Università degli studi di Padova

Dipartimento di Fisica e Astronomia "Galileo Galilei"

Corso di Laurea Triennale in Fisica

Tesi di Laurea

Inflazione nell'universo primordiale in modelli anisotropi

Laureando: Andrea Marzo

Relatore: Prof. Sabino Matarrese

Anno accademico 2015-2016

A mia sorella, a mia madre.

Abstract

La tesi si propone di studiare la nascita di un periodo di inflazione (espansione accelerata) nell'ambito di modelli cosmologici non isotropi. Si studierà, in particolare, il semplice caso di un campo scalare con potenziale esponenziale che evolve in una geometria di background di tipo Bianchi I. In questi modelli la dinamica si può ricondurre allo studio di un problema time-dependent nel quale oltre al parametro d'ordine sono coinvolti tre fattori di scala relativi alle tre direzioni dello spazio.

Parte I

La metrica Bianchi I accoppiata ad un campo scalare

Introduzione

Alcuni dei più noti problemi della cosmologia classica sono stati risolti con l'introduzione del concetto di inflazione([12],[13],[14],[15]).
Per inflazione s'intende una fase di espansione accelerata dell'universo, che si presume essere avvenuta nei primissimi istanti di vita dell'universo.
Formalmente,per la metrica omogenea e isotropa (FRW), con tensore enegiamomento del fluido perfetto, le equazioni di Einstein sono:

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{1}{6}(\rho + 3p)$$
$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} = \frac{1}{3}\rho - \frac{k}{a^2}$$

La prima è detta equazione di accelerazione, la seconda equazione di Friedmann.
La quantità $a(t)$ è detta fattore di scala e le sue derivate quantificano l'espansione o contrazione dell'universo.
Dall'equazione di accelerazione si evince che se vogliamo che l'espansione sia accelerata, e dunque ci sia inflazione, la quantità $\ddot{a}$ dev'essere maggiore di zero, e deve quindi valere:

$$p < -\frac{1}{3}\rho$$

L'esempio più immediato di espansione accelerata si trova in un universo con costante cosmologica Λ non nulla. L'equazione di accelerazione diviene:

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{1}{6}(\rho + 3p) + \frac{\Lambda}{3},$$

e se Λ è sufficientemente grande, l'espansione accelera.
In effetti dall'equazione di Friedmann si ha:

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} = \frac{1}{3}\rho - \frac{k}{a^2} + \frac{\Lambda}{3} \approx \frac{\Lambda}{3},$$

poichè i primi due termini vanno rapiamente a zero, mentre il terzo resta costante.
Allora

$$a(t) = e^{\sqrt{\frac{\Lambda}{3}}t}.$$

Invece di una costante cosmologica, considereremo un campo scalare ϕ. La scelta di un campo di tipo scalare è dovuta al fatto che un diverso tipo di campo porterebbe alla perdita di isotropia spaziale.
Come geometria di background, scegliamo la metrica di Bianchi tipo I.
La classificazione di Bianchi delle metriche (Bianchi I-IX) raccoglie tutte le metriche omogenee.La metrica omogenea ed anche isotropa (FRW)è ottenibile come

caso particolare delle metriche di Bianchi tipo I,V e IX.
In generale però, le metriche di Bianchi sono anisotrope. In questo lavoro analizzeremo la metrica di Bianchi tipo I, che ha la forma

$$ds^2 = -dT^2 + +a_1^2(T)dx^2 + a_2^2(T)dy^2 + a_3^2(T)dz^2.$$

Come si nota subito, in generale, la metrica è anisotropa, essendo presenti tre fattori di scala generalmente diversi fra loro.
C'è però l'eventualità che nel limite di tempi molto piccoli, o per tempi molto avanzati, questa metrica isotropizzi, ovvero che in effetti i tre fattori di scala abbiano il medesimo limite.

Partendo da questi due ingredienti, scriveremo le equazioni di Einstein e di evoluzione del campo, per poi andare a risolvere ed analizzare prima alcuni casi particolari, poi la soluzione generale.
Per alcune scelte delle costanti cercheremo le singolarità del modello, e l'eventuale presenza di inflazione.
Infine analizzeremo due limiti della nostra metrica, i modelli LRS (Locally Rotationally Symmetric), per cui si porranno uguali fra loro due dei fattori di scala, e il limite FRW, ottenuto ponendo tutti e tre i fattori di scala uguali fra loro (in appendice).

Le equazioni di Einstein e del campo scalare

Raccogliamo alcuni dei risultati ottenuti in [3].
Iniziamo con l'analizzare la metrica di Bianchi tipo I:

$$ds^2 = -dT^2 + a_1^2(T)dx^2 + a_2^2(T)dy^2 + a_3^2(T)dz^2. \qquad (1)$$

Cambiamo adesso i fattori di scala attraverso le seguenti definizioni:

$$dt \equiv \frac{dT}{a_3}, \qquad e^f \equiv a_3^2, \qquad G \equiv a_1 a_2, \qquad e^p \equiv \frac{a_1}{a_2}.$$

Facilmente si osserva che la metrica (1) diventa, omettendo la dipendenza dal tempo:

$$ds^2 = e^f(-dt^2 + dz^2) + G(e^p dx^2 + e^{-p}dy^2). \qquad (2)$$

I nostri fattori di scala sono ora G, p ed f, dipendenti tutti e tre dal solo tempo.
Il tensore metrico ha dunque la forma $g_{\mu\nu} = diag(-e^f, Ge^p, Ge^{-p}, e^f)$
mentre la metrica inversa è $g^{\mu\nu} = diag(-e^{-f}, \frac{e^{-p}}{G}, \frac{e^p}{G}, e^{-f})$.

Campi scalari in relatività generale

Oltre alla metrica anisotropa di Bianchi tipo I, introduciamo un campo scalare ϕ, governato dal potenziale $V(\phi)$. Per esplicitare le equazioni di campo di Einstein occorre conoscere la forma del tensore energia-momento associato al campo.
Ricordiamo la forma della lagrangiana di un campo scalare (ottenuta nell'ambito della relatività speciale):

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - V(\phi).$$

Passiamo alla derivata covariante per estenderla alla relatività generale ottenendo:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}g^{\mu\nu}\nabla_\mu\phi\nabla_\nu\phi - V(\phi). \qquad (3)$$

Ricaviamo l'azione S del campo ricordando che, essendo $\mathcal{L}$ una densità lagrangiana, varrà $S_\phi = \int d^4x\sqrt{-g}\mathcal{L}$:

$$S_\phi = \int d^4x\sqrt{-g}[-\frac{1}{2}g^{\mu\nu}\nabla_\mu\phi\nabla_\nu\phi - V(\phi)],$$

dove g è il determinante della metrica.
A questo punto dobbiamo variare funzionalmente l'azione. Per far ciò ci servirà il seguente risultato:

$$\delta\sqrt{-g} = -\frac{1}{2}\sqrt{-g}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}.$$

