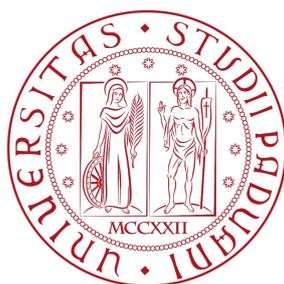


Università degli Studi di Padova

Dipartimento di Scienze Statistiche

Corso di Laurea Triennale in

STATISTICA PER L'ECONOMIA E L'IMPRESA



RELAZIONE FINALE

Reversibilità e non linearità nelle serie storiche

Relatore: Prof.ssa Luisa Bisaglia

Dipartimento di Scienze Statistiche

Laureando: Marianna Lax

Matricola: 1124293

Anno Accademico 2019/2020

Indice

Introduzione	5
1 La reversibilità nelle serie storiche	7
1.1 Il concetto di reversibilità	7
1.2 Il concetto di asimmetria nei cicli economici	9
1.2.1 I diversi tipi di asimmetria nei cicli economici	10
1.3 Procedure per verificare la reversibilità	12
1.3.1 Test di Ramsey-Rothman	12
1.3.2 Test di reversibilità basato sulle funzioni di autocorrelazione di Gini	17
2 La non linearità nelle serie storiche	22
2.1 Il concetto di non linearità nelle serie storiche	22
2.2 Modelli non lineari	23
2.2.1 Modelli Bilineari	24
2.2.2 Modelli a soglia	25
2.2.3 Modelli Markov Switching	26
2.2.4 Modelli a memoria lunga	27
2.3 Procedure per la verifica della (non)linearità	29
2.3.1 Il test di McLeod e Li (1983)	30
2.3.2 Il test BDS	31
2.3.3 Il test RESET di Ramsey (1969)	31

<i>INDICE</i>	4
2.3.4 Il test di Keenan (1985) e il test di Tsay (1986)	33
3 Esperimento Monte Carlo	34
3.1 Descrizione dell'esperimento Monte Carlo	34
3.2 Risultati dell'esperimento Monte Carlo	36
3.3 Tabelle	40
Conclusioni	47
Bibliografia	48

Introduzione

La maggior parte dei fenomeni economico-finanziari, ma non solo, sono caratterizzati dalla presenza di asimmetrie, irregolarità e bruschi cambiamenti di regime che possono essere sinonimo della presenza di non linearità nel legame delle variabili casuali che compongono il processo stocastico. Per verificare tale caratteristica in letteratura sono stati proposti numerosi test per la (non)linearità, tuttavia tali test non risultano essere molto potenti in numerosi casi. Lo scopo di questa relazione è quello di capire se un test per la reversibilità sia in grado di rilevare anche la presenza di non linearità con una potenza compatibile (o maggiore) a quella di altri test per la (non)linearità. La reversibilità costituisce una caratteristica molto importante in un processo stocastico. Individuare questa peculiarità rappresenta all'atto pratico un'aspetto rilevante per l'analisi delle serie storiche poichè la sua assenza, come afferma Cox (1981), può essere sinonimo di presenza di asimmetrie, non linearità e/o non Gaussianità. Come dimostrato da Weiss (1975) tutti i processi lineari Gaussiani sono reversibili, al contrario la maggior parte dei processi non lineari risulta irreversibile; sono rari i processi non lineari reversibili, essi costituiscono delle eccezioni. Sulla base di quanto detto, in questa relazione si valuterà la capacità che possiede un test per la reversibilità nel discriminare in modo adeguato una eventuale presenza di non linearità in una serie storica e capire dunque se un test per la reversibilità può essere considerato una valida alternativa a un test per la (non)linearità. A tal riguardo si è condotta una simulazione Monte Carlo per confrontare in termini

di potenza del test il test di Ramsey-Rothman (1996) per la reversibilità e il test BDS per la (non)linearità.

Questa relazione è suddivisa in tre parti: nella prima parte si è descritto il concetto di reversibilità e alcuni tra i vari test statistici utilizzati per individuare questa caratteristica; nella seconda parte si è introdotto il concetto di non linearità nelle serie storiche analizzando vari test per la (non)linearità e alcuni modelli non lineari presenti in letteratura; nella terza parte, infine, vengono descritti i risultati ottenuti da una simulazione Monte Carlo effettuata per confrontare i test descritti nei capitoli precedenti.

Capitolo 1

La reversibilità nelle serie storiche

Lo scopo di questo capitolo è quello di definire in modo formale il concetto di reversibilità che risulta collegato al concetto di asimmetria. E' stato mostrato infatti da diversi autori che alcune forme di asimmetria presenti in un ciclo economico possono essere associate alla presenza di irreversibilità. Per verificare se una serie storica presenta la proprietà di reversibilità si utilizzano vari test statistici, in questa sede se ne analizzeranno nel dettaglio due di questi: il test di Ramsey-Rothman e un test di reversibilità basato sulle funzioni di autocorrelazione di Gini.

