

Università degli Studi di Padova
Dipartimento di Fisica e Astronomia 'Galileo Galilei'
Corso di studi in Fisica



Laurea in Fisica

Tesi

STUDIO DI FATTIBILITÀ DI UN ESPERIMENTO PER LA
RILEVAZIONE DI ASSIONI GALATTICI

Relatore interno:

Prof. Jean-Pierre Zendri

Correlatore:

Dott. Antonello Ortolan

Laureando:

Daide Gobbi

24 Settembre 2014

Indice

1	Assioni	6
1.1	Proprietà degli assioni	6
1.2	Interazione tra assioni con la materia	7
2	Equazioni del moto della magnetizzazione	9
2.1	Momento magnetico	9
2.2	Linearizzazione dell'equazione del moto della magnetizzazione	10
2.3	Soluzione dell'equazione del moto linearizzata	10
2.4	Dissipazione in sistemi magnetizzati	11
3	Segnale e Rumore	13
3.1	Segnale atteso	13
3.2	Rumore termico e di amplificazione	14
3.3	Rapporto segnale-rumore	16
3.4	Limite quantistico della temperatura di rumore ed ottimizzazione	17
4	Metodi per la rivelazione di assioni dell'alone galattico	19
4.1	Esperimento ADMX	19
4.2	Una possibile alternativa all'esperimento ADMX	20
4.3	Proposta preliminare per il rilevatore QUAX: QUaere AXion	22

Introduzione

Negli ultimi anni si è molto dibattuto sulla presenza di materia oscura (*dark matter*) che dovrebbe costituire circa un quinto della massa del nostro universo. Questa problematica deriva dall'osservazione che, secondo la teoria della gravitazione Newtoniana, la velocità di un corpo immerso in un campo gravitazionale a simmetria sferica è pari a

$$v = \sqrt{\frac{GM}{r}} \quad (1)$$

dove r è la distanza del corpo dal centro di simmetria, G la costante gravitazionale e M la massa totale genetrice del campo gravitazionale, ad esempio una galassia. Se approssimiamo la galassia come una sfera di densità costante ρ otteniamo che la massa $M(r)$ contenuta in una sfera di raggio r è $M(r) = \rho \frac{4}{3}\pi r^3$ che, sostituita all'espressione della velocità, fornisce $v \propto r$, ossia una dipendenza lineare. Al di fuori della galassia, invece, la velocità dovrebbe diminuire come $v \propto \frac{1}{\sqrt{r}}$. Le osservazioni sperimentali indicano che questa seconda dipendenza non è verificata, come si può vedere in Fig1.

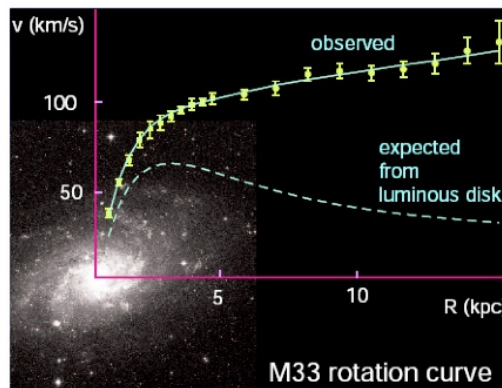


Figura 1: Curva di rotazione della galassia H33

Se ne deduce che: o si modifica la teoria Newtoniana della gravitazione (come previsto ad esempio nei modelli MOND [4]) oppure esiste altra materia che non emette radiazione elettromagnetica, probabilmente perchè interagisce debolmente con la materia ordinaria. La materia oscura fa sì che la densità ρ non sia nulla al di fuori di una

galassia e quindi l'andamento della velocità non sia come descritto dalla (1).

Molti studi sono stati fatti al riguardo, e negli ultimi anni si sta cercando di attribuire un'identità alle particelle che potrebbero costituire la materia oscura. Uno dei candidati possibili è l'*assione*. Questa particella è stata introdotta da Peccei e Quinn per risolvere il problema di CP nelle interazioni forti [1].

Gli assioni potrebbero essere stati prodotti in quantità elevata durante le prime fasi evolutive del nostro universo in modo da costituire la materia oscura negli aloni galattici. Secondo i modelli di formazione delle galassie tali assioni hanno velocità media nulla. Nella nostra galassia, il sistema solare, e quindi anche la terra, è in rotazione rispetto al centro, con una velocità $v_{\odot} \simeq 220 \text{ km/s}$, quindi il sistema solare è investito da un vento assionico.

L'argomento che tratteremo è l'osservazione in laboratorio di assioni nonostante la loro interazione molto debole con la materia. Attualmente l'esperimento più sensibile è ADMX, realizzato per misurare i fotoni che si formano per la conversione spontanea di assioni in un campo magnetico esterno (effetto Primakoff inverso) [8].

L'alternativa studiata in questa tesi è l'esperimento QUAX (QUaere AXions), rappresentato schematicamente in Fig2. Il principio di rilevazione è simile a quello di ADMX, con la differenza che non si utilizza una cavità risonante vuota, ma riempita da un materiale ferrimagnetico, ad esempio un cristallo ceramico noto come *Yttrium Iron Garnet* (YIG). Il ferrimagnete ha proprietà particolari che comportano un rumore di rilassamento magnetico bassissimo e quindi, una volta magnetizzato in regime di saturazione tramite un campo magnetico esterno uniforme e raffreddato a bassissime temperature, costituisce un ottimo sistema di spin allineati. L'interazione del campo assionico con particelle dotate di spin è equivalente all'applicazione di un campo magnetico oscillante al sistema di spin, e quindi provoca l'emissione di radiazione elettromagnetica ad una data frequenza. Essendoci una relazione diretta tra la questa frequenza e la massa dell'assione, è possibile ottenerne una stima. La massa più probabile dell'assione è attorno alle decine di $\mu \text{ eV}$.

Per un campione di volume pari a 10^{-4} m^3 di YIG e prendendo come massa assionica il valore $m_a = 10^{-4} \text{ eV}$ si ricava che a questa piccolissima massa corrisponde una potenza emessa in radiazione elettromagnetica del fotone attorno a 10^{-20} Watt che è al limite dell'attuale sensibilità strumentale.

Il segnale va confrontato con il rumore termico di magnetizzazione, che può essere diminuito raffreddando criogenicamente la cavità.

Nel primo capitolo vengono descritte le proprietà fisiche degli assioni tra cui la loro interazione con sistemi di spin e la loro equivalenza ad un campo magnetico oscillante. Nel secondo capitolo viene affrontata l'interazione di un campo magnetico con la materia. Nel terzo viene trattato il rapporto segnale-rumore e nel quarto si descrive in modo

più specifico l'esperimento ADMX e il progetto QUAX.