Forti del principio variazionale andiamo a variare funzionalmente l'azione, trovando δS_ϕ:

$$\delta S_\phi = \int d^4x\sqrt{-g}\delta g^{\mu\nu}[\frac{1}{2}g_{\mu\nu}(\frac{1}{2}g^{\alpha\beta}\partial_\alpha\phi\partial_\beta\phi) - \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi + \frac{1}{2}g_{\mu\nu}V(\phi)].$$

Essendo però: $\frac{\delta S_\phi}{\delta g^{\mu\nu}} = -\frac{\sqrt{-g}}{2}T_{\mu\nu}$, otteniamo finalmente la forma del tensore energia-momento $T_{\mu\nu}$ relativo al campo scalare ϕ:

$$T_{\mu\nu} = \nabla_\mu\phi\nabla_\nu\phi - g_{\mu\nu}[\frac{1}{2}g^{\alpha\beta}\nabla_\alpha\phi\nabla_\beta\phi + V(\phi)] \qquad (4)$$

Per ottenere l'equazione del moto potremmo variare l'azione rispetto a ϕ e porre tale variazione uguale a zero, ma il calcolo risulta più immediato utilizzando l'indentità contratta di Bianchi:

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0.$$

L'equazione del moto (equazione di Klein-Gordon) per il campo ϕ è allora:

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu} = (\nabla_\nu\nabla^\nu\phi - \frac{dV(\phi)}{d\phi})\nabla^\mu\phi = 0.$$

Andando a esplicitare il calcolo:

$$\frac{dV(\phi)}{d\phi} = g^{\mu\nu}\nabla_\mu\partial_\nu\phi = g^{\mu\nu}[\Gamma^\rho_{\mu\nu}\partial_\rho\phi + \partial_\nu\partial_\mu\phi] = g^{\mu\mu}\Gamma^0_{\mu\mu}\dot{\phi} - e^{-f}\ddot{\phi} = -e^{-f}[\ddot{\phi} + \frac{\dot{G}}{G}\dot{\phi}].$$

Dunque, nel caso della metrica (2), l'equazione prende la forma:

$$\ddot{\phi} + \frac{\dot{G}}{G}\dot{\phi} + e^f\frac{\partial V}{\partial\phi} = 0. \qquad (5)$$

Questa è la prima delle quattro equazioni che governa il nostro modello cosmologico.
Il medesimo risultato si sarebbe ottenuto variando funzionalmente l'azione e ponendo tale variazione uguale a zero, o usando direttamente:

$$\nabla_\mu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\nu\phi} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} = 0.$$

Ora, nel caso di spazio-tempo omogeneo, il tensore energia-momento può essere scritto nella forma di fluido perfetto:

$$T_{\mu\nu} = (p+\rho)u_\mu u_\nu + p g_{\mu\nu},$$

dove

$$\rho = -\frac{1}{2}\partial_\gamma\phi\partial^\gamma\phi + V(\phi) \qquad , \qquad p = -\frac{1}{2}\partial_\gamma\phi\partial^\gamma\phi - V(\phi).$$

Come detto in introduzione, affinché l'inflazione sia presente, occorre che sia soddisfatta $p < -\frac{1}{3}\rho$.
Guardando alle espressioni di densità di energia e pressione, una prima scelta che verrebbe in mente, è porre $\dot{\phi} = 0$, per cui si avrebbe $p = -\rho$. In effetti, essendo già $\partial_i\phi = 0$, questa scelta porta coincide con l'avere una costante cosmologica.
Una scelta meno immediata consiste nel prendere $\dot{\phi}^2 << V(\phi)$. A questo proposito scelgiamo $V(\phi) = \Lambda e^{k\phi}$.
In effetti si mostra che questa è l'unica scelta che rende risolvibili analiticamente le equazioni, ed è ripresa in molti approcci diversi alla teoria come in [4], [5], [6],[7], [8], [9].

Le equazioni di Einstein

Non ci resta che scrivere esplicitamente le equazioni di Einstein per la metrica (2), utilizzando tensore energia-momento (4).
Tramite la nota formula

$$\Gamma^\rho_{\mu\nu} = \frac{1}{2}g^{\rho\sigma}(\partial_\mu g_{\sigma\nu} + \partial_\nu g_{\sigma\mu} - \partial_\sigma g_{\mu\nu}),$$

ricaviamo i simboli di Christoffel per la metrica (2).

Essendo la metrica di Bianchi tipo I space independent, e dunque essendo nulle tutte le derivate spaziali dei fattori di scala, i soli simboli di Christoffel a non essere nulli sono:

$$\Gamma^0_{00} = \frac{\dot{f}}{2} \quad ;\Gamma^0_{11} = \frac{e^{-f}}{2}(\dot{G}e^p + \dot{p}e^p G) \quad ;\Gamma^0_{22} = \frac{e^{-f}}{2}(\dot{G}e^{-p} - \dot{p}e^{-p}G) \quad ;\Gamma^0_{33} = \frac{\dot{f}}{2}$$

$$\Gamma^1_{01} = \Gamma^1_{10} = \frac{1}{2}(\frac{\dot{G}}{G} + \dot{p})$$

$\Gamma^2_{02} = \Gamma^2_{20} = \frac{1}{2}(\frac{\dot{G}}{G} - \dot{p})$

$\Gamma^3_{03} = \Gamma^3_{30} = \frac{\dot{f}}{2}.$

Occorre utilizzare:

$$R_{\mu\nu} = \partial_\lambda \Gamma^\lambda_{\nu\mu} - \partial_\nu \Gamma^\lambda_{\lambda\mu} + \Gamma^\lambda_{\lambda\gamma}\Gamma^\gamma_{\nu\mu} - \Gamma^\lambda_{\nu\gamma}\Gamma^\gamma_{\lambda\mu},$$

per trovare le componenti del tensore di Ricci.
Facilmente vediamo che:

$$R_{0i} = \partial_\lambda \Gamma^\lambda_{0i} - \partial_i \Gamma^\lambda_{\lambda 0} + \Gamma^\lambda_{\lambda\gamma}\Gamma^\gamma_{i0} - \Gamma^\lambda_{i\gamma}\Gamma^\gamma_{\lambda 0} = \partial_0 \Gamma^0_{0i} + \Gamma^\lambda_{\lambda i}\Gamma^i_{i0} - \Gamma^\lambda_{i\lambda}\Gamma^\lambda_{\lambda 0} = 0$$

$$R_{ij} = \partial_\lambda \Gamma^\lambda_{ij} - \partial_j \Gamma^\lambda_{\lambda i} + \Gamma^\lambda_{\lambda\gamma}\Gamma^\gamma_{ji} - \Gamma^\lambda_{j\gamma}\Gamma^\gamma_{\lambda i} = \partial_0 \Gamma^0_{ij} - \Gamma^\lambda_{j\lambda}\Gamma^\lambda_{\lambda i} = 0.$$

Dunque il tensore di Ricci risulta diagonale, di componenti:

$R_{00} = -\frac{1}{2}\ddot{f} - \frac{\ddot{G}}{G} + \frac{1}{2}\frac{\dot{G}^2}{G^2} + \frac{\dot{G}\dot{f}}{2G} - \frac{1}{2}\dot{p^2}$ $\qquad R_{11} = \frac{e^{-f}e^{p}}{2}(\ddot{G} + \dot{p}\dot{G} + G\ddot{p})$

