



Università degli Studi di Padova

Dipartimento di Matematica

Corso di Laurea Magistrale in Matematica

Dalle stime empiriche dell'indice di Hurst al modello Rough Fractional Stochastic Volatility

Laureanda:

Jenny Broccoletti

Matricola: **1108603**

Relatrice:

Prof.ssa Giorgia Callegaro

22 Settembre 2017

*Alla piccola Marta
e alla mia famiglia.*

Indice

| | |
|---|------------|
| Notazione | vi |
| Introduzione | vii |
| 1 Risultati empirici per la regolarità della volatilità | 1 |
| 1.1 Stima della regolarità del processo di volatilità | 1 |
| 1.2 Indici S&P500 e NASDAQ | 5 |
| 1.3 Altri indici | 6 |
| 1.4 H varia con il passare del tempo? | 7 |
| 1.5 Stime di H utilizzando un diverso stimatore per la varianza . . . | 10 |
| 1.6 Distribuzione degli incrementi della log-volatilità | 13 |
| 2 Il modello RFSV | 17 |
| 2.1 Specificazione del modello | 17 |
| 2.2 Funzioni di autocovarianza del modello RFSV | 22 |
| 2.3 Funzione di correlazione del modello RFSV | 30 |
| 2.4 Confronto di volatilità tra dati e modello | 31 |
| Appendici | 35 |
| A Moto Browniano frazionario | 35 |
| A.1 Processi <i>self-similar</i> | 36 |
| A.2 Moto Browniano frazionario | 39 |
| A.3 Rappresentazione integrale del moto Browniano frazionario . . . | 44 |
| A.3.1 Rappresentazione spettrale | 44 |
| A.3.2 Rappresentazione in media mobile | 46 |
| A.4 Rumore Gaussiano frazionario | 47 |
| A.5 Processi Ornstein-Uhlenbeck frazionari | 50 |

| | |
|---|-----------|
| B Nuovo indice di rumore microstrutturale | 55 |
| B.1 Spazi funzionali | 55 |
| B.1.1 Spazi di Besov | 57 |
| B.1.2 Nuova caratterizzazione degli spazi di Besov | 58 |
| B.1.3 Nuova proprietà di regolarità per processi Gaussiani | 60 |
| B.2 Rumore di microstruttura | 61 |
| B.2.1 Rumore di microstruttura e <i>signature plot</i> | 61 |
| B.2.2 Un nuovo indice di rumore microstrutturale | 62 |
| B.2.3 Interpretazione dell'indice | 63 |
| B.2.4 Virtù dell'indice | 63 |
| B.3 Indice di Hurst interpretato come parametro di regolarità | 64 |
| | |
| C Codice in R | 67 |
| | |
| Bibliografia | 81 |

Notazione

| | |
|--|---|
| $\stackrel{d}{=}$ | uguaglianza in distribuzione. |
| \xrightarrow{d} | convergenza in distribuzione. |
| \xrightarrow{p} | convergenza in probabilità. |
| \mathbb{R}^+ | l'insieme $\{t \in \mathbb{R} \mid t > 0\}$. |
| x^T | vettore colonna x trasposto. |
| $[x]$ | parte intera di x . |
| $\ x\ $ | operatore di norma su x per un determinato spazio. |
| $(x)_+ \doteq \max(0, x)$ | massimo tra zero e x . |
| $\langle x, y \rangle \doteq \sum_{k=1}^m x_k y_k$ | prodotto scalare standard di x e y in \mathbb{R}^m . |
| $x \cong y$ | x e y sono in corrispondenza biunivoca. |
| $x \simeq y$ | x e y hanno lo stesso comportamento asintotico. |
| $f(x) \approx g(x)$ | $f(x) = g(x) + o(1)$ per $x \rightarrow 0$. |
| $\mathbb{1}_{[s,t]}(u)$ o $\mathbb{1}_{\{s \leq u \leq t\}}$ | la funzione caratteristica che vale 1 se $u \in [s, t]$ e 0 altrove. |
| v.a. | variabile aleatoria. |
| $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ | la v.a. X ha distribuzione Gaussiana di media μ e varianza σ^2 . |
| $\mathbb{E}(\cdot)$ | operatore del valore atteso. |
| $\text{Cov}(\cdot, \cdot)$ | operatore di covarianza. |
| $\text{Var}(\cdot)$ | operatore di varianza. |
| q.c. | quasi certamente. |
| H -sssi | <i>self-similar</i> a incrementi stazionari con indice di Hurst H . |
| MB | moto Browniano. |
| MBF | moto Browniano frazionario. |
| RGF | rumore Gaussiano frazionario. |
| OUF | Ornstein-Uhlenbeck frazionario. |
| SE | Standard Error. |
| JB | Test di normalità Jarque-Bera. |
| KS | Test di normalità Kolmogorov-Smirnov. |
| SW | Test di normalità Shapiro-Wilk. |

Introduzione

L'obiettivo di questa tesi è arrivare a elaborare un modello stocastico per gli incrementi della log-volatilità. Non otterremo un modello qualsiasi ma, il modello Rough Fractional Stochastic Volatility (RFSV) ideato da Jim Gatheral, Thibault Jaisson e Mathieu Rosenbaum in [18].

Il percorso svolto per giungere a un tale modello inizia dal Capitolo 1 con la sola analisi empirica del processo di volatilità. È ben noto che questo tipo di processo non è direttamente osservabile, nasce quindi l'esigenza di utilizzare delle *proxy* di volatilità, si è scelto quindi lo stimatore della varianza realizzata e quello di *realized kernel*.

Per stimare la regolarità del processo di volatilità, svolgeremo varie analisi su dati di diversi indici finanziari e troveremo un parametro di regolarità, indicato con H , che appartiene a un certo *range* in particolare: $0 < H < \frac{1}{4}$. H verrà identificato come l'indice di Hurst del moto Browniano frazionario. Inoltre sotto l'ipotesi che gli incrementi del processo di log-volatilità siano stazionari e che si possa applicare la legge dei grandi numeri, allora le analisi empiriche mostrano come gli incrementi della log-volatilità godono di una ben precisa proprietà di scala in media.

In ultima analisi si verifica se la distribuzione degli incrementi di log-volatilità sia prossima a quella Gaussiana. In realtà i nostri dati sembrano escludere la Gaussianità ma la ipotizziamo per gli incrementi di log-volatilità forti delle evidenze empiriche e delle analisi svolte dai nostri predecessori riportate in [2] e [1]. Si prosegue nel Capitolo 2 con la specificazione del modello RFSV, suggerito in modo naturale dalle evidenze empiriche trovate nel Capitolo precedente. Quindi attraverso il modello RFSV si modellizzano gli incrementi della log-volatilità tramite gli incrementi del MBF moltiplicati per un coefficiente ν . Tuttavia si parte da un altro modello quello in cui gli incrementi di log-volatilità vengono modellizzati attraverso gli incrementi del processo Ornstein-Uhlenbeck frazionario stazionario. In seguito con la Proposizione 1 si mostra che al limite in realtà

“basta” un MBF. Inoltre dai successivi Corollari si ottiene l’esatta proprietà di scala che già avevamo osservato dalle analisi empiriche.

Per completare lo studio teorico del modello si sono calcolate le funzioni di autocovarianza, varianza e correlazione mostrando opportuni confronti grafici con le stesse funzioni calcolate empiricamente. Un risultato rilevante che si ottiene sia nei dati che nel modello è che la funzione di autocovarianza della (log)-volatilità ha un andamento esponenziale e quindi non si comporta come una funzione potenza come ampiamente creduto.

Infine dal confronto grafico della volatilità dei dati e del modello si riesce a dedurre come questi abbiano la stessa struttura. In particolare si osserva come periodi persistenti di alta volatilità si alternano con periodi di bassa volatilità, questo tipo di comportamento è detto frattale.

Per una migliore comprensione di formule e strumenti utilizzati nei Capitoli, si sono create delle apposite Appendici teoriche. L’Appendice A tratta del MBF mentre in Appendice B si parla dell’ introduzione di un nuovo indice di rumore microstrutturale nel contesto degli spazi di Besov, dovuto a Rosenbaum.

Infine riportiamo in Appendice C il codice in R utilizzato per produrre sia i grafici che le tabelle presenti nell’elaborato.

Capitolo 1

Risultati empirici per la regolarità della volatilità

In questo primo capitolo ci concentriamo sulla sola analisi empirica del processo di volatilità. Per questo scopo vengono usate le stime della varianza realizzata già calcolate da Oxford-Man Institute of Quantitative Finance, per diversi indici finanziari. In tabella si riportano le stime della regolarità del processo di volatilità per questo *dataset* di indici utilizzando come *proxy* di volatilità non solo la varianza realizzata ma anche lo stimatore di *realized kernel*. In particolare, mostriamo, solo per due indici: S&P500 e NASDAQ, il procedimento per ottenere tali stime del parametro di regolarità, che indicheremo con H . Si noterà che H appartiene a un certo *range* e si mostrerà che non varia con il passare del tempo, eseguendo le stesse analisi per intervalli temporali diversi.

Infine si discuterà sulla distribuzione degli incrementi della log-volatilità e si cercherà conferma mediante grafici e opportuni test statistici, che questi abbiano distribuzione vicina a quella Gaussiana. Il lavoro trae spunto dalle evidenze empiriche e dalle analisi svolte dai nostri predecessori riportate in [2] e [1].

1.1 Stima della regolarità del processo di volatilità

In questa sezione si introduce la quantità $m(q, \Delta)$ che sarà al centro dell'analisi per tutto il capitolo. Per comprendere in modo migliore le spiegazioni qui pre-

senti, si consiglia la lettura dell'Appendice B.

Si supponga di avere accesso alle osservazioni discrete del processo di volatilità su un intervallo $[0, T]$ con una griglia temporale di passo Δ : $\sigma_0, \sigma_\Delta, \dots, \sigma_{k\Delta}, \dots, \sigma_T$ con $k \in \{0, \dots, \lfloor T/\Delta \rfloor\}$. Ponendo $N = \lfloor T/\Delta \rfloor$, allora per $q \in \mathbb{R}^+$ si definisce la quantità

$$m(q, \Delta) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N |\log(\sigma_{k\Delta}) - \log(\sigma_{(k-1)\Delta})|^q, \quad (1.1)$$

che ricorda molto la definizione della quantità V_q^{p} in (B.5). Nell'ottica di un nuovo indice di rumore microstrutturale (per maggiori dettagli si rimanda il lettore alla Sezione B.2, in particolare a B.2.3) introdotto da Rosenbaum in [25], l'ipotesi principale è che per qualche $s_q > 0$ e $b_q > 0$,

$$N^{qs_q} m(q, \Delta) \xrightarrow{\Delta \rightarrow 0} b_q. \quad (1.2)$$

Sotto condizioni tecniche aggiuntive, l'Equazione (1.2) dice essenzialmente che il processo di volatilità appartiene allo spazio di Besov $\mathcal{B}_{q,\infty}^{s_q}$ e non appartiene a $\mathcal{B}_{q,\infty}^{s'_q}$, quando $s'_q > s_q$. Per questo motivo s_q può essere visto proprio come la regolarità della volatilità quando questa è misurata in norma ℓ^q . In particolare, funzioni che appartengono allo spazio $\mathcal{B}_{q,\infty}^s$ per ogni $q > 0$ godono della proprietà di Hölder continuità con esponente α per ogni $\alpha < s$. Vediamo un breve esempio per il MBF.

Esempio 1. Se $\log(\sigma_t)$ è un MBF con indice di Hurst H , allora per ogni $q \geq 0$, l'Equazione (1.2) vale in probabilità con $s_q = H$ e si può mostrare che le traiettorie del processo appartengono proprio a $\mathcal{B}_{q,\infty}^H$ quasi certamente.

Se si assume che gli incrementi del processo di log-volatilità siano stazionari e che si possa applicare la legge dei grandi numeri, allora la quantità $m(q, \Delta)$ in (1.1) può essere vista come l'equivalente empirico di

$$\mathbb{E}(|\log(\sigma_\Delta) - \log(\sigma_0)|^q). \quad (1.3)$$

Di certo si sa che il processo di volatilità non è direttamente osservabile, per questo motivo un calcolo esatto di $m(q, \Delta)$ nella pratica è impossibile. È necessario quindi individuare una *proxy* della volatilità. Quale *proxy* usare? Per gli indici che andremo ad analizzare, si useranno le stime della varianza realizzata. Le stime che useremo provengono dal sito: <http://realized.oxford-man.ox.ac.uk/data/download>. Quindi sono stime già calcolate da Oxford-Man Institute of Quantitative Finance Realized Library, che è una libreria contenente una

selezione di stime giornaliere della volatilità di indici finanziari, includendo le stime giornaliere di varianza realizzata. Si ricorda grazie a [1], che la varianza realizzata è calcolata semplicemente sommando i quadrati dei rendimenti infragiornalieri. I rendimenti non sono altro che le differenze logaritmiche dei prezzi del titolo o indice finanziario analizzato. La misura di varianza è il processo associato alla variazione quadratica del log-prezzo, anche detto varianza integrata: $IV_t = \int_0^t \sigma_s^2 ds$. L'usuale stimatore di IV_t è proprio la varianza realizzata che all'aumentare della frequenza di campionamento, converge in probabilità alla quantità IV_t .

Dato che nel nostro caso il minimo Δ sarà uguale a un giorno, nel seguito la vera volatilità *spot* giornaliera verrà sostituita con una *proxy* giornaliera calcolata in un determinato momento fissato del giorno (per esempio alle 11 di mattina). In particolare la *proxy* giornaliera che si utilizza qui, per implementare la formula (1.1), è la radice quadrata della varianza realizzata giornaliera calcolata nell'arco temporale di 5-minuti per l'intero giorno di *trading*.

Grazie a Oxford-Man Institute of Quantitative Finance abbiamo a disposizione la nostra *proxy* giornaliera per 21 indici finanziari. Consideriamo circa 4350 giorni di *trading* dal 3 Gennaio 2000, al 17 Maggio 2017.

Da ora in poi si mantiene la notazione $m(q, \Delta)$ con la consapevolezza che si sta solo sostituendo la (vera) volatilità con una *proxy* come spiegato sopra.

Si procede ora con la stima del parametro di regolarità s_q per ogni q , calcolando la quantità $m(q, \Delta)$ per diversi valori di Δ e regredendo $\log m(q, \Delta)$ contro $\log \Delta$. Si osservi che per un dato Δ , diversi $m(q, \Delta)$ possono essere calcolati in funzione del punto iniziale. La misura finale di $m(q, \Delta)$ che viene qui usata, non è altro che la media di questi valori. Per una maggiore chiarezza espositiva consideriamo il seguente Esempio.

Esempio 2. Supponiamo di avere 31 valori di varianza realizzata giornaliera di un determinato indice: $\{\sigma_0^2, \sigma_1^2, \dots, \sigma_{30}^2\}$. Consideriamo adesso diverse griglie temporali di passo $\Delta = \{1, 2, 3\}$ sull'intervallo $[0, 30]$. Ricordando $N = \lfloor T/\Delta \rfloor$, $k \in \{0, \dots, \lfloor T/\Delta \rfloor\}$ e nel nostro caso $T = 30$, si ha che la quantità $m(q, \Delta)$ dell'Equazione (1.1) è per $\Delta=1$:

$$m(q, 1) = \frac{1}{30} \sum_{k=1}^{30} |\log(\sigma_k) - \log(\sigma_{k-1})|^q.$$

Ora per $\Delta=2$ allora $N=15$, quindi si ha:

$$|\log(\sigma_2) - \log(\sigma_0)|, |\log(\sigma_4) - \log(\sigma_2)|, \dots, |\log(\sigma_{30}) - \log(\sigma_{28})|.$$

Ma se invece di partire dal primo valore che è σ_0 si partisse dalla seconda realizzazione, cosa accadrebbe?

$$|\log(\sigma_3) - \log(\sigma_1)|, |\log(\sigma_5) - \log(\sigma_3)|, \dots, |\log(\sigma_{29}) - \log(\sigma_{27})|.$$

In questo modo si prenderebbero in considerazione tutti i valori, nessuno escluso. Da qui nasce l'esigenza per una maggiore precisione, di fare la media tra i due valori di $m(q, 2)$ che si ottengono.

Denoteremo in generale con $m^{(r)}(q, \Delta)$ il valore di $m(q, \Delta)$ calcolato partendo dall' $(r+1)$ -esimo valore σ_r . Quindi in base alla nuova notazione consideriamo i valori $\{\sigma_0^2, \sigma_1^2, \dots, \sigma_{30}^2\}$ per calcolare

$$m^{(0)}(q, 2) = \frac{1}{15} \sum_{k=1}^{15} |\log(\sigma_{k2}) - \log(\sigma_{(k-1)2})|^q$$

e questi valori $\{\sigma_1^2, \sigma_2^2, \dots, \sigma_{30}^2\} \cong \{\sigma_0^2, \sigma_1^2, \dots, \sigma_{29}^2\}$ per calcolare

$$m^{(1)}(q, 2) = \frac{1}{14} \sum_{k=1}^{14} |\log(\sigma_{k2}) - \log(\sigma_{(k-1)2})|^q,$$

allora

$$m(q, 2) = \frac{m^{(0)}(q, 2) + m^{(1)}(q, 2)}{2}.$$

Vediamo ora cosa succede con $\Delta = 3$. Partendo da σ_0 si hanno le seguenti differenze:

$$|\log(\sigma_3) - \log(\sigma_0)|, |\log(\sigma_6) - \log(\sigma_3)|, \dots, |\log(\sigma_{30}) - \log(\sigma_{27})|. \quad (1.4)$$

Iniziando da σ_1 invece si ha:

$$|\log(\sigma_4) - \log(\sigma_1)|, |\log(\sigma_7) - \log(\sigma_4)|, \dots, |\log(\sigma_{28}) - \log(\sigma_{25})|. \quad (1.5)$$

Partendo da σ_2 abbiamo:

$$|\log(\sigma_5) - \log(\sigma_2)|, |\log(\sigma_8) - \log(\sigma_5)|, \dots, |\log(\sigma_{29}) - \log(\sigma_{26})|. \quad (1.6)$$

Se partissimo da σ_3 si avrebbe la stessa sequenza di (1.4) escludendo il primo elemento, lo stesso succede per σ_4 che ha la stessa sequenza di (1.5), per σ_5 che è uguale a (1.6) escludendo il primo elemento e così via escludendo sempre di più i primi elementi. Per questo motivo, nel calcolare $m(q, \Delta)$ ci fermeremo al calcolo di $m^{(\Delta-1)}(q, \Delta)$ per poi farne la media.

In questo caso perciò si avrà:

$$m(q, 3) = \frac{m^{(0)}(q, 3) + m^{(1)}(q, 3) + m^{(2)}(q, 3)}{3}.$$

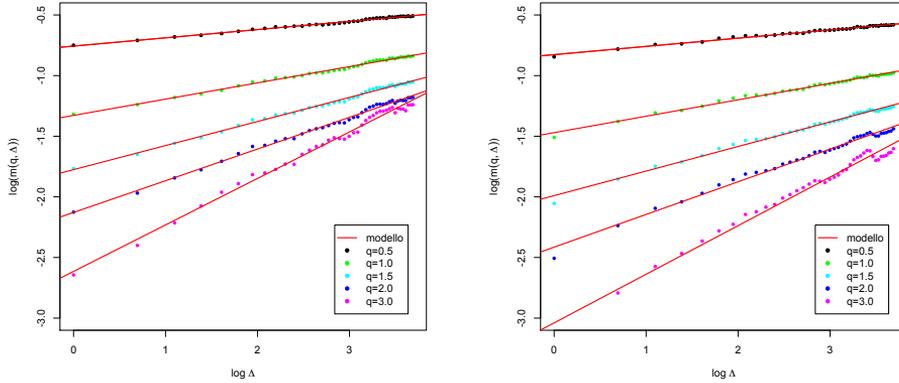


Figura 1.1: $\log m(q, \Delta)$ come una funzione di $\log \Delta$ per l'indice S&P500 a sinistra e NASDAQ a destra.

1.2 Indici S&P500 e NASDAQ

In questa sezione vedremo risultati solo per due indici: S&P500 e NASDAQ. Qui ci concentriamo prevalentemente sul procedimento svolto, ma risultati analoghi si hanno anche per gli altri indici.

Per i grafici si è scelto arbitrariamente $\Delta = \{1, \dots, 40\}$ giorni, mentre per l'esponente q si sono scelti i valori $\{0.5, 1, 1.5, 2, 3\}$. È stata fatta una regressione lineare di $\log m(q, \Delta)$ su $\log \Delta$ per ogni valore di q . Quindi i grafici in Figura 1.1 mostrano proprio queste regressioni per l'indice S&P500 e NASDAQ. Ovvero ad ogni \bar{q} fissato i 40 pallini sono i $\log m(\bar{q}, \Delta)$ mentre in rosso abbiamo la formula del modello lineare:

$$\log m(\bar{q}, \Delta) = \zeta_{\bar{q}} \log \Delta + I, \quad (1.7)$$

dove $\zeta_{\bar{q}} > 0$ è la pendenza della retta associata a \bar{q} , mentre I è l'intercetta cioè il punto d'intersezione tra la retta e l'asse delle ordinate. Si noti che anche l'intercetta varia al variare di q .

Per entrambi gli indici e per ogni q fissato si osserva che i punti essenzialmente giacciono sulla retta e all'aumentare del valore di q i punti si discostano dalla retta in maniera più evidente. Sotto l'ipotesi di stazionarietà, questo implica che gli incrementi di log-volatilità godono della seguente proprietà di scala in

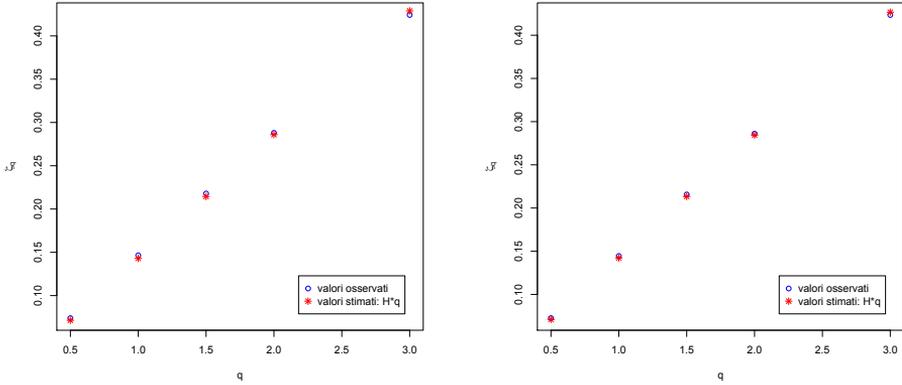


Figura 1.2: Il grafico a sinistra si riferisce all'indice S&P500 mentre quello a destra al NASDAQ. I valori osservati sono ζ_q ovvero il coefficiente angolare della retta di regressione al variare di q nell'Equazione (1.7). Invece i valori stimati appartengono alla retta di Equazione (1.9).

media:

$$\mathbb{E}(|\log(\sigma_\Delta) - \log(\sigma_0)|^q) = K_q \Delta^{\zeta_q}, \quad (1.8)$$

grazie all'equivalente empirico di $m(q, \Delta)$ in (1.3) e all'Equazione (1.7). Si noti come l'Equazione (1.8) sia analoga all'Equazione (A.5) in Appendice A. Inoltre il parametro di regolarità, che denoteremo con H , non sembra dipendere da q . Infatti, come mostrato in Figura 1.2, regredendo ζ_q contro q , mediante la formula del modello lineare senza intercetta:

$$\zeta_q = Hq \quad (1.9)$$

si ottiene che H è approssimativamente pari a 0.130 per l'indice S&P500 e 0.134 per il NASDAQ. Quindi da quanto appena visto, si può affermare che $m(q, \Delta)$ è proporzionale a Δ^{qH} .

1.3 Altri indici

Si ripetono ora, le stesse analisi per ogni indice presente nell'insieme dei dati di Oxford-Man, si rimanda alla prima colonna della Tabella 1.1 per vedere nel

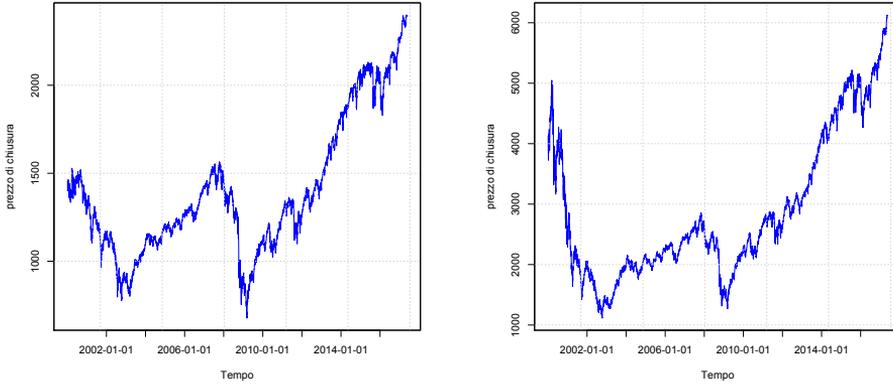


Figura 1.3: A sinistra il grafico dei prezzi giornalieri dell'indice S&P500 mentre a destra del NASDAQ.

dettaglio quali indici ne fanno parte. Si scopre che $m(q, \Delta)$ presenta un comportamento di scala universale, lo stesso descritto nell'Equazione (1.8). Prendendo sempre gli stessi valori per q e Δ , come si è fatto per la Sezione precedente 1.2, si ottengono le stime di ζ_q al variare di q come nel modello lineare espresso dall'Equazione (1.7). Poi per ogni \bar{q} fissato, si ricava H semplicemente dividendo $\zeta_{\bar{q}}$ per \bar{q} . Le stime di H , così calcolate, sono riassunte in Tabella 1.1.

Nella maggior parte dei casi si osserva che i valori di H , associati a un determinato indice, sono molto vicini tra loro. In particolare la loro distanza oscilla da un minimo di 0.001 a un massimo di 0.019, fatta eccezione per l'indice Euro Stoxx 50 che raggiunge un massimo di 0.061.