1.1 Il concetto di reversibilità

La caratteristica di reversibilità costituisce un attributo molto importante nella trattazione teorica di un processo stocastico. Tale concetto è formalizzato nella seguente definizione:

Definizione 1.1. *Sia X_t un processo stocastico stazionario, esso è reversibile se $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall t_1, t_2, t_3, \dots, t_n \in \mathbb{R}$, i vettori $(X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_n})$ e*

$(X_{-t_1}, X_{-t_2}, \dots, X_{-t_n})$ hanno la stessa distribuzione di probabilità congiunta.

Tale affermazione può essere denotata brevemente nel seguente modo:

$$(X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_n}) \stackrel{d}{=} (X_{-t_1}, X_{-t_2}, \dots, X_{-t_n})$$

Per la condizione di stazionarietà di X_t si ha che $(X_{-t_1}, X_{-t_2}, \dots, X_{-t_n})$ e $(X_{-t_1+m}, X_{-t_2+m}, \dots, X_{-t_n+m})$ hanno la stessa distribuzione di probabilità congiunta per ogni $m \in \mathbb{N}$. Ponendo $m = t_1 + t_n$ si può osservare che per una serie stazionaria X_t , la reversibilità implica che il vettore $(X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_n})$ e $(X_{t_n}, X_{t_{n-1}}, \dots, X_{t_1})$ hanno la stessa distribuzione di probabilità congiunta. Intuitivamente un processo stocastico X_t è reversibile se la sua struttura probabilistica è invariante rispetto all'inversione della scala temporale. In altri termini un processo è detto reversibile se possiede proprietà probabilistiche che non dipendono dalla direzione del tempo. Un processo che non soddisfa le condizioni di cui sopra è detto irreversibile.

Dalla Definizione 1.1 si può osservare che ogni processo stocastico che presenta la proprietà di reversibilità è anche stazionario, c'è da sottolineare, tuttavia, che il verso dell'implicazione è univoco: non è detto che un processo stocastico stazionario sia anche reversibile. Per definizione, inoltre, si può chiaramente affermare che un processo non stazionario non può essere reversibile.

Come dimostrato da Weiss (1975) la reversibilità è una proprietà presente nei processi lineari Gaussiani¹ come formalizzato nel seguente teorema (Weiss, 1975):

Teorema 1.1. *Sia X_t un processo stocastico stazionario e Gaussiano tale per cui tutte le distribuzioni finite di X_t sono normali multivariate, allora X_t è anche reversibile.*

¹Weiss (1975) ha dimostrato per un processo autoregressivo a media mobile che la reversibilità è una caratteristica sostanzialmente limitata ai processi Gaussiani. L'autore nello stesso articolo dimostra che tutti i processi lineari Gaussiani $ARMA(p, q)$, le cui innovazioni sono distribuite secondo leggi simmetriche, sono reversibili.

Dal Teorema 1.1 deriva che un processo irreversibile non può essere Gaussiano. A tal riguardo, Cox (1981) sottolinea l'importanza nello stabilire la presenza di irreversibilità in un processo, poichè questa potrebbe essere sinonimo di non Gaussianità e/o non linearità.

Da un punto di vista operativo determinare la presenza di reversibilità permette di ricercare il modello migliore in una classe più ristretta di modelli. L'assenza di tale proprietà, infatti, segnala l'esclusione dalla scelta di modelli lineari Gaussiani o di loro trasformazioni non lineari poichè essi non riuscirebbero a descrivere il fenomeno che si sta analizzando in modo soddisfacente.

1.2 Il concetto di asimmetria nei cicli economici

L'asimmetria è un'importante caratteristica che si può riscontrare in numerosi cicli economici. Spesso risulta piuttosto difficoltoso capire con esattezza quando una serie storica risulta asimmetrica. Neftci (1984) e Sichel (1993) sono solo alcuni tra i vari autori che hanno cercato di verificare la presenza di tale proprietà in alcune serie storiche con cicli economici. Il concetto di asimmetria, inoltre, risulta collegato al concetto di reversibilità e del suo opposto. La presenza di irreversibilità in un ciclo economico, infatti, può essere associata alla presenza di asimmetria. A tal proposito Ramsey e Rothman (1996) hanno dimostrato la presenza di tale caratteristica in alcune serie storiche dei tassi di crescita riscontrando in esse irreversibilità.

In letteratura numerosi autori hanno cercato di descrivere la proprietà di asimmetria, di seguito si riportano i principali sviluppi.

1.2.1 I diversi tipi di asimmetria nei cicli economici

Steepness e deepness

Sichel (1993) definisce due tipi di asimmetria: "*steepnes*" e "*deepness*". Si ha il primo tipo di asimmetria quando in un ciclo economico la fase di contrazione presenta un andamento più ripido (o meno ripido) rispetto alla fase di espansione. Si ha un'asimmetria di tipo "*deepness*", invece, quando in un ciclo economico l'estensione tra la sua media e il suo picco non è uguale all'estensione tra la sua media e il punto più basso del ciclo.

In letteratura sono state proposte varie procedure per verificare la presenza di questi tipi di asimmetrie. Neftci (1984) a tal proposito, ha proposto il seguente procedimento: in primo luogo si adatta alle serie storiche con cicli economici prese in esame un processo Markoviano di secondo ordine e quindi si verifica l'uguaglianza tra le due probabilità di transizione: $P(+|++)$ e $P(-|--)$ dove $P(+|++)$ è la probabilità di ottenere una differenza prima positiva date due differenze prime positive e $P(-|--)$ è la probabilità di ottenere una differenza prima negativa date due differenze prime negative. Secondo Neftci, vi è asimmetria se in un ciclo economico la durata della fase di espansione è maggiore (o minore) a quella di contrazione e quindi se $P(+|++) > (<)P(-|--)$.