$R_{22} = \frac{e^{-f}e^{-p}}{2}(\ddot{G} - \dot{p}\dot{G} - G\ddot{p})$ $\qquad R_{33} = \frac{\ddot{f}}{2} + \frac{\dot{G}\dot{f}}{2G}$

La curvatura scalare può essere ottenuta sommando fra di loro le componenti del tensore di Ricci, moltiplicate per le rispettive componenti della metrica inversa. D'altra parte, tramite calcolo diretto:

$$R^\mu_\mu = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} = g^{\mu\nu}\partial_\lambda \Gamma^\lambda_{\nu\mu} - g^{\mu\nu}\partial_\nu \Gamma^\lambda_{\lambda\mu} + g^{\mu\nu}\Gamma^\lambda_{\lambda\gamma}\Gamma^\gamma_{\nu\mu} - g^{\mu\nu}\Gamma^\lambda_{\nu\gamma}\Gamma^\gamma_{\lambda\mu},$$

e, sostituedo i simboli di Christoffel trovati in precedenza:

$$g^{\mu\nu}\partial_\lambda \Gamma^\lambda_{\nu\mu} = g^{\mu\mu}\partial_0 \Gamma^0_{\mu\mu} = e^{-f}(\frac{\ddot{G}}{G} + \dot{p^2} - \frac{\dot{f}\dot{G}}{G})$$

$$-g^{\mu\nu}\partial_\nu \Gamma^\lambda_{\lambda\mu} = -g^{00}\partial 0 \Gamma^\lambda_{\lambda 0} = e^{-f}(\frac{\ddot{G}}{G} + \ddot{f} - \frac{\dot{G^2}}{G^2})$$

$$g^{\mu\nu}\Gamma^\lambda_{\lambda\gamma}\Gamma^\gamma_{\nu\mu} = g^{\mu\mu}\Gamma^\lambda_{\lambda\gamma}\Gamma^\gamma_{\mu\mu} = g^{\mu\mu}\Gamma^\lambda_{\lambda 0}\Gamma^0_{\mu\mu} = e^{-f}(\frac{\dot{G^2}}{G^2} + \frac{\dot{f}\dot{G}}{G})$$

$$-g^{\mu\nu}\Gamma^\lambda_{\nu\gamma}\Gamma^\gamma_{\lambda\mu} = -g^{\mu\mu}\Gamma^\lambda_{\lambda\mu}\Gamma^\lambda_{\lambda\mu} = -\frac{e^{-f}}{2}(\dot{p^2} + \frac{\dot{G^2}}{G^2}).$$

La curvatura scalare è dunque:

$$R = e^{-f}(\ddot{f} + 2\frac{\ddot{G}}{G} + \frac{1}{2}\dot{p}^2 - \frac{1}{2}\frac{\dot{G}^2}{G^2}). \qquad (6)$$

Abbiamo tutti gli ingredienti per scrivere le equazioni di Einstein.
Le quattro equazioni sono:

$$\frac{1}{4}\frac{\dot{G}^2}{G^2} + \frac{\dot{G}\dot{f}}{2G} - \frac{1}{4}\dot{p}^2 = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + e^f V \qquad (0,0)$$

$$\frac{1}{4}\frac{\dot{G}^2}{G^2} + \frac{\dot{G}\dot{f}}{2G} - \frac{1}{4}\dot{p}^2 - \frac{\ddot{G}}{G} = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - e^f V \qquad (3,3)$$

$$\dot{p}\dot{G} + G\ddot{p} - G\ddot{f} - \dot{G}\dot{f} + \ddot{G} = 0 \qquad (1,1)$$

$$-\dot{p}\dot{G} - G\ddot{p} - G\ddot{f} - \dot{G}\dot{f} + \ddot{G} = 0 \qquad (2,2)$$

Riarrangiando le equazioni, in particolare prendendo le combinazioni $(0,0)-(3,3)$; $(2,2)-(1,1)$, e facendo qualche sostituzione, si ottengono le tre equazioni distinte:

$$\ddot{p} + \frac{\dot{G}}{G}\dot{p} = 0 \qquad (7)$$

$$e^f = \frac{\ddot{G}}{2GV} \qquad (8)$$

$$\frac{\ddot{G}}{G} - \frac{1}{2}\frac{\dot{G}^2}{G^2} - \frac{\dot{G}}{G}\dot{f} + \frac{1}{2}\dot{p}^2 = -\dot{\phi}^2. \qquad (9)$$

L'equazione di evoluzione temporale

Queste tre equazioni, unite all'equazione (5), sono le quattro equazioni che governano il nostro modello.
Cerchiamo di ricombinarle in maniera da semplificarne la risoluzione.
Innanzitutto vediamo che l'equazione (7) è disaccoppiata dalle altre, nel senso che è la medesima che si avrebbe nel vuoto.
Dopo una prima integrazione la (7) diventa:

$$\dot{p} = \frac{a}{G}, \qquad (10)$$

dove a è un'arbitraria costante d'integrazione.
Differenziando l'equazione (8) si ottiene (per $V \neq 0$):

$$\frac{\dddot{G}}{G} - \frac{\dot{G}\ddot{G}}{G^2} = \frac{\ddot{G}}{G}(\dot{f} + \frac{\dot{V}}{V}),$$

e usando ancora l'equazione (8) in quest'ultima si ottiene:

$$\frac{\dddot{G}}{\ddot{G}} - \frac{\dot{G}}{G} - \frac{\dot{V}}{V} = \dot{f}. \qquad (11)$$

Sostituendo le equazioni (10) ed (11) nell'equazione (9) e la forma di e^f ottenuta da (8) in (5) rimangono le due equazioni:

$$\ddot{\phi} + \frac{\dot{G}}{G}\dot{\phi} = -\frac{1}{2}\frac{\ddot{G}}{GV}\frac{\partial V}{\partial \phi}, \qquad (12)$$

e

$$\frac{\ddot{G}}{G} + \frac{1}{2}\frac{\dot{G}^2 + a^2}{G^2} - \frac{\dddot{G}\dot{G}}{G\ddot{G}} + \frac{\dot{G}\dot{V}}{GV} = -\dot{\phi}^2. \qquad (13)$$

Specificando la forma (esponenziale) del potenziale: $V(\phi) = \Lambda e^{k\phi}$, l'equazione di Klein-Gordon (12) diviene

$$\ddot{\phi} + \frac{\dot{G}}{G}\dot{\phi} = -\frac{k}{2}\frac{\ddot{G}}{G},$$

che in analogia all'integrazione fatta per la (7), diventa:

$$\dot{\phi} = \frac{m}{G} - \frac{k}{2}\frac{\dot{G}}{G}, \qquad (14)$$

dove m è ancora una arbitraria costante d'integrazione.
Integrando ancora una volta, e tenendo presente la (10), si ha l'equazione che servirà, una volta nota la funzione G(t) a ricavare ϕ:

$$\phi = \frac{1}{k}ln(\phi_0) + \frac{m}{a}p - \frac{k}{2}ln(G). \qquad (15)$$

Andando a sostituire la forma di $\dot{\phi}$ trovata in (14) e la forma del potenziale nell'equazione (13), otteniamo un'unica equazione per G:

$$G\ddot{G}^2 - \dddot{G}\dot{G}G - K\ddot{G}\dot{G}^2 + M^2\ddot{G} = 0, \qquad (16)$$

ove

$$K \equiv \frac{k^2}{4} - \frac{1}{2}, \qquad e \qquad M^2 \equiv m^2 + \frac{a^2}{2}.$$