1.4 H varia con il passare del tempo?

Adesso vorremmo controllare se le stime di H dipendano dall'intervallo temporale scelto o meno.

Visti i risultati nella Sezioni precedenti 1.2 e 1.3, si stimerà H come la pendenza della retta espressa nell'Equazione (1.9). Si è diviso il *dataset* della varianza realizzata di Oxford-Man in due metà e si è stimato nuovamente il parametro H per ogni metà separatamente. I risultati sono riassunti nella Tabella 1.2.

Il primo intervallo temporale va da Gennaio 2000 a fine Dicembre 2009 mentre

| Indice | $\zeta_{0.5}/0.5$ | $\zeta_1/1$ | $\zeta_{1.5}/1.5$ | $\zeta_2/2$ | $\zeta_3/3$ |
|---------------|-------------------|-------------|-------------------|-------------|-------------|
| SPX2.rv | 0.136 | 0.134 | 0.132 | 0.131 | 0.128 |
| FTSE2.rv | 0.134 | 0.133 | 0.132 | 0.130 | 0.126 |
| N2252.rv | 0.134 | 0.134 | 0.133 | 0.133 | 0.124 |
| GDAXI2.rv | 0.139 | 0.136 | 0.133 | 0.130 | 0.123 |
| RUT2.rv | 0.121 | 0.117 | 0.114 | 0.111 | 0.106 |
| AORD2.rv | 0.072 | 0.072 | 0.072 | 0.073 | 0.073 |
| DJI2.rv | 0.127 | 0.125 | 0.123 | 0.121 | 0.117 |
| IXIC2.rv | 0.136 | 0.135 | 0.135 | 0.135 | 0.134 |
| FCHI2.rv | 0.146 | 0.143 | 0.139 | 0.135 | 0.127 |
| HSI2.rv | 0.081 | 0.081 | 0.080 | 0.080 | 0.079 |
| KS11.rv | 0.124 | 0.124 | 0.123 | 0.122 | 0.116 |
| AEX.rv | 0.152 | 0.150 | 0.148 | 0.145 | 0.139 |
| SSMI.rv | 0.158 | 0.161 | 0.163 | 0.164 | 0.163 |
| IBEX2.rv | 0.134 | 0.132 | 0.129 | 0.126 | 0.118 |
| NSEI.rv | 0.112 | 0.110 | 0.107 | 0.103 | 0.094 |
| MXX.rv | 0.082 | 0.080 | 0.079 | 0.077 | 0.073 |
| BVSP.rv | 0.115 | 0.115 | 0.114 | 0.114 | 0.113 |
| GSPTSE.rv | 0.104 | 0.103 | 0.101 | 0.100 | 0.098 |
| STOXX50E.rv | 0.141 | 0.134 | 0.126 | 0.114 | 0.080 |
| FTSTI.rv | 0.109 | 0.111 | 0.112 | 0.113 | 0.112 |
| FTSEMIB.rv | 0.132 | 0.133 | 0.134 | 0.134 | 0.132 |

Tabella 1.1: Stima di H tramite il rapporto di ζ_q stimato e q Equazione (1.9), per tutti gli indici presenti nel *set* di dati di Oxford-Man.

| Indice | H primo periodo | H secondo periodo | H periodo totale |
|-------------|-------------------|---------------------|--------------------|
| SPX2.rv | 0.135 | 0.125 | 0.130 |
| FTSE2.rv | 0.123 | 0.136 | 0.128 |
| N2252.rv | 0.138 | 0.122 | 0.127 |
| GDAXI2.rv | 0.138 | 0.114 | 0.127 |
| RUT2.rv | 0.111 | 0.108 | 0.109 |
| AORD2.rv | 0.068 | 0.081 | 0.073 |
| DJI2.rv | 0.125 | 0.114 | 0.119 |
| IXIC2.rv | 0.134 | 0.134 | 0.134 |
| FCHI2.rv | 0.135 | 0.128 | 0.132 |
| HSI2.rv | 0.085 | 0.074 | 0.080 |
| KS11.rv | 0.135 | 0.101 | 0.119 |
| AEX.rv | 0.148 | 0.135 | 0.142 |
| SSML.rv | 0.163 | 0.163 | 0.163 |
| IBEX2.rv | 0.119 | 0.123 | 0.123 |
| NSEI.rv | 0.115 | 0.077 | 0.099 |
| MXX.rv | 0.079 | 0.072 | 0.075 |
| BVSP.rv | 0.118 | 0.105 | 0.113 |
| GSPTSE.rv | 0.126 | 0.082 | 0.100 |
| STOXX50E.rv | 0.122 | 0.081 | 0.099 |
| FTSTI.rv | 0.113 | 0.108 | 0.112 |
| FTSEMIB.rv | 0.132 | 0.130 | 0.133 |

Tabella 1.2: Stima di H tramite il modello lineare (1.9) su periodi diversi per tutti gli indici presenti nel *set* di dati di Oxford-Man.

il secondo da Gennaio 2010 a Maggio 2017. Come si può osservare dal grafico dei prezzi dei due indici S&P500 e NASDAQ in Figura 1.3, attorno all'anno 2009 vi è un crollo dei prezzi forse dovuto alla crisi finanziaria, mentre attorno al 2002-2003 si nota un'altra caduta dei prezzi forse a seguito della bolla tecnologica. In generale tutti gli indici qui considerati evidenziano cadute o crolli di prezzo in quegli anni. Quindi abbiamo incluso la crisi finanziaria nel primo intervallo temporale.

Le stime di H sono tutte comprese tra 0.06 e 0.17. Si osserva poi che più di $\frac{2}{3}$ degli indici hanno valori di H che sono più alti nel primo periodo rispetto al secondo.

1.5 Stime di H utilizzando un diverso stimatore per la varianza

Cosa accadrebbe se cambiassimo stimatore per la varianza? Si otterrebbero risultati analoghi o del tutto diversi?

Consultando la libreria di Oxford-Man Institute of Quantitative Finance Realized che abbiamo usato in precedenza, al suo interno si possono trovare diversi stimatori giornalieri per la varianza. Fino a questo momento, per le analisi svolte si è utilizzata come *proxy* della volatilità la varianza realizzata. Solo in questa sezione invece consideriamo lo stimatore di *realized kernel* per la varianza giornaliera. Per maggiori dettagli sul calcolo di questo stimatore si rimanda alle fonti [5] e [6].

Le stime di H ottenute utilizzando lo stimatore di *realized kernel* sono raccolte in Tabella 1.3 e Tabella 1.4. La Tabella 1.3 illustra le stime di H al variare di q ovvero tramite il rapporto tra un certo $\zeta_{\bar{q}}$ e \bar{q} mentre la Tabella 1.4 mostra la stima di H per diversi intervalli temporali, semplicemente attraverso il coefficiente angolare della retta di regressione espressa dall'Equazione (1.9). Quindi i risultati riassunti in quelle tabelle, li possiamo confrontare rispettivamente con quelli in Tabella 1.1 e Tabella 1.2 delle Sezioni precedenti 1.3 e 1.4.

Dal confronto se ne deduce che i valori delle stime di H trovati con la *proxy realized kernel* sono per la maggior parte più grandi rispetto a quelli ottenuti con lo stimatore di varianza realizzata. Più precisamente fanno eccezione alla regola tre indici su ventuno analizzati: N2252, FCHI2 e AEX, i cui valori ottenuti con *realized kernel* dal confronto risultano essere minori rispetto a quelli ottenuti con la *proxy realized variance* peraltro si discostano molto lievemente, la massima distanza è 0.01 raggiunta da FCHI2.

| Indice | $\zeta_{0.5}/0.5$ | $\zeta_1/1$ | $\zeta_{1.5}/1.5$ | $\zeta_2/2$ | $\zeta_3/3$ |
|---------------|-------------------|-------------|-------------------|-------------|-------------|
| SPX2.rk | 0.148 | 0.147 | 0.145 | 0.144 | 0.141 |
| FTSE2.rk | 0.150 | 0.148 | 0.146 | 0.143 | 0.136 |
| N2252.rk | 0.130 | 0.130 | 0.130 | 0.130 | 0.125 |
| GDAXI2.rk | 0.150 | 0.145 | 0.142 | 0.138 | 0.133 |
| RUT2.rk | 0.131 | 0.127 | 0.124 | 0.121 | 0.114 |
| AORD2.rk | 0.076 | 0.076 | 0.077 | 0.077 | 0.078 |
| DJI2.rk | 0.149 | 0.147 | 0.144 | 0.141 | 0.136 |
| IXIC2.rk | 0.145 | 0.144 | 0.144 | 0.143 | 0.141 |
| FCHI2.rk | 0.136 | 0.134 | 0.132 | 0.129 | 0.122 |
| HSI2.rk | 0.090 | 0.089 | 0.089 | 0.088 | 0.087 |
| KS11.rk | 0.132 | 0.131 | 0.130 | 0.128 | 0.122 |
| AEX.rk | 0.151 | 0.148 | 0.146 | 0.143 | 0.137 |
| SSMI.rk | 0.178 | 0.179 | 0.180 | 0.180 | 0.178 |
| IBEX2.rk | 0.138 | 0.136 | 0.133 | 0.130 | 0.121 |
| NSEI.rk | 0.139 | 0.136 | 0.131 | 0.124 | 0.107 |
| MXX.rk | 0.091 | 0.089 | 0.087 | 0.083 | 0.075 |
| BVSP.rk | 0.115 | 0.115 | 0.115 | 0.114 | 0.112 |
| GSPTSE.rk | 0.110 | 0.110 | 0.110 | 0.110 | 0.111 |
| STOXX50E.rk | 0.143 | 0.136 | 0.127 | 0.115 | 0.079 |
| FTSTI.rk | 0.117 | 0.118 | 0.119 | 0.121 | 0.124 |
| FTSEMIB.rk | 0.141 | 0.141 | 0.140 | 0.139 | 0.134 |

Tabella 1.3: Utilizzando lo stimatore di *realized kernel* si mostra qui la stima di H tramite il rapporto di ζ_q stimato e q Equazione (1.9), per tutti gli indici presenti nel *set* di dati di Oxford-Man.

| Indice | H primo periodo | H secondo periodo | H periodo totale |
|-------------|-------------------|---------------------|--------------------|
| SPX2.rk | 0.146 | 0.140 | 0.143 |
| FTSE2.rk | 0.126 | 0.164 | 0.140 |
| N2252.rk | 0.132 | 0.126 | 0.127 |
| GDAXI2.rk | 0.142 | 0.129 | 0.136 |
| RUT2.rk | 0.116 | 0.121 | 0.118 |
| AORD2.rk | 0.072 | 0.085 | 0.077 |
| DJI2.rk | 0.147 | 0.132 | 0.139 |
| IXIC2.rk | 0.133 | 0.151 | 0.142 |
| FCHI2.rk | 0.126 | 0.124 | 0.126 |
| HSI2.rk | 0.094 | 0.081 | 0.087 |
| KS11.rk | 0.143 | 0.108 | 0.125 |
| AEX.rk | 0.148 | 0.132 | 0.141 |
| SSMI.rk | 0.178 | 0.179 | 0.179 |
| IBEX2.rk | 0.121 | 0.127 | 0.126 |
| NSEI.rk | 0.127 | 0.101 | 0.117 |
| MXX.rk | 0.084 | 0.075 | 0.080 |
| BVSP.rk | 0.120 | 0.102 | 0.113 |
| GSPTSE.rk | 0.126 | 0.096 | 0.111 |
| STOXX50E.rk | 0.124 | 0.080 | 0.098 |
| FTSTI.rk | 0.122 | 0.117 | 0.122 |
| FTSEMIB.rk | 0.125 | 0.151 | 0.137 |

Tabella 1.4: Utilizzando lo stimatore di *realized kernel* si mostra qui la stima di H tramite il modello lineare (1.9) su periodi diversi per tutti gli indici presenti nel *set* di dati di Oxford-Man.

Grazie anche a questi ultimi risultati, cogliamo l'occasione per sottolineare il *range* di H che va da 0.06 a 0.18 ovvero $H < \frac{1}{2}$, più precisamente si ha $H < \frac{1}{4}$.

1.6 Distribuzione degli incrementi della log-volatilità

Grazie alle analisi svolte si riesce a stabilire che tutti gli indici esibiscono essenzialmente la stessa proprietà di scala. Quindi si considera ora solo l'indice S&P500. Inoltre si prenderanno in considerazione al variare di t gli incrementi di log-volatilità mediante finestra rolling ovvero:

$$\log \sigma_{t+\Delta} - \log \sigma_t, \quad t \in \{0, \dots, \lfloor T/\Delta \rfloor\}$$

al posto degli incrementi espressi nell'Equazione (1.1). Questo procedimento è giustificato dall'equivalente empirico (1.3) di $m(q, \Delta)$.

È ben noto grazie ai lavori [2] e [1], che la distribuzione degli incrementi di log-volatilità è vicina a quella Gaussiana. Quindi vorremmo ora mostrare che accade così anche per i nostri dati.

Osservando gli istogrammi con le densità empiriche (in verde) degli incrementi della log-volatilità in Figura 1.4 e la curva della densità normale in rosso, si nota come le distribuzioni empiriche per ogni Δ , non siano così vicine alla Gaussiana, al contrario di come ci aspettavamo, nonostante i grafici ottenuti in Figura 1.4 siano molto simili a quelli mostrati in [18, p. 13].

Per un'ulteriore conferma sulla normalità o meno dei dati che stiamo analizzando, abbiamo controllato le statistiche di base (simmetria e curtosi), i $Q-Q$ *plot* in Figura 1.5 ed eseguito alcuni test di normalità (Jarque-Bera, Shapiro-Wilk e Kolmogorov-Smirnov) che confermano la prima impressione avuta dai grafici, ovvero il rifiuto dell'ipotesi nulla che la distribuzione sia quella normale. Si possono vedere nel dettaglio i risultati delle statistiche di base e dei test di normalità riportati nella Tabella 1.5. Oltre ai risultati numerici per i test di normalità, già anche solo confrontando graficamente i quantili teorici della normale standard con quelli empirici in Figura 1.5, si può vedere come questi siano distanti in particolar modo nelle code.

Quindi nonostante la distribuzione dei nostri incrementi di log-volatilità non sia vicina a quella Gaussiana, forti dell'evidenza empirica mostrata anche in [2] e [1], andiamo avanti nella nostra analisi e in seguito ipotizzeremo che ci siano solo lievi deviazioni dalla distribuzione normale affinché il modello che si mostrerà nel prossimo capitolo abbia senso. Più precisamente affinché la distribuzione

osservata sia coerente con il calcolo della distribuzione empirica degli incrementi di un moto Browniano frazionario su un numero simile di punti.

Osserviamo come sia impressionante che riscaldando l'adattamento della curva normale di un giorno tramite Δ^H , si generino curve (indicate in blu tratteggiato in Figura 1.4) che sono molto vicine se non sovrapposte, alla normale (in rosso), consistenti con la scala osservata.

Osservazione 1. Un'ultima osservazione riguarda le statistiche di base mostrate in Tabella 1.5, in particolare la media con il suo *standard error*. Vediamo che per Δ non troppo elevato, l'incremento della log-volatilità (e anche l'incremento della volatilità) ha media significativamente pari a zero. Mentre per esempio, per $\Delta = 125$ si ha che la media dell'incremento della log-volatilità è significativamente diversa da zero.

| | $\Delta = 1 \text{ g.}$ | $\Delta = 5 \text{ gg.}$ | $\Delta = 25 \text{ gg.}$ | $\Delta = 125 \text{ gg.}$ |
|-----------------------|-------------------------|--------------------------|---------------------------|----------------------------|
| Media | -0.000387 | -0.001915 | -0.007087 | -0.036707 |
| SE media | 0.005244 | 0.006470 | 0.008107 | 0.009709 |
| Simmetria | 0.037 | 0.134 | 0.259 | 0.251 |
| Curtosi | 0.675 | 1.238 | 0.715 | 0.618 |
| p-value per JB | $< 2.2 e^{-16}$ | $< 2.2 e^{-16}$ | $< 2.2 e^{-16}$ | $< 2.2 e^{-16}$ |
| p-value per KS | $< 2.2 e^{-16}$ | $< 2.2 e^{-16}$ | $< 2.2 e^{-16}$ | $< 2.2 e^{-16}$ |
| p-value per SW | $5.929 e^{-09}$ | $2.978 e^{-16}$ | $2.258 e^{-12}$ | $1.41 e^{-12}$ |

Tabella 1.5: Alcune statistiche di base e risultati dei test di normalità effettuati per l'indice S&P500 al variare di Δ .

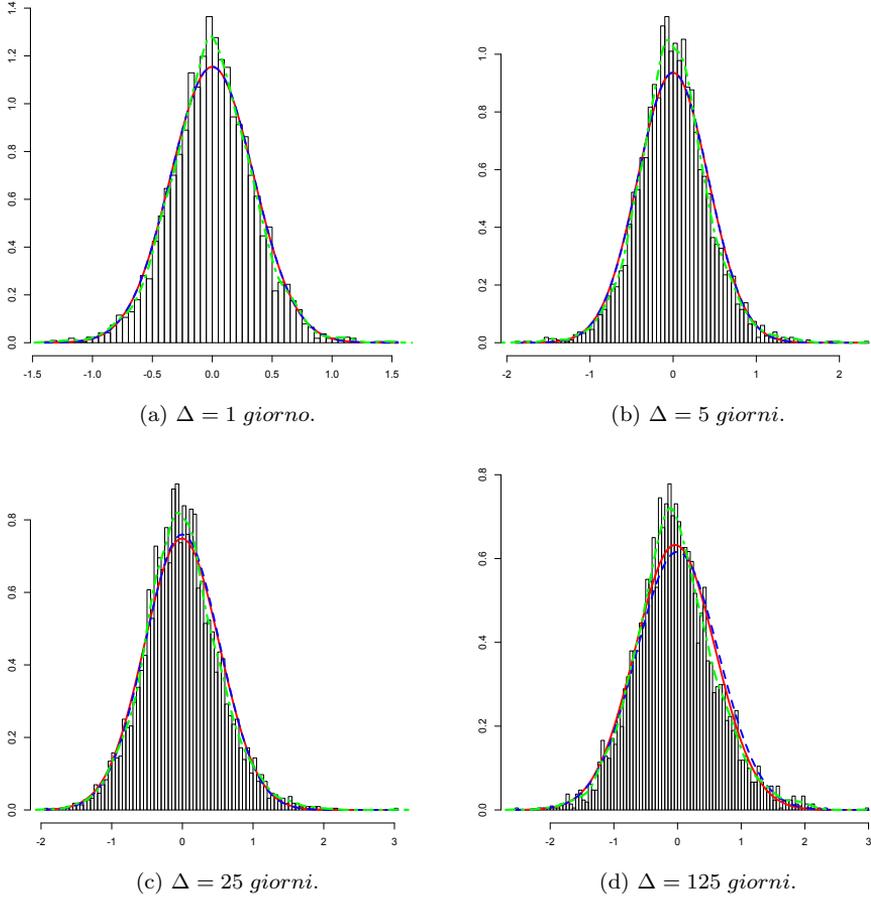


Figura 1.4: Istogrammi per vari ritardi di Δ degli incrementi $\log \sigma_{t+\Delta} - \log \sigma_t$ della log-volatilità dell'indice S&P500. In rosso la densità della curva normale con media e varianza adattate ai dati empirici, mentre in blu con linea tratteggiata quella riscalata con Δ^H , più precisamente la densità della curva normale con media nulla e varianza pari al prodotto tra la varianza di $\log \sigma_{t+1} - \log \sigma_t$ e Δ^{2H} .

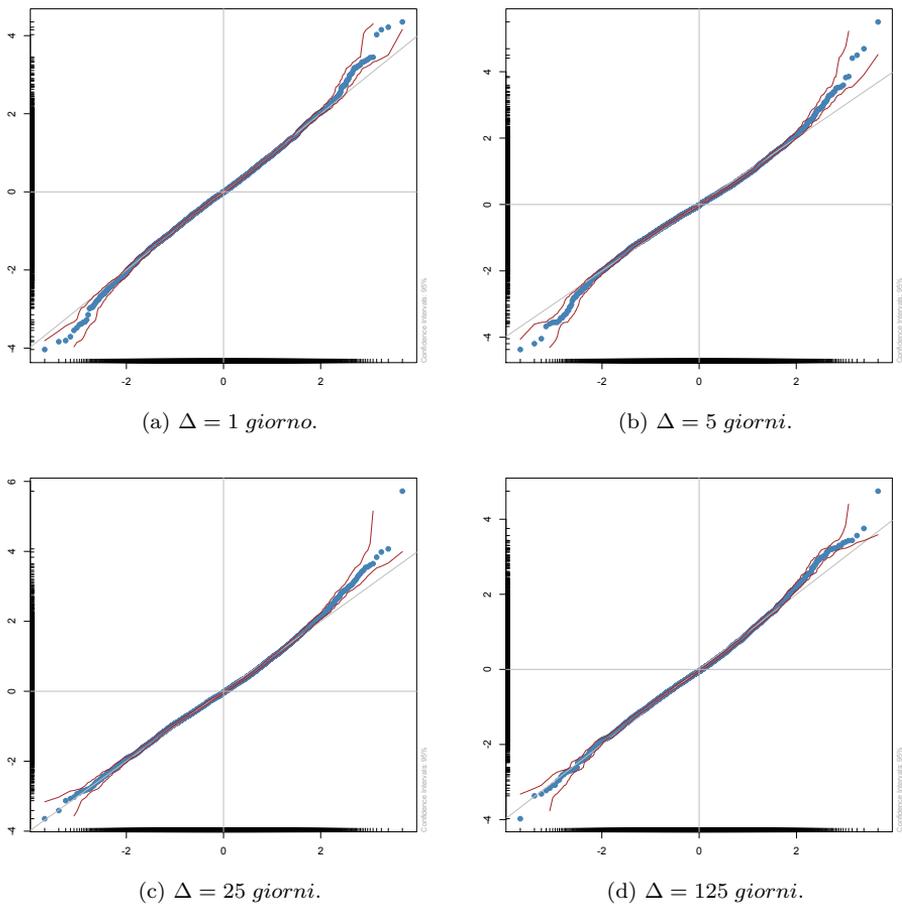


Figura 1.5: $Q-Q$ plot per vari ritardi di Δ della distribuzione empirica degli incrementi $\log \sigma_{t+\Delta} - \log \sigma_t$ della log-volatilità dell'indice S&P500. In rosso le bande di confidenza al 95%, in celeste i quantili empirici e la retta i quantili teorici della normale standard.

Capitolo 2

Il modello RFSV

In questo capitolo verrà specificato il modello Rough Fractional Stochastic Volatility (in breve RFSV). Si mostrerà come questo modello riproduca le evidenze empiriche descritte nel capitolo precedente. Verranno calcolate le funzioni di autocovarianza, varianza e correlazione del modello RFSV. Si mostreranno dei confronti grafici della funzione di autocovarianza della (log)-volatilità del modello e dei dati. Grazie a questi grafici e alle analisi svolte, si mostrerà che questa funzione non si comporti come una funzione potenza, come ampiamente creduto, ma abbia un andamento esponenziale. Infine verranno messi a confronto i grafici della volatilità dei dati e del modello e si noterà come questi abbiano la stessa struttura. In particolare si osserva che il comportamento della volatilità è di tipo frattale.

2.1 Specificazione del modello

Nel capitolo precedente si è mostrato empiricamente che gli incrementi di log-volatilità di diversi titoli godono di una proprietà di scala con parametro di regolarità pressoché costante e che le loro distribuzioni sono vicine a quella Gaussiana. Queste evidenze suggeriscono in modo naturale un semplice modello:

$$\log \sigma_{t+\Delta} - \log \sigma_t = \nu(B_{t+\Delta}^H - B_t^H), \quad (2.1)$$

dove B^H è un moto Browniano frazionario con indice di Hurst H pari alla regolarità misurata del processo di volatilità e ν è una costante reale positiva.

L'Equazione (2.1) si potrebbe riscrivere sotto la forma:

$$\sigma_t = \sigma \exp(\nu B_t^H), \quad (2.2)$$

dove σ è un'altra opportuna costante positiva. Infatti per la stazionarietà degli incrementi e il modello descritto in (2.1) si ha:

$$\log \sigma_{t+\Delta} - \log \sigma_t = \log \sigma_\Delta - \log \sigma_0 \stackrel{(2.1)}{=} \nu(B_\Delta^H - B_0^H)$$

dove B_0^H è nullo q.c. e considerandone l'esponenziale si ottiene

$$\sigma_\Delta = \sigma_0 e^{\nu B_\Delta^H},$$

ora prendendo più generalmente $\Delta = t$ e ponendo $\sigma = \sigma_0$ si arriva all'espressione dell'Equazione (2.2).

Tuttavia questo modello non è stazionario. La condizione di stazionarietà è auspicabile sia dal punto di vista matematico, per una migliore utilizzabilità, sia per garantire ragionevolezza al modello per tempi molto grandi. Queste motivazioni conducono a imporre la stazionarietà modellizzando la log-volatilità come un processo di tipo Ornstein-Uhlenbeck frazionario (in breve processo OUF).

Un processo OUF stazionario $\{X_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ è definito come la soluzione stazionaria dell'equazione differenziale stocastica:

$$dX_t = -\alpha(X_t - m)dt + \nu dB_t^H, \quad (2.3)$$

dove $m \in \mathbb{R}$ e ν, α sono parametri reali positivi. Per ulteriori dettagli si rimanda il lettore all'Appendice A sulla parte dei processi Ornstein-Uhlenbeck frazionari in Sezione A.5. Si osservi come l'Equazione (2.3) non è altro che la versione differenziale dell'Equazione integrale (A.18) in Appendice A. Come per il classico processo Ornstein-Uhlenbeck, esiste una forma esplicita per la soluzione che è data da:

$$X_t = m + \nu \int_{-\infty}^t e^{-\alpha(t-s)} dB_s^H. \quad (2.4)$$

Si ricorda che in questo caso l'integrale stocastico rispetto al moto Browniano frazionario è un integrale di Riemann-Stieltjes (ovvero traiettoria per traiettoria).