Sharpness

L'asimmetria di tipo "*sharpness*" si concentra sulla forma del ciclo attorno ai suoi punti di massimo e di minimo. McQueeb e Thorley (1993) affermano che vi è questo tipo di asimmetria quando in corrispondenza dei massimi e dei minimi di un ciclo economico non si osserva lo stesso comportamento. Intuitivamente si potrebbe dire che vi è asimmetria quando la curva del ciclo economico in corrispondenza di un massimo (minimo) presenta un compor-

tamento più "rotondo", mentre in corrispondenza di un minimo (massimo) la curva del ciclo economico presenta un andamento più "appuntito".

Ramsey e Rothman (1996) hanno categorizzato i vari tipi di asimmetria sopra elencati in due classi: asimmetria *longitudinale* e *trasversale*. L'asimmetria *longitudinale* è quel tipo di asimmetria che si verifica quando la direzione del movimento del ciclo economico presenta un comportamento asimmetrico rispetto all'andamento generale della serie. L'asimmetria "*steepness*" è esempio di asimmetrie *longitudinali*. L'asimmetria *trasversale* si presenta quando nel ciclo economico vi è un comportamento che risulta ortogonale all'andamento della serie. In altri termini, se vi è asimmetria negli spostamenti verticali della serie dalla sua media allora si parla di asimmetria *trasversale*. Un esempio di quest'ultimo tipo di asimmetria è l'asimmetria descritta da McQueeb-Thorley "*sharpness*" e l'asimmetria "*deepness*".

Stabilire se un processo presenta un andamento asimmetrico e il tipo di asimmetria sottostante, risulta importante per capire se la serie possiede la caratteristica di reversibilità o irreversibilità. Secondo Ramsey e Rothman se vi è asimmetria di tipo *longitudinale* allora la serie è irreversibile, al contrario, se la serie presenta un'asimmetria *trasversale* allora questa è reversibile.

1.3 Procedure per verificare la reversibilità

Per verificare se in una serie storica è presente la caratteristica di reversibilità sono stati proposti vari test statistici. In questa relazione ci si vuole soffermare sull'analisi di due test statistici utilizzati per risolvere tale problema: il test di Ramsey-Rothman e un test di reversibilità basato sulle funzioni di autocorrelazione di Gini.

1.3.1 Test di Ramsey-Rothman

Nozioni Preliminari

Il test di Ramsey-Rothman (1996) si basa sullo studio di alcuni momenti misti della distribuzione di probabilità congiunta di un processo stocastico stazionario X_t , in particolare esso si basa nell'osservare se è presente l'uguaglianza tra i vari momenti misti del processo. Questo test si fonda sul seguente teorema (Ramsey, Rothman, 1996):

Teorema 1.2. *Sia X_t un processo stocastico stazionario a media zero che verifica le seguenti condizioni:*

- (i) *la funzione caratteristica multivariata di (X_t, X_{t-k}) e (X_{t-k}, X_t) si sviluppa come una serie convergente nei momenti e nei momenti misti delle rispettive distribuzioni di probabilità congiunte*
- (ii) *le distribuzioni di probabilità congiunte sono caratterizzate unicamente dalle rispettive sequenze dei momenti e momenti misti*

allora X_t è reversibile solo se

$$E[X_t^i \cdot X_{t-k}^j] = E[X_t^j \cdot X_{t-k}^i], \forall i, j, k \in \mathbb{N} \quad (1.1)$$

Conseguentemente alla (1.1) se X_t è irreversibile si ha che $F_{t,t-k}(X_t, X_{t-k}) \neq F_{t-k,t}(X_t, X_{t-k})$ e quindi $E[X_t^i \cdot X_{t-k}^j] \neq E[X_t^j \cdot X_{t-k}^i], \forall i, j, k \in \mathbb{N}$, dove con

$F_{t,t-k}(\cdot, \cdot)$ si indica la distribuzione di probabilità congiunta delle variabili X_t e X_{t-k} .

Dalla (1.1) si può osservare che per $i=j=1$ si ha che :

$$E[X_t \cdot X_{t-k}] = E[X_t \cdot X_{t-k}], \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad (1.2)$$

La (1.2) indica la proprietà secondo cui l'autocovarianza relativa ad una serie stazionaria è uguale a se stessa al lag k , da questa proprietà deriva che l'autocovarianza non riesce a fornire nessuna informazione riguardo la caratteristica di irreversibilità in una serie storica. Conseguentemente, per stabilire se una serie è reversibile, Ramsey e Rothman (1996) hanno sviluppato un test che si basa sul confronto di alcuni momenti misti del processo, ponendo $i, j > 1$ nella (1.1); in particolare il test si focalizza sul valore assunto dalla funzione di bicovarianza simmetrica. La funzione di bicovarianza simmetrica è definita nel seguente modo:

$$\gamma_{1,2} = E[X_t^2 \cdot X_{t-k}] - E[X_t \cdot X_{t-k}^2], \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad (1.3)$$