Sostituendo $\dot{G} = y(G)$, la (16) diventa:

$$y'' + (K - \frac{M^2}{y^2})\frac{1}{G}y' = 0, \qquad (17)$$

dove $y' = \frac{dy}{dG}$.
L'equazione (17) ha l'integrale primo:

$$Gy' + (K-1)y + \frac{M}{y} = C \quad ovvero \quad G\frac{\ddot{G}}{\dot{G}} + (K-1)\dot{G} + \frac{M^2}{\dot{G}} = C, \qquad (18)$$

con C costante arbitraria.
Seguendo il procedimento utilizzato in [1], si può ottenere una soluzione implicita. Integrando la (18) si trova la forma implicita per G(t),

$$G = \frac{2(K-1)y + C - \sqrt{\Delta}}{2(K-1)y + C + \sqrt{\Delta}}^{\frac{C}{2(K-1)\sqrt{\Delta}}} N[(K-1)y^2 + Cy + M^2]^{-\frac{1}{2(K-1)}},$$

$$ove \quad \Delta = C^2 - 4(K-1)M^2.$$

In linea di principio, si potrebbe risolvere questa equazione ottenendo y(G), usare $t = \int \frac{dG}{y(G)}$ ed invertirla per trovare finalmente G(t). Infine ricavare p(t) tramite (10), $\phi(t)$ tramite (15), e f(t) tramite (8).
Evidentemente, vista la difficoltà di calcolo, in questo modo possiamo trovare soluzioni solo per particolari scelte delle costanti d'integrazione.

Seguiamo invece il procedimento usato in [3], ottenuto guardando ai risultati di [2].
Per semplificare la risoluzione dell'equazione (18) andiamo a fare un cambio di variabili:

$$G = z^{\frac{1}{K}} \qquad t = -\frac{\tau}{C},$$

Essendo $\dot{G} = \frac{1}{K}\dot{z}z^{\frac{1}{K}-1}$ e $\ddot{G} = \frac{1}{K}z^{\frac{1}{K}-1}[\frac{1-K}{K}\frac{\dot{z}^2}{z} + \ddot{z}]$.

l'equazione (18) diviene:

$$\ddot{z} + M^2 K z^{1-\frac{2}{K}} = \frac{\dot{z}}{z^{\frac{1}{K}}}C,$$

e passando alle derivate rispetto alla nuova variabile τ, indicate dagli apici, e notando che vale:

$$\frac{d}{dt} = -C\frac{d}{d\tau} \text{ e } \frac{d^2}{dt^2} = C^2\frac{d^2}{d\tau^2}$$

otteniamo infine:

$$z'' + z^{-\frac{1}{K}}z' + \frac{KM^2}{C^2}z^{1-\frac{2}{K}} = 0. \qquad (19)$$

Si mostra che qualsiasi equazione differenziale per z(τ) che può essere scritta come:

$$z'' + \alpha f(z)z' + \beta f(z)\int f(z)dz + \gamma f(z) = 0, \qquad (20)$$

trasforma sotto il cambio di variabili non locale $(\tau, z) \to (\eta, y)$ definito come:

$$y \equiv \int f(z)dz \qquad \eta \equiv \int f(z)d\tau, \qquad (21)$$

nell'equazione lineare per y:

$$\ddot{y} + \alpha\dot{y} + \beta y + \gamma = 0. \qquad (22)$$

Si può risolvere questa equazione lineare, ed invertire le trasformazioni (21) per ottenere la soluzione in forma parametrica.
Affinché l'inversione delle (21) possa essere eseguita occorre che sia almeno:

$$f(z) = bz^n + d \qquad e \qquad \beta = \alpha\frac{n+1}{(n+2)^2}. \qquad (23)$$

Useremo questo risultato per discutere alcuni casi particolari.

Alcune soluzioni esplicite

In questa sezione discuteremo le soluzioni per alcune scelte delle costanti d'integrazione, ed al variare di K.
Per ciascuna studieremo la presenza di singolarità e di inflazione.

K>0, K≠ 1, C≠ 0

In questo caso, l'equazione (19) ha la forma (20) se vale:

$$\alpha = 1, \qquad \beta = \frac{(K-1)M^2}{C^2}, \qquad \gamma = 0, \qquad f(z) = z^{-\frac{1}{K}}. \qquad (24)$$

Nel caso $K \neq 1$, le condizioni (23) sono soddisfatte se

$$\frac{C^2}{M^2} = \frac{(2K-1)^2}{K}. \qquad (25)$$

Per un dato $K > 0$ si sceglie C come da (25) ed invertendo le trasformazioni per ottenere G si ha:

$$G = \frac{M\sqrt{K}}{K-1}(\Delta t + A\,|\Delta t|^{\frac{1}{K}}), \qquad \Delta t = t - t_0,$$

con t_0 e A costanti arbitrarie.
Utilizzando le equazioni (8), (10), (15) e la forma del potenziale specificata in precedenza, si calcolano gli altri coefficienti e la funzione $\phi(t)$:

$$e^p = [p_0 \frac{G^K}{|\Delta t|}]^{\frac{a}{M\sqrt{k}}}$$

$$e^f = -\frac{MA\sqrt{K}}{2K^2\Lambda\phi_0 p_0^2}\,|\Delta t|^{\frac{1}{K}}\,[p_0\frac{G^K}{|\Delta t|}]^{2-\frac{mk}{M\sqrt{K}}}$$

$$\phi = \frac{1}{k}ln\phi_0 + \frac{m}{M\sqrt{K}}ln[p_0\frac{G^K}{|\Delta t|}] - lnG^{\frac{K}{2}}.$$

La funzione G(t) si annulla due volte, a prescindere dal valore delle costanti d'integrazione, in:

$$t_1 = t_0, \qquad t_2 = t_0 - sgnA\,|A|^{\frac{K}{K-1}}.$$

Assumiamo **t=t$_1$+**ϵ con $|\epsilon| << 1$ e guardiamo l'andamento della curvatura scalare all'intorno di questo istante.
Per **K<1** , la funzione G(t) vale circa $|\Delta t|$, e dunque:

$$G(t) \approx |\Delta t|\,, \qquad p \approx ln\,|\Delta t|\,, \qquad e^{-f} \approx |\Delta t|^{-\frac{1}{K}-(K-1)(2-\frac{mk}{M\sqrt{K}})}.$$