Si arriva così alla specificazione finale del modello RFSV, modellizzando quindi gli incrementi della log-volatilità come incrementi del processo stazionario OUF:

$$\log \sigma_{t+\Delta} - \log \sigma_t = X_{t+\Delta} - X_t. \quad (2.5)$$

Riscrivendo l'Equazione (2.5) sotto un'altra forma si ha:

$$\sigma_t = C \exp(X_t), \quad t \in [0, T], \quad (2.6)$$

dove C è una costante e il processo $\{X_t\}_{t \in [0, T]}$ soddisfa l'Equazione (2.4) per qualche $\nu > 0$, $\alpha > 0$, $m \in \mathbb{R}$ e $H < 1/2$ è la regolarità misurata della volatilità. L'Equazione (2.6) è ottenuta utilizzando nuovamente la stazionarietà degli incrementi e il nuovo modello descritto in (2.5):

$$\log \sigma_{t+\Delta} - \log \sigma_t = \log \sigma_\Delta - \log \sigma_0 \stackrel{(2.5)}{=} X_\Delta - X_0.$$

Ponendo $X_0 = \xi$, $\sigma_0 = \sigma$ e considerandone l'esponenziale si ottiene

$$\sigma_\Delta = \sigma_0 e^{X_\Delta} e^{-\xi},$$

ora prendendo più generalmente $\Delta = t$ e ponendo $C = \sigma_0 e^{-\xi}$ si arriva all'espressione dell'Equazione (2.6).

Tale modello descritto in (2.5) è infatti stazionario. Tuttavia, se $\alpha \ll 1/T$, la log-volatilità si comporta localmente (per scale temporali più piccole di T) come un moto Browniano frazionario. Questa osservazione si formalizza tramite la seguente Proposizione espressa in [18].

Proposizione 1. *Sia B^H un MBF e $X^\alpha = X$ definita dall'Equazione (2.4) per un dato $\alpha > 0$. Allora*

$$\mathbb{E} \left(\sup_{t \in [0, T]} |X_t^\alpha - X_0^\alpha - \nu B_t^H| \right) \xrightarrow{\alpha \rightarrow 0} 0.$$

Dimostrazione. Partendo dall'Equazione (2.4) e applicando l'integrazione per parti *, si ottiene

$$X_t^\alpha = \nu B_t^H - \int_{-\infty}^t \nu \alpha e^{-\alpha(t-s)} B_s^H ds + m. \quad (2.7)$$

Ora, considerando la stessa Equazione (2.4) per $t=0$, cioè

$$X_0^\alpha = \nu \int_{-\infty}^0 e^{\alpha s} dB_s^H + m,$$

*La formula d'integrazione per parti nel nostro caso è data da:

$$\int_0^T f(t) dB_t^H(\omega) = f(T)B_T^H(\omega) - f(0)B_0^H(\omega) - \int_0^T B_t^H(\omega) d(f(t)).$$

integrando nuovamente per parti si ha:

$$X_0^\alpha = - \int_{-\infty}^0 \nu \alpha e^{\alpha s} B_s^H ds + m. \quad (2.8)$$

Sottraendo le due Equazioni (2.7) e (2.8) si trova:

$$(X_t^\alpha - X_0^\alpha) - \nu B_t^H = - \int_0^t \nu \alpha e^{-\alpha(t-s)} B_s^H ds - \int_{-\infty}^0 \nu \alpha (e^{-\alpha(t-s)} - e^{\alpha s}) B_s^H ds.$$

Di conseguenza,

$$\begin{aligned} \sup_{t \in [0, T]} |(X_t^\alpha - X_0^\alpha) - \nu B_t^H| &\leq \sup_{t \in [0, T]} \left| \int_0^t \nu \alpha e^{-\alpha(t-s)} B_s^H ds \right| + \\ &+ \sup_{t \in [0, T]} \left| \int_{-\infty}^0 \nu \alpha (e^{-\alpha(t-s)} - e^{\alpha s}) B_s^H ds \right| \leq \\ &\leq \int_0^T \nu \alpha \sup_{s \in [0, T]} (e^{-\alpha(T-s)}) \sup_{s \in [0, T]} |B_s^H| ds + \\ &+ \int_{-\infty}^0 \nu \alpha \sup_{t \in [0, T]} ((e^{-\alpha(t-s)} - e^{\alpha s}) |B_s^H|) ds = \\ &= \nu \alpha T \widehat{B}_T^H + \int_{-\infty}^0 \nu \alpha (e^{\alpha s} - e^{-\alpha(T-s)}) \widehat{B}_s^H ds, \end{aligned}$$

con $\widehat{B}_t^H \doteq \sup_{s \in [0, t]} |B_s^H|$. Utilizzando la seguente disuguaglianza massimale per il MBF (per maggiori dettagli si rimanda il lettore alla fonte [23]) per $p, T > 0$:

$$\mathbb{E}((\widehat{B}_T^H)^p) = \mathbb{E}((\widehat{B}_1^H)^p) T^{pH},$$

si ottiene

$$\mathbb{E} \left(\sup_{t \in [0, T]} |(X_t^\alpha - X_0^\alpha) - \nu B_t^H| \right) \leq c \left(\nu \alpha T T^H + \int_{-\infty}^0 \nu \alpha (T \alpha e^{\alpha s}) |s|^H ds \right).$$

con c una qualche costante. Ora, mandando α a 0 si vede facilmente che la quantità a destra dell'ultima disuguaglianza va a zero. \square

La Proposizione 1 implica che nel modello RFSV, se $\alpha \ll 1/T$ e ci si limita all'intervallo $[0, T]$ d'interesse, si può procedere come se il processo di log-volatilità sia un MBF. Infatti, semplicemente ponendo $\alpha = 0$, l'Equazione (2.4)

dà $X_t - X_s = \nu(B_t^H - B_s^H)$ e si ritrova immediatamente il semplice modello del MBF non-stazionario (2.1). Infatti con $\alpha=0$ l'Equazione (2.4) diventa:

$$\begin{aligned} X_t - X_s &= \nu \left(\int_{-\infty}^t dB_r^H - \int_{-\infty}^s dB_r^H \right) + m - m = \\ &\stackrel{s \leq t}{=} \nu \left(\int_{-\infty}^s dB_r^H + \int_s^t dB_r^H - \int_{-\infty}^s dB_r^H \right) = \nu \int_s^t dB_r^H = \\ &\stackrel{\text{per parti}}{=} \nu \left(1B_t^H - 1B_s^H - \int_s^t B_r^H 0dr \right). \end{aligned}$$

Il seguente Corollario implica che l'esatta proprietà di scala del moto Browniano frazionario, come abbiamo visto dai dati empirici in (1.8), è riprodotta approssimativamente dal processo Ornstein-Uhlenbeck frazionario quando α è piccolo.

Corollario 1. *Siano $q > 0$, $t > 0$ e $\Delta > 0$. Allora si ha*

$$\mathbb{E} \left(|X_{t+\Delta}^\alpha - X_t^\alpha|^q \right) \xrightarrow{\alpha \rightarrow 0} \nu^q K_q \Delta^{qH}.$$

Dimostrazione. Per prima cosa si riscrive la formula della covarianza per il processo stazionario OUF:

$$\text{Cov}(X_{t+\Delta}^\alpha, X_t^\alpha) = K \int_{\mathbb{R}} e^{i\Delta x} \frac{|x|^{1-2H}}{\alpha^2 + x^2} dx, \quad (2.9)$$

con

$$K = \frac{\nu^2 \Gamma(2H + 1) \sin(\pi H)}{2\pi}.$$

Questa formulazione della covarianza non è altro che una riscrittura dell'Equazione (A.22) in Appendice A. Ora osserviamo che:

$$\mathbb{E} \left((X_{t+\Delta}^\alpha - X_t^\alpha)^2 \right) = 2\text{Var}(X_t^\alpha) - 2\text{Cov}(X_{t+\Delta}^\alpha, X_t^\alpha), \quad (2.10)$$

infatti ponendo la media del processo $\{X_t^\alpha\}_{t \in \mathbb{R}}$ uguale a una certa costante μ ovvero: $\mathbb{E}(X_t^\alpha) = \mu$ e sapendo che il processo è stazionario cioè sia la sua media

che la sua varianza non cambiano nel tempo si ha:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left((X_{t+\Delta}^\alpha - X_t^\alpha)^2\right) &= \mathbb{E}\left((X_{t+\Delta}^\alpha)^2 + (X_t^\alpha)^2 - 2(X_{t+\Delta}^\alpha X_t^\alpha)\right) = \\
&= \mathbb{E}\left((X_{t+\Delta}^\alpha)^2\right) + \mathbb{E}\left((X_t^\alpha)^2\right) - 2\mathbb{E}(X_{t+\Delta}^\alpha X_t^\alpha) + 2\mu^2 - 2\mu^2 = \\
&= \mathbb{V}ar(X_{t+\Delta}^\alpha) + \mathbb{V}ar(X_t^\alpha) - 2\left(\mathbb{E}(X_{t+\Delta}^\alpha X_t^\alpha) - \mu^2\right) = \\
&= 2\mathbb{V}ar(X_t^\alpha) - 2\mathbb{C}ov(X_{t+\Delta}^\alpha, X_t^\alpha).
\end{aligned}$$

Allora dall'Equazione (2.10) sostituendo l'espressione della covarianza e varianza dell'Equazione (2.9) risulta essere vera la seguente uguaglianza:

$$\mathbb{E}\left((X_{t+\Delta}^\alpha - X_t^\alpha)^2\right) = 2K \int_{\mathbb{R}} (1 - e^{i\Delta x}) \frac{|x|^{1-2H}}{\alpha^2 + x^2} dx.$$

Questo implica che per un Δ fissato, $\mathbb{E}\left(|X_{t+\Delta}^\alpha - X_t^\alpha|^2\right)$ è uniformemente limitata da:

$$2K \int_{\mathbb{R}} (1 - e^{i\Delta x}) \frac{|x|^{1-2H}}{x^2} dx.$$

Inoltre, $X_{t+\Delta}^\alpha - X_t^\alpha$ è una variabile aleatoria Gaussiana e perciò per ogni q , il suo momento di ordine $(q+1)$ è uniformemente limitato (in α) e ciò significa che la famiglia $|X_{t+\Delta}^\alpha - X_t^\alpha|^q$ è uniformemente integrabile. Quindi, utilizzando la Proposizione 1 e la stazionarietà degli incrementi si ottiene la seguente convergenza:

$$\mathbb{E}\left(|X_{t+\Delta}^\alpha - X_t^\alpha|^q\right) \xrightarrow{\alpha \rightarrow 0} \nu^q \mathbb{E}\left(|B_{t+\Delta}^H - B_t^H|^q\right) = \nu^q K_q \Delta^{qH}.$$

□

2.2 Funzioni di autocovarianza del modello RFSV

Dalla Proposizione 1 e dal Corollario 1, si può dedurre facilmente il seguente Corollario.

Corollario 2. *Siano $q > 0$, $t > 0$ e $\Delta > 0$. Allora quando α tende a zero si ha:*

$$\mathbb{C}ov(X_t^\alpha, X_{t+\Delta}^\alpha) = \mathbb{V}ar(X_t^\alpha) - \frac{1}{2}\nu^2 \Delta^{2H} + o(1), \quad (2.11)$$

dove $o(1)$ tende a zero quando α tende a zero.

Dimostrazione. Per il Corollario 1 si ha:

$$\mathbb{E}\left(|X_{t+\Delta}^\alpha - X_t^\alpha|^q\right) \xrightarrow{\alpha \rightarrow 0} \nu^q K_q \Delta^{qH}. \quad (2.12)$$

Ricordando che per $q=2$ si ha la seguente uguaglianza:

$$\mathbb{E}\left((X_{t+\Delta}^\alpha - X_t^\alpha)^2\right) = 2\text{Var}(X_t^\alpha) - 2\text{Cov}(X_{t+\Delta}^\alpha, X_t^\alpha), \quad (2.13)$$

già espressa nell'Equazione (2.10), allora prendendo $K_2=1$, si considera il MBF standard ovvero $\mathbb{E}((B_1^H)^2) = \sigma_0^2 = 1$, dalle relazioni (2.12) e (2.13) si ottiene:

$$\mathbb{E}\left((X_{t+\Delta}^\alpha - X_t^\alpha)^2\right) = 2\text{Var}(X_t^\alpha) - 2\text{Cov}(X_{t+\Delta}^\alpha, X_t^\alpha) \xrightarrow{\alpha \rightarrow 0} \nu^2 \Delta^{2H},$$

ovvero

$$\text{Cov}(X_{t+\Delta}^\alpha, X_t^\alpha) \xrightarrow{\alpha \rightarrow 0} \text{Var}(X_t^\alpha) - \frac{1}{2}\nu^2 \Delta^{2H}.$$

Quindi quando α tende a zero si ha l'Equazione (2.11) ovvero la tesi. □

Di conseguenza, nel modello RFSV (2.5), per t fissato, la covarianza tra X_t e $X_{t+\Delta}$ è lineare rispetto a Δ^{2H} . Questo risultato è ben soddisfatto empiricamente. Per esempio, in Figura 2.1 per l'indice S&P500, si nota come la funzione di autocovarianza empirica della log-volatilità sia lineare rispetto a Δ^{2H} . Infatti si osserva che i valori della funzione $\text{Cov}(\log \sigma_t, \log \sigma_{t+\Delta})$ (in blu) sono molto vicini alla retta rossa che rappresenta il seguente modello lineare:

$$\text{Cov}(\log \sigma_t, \log \sigma_{t+\Delta}) = a\Delta^{2H} + b,$$

dove al solito a è il coefficiente angolare della retta e b l'intercetta. Grazie a [11] si ha un'esatta formula per la funzione di autocovarianza della log-volatilità per il modello RFSV [†]:

$$\begin{aligned} \text{Cov}(\log \sigma_t, \log \sigma_{t+\Delta}) = & \frac{H(2H-1)\nu^2}{2\alpha^{2H}} e^{-\alpha\Delta} \left[e^{2\alpha\Delta} \int_{\alpha\Delta}^{\infty} \frac{e^{-u}}{u^{2-2H}} du + \right. \\ & \left. \int_0^{\alpha\Delta} \frac{e^u}{u^{2-2H}} du - \Gamma(2H-1) \right] + O(e^{-\alpha\Delta}), \end{aligned} \quad (2.14)$$

[†]Ricordo anche che:

$$\Gamma(2H-1) = \int_0^{\infty} e^{-u} u^{2H-2} du.$$

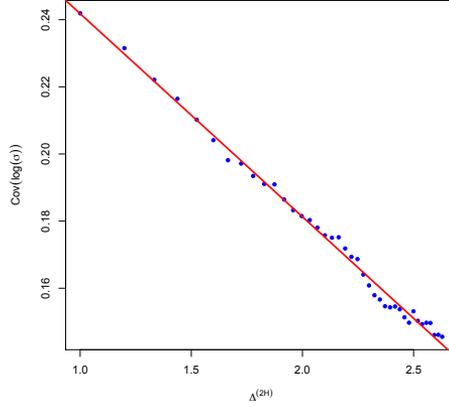


Figura 2.1: Autocovarianza della log-volatilità come una funzione di Δ^{2H} per $H=0.131$ nel caso $q=2$ per l'indice S&P500.

con $O(e^{-\alpha\Delta}) = e^{-\alpha\Delta}\nu^2 \left[\mathbb{E} \left(\left(\int_{-\infty}^0 e^{\alpha u} dB_u^H \right)^2 \right) - \mathbb{E} \left(\int_{-\infty}^0 e^{\alpha u} dB_u^H \right) \mathbb{E} \left(\int_{-\infty}^{\Delta} e^{\alpha u} dB_u^H \right) \right]$ e di conseguenza otteniamo la seguente formula per la funzione di varianza della log-volatilità:

$$\text{Var}(\log \sigma_t) = \nu^2 \left[\mathbb{E} \left(\left(\int_{-\infty}^0 e^{\alpha u} dB_u^H \right)^2 \right) - \mathbb{E} \left(\int_{-\infty}^0 e^{\alpha u} dB_u^H \right)^2 \right]. \quad (2.15)$$

L'Equazione (2.15) si ottiene dall'Equazione (2.14) ponendo $\Delta=0$ infatti:

$$\begin{aligned} \text{Var}(\log \sigma_t) &= \text{Cov}(\log \sigma_t, \log \sigma_t) \stackrel{(2.14)}{=} \\ &= \frac{H(2H-1)\nu^2}{2\alpha^{2H}} \left[\Gamma(2H-1) - \int_0^\infty \frac{e^{-u}}{u^{2-2H}} du \right] + O(e^{-\alpha 0}) = \\ &= \frac{H(2H-1)\nu^2}{2\alpha^{2H}} (\Gamma(2H-1) - \Gamma(2H-1)) + O(e^{-\alpha 0}) = O(e^{-\alpha 0}). \end{aligned}$$

Vediamo nel dettaglio come si ottiene la formula per la funzione autocovarianza espressa nell'Equazione (2.14). Per prima cosa enunciamo il seguente Lemma, per la dimostrazione si rimanda il lettore alla fonte [11, p. 6].

Lemma 1. Sia B^H un MBF, $H \in (0, \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, 1]$, $\alpha > 0$ e $-\infty \leq a < b \leq c < d < \infty$. Allora

$$\mathbb{E} \left(\int_a^b e^{\alpha u} dB_u^H \int_c^d e^{\alpha v} dB_v^H \right) = H(2H-1) \int_a^b e^{\alpha u} \left(\int_c^d e^{\alpha v} (v-u)^{2H-2} dv \right) du.$$

Per i prossimi calcoli ci ispiriamo alla Dimostrazione del Teorema 2.3 in [11, p. 8]. Si considera il processo OUF stazionario

$$X_t^\alpha \doteq \nu \int_{-\infty}^t e^{-\alpha(t-u)} dB_u^H, \quad t \in \mathbb{R} \quad (2.16)$$

e se ne calcola la funzione di autocovarianza. Si osservi come l'Equazione in (2.16) sia equivalente all'Equazione (2.4) a meno di una costante additiva. Per comodità definiamo le due v.a. ξ_1 e ξ_2 come segue:

$$\xi_1 \doteq \frac{X_0^\alpha}{\nu} \stackrel{(2.16)}{=} \int_{-\infty}^0 e^{\alpha u} dB_u^H$$

e

$$\xi_2 \doteq \frac{X_\Delta^\alpha}{\nu e^{-\alpha\Delta}} \stackrel{(2.16)}{=} \int_{-\infty}^\Delta e^{\alpha u} dB_u^H.$$

Per il calcolo della funzione di autocovarianza successivamente verrà utilizzato il Lemma 1 prendendo i seguenti valori: $a = -\infty$, $b = 0$, $c = 0$ e $d = \Delta$.

$$\begin{aligned} \mathbb{C}ov(X_t^\alpha, X_{t+\Delta}^\alpha) &\stackrel{OUF \text{ stazionario}}{=} \mathbb{C}ov(X_0^\alpha, X_\Delta^\alpha) = \mathbb{E}(X_0^\alpha X_\Delta^\alpha) - \mathbb{E}(X_0^\alpha)\mathbb{E}(X_\Delta^\alpha) \stackrel{(2.16)}{=} \\ &= \mathbb{E} \left(\nu \int_{-\infty}^0 e^{\alpha u} dB_u^H \nu \int_{-\infty}^\Delta e^{-\alpha(\Delta-v)} dB_v^H \right) - \nu^2 e^{-\alpha\Delta} \mathbb{E}(\xi_1)\mathbb{E}(\xi_2) \stackrel{\Delta \geq 0}{=} \\ &= \nu^2 e^{-\alpha\Delta} \mathbb{E} \left[\int_{-\infty}^0 e^{\alpha u} dB_u^H \left(\int_{-\infty}^0 e^{\alpha v} dB_v^H + \int_0^\Delta e^{\alpha v} dB_v^H \right) \right] - \nu^2 e^{-\alpha\Delta} \mathbb{E}(\xi_1)\mathbb{E}(\xi_2) = \\ &= \nu^2 e^{-\alpha\Delta} \left[\mathbb{E}(\xi_1^2) + \mathbb{E} \left(\int_{-\infty}^0 e^{\alpha u} dB_u^H \int_0^\Delta e^{\alpha v} dB_v^H \right) - \mathbb{E}(\xi_1)\mathbb{E}(\xi_2) \right] = \\ (Si pone: &O(e^{-\alpha\Delta}) = e^{-\alpha\Delta} \nu^2 (\mathbb{E}(\xi_1^2) - \mathbb{E}(\xi_1)\mathbb{E}(\xi_2))) \text{ e si applica il Lemma 1} \\ &= \nu^2 e^{-\alpha\Delta} H(2H-1) \int_{-\infty}^0 e^{\alpha u} \left(\int_0^\Delta e^{\alpha v} (v-u)^{2H-2} dv \right) du + O(e^{-\alpha\Delta}) = \end{aligned}$$

(Applico il cambio di variabili: $x = \alpha v$, $w = \alpha u$. Il calcolo dello Jacobiano della trasformazione inversa dà $\frac{1}{\alpha^2}$ e il nuovo dominio è: $x \in (0, \alpha\Delta)$, $w \in (-\infty, 0)$.)

$$\begin{aligned}
&= e^{-\alpha\Delta} \nu^2 H(2H-1) \int_{-\infty}^0 e^w \left(\int_0^{\alpha\Delta} e^x \frac{1}{\alpha^{2H-2}} (x-w)^{2H-2} \frac{1}{\alpha^2} dx \right) dw + O(e^{-\alpha\Delta}) = \\
&= \frac{\nu^2}{\alpha^{2H}} H(2H-1) e^{-\alpha\Delta} \int_{-\infty}^0 \left(\int_0^{\alpha\Delta} e^{x+w} (x-w)^{2H-2} dx \right) dw + O(e^{-\alpha\Delta}) = \\
&\text{(Applico il cambio di variabili: } y = x-w, z = x+w. \text{ Il calcolo dello Jacobiano} \\
&\text{della trasformazione inversa dà } \frac{1}{2} \text{ e il nuovo dominio è: } D = A \cup B \text{ con} \\
&A = \{-y < z < y, 0 < y < \alpha\Delta\} \text{ e } B = \{-y < z < 2\alpha\Delta - y, \alpha\Delta < y < \infty\}.) \\
&= \frac{\nu^2 H(2H-1)}{2\alpha^{2H}} e^{-\alpha\Delta} \left[\int_0^{\alpha\Delta} y^{2H-2} \left(\int_{-y}^y e^z dz \right) dy + \right. \\
&\quad \left. + \int_{\alpha\Delta}^{\infty} y^{2H-2} \left(\int_{-y}^{2\alpha\Delta-y} e^z dz \right) dy \right] + O(e^{-\alpha\Delta}) = \\
&= \frac{\nu^2 H(2H-1)}{2\alpha^{2H}} e^{-\alpha\Delta} \left[\int_0^{\alpha\Delta} y^{2H-2} (e^y - e^{-y}) dy + \right. \\
&\quad \left. + \int_{\alpha\Delta}^{\infty} y^{2H-2} (e^{2\alpha\Delta-y} - e^{-y}) dy + O(e^{-\alpha\Delta}) = \right. \\
&= \frac{\nu^2 H(2H-1)}{2\alpha^{2H}} e^{-\alpha\Delta} \left[\int_0^{\alpha\Delta} y^{2H-2} e^y dy + \int_{\alpha\Delta}^{\infty} y^{2H-2} e^{2\alpha\Delta-y} dy + \right. \\
&\quad \left. - \int_0^{\infty} y^{2H-2} e^{-y} dy \right] + O(e^{-\alpha\Delta}) = \\
&= \frac{\nu^2 H(2H-1)}{2\alpha^{2H}} \left(e^{-\alpha\Delta} \int_0^{\alpha\Delta} e^y y^{2H-2} dy + e^{\alpha\Delta} \int_{\alpha\Delta}^{\infty} e^{-y} y^{2H-2} dy + \right. \\
&\quad \left. - e^{-\alpha\Delta} \int_0^{\infty} e^{-y} y^{2H-2} dy \right) + O(e^{-\alpha\Delta}) = \\
&= \frac{\nu^2 H(2H-1)}{2\alpha^{2H}} \left[e^{-\alpha\Delta} \int_0^{\alpha\Delta} e^y y^{2H-2} dy + e^{\alpha\Delta} \int_{\alpha\Delta}^{\infty} e^{-y} y^{2H-2} dy + \right. \\
&\quad \left. - e^{-\alpha\Delta} \Gamma(2H-1) \right] + O(e^{-\alpha\Delta}).
\end{aligned}$$

Quindi l'Equazione (2.14) si ottiene utilizzando il modello espresso in (2.5),

grazie al quale si ha:

$$\mathbb{C}ov(\log \sigma_t, \log \sigma_{t+\Delta}) = \mathbb{C}ov(X_t^\alpha, X_{t+\Delta}^\alpha).$$

Avendo calcolato la funzione di autocovarianza della log-volatilità, ora concentriamo la nostra attenzione sulla volatilità stessa. Grazie all'Equazione (2.6), ponendo $C=1$ si ha:

$$\mathbb{E}(\sigma_t \sigma_{t+\Delta}) = \mathbb{E}(e^{X_t^\alpha + X_{t+\Delta}^\alpha}),$$

con X^α definito dall'Equazione (2.4). Poiché X^α è un processo Gaussiano, ricordando che per $Z \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ si ha: $\mathbb{E}(e^Z) = e^{\mu + \frac{1}{2}\sigma^2}$ ed essendo $X_t^\alpha + X_{t+\Delta}^\alpha$ una v.a. Gaussiana si utilizza la trasformata di Laplace per v.a. Gaussiana multivariata [‡] deducendo che

$$\mathbb{E}(\sigma_t \sigma_{t+\Delta}) = e^{\mathbb{E}(X_t^\alpha) + \mathbb{E}(X_{t+\Delta}^\alpha) + \frac{1}{2}\text{Var}(X_t^\alpha) + \frac{1}{2}\text{Var}(X_{t+\Delta}^\alpha) + \mathbb{C}ov(X_t^\alpha, X_{t+\Delta}^\alpha)}.$$

Applicando ora il Corollario 2 e la stazionarietà del processo X^α , quando α è piccolo, otteniamo che $\mathbb{E}(\sigma_t \sigma_{t+\Delta})$ è approssimativamente uguale a

$$\exp\left(2\mathbb{E}(X_t^\alpha) + 2\text{Var}(X_t^\alpha)\right) \exp\left(-\nu^2 \frac{\Delta^{2H}}{2}\right). \quad (2.17)$$

Segue che nel modello RFSV, $\log(\mathbb{E}(\sigma_t \sigma_{t+\Delta}))$ è anche lineare in Δ^{2H} . Questa proprietà è nuovamente molto ben soddisfatta dai dati, come mostrato dalla Figura 2.2, dove si presenta il grafico del logaritmo della controparte empirica di $\mathbb{E}(\sigma_t \sigma_{t+\Delta})$ contro Δ^{2H} , per l'indice S&P500 con $H = 0.121$. In rosso è rappresentata la retta del seguente modello lineare:

$$\log(\mathbb{C}ov(\sigma_t, \sigma_{t+\Delta}) + \bar{\sigma}^2) = a\Delta^{2H} + b,$$

o equivalentemente

$$\mathbb{C}ov(\sigma_t, \sigma_{t+\Delta}) = e^b e^{a\Delta^{2H}} - \bar{\sigma}^2, \quad (2.18)$$

dove a e b sono rispettivamente il coefficiente angolare e l'intercetta della retta, mentre con $\bar{\sigma}$ si intende la media aritmetica delle volatilità fino al tempo t . Inoltre specifichiamo chi sia $\Phi(\Delta)$ in Figura 2.2:

$$\Phi(\Delta) \doteq \log(\mathbb{C}ov(\sigma_t, \sigma_{t+\Delta}) + \bar{\sigma}^2).$$

[‡]In particolare per $U \sim \mathcal{N}(\bar{\mu}, \bar{\sigma}^2)$ e $V \sim \mathcal{N}(\bar{\mu}, \bar{\sigma}^2)$ si ha:

$$\mathbb{E}(e^{U+V}) = e^{\bar{\mu} + \bar{\mu} + \frac{1}{2}\bar{\sigma}^2 + \frac{1}{2}\bar{\sigma}^2 + \frac{1}{2}2\text{C}ov(U, V)}.$$

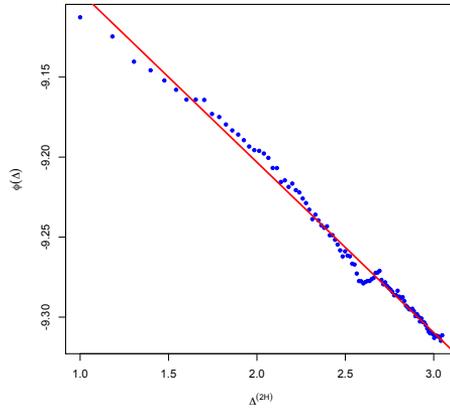


Figura 2.2: Controparte empirica di $\log(\mathbb{E}(\sigma_t \sigma_{t+\Delta}))$ come una funzione di Δ^{2H} per l'indice S&P500. In questo caso si è preso $\Delta = \{1, \dots, 100\}$ quindi ristimando H per $q=2$ si ha: $H=0.121$.