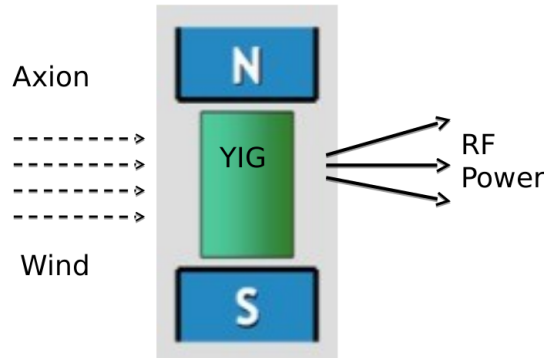


Figura 2: Schema del principio di funzionamento dell'esperimento QUAX

Capitolo 1

Assioni

1.1 Proprietà degli assioni

Assumendo che tutta la massa mancante della Galassia sia composta da assioni allora la densità assionica aspettata è $\rho_a \simeq 300 \text{ MeV}/\text{cm}^3$ che è molto alta essendo la massa nel range $10^{-6} \text{ eV} < m_a < 10^{-3} \text{ eV}$ [2]. Come si può vedere la massa aspettata è estremamente piccola confrontandola con la massa del neutrino per esempio ($m_\nu \sim \text{eV}$). Le velocità degli assioni della nostra galassia sono distribuite in accordo con la distribuzione Maxwelliana [2]

$$\rho(|\vec{p}|) = \frac{1}{(\sqrt{\pi}p_s)^3} e^{-|\vec{p}|^2/p_s^2}, \quad (1.1)$$

dove $p_z = m_a v_\odot$ essendo $v_\odot \simeq 220 \text{ km/s}$ la velocità del sistema solare rispetto al centro galattico.

La lunghezza d'onda di De Broglie per un assione di massa $m_a = 10^{-4} \text{ eV}$ è

$$\lambda_d \simeq \frac{h}{p_s} \approx 13.8 \text{ m}. \quad (1.2)$$

Come si può vedere λ_d è molto più grande della scala di lunghezza associata al moto ai sistemi di spin che si pensa di utilizzare come rilevatore. Questo fatto, assieme all'elevata densità assionica, fa sì che si possa trattare $a(x)$ come un campo classico (assionico) che interagisce coerentemente con la materia. Così facendo possiamo descriverlo come un campo di radiazione nella forma

$$a(x) = a_0 e^{-\frac{i}{\hbar}(p^0 ct - \vec{p}_s \cdot \vec{x})}, \quad (1.3)$$

nella quale $p^0 = \sqrt{m_a^2 c^4 + \vec{p}_s^2 c^2} \approx m_a c^2 + |\vec{p}_s|^2 / 2m_a$. Considerando il momento trasportato dal campo si ottiene

$$a_0 = \sqrt{\frac{\rho_a \hbar^3}{m_a c}}, \quad (1.4)$$

ossia si arriva alla espressione normalizzata del campo assionico

$$a(x) = \sqrt{\frac{\rho_a \hbar^3}{m_a c}} e^{-\frac{i}{\hbar}(p^0 ct - \vec{p}_s \cdot \vec{x})}. \quad (1.5)$$

1.2 Interazione tra assioni con la materia

Si dimostra che il campo assionico produce un campo magnetico effettivo proporzionale a [2]:

$$H_a \propto \vec{\nabla}(Re a(x)) = \sqrt{\frac{\rho_a \hbar^3}{m_a c}} \frac{\vec{p}_s}{\hbar} \sin\left(\frac{p^0 ct - \vec{p}_s \cdot \vec{x}}{\hbar}\right), \quad (1.6)$$

dove si è presa la parte reale del campo quantistico. Se ne deduce che questo campo è oscillante alla frequenza $\omega_a = \frac{p^0 c}{\hbar}$.

Per ottenere il valore si aspettazione di H_a si deve conoscere la costante di proporzionalità ottenibile dall'interazione tra un flusso di assioni con un elettrone.

L'energia di quest'interazione è pari a [2]

$$E_a = \frac{\hbar}{2} \frac{g_p}{2m_e} \frac{p_s}{\hbar} a_0 = 8 \cdot 10^{-46} \left(\frac{m_a}{10^{-4} eV}\right) eV, \quad (1.7)$$

dove $g_p \approx \frac{m_e m_a}{m_\pi f_\pi} = 4.07 \cdot 10^{-11}$ e m_a la massa dell'assione, con l'energia dello stesso elettrone nel campo magnetico effettivo B_a

$$E_a = g_L \frac{\mu_B}{\hbar} \frac{1}{4} B_a, \quad (1.8)$$

in cui μ_B è il magnetone di Bohr e g_L è il fattore di Landè per l'elettrone. Essendo $\gamma = g_L \frac{e}{2m_e}$ il fattore giromagnetico dell'elettrone, uguagliando la (1.7) con la (1.8) si ottiene

$$H_a = \frac{1}{\gamma} \frac{g_p}{m_e} \sqrt{\frac{\rho_a \hbar^3}{m_a c}} \frac{p_s}{\hbar} = 9.2 \cdot 10^{-23} \left(\frac{m_a}{10^{-4} eV}\right) T. \quad (1.9)$$

Dunque il **vento assionico è equivalente a un campo magnetico oscillante** con ampiezza data dalla (1.9) e frequenza determinata dalla massa dell'assione:

$$\frac{\omega_a}{2\pi} = \frac{p^0 c}{\hbar 2\pi} \approx \frac{m_a c^2}{h} = 2.4 \cdot 10^{10} \left(\frac{m_a}{10^{-4} eV} Hz.\right) \quad (1.10)$$

Alcune recenti misure di cosmologia ci dicono che il valore della massa dell'assione probabile va da $10^{-5}eV$ fino a $10^{-3}eV$ a cui corrisponde una frequenza tipica delle microonde che varia da $2.4 GHz$ a $240 GHz$ [2].

Capitolo 2

Equazioni del moto della magnetizzazione

Questo capitolo è finalizzato alla descrizione degli effetti di un campo magnetico rapidamente oscillante sulla materia (magnetizzazione) [3], in particolare il comportamento ferrimagnetico, indispensabile per la realizzazione del rilevatore QUAX.

2.1 Momento magnetico

Si supponga di avere una particella con momento magnetico \vec{M} , ad esempio un elettrone, immerso in un campo magnetico uniforme \vec{H} . Questo fatto dà origine ad un momento torcente $\vec{\tau}$ che agisce sulla particella della forma

$$\vec{\tau} = \vec{M} \times \vec{H}. \quad (2.1)$$

Questo momento torcente modifica il momento angolare \vec{J} della particella secondo la relazione

$$\hbar \frac{\partial \vec{J}}{\partial t} = \vec{M} \times \vec{H}, \quad (2.2)$$

dove è stato espresso il momento angolare in unità di \hbar .

