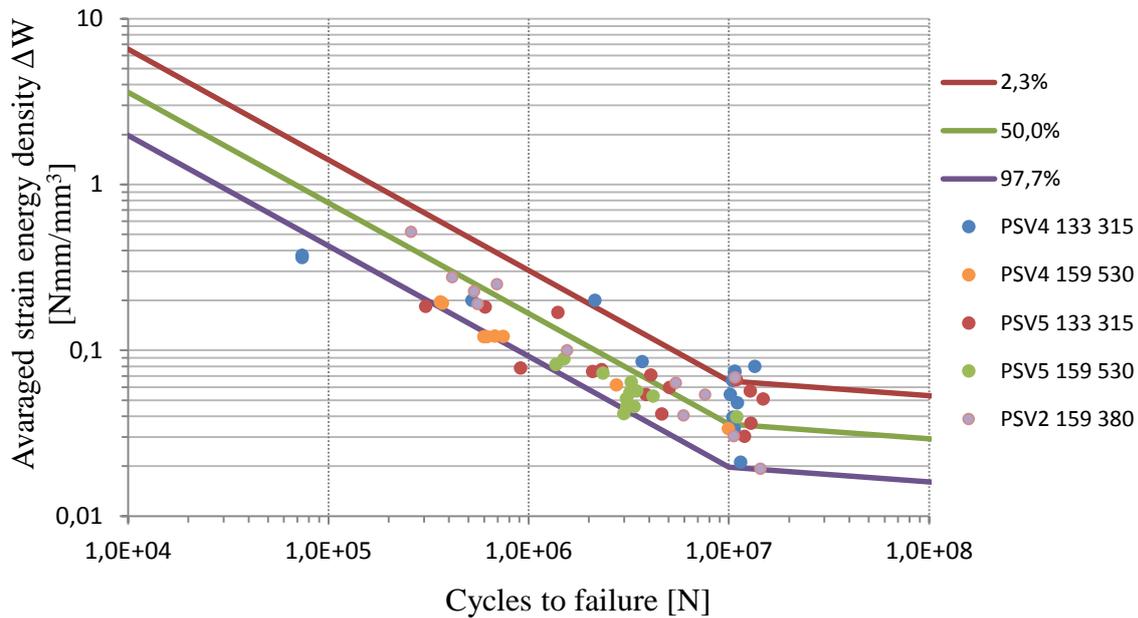


Fig.4.52 Experimental data of the rollers failures under fatigue load, organized in a  $\Delta W$ -N log-log plot.

#### 4.5 Conclusioni

In questo capitolo è stato presentato un metodo basato su un approccio energetico locale per la verifica a fatica di giunti saldati, che si pone come valida alternativa a quelli previsti dalle numerose norme in materia vigenti. Nella prima parte del capitolo, il metodo in *SED* (*Strain Energy Density*) è stato illustrato dal punto di vista teorico, spiegando le formulazioni analitiche sulle quali è basato e il percorso scientifico che negli anni ha portato alla sua definizione. Nella seconda parte, è stata descritta l'applicazione del metodo, eseguita per la prima volta in ambito industriale; sono state studiate le giunzioni saldate presenti nei rulli PSV prodotti dalla *Rulli Rulmeca S.p.A.* L'obiettivo dello studio è stato quello di verificare se la banda di dispersione di Fig.4.12, proposta dal Prof. *Lazzarin* e dal suo gruppo di ricerca [32], fosse in grado di descrivere correttamente non solo il comportamento a fatica di provini da laboratorio con i quali è stata definita, ma anche quello di giunti saldati di componenti reali. La ricerca ha dato esito positivo in quanto i punti sperimentali ottenuti dalle prove di

rottura a fatica, eseguite sui rulli, risultano essere ben contenuti all'interno della suddetta banda di dispersione statistica.

Si è dimostrato quindi che, noto il valore di *SED* media all'interno del volume di controllo critico nel cordone di saldatura a seguito di un'analisi FEM, il grafico di Fig.4.12 è uno strumento efficace ed affidabile per la previsione della vita a fatica di un giunto saldato di geometria generica, sollecitato da un carico di natura altrettanto generica.