Se X_t è reversibile allora, come deriva dal Teorema 1.2, $\gamma_{1,2} = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}$, al contrario, se esiste un lag k tale per cui i due momenti misti non risultano essere uguali tra loro, allora la serie è irreversibile, quest'ultima condizione è una condizione sufficiente per l'irreversibilità.² Per semplicità pratica ci si limita solitamente a confrontare tutte le funzioni di bicovarianza con $(i+j) \leq m$ e con $k \leq K$, con m intero positivo. Conseguentemente, un processo si dice reversibile di ordine m e grado K quando tutte le funzioni di bicovarianza simmetriche sono uguali a zero per ogni i, j, k .

Ramsey e Rothman individuano due tipi di irreversibilità, dovuti principalmente a diverse caratteristiche presenti in una serie storica e che possono essere sintetizzati come segue:

²E' una condizione sufficiente, ma non necessaria poichè la (1.1) prende in considerazione solo un sottoinsieme dei momenti della distribuzione di probabilità congiunta di $(X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_n})$ e $(X_{t_n}, X_{t_{n-1}}, \dots, X_{t_1})$, infatti si prendono in esame solo i vettori (X_t, X_{t-k}) e (X_{t-k}, X_t) .

- irreversibilità di "Tipo I", quando il processo è non lineare ma le innovazioni hanno una distribuzione simmetrica;
- irreversibilità di "Tipo II", quando il processo è lineare ma le innovazioni non sono distribuite secondo una legge Gaussiana.

Una dimostrazione di questi risultati è stata condotta da Ramsey e Rothman (1996), i quali hanno dimostrato la presenza di irreversibilità in un processo lineare e uno non lineare. Il primo esempio prende in considerazione un modello non lineare di tipo Bilineare con innovazioni Gaussiane, $\epsilon_t \sim N(0, 1)$ così definito:

$$X_t = \alpha \cdot X_{t-1} + \beta \cdot X_{t-1} \cdot \epsilon_{t-1} + \epsilon_t \quad (1.4)$$

Dai calcoli condotti dai due autori si può concludere che per questo tipo di modello $\gamma_{1,2} \neq 0$, dimostrando perciò che X_t è irreversibile ed è presente una irreversibilità di Tipo I. Il secondo esempio prende in esame un modello lineare non gaussiano di tipo $MA(1)$ così definito:

$$X_t = \epsilon_t - \theta \cdot \epsilon_{t-1} \quad (1.5)$$

dove $\{\epsilon_t\}$ è una sequenza di variabili casuali *i.i.d.* con $E[\epsilon_t^3] \neq 0$. In questo caso si può affermare che X_t è irreversibile poichè $\gamma_{1,2} = (\theta^2 + \theta)\mu_3^\epsilon \neq 0$ e presenta una irreversibilità di Tipo II.

Il test di Ramsey-Rothman

Nell'approccio utilizzato da Ramsey e Rothman, per verificare la presenza di reversibilità in una serie storica, si utilizza un test di verifica d'ipotesi che vede contrapposte le seguenti due alternative:

- l'ipotesi nulla H_0 che indica la presenza di reversibilità nella serie;
- l'ipotesi alternativa H_1 che indica irreversibilità e quindi rappresenta l'ipotesi nulla negata.

La statistica test che viene utilizzata per risolvere questo problema decisionale è la seguente:

$$\frac{\sqrt{T} \cdot [\hat{\gamma}_{2,1}(k) - \gamma_{2,1}(k)]}{(\text{Var}(\hat{\gamma}_{2,1}(k)))^{1/2}} \quad (1.6)$$

dove T rappresenta il numero di osservazioni. Questa statistica, come si può notare dalla sua struttura $(\hat{\gamma}_{2,1}(k) - \gamma_{2,1}(k))$, si basa sul confronto tra quanto stimato attraverso i dati, $\hat{\gamma}_{2,1}(k)$, con quanto fissato dall'ipotesi nulla, $\gamma_{2,1}(k)$. Sotto H_0 è possibile dimostrare (White, 1984) che questa statistica test si distribuisce asintoticamente come una $N(0, 1)$. Le due bicovarianze sono così definite:

$$\begin{aligned} \hat{B}_{2,1}(k) &= (T - k)^{-1} \cdot \sum_{t=k+1}^T X_t^2 \cdot X_{t-k} \\ \hat{B}_{1,2}(k) &= (T - k)^{-1} \cdot \sum_{t=k+1}^T X_t \cdot X_{t-k}^2 \end{aligned} \quad (1.7)$$

Le due bicovarianze $\hat{B}_{2,1}(k)$ e $\hat{B}_{1,2}(k)$ risultano essere due stimatori consistenti. Questa proprietà è stata dimostrata nel *Teorema 1* di Rosenblatt e Van Ness (1965). Essi dimostrano la condizione sufficiente di consistenza per i due stimatori: la varianza di questi due stimatori va a 0 quando $T \rightarrow \infty$, inoltre $\hat{B}_{2,1}(k)$ e $\hat{B}_{1,2}(k)$ convergono alla media quadratica di $B_{2,1}(k)$ e $B_{1,2}(k)$.