Il termine dominante in ϵ della curvatura scalare risulta essere:

$$R \approx \epsilon^{-[\frac{1}{K}+2K+(1-K)\frac{mk}{M\sqrt{K}}]},$$

che diverge per $\epsilon \to 0$ per qualsiasi valore delle costanti. Questo universo inizia la sua espansione anisotropa (basti vedere che $e^p \neq e^{-p}$ e dunque $a_1^2 \neq a_2^2$) da una singolarità in $t = t_0$.
Per **K>1** si ha invece che $G(t) \approx |\Delta t|^{\frac{1}{K}}$. Dunque:

$$G(t) \approx |\Delta t|^{\frac{1}{K}}, \qquad e^p \approx const., \qquad e^{-f} \approx |\Delta t|^{-\frac{1}{K}}.$$

La curvatura scalare risulta essere:

$$R \approx \epsilon^{-[2+\frac{1}{K}]},$$

e anche stavolta diverge per ogni valore delle costanti d'integrazione. D'altra parte in questo caso tutti i fattori di scala hanno il medesimo andamento attorno a t_0 (infatti $a_3^2 = e^f \approx \epsilon^{\frac{1}{K}}, a_2^2, a_1^2 \approx G \approx \epsilon^{\frac{1}{K}}$) e dunque l'inizio dell'evoluzione è isotropo.

Per $\mathbf{t{=}t_2{+}\epsilon}$ si ottiene:

$$G(t) \approx |\Delta t|\,[1 + A\,|\Delta t|^{\frac{1}{K}}], \qquad e^{-f} \approx [1 + A\,|\Delta t|]^{K[2-\frac{mk}{M\sqrt{K}}]},$$

e: $\ddot{f} \approx \dot{p}^2 \approx \epsilon^{-2}$. La curvatura scalare è allora:

$$R \approx \epsilon^{-[K(2-\frac{mk}{M\sqrt{K}})+2]},$$

per ogni K.
Si ha una singolarità in $t = t_2$ e l'evoluzione inizia in maniera anisotropa.

K=1, C $\neq$ 0

Nel caso $K = 1$ recuperiamo parzialmente il risultato appena ottenuto.
L'equazione (19) ha la forma (20) se

$$\alpha = 1, \qquad \beta = 0, \qquad \gamma = \frac{M^2}{C^2}, \qquad f(z) = z^{-1}.$$

La condizione (23) è sostituita da $\frac{\gamma}{\alpha} = 1$ ma essendo $\alpha = 1$, vuol dire che dobbiamo prendere $M^2 = C^2$.
Appoggiandoci ancora al risultato appena ottenuto, ponendo $K = 1$, otteniamo la forma esplicita per G(t) e di conseguenza le altre tre equazioni:

$$G = M\,|\Delta t|\,(A + ln\,|\Delta t|)$$

$$e^p = [p_0 \frac{G}{|\Delta t|}]^{\frac{a}{M}}$$

$$e^f = \frac{M}{2\Lambda\phi_0 p_0^2}\,|\Delta t|\,[p_0\frac{G}{|\Delta t|}]^{2-\frac{mk}{M}}$$

$$\phi = \frac{1}{k}ln\phi_0 + \frac{m}{M}ln[p_0\frac{G}{|\Delta t|}] - lnG^{\frac{K}{2}}.$$

In questo caso la funzione G(t) ha tre zeri: in $t = t_0$ ed in $t_\pm = t_0 \pm e^{-A}$.

Nel primo caso, **t=t**$_0$, valgono le seguenti approssimazioni:

$$G(t) \approx |\Delta t|\,ln\,|\Delta t|\,, \qquad e^p \approx [ln\,|\Delta t|]^{\frac{a}{m}}, \qquad e^f \approx |\Delta t|\,[ln\,|\Delta t|]^{2-\frac{mk}{M}}$$

e, $\quad \dot{p} \approx \frac{\ddot{G}}{G} \approx \frac{1}{|\Delta t|^2 ln^2|\Delta t|}, \qquad \frac{\dot{G}^2}{G^2} \approx \ddot{f} \approx \frac{1}{|\Delta t|^2}$

e allora la curvatura:

$$R \approx \epsilon^{-3}(ln\epsilon)^{-2+\sqrt{6}\frac{m}{M}}.$$

Si vede che la curvatura diverge per $\epsilon \to 0$.

Quando **t= t**$_\pm$ si ha:

$$G(t) \approx |\Delta t|\,[A + ln\,|\Delta t|], \qquad e^p \approx [A + ln\,|\Delta t|]^{\frac{a}{m}}, \qquad e^f \approx [A + ln\,|\Delta t|]^{2-\frac{mk}{M}},$$

e $\quad \dot{p}^2 \approx \frac{\dot{G}^2}{G^2} \approx \ddot{f} \approx \frac{1}{[A+ln|\Delta t|]^2}, \qquad \frac{\ddot{G}}{G} \approx \frac{1}{[A+ln|\Delta t|]}$

e la curvatura:

$$R \approx \epsilon^{-4+\sqrt{6}\frac{m}{M}}.$$

Ancora una volta la curvatura diverge per $\epsilon \to 0$.
In questo caso particolare, dunque, si hanno tre singolarità e l'universo inizia la sua evoluzione (anisotropa) da una di queste tre, finendo o in una fase finale anisotropa o col raggiungimento di una seconda singolarità dopo un tempo finito.

K≠0, C=0
Per questa scelta l'equazione (18) diviene:

$$G\ddot{G} + (K-1)\dot{G} + M^2 = 0,$$

che può essere risolta scegliendo K. Ad esempio per $K = 2$ la soluzione è:

$$G = \sqrt{-M^2t^2 + C_1 t + C_2},$$

e il modello ha due singolarità (corrispondenti agli zeri di G), ove la curvatura vale circa $R \approx \epsilon^{-\frac{5}{2}}$ e dunque l'universo si evolve fra le due singolarità.
$\grave{E}$ interessante come l'equazione da risolvere si riduca, sostituendo $G = z^{\frac{1}{K}}$, a:

$$\ddot{z} + KM^2 z^{1-\frac{2}{K}} = 0,$$

che nel caso $M^2 = 0$ ha la banale soluzione $z = C_1 |\Delta t|$, e allora

$$G = C_1 |\Delta t|^{\frac{1}{K}},$$

che è a soluzione di tipo FRW che verrà discussa in appendice (in effetti ponendo $M = 0, \quad C = 0$ ci siamo ridotti ai modelli isotropi).

K=0, C=0

In questo particolare caso, l'equazione (18) è ridotta a:

$$G\ddot{G} - \dot{G}^2 + M^2 = 0,$$

e differenziando,

$$\dddot{G}G = \dot{G}\ddot{G}.$$

Risolvendo la seconda, e sostituendo nella prima per trovare la soluzione particolare, s'ottiene:

$$G(t) = C_1 \cosh(\omega t) + \sqrt{C_1^2 + \frac{M^2}{\omega^2}} \sinh(\omega t). \qquad (26)$$

Detto t_0 il tempo in cui G(t) si annulla ($t_0 = \frac{1}{\omega} arctanh(-\frac{C_1}{\sqrt{C_1^2 + \frac{M^2}{\omega^2}}})$),
la curvatura sarà, attorno a t_0: $R \approx \epsilon^{-2+\sqrt{2}\frac{m}{M}}$, e diverge per $\epsilon \to 0$.
Questo modello inizia dunque da una singolarità.