Si può quindi considerare $\Phi(\Delta)$ la controparte empirica del $\log(\mathbb{E}(\sigma_t \sigma_{t+\Delta}))$ grazie alla definizione di $\text{Cov}(\sigma_t, \sigma_{t+\Delta})$ e ponendo $\bar{\sigma} \doteq \mathbb{E}(\sigma_t) = \mathbb{E}(\sigma_{t+\Delta})$. L'ultima uguaglianza è vera in base all'Osservazione 1 del Capitolo 1, secondo la quale per Δ non troppo elevato, la media dell'incremento della volatilità è significativamente nulla quindi si ha $\mathbb{E}(\sigma_{t+\Delta}) = \mathbb{E}(\sigma_{t+\Delta} - \sigma_t) + \mathbb{E}(\sigma_t) = \mathbb{E}(\sigma_t)$. Osserviamo che è davvero cruciale mettere Δ^{2H} sull'asse delle ascisse di Figura 2.2, per recuperare linearità. In particolare un Corollario dell'Equazione (2.17) è che la funzione di autocovarianza della volatilità non decade come una funzione potenza come ampiamente creduto. Si mostra graficamente la prova di quanto si è appena affermato tramite la Figura 2.3, in cui si può osservare come un grafico log-log della funzione autocovarianza (in blu) non produca una linea retta. Infatti la retta in rosso in Figura 2.3 rappresenta il modello lineare:

$$\log(\text{Cov}(\sigma_t, \sigma_{t+\Delta})) = a \log(\Delta) + b. \quad (2.19)$$

Tale Equazione (2.19) mostra che la funzione di autocovarianza della volatilità vista come funzione in Δ è una funzione potenza in quanto è equivalente a

$$\text{Cov}(\sigma_t, \sigma_{t+\Delta}) = \Delta^a e^b.$$

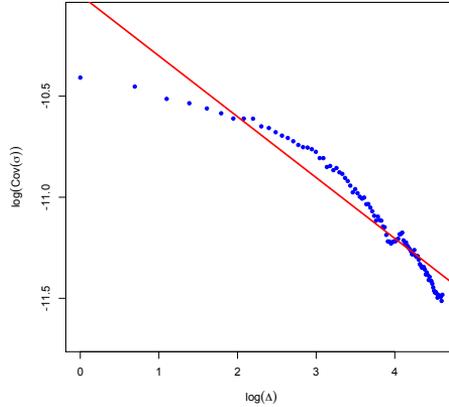


Figura 2.3: Controparte empirica di $\log(\mathbb{C}ov(\sigma_t, \sigma_{t+\Delta}))$ come una funzione di $\log(\Delta)$ per l'indice S&P500.

Si ricorda che la lunga memoria della volatilità è ampiamente accettata come evidenza empirica. Questo significa che la funzione di autocovarianza della (log) - volatilità $\mathbb{C}ov(\log(\sigma_t), \log(\sigma_{t+\Delta}))$ (o a volte $\mathbb{C}ov(\sigma_t, \sigma_{t+\Delta})$) va lentamente a zero quando $\Delta \rightarrow \infty$ e spesso ancora più precisamente, viene specificato che questa si comporta come una funzione potenza $\Delta^{-\gamma}$, con $\gamma < 1$ quando $\Delta \rightarrow \infty$. Ma abbiamo appena visto nei dati e nel nostro modello che entrambe le quantità della funzione autocovarianza non decadono come una funzione potenza infatti vale l'approssimazione:

$$\mathbb{C}ov(\log(\sigma_t), \log(\sigma_{t+\Delta})) \approx A - B\Delta^{2H}, \tag{2.20}$$

per qualche costante positiva A e B . L'Equazione (2.20) deriva dal Corollario 2. D'altra parte si ha anche la seguente approssimazione:

$$\mathbb{C}ov(\sigma_t, \sigma_{t+\Delta}) \approx C e^{-B\Delta^{2H}} - D \tag{2.21}$$

per qualche costante positiva C e D . Quest'ultima Equazione (2.21) deriva dalla definizione di covarianza e dall'Equazione (2.17). Inoltre si osservi che l'Equazione (2.21) è del tutto analoga all'Equazione (2.18). Tutto quello che si vuole dire qui è che la funzione di autocovarianza della (log-)volatilità non si comporta come una funzione potenza.

2.3 Funzione di correlazione del modello RFSV

Vediamo ora quale sia la funzione di correlazione per il nostro modello RFSV con il MBF standard. Assumiamo in base all'Equazione (2.2)

$$\sigma_t = \hat{\sigma}_t e^{\nu B_t^H}, \quad (2.22)$$

dove con $\hat{\sigma}_t$ si intende la media aritmetica delle volatilità fino al tempo t . Ora ricordando che l'incremento di un MBF standard ha distribuzione Gaussiana ovvero: $B_t^H \sim \mathcal{N}(0, |t|^{2H})$ analogo per $B_{t+\Delta}^H$, per la trasformata di Laplace si ha:

$$\mathbb{E}\left(e^{\nu(B_t^H + B_{t+\Delta}^H)}\right) = e^{\frac{1}{2}\nu^2 \text{Var}(B_t^H) + \frac{1}{2}\nu^2 \text{Var}(B_{t+\Delta}^H) + \nu^2 \text{Cov}(B_t^H, B_{t+\Delta}^H)}, \quad (2.23)$$

inoltre la funzione di autocovarianza per un MBF standard è data da

$$\text{Cov}(B_t^H, B_{t+\Delta}^H) = \frac{1}{2}(|t|^{2H} + |t + \Delta|^{2H} - |\Delta|^{2H}), \quad (2.24)$$

allora supponendo $t > 0$ e $\Delta > 0$, si ottiene:

$$\begin{aligned} \text{Cov}(\sigma_t, \sigma_{t+\Delta}) &\stackrel{(2.22)}{=} \text{Cov}\left(\hat{\sigma}_t e^{\nu B_t^H}, \hat{\sigma}_{t+\Delta} e^{\nu B_{t+\Delta}^H}\right) = \\ &= \mathbb{E}\left(\hat{\sigma}_t \hat{\sigma}_{t+\Delta} e^{\nu(B_t^H + B_{t+\Delta}^H)}\right) - \mathbb{E}\left(\hat{\sigma}_t e^{\nu B_t^H}\right) \mathbb{E}\left(\hat{\sigma}_{t+\Delta} e^{\nu B_{t+\Delta}^H}\right) = \\ &= \hat{\sigma}_t \hat{\sigma}_{t+\Delta} \left[\mathbb{E}\left(e^{\nu(B_t^H + B_{t+\Delta}^H)}\right) - \mathbb{E}\left(e^{\nu B_t^H}\right) \mathbb{E}\left(e^{\nu B_{t+\Delta}^H}\right) \right] \stackrel{(2.23)}{=} \\ &= \hat{\sigma}_t \hat{\sigma}_{t+\Delta} \left[\exp\left(\frac{\nu^2}{2} t^{2H} + \frac{\nu^2}{2} (t + \Delta)^{2H} + \nu^2 \text{Cov}(B_t^H, B_{t+\Delta}^H)\right) + \right. \\ &\quad \left. - \exp\left(\frac{\nu^2}{2} t^{2H} + \frac{\nu^2}{2} (t + \Delta)^{2H}\right) \right] \\ &= \hat{\sigma}_t \hat{\sigma}_{t+\Delta} \exp\left(\frac{\nu^2}{2} t^{2H} + \frac{\nu^2}{2} (t + \Delta)^{2H}\right) \left[\exp\left(\nu^2 \text{Cov}(B_t^H, B_{t+\Delta}^H)\right) - 1 \right] \stackrel{(2.24)}{=} \\ &= \hat{\sigma}_t \hat{\sigma}_{t+\Delta} \exp\left(\frac{\nu^2}{2} (t^{2H} + (t + \Delta)^{2H})\right) \left[\exp\left(\frac{\nu^2}{2} (t^{2H} + (t + \Delta)^{2H} - \Delta^{2H})\right) - 1 \right]. \end{aligned}$$

Quindi per $t \rightarrow \infty$

$$\text{Cov}(\sigma_t, \sigma_{t+\Delta}) \simeq \hat{\sigma}_t \hat{\sigma}_{t+\Delta} e^{\left(\frac{\nu^2}{2} (t^{2H} + (t+\Delta)^{2H})\right)} e^{\left(\frac{\nu^2}{2} (t^{2H} + (t+\Delta)^{2H} - \Delta^{2H})\right)}.$$

Analogamente per $t \rightarrow \infty$

$$\mathbb{V}ar(\sigma_t) = \mathbb{C}ov(\sigma_t, \sigma_t) \simeq \hat{\sigma}_t^2 \exp\left(\frac{\nu^2}{2} 2t^{2H}\right) \exp\left(\frac{\nu^2}{2} 2t^{2H}\right),$$

e

$$\mathbb{V}ar(\sigma_{t+\Delta}) = \mathbb{C}ov(\sigma_{t+\Delta}, \sigma_{t+\Delta}) \simeq \hat{\sigma}_{t+\Delta}^2 \exp\left(\frac{\nu^2}{2} 2(t+\Delta)^{2H}\right) \exp\left(\frac{\nu^2}{2} 2(t+\Delta)^{2H}\right).$$

Da quanto appena visto la funzione di correlazione per il modello RFSV ha il seguente comportamento asintotico al divergere di t :

$$\rho(\Delta) \doteq \frac{\mathbb{C}ov(\sigma_t, \sigma_{t+\Delta})}{\sqrt{\mathbb{V}ar(\sigma_t)\mathbb{V}ar(\sigma_{t+\Delta})}} \simeq \exp\left(-\frac{\nu^2}{2} \Delta^{2H}\right).$$

2.4 Confronto di volatilità tra dati e modello

Vediamo in Figura 2.4 due grafici di volatilità. Il primo in blu è il grafico della volatilità dell'indice S&P500 fatto su 4340 giorni di *trading*, mentre il secondo in verde è un esempio di traiettoria di volatilità generata dal modello espresso nell'Equazione (2.2), dove la volatilità viene modellizzata attraverso il MBF. Una prima reazione alla Figura 2.4 è che i grafici della volatilità simulata e reale sembrano avere caratteristiche molto simili ovvero hanno la stessa struttura. In particolare, in entrambi i casi, periodi persistenti di alta volatilità si alternano con periodi di bassa volatilità. Esaminando più attentamente la serie di volatilità empirica, si osserva che la traiettoria della volatilità su una finestra temporale limitata sembra esibire le stesse tipologie di proprietà qualitative di quelle della traiettoria globale, come per esempio periodi di alta e bassa attività. Questo tipo di comportamento della volatilità, detto frattale, è stato studiato sia empiricamente che teoricamente per esempio nelle seguenti fonti: [3], [9] e [21].

A livello visivo, si osserva che questo comportamento frattale è riprodotto anche nel nostro modello. Vediamo in che modo. Denotiamo con $L^{x,H}$ la legge del MBF geometrico con esponente di Hurst H e x la volatilità su $[0, 1]$, ovvero: $\{e^{xB_t^H}\}_{t \in [0,1]}$. Allora, quando α è molto piccolo, il processo di volatilità riscaltato su $[0, \Delta]$: $\{\sigma_{t\Delta}/\sigma_0\}_{t \in [0,1]}$, ha approssimativamente la legge $L^{\nu\Delta^H, H}$. Infatti per l'Equazione (2.2) si ha

$$\frac{\sigma_{t\Delta}}{\sigma_0} = e^{\nu B_{t\Delta}^H} \stackrel{d}{=} e^{\nu\Delta^H B_t^H}.$$

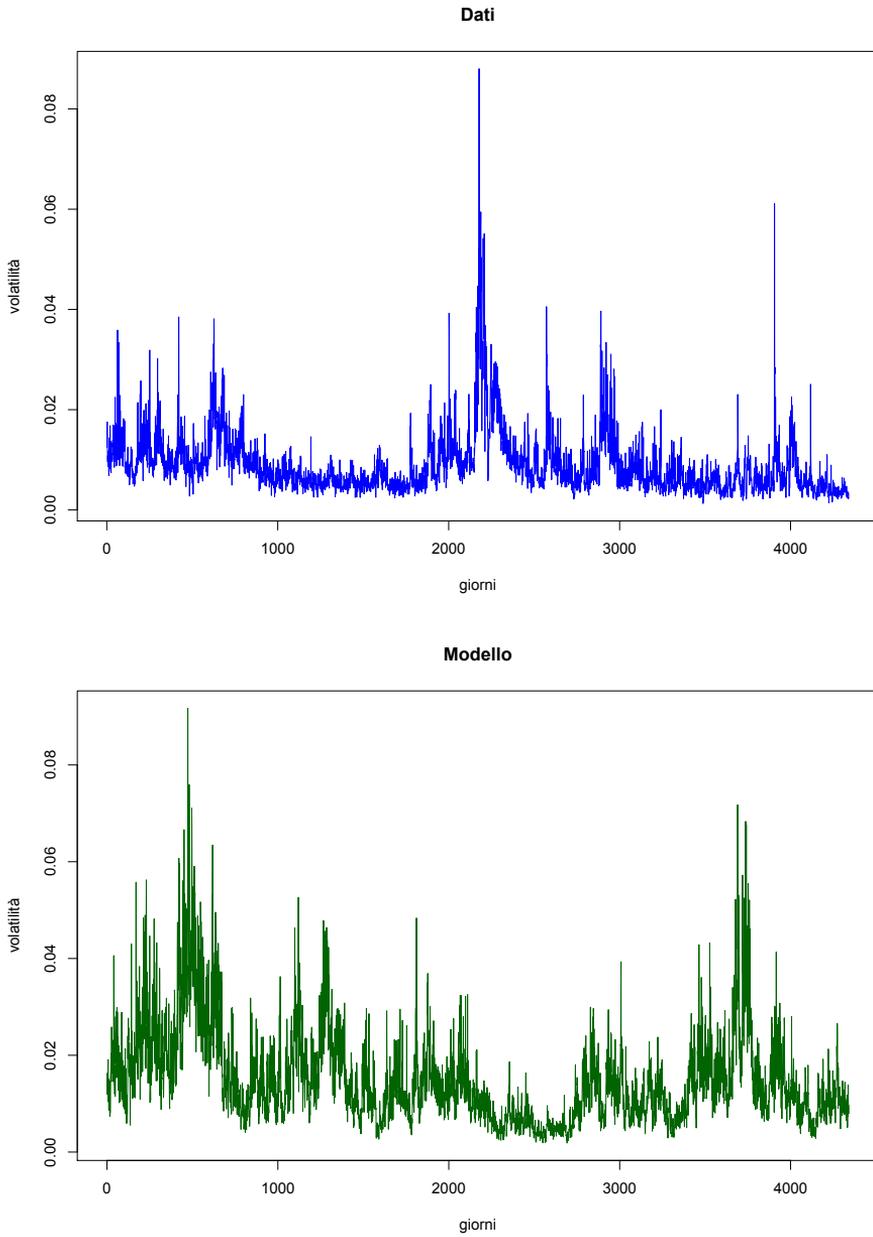


Figura 2.4: Volatilità dell'indice S&P500 (sopra) e del modello (sotto).

Ora si osservi che per H piccolo, la funzione f così definita:

$$\begin{aligned} \forall \Delta \in \mathbb{N} \text{ fissato, } f: (0, 1) &\rightarrow \mathbb{R} \\ H &\mapsto f(H) = \Delta^H \end{aligned}$$

aumenta lentamente. In particolare per $0 < H < \frac{1}{4}$ la funzione f aumenta ancora più lentamente ovvero i suoi valori al variare di Δ sono molto vicini gli uni agli altri. Quindi, su un ampio *range* di scale di osservazioni Δ , i processi di volatilità riscaldati su $[0, \Delta]$ hanno approssimativamente la stessa legge. Vediamolo meglio tramite il seguente Esempio.

Esempio 3. Se si considera una scala di osservazione di 1 giorno e quella di 5 anni (ovvero 1250 giorni di apertura), il coefficiente ν che caratterizza la legge del processo di volatilità è moltiplicato “solamente” da $1250^{0.13} = 2.53$. Se invece prendiamo 10 anni cioè 2500 giorni di *trading*, il coefficiente ν è moltiplicato per $2500^{0.13} = 2.77$.

Di conseguenza risulta che nel modello RFSV, il processo di volatilità su un giorno assomiglia al processo di volatilità su un decennio poiché il coefficiente moltiplicativo risulta essere relativamente piccolo rispetto alla scala considerata.

Appendice A

Moto Browniano frazionario

Viene trattata qui una breve introduzione sui processi (non necessariamente Gaussiani) *self-similar* a incrementi stazionari con indice di Hurst $H \in \mathbb{R}^+$. Si vedrà come il moto Browniano sia un esempio di questo tipo di processo e, sebbene i suoi incrementi siano indipendenti, quelli di altri processi possono mostrare dipendenza a lungo raggio, o lunga memoria. Se il processo è Gaussiano, la dipendenza a lungo raggio si manifesta tramite la presenza di cicli di ogni ordine e infine mediante la covarianza, che decade molto lentamente a zero. Usualmente in gergo statistico, si dice che la funzione di covarianza decade a zero come una funzione potenza ovvero, al crescere dei ritardi (*lags*) la funzione di covarianza tende a zero con lo stesso andamento di una funzione potenza.

In generale, per le serie storiche stazionarie si ha l'alternanza di cicli di ogni ordine. Quando si guarda solo a brevi periodi di tempo, allora sembrano esserci dei cicli o dei *trends* locali. Tuttavia, osservando l'intero periodo delle serie, non esiste in modo evidente nessun ciclo persistente. Sembra piuttosto che si verifichino i cicli di (quasi) tutte le frequenze, sovrapponendosi tra loro in sequenza casuale, perciò non esiste un *trend* globale. Questo tipo di fenomeno, ovvero l'alternarsi di cicli, è chiamato effetto Joseph, con riferimento alla figura biblica di Joseph, che si trovò ad affrontare lunghi periodi di abbondanza seguiti da lunghi periodi di carestia. Verranno fatte considerazioni sul comportamento della funzione di autocovarianza per vari *range* dell'indice H . Per un $H \in (0, 1)$ fissato, esiste fondamentalmente un unico processo Gaussiano H -*sssi* (cioè *self-similar* a incrementi stazionari con indice H), chiamato moto Browniano frazionario. I suoi incrementi sono detti rumori (*noise*) Gaussiani frazionari. Tali incrementi sono stazionari e se $H \in (\frac{1}{2}, 1)$ allora esibiscono dipendenza a lungo raggio e tale

effetto è chiamato effetto Hurst in onore del famoso idrologo Hurst che scoprì questo tipo di comportamento quando studiò come regolarizzare il flusso del fiume Nilo.

Per finire si vedrà qualche rappresentazione integrale del moto Browniano frazionario e si definiranno anche i processi Ornstein-Uhlenbeck frazionari.

A.1 Processi *self-similar*

Definizione 1. Un processo stocastico a valori reali $X = \{X_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ è detto *self-similar* con indice $H \in \mathbb{R}^+$ e si denota con *H-ss* se: $\forall a > 0$ le distribuzioni finito-dimensionali dei due processi $\{X_{at}\}_{t \in \mathbb{R}}$ e $\{a^H X_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ sono uguali, i.e.

$$X_{at} \stackrel{d}{=} a^H X_t, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

H è detto *parametro di self-similarity* o *coefficiente di scala* o anche *indice di Hurst*.

Definizione 2. Un processo stocastico a valori reali $X = \{X_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ ha *incrementi stazionari* se $\forall t \in \mathbb{R}$,

$$X_{t+h} - X_t \stackrel{d}{=} X_h - X_0, \quad \forall h \in \mathbb{R}.$$

Definizione 3. Un processo $X = \{X_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ è detto *H-sssi* se è *self-similar* con indice H e ha incrementi stazionari.

Esempio 4. Il moto Browniano è *H-sssi* con $H = \frac{1}{2}$.

Si Ricordi che il moto Browniano $B = \{B_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ è un processo Gaussiano con media nulla e funzione di autocovarianza $\text{Cov}(B_t, B_s) = \min(t, s)$, $\forall t, s \in \mathbb{R}$.

Inoltre le leggi finito-dimensionali di un processo Gaussiano sono univocamente determinate dalle sue funzioni di media e autocovarianza.

Quindi basta controllare che siano verificate le due uguaglianze:

$$\mathbb{E}(B_{at}) = \mathbb{E}(a^{\frac{1}{2}} B_t) \quad e \quad \text{Cov}(B_{at}, B_{as}) = \text{Cov}(a^{\frac{1}{2}} B_t, a^{\frac{1}{2}} B_s) \quad \forall a > 0, t, s \in \mathbb{R}.$$

La prima è banale poiché per definizione di moto Browniano e le proprietà del valore atteso si ha

$$\mathbb{E}(B_{at}) = 0, \quad \forall at \in \mathbb{R} \quad e \quad \mathbb{E}(a^{\frac{1}{2}} B_t) = a^{\frac{1}{2}} \mathbb{E}(B_t) = 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Mentre per la seconda si ha che

$$\begin{aligned} \text{Cov}(a^{\frac{1}{2}} B_t, a^{\frac{1}{2}} B_s) &= \mathbb{E}(a^{\frac{1}{2}} B_t a^{\frac{1}{2}} B_s) = a \mathbb{E}(B_t B_s) = a \text{Cov}(B_t B_s) = \\ &= a \min(t, s) = \min(at, as) = \text{Cov}(B_{at}, B_{as}). \end{aligned}$$

Osserviamo ora alcune proprietà di questi tipi di processi e facciamo alcune considerazioni.

- Per ogni $t \neq 0$ fissato, con $t \in \mathbb{R}$ si ha:

$$X_t \stackrel{d}{=} |t|^H X_{\text{sign } t} = \begin{cases} t^H X_1 & \text{se } t > 0, \\ |t|^H X_{-1} & \text{se } t < 0. \end{cases}$$

Considerando solo il primo caso per $t > 0$, $X_t \stackrel{d}{=} t^H X_1$, questa relazione implica i seguenti comportamenti limite del processo X_t quando t tende a infinito:

1. se $H < 0$ allora $X_t \xrightarrow{d} 0$,
2. se $H = 0$ allora $X_t \stackrel{d}{=} X_1$,
3. se $H > 0$ e $X_t \neq 0$ allora $|X_t| \xrightarrow{d} \infty$.

Analogamente per t che converge a 0 si ha:

1. se $H < 0$ e $X_t \neq 0$ allora $|X_t| \xrightarrow{d} \infty$,
2. se $H = 0$ allora $X_t \stackrel{d}{=} X_1$,
3. se $H > 0$ allora $X_t \xrightarrow{d} 0$.

Se si esclude il caso banale in cui il processo è identicamente nullo $X_t \equiv 0$ allora queste proprietà implicano che il processo X_t non è stazionario a meno che H non sia nullo. Ma l'eccezione in cui $H = 0$ non è interessante, poiché ciò implica che $\forall t > 0$, X_t è uguale a X_1 con probabilità 1.