Considerando la relazione che lega il momento magnetico al momento angolare,

$$\vec{M} = -\gamma \hbar \vec{J} = -\frac{g|e_0|\hbar}{2m_e c} \vec{J}, \quad (2.3)$$

dove γ è il rapporto giromagnetico, g il fattore di Landè, e_0 la carica dell'elettrone e m_e la sua massa, e riarrangiandola opportunamente si giunge all'**equazione del moto della magnetizzazione**:

$$\frac{\partial \vec{M}}{\partial t} = -\gamma \vec{M} \times \vec{H}. \quad (2.4)$$

2.2 Linearizzazione dell'equazione del moto della magnetizzazione

Si consideri ora un insieme di particelle (sistema) dotate di momento magnetico. Quello che accade è che se la magnetizzazione del sistema si esprime come la somma dei momenti magnetici per unità di volume

$$\vec{M} = \frac{\Sigma_{\Delta V} \vec{M}}{\Delta V}. \quad (2.5)$$

Sperimentalmente si trova che la (2.4) è ancora valida, con una piccola modifica al valore del fattore γ che ora differisce dal fattore giromagnetico della singola particella. Il caso di nostro interesse prevede un campo statico H_z sovrapposto a uno rapidamente oscillante h_z :

$$\vec{H} = \vec{H}_0 + \vec{h}_\sim \quad \vec{M} = \vec{M}_0 + \vec{m}_\sim, \quad (2.6)$$

assumendo $h_\sim \ll H$ e $m_\sim \ll M$. La soluzione statica dell'equazione (2.4) all'ordine zero fornisce la *direzione di equilibrio* della magnetizzazione:

$$\vec{H}_0 \times \vec{M}_0 = 0. \quad (2.7)$$

Al primo ordine fermandosi ai termini lineari in h_\sim e m_\sim si ottiene la relazione

$$\frac{\partial \vec{m}_\sim}{\partial t} + \gamma \vec{m}_\sim \times \vec{H}_0 = -\gamma \vec{M}_0 \times \vec{h}_\sim, \quad (2.8)$$

che prende il nome di *linearizzazione* dell'equazione del moto della magnetizzazione.

2.3 Soluzione dell'equazione del moto linearizzata

Introducendo le variabili complesse

$$\vec{m} = \vec{m} e^{i\omega t} \quad \vec{h} = \vec{h} e^{i\omega t} \quad (2.9)$$

le cui parti reali sono m_\sim e h_\sim . Ora si può sostituirlle nell'equazione (2.8) e quindi derivare, ottenendo

$$i\omega \vec{m} + \gamma \vec{m} \times \vec{H}_0 = -\gamma \vec{M}_0 \times \vec{h}. \quad (2.10)$$

Proiettando quest'equazione negli assi cartesiani di un sistema di coordinate, il cui asse z coincide con la direzione di H_0 e M_0 si ottiene

$$\begin{cases} i\omega m_x + \gamma H_0 m_y = \gamma M_0 h_y, \\ i\omega m_y - \gamma H_0 m_x = -\gamma M_0 h_x, \\ i\omega m_z = 0, \end{cases} \quad (2.11)$$

che obbedisce alla forma di un oscillatore armonico in m_x o m_y con soluzione del sistema:

$$\begin{cases} m_x = \chi h_x + i\chi_a h_y, \\ m_y = -i\chi_a h_x + \chi h_y, \\ m_z = 0, \end{cases} \quad (2.12)$$

dove

$$\chi = \frac{\gamma M_0 \omega_H}{\omega_H^2 - \omega^2} \quad \chi_a = \frac{\gamma M_0 \omega}{\omega_H^2 - \omega^2} \quad (2.13)$$

in cui si è posto $\omega_H = \gamma H_0$ (frequenza di Larmor).

Si nota che la magnetizzazione indotta da un campo h_{\sim} ha un andamento risonante ed un massimo per $\omega_{ris} = \omega_H$.

2.4 Dissipazione in sistemi magnetizzati

La condizione di massimo $\omega_{ris} = \omega_H$ equivale a dire che la magnetizzazione indotta dal campo assionico alla frequenza di risonanza sia infinita, in altre parole, diverge. Questo nella realtà non accade perchè la (2.12) non comprende l'esistenza della dissipazione magnetica: l'oscillazione della magnetizzazione dovuta all'oscillazione dei momenti magnetici si traduce in una dissipazione della loro energia che si trasforma principalmente in energia termica. L'equazione del moto di magnetizzazione con il termine di dissipazione può essere allora riscritta nella forma, di Landau:

$$\frac{\partial \vec{M}}{\partial t} = -\gamma \vec{M} \times \vec{H} - \frac{\gamma \lambda}{M^2} \vec{M} \times (\vec{M} \times \vec{H}), \quad (2.14)$$

dove λ è il termine di dissipazione e ha la dimensione di un campo magnetico.

Per risolvere la (2.14) si prende il caso particolare:

$$\begin{cases} h_y = h_z = 0 & h_x \neq 0, \\ M_{0x} = M_{0y} = 0 & M_{0z} \neq 0. \end{cases} \quad (2.15)$$

Risolvendola e calcolando le componenti x e y arriva al seguente sistema di equazioni

per $\vec{m}(t)$:

$$\begin{cases} \dot{m}_x = \gamma\lambda h_x - \gamma m_y H_0 - \frac{H_0}{M_0} \gamma\lambda m_x, \\ \dot{m}_y = \gamma H_0 m_x - \gamma M_0 h_x - \frac{H_0}{M_0} \gamma\lambda m_y. \end{cases} \quad (2.16)$$

Derivando ora la seconda equazione e poi sostituendola alla prima, trascurando i termini al secondo ordine, e facendo analogamente per m_x , si ottiene:

$$\begin{cases} \ddot{m}_y + \frac{\gamma\lambda H_0}{M_0} \dot{m}_y + \gamma^2 H_0^2 m_y \simeq \gamma M_0 \dot{h}_x, \\ \ddot{m}_x + \frac{\gamma\lambda H_0}{M_0} \dot{m}_x + \gamma^2 H_0^2 m_x \simeq \gamma^2 M_0 H_0 h_x = \gamma M_0 \omega_H h_x. \end{cases} \quad (2.17)$$

Come si può notare sono equazioni di 2 oscillatori armonici disaccoppiati e possono essere riscritte nel seguente modo:

$$\begin{cases} \ddot{m}_y + \delta \dot{m}_y + \omega_H^2 m_y = \gamma M_0 \dot{h}_x, \\ \ddot{m}_x + \delta \dot{m}_x + \omega_H^2 m_x = \gamma \omega_H M_0 h_x, \end{cases} \quad (2.18)$$

dove $\omega_H^2 = \gamma^2 H_0^2$ e $\delta = \gamma\lambda H_0/M_0$.