Uno stimatore per la funzione di bicovarianza simmetrica $\gamma_{2,1}(k)$ può essere ottenuto come segue:

$$\hat{\gamma}_{2,1}(k) = \hat{B}_{2,1}(k) - \hat{B}_{1,2}(k), \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad (1.8)$$

Essendo $\hat{\gamma}_{2,1}(k)$ una funzione lineare di $\hat{B}_{2,1}(k)$ e $\hat{B}_{1,2}(k)$, essa risulta uno stimatore non distorto e consistente per $\gamma_{2,1}(k)$.

Si è dimostrato inoltre (Ramsey, Rothman, 1996) che, sotto varie condizioni, $\hat{\gamma}_{2,1}(k)$ ha una distribuzione approssimativamente normale.

Sotto l'ipotesi nulla di reversibilità, la funzione di bicovarianza simmetrica assume valore nullo, dunque $\gamma_{2,1}(k) = 0$ poichè le bicovarianze sono uguali tra di loro per ogni valore di k intero.

Una stima della $Var(\hat{\gamma}_{2,1}(k))$ può essere ottenuta con approcci differenti a seconda delle caratteristiche che presenta il processo stocastico analizzato. Tali modalità possono essere sintetizzate come segue:

- se X_t è una successione di variabili casuali indipendenti ed identicamente distribuite allora una stima della $Var(\hat{\gamma}_{2,1}(k))$ si basa sul seguente teorema (Ramsey, Rothman, 1996):

Teorema 1.3. *Sia X_t una successione infinita di variabili casuali indipendenti ed identicamente distribuite dove $E[X_t] = 0$ e $E[X_t^4] < \infty$ $\forall t$ allora:*

$$Var(\hat{\gamma}_{2,1}(k)) = 2(\mu_4\mu_2 - \mu_3^2)/(T - k) - 2\mu_2^3(T - 2k)/(T - k)^2 \quad (1.9)$$

dove $\mu_2 = E[X_t^2]$, $\mu_3 = E[X_t^3]$, $\mu_4 = E[X_t^4]$

Se il processo X_t non presenta una correlazione seriale $\hat{\gamma}_{2,1}(k)$ ha distribuzione normale (Ramsey, Rothman, 1996), la $Var(\hat{\gamma}_{2,1}(k))$ può essere calcolata utilizzando l'espressione descritta nel Teorema 1.3 e la statistica test può essere calcolata a partire dai dati che si hanno a disposizione;

- se al contrario, il processo X_t presenta una correlazione seriale allora l'ipotesi nulla è vera se il processo è non lineare e reversibile oppure è un ARMA con innovazioni Gaussiane. In entrambi i casi una stima di $\hat{\gamma}_{2,1}(k)$ viene determinata dai dati che si hanno a disposizione mentre una stima della $Var(\hat{\gamma}_{2,1}(k))$ può essere ricavata a partire dal seguente procedimento: in primo luogo si adatta un modello di tipo ARMA ai dati e si ottiene una stima della varianza delle innovazioni, quindi si simulano per un numero fissato di volte, S , delle serie che possiedono coefficienti con valori pari a quelli stimati e innovazioni Gaussiane di media zero e varianza che coincide con quella stimata. Operando in questo modo si ottengono S repliche di $\hat{\gamma}_{2,1}(k)$ calcolate a partire

dalle S repliche delle serie simulate e la $Var(\hat{\gamma}_{2,1}(k))$ si ricava a partire dagli S valori replicati di $\hat{\gamma}_{2,1}(k)$. Se il processo è lineare e Gaussiano questa procedura di stima è esatta, se invece il processo è reversibile e non lineare la procedura risulta approssimata.

Se il valore della statistica test si trova nella regione di rifiuto allora si rigetterà l'ipotesi nulla, il passo successivo sarà quello di distinguere i due tipi di irreversibilità: di *Tipo I* o di *Tipo II*.

Rothman (1990) attraverso delle simulazioni Monte Carlo, ha calcolato la potenza del test di Ramsey-Rothman, dimostrando la buona capacità che quest'ultimo possiede di discriminare le due ipotesi in alcuni modelli Bilineari e modelli a soglia.

1.3.2 Test di reversibilità basato sulle funzioni di autocorrelazione di Gini

Nozioni Preliminari

Shelef e Schectman (2016) hanno proposto un test di reversibilità che si basa sul lavoro condotto da Gini (1914). Nello specifico questo test si basa sul confronto tra due funzioni di autocorrelazione bi-direzionali che vengono utilizzate come misura per l'autocorrelazione parziale e globale di un processo. A differenza delle funzioni di autocorrelazione parziale e globale, usate normalmente per calcolare l'associazione lineare tra le variabili di un processo in vari istanti di tempo, le due funzioni definite da Gini riescono a valutare questa caratteristica in due *direzioni* temporali differenti. Conseguentemente, se viene rilevata una differenza tra queste due funzioni, osservare la serie secondo il verso concorde della scala temporale, o invertendo quest'ultima, implica due risultati differenti: ciò potrebbe significare la presenza di irreversibilità nel processo.