K=0, M²=0

In questo caso l'equazione (18), ridotta a $G\frac{\ddot{G}}{\dot{G}} - \dot{G} = C$, ha l'integrale primo:

$$G = \frac{C}{\omega} + C_1 e^{\omega t}. \qquad (27)$$

Essendo $M^2 = 0$, si avrà $m = a = 0$ e allora $\dot{p} = 0$.
I restanti coefficienti della metrica sono allora:

$$p = p_0$$

$$e^f = \frac{\omega^2}{2\Lambda\phi_0}[C_1 e^{\omega t}]$$

$$\phi = \frac{1}{k} ln\phi_0 - \frac{K}{2} lnG.$$

D'altra parte la curvatura scalare è: $R = e^{-f}(2\frac{\ddot{G}}{G} - \frac{1}{2}\frac{\dot{G}^2}{G^2})$, essendo $\ddot{f} = 0$.
Vale dunque:

$$R = \frac{2\Lambda\phi_0}{G^2}[\frac{C}{2\omega} + \frac{3}{2}G].$$

Se $sgn(\frac{C}{\omega}) \neq sgn(C_1)$, allora la funzione G(t) si annulla una sola volta in $t = t_0$.
Attorno a t_0 la curvatura è approssimata da $R \approx \epsilon^{-2}$ e dunque il modello inizia la sua evoluzione da una singolarità.
Nel particolare caso in cui $C_1 = \omega = 1$ otteniamo la soluzione di tipo LRS, che sarà discussa in seguito.

Soluzione generale per l'equazione di evoluzione

Oltre a discutere alcuni casi particolari, come fatto nella sezione precedente, si può ottenere, guardando ai risultati contenuti in [2], la soluzione generale all'equazione di evoluzione temporale per G(t), (18).

K≠ 0, C≠ 0
Ricordando l'equazione di evoluzione temporale (18):

$$G\frac{\ddot{G}}{\dot{G}} + (K-1)\dot{G} + \frac{M^2}{\dot{G}} = C,$$

ed effettuando nuovamente il cambio di variabili $G = z^{\frac{1}{K}}$, $\qquad t = -\frac{\tau}{C}$
otteniamo la (19):

$$z'' + z^{-\frac{1}{K}}z' + \frac{KM^2}{C^2}z^{(1-\frac{2}{K})} = 0.$$

Le trasformazioni (21) che linearizzano questa equazione sono in questo caso, per $K \neq 1$:

$$y \equiv \int z^{-\frac{1}{K}}dz = K\frac{z^{1-\frac{1}{K}}}{K-1}, \qquad \eta \equiv \int z^{-\frac{1}{K}}d\tau = -\frac{C}{a}p, \qquad (28)$$

e per $K = 1$:

$$y \equiv \int z^{-1}dz = ln(z), \qquad \eta \equiv \int z^{-1}d\tau = -\frac{C}{a}p.$$

Definendo:

$$\beta \equiv (K-1)\frac{M^2}{C^2} \qquad e \qquad \gamma \equiv \frac{M^2}{C^2},$$

l'equazione (18)
per $K \neq 1$ si riduce a:

$$y'' + y' + \beta y = 0, \qquad (29)$$

e per $K = 1$:

$$y'' + y' + \gamma = 0. \qquad (30)$$

Le soluzioni delle equazioni (29) e (30) danno la soluzione implicita della (16). Dette $\lambda^{\pm}$ le radici del polinomio caratteristico associato all'equazione (29):

$$\lambda^{\pm} = \frac{-1 \pm [1-4\beta]^{\frac{1}{2}}}{2} \equiv -\frac{1}{2} \pm \lambda,$$

ed essendo dunque $\lambda = \frac{1}{2}[1-4\beta]^{\frac{1}{2}}$, scriviamo la soluzione generale.
Tale soluzione per $K \neq 1$ è:

$$G = [e^{-\frac{\eta}{2}}(C_1 e^{\lambda\eta} + C_2 e^{-\lambda\eta})]^{\frac{1}{(K-1)}}, \qquad (31)$$

mentre per $K = 1$ è:

$$G = C_1 e^{-\gamma\eta + C_2 e^{-\eta}}. \qquad (32)$$

Discutiamo ora separatamente i casi $\beta < \frac{1}{4}$, $\beta = \frac{1}{4}$, $\beta > \frac{1}{4}$, a seconda quindi delle soluzioni del polinomio caratteristico di (29).

$\beta < \frac{1}{4}$, $K < 1$.
La funzione G si annulla due volte, per $\eta \to \pm\infty$, e il termine dominante è $G^{\pm}(\eta) \approx e^{\frac{\lambda^{\pm}\eta}{K-1}}$.
Per ottenere la soluzione esplicita inseriamo questa approssimazione di G(η) nella trasfrmazione (28), ottenendo l'espansione di G in termini di $|\Delta t|$:

$$G^{\pm} \approx \frac{C\lambda^{\pm}}{1-K}\,|\Delta t| + D\,|\Delta t|^{1\pm 2\frac{1-K}{\lambda^{\pm}}}.$$

Andiamo a trovare la forma della curvatura scalare.
Per $|\Delta t| \to 0$, la G^{+} ha il medesimo limite per ogni valore di K ($G^{+} \approx |\Delta t|$) mentre la G^{-} ha due limiti differenti per $K < 1$ e $K > 1$.
Introduciamo due nuovi parametri, e distinguiamo i casi appena menzionati:

$$n^{\pm} = 1 + \frac{(1-K)(1+2\lambda^{\pm})}{\lambda^{\pm}}.$$

per $n^{\pm} > 1$ risulta:

$$G^{\pm} \approx \frac{C\lambda^{\pm}}{1-K}\,|\Delta t|, \qquad e^{f} \approx t^{[1\mp\frac{1}{\lambda^{\pm}}\pm\frac{K}{\lambda^{\pm}}+(K-1)\frac{km}{C\lambda^{\pm}}]},$$

ed essendo $\ddot{f} \approx \dot{p}^2 \approx \frac{\dot{G}^2}{G} \approx t^{-2}$,

$$R^{\pm} \approx |\Delta t|^{-[3\mp\frac{1}{\lambda^{\pm}}\pm\frac{K}{\lambda^{\pm}}+(K-1)\frac{km}{C\lambda^{\pm}}]} = |\Delta t|^{-[n^{\pm}+2K+(K-1)\frac{km}{C\lambda^{\pm}}]}. \qquad (33)$$

Per $n^{-} < 1$:

$$R^{-} \approx |\Delta t|^{-\frac{k^2 n^{-}}{2}}. \qquad (34)$$

$\beta < \frac{1}{4}$, $K > 1$.