Si consideri la componente m_x .

Si può perciò riottenere la (2.13) nel caso di dissipazione, avendo:

$$m_x(\omega) = \frac{\omega_H \gamma M_0}{\omega_H^2 - \omega^2 + i\omega\delta} h_x. \quad (2.19)$$

La (2.19) rappresenta una curva di risonanza il cui modulo vale

$$|m_x|^2 = \frac{\gamma^2 M_0^2 h_x^2 \omega_H^2}{(\omega_H^2 - \omega^2)^2 + \delta^2 \omega^2}. \quad (2.20)$$

Il suo massimo è per $\omega = \omega_H$, che rappresenta la condizione di risonanza, e vale

$$|m_x| = \frac{\gamma M_0 h_x}{\delta}. \quad (2.21)$$

La larghezza $\Delta\omega$ a mezza altezza vale $\Delta\omega = \omega_H/\delta$ e quindi il fattore di merito è $Q = \omega_H/\delta$. Il tempo di decadimento τ è $\tau = 2/\delta$.

Capitolo 3

Segnale e Rumore

In questo capitolo si cerca di focalizzare il calcolo del segnale utile e le sorgenti di rumore di un possibile esperimento per la rilevazione di assioni.

3.1 Segnale atteso

Riprendendo quanto detto nei capitoli precedenti, si considera il campo assionico equivalente ad un campo magnetico efficace lungo ad esempio l'asse x pari a $h_x = h_a \cos(\omega_a t)$. Sapendo che genera una magnetizzazione lungo x e y ossia genera m_x e m_y , si suppone di misurare m_x , ossia di avere una stima, dalla (2.21), di

$$m_x = \frac{\gamma M_0}{\delta} h_a \cos(\omega_H t), \quad (3.1)$$

dove si è supposto di essere nella condizione di risonanza, ossia $\omega_a = \omega_H$.

Al fine di stimare h_a si moltiplica il segnale indotto da m_x per $\cos(\omega_H t)$, generando il segnale X della forma

$$X = \frac{\gamma M_0}{\delta} h_a \cos^2(\omega_H t) = \frac{\gamma M_0}{\delta} h_a \frac{\cos(2\omega_H t) + 1}{2}. \quad (3.2)$$

A questo punto, introducendo un filtro passa-basso con frequenza di taglio $\tau \ll 1/\omega_H$ così da escludere la componente oscillante, è possibile isolare il segnale continuo, ottenendo:

$$X_c = \frac{\gamma M_0}{2\delta} h_a, \quad (3.3)$$

che costituisce il nostro segnale.

In un sistema magnetico oltre al segnale deterministico si ha anche un segnale stocastico di magnetizzazione m_n con spettro di potenza $S_{m_n m_n}$ e si dimostra che dopo il filtro

passa-basso valga [10]

$$S_{X_c X_c} = \frac{1}{4} \frac{1}{1 + (\omega\tau)^2} [S_{m_n m_n}(\omega - \omega_H) + S_{m_n m_n}(\omega + \omega_H)], \quad (3.4)$$

che servirà poi per il calcolo del rapporto segnale-rumore.

3.2 Rumore termico e di amplificazione

Il valore della magnetizzazione m_x fluttua a causa del rumore termico. Tali fluttuazioni sono descritte qualitativamente dal seguente spettro di potenza [9]:

$$S_{m_n m_n}(\omega) = \hbar \coth\left(\frac{\hbar\omega}{2k_B T}\right) \text{Im}\chi(\omega), \quad (3.5)$$

dove k_B è la costante di Boltzmann, T la temperatura del sistema e χ è definito dalla (2.19) come:

$$\chi(\omega) = \frac{\omega_H \gamma M_0}{\omega_H^2 - \omega^2 + i\omega\delta}. \quad (3.6)$$

Allora lo spettro di potenza della magnetizzazione assume la forma

$$S_{m_n m_n}(\omega) = \hbar \coth\left(\frac{\hbar\omega}{3k_B T}\right) \frac{\gamma\delta M_0 \omega \omega_H}{(\omega_H^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \delta^2}. \quad (3.7)$$

Sul sistema allora è come se, oltre ad agire il campo h_x , agisse un campo magnetico di rumore termico h_{x-th} , per cui

$$m_{x-th}(\omega) = \chi(\omega) h_{x-th}(\omega) \quad (3.8)$$

$$S_{m_{x-th} m_{x-th}}(\omega) = |\chi(\omega)|^2 S_{h_{x-th} h_{x-th}}(\omega), \quad (3.9)$$

quindi

$$S_{m_{x-th} m_{h-th}} = \hbar \coth\left(\frac{\hbar\omega}{4k_B T}\right) \frac{\omega\delta}{\omega_H \gamma M_0}. \quad (3.10)$$

Per misurare la magnetizzazione esistono diverse possibilità. Consideriamo il fatto che una magnetizzazione m_x oscillante produce un campo magnetico H_m oscillante. Ponendo un spira ortogonale alla direzione del campo magnetico H_m si produce, per la legge di Lenz, una forza elettromotrice (FEM) proporzionale alla derivata rispetto

al tempo del flusso ϕ del campo magnetico, ossia

$$V_{F.E.M.} \propto \dot{\phi} = A \cdot \alpha \cdot \dot{m}, \quad (3.11)$$

dove A è l'area della spira e α è la costante di proporzionalità che esiste tra H e m ($H = \alpha m$).

Lo schema della misurazione è rappresentato dalla Fig3.1. Questo segnale in voltaggio

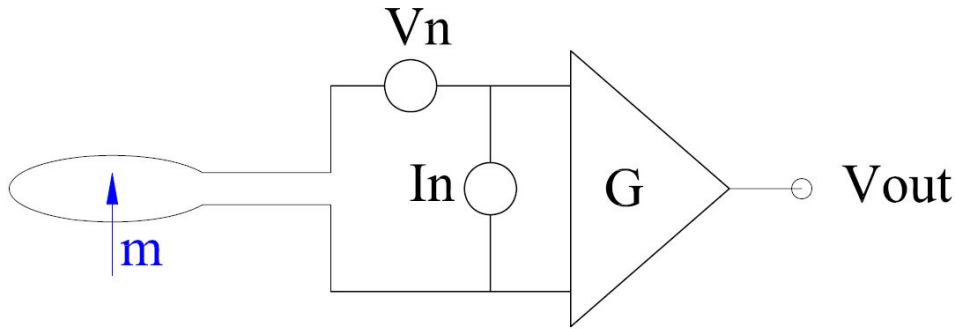


Figura 3.1: Schema della misurazione

quindi viene misurato attraverso un amplificatore. L'amplificatore reale presenta del rumore in tensione V_n e in corrente I_n . Quest'ultimo percorrendo la spira genera a sua volta un piccolo campo magnetico di rumore h_n che si somma al campo magnetico di segnale h_{\sim} .