# Bibliografia

---

- [1] Campagnolo, A., Berto, F. and Lazzarin, P. (2014) *The effects of different boundary conditions on three-dimensional cracked disks under anti-plane loading*
- [2] Tang, X.S. and Sih, G.C. (2005) *Weak and strong singularities reflecting multiscale damage: micro-boundary conditions for free-free, fixed-fixed and free-fixed constraints*
- [3] Williams, M.L. (1957) *On the stress distribution at the base of a stationary crack*
- [4] Berto, F., Lazzarin, P. and Kotousov, A. (2011) *On higher order terms and out-of-plane singular mode*
- [5] Beltrami, E. (1885) *Sulle condizioni di resistenza dei corpi elastici*
- [6] Lazzarin, P. and Zambardi, R. (2001) *A finite-volume-energy based approach to predict the static and fatigue behaviour of components with sharp V-shaped notches*
- [7] Bazant, Z.P. and Estenssoro, L.F. (1979) *Surface singularity and crack propagation*
- [8] Irwin, G.R. (1957) *Analysis of stresses and strains near the end of a crack traversing a plate*
- [9] Serpieri, R., Sacco, E. and Alfano, G. (2014) *A thermodynamically consistent derivation of a frictional-damage cohesive-zone model with different mode I and mode II fracture energies*
- [10] Marsavina, L., Sadowski, D.M. and Kneč, M. (2013) *Crack propagation paths in four point bend Aluminum – PMMA specimens*
- [11] Lazzarin, P., Berto, F., Gómez, F.J. and Zappalorto, M. (2008) *Some advantages derived from the use of the strain energy density over a control volume in fatigue strength assessments of welded joints*

- [12] Lazzarin, P., Berto, F. and Zappalorto, M. (2010) *Rapid calculations of notch stress intensity factors based on averaged strain energy density from coarse meshes: theoretical bases and applications*
- [13] Williams, M.L. (1952) *Stress singularities resulting from various boundary conditions in angular corners of plates in tension*
- [14] Gross, R. and Mendelson, A. (1972) *Plane elastostatic analysis of V-notched plates*
- [15] Seweryn, Molski, K. (1996) *Elastic stress singularities and corresponding generalized stress intensity factors for angular corners under various boundary conditions*
- [16] Qian, J. and Hasebe, N. (1997) *Property of eigenvalues and eigenfunctions for an interface V-notch in antiplane elasticity*
- [17] Dunn, M.I., Suwito, W. and Cunningham, S. (1997) *Stress intensities at notch singularities*
- [18] Livieri, P. and Lazzarin, P. (2005) *Fatigue strength of steel and aluminum welded joints based on generalized stress intensity factors and local strain energy values*
- [19] Radaj, D. (1990) *Design and analysis of fatigue resistant welded structures*
- [20] Radaj, D. and Sonsino, C.M. (1998) *Fatigue assessment of welded joints by local approaches*
- [21] Taylor, D., Barret, N. and Lucano, G. (2002) *Some new recent methods for predicting fatigue in welded joints*
- [22] Engesvik, K. and Lassen, T. (1988) *The effect of weld geometry on fatigue life*
- [23] Lassen, T. (1990) *The effect of the welding process on the fatigue crack growth*
- [24] Lazzarin, P. and Tovo, R. (1998) *A notch intensity approach to the stress analysis of welds*
- [25] Maddox, S.J. (1987) *The effect of plate thickness on the fatigue strength of fillet welded joints*
- [26] Gurney, T.J. (1991) *The fatigue strength of transverse fillet welded joints*
- [27] Sih (1991) *Mechanics of fracture initiation and propagation: surface and volume energy density applied as failure criterion*

- [28] Taylor, D., Barret, N. and Lucano, G. (2002) *Some new recent methods for predicting fatigue in welded joints*
- [29] El Haddad, M. H., Topper, T. H. and Smith, K. N. (1979) *Prediction of non-propagating cracks*
- [30] Lazzarin, P., Lassen, T., Livieri, P. (2002) *A notch stress intensity approach applied to fatigue life predictions of welded joints with different local toe geometry*
- [31] Lazzarin, P. and Livieri, P. (2001) *Notch stress intensity factors and fatigue strength of aluminum and steel welded joints*
- [32] Berto, F. and Lazzarin, P. (2014) *Recent developments in brittle and quasi-brittle failure assessment of engineering materials by means of local approaches*
- [33] Lazzarin, P. and Zambardi, R. (2002) *The equivalent strain energy density approach reformulated and applied to sharp V-shaped notches under localized and generalized plasticity*
- [34] Madenci, E. and Guven, I. (2006) *The Finite Element Method and Applications in Engineering using ANSYS®*
- [35] Lazzarin, P., Sonsino, C.M. and Zambardi, R. (2003) *A notch stress intensity approach to assess the multiaxial fatigue strength of welded tube-to-flange joints subjected to combined loadings*