La funzione G(η) si annulla per $\eta \to \infty$ e per un certo $\eta = \eta_0$, se sgn(C_1)$\neq$ sgn(D). Ponendo $\eta = \eta_0 + \Delta\eta$, si ha $G \approx \Delta\eta^{\frac{1}{K-1}}$ e attraverso la (28),

$$G \approx G_0 \, |\Delta t|^{\frac{1}{K}} \, ,$$

e la curvatura:

$$R \approx |\Delta t|^{-[2+\frac{1}{K}]} \, . \qquad (35)$$

Mentre la (35) presenta sicuramente una singolarità all'istante iniziale, le (33) e (34) sono singolari solo per alcune scelte delle costanti, dunque ci saranno famiglie di soluzioni che iniziano da una singolarità.
Inoltre la (35) e la (34) coincidono se è soddisfatta la condizione (25), e dunque le due singolarità collassano in una sola quando vale tale vincolo.

$\beta = \frac{1}{4}$.
la soluzione generale implicita è:

$$G = [e^{-\frac{\eta}{2}}(C_1 + C_2\eta)]^{\frac{1}{K-1}} .$$

Per la discussione delle singolarità dove G si annulla, possiamo recuperare le espressioni (33), (34) e (35), prendendone il giusto limite.
La funzione G si annulla , per $K < 1$ per $\eta \to -\infty$ e per $K > 1$ in $\eta \to +\infty$ e in $\eta = -\frac{C_1}{C_2} \equiv \eta_0$ ed in questi limiti si riprendono appunto le soluzioni trovate sopra.

$\beta > \frac{1}{4}$
Questo caso riproduce modelli che evolvono in un intervallo temporale finito, avendo la (31) soluzioni di tipo oscillatorio.
In effetti, ricordando che $\beta \equiv (K-1)\frac{M^2}{C^2}$, la condizione $\beta > \frac{1}{4}$ può essere soddisfatta solo se $K > 1$, e allora la (18) diventa:

$$\left| \frac{G\ddot{G}}{\dot{G}} + (K-1)\dot{G} + \frac{M^2}{\dot{G}} \right| < 2\sqrt{K-1}M. \qquad (36)$$

Scegliendo G positivo, per evitare cambiamenti di segno, ipotizzando una costante cosmologica positiva si ottiene $\ddot{G} > 0$.
Assumendo che, almeno inizialmente, l'universo sia in espansione ($\dot{G} > 0$), la (36) diventa:

$$M^2 - 2\sqrt{K-1}\dot{G}M + G\ddot{G} + (K-1)\dot{G}^2 < 0,$$

ma per le considerazioni fatte fino ad ora, il discriminante della parte sinistra dell'equazione $-4\ddot{G}G$ è negativo e dunque la parte sinistra della disequazione è

definita positiva.
Perciò questi modelli oscillatori sono compatbili soltanto con una costante cosmologica negativa.

K≠0, M^2=0, C≠ 0.

Per questo caso particolare la soluzione implicita è, per $K \neq 1$:

$$G = [C_1 + C_2 e^{-\eta}]^{\frac{1}{K-1}}, \qquad (37)$$

e per $K = 1$:

$$G = C_1 e^{C_2 e^{-\eta}}. \qquad (38)$$

Per $K < 1$ la funzione G si annulla per $\eta \to -\infty$ e la forma esplicita di G è:

$$G \approx \frac{C}{K-1} |\Delta t| + D |\Delta t|^{2-K}.$$

Per la curvatura è ottenuta da (33), prendendo $m = 0$ ed è dunque:

$$R \approx |\Delta t|^{-(2+K)},$$

e si ha perciò una singolarità all'istante iniziale.
Per $K > 1$ la funzione G si annulla, se $sgn(C_1) \neq sgn(D)$, per $\eta = \eta_0$ e l'andamento è:

$$G \approx |\Delta t|^{\frac{1}{K}}.$$

la curvatura scalare è allora proprio (35) e le soluzioni iniziano da una singolarita. Se invece $sgn(C_1) = sgn(D)$ allora la funzione G non si annulla mai per $K > 1$ e le soluzioni non hanno singolarità iniziale.

Parte II

Appendici

Appendice I: Il parametro di decelerazione.

Ricordiamo la forma del tensore energia impulso per un campo scalare in relatività generale:

$$T_{\mu\nu} = \nabla_\mu\phi\nabla_\nu\phi - g_{\mu\nu}[\frac{1}{2}g^{\alpha\beta}\nabla_\alpha\phi\nabla_\beta\phi + V(\phi)].$$

Fintanto che lo spazio-tempo sia assunto omogeneo, $T_{\mu\nu}$ può essere scritto nella forma di fluido perfetto:

$$T_{\mu\nu} = (p+\rho)u_\mu u_\nu + pg_{\mu\nu},$$

dove

$$u_\mu = \frac{\partial_\mu\phi}{\sqrt{-\partial_\gamma\phi\partial^\gamma\phi}},$$

$$\rho = -\frac{1}{2}\partial_\gamma\phi\partial^\gamma\phi + V(\phi) \qquad , \qquad p = -\frac{1}{2}\partial_\gamma\phi\partial^\gamma\phi - V(\phi).$$

Si introducono i parametri d'espansione e decelerazione, definiti rispettivamente da:

$$\Theta = \nabla_\nu u_\mu g^{\mu\nu}$$

e

$$q = -3\Theta^2((\nabla_\alpha\Theta)u^\alpha + \frac{1}{3}\Theta^2).$$

Se il segno di q è positivo si ha un universo che decelera la propria espansione. Viceversa, se il segno di q è negativo, allora il modello ha una fase d'inflazione.

L'esistenza o meno di una fase inflazionaria in un dato modello di universo con campo scalare ϕ si può dunque ricondurre allo studio del segno del parametro q. L'andamento asintotico di q potrebbe predire anche se il modello isotropizza a tempi molto avanzati, ma nel nostro caso sarà sufficiente guardare l'andamento asintotico delle funzioni G(t), p(t) ed f(t).

Appendice II: I modelli LRS

Uno spazio-tempo descritto dalla metrica di Bianchi tipo I, che abbia uguale fattore di scala in due direzioni spaziali, *è* detto LRS (Locally Rotationally Symmetric).
Come detto in precedenza, per ottenere un modello LRS possiamo recuperare la soluzione particolare $K = 0, \quad M^2 = 0$ e porre $C_1 = \omega = 1$.
In effetti $M^2 = 0$ implica $a = m = 0$ ed essendo $\dot{p} = \frac{a}{G}$ allora $\dot{p} = 0$. In questo modo si pu*ò* scegliere p in modo che i fattori di scala a_1^2 e a_2^2 siano i medesimi.
Abbiamo ottenuto cos*ì* un modello isotropo in due delle dimensioni spaziali, o appunto LRS.
I fattori di scala hanno la forma (riprendendo la soluzione vista prima e facendo le opportune sostituzioni):

$$G = e^t + C, \qquad e^f = \frac{1}{2\Lambda\phi_0}e^t, \qquad \phi = \frac{1}{k}ln(\phi_0) - \frac{k}{2}ln(e^t + C).$$

La metrica ha la forma $ds^2 = e^f(-dt^2 + dz^2) + G(dx^2 + dy^2)$ o, equivalentemente:

$$ds^2 = -dT^2 + T^2dz^2 + (T^2 + C)(dx^2 + dy^2).$$

Questo modello LRS *è* anisotropo per piccoli tempi, mentre nel limite $t \to \infty$ tende all'isotropia, avvicinandosi asintoticamente al modello FRW.
Il parametro di decelerazione (il suo segno) *è* dato da:

$$sng(q) = -sgn[C(e^t - \frac{C}{3})].$$

Nella metrica, la costante C misura la deviazione dall'isotropia.
Dal segno di q si evince che, per quanto piccola possa essere questa deviazione, se il segno di C *è* negativo, il modello non presenter*à* mai inflazione.
Se invece $C > 0$ il modello decelera finch*é* $t < ln(\frac{C}{3})$, dopodich*é* inzia l'infazione.