Se lo scopo è modellare serie stazionarie diventa necessario considerare solo i processi H -*sssi*. Allora il *range* di H deve essere ristretto ad $H > 0$. Il motivo è che se gli incrementi di un processo H -*ss* sono stazionari allora il processo è anomalo per valori negativi di H . Per la trattazione tecnica nel caso $H = 0$ e $H < 0$ si rimanda il lettore alle fonti [30] e [29], in particolare a pagina 4 nel Teorema 1.3 della fonte [30].

- Se il processo $X = \{X_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ (oppure $X = \{X_t\}_{t \geq 0}$) è H -*ss* allora per ogni $a > 0$, $X_0 = 0$ quasi certamente. Infatti $X_0 = X_{a0} \stackrel{d}{=} a^H X_0$, che deve valere $\forall a > 0$ quindi necessariamente $X_0 = 0$.

- Un processo H -ss non-degenere, ovvero non identicamente uguale a una costante, non può essere stazionario *, perché se lo fosse si avrebbe per ogni $a > 0$ e $t > 0$, $X_t \stackrel{d}{=} X_{at} \stackrel{d}{=} a^H X_t$ e si otterrebbe una contraddizione a causa del comportamento limite del seguente processo $\{a^H X_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ (oppure $\{a^H X_t\}_{t \geq 0}$) ovvero: $a^H X_t \rightarrow \infty$ quando $a \rightarrow \infty$. Tuttavia esiste un'importante corrispondenza tra i processi *self-similar* e quelli stazionari. La seguente Proposizione mostra proprio questa corrispondenza, per una dimostrazione si rimanda alla fonte [27, p. 313].

Proposizione 2. *Se il processo $X = \{X_t\}_{t > 0}$ è H -ss, allora il processo $Y = \{Y_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ definito per ogni $t \in \mathbb{R}$ come*

$$Y_t = e^{-tH} X_{e^t},$$

è stazionario. Viceversa, se il processo $\{Y_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ è stazionario, allora

$$X_t = t^H Y_{\ln t}, \quad \forall t > 0,$$

è H -ss.

- Un'altra proprietà molto utile è che se un processo $\{X_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ è H -sssi, allora per t fissato, $X_{-t} \stackrel{d}{=} -X_t$. Infatti poiché $X_0 = 0$ si può scrivere $X_{-t} = X_{-t} - X_0 = X_{-t+t} - X_t = X_0 - X_t = -X_t$.
- Dato $X = \{X_t\}_{t \geq 0}$ un processo H -sssi a varianza finita allora valgono le seguenti proprietà:

1. se $H \neq 1$ allora $\forall t \geq 0$, $\mathbb{E}(X_t) = 0$. Infatti dalla definizione di processo *self-similar* e dalla stazionarietà degli incrementi, si ha:

$$\begin{aligned} a^H \mathbb{E}(X_t) &= \mathbb{E}(X_{at}) = \mathbb{E}(X_{\frac{a}{2}t + \frac{a}{2}t} - X_{\frac{a}{2}t} + X_{\frac{a}{2}t}) = \\ &= \mathbb{E}(X_{\frac{a}{2}t + \frac{a}{2}t} - X_{\frac{a}{2}t}) + \mathbb{E}(X_{\frac{a}{2}t}) = \mathbb{E}(X_{\frac{a}{2}t} - X_0) + \mathbb{E}(X_{\frac{a}{2}t}) = \\ &= 2\mathbb{E}(X_{\frac{a}{2}t}) = 2\mathbb{E}\left(\left(\frac{a}{2}\right)^H X_t\right) \end{aligned}$$

ottenendo così $a^H \mathbb{E}(X_t) = 2\mathbb{E}\left(\left(\frac{a}{2}\right)^H X_t\right) \Leftrightarrow \mathbb{E}(X_t) = 0$.

*Un processo $X = \{X_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ è detto *strettamente stazionario* o anche solo *stazionario* se $X_{t+h} \stackrel{d}{=} X_t$, per ogni $h \in \mathbb{R}$.
Si osservi che quando un processo è stazionario allora anche i suoi incrementi sono stazionari.

2. Sia $\sigma^2 = \mathbb{E}((X_t - X_{t-1})^2) = \mathbb{E}((X_1)^2)$ la varianza del processo incremento $\{X_t - X_{t-1}\}_{t \geq 0}$ che non dipende da t . Allora la varianza del processo X è:

$$\text{Var}(X_t) = \mathbb{E}(X_t^2) = \mathbb{E}((|t|^H X_{\text{sign}t})^2) = |t|^{2H} \mathbb{E}(X_1^2) = |t|^{2H} \sigma^2.$$

In particolare:

$$\mathbb{E}((X_t - X_s)^2) = \mathbb{E}((X_{t-s} - X_0)^2) = |t-s|^{2H} \sigma^2. \quad (\text{A.1})$$

D'altra parte per $H \neq 1$, è nota la seguente relazione:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}((X_t - X_s)^2) &= \text{Var}(X_t - X_s) = \\ &= \mathbb{E}(X_t^2) + \mathbb{E}(X_s^2) - 2\text{Cov}(X_t, X_s). \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

Quindi unendo le ultime due Equazioni (A.1) e (A.2), si ottiene una formula per la funzione di covarianza per il processo X :

$$\text{Cov}(X_t, X_s) = \frac{1}{2} \sigma^2 (|t|^{2H} + |s|^{2H} - |t-s|^{2H}).$$

A.2 Moto Browniano frazionario

È noto che la funzione caratteristica di una variabile aleatoria (in breve v.a.) determina univocamente la sua distribuzione. Infatti: sia X una v.a. m -dimensionale e ν la sua legge, la sua funzione caratteristica per $\theta \in \mathbb{R}^m$ è

$$\varphi_X(\theta) = \mathbb{E}(e^{i\langle \theta, X \rangle}) = \int_{\mathbb{R}^m} e^{i\langle \theta, x \rangle} \nu(dx),$$

dove $\langle x, y \rangle$ indica il prodotto scalare standard in \mathbb{R}^m .

Se una successione $\{\nu_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ di leggi su \mathbb{R}^m converge debolmente verso la legge ν , si ha naturalmente la convergenza delle rispettive funzioni caratteristiche ovvero $\varphi_{X_n}(\theta) \rightarrow \varphi_X(\theta)$ per ogni $\theta \in \mathbb{R}^m$. Il viceversa vale grazie al Teorema di convergenza di Paul Lévy: se $\varphi_{X_n}(\theta) \rightarrow \psi(\theta)$ per ogni $\theta \in \mathbb{R}^m$ e se $\psi(\cdot)$ è continua in zero, allora $\psi(\cdot)$ è la funzione caratteristica di una probabilità ν su \mathbb{R}^m e $\nu_n \rightarrow \nu$ debolmente.

Esempio 5. Consideriamo ora il caso in \mathbb{R} , ovvero per $m=1$. Sia $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ una v.a. Gaussiana a valori reali, allora la sua funzione caratteristica è pari a, $\forall \theta \in \mathbb{R}$,

$$\varphi_X(\theta) = \mathbb{E}(e^{i\theta X}) = e^{i\theta\mu} e^{-\frac{1}{2}\sigma^2\theta^2}.$$

In generale, sia X una v.a. a valori in \mathbb{R}^m , si dice che X è *Gaussiana* se esistono un vettore $\mu \in \mathbb{R}^m$ e una matrice $m \times m$ semidefinita positiva † $\Sigma = (\Sigma_{jk})_{j,k=1}^m$, tale che $\forall \theta \in \mathbb{R}^m$

$$\varphi_X(\theta) = \exp\left(i\langle \theta, \mu \rangle - \frac{1}{2}\langle \theta, \Sigma \theta \rangle\right) = \exp\left(i \sum_{j=1}^m \mu_j \theta_j - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m \Sigma_{jk} \theta_j \theta_k\right).$$

Si scrive $X \sim \mathcal{N}(\mu, \Sigma)$. Inoltre Σ è chiamata la *matrice di covarianza di X* , dove $\Sigma_{jk} = \text{Cov}(X_j, X_k) = \mathbb{E}(X_j X_k) - \mathbb{E}(X_j)\mathbb{E}(X_k)$. Si tratta di una matrice la cui diagonale contiene le varianze delle componenti X_1, \dots, X_m , ovvero le marginali e al di fuori della diagonale vi sono le loro covarianze.

Una famiglia di v.a. reali $\{X_t\}_{t \in I}$, con I un insieme arbitrario, è detta *processo Gaussiano* se per ogni sottoinsieme finito J di I , $J = \{t_1, \dots, t_m\}$, il vettore $(X_{t_1}, \dots, X_{t_m})$ è un vettore aleatorio Gaussiano. Chiaramente le distribuzioni finito-dimensionali di X sono determinate dalle funzioni reali $\mu: I \rightarrow \mathbb{R}$, $\mu(t) = \mathbb{E}(X_t)$ e $A: I \times I \rightarrow \mathbb{R}$, $A(t, s) = \text{Cov}(X_t, X_s)$. Vale anche il viceversa, ovvero date le funzioni $\mu: I \rightarrow \mathbb{R}$ e $A: I \times I \rightarrow \mathbb{R}$ tale che $\forall t_1, \dots, t_m$ la matrice $(A(t_j, t_k))_{j,k=1}^m$ è semidefinita positiva, allora esiste un processo Gaussiano X tale che $\mathbb{E}(X_t) = \mu(t)$ e $\text{Cov}(X_t, X_s) = A(t, s)$.

Il seguente Lemma (per una dimostrazione si rimanda alla fonte [27, p. 106]) detta le condizioni affinché la seguente funzione

$$(t, s) \mapsto |t|^{2H} + |s|^{2H} - |t - s|^{2H} \quad \text{per } t, s \in \mathbb{R} \quad (\text{A.3})$$

sia semidefinita positiva.

Lemma 2. *Per ogni $0 < \alpha \leq 2$ e $m \geq 1$, la funzione*

$$(s_1, s_2) \mapsto A(s_1, s_2) = |s_1|^\alpha + |s_2|^\alpha - |s_1 - s_2|^\alpha \quad \text{per } s_1, s_2 \in \mathbb{R}^m$$

è semidefinita positiva.

Fissato $0 < H \leq 1$, grazie al precedente Lemma 2 nel caso $m = 1$ la funzione definita in (A.3) è semidefinita positiva. Quindi esisterà un processo Gaussiano $\{X_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ con media zero e funzione di covarianza data esattamente da:

$$\text{Cov}(X_t, X_s) = \frac{1}{2} \text{Var}(X_1) \left(|t|^{2H} + |s|^{2H} - |t - s|^{2H} \right). \quad (\text{A.4})$$

† Una matrice Σ a valori reali di dimensione $m \times m$ è detta semidefinita positiva se per ogni vettore non nullo $x \in \mathbb{R}^m$ è verificata la seguente disuguaglianza: $x^T \Sigma x \geq 0$.

È semplice controllare che questo processo $X = \{X_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ è H -*sssi*. Infatti per quanto appena detto, essendo X un processo Gaussiano, basta controllare la funzione di media e quella di covarianza:

$$\mathbb{E}(X_{at}) = \mathbb{E}(a^H X_t) \quad e \quad \mathbb{Cov}(X_{at}, X_{as}) = \mathbb{Cov}(a^H X_t, a^H X_s) \quad \forall a > 0, t, s \in \mathbb{R}.$$

I conti sono analoghi a quelli svolti nell'Esempio 4 per mostrare che il moto Browniano è un processo H -*sssi*. Questo processo X è detto *moto Browniano frazionario*.

Ora ci chiediamo se esistano altri processi H -*sssi* Gaussiani.

In particolare, il seguente Lemma afferma l'unicità di tale processo quando $0 < H < 1$ e illustra inoltre il caso $H = 1$.

Lemma 3. *Supponiamo che $\{X_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ sia un processo (non-degenere [‡]) H -*sssi* a varianza finita. Allora per $0 < H \leq 1$, $X_0 = 0$ q.c. e vale l'Equazione (A.4) per la funzione autocovarianza del processo.*

Inoltre per ogni $t \in \mathbb{R}$,

(i) *nel caso in cui $0 < H < 1$ allora $\mathbb{E}(X_t) = 0$*

(ii) *se $H = 1$ allora $X_t = tX_1$ q.c.*

Seguendo l'ipostazione di [27] per convenzione identificheremo tutti quei processi stocastici che differiscono solo da una costante moltiplicativa. Quindi, si dirà che $X^{(1)} = \{X_t^{(1)}\}_{t \in \mathbb{R}}$ e $X^{(2)} = \{X_t^{(2)}\}_{t \in \mathbb{R}}$ sono processi *diversi* se non esiste alcuna costante C tale che $X_t^{(1)} \stackrel{d}{=} C X_t^{(2)}$ per ogni $t \in \mathbb{R}$.

Il Lemma 3 implica che tutti i processi H -*sssi* Gaussiani hanno la funzione autocovarianza (A.4). Per un H fissato, questi processi differiscono solo da una costante moltiplicativa e dalla loro media se $H = 1$. È utile quindi definire il moto Browniano frazionario come segue:

Definizione 4. Un processo H -*sssi* Gaussiano $X = \{X_t\}_{t \in \mathbb{R}}$, con $0 < H \leq 1$ è chiamato *moto Browniano frazionario* (MBF) e denotato con $B^H = \{B_t^H\}_{t \in \mathbb{R}}$. B^H è detto *moto Browniano frazionario standard* se $\sigma_0^2 \equiv \text{Var}(X_1) = 1$.

Il seguente Corollario è un'immediata conseguenza della Definizione 4 e del Lemma 3.

Corollario 3. *Fissato $0 < H \leq 1$ e $\sigma_0^2 = \mathbb{E}(X_1^2)$, le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

[‡]Un processo stocastico è detto *degenere* quando assume un unico valore.

- (i) il processo $\{X_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ è Gaussiano e H -sssi.
- (ii) Il processo $\{X_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ è un moto Browniano frazionario con parametro di self-similarity H .
- (iii) Il processo $\{X_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ è Gaussiano, ha media nulla (se $H \neq 1$) e funzione di autocovarianza definita dall'Equazione (A.4).

Vediamo come il moto Browniano sia un caso particolare del moto Browniano frazionario.

Esempio 6. Quando $H = \frac{1}{2}$ il moto Browniano frazionario $\{B_t^H\}_{t \in \mathbb{R}}$ è il moto Browniano, poiché l'Equazione (A.4) della funzione di autocovarianza si riduce a

$$\text{Cov}(B_t^{\frac{1}{2}}, B_s^{\frac{1}{2}}) = \mathbb{E}(B_t^{\frac{1}{2}} B_s^{\frac{1}{2}}) = \begin{cases} \sigma_0^2 \min(t, s) & \text{se } t \text{ ed } s \text{ hanno lo stesso segno,} \\ 0 & \text{se } t \text{ ed } s \text{ hanno segno opposto.} \end{cases}$$

Infatti controllando caso per caso si ha:

$$t, s > 0 \Rightarrow \text{Cov}(B_t^{\frac{1}{2}}, B_s^{\frac{1}{2}}) = \begin{cases} \frac{1}{2} \sigma_0^2 (t + s - t + s) = \sigma_0^2 s = \sigma_0^2 \min(t, s), & t > s \\ \frac{1}{2} \sigma_0^2 (t + s + t - s) = \sigma_0^2 t = \sigma_0^2 \min(t, s), & t < s. \end{cases}$$

$$t, s < 0 \Rightarrow \mathbb{E}(B_t^{\frac{1}{2}} B_s^{\frac{1}{2}}) = \begin{cases} \frac{1}{2} \sigma_0^2 (-t - s - t + s) = -\sigma_0^2 t = \sigma_0^2 \min(t, s), & t > s \\ \frac{1}{2} \sigma_0^2 (-t - s + t - s) = -\sigma_0^2 s = \sigma_0^2 \min(t, s), & t < s. \end{cases}$$

$$t > 0, s < 0 \Rightarrow t > s \Rightarrow \text{Cov}(B_t^{\frac{1}{2}}, B_s^{\frac{1}{2}}) = \frac{1}{2} \sigma_0^2 (t - s - t + s) = 0.$$

$$t < 0, s > 0 \Rightarrow t < s \Rightarrow \text{Cov}(B_t^{\frac{1}{2}}, B_s^{\frac{1}{2}}) = \frac{1}{2} \sigma_0^2 (-t + s + t - s) = 0.$$

Inoltre poiché dalla Definizione 4 di MBF si ha che $\sigma_0^2 = \text{Var}(B_1^{\frac{1}{2}})$, allora ponendo $\sigma_0^2 = 1$ si trova che $\{B_t^{\frac{1}{2}}\}_{t \in \mathbb{R}}$ è un moto Browniano.

Osservazione 2. Nell'Esempio 6 appena visto, si è presa in considerazione la forma più generale possibile del moto Browniano frazionario e di conseguenza anche quella per il moto Browniano. Infatti abbiamo considerato sia il caso in cui la variabile t è maggiore di zero sia quello in cui t è strettamente negativa.

Esempio 7. Fissato $\sigma_0^2 = \mathbb{E}(X_1^2)$, per $H = 1$ dal Lemma 3 e dalla Definizione 4 di MBF si ha $B_t^1 = tB_1^1 = t(Z + \mu)$, dove $\mu \in \mathbb{R}$, $B_t^1 \sim \mathcal{N}(\mu, |t|^2 \sigma_0^2)$ e $Z \sim \mathcal{N}(0, \sigma_0^2)$.

Osservazione 3. Poiché il caso $H = 1$ è degenero, nel moto Browniano frazionario si considera $H \in (0, 1)$. D'ora in avanti $H \in (0, 1)$.

Descriviamo alcune proprietà d'invarianza del MBF mediante la seguente Proposizione.

Proposizione 3. *Sia B^H un moto Browniano frazionario con indice di Hurst $H \in (0, 1)$. Allora sono verificate le seguenti proprietà:*

1. (omogeneità temporale) per ogni $s > 0$, il processo $\{B_{t+s}^H - B_s^H\}_{t \geq 0}$ è un MBF con indice di Hurst H ;
2. (simmetria) il processo $\{-B_t^H\}_{t \geq 0}$ è un MBF con indice di Hurst H ;
3. (di scala) per ogni $c > 0$, il processo $\{c^H B_{\frac{t}{c}}^H\}_{t \geq 0}$ è un MBF con indice di Hurst H ;
4. (inversione temporale) il processo X definito da $X_0 = 0$ e $X_t = t^{2H} B_{\frac{1}{t}}^H$ per $t > 0$ è anch'esso un MBF con indice di Hurst H .

Dall'espressione della covarianza del MBF si deducono alcune proprietà sulle sue traiettorie (per le dimostrazioni rimandiamo a [14]).

Proposizione 4. *Per $H \in (0, 1)$ le traiettorie del MBF B^H sono q.c. Hölder continue[§] di ogni ordine $\alpha < H$. Per ogni $T \in (0, \infty)$ e $\alpha < H$,*

$$\sup_{0 \leq s < t \leq T} \frac{|B_t^H - B_s^H|^2}{|t - s|^{2\alpha}} \text{ ha momenti esponenziali finiti.}$$

Osservazione 4. Sia $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$, poiché i momenti di una variabile Gaussiana sono funzioni della sua varianza, per ogni $a > 0$ si ha:

$$\mathbb{E}(|B_t^H - B_s^H|^a) = C_a |t - s|^{aH}, \tag{A.5}$$

dove

$$\mathbb{E}(|Z|^a) = C_a \quad \text{e} \quad (B_t^H - B_s^H) \sim \mathcal{N}(0, |t - s|^{2H} \sigma_0^2).$$

[§]Sia x_0 un punto di \mathbb{R}^n e f una funzione definita su un insieme limitato D contenente x_0 . Se $0 < \alpha < 1$, si dice che f è Hölder continua con esponente α in x_0 se la quantità

$$\sup_{x \in D} \frac{|f(x) - f(x_0)|}{|x - x_0|^\alpha} \quad \text{è finita.}$$

Proposizione 5. *Le traiettorie del moto Browniano frazionario B^H q.c. hanno variazione infinita su ogni intervallo, i.e. sia $\Pi = \{a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b\}$ un sottoinsieme finito dell'intervallo $[a, b]$, per ogni $0 \leq a < b$*

$$V_{[a,b]}(B^H) = \sup_{\Pi} V_{[a,b]}(B^H, \Pi) = \sup_{\Pi} \sum_{i=1}^n |B_{t_i}^H - B_{t_{i-1}}^H| = \infty \quad q.c.$$

Proposizione 6. *Per $\alpha > H$ le traiettorie del moto Browniano frazionario non sono q.c. in alcun punto localmente Hölder continue di ordine α .*

A.3 Rappresentazione integrale del moto Browniano frazionario

Il moto Browniano frazionario ha diverse rappresentazioni integrali. Se ne vedranno in particolare due: la rappresentazione spettrale e quella in media mobile. Per maggiori approfondimenti e per le dimostrazioni delle Proposizioni e dei Teoremi che seguiranno in questa sezione, si rimanda il lettore alle seguenti fonti: [24], [27], [15], [20] e [22].

A.3.1 Rappresentazione spettrale

In questo paragrafo è conveniente usare la seguente parametrizzazione $\kappa = H - \frac{1}{2}$ in accordo con l'integrazione frazionaria.

Prima di iniziare a definire la classe di integrandi nel dominio spettrale per $-\frac{1}{2} < \kappa < \frac{1}{2}$, tramite la seguente Proposizione si ricorda come si costruiscono in generale le classi di integrandi C .

Proposizione 7. *Sia \mathcal{E} l'insieme delle funzioni elementari (o a gradino) f definite da*

$$f(u) = \sum_{k=1}^n f_k \mathbb{1}_{[u_k, u_{k+1})}(u), \quad u \in \mathbb{R}, \quad (\text{A.6})$$

sia $\mathcal{I}^\kappa(f) = \int_{\mathbb{R}} f(u) dB_u^\kappa$ un integrale di $f \in \mathcal{E}$ rispetto al moto Browniano frazionario $B^\kappa = \{B_t^\kappa\}_{t \in \mathbb{R}}$ con $-1/2 < \kappa < 1/2$. Si supponga che C sia un insieme di funzioni deterministiche in \mathbb{R} tale che

- (1) C sia uno spazio dotato di prodotto interno $(f, g)_C$, per $f, g \in C$,
- (2) $\mathcal{E} \subset C$ e $(f, g)_C = \mathbb{E}(\mathcal{I}^\kappa(f)\mathcal{I}^\kappa(g))$, per $f, g \in \mathcal{E}$,

(3) l'insieme \mathcal{E} è denso in C .

Allora

(a) esiste un'isometria tra lo spazio C e il sottospazio lineare di

$\overline{\text{sp}}(B^\kappa) = \left\{ \text{v.a. Gaussiane } X \mid \mathcal{I}^\kappa(f_n) \xrightarrow{L^2} X, \text{ per qualche } (f_n) \subset \mathcal{E} \right\}$ che è un'estensione della mappa $f \mapsto \mathcal{I}^\kappa(f)$, per $f \in \mathcal{E}$,

(b) C è isometrico a $\overline{\text{sp}}(B^\kappa)$ stesso se e solo se C è completo.

Si osserva che la mappa d'isometria \mathcal{I}^κ potrebbe dipendere dallo spazio con prodotto interno C . In altre parole, se C_1 e C_2 sono due diverse classi di funzioni che soddisfano le condizioni della Proposizione 7, allora, a priori, non è chiaro se le mappe d'isometria corrispondenti, dette \mathcal{I}_1^κ e \mathcal{I}_2^κ , sono uguali su $C_1 \cap C_2$. Una condizione necessaria e sufficiente affinché siano uguali è $(f, g)_{C_1} = (f, g)_{C_2}$ per $f, g \in C_1 \cap C_2$. Per questo motivo, quando si considereranno nel seguito specifiche classi d'integrandi, compariranno le loro mappe d'isometria corrispondenti e si utilizzerà la stessa notazione solo se queste sono uguali.

Nel semplice caso in cui $\kappa = 0$, si può prendere $C = L^2(\mathbb{R})$. Essendo $L^2(\mathbb{R})$ completo, la mappa \mathcal{I}^0 è un'isometria tra gli spazi C e $\overline{\text{sp}}(B^0)$. Gli altri casi invece non sono così triviali.

Nel seguito si considererà $B^\kappa = \{B_t^\kappa\}_{t \in \mathbb{R}}$ come un MBF standard.

Il MBF standard B^κ con indice $-\frac{1}{2} < \kappa < \frac{1}{2}$ ha la seguente rappresentazione spettrale:

$$\{B_t^\kappa\}_{t \in \mathbb{R}} \stackrel{d}{=} \left\{ \frac{1}{c_2(\kappa)} \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{itx-1}}{ix} |x|^{-\kappa} d\tilde{B}_x \right\}_{t \in \mathbb{R}}, \quad (\text{A.7})$$

dove

$$c_2(\kappa) = \left(\frac{2\pi}{\Gamma(2\kappa + 2) \sin(\pi(\kappa + \frac{1}{2}))} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (\text{A.8})$$

e dove con $\Gamma(\cdot)$ si denota la funzione Gamma di Eulero [¶] e $\tilde{B} = B^{(1)} + iB^{(2)}$ è una misura complessa Gaussiana con $B^{(1)}$ e $B^{(2)}$ indipendenti e tali che $B^{(1)}(A) = B^{(1)}(-A)$, $B^{(2)}(A) = -B^{(2)}(-A)$ e $\mathbb{E}((B^{(1)}(A))^2) = \mathbb{E}((B^{(2)}(A))^2) = \frac{1}{2}|A|$ per ogni insieme Boreliano A con misura di Lebesgue finita.

[¶]Sia $z \in \mathbb{R}^+$ si definisce la funzione $\Gamma(\cdot)$ come integrale di Eulero di seconda specie:

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty x^{z-1} e^{-x} dx.$$

Integrando $\Gamma(z+1)$ per parti, si ottiene la seguente relazione $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$.

Si osserva ora che $(e^{itx-1})/(ix) = \widehat{\mathbb{1}}_{[0,t)}(x)$, dove \widehat{f} denota la trasformata di Fourier di una funzione f , cioè $\widehat{f}(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{ixu} f(u) du$. Allora, per $f \in \mathcal{E}$,

$$\mathcal{I}^\kappa(f) \doteq \frac{1}{c_2(\kappa)} \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(x) |x|^{-\kappa} d\widetilde{B}_x \quad (\text{A.9})$$

e quindi per $f, g \in \mathcal{E}$,

$$\mathbb{E}(\mathcal{I}^\kappa(f)\mathcal{I}^\kappa(g)) = \frac{1}{(c_2(\kappa))^2} \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(x) \overline{\widehat{g}(x)} |x|^{-2\kappa} dx \quad (\text{A.10})$$

con la barra, nella funzione \widehat{g} , si denota il complesso coniugato.