Il rumore in tensione V_n si somma col segnale all'uscita dell'amplificatore. Può essere descritto, assumendo il rumore in tensione nullo, come un segnale che si aggiunge alla magnetizzazione misurata e vale

$$m_n = \frac{V_n}{A\alpha i\omega}. \quad (3.12)$$

Nel campo delle frequenze, la magnetizzazione totale sarà allora

$$m(\omega) = \chi(\omega)[h_{\sim}(\omega) + h_{th}(\omega) + h_n(\omega)] + m_n(\omega), \quad (3.13)$$

dove $h_{th}(\omega)$ è il contributo del segnale di uscita relativo al rumore termico e analogamente $h_n(\omega)$ relativo all'azione di I_n . Si consideri ora solo il rumore. Lo spettro di $m(\omega)$ è dato da

$$S_{m_x m_x} = (S_{th} + S_{h_n})|\chi(\omega)|^2 + S_{m_n m_n}. \quad (3.14)$$

Da esso è possibile estrarre

$$\sigma_m^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} \frac{1}{1 + \omega^2 \tau^2} [|\chi(\omega)|^2 (S_{th} + S_{h_n}) + S_{m_n m_n}] d\omega, \quad (3.15)$$

dove τ è il tempo di integrazione. Nel caso in cui $\tau \gg \frac{Q}{\omega_H}$ la (3.15) diventa

$$\sigma_m^2 \simeq \frac{1}{2\tau} [S_{m_n m_n} + |\chi(\hat{\omega}_H)|^2 S_{th} + |\chi(\hat{\omega}_H)|^2 S_{h_n}]. \quad (3.16)$$

Si usa definire *suscettività di rumore* χ_n come

$$\chi_n = \sqrt{\frac{S_{m_n m_n}}{S_{h_n h_n}}} \quad (3.17)$$

e *temperatura di rumore* T_n

$$T_n = \sqrt{S_{m_n m_n} \cdot S_{h_n h_n}} \cdot \frac{\omega}{k_B} \quad (3.18)$$

In modo da ottenere la (3.16) nella forma

$$\sigma_m^2 \simeq \frac{1}{2\tau} \left[\frac{k_B T_n \chi_n}{\omega} + |\chi(\omega_H)|^2 S_{th} + \frac{|\chi(\omega_H)|^2 k_B T_n}{\omega \chi_n} \right]. \quad (3.19)$$

Minimizzando quest'espressione rispetto a χ_n si ottiene

$$\chi_{n-opt} = |\chi(\omega_H)|, \quad (3.20)$$

dove per χ_{n-opt} si intende il χ ottimale, da cui

$$\sigma_{m-min}^2 \simeq \frac{1}{2\tau} \left[\frac{2k_B T_n \chi(\omega_H)}{\omega} + S_{th} |\chi(\omega_H)|^2 \right], \quad (3.21)$$

che rappresenta la minima varianza relativa alle fluttuazioni della magnetizzazione.

3.3 Rapporto segnale-rumore

Ora è possibile stimare il massimo rapporto segnale-rumore utilizzando la (3.3) e la (3.21), ottenendo

$$SNR = \frac{\gamma M_0 V h_x}{\delta \sqrt{\frac{1}{2\tau} \left[\frac{2k_B T_n \chi(\omega_H)}{\omega} + S_{th} |\chi(\omega_H)|^2 \right]}}, \quad (3.22)$$

dove è stato aggiunto il volume poichè la magnetizzazione M_0 è definita per unità di volume, quindi per avere la totale bisogna moltiplicare per il volume del corpo magnetizzato. Quadrando e maneggiando l'equazione risulta

$$SNR^2 = \frac{\gamma M_0 V h_x^2}{\delta} \frac{\omega}{2k_B T_n + \hbar \omega \coth\left(\frac{\hbar \omega}{2k_B T}\right)}. \quad (3.23)$$

Fin ora, compresa la (3.23), è stato utilizzato il sistema c.g.s.. Per passando la (3.23) in MKS [5] si ottiene

$$SNR^2 = \frac{\gamma M_0 V h_x^2 \tau}{2\mu_0} \frac{\omega}{2k_B T_n + \hbar \omega \coth\left(\frac{\hbar \omega}{2k_B T}\right)}. \quad (3.24)$$

3.4 Limite quantistico della temperatura di rumore ed ottimizzazione

Dalla meccanica quantistica si trova che esiste un limite inferiore alla temperatura di rumore di un amplificatore lineare. In particolare, si giunge ad avere una condizione sugli spettri di potenza della forma [10]:

$$(S_{mm} S_{nn})^{\frac{1}{2}} = \frac{k_B T_n}{\omega} \geq \frac{\hbar}{2}, \quad (3.25)$$

ovvero

$$T_n \geq \frac{\hbar \omega}{2k_B}. \quad (3.26)$$

Questo si traduce in un limite nella sensibilità di una misura. La meccanica quantistica però non dà alcuna limitazione al rapporto tra S_{mm} e S_{nn} , ovvero non limita χ_n . Come già detto, esiste un χ_n ottimale al quale si deve tendere per avere l'SNR migliore possibile. Per avere $\chi_n \rightarrow \chi_{n_{opt}}$ si consideri lo schema rappresentao in Fig.3.1. Si supponga di avere un momento magnetico m a distanza d dalla spira di area A , si ha che [3]

$$V_{segnale}(\omega) = A \frac{2m}{d^3} \omega \quad \rightarrow \quad m_n(\omega) = V_n \frac{d^3}{A} \frac{1}{\omega}. \quad (3.27)$$

Dunque la costante di trasduzione è $2A/d^3$.

La corrente I_n attraversando la spira genera il momento magnetico $M_{I_n} = A I_n$ che a sua volta genera sul campione il campo eccitante di rumore H_n [3]

$$H_n = \frac{2M}{d^3} = \frac{2A I_n}{d^3}. \quad (3.28)$$

Questo risultato implica che

$$\chi_n(\omega) = \sqrt{\frac{S_{hh}}{S_{mm}}} = \left(\frac{2A}{d^3}\right)^2 \cdot \omega \cdot \sqrt{\frac{S_{I_n I_n}}{S_{V_n V_n}}}, \quad (3.29)$$

da cui si può notare che $\chi_n(\omega)$ è proporzionale alla costante di trasduzione al quadrato moltiplicata per la radice del rapporto degli spettri di potenza dell'amplificatore. Generalmente questi amplificatori sono caratterizzati da un basso valore di questo rapporto, quindi per poter ottimizzare la χ_n si può solamente cercare di ottimizzare la costante di trasduzione massimizzandola.