Nello specifico, sia X_t un processo stocastico stazionario, sia s il lag (tale che $s = \pm 0, \pm 1, \dots$), le due funzioni di autocorrelazione asimmetriche di Gini

sono così definite:

$$Gcor(X_t, X_{t-s}) = \frac{Gcov(X_t, X_{t-s})}{Gcov(X_t, X_t)} = \frac{cov(X_t, F_{t-s}(\cdot))}{cov(X_t, F_t(\cdot))} \quad (1.10)$$

$$Gcor(X_{t-s}, X_t) = \frac{cov(X_{t-s}, F_t(\cdot))}{cov(X_t, F_{t-s}(\cdot))} \quad (1.11)$$

Le funzioni di autocovarianza asimmetriche di Gini vengono definite nel seguente modo :

$$\begin{aligned} cov(X_t, F(X_{t-s})) &= \gamma_{(t,t-s)}^{G1} = \gamma_{(s)}^{G1} \\ cov(X_{t-s}, F(X_t)) &= \gamma_{(t,t-s)}^{G2} = \gamma_{(s)}^{G2} \end{aligned} \quad (1.12)$$

Se $Gcor(X_t, X_{t-s})$ e $Gcor(X_{t-s}, X_t)$ non sono uguali tra loro questo può indicare la presenza di irreversibilità come detto in precedenza.

Verificare la caratteristica di reversibilità di un processo non sarebbe possibile utilizzando le usuali funzioni di autocovarianza o autocorrelazione parziale e globale, poichè per definizione di covarianza $\gamma(s) = \gamma(-s)$ e questo non risulterebbe pertanto informativo per constatare la presenza di irreversibilità. Le autocorrelazioni e autocovarianze di Gini, invece, riescono a discriminare l'eventuale presenza di asimmetria in un processo e di conseguenza riescono a dare maggiori informazioni riguardo alcune caratteristiche del processo che si sta analizzando. Shelef e Schectman (2016) mostrano, infatti, che la reversibilità può essere associata alla presenza di simmetria nel processo.

Funzioni di autocorrelazione di Gini

Consideriamo un processo stocastico stazionario X_t , la usuale funzione di autocorrelazione (ACF) tra X_t e X_{t-s} è definita come:

$$ACF(X_t, X_{t-s}) = \rho_s = \gamma_s / \gamma_0 \quad (1.13)$$

Una stima della funzione di autocorrelazione (ACF) è data da:

$$\hat{\rho}_s = \frac{\sum_{t=1}^{T-s} (X_{t-s} - \bar{X})(X_t - \bar{X})}{(\sum_{t=1}^T (X_t - \bar{X})^2)} \quad (1.14)$$

dove $\bar{X} = \sum_{t=1}^T (X_t) / T$ e T è la lunghezza della serie.

Le due funzioni di autocorrelazione di Gini (Gini-ACF) di ordine s sono definite in modo analogo nel seguente modo:

$$\begin{aligned} \text{Gini-ACF}(X_t, X_{t-s}) &= \rho_s^{G1} = \gamma_s^{G1} / \gamma_{s=0}^{G1} \\ \text{Gini-ACF}(X_{t-s}, X_t) &= \rho_s^{G2} = \gamma_s^{G2} / \gamma_{s=0}^{G2} \end{aligned} \quad (1.15)$$

dove γ_s^{G1} e γ_s^{G2} sono state formalizzate nell'eq. (1.12). La presenza di una differenza tra le due funzioni di autocorrelazione di Gini (Gini-ACF) indica che potrebbe esserci irreversibilità nel processo, poichè guardare la serie dalla prospettiva di ρ_s^{G2} , cosiddetta "in avanti", non è equivalente a osservare la serie dalla prospettiva di ρ_s^{G1} , cosiddetta "all'indietro".

Degli stimatori per le due funzioni di autocorrelazione di Gini (Gini-ACF) possono essere ricavati nel seguente modo:

$$\begin{aligned} \hat{\rho}_s^{G1} &= \frac{\sum_{t=1}^{T+s} (X_{t-s} - \bar{X})(R(X_t) - \bar{R}(X_1 : (T-s)))}{\sum_{t=1}^T (X_t - \bar{X})(R(X_t) - \bar{R}(X_1 : (T-s)))} \\ \hat{\rho}_s^{G2} &= \frac{\sum_{t=1}^{T-s} (X_t - \bar{X})(R(X_{t+s}) - \bar{R}(X_{1+s} : (T)))}{\sum_{t=1}^T (X_t - \bar{X})(R(X_t) - \bar{R}(X_1 : (T)))} \end{aligned} \quad (1.16)$$

dove $R(X_t)$ è il rango di X_t e $\bar{R}(X_{i:j}) = \sum_{t=i}^j R(X_t) / (j - i + 1)$.