Ci si basa su quest'ultima formula (A.10) per introdurre il seguente spazio:

$$\widetilde{\Lambda}^\kappa = \left\{ f \mid f \in L^2(\mathbb{R}), \int_{\mathbb{R}} |\widehat{f}(x)|^2 |x|^{-2\kappa} dx < \infty \right\}, \quad \text{per } -\frac{1}{2} < \kappa < \frac{1}{2}. \quad (\text{A.11})$$

Il seguente Teorema definisce il prodotto interno in questo spazio $\widetilde{\Lambda}^\kappa$.

Teorema 1. *Per $-1/2 < \kappa < 1/2$, la classe delle funzioni $\widetilde{\Lambda}^\kappa$, definite in (A.11), è uno spazio lineare con prodotto interno definito da:*

$$(f, g)_{\widetilde{\Lambda}^\kappa} = \frac{1}{(c_2(H))^2} \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(x) \overline{\widehat{g}(x)} |x|^{-2\kappa} dx. \quad (\text{A.12})$$

L'insieme delle funzioni elementari \mathcal{E} è denso in $\widetilde{\Lambda}^\kappa$. Inoltre, lo spazio $\widetilde{\Lambda}^\kappa$ non è completo a meno che κ non sia uguale a zero.

Grazie al Teorema 1 ed all'Equazione (A.10) si riesce a mostrare che $\widetilde{\Lambda}^\kappa$ soddisfa le tre condizioni della Proposizione 7, quindi esiste una mappa d'isometria tra lo spazio $\widetilde{\Lambda}^\kappa$ e un sottospazio lineare di $\overline{\text{sp}}(B^\kappa)$ che è denotato da $\mathcal{I}^\kappa(f) = \int_{\mathbb{R}} f(u) dB_u^\kappa$, per $f \in \widetilde{\Lambda}^\kappa$. Poiché $\widetilde{\Lambda}^\kappa$ non è completo quando $\kappa \neq 0$, questo sottospazio lineare è un sottoinsieme stretto di $\overline{\text{sp}}(B^\kappa)$. L'integrale \mathcal{I}^κ così definito soddisfa le relazioni (A.9) e (A.10) per $f, g \in \widetilde{\Lambda}^\kappa$.

A.3.2 Rappresentazione in media mobile

Un'altra rappresentazione integrale per il moto Browniano frazionario è data da quella a media mobile.

Proposizione 8. Sia $0 < H < 1$. Allora il MBF standard $\{B_t^H\}_{t \in \mathbb{R}}$ ha la seguente rappresentazione integrale in media mobile:

$$\{B_t^H\}_{t \in \mathbb{R}} \stackrel{d}{=} \left\{ \frac{1}{C_1(H)} \int_{\mathbb{R}} \left(((t-s)_+)^{H-\frac{1}{2}} - ((-s)_+)^{H-\frac{1}{2}} \right) dB_s \right\}_{t \in \mathbb{R}},$$

dove

$$C_1(H) = \left\{ \int_0^\infty \left((1+s)^{H-\frac{1}{2}} - s^{H-\frac{1}{2}} \right)^2 ds + \frac{1}{2H} \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Una definizione molto popolare, basata su questo tipo di rappresentazione, è stata data da Mandelbrot e Van Ness.

Definizione 5. Siano $H \in (0, 1)$, $b_0 \in \mathbb{R}$ e $\{B_t^H(\omega)\}_{t \in \mathbb{R}}$ MBF standard che inizia al tempo $t=0$ dal valore b_0 cioè $B_0^H(\omega) = b_0$. Per $t > 0$, $B_t^H(\omega)$ è definito da:

$$B_t^H(\omega) = b_0 + \frac{1}{\Gamma(H + \frac{1}{2})} \left\{ \int_{-\infty}^0 \left((t-s)^{H-\frac{1}{2}} - (-s)^{H-\frac{1}{2}} \right) dB_s(\omega) + \int_0^t (t-s)^{H-\frac{1}{2}} dB_s(\omega) \right\}.$$

Equivalentemente:

$$B_{t_1}^H(\omega) - B_{t_2}^H(\omega) = \frac{1}{\Gamma(H + \frac{1}{2})} \left\{ \int_{-\infty}^{t_2} (t-s)^{H-\frac{1}{2}} dB_s(\omega) - \int_{-\infty}^{t_1} (t-s)^{H-\frac{1}{2}} dB_s(\omega) \right\}.$$

In generale, per $s < t$ e per una qualche costante c_H si può scrivere:

$$B_t^H - B_s^H = c_H \left\{ \int_s^t (t-u)^{H-\frac{1}{2}} dB_u + \int_{-\infty}^s \left((t-u)^{H-\frac{1}{2}} - (s-u)^{H-\frac{1}{2}} \right) dB_u \right\},$$

dove $\{B_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ è un moto Browniano standard. La normalizzazione $\mathbb{E}((B_1^H)^2) = 1$ è raggiunta con la scelta della costante c_H pari a

$$c_H = \sqrt{\frac{2H\Gamma(\frac{3}{2} - H)}{\Gamma(H + \frac{1}{2})\Gamma(2 - 2H)}}.$$

A.4 Rumore Gaussiano frazionario

Poiché il moto Browniano frazionario $\{B_t^H\}_{t \in \mathbb{R}}$ ha incrementi stazionari, i suoi incrementi (Gaussiani)

$$Y_j = B_{j+1}^H - B_j^H, \quad j \in \mathbb{Z} \tag{A.13}$$

formano una successione stazionaria. La successione $\{Y_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ è detta *rumore Gaussiano frazionario* (RGF). È chiamata *rumore Gaussiano frazionario standard* se $\sigma_0^2 \equiv \text{Var}(Y_j) = 1$. Quindi RGF ha la proprietà di essere una successione Gaussiana stazionaria con media nulla e varianza in generale uguale a $\sigma_0^2 \equiv \mathbb{E}(Y_j^2) = \mathbb{E}((B_1^H)^2)$.

Osservazione 5. Ogni incremento $Y_k = B_{k+1}^H - B_k^H$ poiché stazionario, è uguale in distribuzione a: $B_1^H - B_0^H = B_1^H = Y_0$.

Grazie alla precedente Osservazione 5 e all'Equazione (A.4) il rumore Gaussiano frazionario ha funzione di autocovarianza definita da:

$$r(j) = \text{Cov}(Y_0, Y_j) = \frac{\sigma_0^2}{2} \left(|j+1|^{2H} - 2|j|^{2H} + |j-1|^{2H} \right), \quad j \in \mathbb{Z}. \quad (\text{A.14})$$

Infatti:

$$\begin{aligned} r(j) &= \mathbb{E}(Y_0 Y_j) = \mathbb{E}(B_1^H (B_{j+1}^H - B_j^H)) = \mathbb{E}(B_1^H B_{j+1}^H) - \mathbb{E}(B_1^H B_j^H) = \\ &= \text{Cov}(B_1^H B_{j+1}^H) - \text{Cov}(B_1^H B_j^H) = \\ &= \frac{\sigma_0^2}{2} \left(|1|^{2H} + |j+1|^{2H} - |1-j-1|^{2H} - |1|^{2H} - |j|^{2H} + |1-j|^{2H} \right) = \\ &= \frac{\sigma_0^2}{2} \left(|j+1|^{2H} - 2|j|^{2H} + |j-1|^{2H} \right). \end{aligned}$$

Si noti come la funzione (A.14) rimanga la stessa per $j < 0$ ovvero: $r(j) = r(-j)$. Se $H = \frac{1}{2}$, allora $r(j) = 0$ per $j \neq 0$ e quindi $\{Y_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ è una successione di variabili aleatorie Gaussiane i.i.d. Infatti in questo caso si ritrova il moto Browniano, che ha incrementi indipendenti.

Quando $H \neq \frac{1}{2}$ gli incrementi Y_j sono dipendenti.

Si consideri quindi $0 < H < 1$. Il comportamento asintotico della funzione $r(j)$ segue dall'espansione di Taylor. Si noti che $r(j) = \frac{\sigma_0^2}{2} j^{2H} g(j^{-1})$ dove $g(x) = (1+x)^{2H} - 2 + (1-x)^{2H}$. Il primo termine diverso da zero nell'espansione di Taylor di $g(x)$, che si espande all'origine, è uguale a $2H(2H-1)x^2$. Quindi quando j tende a infinito, $r(j)$ si comporta asintoticamente come $\sigma_0^2 H(2H-1)j^{2H-2}$ ovvero:

$$\frac{r(j)}{\sigma_0^2 H(2H-1)j^{2H-2}} \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 1. \quad (\text{A.15})$$

In base a quest'ultima relazione trovata facciamo delle considerazioni su specifici risultati di comportamento della funzione autocovarianza $r(j)$ per grandi ritardi. Si analizza quindi il comportamento di $r(j)$:

- quando $j \rightarrow \infty$ $r(j)$ si comporta come una funzione potenza.
- quando $j \rightarrow \infty$ $r(j)$ tende a 0 per ogni $0 < H < 1$. Ma quando $\frac{1}{2} < H < 1$, le correlazioni decadono a zero così lentamente che la serie diverge:

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} r(j) = \infty.$$

In questo caso si dice che $\{Y_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ esibisce dipendenza a lungo raggio o che il processo ha lunga memoria.

- Per $H = \frac{1}{2}$ tutte le correlazioni, per ritardi non nulli, sono zero, i.e., le osservazioni Y_j sono incorrelate.
- Per $0 < H < \frac{1}{2}$ le correlazioni sono sommabili e si ha:

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} |r(j)| < \infty \quad \text{e} \quad \sum_{j=-\infty}^{\infty} r(j) = 0.$$

L'ultima equazione è dovuta alla natura telescopica della serie. In questo caso il processo esibisce dipendenza a corto raggio.

A causa del coefficiente negativo $H(2H - 1)$ (vedi (A.15)), anche la funzione $r(j)$ è negativa per ogni $j \neq 0$. Qualche volta ci si riferisce a questo tipo di comportamento con *dipendenza negativa* o meglio ancora con *correlazione negativa*.

- Il RGF $\{Y_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ con $H \neq 1/2$ fornisce un controesempio all'usuale Teorema del limite centrale. Infatti sia d_N una costante dipendente da $N \in \mathbb{N}$, affinché $\frac{1}{d_N} \sum_{j=1}^N Y_j$ converga in distribuzione a un limite non banale quando $N \rightarrow \infty$ non si può scegliere $d_N \simeq \sqrt{N}$ per $N \rightarrow \infty$, ma si deve scegliere $d_N \simeq N^H$ per $N \rightarrow \infty$. Infatti:

$$\frac{1}{N^H} \sum_{j=1}^N Y_j \stackrel{(A.13)}{=} \frac{1}{N^H} \sum_{j=1}^N (B_{j+1}^H - B_j^H) = \frac{1}{N^H} (B_{N+1}^H - B_1^H) \stackrel{d}{=} \frac{1}{N^H} B_N^H \stackrel{d}{=} B_1^H.$$

Inoltre, le distribuzioni finito-dimensionali di $\{\frac{1}{N^H} \sum_{j=1}^{\lfloor Nt \rfloor} Y_j\}_{0 \leq t \leq 1}$ convergono a quelle di $\{B_t^H\}_{0 \leq t \leq 1}$ quando $N \rightarrow \infty$. Qui convenzionalmente si pone $\sum_{j=1}^0 Y_j = 0$.

Enunciamo ora il seguente Teorema che raccoglie le informazioni dei casi appena visti (per una dimostrazione si può consultare [27, p. 337]).

Teorema 2. *Fissato $H \in (0, 1)$, sia $(Y_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ una successione di v.a. stazionaria Gaussiana con media nulla e funzione di autocovarianza $r(j) = \mathbb{E}(Y_0 Y_j)$ che soddisfa:*

(i) se $H \in (\frac{1}{2}, 1)$

$$\frac{r(j)}{c j^{2H-2}} \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 1, \quad \text{con } c > 0;$$

(ii) se $H = \frac{1}{2}$

$$\sum_{j=1}^{\infty} |r(j)| < \infty, \quad \sum_{j=-\infty}^{\infty} r(j) = c, \quad \text{con } c > 0;$$

(iii) se $H \in (0, \frac{1}{2})$

$$\frac{r(j)}{c j^{2H-2}} \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 1, \quad \text{con } c < 0 \quad \text{e} \quad \sum_{j=-\infty}^{\infty} r(j) = 0.$$

Allora le distribuzioni finito-dimensionali di $\{\frac{1}{N^H} \sum_{j=1}^{\lfloor Nt \rfloor} Y_j\}_{0 \leq t \leq 1}$ con $N \in \mathbb{N}$, convergono a quelle di $\{\sigma_0 B_t^H\}_{0 \leq t \leq 1}$, dove $\{B_t^H\}_{0 \leq t \leq 1}$ è il MBF standard e

$$\sigma_0^2 = \begin{cases} (H(2H-1))^{-1} c, & \text{se } \frac{1}{2} < H < 1, \\ c, & \text{se } H = \frac{1}{2}, \\ -(H(2H-1))^{-1} c, & \text{se } 0 < H < \frac{1}{2}. \end{cases}$$

A.5 Processi Ornstein-Uhlenbeck frazionari

Per definire il processo stazionario Ornstein-Uhlenbeck frazionario (in breve OUF), si segue l'impostazione di [11], che lo definisce come unica soluzione forte dell'equazione Langevin con rumore guidato da un moto Browniano frazionario. Siano (Ω, \mathcal{F}, P) uno spazio di probabilità, λ e σ costanti positive e $\xi \in L^0(\Omega)$. L'equazione di Langevin è data da:

$$X_t = \xi - \lambda \int_0^t X_s ds + N_t, \quad t \geq 0. \quad (\text{A.16})$$

L'Equazione (A.16) coinvolge solo un integrale rispetto a t , che può essere risolto per traiettorie per processi di rumore $\{N_t\}_{t \geq 0}$ molto più generali del moto Browniano. Si ricorda che se il processo di rumore è un moto Browniano, allora l'unica soluzione forte dell'equazione di Langevin è il classico processo Ornstein-Uhlenbeck.

Si enuncia ora, la seguente Proposizione per poi definire il processo OUF.

Proposizione 9. *Sia $\{B_t^H\}_{t \in \mathbb{R}}$ un moto Browniano frazionario con indice di Hurst pari a $H \in (0, 1]$ e $\xi \in L^0(\Omega)$. Sia $-\infty \leq a < \infty$ e $\lambda, \sigma > 0$. Allora per quasi ogni $\omega \in \Omega$, si hanno i seguenti risultati:*

(a) per ogni $t > a$,

$$\int_a^t e^{\lambda u} dB_u^H(\omega)$$

esiste come integrale di Riemann-Stieltjes ed è uguale a

$$e^{\lambda t} dB_t^H(\omega) - e^{\lambda a} dB_a^H(\omega) - \lambda \int_a^t B_u^H(\omega) e^{\lambda u} du.$$

(b) La funzione

$$t \mapsto \int_a^t e^{\lambda u} dB_u^H(\omega), \quad t > a$$

è continua in t .

(c) L'unica funzione continua y che risolve l'equazione

$$y(t) = \xi(\omega) - \lambda \int_0^t y(s) ds + \sigma B_t^H(\omega), \quad t \geq 0$$

è data da

$$y(t) = e^{-\lambda t} \left\{ \xi(\omega) + \sigma \int_0^t e^{\lambda u} dB_u^H(\omega) \right\}, \quad t \geq 0.$$

In particolare, l'unica soluzione continua dell'equazione

$$y(t) = \sigma \int_{-\infty}^0 e^{\lambda u} dB_u^H(\omega) - \lambda \int_0^t y(s) ds + \sigma B_t^H(\omega), \quad t \geq 0,$$

è data da:

$$y(t) = \sigma \int_{-\infty}^t e^{-\lambda(t-u)} dB_u^H(\omega), \quad t \geq 0.$$

Dalla precedente Proposizione 9 segue che per ogni $H \in (0, 1]$ e per ogni $a \in [-\infty, \infty)$, l'integrale

$$\int_a^t e^{\lambda u} dB_u^H, \quad t > a,$$

esiste come integrale di Riemann-Stieltjes traiettorie per traiettorie, è q.c. continuo in t , e

$$Y_t^{H,\xi} \doteq e^{-\lambda t} \left(\xi + \sigma \int_0^t e^{\lambda u} dB_u^H \right), \quad t \geq 0, \quad (\text{A.17})$$

è l'unico processo q.c. continuo che risolve l'equazione

$$X_t = \xi - \lambda \int_0^t X_s ds + \sigma B_t^H, \quad t \geq 0. \quad (\text{A.18})$$

In particolare la restrizione per t positivi del processo q.c. continuo

$$Y_t^H \doteq \sigma \int_{-\infty}^t e^{-\lambda(t-u)} dB_u^H, \quad t \in \mathbb{R}, \quad (\text{A.19})$$

risolve l'Equazione (A.18) con condizione iniziale $\xi = Y_0^H = \sigma \int_{-\infty}^0 e^{\lambda u} dB_u^H$. Chiaramente il processo $\{Y_t^H\}_{t \in \mathbb{R}}$ è Gaussiano e, dalla stazionarietà degli incrementi del moto Browniano frazionario, segue immediatamente che è anche stazionario. Inoltre, come nel caso del moto Browniano, per ogni $\xi \in L^0(\Omega)$ e per $t > 0$,

$$\begin{aligned} Y_t^H - Y_t^{H,\xi} &= \sigma \int_{-\infty}^t e^{-\lambda(t-u)} dB_u^H - e^{-\lambda t} \xi - \sigma \int_0^t e^{-\lambda(t-u)} dB_u^H = \\ &= \sigma \int_{-\infty}^0 e^{-\lambda(t-u)} dB_u^H - e^{-\lambda t} \xi = \\ &= e^{-\lambda t} \left(\sigma \int_{-\infty}^0 e^{\lambda u} dB_u^H - \xi \right) = \\ &= e^{-\lambda t} (Y_0^H - \xi) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0, \quad \text{q.c.} \end{aligned}$$

l'uguaglianza segue dalle definizioni dei due processi Equazioni (A.19) e (A.17). Questo implica che ogni soluzione stazionaria di (A.18) ha la stessa distribuzione di $\{Y_t^H\}_{t \geq 0}$. $\{Y_t^{H,\xi}\}_{t \geq 0}$ è detto *un processo Ornstein-Uhlenbeck frazionario*

con condizione iniziale ξ e $\{Y_t^H\}_{t \in \mathbb{R}}$ è detto un processo stazionario Ornstein-Uhlenbeck frazionario.

Si definisce ora la covarianza del processo stazionario OUF $\{Y_t^H\}_{t \in \mathbb{R}}$ mediante la rappresentazione spettrale del MBF.

Sia $s \in \mathbb{R}$. Per ogni $H \in (0, 1)$, le funzioni $f(x) = \mathbb{1}_{\{x \leq 0\}} e^{\lambda x}$ e $g(x) = \mathbb{1}_{\{x \leq s\}} e^{\lambda x}$ appartengono allo spazio $\tilde{\Lambda}_H$ definito da

$$\tilde{\Lambda}_H = \left\{ f \mid f \in L^2(\mathbb{R}), \int_{\mathbb{R}} |\hat{f}(x)|^2 |x|^{-2H+1} dx < \infty \right\}, \quad \text{per } 0 < H < 1 \quad (\text{A.20})$$

dotato del prodotto interno

$$(f, g)_{\tilde{\Lambda}_H} = \frac{1}{(C_2(H))^2} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(x) \overline{\hat{g}(x)} |x|^{-2H+1} dx \quad (\text{A.21})$$

dove

$$C_2(H) = \left(\frac{2\pi}{\Gamma(2H+1) \sin(\pi H)} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Le due definizioni (A.20) e (A.21) sono equivalenti a quelle date in precedenza nella rappresentazione spettrale dell'integrale del MBF in (A.11) e (A.12) semplicemente considerando che si era posto $\kappa = H - \frac{1}{2}$. Quindi per ogni $t, s \in \mathbb{R}$, l'espressione $\mathbb{C}ov(Y_t^H, Y_{t+s}^H)$ è equivalente a:

$$\sigma^2 e^{-\lambda s} (f, g)_{\tilde{\Lambda}_H} = \sigma^2 \frac{\Gamma(2H+1) \sin(\pi H)}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{isx} \frac{|x|^{1-2H}}{\lambda^2 + x^2} dx, \quad (\text{A.22})$$

con $\sigma^2 = \mathbb{V}ar(B_1^H)$ la varianza del MBF al tempo 1.

Appendice B

Nuovo indice di rumore microstrutturale

Diamo ora, una breve panoramica di alcuni spazi funzionali con le loro relative norme, fino ad arrivare a definire gli spazi di Besov mediante il modulo di continuità come mostrato in [13]. In seguito viene data una nuova caratterizzazione degli spazi di Besov. Gli autori Ciesielski, Kerkyacharian e Roynette (in breve CKR) hanno dimostrato in [12] che, sotto certe condizioni, l'usuale norma dello spazio di Besov è equivalente alla norma basata sulla variazione p -esima diadica del primo ordine. Grazie al suo lavoro di tesi [25], Rosenbaum semplifica i risultati di CKR e li estende; dando così una nuova caratterizzazione degli spazi di Besov in termini di variazione p -esima diadica generale del primo ordine. È proprio in questo nuovo contesto che Rosenbaum introduce un nuovo indice di rumore microstrutturale e cerca di darne un'interpretazione mediante gli spazi di Besov. Inoltre questo nuovo indice dà origine a fenomeni che il classico *signature plot* non è in grado di individuare. Si elencheranno poi alcune virtù dell'indice.

Infine si conclude mostrando in che modo l'indice di Hurst può essere interpretato come parametro di regolarità.

B.1 Spazi funzionali

Esistono molti modi differenti per misurare la regolarità di una funzione. In generale gli spazi forse più noti condividono la caratteristica comune che l'indice

di regolarità è un numero intero. Si pensi per esempio alla più naturale forma di regolarità di una funzione, ovvero la differenziabilità: il massimo indice m tale che la derivata parziale di una funzione multivariata f di ordine α , $\partial^\alpha f$ con $|\alpha| \doteq \alpha_1 + \dots + \alpha_d \leq m$, è continua. Si definisce $\mathcal{C}^m(\Omega)$, con $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, lo spazio delle funzioni continue che hanno derivate parziali continue e limitate $\partial^\alpha f$, $|\alpha| \leq m$. Questo spazio è detto *spazio di Banach* se viene dotato della norma

$$\|f\|_{\mathcal{C}^m(\Omega)} \doteq \sup_{x \in \Omega} |f(x)| + \sum_{|\alpha|=m} \sup_{x \in \Omega} |\partial^\alpha f(x)|.$$

In molti casi però si è interessati a descrivere la regolarità di una funzione in modo più preciso mediante quantità frazionarie di regolarizzazione. Sorge quindi il problema di come colmare il divario tra le classi di regolarizzazione intere. Esiste un caso in cui una tale generalizzazione è molto naturale, quello degli spazi \mathcal{C}^m . Si noti che per ogni $h \in \mathbb{R}^d$

$$\sup_{x \in \Omega} |f(x+h) - f(x)| \leq (\sup |f'|) |h|$$

se $f \in \mathcal{C}^1$, mentre per un'arbitraria $f \in \mathcal{C}^0$, la quantità $\sup_{x \in \Omega} |f(x+h) - f(x)|$ potrebbe andare a zero in modo arbitrariamente lento quando $|h| \rightarrow 0$. Questo motiva la definizione degli *spazi di Hölder* \mathcal{C}^s con $0 < s < 1$, costituiti da quelle funzioni $f \in \mathcal{C}^0$ tale che

$$\sup_{x \in \Omega} |f(x+h) - f(x)| \leq C|h|^s \tag{B.1}$$

per una qualche costante positiva C .

Se $m < s < m+1$ una naturale definizione di \mathcal{C}^s è data dalle funzioni $f \in \mathcal{C}^m$ e $\partial^\alpha f \in \mathcal{C}^{s-m}$, $|\alpha| = m$. Si può dimostrare che questa proprietà (B.1) può essere espressa da

$$\sup_{x \in \Omega} |\Delta_h^n f(x)| \leq C|h|^s$$

dove $n > s$ e $\Delta_h^n f(x)$ è l'operatore di differenza finita di ordine n definito ricorsivamente da

$$\Delta_h^1 f(x) = f(x+h) - f(x) \quad \text{e} \quad \Delta_h^n f(x) = \Delta_h^1(\Delta_h^{n-1})f(x).$$

Definizione 6. Si definisce in generale *spazio di Hölder* $\mathcal{C}^{m,s}(\Omega)$, lo spazio formato da tutte le funzioni $f \in \mathcal{C}^m(\Omega)$ ovvero le funzioni continue con derivata continua fino all'ordine m , per le quali la norma

$$\|f\|_{\mathcal{C}^{m,s}(\Omega)} \doteq \sum_{|\alpha| \leq m} \sup_{x \in \Omega} |\partial^\alpha f(x)| + \sum_{|\alpha|=m} \sup_{x,y \in \Omega} \frac{|\partial^\alpha f(x) - \partial^\alpha f(y)|}{|x-y|^s} \quad \text{è finita.}$$

Quindi lo spazio $C^{m,s}(\Omega)$ consiste di quelle funzioni f che sono differenziabili con continuità m -volte e le cui derivate parziali di ordine m sono Hölder continue con esponente s .