A tal fine si veda il prossimo capitolo, in cui verrà trattato una proposta di esperimento che utilizza un materiale ferrimagnetico posto in una cavità a microonde risonante proprio per avere un guadagno risonante.

Capitolo 4

Metodi per la rivelazione di assioni dell'alone galattico

Alcuni esperimenti mirati all'osservazione dell'assione si basano sul fenomeno Primakoff inverso per il quale l'assione, sotto alcune condizioni, può convertirsi spontaneamente in un fotone avente frequenza nel range delle microonde. Questo meccanismo viene utilizzato per la rilevazione di assioni nell'esperimento americano ADMX (Axion Dark Matter eXperiment) [8]. Lo scopo è quello di osservare questo fenomeno e quindi ottenere una verifica dell'eventuale esistenza e una stima della sua massa. A tal fine si costruiscono cavità risonanti immerse in un campo magnetico uniforme esterno. Come amplificatore a bassa temperatura di rumore si utilizzano amplificatori a SQUID (*Superconducting QUantum Interference Device*) che hanno dimostrato di avvicinarsi meglio degli altri al limite quantistico [6]. Come rappresentato in Fig.4.1, a temperature criogeniche lo SQUID raggiunge un valore di temperatura di rumore molto vicina al limite quantistico. Lo SQUID genericamente è stato progettato per lavorare nelle frequenze attorno ai $600MHz$, ma ultimamente sono stati adattati per frequenze dell'ordine dei $6GHz$.

4.1 Esperimento ADMX

L'apparato sperimentale consta di una cavità a microonde immersa in un forte campo magnetico statico e uniforme. In essa è presente un detector di campi magnetici (antenna) per captare il campo magnetico generato dall'assione. Per scandagliare le possibili masse dell'assione si utilizzano 2 barre di materiale dielettrico che vengono inserite nella cavità. Queste barre modulano la frequenza a cui la cavità è risonante avvicinandole o allontanandole dal centro della cavità. In questo modo si riesce ad avere un range di frequenze compreso tra 300 e $900MHz$. La cavità è raffreddata criogeni-

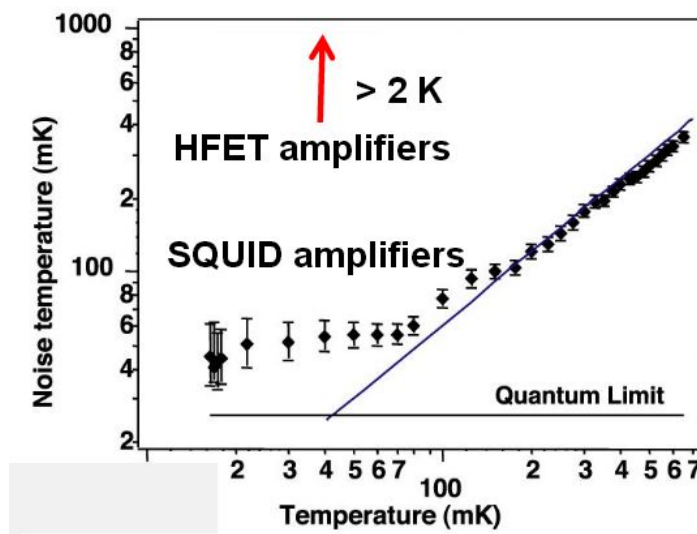


Figura 4.1: Temperatura di rumore Vs. limite quantistico per uno squized operante a frequenze dell'ordine dei GHz [6]

camente alla temperatura di $1.8K$.

Il segnale captato dal detector attraversa una catena elettronica per essere amplificato ed elaborato, in modo da avere solo la parte di segnale a bassa frequenza. Lo schema dell'ADMX è proposto dalla Fig.4.2. Nella Fig.4.1 sono rappresentati gli obiettivi presenti e futuri dell'esperimento ADMX, dove $|g_{a\gamma\gamma}|$ rappresenta la costante di accoppiamento tra il fotone-fotone e l'assione. Si nota nella figura che l'esperimento ADMX ha già predetto una zona di esclusione e che nei prossimi anni dovrebbe scandagliare masse degli assioni fino a decine di μeV .

Masse più grandi, dai $100\mu eV$, saranno l'obiettivo di un'altro esperimento, trattato nel prossimo paragrafo.

4.2 Una possibile alternativa all'esperimento ADMX

Recentemente è stato proposto da alcuni gruppi INFN, coordinati dal prof. Gianni Carugno, un'alternativa all'esperimento ADMX.

A differenza della proposta dell'esperimento ADMX, si possono utilizzare, anziché cavità risonanti vuote, cavità riempite con materiale ferrimagnetico. È il caso dell'esperimento QUAX (QUaere AXion). Il QUAX non si basa sull'osservazione del fenomeno di Primakoff inverso, ma sulla rilevazione della magnetizzazione indotta dagli assioni. Il materiale ferrimagnetico individuato per l'esperimento QUAX si chiama *yttrium iron*