Funzioni di autocorrelazione parziale di Gini

La funzione di autocorrelazione parziale di Gini (Gini-PACF) è definita come l'ultimo coefficiente, ϕ_{ss}^{G1} , presente nell'equazione di autoregressione parziale di Gini di ordine s :

$$X_t = \phi_{s1}^{G1} X_{t-1} + \dots + \phi_{ss}^{G1} X_{t-s} + \epsilon_t. \quad (1.17)$$

quindi

$$\rho_{(j)}^{G1} = \phi_{s1}^{G1} \rho_{j-1}^{G1} + \dots + \phi_{ss}^{G1} \rho_{j-s}^{G1} \quad (1.18)$$

Dove $\phi_{ss}^{G1} = Gcor(X_t, X_{t-s} | X_{t-1}, \dots, X_{t-s+1})$. La stessa procedura viene applicata per ricavare Gini-PACF (ϕ_{ss}^{G2}).

Delle stime per le due Gini-PACF possono essere ottenute dal seguente sistema di equazioni:

$$\begin{aligned}\hat{\rho}_{(j)}^{G1} &= \hat{\phi}_{s1}^{G1} \hat{\rho}_{j-1}^{G1} + \dots + \hat{\phi}_{ss}^{G1} \hat{\rho}_{j-s}^{G1} \\ \hat{\rho}_{(j)}^{G2} &= \hat{\phi}_{s1}^{G2} \hat{\rho}_{j-1}^{G2} + \dots + \hat{\phi}_{ss}^{G2} \hat{\rho}_{j-s}^{G2}\end{aligned}\quad (1.19)$$

dove $\hat{\rho}_{(j)}^{G1}$ e $\hat{\rho}_{(j)}^{G2}$ sono stimati come precedentemente definito in (1.16) e dove $\hat{\phi}_{ss}^{G1}$ e $\hat{\phi}_{ss}^{G2}$ costituiscono le stime dell'autocorrelazione pariaziale di Gini.

Test di reversibilità basato sulle funzioni di autocorrelazione di Gini

Il test di reversibilità basato sulle funzioni di autocorrelazione di Gini proposto da Shelef e Schectman (2016), ha come obiettivo quello di risolvere il problema decisionale che vede contrapposte due ipotesi: $H_0 : \rho_s^{G1} = \rho_s^{G2} = 0$ equivalente ad $H_0 : \phi_{ss}^{G1} = \phi_{ss}^{G2} = 0$ ed H_1 che rappresenta l'ipotesi nulla negata. L'uguaglianza tra i parametri, $\rho_s^{G1} = \rho_s^{G2}$ e $\phi_{ss}^{G1} = \phi_{ss}^{G2}$, ci indica la presenza di reversibilità.

Gli strumenti utilizzati per risolvere questo problema di verifica d'ipotesi sono costituiti dalle statistiche test qui di seguito riportate:

$$\sqrt{T} |\hat{\theta}_{Gini-ACF(s)} - \theta_{Gini-ACF(s, H_0)}| \quad (1.20)$$

e

$$\sqrt{T} |\hat{\theta}_{Gini-PACF(s)} - \theta_{Gini-PACF(s, H_0)}| \quad (1.21)$$

Sotto H_0 , come descritto in precedenza, si assume l'uguaglianza tra i parametri, dunque $\theta_{Gini-ACF(s, H_0)}$ e $\theta_{Gini-PACF(s, H_0)}$ sono entrambe nulle.

Per costruire la seguente statistica test sono utilizzati i seguenti stimatori per $\theta_{Gini-ACF(s)}$ e $\theta_{Gini-PACF(s)}$:

$$\hat{\theta}_{Gini-ACF(s)} = \hat{\rho}_s^{G1} - \hat{\rho}_s^{G2} \quad (1.22)$$

e

$$\hat{\theta}_{Gini-PACF(s)} = \hat{\phi}_s^{G1} - \hat{\phi}_s^{G2} \quad (1.23)$$

dove per stimare $\hat{\rho}_s^{G1}$ e $\hat{\rho}_s^{G2}$ si utilizza il procedimento descritto in (1.16), mentre per trovare una stima per $\hat{\phi}_s^{G1}$ e $\hat{\phi}_s^{G2}$ si adopera la (1.19). Risulta perciò ragionevole rifiutare l'ipotesi nulla per valori grandi (in modulo) delle statistiche test. Le regioni di rifiuto sono costruite a partire dai percentili della distribuzione che possiedono le statistiche sotto l'ipotesi nulla.

Le distribuzioni della statistica sotto H_0 sono state ricavate attraverso delle simulazioni bootstrap che hanno determinato i seguenti risultati:

$$\begin{aligned}\hat{F}_{Gini-ACF(s)(t)} &= P(\sqrt{T}|\hat{\theta}_{Gini-ACF(s)} - \theta_{Gini-ACF(s,H_0)}| \leq t) \\ \hat{F}_{Gini-PACF(s)(t)} &= P(\sqrt{T}|\hat{\theta}_{Gini-PACF(s)} - \theta_{Gini-PACF(s,H_0)}| \leq t)\end{aligned}\tag{1.24}$$

Conseguentemente, si rifiuta l'ipotesi nulla se si verificano le seguenti condizioni:

$$\begin{aligned}\sqrt{T}|\hat{\theta}_{Gini-ACF(s)}| &> \hat{F}_{Gini-ACF(s)}^{-1(1-\alpha/2)} \\ \sqrt{T}|\hat{\theta}_{Gini-PACF(s)}| &> \hat{F}_{Gini-PACF(s)}^{-1(1-\alpha/2)}\end{aligned}\tag{1.25}$$

Dove $\hat{F}^{-1(1-\alpha/2)}$ è il percentile della distribuzione che possiede la statistica test sotto l'ipotesi nulla.