Appendice III: Il limite FRW.

$\grave{E}$ interessante andare a studiare il limite in cui la metrica di Bianchi tipo I diviene una metrica Friedmann-Robertson-Walker, vale a dire quando i tre fattori di scala sono uguali fra loro.
Il modo più diretto per ottenere tale metrica è quello di scegliere:

$$\dot{p} = 0, \qquad e^f = G.$$

Le equazioni di Einstein (7), (8) e (9) si riducono a:

$$\frac{\ddot{G}}{G} = 2GV, \qquad e \qquad (\frac{\dot{G}}{G})^2 = \frac{2}{3}(\dot{\phi}^2 + 2GV).$$

Dall'equazione del campo rimane banalmente esclusa la parte in $\dot{p}$:

$$\ddot{\phi}G + \dot{G}\dot{\phi} + G^2\frac{\partial V}{\partial \phi} = \frac{d}{dt}(\dot{\phi}G) + kG^2V = \frac{d}{dt}(\dot{\phi}G) + \frac{k}{2}\ddot{G} = 0,$$

da cui segue banalmente:

$$\dot{\phi} = -\frac{k}{2}\frac{\dot{G}}{G} \Rightarrow \phi = \frac{1}{k}ln\phi_0 - \frac{k}{2}lnG.$$

Invece di seguire questa strada e studiare direttamente il modello FRW,otteniamo tale limite a partire da una giusta scelta delle costanti nella (18): poniamo $M = 0 \quad e \quad C = 0$.
Essendo $M^2 \equiv m^2 + \frac{a^2}{2}$, $M^2 = 0$ implica $a = 0$.
Per l'equazione (10) questo implica a sua volta:

$$\dot{p} = 0,$$

restringendo il campo ai soli modelli LRS.
Con l'ulteriore vincolo $C = 0$, ci si riduce ai modelli isotropi.

Per $K = 0$ (ovvero $k^2 = 2$) si ha $G\ddot{G} = \dot{G}^2$ che ha come soluzione:

$$G = Be^{At}.$$

Andando a trovare gli altri fattori di scala e l'espressione del campo ϕ si ottiene la seguente metrica:

$$ds^2 = \frac{A^2}{2\Lambda} e^{At}(-dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2) \qquad e \qquad \phi = -\frac{k}{2} At.$$

Questo modello si espande linearmente ed ha parametro di decelerazione nullo, essendo $u_\alpha = const.$

Se invece $K \neq 0$, si ottiene

$$G = t^\lambda \qquad con \qquad \lambda = \frac{4}{k^2 - 2}.$$

Per $\lambda = 1$, risulta dalla (8), essendo $\ddot{G} = 0$, $V \equiv 0$ e allora $\Lambda \equiv 0$.
La soluzione ha la forma:

$$\Lambda = 0 \qquad G = t \qquad p = p_0 \qquad \phi = -\frac{k}{2} ln(t) \qquad e^f = t,$$

che descrive una metrica FRW minimamente accoppiata al campo.

se $\lambda \neq 1$, la soluzione risulta:

$$G = t^\lambda, \qquad e^f = \frac{\lambda(\lambda - 1)}{2\Lambda} t^\lambda, \qquad \phi = -\frac{k\lambda}{2} ln(t),$$

e la metrica risulta:

$$ds^2 = -dT^2 + T^{\frac{4}{k^2}}(dx^2 + dy^2 + dz^2).$$

Il segno del parametro di decelerazione dipende da $k^2 - 2$.
Il modello presenta inflazione per $k^2 < 2$ e decelera se $k^2 > 2$.

Conclusioni

Abbiamo presentato una soluzione generale delle equazioni di campo di Einstein nel caso della metrica di tipo Bianchi I, accoppiata ad un campo scalare ϕ con potenziale esponenziale.
Questa scelta di potenziale ha disaccoppiato l'equazione di Klein-Gordon in una parte contenente il solo campo e una parte contenente le sole quantità geometriche.
Abbiamo utilizzato le trasformazioni (21) per linearizzare l'equazione di evoluzione temporale, e ne abbiamo studiato alcuni casi particolari.
Tra questi, alcuni presentano una sola singolarità, altri due.
In presenza di una sola singolarità abbiamo un modello che inizia la sua evoluzione da essa, in maniera isotropa o meno.
Nel caso di due singolarità, il modello inizia in una delle due per poi terminare nella seconda dopo un tempo finito.
Solo le soluzioni (26) (per $M^2 = 0$), (27) e (37) presentano modelli senza singolarità.
In questi casi le condizioni iniziali sono tali per cui $\dot{p} = 0$ e rientrano dunque nei modelli LRS.

Bibliografia

[1] *Aguirregabiria J.M., Feinstein A and Ibanez J. 1993, Phys. Rev. D* ***48*** *4662*

[2] *Chimento L.P. 1996, Form Invariance of differential equations in general relativity, submitted*

[3] *Aguirregabiria J.M., Chimento L.P. 1996 Class. Quantum Grav.* ***13*** *3197-3209*

[4] *Matarrese S., Lucchin F. , 1985 Phys. Rev. D* ***32*** *1316-1322*

[5] *Salam A., Segzin E 1984 Phys. Lett.* ***147B*** *47*

[6] *Fradkin E.S., Tseytlin A.A. 1985 Phys.Lett.* ***158B*** *316*

[7] *Campbell B.A., Linde A., Olive K.A. 1991 Nucl. Phys B* ***355*** *146*

[8] *Ozer M., Taha M.O. 1992 Phys. Rev. D* ***45*** *997*

[9] *Easther R. 1993 Class. Quantum Grav.* ***10*** *2203*

[10] *Carot J., Collinge M.M. 2001 Class. Quantum Grav.* ***18*** *5441-5454*

[11] *Liddle A. 2003 An introduction to modern cosmology*

[12] *Guth A.H. 1981 Phys. Rev. D* ***23****, 347*

[13] *Linde A.D. 1982 Phys. Lett. B* ***108****, 389*

[14] *Linde A.D. 1983 Phys. Lett. B* ***129****, 177*

[15] *Albrecht A., Steinhardt P.J. 1982 Phys. Rev. Lett.* ***48*** *1220*

Ringraziamenti

Desidero ringraziare
Riccardo e Giacomo, amici sinceri.
Aldo e Alessandro, compagni di viaggio