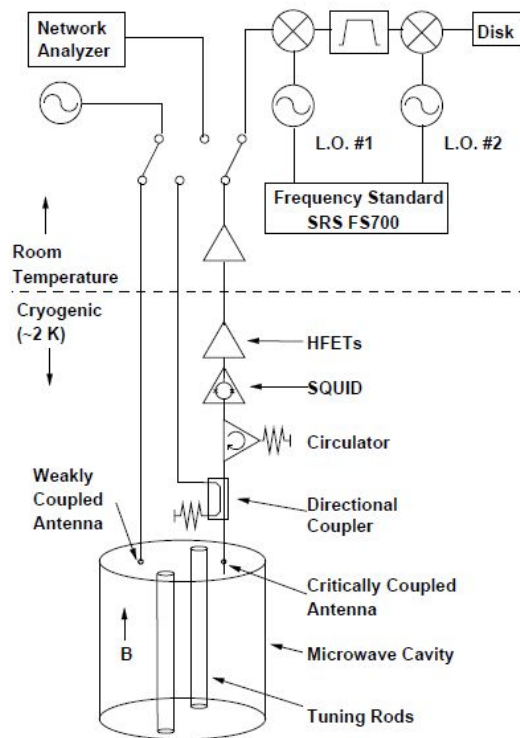


Figura 4.2: Schema esperimento ADMX

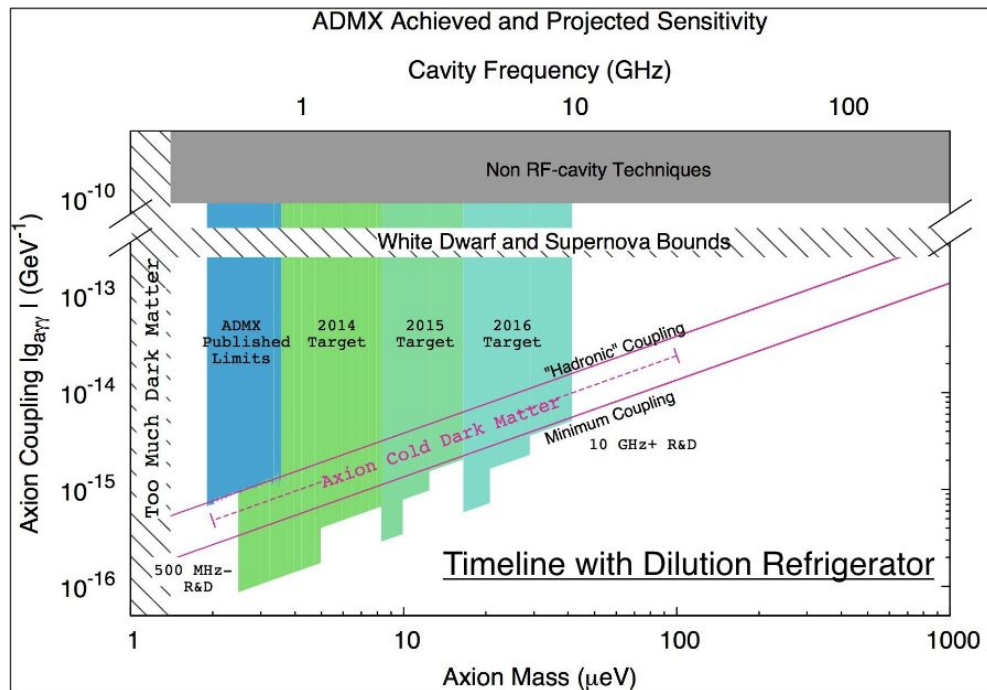


Figura 4.3: Schema temporale di implementazione dell'esperimento ADMX

garnet (YIG) $Y_3Fe_5O_{12}$. Un vantaggio sta nel range di frequenze di risonanza, perchè permette di arrivare a frequenze più alte (decine di GHz), quindi masse più basse (e più probabili) rispetto all' esperimento ADMX. Come è stato già detto la massa dell'assione determina la frequenza del campo magnetico oscillante da esso generato. Si costruisce una cavità nel modo sopra citato, si crea all'interno della stessa un campo magnetico uniforme e costante in modo da ottenere l'allineamento dei momenti magnetici di spin degli elettroni dello YIG nella direzione del campo creando un sistema di spin allineati. È stato scelto lo YIG perchè essendo un ferrimagnete ha minor rumore di magnetizzazione rispetto un ferromagnete. La differenza tra la configurazione dei momenti magnetici è responsabile della diversità di rumore di magnetizzazione perchè nella realtà è possibile considerare la magnetizzazione del ferromagnete uniforme solo in domini. Solitamente il moto delle regioni che delimitano i domini provoca un eccesso di rumore magnetico.

La forma dello YIG che si pensa di utilizzare è la sfera, essendo il solido per il quale è possibile avere un campo di magnetizzazione \vec{M} eccezionalmente uniforme.

4.3 Proposta preliminare per il rilevatore QUAX: QUaere AXion

Come visto nel capitolo 3, il vento assionico e quindi il campo magnetico assionico oscillante interagisce con il sistema di spin, inducendo una magnetizzazione del materiale. L'esperimento QUAX mira alla sua rilevazione posizionando il magnete in una cavità a microonde risonante con la frequenza del campo assionico. Questo dovrebbe dare una risposta risonante della cavità con un effettivo guadagno del segnale. Lo schema dell'apparato sta in Fig.4.4.

I parametri previsti sono:

- Tempo di diseccitazione τ è $\approx 0,14\mu s$. Tempi maggiori sono ottenibili a temperature più basse, fino a $1\mu s$. [7]
- Campo di magnetizzazione saturo vale $1750 Gauss$

Le sferette di YIG sono all'interno della cavità raffreddata criogenicamente ($T = 0,8 K$) e immersa nel campo magnetico uniforme $B_0 = 0,607 T$. Il campo magnetico assionico effettivo H_a interagisce con il sistema di spin espellendo un fotone alla frequenza di Larmor $\omega = \gamma_e B_0$ dove γ_e è il fattore giromagnetico dell'elettrone. Lo YIG a tali temperature presenta una magnetizzazione saturata pari a $M_s = 0,246 T$.

4.3. PROPOSTA PRELIMINARE PER IL RILEVATORE QUAX: QUAERE AXION23

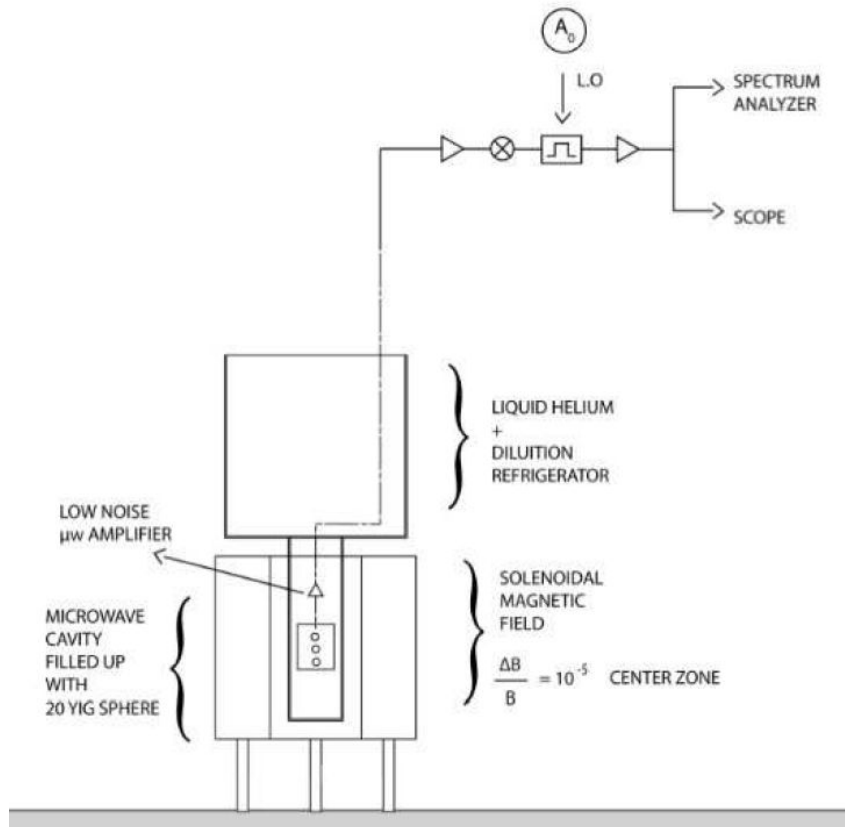


Figura 4.4: Schema a blocchi del rilevatore QUAX

La frequenza da cui si partirà è

$$\nu_S = \omega_0/2\pi = 17GHz \quad (4.1)$$

a cui corrispondono

$$m_a = 7,1 \cdot 10^{-5} eV \quad (4.2)$$

che rispecchia la massa assionica più probabile. Lo scopo è di creare un apparato che possa avere una sensibilità tale da raccogliere dati di massa assionica nell'intorno di questa $m_a(\nu_S)$ con basse incertezze [2].