B.1.1 Spazi di Besov

Gli spazi di Besov $\mathcal{B}_{p,q}^s$ coinvolgono un parametro aggiuntivo q e possono essere definiti mediante l'operatore di differenze finite. Si definisce il *modulo di continuità di ordine n* in L^p * di una funzione f la quantità

$$\omega_n(f, t, \Omega)_p = \sup_{|h| \leq t} \|\Delta_h^n f\|_{L^p(\Omega_{h,n})},$$

con h vettore in \mathbb{R}^d di norma Euclidea minore di t e

$$\Omega_{h,n} \doteq \{x \in \Omega \mid (x + kh) \in \Omega, k = 0, \dots, n\}.$$

Di solito si usa la notazione più semplice $\omega_n(f, t)_p$ quando Ω è l'intero dominio su cui la funzione è considerata. Una proprietà base di questa quantità è la sua monotonia rispetto a t : $\omega_n(f, t)_p \leq \omega_n(f, s)_p$ se $t < s$.

Per $p, q \geq 1$, $s > 0$, gli spazi di Besov $\mathcal{B}_{p,q}^s(\Omega)$ sono formati da quelle funzioni $f \in L^p(\Omega)$ tali che $(2^{sj}\omega_n(f, 2^{-j})_p)_{j \geq 0} \in \ell^q$ †, dove n è un intero tale che $s < n$. Una naturale norma per questo spazio è data da

$$\|f\|_{\mathcal{B}_{p,q}^s} \doteq \|f\|_{L^p} + \|(2^{sj}\omega_n(f, 2^{-j})_p)_{j \geq 0}\|_{\ell^q}. \tag{B.2}$$

* Sia (X, \mathcal{E}, μ) uno spazio di misura. Gli spazi $L^p(X, \mu)$, con $1 \leq p \leq \infty$ sono spazi di Banach con la norma

$$\|f\|_p = \left(\int_X |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \quad \forall f \in L^p(X, \mu), 1 \leq p < \infty$$

e

$$\|f\|_\infty = \inf\{m \geq 0 \mid \mu(|f| > m) = 0\} \quad \forall f \in L^\infty(X, \mu).$$

† Se $\mu^\#$ è la misura che conta in \mathbb{N} , si usa ℓ^p per denotare lo spazio $L^p(\mathbb{N}, \mu^\#)$. In tal caso si ha

$$\|x\|_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad \forall \text{ successione } x = (x_n)_n \in \ell^p, 1 \leq p < \infty$$

e

$$\|x\|_\infty = \sup_{n \geq 1} |x_n| \quad \forall \text{ successione } x = (x_n)_n \in \ell^\infty.$$

Un tale spazio dotato della norma (B.2) è uno spazio di Banach.

Mentre per $p, q < 1$ e $s > \max\left(\frac{1}{p} - 1, 0\right)$, lo spazio di Besov $\mathcal{B}_{p,q}^s$ può essere definito allo stesso modo ma è solo uno *spazio quasi-Banach*. Si ricorda che uno spazio *quasi-Banach* è uno spazio completo dotato della *quasi-norma* che ha tutte le proprietà della norma eccetto la disuguaglianza triangolare che è rimpiazzata da: $\|x + y\| \leq K(\|x\| + \|y\|)$ per ogni x, y che appartiene allo spazio *quasi-Banach* e per qualche costante $K \geq 1$.

Lo spazio $\mathcal{B}_{p,q}^s$ rappresenta “l’ordine s di regolarità misurato in L^p ”. Il parametro q ci consente un bilanciamento più fine del grado di regolarità, infatti si ha

$$\mathcal{B}_{p,q_1}^s \subset \mathcal{B}_{p,q_2}^s \quad \text{se } q_1 \leq q_2,$$

ma gioca un ruolo minore in confronto a s poiché vale

$$\mathcal{B}_{p,q_1}^{s_1} \subset \mathcal{B}_{p,q_2}^{s_2} \quad \text{se } s_1 \geq s_2$$

indipendentemente dai valori di q_1 e q_2 .

B.1.2 Nuova caratterizzazione degli spazi di Besov

Come si è appena visto, gli spazi di Besov $\mathcal{B}_{p,q}^s([0, 1])$ per $s > 0$, $1 \leq p, q \leq \infty$ sono di solito definiti in termini del modulo di continuità. Utilizzando le basi di Schauder, gli autori Ciesielski, Kerkyacharian e Roynette [12] (in breve CKR) hanno dimostrato che per $s > \frac{1}{p}$, l’usuale norma di Besov (B.2) su $\mathcal{B}_{p,q}^s([0, 1])$ è equivalente alla norma basata sulla *variazione p -esima diadica del secondo ordine* che per una funzione reale f su $[0, 1]$ e $0 < p < \infty$ è la quantità

$$\sum_{k=1}^{2^j} \left| -f((2k)2^{-(j+1)}) + 2f((2k-1)2^{-(j+1)}) - f((2k-2)2^{-(j+1)}) \right|^p.$$

Questo risultato è stato usato per ottenere proprietà di regolarità delle traiettorie di alcuni processi stocastici come il moto Browniano frazionario.

Nel suo lavoro di tesi [25], Rosenbaum semplifica i risultati di CKR e li estende utilizzando o le *variazioni p -esime diadiche del secondo ordine* oppure le *variazioni p -esime generali del primo ordine*. Per una funzione reale f su $[0, 1]$ e $0 < p < \infty$, la variazione p -esima diadica del primo ordine $V_j^p(f)$ è definita da

$$V_j^p(f) \doteq \sum_{k=1}^{2^j} |f((k)2^{-j}) - f((k-1)2^{-j})|^p \quad (\text{B.3})$$

e la variazione p -esima generale del primo ordine $v_p(f)$ da

$$v_p(f) \doteq \sup \left\{ \sum_{k=0}^{m-1} |f(t_{k+1}) - f(t_k)|^p, 0=t_0 < t_1 < \dots < t_m=1, m \in \mathbb{N}^+ \right\}. \quad (\text{B.4})$$

Con i seguenti Teoremi viene data una nuova caratterizzazione degli spazi di Besov $\mathcal{B}_{p,q}^s([0,1])$ per $0 < s < 1$, $1 \leq p, q \leq \infty$, $s > \frac{1}{p}$ e un utile risultato per il caso $p < 1$. Le dimostrazioni di tali Teoremi e del Corollario che ne segue, si trovano nell'elaborato di tesi di Rosenbaum [25].

Teorema 3. *Sia $0 < s < 1$, $s > 1/p$, $1 \leq p, q \leq \infty$. La norma usuale (B.2) su $\mathcal{B}_{p,\infty}^s([0,1])$ è equivalente alla norma definita da:*

$$\|f\| = \max \left(|f(0)|, \left(\sum_{j \geq 0} 2^{jq(s-\frac{1}{p})} (V_j^p(f))^{\frac{q}{p}} \right)^{\frac{1}{q}} \right).$$

Dal Teorema 3 appena enunciato deriva il seguente Corollario.

Corollario 4. *Sia $X = \{X_t\}_{t \in [0,1]}$ un processo continuo tale che per $p > 1$, $1/p \leq s < 1$ e Y una v.a. positiva e q.c. finita,*

$$2^{j(ps-1)} V_j^p(X) \xrightarrow{p} Y.$$

Allora, per ogni $\varepsilon > 0$, q.c. $(t \rightarrow X_t) \in \mathcal{B}_{p,\infty}^{s-\varepsilon}([0,1])$ e q.c. $(t \rightarrow X_t) \notin \mathcal{B}_{p,\infty}^{s+\varepsilon}([0,1])$.

Teorema 4. *Sia $f: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione Boreliana e $0 < p < \infty$.*

Se $v_p(f) < \infty$, allora $f \in \mathcal{B}_{p,\infty}^{\frac{1}{p}}([0,1])$.

Il risultato del Teorema 3 mostra semplicemente che per ottenere alcune regolarità di Besov per una traiettoria, è spesso sufficiente considerare la p -variazione diadica del primo ordine. Un esempio sorprendente è fornito dal MB. La regolarità di Besov del MB è stata studiata in particolare da Roynette in [26]. Sia $B = \{B_t\}_{t \geq 0}$ un MB. Utilizzando la costruzione di Lévy del MB, Roynette dimostrò la seguente Proposizione.

Proposizione 10. *(Roynette)*

- Se $0 < s < 1/2$, per $1 \leq p < \infty$ e $1 \leq q \leq \infty$, q.c., $(t \rightarrow B_t) \in \mathcal{B}_{p,q}^s([0,1])$.
- Per $1 \leq p < \infty$, q.c., $(t \rightarrow B_t) \in \mathcal{B}_{p,\infty}^{1/2}([0,1])$. Inoltre, per $p > 2$, esiste una costante $c_p > 0$ tale che q.c., $\|B\|_{\mathcal{B}_{p,\infty}^{1/2}([0,1])} > c_p$.

- Per $2 < p < \infty$ e $1 \leq q < \infty$, q.c., $(t \rightarrow B_t) \notin \mathcal{B}_{p,q}^{1/2}([0,1])$.
- Se $s > 1/2$, per $2 < p < \infty$ e $1 \leq q < \infty$, q.c., $(t \rightarrow B_t) \notin \mathcal{B}_{p,q}^s([0,1])$.

Grazie al Teorema 3, si ha molto semplicemente la dimostrazione dei risultati di Roynette. Infatti, utilizzando la convergenza in L^2 , la disuguaglianza di Markov e il lemma di Borel-Cantelli, si ha che per $1 \leq p < \infty$, q.c.,

$$2^j \binom{\frac{p}{2}-1}{k} \sum_{k=0}^{2^j-1} |B_{(k+1)2^{-j}} - B_{k2^{-j}}|^p \rightarrow \mathbb{E}(|\eta|^p),$$

dove η denota una variabile Gaussiana standard. Quindi, dal Teorema 3, la positività di $\mathbb{E}(|\eta|^p)$ è ovviamente inclusa e si ha il risultato. Rosenbaum estende questo risultato a processi Gaussiani più generali. Si mostra questa estensione nell'enunciato della Proposizione 11 che segue nel prossimo paragrafo.

B.1.3 Nuova proprietà di regolarità per processi Gaussiani

Il comportamento degli oggetti definiti precedentemente (B.4) e (B.3) è stato studiato per molti processi stocastici, in particolare si è in grado di dedurre proprietà di regolarità di Besov per le traiettorie di vari processi a tempo continuo come quello Gaussiano. Grazie ai Teoremi 3 e 4 viene data una semplice caratterizzazione di processi Gaussiani che appartengono allo spazio di Besov $\mathcal{B}_{p,q}^s([0,1])$.

Proposizione 11. *Sia $\{X_t\}_{t \in [0,1]}$ un processo Gaussiano a media zero con incrementi stazionari e $\sigma(h) = [\mathbb{E}((X_{t+h} - X_t)^2)]^{\frac{1}{2}}$. Si supponga che per qualche $0 < r < 1$ e $0 < \alpha < \infty$ valga*

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sigma(h)}{h^r} = \alpha.$$

Allora si hanno i seguenti risultati.

- (i) Se $0 < s < r$, per $1 \leq p < \infty$ e $1 \leq q < \infty$, allora q.c. $(t \rightarrow X_t) \in \mathcal{B}_{p,q}^s([0,1])$.
- (ii) Per $1 \leq p < \infty$, allora q.c. $(t \rightarrow X_t) \in \mathcal{B}_{p,\infty}^r([0,1])$. Inoltre, per $p > \frac{1}{r}$, esiste una costante $c_p > 0$ tale che q.c. $\|X\|_{\mathcal{B}_{p,\infty}^r([0,1])} > c_p$.
- (iii) Per $2 \leq p < \infty$, $rp > 1$ e $1 \leq q < \infty$, allora q.c. $(t \rightarrow X_t) \notin \mathcal{B}_{p,q}^r([0,1])$.
- (iv) Se $s > r$, per $2 \leq p < \infty$, $rp > 1$ e $1 \leq q < \infty$, allora q.c. $(t \rightarrow X_t) \notin \mathcal{B}_{p,q}^s([0,1])$.

Questa Proposizione 11 può per esempio, essere applicata al moto Browniano frazionario con indice di Hurst H in $(0,1)$. Infatti in tal caso si ha $\sigma(h) = h^H$.

B.2 Rumore di microstruttura

Rosenbaum in [25] introduce un nuovo indice di rumore microstrutturale per i dati finanziari. Questo indice può essere interpretato grazie agli spazi di Besov. Il nuovo indice dà origine a fenomeni che un classico *signature plot* non è in grado di rilevare. In particolare, nell'insieme dei dati analizzati da Rosenbaum, permette di separare le frequenze campionate in tre zone: nelle basse frequenze non si rilevano rumori di microstruttura, da basse ad alte frequenze vi è un incremento di tale rumore, e alcuni tipi di regolarità aggiuntiva nelle scale più fini.

B.2.1 Rumore di microstruttura e *signature plot*

Il rumore di microstruttura è definito usualmente come ciò che rende diverso il prezzo osservato dal “prezzo teorico” per scale fini. Come proposto nella teoria finanziaria classica, questo “prezzo teorico” è spesso modellato da una semi-martingala. In letteratura, i motivi per cui si verifica questo rumore sono in particolare lo spread tra bid-ask e la natura discreta dei prezzi ovvero il fatto che i prezzi non sono continui ma si muovono in unità discrete. Si immagini di osservare un titolo finanziario Y su un intervallo temporale $[0, T]$. Si vuole sapere se ci sia qualche rumore di microstruttura nei dati presi in considerazione. Per rispondere a questa domanda, si definisce *rumore di microstruttura* una forma di irregolarità nei dati ad alta frequenza che scompare a frequenze inferiori. Si consideri il campione $\{Y_{k\Delta}\}_{k=0}^{T/\Delta}$, dove Δ denota il tempo minimo di attesa per poter registrare un nuovo dato (per esempio potrebbe essere uguale a un secondo). Per semplicità si prende $\Delta = 2^{-N}$ con N un intero positivo. Un modo consueto per studiare la presenza di qualche tipo di irregolarità nei dati ad alta frequenza è di calcolare il *signature plot*, che è la funzione $q \rightarrow Z_q$, con $q \in [0, N]$ e

$$Z_q = \sum_{k=0}^{T(2^{N-q}-1)} |Y_{(k+1)2^{q-N}} - Y_{k2^{q-N}}|^2$$

detto *signature plot assoluto* o

$$Z_q = \sum_{k=0}^{T(2^{N-q}-1)} |\log Y_{(k+1)2^{q-N}} - \log Y_{k2^{q-N}}|^2$$

detto *signature plot relativo*. Non appena Y o $(\log Y)$ è una semi-martingala continua, per T fissato e q dato, questa quantità converge in probabilità quando

N tende a infinito alla variazione quadratica di Y o $(\log Y)$ su $[0, T]$. Quindi, nelle basse frequenze, dove non c'è rumore microstrutturale, il *signature plot* di un titolo è abbastanza piatto non appena il numero di dati è sufficiente. Al contrario non è piatto in presenza di rumore. Lo svantaggio di questa misura è che non è assoluta: si osserva soltanto dove il *signature plot* è piatto e dove non lo è.

B.2.2 Un nuovo indice di rumore microstrutturale

Rosenbaum vuole proporre un'alternativa al *signature plot*. Dato un reale $p > 0$, si considerino ora le funzioni:

$$q \rightarrow S_q^p \quad \text{e} \quad q \rightarrow S_q'^p$$

con

$$S_q^p = \frac{1}{p} \left[1 + \log_2 \left(\frac{V_{q+1}^p}{V_q^p} \right) \right] \quad \text{indice di microstruttura assoluto,}$$

e

$$S_q'^p = \frac{1}{p} \left[1 + \log_2 \left(\frac{V_{q+1}'^p}{V_q'^p} \right) \right] \quad \text{indice di microstruttura relativo,}$$

dove

$$V_q^p = \sum_{k=0}^{T(2^{N-q}-1)} |Y_{(k+1)2^{q-N}} - Y_{k2^{q-N}}|^p$$

e

$$V_q'^p = \sum_{k=0}^{T(2^{N-q}-1)} \left| \log Y_{(k+1)2^{q-N}} - \log Y_{k2^{q-N}} \right|^p. \quad (\text{B.5})$$

Utilizzando gli spazi di Besov, si riesce a vedere come gli indici di microstruttura S_q^p e $S_q'^p$ possono essere considerati come misure di regolarità associata alla frequenza di sottocampionamento pari a 2^{N-q} (si vedrà meglio nel prossimo Paragrafo B.2.3). Quindi, se la funzione $q \rightarrow S_q^p$ (o $q \rightarrow S_q'^p$) è costante si dice che non c'è rumore di microstruttura nei dati. In pratica, si può sperare di osservare una regolarità costante per frequenze sufficientemente basse e un comportamento più specifico per frequenze alte, riflettendo così la presenza di rumore microstrutturale.

B.2.3 Interpretazione dell'indice

Ora si vuole mostrare perché la quantità S_q^p può essere vista come una misura di regolarità. A tal fine si considera qui $T = 1$ e si usano gli spazi di Besov $\mathcal{B}_{p,\infty}^s([0, 1])$ definiti in precedenza nella Sezione B.1.1. In base al Teorema 3 sotto le forti assunzioni su s e su p , ovvero $0 < s < 1$, $s > \frac{1}{p}$ e $p \geq 1$, se $t \rightarrow Y_t$ appartiene a $\mathcal{B}_{p,\infty}^s([0, 1])$ e non appartiene a $\mathcal{B}_{p,\infty}^{s+\varepsilon}([0, 1])$ per ogni ε positivo, ci si può aspettare che per $N \rightarrow \infty$, asintoticamente le seguenti quantità hanno lo stesso comportamento:

$$V_q^p \simeq c2^{(q-N)(ps-1)}, \tag{B.6}$$

con c un valore costante positivo. Di conseguenza, si vede facilmente che in questo caso $S_q^p \simeq s$. Infatti per l'Equazione (B.6) si ha che esiste una costante positiva c tale che

$$V_q^p \simeq c2^{(q-N)(ps-1)} \quad \text{e} \quad V_{q+1}^p \simeq c2^{(q+1-N)(ps-1)}$$

quindi

$$\frac{V_{q+1}^p}{V_q^p} \simeq 2^{ps-1}. \tag{B.7}$$

Ora, ricordando la definizione di indice di microstruttura assoluto e l'Equazione (B.7) si ha quanto appena affermato

$$S_q^p = \frac{1}{p} \left[1 + \log_2 \left(\frac{V_{q+1}^p}{V_q^p} \right) \right] \simeq \frac{1}{p} (1 + \log_2 2^{ps-1}) = \frac{1}{p} (1 + ps - 1) = s.$$

Perciò, si può interpretare l'indice S_q^p nel seguente modo: sulla base dei dati sotto campionati con periodo 2^q , in termini di spazi di Besov $\mathcal{B}_{p,\infty}^s([0, 1])$, la regolarità s del processo sottostante a tempo continuo suggerito dai dati è S_q^p . Quindi l'indice S_q^p visto attraverso l'ottica degli spazi di Besov, asintoticamente si comporta come s , ovvero come una certa costante. Inoltre per la Proposizione 11, sotto certe condizioni si ha la regolarità delle traiettorie del processo che q.c. appartengono a un certo spazio di Besov $\mathcal{B}_{p,\infty}^s([0, 1])$.

B.2.4 Virtù dell'indice

Vediamo in questo breve elenco quali sono le virtù del nuovo indice di microstruttura.

- L'indice non è vincolato da alcun modello ovvero è *model free*. Quindi non è necessario supporre che il processo sottostante segua un processo di diffusione come avviene in realtà per il *signature plot*, il quale ha senso solo nel contesto in cui i processi sono di tipo diffusivo. Per esempio, per T fissato, quando N tende a infinito, la variazione quadratica del MBF con parametro di Hurst $H > 1/2$ converge q.c. a zero, mentre, per ogni $p > 0$ l'indice di microstruttura converge q.c. ad H .
- Il valore dell'indice dipende dal periodo sottocampionato e di conseguenza si può sperare di distinguere alcuni periodi di campionamento grazie all'indice. Per esempio, se si fissa come riferimento un certo periodo di campionamento, prendiamo 1 ora, e si calcola l'indice associato S_{ref} , si dice che il rumore di microstruttura si verifica al periodo di campionamento pari a $2^q < 1$ ora, se S_q^p è significativamente diverso da S_{ref} .
- Nel caso di una semi-martingala continua, per ogni valore di p , il valore dell'indice S_q^p è asintoticamente uguale a $1/2$ (convergenza in probabilità). Quindi, se ora si considera la semi-martingala continua come il caso di riferimento, l'indice è in un certo senso assoluto: più l'indice è lontano da $1/2$ e più il rumore è significativo.
- Il calcolo dell'indice si basa su quantità finanziarie ben note: per $p=2$ può essere visto come funzione di due volatilità realizzate prese a diverse scale temporali.

B.3 Indice di Hurst interpretato come parametro di regolarità

In base al lavoro di Rosenbaum in [25] vediamo un risultato per la regolarità del processo di volatilità.

Prendiamo in considerazione un modello di diffusione con volatilità stocastica frazionaria. Definiamo su uno spazio di probabilità (Ω, \mathcal{A}, P) , un moto Browniano B , un moto Browniano frazionario B^H , indipendente da B , con parametro di Hurst non noto $H \in (1/2, 1)$ e una v.a. ξ_0 , misurabile rispetto alla sigma algebra generata da $(B_t^H, t \leq 0)$. Fissato un tempo $T > 0$, si considera un processo stocastico uni-dimensionale $Y = \{Y_t\}_{t \in [0, T]}$ definito da

$$Y_t = y_0 + \int_0^t \sigma_s dB_s, \quad t \in [0, T] \tag{B.8}$$

dove $y_0 \in \mathbb{R}$ e σ è un altro processo stocastico uni-dimensionale della forma:

$$\sigma_t = \Phi \left(\int_0^t a(t, u) dB_u^H + f(t) \xi_0 \right). \quad (\text{B.9})$$

Le funzioni Φ , a ed f sono deterministiche e non note.

Per $I \subseteq \mathbb{R}$, denotiamo con $\mathcal{C}^k(I)$ l'insieme di tutte le funzioni deterministiche da I in \mathbb{R} , differenziabili k volte. Le assunzioni sulle funzioni a , Φ , f e ξ_0 nel modello (B.8)-(B.9) sono le seguenti.

Assunzioni A

- (i) Per ogni $t \in [0, T]$, $u \mapsto a(t, u) \in \mathcal{C}^2([0, T])$, con derivata in u limitata, uniformemente in t .
- (ii) Per ogni $u \in [0, T]$, $t \mapsto a(t, u) \in \mathcal{C}^2([0, T])$, con derivata in t limitata, uniformemente in u .
- (iii) $t \mapsto f(t) \in \mathcal{C}^2([0, T])$.
- (iv) Per $p > 0$, $\mathbb{E}(e^{p|\xi_0|}) < \infty$.
- (v) Esistono $0 \leq \beta_1 < \beta_2 \leq T$ tale che $\inf_{u \in [\beta_1, \beta_2]} a^2(u, u) > 0$.

Assunzioni B

- (i) $x \mapsto \Phi(x) \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$.
- (ii) per qualche $c_1, c_2 > 0$ e $\gamma > 0$, $|(\Phi^2)'(x)| \geq c_1 |x|^\gamma \mathbb{1}_{|x| \in [0, 1]} + c_2 \mathbb{1}_{|x| > 1}$.
- (iii) per qualche $c_3 > 0$, $|(\Phi^2)''(x)| \leq c_3 e^{|x|}$.

Attraverso questo modello si vuole far vedere che si può ritrovare la regolarità della volatilità dai dati storici. La seguente Proposizione mostra che l'indice di Hurst può essere interpretato come un parametro di regolarità grazie agli spazi di Besov.