Visto che a $17GHz$ la temperatura di rumore è dell'ordine di $0,8K$ parrebbe inutile operare con l'esperimento al di sotto di questa temperatura. In realtà bisogna considerare la temperatura di rumore degli amplificatori che scala linearmente col diminuire di T (si veda Fig4.1). Tipicamente si avvicinano al limite quantistico al di sotto dei $100mK$. Inoltre il τ degli oscillatori cresce col diminuire della temperatura. Per questi motivi l'apparato sarà ultracriogenico.

In Fig4.5 è rappresentato il grafico equivalente al Fig.4.1 per l'esperimento QUAX.

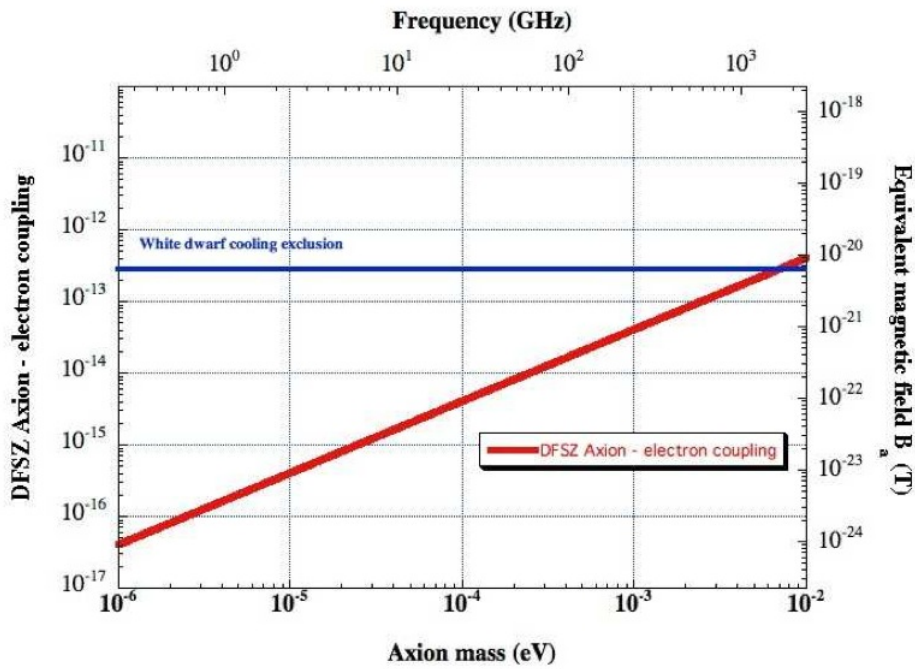


Figura 4.5: Progetto ADMX

Con questi valori è possibile stimare il tempo di misura $1/\Delta\nu$ per avere SNR pari a 1. Dalla (3.22) risulta che, assumendo di avere a disposizione amplificatori al limite quantistico,

$$\frac{1}{\Delta\nu_{th}} \approx 30000s, \quad (4.3)$$

che corrisponde a circa 8 ore. Ora, imponendo che gli amplificatori hanno temperatura più realistica di rumore pari a 5 volte il limite quantistico, risulta

$$\frac{1}{\Delta\nu} \approx 70000s, \quad (4.4)$$

che corrisponde a poco meno di un giorno.

Conclusioni

L'analisi del rapporto segnale-rumore dell'esperimento QUAX presentato in questa tesi si limita alle sorgenti di rumore ineliminabili (rumore termico e limite quantistico), mentre non sono stati affrontati i rumori tecnici, in linea di principio eliminabili, che potrebbero affliggere la sensibilità dell'appareto. In queste ipotesi la misura di un eventuale assione con massa dell'ordine dei $10^{-4}eV$ sembra fattibile, con tempi di integrazione ragionevoli. L'effettiva fattibilità dell'esperimento però richiederà uno studio dettagliato delle sorgenti di rumore reale, che potrà essere eseguita una volta definiti i dettagli sperimentali. In particolare il disegno della cavità risonante, del sensore del campo magnetico ed il valore esatto delle dissipazioni magnetiche del materiale. Questi studi sono attualmente in corso da parte del gruppo che lavora sull'esperimento QUAX.

Ringraziamenti

Si ringraziano i componenti del gruppo che lavora all'esperimento QUAX, in particolare: Gianni Carugno, Giuseppe Ruoso e Antonello Ortolan per aver fornito il materiale per scrivere questa tesi e la disponibilità per discuterne.

Bibliografia

- [1] R.D. Peccei, H.R. Quinn, (1977) Phys. Rev. Lett. **38** 1440
- [2] INFN (9 Luglio 2014), *A proposal for a search of galactic axions using magnetized materials*, Padova.
- [3] A.G Gurevich, Ph.D., D.Sci & G.A. Melkov, Ph.D., D.Sci (1996), *Magnetization Oscillations and Waves*, CRC Press, USA.
- [4] Milgrom, M. (1983). *A modification of the Newtonian dynamics as a possible alternative to the hidden mass hypothesis* Astrophysical Journal **270**
- [5] John D. Jackson (1984), *Elettrodinamica Classica*, Zanichelli S.p.A., Bologna.
- [6] S.J. Asztalos et al (2011), *Nucl instr. and methods A*, vol.656, 39.
- [7] E.G. Spencer and R.C. LeCraw (1960), PRL 4 130.
- [8] (21 Maggio 2011) Design and performance of the ADMX SQUID-based microwave receiver
- [9] Kazuhiro Yamamoto (Dicembre 2000) *Study of the thermal noise caused by inhomogeneously distributed loss*, Ph.D. thesis, Dipartimento di Fisica, Università di Tokyo
- [10] Vitale, *Appunti del dottorato*, 1992-1993