Proposizione 12. *(Regolarità del processo di volatilità). Per T abbastanza grande, sotto le assunzioni A e B, nel modello (B.8)-(B.9),*

- (i) *quasi certamente, la traiettoria di $t \mapsto \sigma_t^2$ appartiene allo spazio di Besov $\mathcal{B}_{2, \infty}^H([0, T])$ ma, per ogni $q < \infty$, q.c. la stessa traiettoria non appartiene a $\mathcal{B}_{2, q}^H([0, T])$.*
- (ii) *Per ogni $s < H$, q.c. la traiettoria di $t \mapsto \sigma_t^2$ appartiene allo spazio di Besov $\mathcal{B}_{\infty, \infty}^s([0, T])$ ma, se inoltre esiste $c > 0$ tale che $|(\Phi^2)'(x)| > c$, allora, q.c. la stessa traiettoria non appartiene a $\mathcal{B}_{\infty, \infty}^H([0, T])$.*

Appendice C

Codice in R

In quest'ultima Appendice viene riportato il codice in R utilizzato per produrre sia i grafici che le tabelle presenti in tutto l'elaborato.

```
library(fBasics)
library(xts)

download.file(url="http://realized.oxford-man.ox.ac.uk/media/1366
              /oxfordmanrealizedvolatilityindices.zip",
              destfile="oxfordRvData.zip")

unzip(zipfile="oxfordRvData.zip")
rv.data <- read.csv("OxfordManRealizedVolatilityIndices.csv")

colnums.rk=which(sapply(rv.data, function(x) grep(".rk",x))>0)
col.names.rk = names(colnums.rk)
rk1 = rv.data[,colnums.rk]
index.names.rk = rk1[2,]
datesRaw = rv.data[-(1:2),1]
dates = strptime(datesRaw,"%Y%m%d")
rk.list = NULL
index.names.rk = as.matrix(index.names.rk)
n = length(index.names.rk)
```

```
for(i in 1:n){
  tmp.krk1=xts(rk1[-(1:2),i], order.by=dates)
  rk.list[[i]] <- tmp.krk1[(tmp.krk1!="")&(tmp.krk1!="0")]

names(rk.list)=index.names.rk
save(rk.list, file="oxfordRK.rData")
load("oxfordRK.rData")
names(rk.list)

colnums <- which(sapply(rv.data, function(x) grep(".rv$",x))>0)
col.names <- names(colnums)
rv1 <- rv.data[,colnums]
index.names <- rv1[2,]
rv.list <- NULL
index.names <- as.matrix(index.names)
n <- length(index.names)
for (i in 1:n) {
  tmp.krv1=xts(rv1[-(1:2),i],order.by=dates)
  rv.list[[i]]=tmp.krv1[(tmp.krv1!="")&(tmp.krv1!="0")]

names(rv.list)<- index.names
save(rv.list, file="oxfordRV.rData")
load("oxfordRV.rData")
names(rv.list)
rv_list=NULL
for(u in 1:21){rv_list[[u]]=rv.list[[2*u-1]]}

nomi_rv_list=NULL
for(r in 1:21){nomi_rv_list[r]=names(rv.list[2*r-1])}

nomi_rv_list
spx.rv <- rv_list[[1]]
sig=sqrt(as.numeric(spx.rv))
v=log(sig)
D=1:40
lung_D=length(D)
lung_v=length(v)
A=matrix(data=0, nrow=lung_v, ncol=lung_D)
for(delta in 1:lung_D){
  A[(1:(lung_v-delta+1)),delta]=v[delta:lung_v]}

B=matrix(data=0, nrow=lung_D, ncol=lung_D)
for(delta in 1:lung_D){
  for (j in 1:lung_D){
```

```

num=length(A[(1:(lung_v-j+1)),delta])%%delta
resto=length(A[(1:(lung_v-j+1)),delta])%%delta
if(resto!=0){B[delta,j]=floor(num)+1}
else{B[delta,j]=num}}

P=matrix(data=0, nrow=lung_D, ncol=lung_D)
P[1,1]=1
n=c(1:(sum(1:lung_D)))
for(s in 2:lung_D){
  for(j in 1:s){P[s,j]=n[P[(s-1),(s-1)]+j]}}

M=matrix(data=0, nrow=lung_v, ncol=sum(1:lung_D))
r=NULL
j=NULL
for(delta in 1:lung_D){
  for(t in 1:delta){
    j=P[delta,t]
    r=B[delta,t]
    for(i in 1:r){M[i,j]=A[(1+(i-1)*delta),t]}}}

M_diff=apply(M, MARGIN=2, FUN=diff)
M_abs_diff=apply(M_diff, MARGIN=2, FUN=abs)
M_q=function(q){M_abs_diff^q}
M_0.5=M_q(.5)
M_1=M_q(1)
M_1.5=M_q(1.5)
M_2=M_q(2)
M_3=M_q(3)
w_0.5=c(rep(0, times=sum(1:lung_D)))
r=NULL
for(delta in 1:lung_D){
  for(t in 1:delta){
    r[t]=B[delta,t]-1
    j=P[delta,t]
    for(k in 1:t){
      for(i in 1:(r[k])){
        w_0.5[j]=round(mean(M_0.5[(1:i),j]),20)}}}}

e=NULL
e[1]=D[1]
for(k in 2:lung_D){e[k]=e[k-1]+D[k-1]}

f=NULL
w_media_0.5=NULL

```

```
w_media_0.5[1]=w_0.5[1]
for(i in 2:lung_D){
  f[1:i]=w_0.5[e[i]:(e[i]+i-1)]
  w_media_0.5[i]=mean(f)}

w_1=c(rep(0, times=sum(1:lung_D)))
r=NULL
for(delta in 1:lung_D){
  for(t in 1:delta){
    r[t]=B[delta,t]-1
    j=P[delta,t]
    for(k in 1:t){
      for(i in 1:(r[k])){
        w_1[j]=round(mean(M_1[(1:i),j]),20)}}}}

e=NULL
e[1]=D[1]
for(k in 2:lung_D){e[k]=e[k-1]+D[k-1]}

f=NULL
w_media_1=NULL
w_media_1[1]=w_1[1]
for(i in 2:lung_D){
  f[1:i]=w_1[e[i]:(e[i]+i-1)]
  w_media_1[i]=mean(f)}

w_1.5=c(rep(0, times=sum(1:lung_D)))
r=NULL
for(delta in 1:lung_D){
  for(t in 1:delta){
    r[t]=B[delta,t]-1
    j=P[delta,t]
    for(k in 1:t){
      for(i in 1:(r[k])){
        w_1.5[j]=round(mean(M_1.5[(1:i),j]),20)}}}}

e=NULL
e[1]=D[1]
for(k in 2:lung_D){e[k]=e[k-1]+D[k-1]}

f=NULL
w_media_1.5=NULL
w_media_1.5[1]=w_1.5[1]
for(i in 2:lung_D){
```

```

    f[1:i]=w_1.5[e[i):(e[i]+i-1)]
    w_media_1.5[i]=mean(f)}

w_2=c(rep(0, times=sum(1:lung_D)))
r=NULL
for(delta in 1:lung_D){
  for(t in 1:delta){
    r[t]=B[delta,t]-1
    j=P[delta,t]
    for(k in 1:t){
      for(i in 1:(r[k])){
        w_2[j]=round(mean(M_2[(1:i),j]),20)}}}}

e=NULL
e[1]=D[1]
for(k in 2:lung_D){e[k]=e[k-1]+D[k-1]}

f=NULL
w_media_2=NULL
w_media_2[1]=w_2[1]
for(i in 2:lung_D){
  f[1:i]=w_2[e[i):(e[i]+i-1)]
  w_media_2[i]=mean(f)}

w_3=c(rep(0, times=sum(1:lung_D)))
r=NULL
for(delta in 1:lung_D){
  for(t in 1:delta){
    r[t]=B[delta,t]-1
    j=P[delta,t]
    for(k in 1:t){
      for(i in 1:(r[k])){
        w_3[j]=round(mean(M_3[(1:i),j]),20)}}}}

e=NULL
e[1]=D[1]
for(k in 2:lung_D){e[k]=e[k-1]+D[k-1]}

f=NULL
w_media_3=NULL
w_media_3[1]=w_3[1]
for(i in 2:lung_D){
  f[1:i]=w_3[e[i):(e[i]+i-1)]
  w_media_3[i]=mean(f)}

```

```
M_w_media=matrix(data=c(w_media_0.5, w_media_1, w_media_1.5,
                        w_media_2, w_media_3), nrow=lung_D, ncol=5)
x=1:lung_D
mycol=rainbow(6)
ylab <- expression(paste(log, "(", m(q, Delta), ")"))
xlab <- expression(paste(log, " ", Delta))
q_val <- c(.5,1,1.5,2,3)
zeta.q <- numeric(5)

plot(log(x), log(M_w_media[(1:lung_D),1]), pch=20,
      cex=.7, lwd=2.5, ylab=ylab, xlab=xlab, ylim=c(-1, -.5))
(fit.lm <- lm(log(M_w_media[(1:lung_D),1]) ~ log(x)))
abline(fit.lm, col=mycol[1], lwd=2)
zeta.q[1] <- coef(fit.lm)[2]
summary(fit.lm)
val_stim_1=fitted(fit.lm)
plot(val_stim_1, pch=1, col=4, xlab="", ylab="", main="Confonto")
points(log(M_w_media[(1:lung_D),1]), pch=8, col=2)
legend("bottomright", inset=0.05, legend=c("valori stimati",
      "valori osservati"), col=c(4,2), pch=c(1,8))

mycol[2]= col=1
qVec=c(1:5)
q=qVec[1]
plot(log(x), log(M_w_media[(1:lung_D),q]),
      col=mycol[2], pch=20, cex=.7, lwd=2, ylab=ylab,
      xlab=xlab, ylim=c(-3, -.5))
(fit.lm <- lm(log(M_w_media[(1:lung_D),q]) ~ log(x)))
abline(fit.lm, col=mycol[1], lwd=1.7)
zeta.q[1] <- coef(fit.lm)[2]
for (i in 1:5){
  q = qVec[i]
  points(log(x), log(M_w_media[(1:lung_D),q]),
        col=mycol[i+1], pch=20, lwd=2, cex=.7)
  fit.lm = lm(log(M_w_media[(1:lung_D),q]) ~ log(x))
  abline(fit.lm, col=mycol[1], lty=1, lwd=1.7)
  zeta.q[i]=coef(fit.lm)[2]}
legend("bottomright", c("modello", "q=0.5", "q=1.0", "q=1.5",
  "q=2.0", "q=3.0"), inset=0.05, col=c(mycol[1],
  mycol[2], mycol[3], mycol[4], mycol[5], mycol[6]),
  pch=c(-1,20,20,20,20,20), lty=c(1,0,0,0,0,0),
  lwd=c(1.7,2,2,2,2,2))
print(zeta.q)
```

```

plot(q_val, zeta.q, xlab="q", ylab=expression(zeta[q]))
fit.lm <- lm(zeta.q[1:5] ~ q_val[1:5]+0)
abline(fit.lm, col="red", lwd=2)
(h.est <- coef(fit.lm)[1])
summary(fit.lm)
val_stim_2=fitted(fit.lm)
plot(q_val, zeta.q, col=4, pch=1, xlab="q",
      ylab=expression(zeta[q]))
points(q_val, val_stim_2, pch=8, col=2)
legend("bottomright", inset=0.05, legend=c("valori osservati",
      "valori stimati: H*q"), col=c(4,2), pch=c(1,8))

n <- length(rv_list)
lung_q_val=length(q_val)
ww=matrix(data=0, nrow=n, ncol=lung_q_val)
zeta_q=matrix(data=0, nrow=n, ncol=lung_q_val)
for (u in 1:n){
  vv <- rv_list[[u]]
  sig <- sqrt(as.numeric(vv))
  v=log(sig)
  lung_v=length(v)
  A=matrix(data=0, nrow=lung_v, ncol=lung_D)
  for(delta in 1:lung_D){
    A[(1:(lung_v-delta+1)),delta]=v[delta:lung_v]}
  B=matrix(data=0, nrow=lung_D, ncol=lung_D)
  for(delta in 1:lung_D){
    for (j in 1:lung_D){
      num=length(A[(1:(lung_v-j+1)),delta])%%delta
      resto=length(A[(1:(lung_v-j+1)),delta])%%delta
      if(resto!=0){B[delta,j]=floor(num)+1}
      else{B[delta,j]=num}}
    }
  P=matrix(data=0, nrow=lung_D, ncol=lung_D)
  P[1,1]=1
  n=c(1:(sum(1:lung_D)))
  for(s in 2:lung_D){
    for(j in 1:s){P[s,j]=n[P[(s-1),(s-1)]+j]}
  }
  M=matrix(data=0, nrow=lung_v, ncol=sum(1:lung_D))
  r=NULL
  j=NULL
  for(delta in 1:lung_D){
    for(t in 1:delta){
      j=P[delta,t]
      r=B[delta,t]
    }
  }
}

```

```
        for(i in 1:r){M[i,j]=A[(1+(i-1)*delta),t]}}
M_diff=apply(M, MARGIN=2, FUN=diff)
M_abs_diff=apply(M_diff, MARGIN=2, FUN=abs)
M_q=function(q){M_abs_diff^q}
M_0.5=M_q(.5)
M_1=M_q(1)
M_1.5=M_q(1.5)
M_2=M_q(2)
M_3=M_q(3)
w_0.5=c(rep(0, times=sum(1:lung_D)))
r=NULL
for(delta in 1:lung_D){
  for(t in 1:delta){
    r[t]=B[delta,t]-1
    j=P[delta,t]
    for(k in 1:t){
      for(i in 1:(r[k])){
        w_0.5[j]=round(mean(M_0.5[(1:i),j]),20)}}}
e=NULL
e[1]=D[1]
for(k in 2:lung_D){e[k]=e[k-1]+D[k-1]}
f=NULL
w_media_0.5=NULL
w_media_0.5[1]=w_0.5[1]
for(i in 2:lung_D){
  f[1:i]=w_0.5[e[i]:(e[i]+i-1)]
  w_media_0.5[i]=mean(f)}
w_1=c(rep(0, times=sum(1:lung_D)))
r=NULL
for(delta in 1:lung_D){
  for(t in 1:delta){
    r[t]=B[delta,t]-1
    j=P[delta,t]
    for(k in 1:t){
      for(i in 1:(r[k])){
        w_1[j]=round(mean(M_1[(1:i),j]),20)}}}
e=NULL
e[1]=D[1]
for(k in 2:lung_D){e[k]=e[k-1]+D[k-1]}
f=NULL
w_media_1=NULL
w_media_1[1]=w_1[1]
for(i in 2:lung_D){
  f[1:i]=w_1[e[i]:(e[i]+i-1)]
```

```

    w_media_1[i]=mean(f)}
w_1.5=c(rep(0, times=sum(1:lung_D)))
r=NULL
for(delta in 1:lung_D){
  for(t in 1:delta){
    r[t]=B[delta,t]-1
    j=P[delta,t]
    for(k in 1:t){
      for(i in 1:(r[k])){
        w_1.5[j]=round(mean(M_1.5[(1:i),j]),20)}}}}
e=NULL
e[1]=D[1]
for(k in 2:lung_D){e[k]=e[k-1]+D[k-1]}
f=NULL
w_media_1.5=NULL
w_media_1.5[1]=w_1.5[1]
for(i in 2:lung_D){
  f[1:i]=w_1.5[e[i]:(e[i]+i-1)]
  w_media_1.5[i]=mean(f)}
w_2=c(rep(0, times=sum(1:lung_D)))
r=NULL
for(delta in 1:lung_D){
  for(t in 1:delta){
    r[t]=B[delta,t]-1
    j=P[delta,t]
    for(k in 1:t){
      for(i in 1:(r[k])){
        w_2[j]=round(mean(M_2[(1:i),j]),20)}}}}
e=NULL
e[1]=D[1]
for(k in 2:lung_D){e[k]=e[k-1]+D[k-1]}
f=NULL
w_media_2=NULL
w_media_2[1]=w_2[1]
for(i in 2:lung_D){
  f[1:i]=w_2[e[i]:(e[i]+i-1)]
  w_media_2[i]=mean(f)}
w_3=c(rep(0, times=sum(1:lung_D)))
r=NULL
for(delta in 1:lung_D){
  for(t in 1:delta){
    r[t]=B[delta,t]-1
    j=P[delta,t]
    for(k in 1:t){

```

```

        for(i in 1:(r[k])){
            w_3[j]=round(mean(M_3[(1:i),j]),20)}}}}
e=NULL
e[1]=D[1]
for(k in 2:lung_D){e[k]=e[k-1]+D[k-1]}
f=NULL
w_media_3=NULL
w_media_3[1]=w_3[1]
for(i in 2:lung_D){
    f[1:i]=w_3[e[i]:(e[i]+i-1)]
    w_media_3[i]=mean(f)}
M_w_media=matrix(data=c(w_media_0.5, w_media_1,
                        w_media_1.5, w_media_2, w_media_3),
                  nrow=lung_D, ncol=lung_q_val)
for(j in 1:lung_q_val){
    fit.lm=lm(log(M_w_media[(1:lung_D),j]) ~ log(D))
    zeta_q[u,j] <- coef(fit.lm)[2]
    ww[u,j]=zeta_q[u,j]/q_val[j]}}

ww
(OxfordH <- data.frame(nomi_rv_list,q=round(ww,3)))
zeta_q
n=length(rv.list)/2
h.est=numeric(n)
for(u in 1:n){
    fit.lm=lm(zeta_q[u,(1:5)] ~ q_val[1:5]+0)
    h.est[u]= coef(fit.lm)[1]}

h.est
(OxfordH_est <- data.frame(nomi_rv_list,
                          H_intero_periodo=round(h.est, 3)))

a=read.csv("OxfordManRealizedVolatilityIndices.csv",
           header=T, skip=2)
spx_closeprice=zoo(a[, "SPX2.closeprice"],dates)
spx_closeprice_newdata = na.omit(spx_closeprice)
ts_spx_closeprice=as.timeSeries(spx_closeprice_newdata)
seriesPlot(ts_spx_closeprice, title=F, col=4, lwd=1, main="S&P",
           xlab="Tempo", ylab="prezzo di chiusura", rug=F)
nasdaq_closeprice=zoo(a[, "IXIC2.closeprice"],dates)
nasdaq_closeprice_newdata = na.omit(nasdaq_closeprice)
ts_nasdaq_closeprice=as.timeSeries(nasdaq_closeprice_newdata)
seriesPlot(ts_nasdaq_closeprice, title=F, col=4, lwd=1,
           main="NASDAQ", xlab="Tempo",

```

```

      ylab="prezzo di chiusura", rug=F)

cp.data=read.csv("OxfordManRealizedVolatilityIndices.csv")
colnums <- which(sapply(cp.data, function(x)
  grep(".closeprice",x)>0))
col.names <- names(colnums)
cp1 <- cp.data[,colnums]
index.names <- cp1[2,]
datesRaw <- cp.data[-(1:2),1]
dates <- strptime(datesRaw,"%Y%m%d")
cp.list <- NULL
index.names <- as.matrix(index.names)
n=length(index.names)
for (i in 1:n) {
  tmp.cp1 = xts(cp1[-(1:2),i],order.by=dates)
  cp.list[[i]] = tmp.cp1[(tmp.cp1!="")&(tmp.cp1!="0")]

names(cp.list) <- index.names
save(cp.list, file="oxfordCP.rData")
load("oxfordCP.rData")
names(cp.list)

for(i in 1:11){
  cp_index=cp.list[[i]]
  plot(cp_index, main="", ylab="Prezzo di chiusura")
  lines(cp_index, col=4)}

for(i in 12:n){
  cp_index=cp.list[[i]]
  plot(cp_index, main="",ylab="Prezzo di chiusura")
  lines(cp_index, col=4)}

#Si considerano due sottocampioni di tutto il campione rv_list.
#Il primo rv_list1 va dal 1 gennaio 2000 al 31 dicembre 2009 e
#il secondo rv_list2 va dal 1 gennaio 2010 al 17 maggio 2015.
#Su questi due nuovi sottocampioni viene stimato H come fatto
#in precedenza con rv_list. Qui non è ripetuto il codice.

plotScaling = function(j,scaleFactor){
  vv=as.numeric(rv_list[[j]])
  v=sqrt(vv)
  xDel=function(x,lag){diff(x,lag=lag)}
  sd1=sd(xDel(log(v),1))
  h=OxfordH_est$H_intero_periodo[j]

```

```
plotLag=function(lag){
  y=xDel(log(v),lag)
  hist(y, breaks=80, freq=F,
  main=paste("Lag =",lag,"giorni"), xlab=NA)
  curve(dnorm(x, mean=mean(y), sd=sd(y)),
  add=T, col="red", lwd=3)
  curve(dnorm(x, mean=0, sd=sd1*lag^h),
  add=T, lty=2, lwd=3, col="blue")
  lines(density(y), col="green", lty=4, lwd=3.5)}
(lags=scaleFactor^(0:3))
print(names(rv.list)[j])
par(mfrow=c(2,2))
par(mar=c(3,2,1,3))
  for (i in 1:4){plotLag(lags[i])}
par(mfrow=c(1,1))}
plotScaling(1,5)

vv=as.numeric(rv_list[[1]])
v=sqrt(vv)
xDel=function(x, lag){diff(x, lag=lag)}
h=0xfordH_est$H_intero_periodo[1]
y_1=xDel(log(v),1)
y_5=xDel(log(v),5)
y_25=xDel(log(v),25)
y_125=xDel(log(v),125)
y_40=xDel(log(v),40)
y_100=xDel(log(v),100)

basicStats(y_1)
0.000387/0.005244
basicStats(y_5)
0.001915/0.006470
basicStats(y_25)
0.007087/0.008107
basicStats(y_125)
0.036707/0.009709
basicStats(y_40)
0.010493/0.008457
basicStats(y_100)
0.030836/0.009378

op=par(mfrow=c(3,2))
qqnormPlot(y_1, title=F,main="Δ=1")
qqnormPlot(y_5,title=F,main="Δ=5")
```

```
qqnormPlot(y_25,title=F,main="Δ=25")
qqnormPlot(y_125,title=F,main="Δ=125")
par(op)

jarqueberaTest(y_1)
jarqueberaTest(y_5)
jarqueberaTest(y_25)
jarqueberaTest(y_125)
ksnormTest(y_1)
ksnormTest(y_5)
ksnormTest(y_25)
ksnormTest(y_125)
shapiro.test(y_1)
shapiro.test(y_5)
shapiro.test(y_25)
shapiro.test(y_125)

v = rv_list[[1]]
sig = sqrt(as.numeric(v))
cov_logvol=acf(log(sig),lag.max=40,type="covariance",
               plot=F)$acf[-1]
x = (1:40)^(2*0.131)
plot(x,cov_logvol,pch=20,col="blue",
     ylab=expression(Cov(log(sigma))),
     xlab=expression(Delta^(2*H)))
abline(lm(cov_logvol~x),col="red",lwd=2.4)

esig2 = mean(sig)^2
covdel = acf(sig,lag.max=100,type="covariance",
            plot=F)$acf[-1]
x = (1:100)^(2*0.121)
plot(x,log(covdel+esig2),pch=20,col="blue",
     ylab=expression(phi(Delta)),
     xlab=expression(Delta^(2*H)))
abline(lm(log(covdel+esig2)~x),col="red",lwd=2.4)

y=1:100
plot(log(y),log(covdel),pch=20,col="blue",
     ylab=expression(log(Cov(sigma))),
     xlab=expression(log(Delta)), ylim=c(-11.7,-10.1))
abline(lm(log(covdel)~log(y)),col="red",lwd=2.4)
```

```
library(somebm)

eFBM=NULL
f=fbm(hurst=0.13, n=4340)
eFBM=exp(f)
plot(0:4340, 0.0143*eFBM, type="l", col="dark green", axes=F,
     ylim=range(min(0.0143*eFBM), max(0.0143*eFBM)),
     ylab="volatilità", xlab="giorni", main="Modello")
xticks = c(0,1000,2000,3000,4000)
axis(side=1, at=xticks, labels=xticks)
axis(2)
box()

vol_sp=sqrt(as.numeric(rv_list[[1]]))
length(vol_sp)
plot(vol_sp, type="l", col=4, ylab="volatilità",
     xlab="giorni", main="Dati")
```

Bibliografia

- [1] T. G. Andersen et al. The Distribution of Realized Exchange Rate Volatility. In: *Journal of the American Statistical Association* 96 (2000), pp. 42–55.
- [2] T. G. Andersen et al. The Distribution of realized stock return volatility. In: *Journal of Financial Economics* 61 (2001), pp. 43–76.
- [3] E. Bacry e J. F. Muzy. Log-infinitely divisible multifractal processes. In: *arXiv preprint arXiv:cond-mat/0207094v1* (2002).
- [4] P. Baldi. *Equazioni differenziali stocastiche e applicazioni*. Pitagora Editrice, 2000.
- [5] O. E. Barndorff-Nielsen et al. Designing realized kernels to measure the ex post variation of equity prices in the presence of noise. In: *Econometrica* 76.6 (2008), pp. 1481–1536.
- [6] O. E. Barndorff-Nielsen et al. Realized kernels in practice: trades and quotes. In: *The Econometrics Journal* 12.3 (2009), pp. C1–C32.
- [7] J. Beran. *Statistics for Long-Memory Processes*. Chapman & Hall/CRC, 1994.
- [8] J. Beran et al. *Long Memory Processes. Probabilistic Properties and Statistical Methods*. Springer, 2012.
- [9] J.-P. Bouchaud e M. Potters. *Theory of Financial Risk and Derivative Pricing: From Statistical Physics to Risk Management*. Cambridge University Press, 2003.
- [10] P. Cannarsa e T. D’Aprile. *Introduzione alla teoria della misura e all’analisi funzionale*. Springer-Verlag Italia, Milano, 2008.
- [11] P. Cheridito, H. Kawaguchi e M. Maejima. Fractional Ornstein-Uhlenbeck processes. In: *Electronic Journal of Probability* 8.3 (2003), pp. 1–14.

- [12] Z. Ciesielski, G. Kerkyacharian e B. Roynette. Quelques espaces fonctionnels associés à des processus gaussiens. In: *Studia Mathematica* 107.2 (1993), pp. 172–204.
- [13] A. Cohen. *Numerical analysis of wavelet methods*. Vol. 32. Elsevier, 2003.
- [14] L. Coutin. An Introduction to (Stochastic) Calculus with Respect to Fractional Brownian Motion. In: *Séminaire de Probabilités XL*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2007.
- [15] P. Embrechts e M. Maejima. *Selfsimilar Processes*. Princeton University Press, 2002.
- [16] L. C. Evans. *Partial Differential Equations*. American Mathematical Society, 1998.
- [17] J. Gatheral. *CFM-Imperial Distinguished Lecture Series CFM-Imperial Distinguished Lecture Series The Volatility Surface*. 2015. URL: <https://workspace.imperial.ac.uk/quantitativefinance/Public/events/Distinguished%20Lectures%20Series/Gatheral%203rd.pdf>.
- [18] J. Gatheral, T. Jaisson e M. Rosenbaum. Volatility is rough. In: *arXiv preprint arXiv:1410.3394* (2014).
- [19] D. Gilbarg e N. S. Trudinger. *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York, 2001.
- [20] B. B. Mandelbrot e J. W. Van Ness. Fractional Brownian motions, fractional noises and applications. In: *SIAM review* (1968).
- [21] R. N. Mantegna e H. E. Stanley. *An introduction to econophysics: Correlations and Complexity in Finance*. Cambridge University Press, 2000.
- [22] I. Norros, E. Valkeila e J. Virtamo. An elementary approach to a Girsanov formula and other analytical results on fractional Brownian motions. In: *Bernoulli* (1999).
- [23] A. Novikov e E. Valkeila. On some maximal inequalities for fractional Brownian motions. In: *Statistics & Probability Letters* (1999).
- [24] V. Pipiras e M. S. Taqqu. Integration questions related to fractional Brownian motion. In: *Probability Theory and their Applications* (2000).
- [25] Mathieu Rosenbaum. *Étude de quelques problèmes d'estimation statistique en finance*. Tesi di dott. ENSAE ParisTech; Université Paris-Est. 2007.
- [26] B. Roynette. Mouvement brownien et espaces de Besov. In: *Stochastics: An International Journal of Probability and Stochastic Processes* 43 (1993).

- [27] M. S. Taqqu e G. Samorondnisky. *Stable Non-Gaussian Random Processes*. Chapman & Hall, 1994.
- [28] H. Triebel. *Theory of Function Spaces III*. Monographs in Mathematics. Birkhäuser Verlag Basel, 2006.
- [29] W. Vervaat. Properties of general self-similar processes. In: *Bull. Intern. Statist. inst* 52.4 (1987), pp. 199–216.
- [30] W. Vervaat. Sample path properties of self-similar processes with stationary increments. In: *The Annals of Probability* 13.1 (1985), pp. 1–27.