Capitolo 2

La non linearità nelle serie storiche

L'obiettivo del seguente capitolo è quello di definire in maniera formale il concetto di non linearità in un processo stocastico e di analizzare alcuni tra i principali modelli non lineari utilizzati nell'ambito delle serie storiche. Alla fine di questo capitolo si descriveranno diversi test statistici impiegati per verificare la caratteristica di non linearità.

2.1 Il concetto di non linearità nelle serie storiche

Per definire la caratteristica di non linearità in una serie storica occorre inizialmente formalizzare il concetto di linearità:

Definizione 2.1. *Sia X_t un processo stocastico stazionario, esso si dice lineare se verifica la seguente condizione:*

$$X_t = c + \sum_{i=0}^{\infty} a_i Z_{t-i}$$

dove c è una costante, $a_0 = 1$, a_i sono numeri reali tali che $\sum_{i=0}^{\infty} a_i^2 < \infty$, Z_t è una successione di variabili casuali i.i.d. con $E[Z_t] = 0$ e $\text{Var}[Z_t] = \sigma_z^2$

con $\sigma_z^2 < \infty$.³

Se un processo stocastico X_t non verifica la definizione 2.1 questo viene definito *non lineare*. In altri termini un processo X_t si definisce non lineare se non può essere scritto come combinazione lineare di altre variabili casuali indipendenti ed identicamente distribuite e di conseguenza non potrebbe essere rappresentato in maniera soddisfacente da modelli lineari, poichè questi ultimi non riuscirebbero a descrivere alcune caratteristiche importanti del processo, quali ad esempio la presenza:

- di asimmetrie;
- di improvvisi ed irregolari cambiamenti di regime nei dati;
- di valori anomali nelle osservazioni;
- di una varianza che non risulta costante nel tempo.

Capire se un processo presenta tale caratteristica risulta utile da un punto di vista esecutivo poichè permette di ricercare il modello migliore nella classe dei modelli non lineari, i quali riuscirebbero a descrivere il fenomeno analizzato in maniera adeguata. Tuttavia si deve sottolineare il fatto che anche i modelli non lineari presentano alcuni limiti: il loro "successo" dipende in particolare dall'insieme di dati che si possiede.

2.2 Modelli non lineari

Una notevole progressione nello studio delle caratteristiche dei modelli non lineari per serie storiche è avvenuta negli anni più recenti. In questa sezione si analizzeranno alcuni tra i modelli non lineari presenti in letteratura.

³Peter G. (1999), "Nonlinear Time Series Modeling: An Introduction".

2.2.1 Modelli Bilineari

I modelli bilineari costituiscono un'importante classe dei modelli non lineari. La forma generale di un modello bilineare, $BL(p, q, r, s)$, è stata definita da Granger e Andersen (1978) come segue:

$$X_t = c + \sum_{i=1}^p \phi_i X_{t-i} + \sum_{j=1}^q \theta_j a_{t-j} + \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^s \beta_{ij} X_{t-i} a_{t-j} + a_t \quad (2.1)$$

dove $a_t \sim WN(0, \sigma^2)$, ϕ_i ($i = 1, \dots, p$), θ_j ($j = 1, \dots, q$) e β_{ij} sono parametri costanti. Un aspetto interessante di questo modello non lineare è la presenza di una struttura simile a quella dei modelli lineari. Dal modello (2.1) si può infatti notare un'analogia nella forma con un $ARMA(p, q)$ (*AutoRegressive Moving Average*) così definito:

$$X_t = c + \sum_{i=1}^p \phi_i X_{t-i} + \sum_{j=1}^q \theta_j a_{t-j} + a_t \quad (2.2)$$

dove $a_t \sim WN(0, \sigma^2)$

Un $BL(p, q, r, s)$ si può pertanto definire un'estensione non lineare di un $ARMA(p, q)$ con il supplemento di un termine aggiuntivo:

$$\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^s \beta_{ij} X_{t-i} a_{t-j} \quad (2.3)$$

che risulta essere il prodotto tra la parte a media mobile e quella autoregressiva. Nello specifico la parte bilineare rappresentata nella (2.3) risulta inattiva quando i dati seguono il regime abituale, al contrario diventa operativa quando le osservazioni mostrano un comportamento non lineare. I modelli bilineari tuttavia presentano uno svantaggio dal punto di vista operativo: spesso non si riescono a derivare alcune importanti proprietà come quella di stazionarietà e invertibilità.

I modelli bilineari risultano particolarmente appropriati nel descrivere serie di dati di natura sismologica che risultano essere caratterizzate dalla presenza di valori anomali. Da un punto di vista applicativo i $BL(p, q, r, s)$ non

sono particolarmente utilizzati in letteratura, trovano tuttavia un maggior impiego in campo ingegneristico, essi infatti vengono adoperati per descrivere relazioni deterministiche tra input e output.

2.2.2 Modelli a soglia

I modelli a soglia costituiscono un'importante classe dei modelli non lineari. La forma generale di un modello a soglia *SETAR* (*Self-Exciting Threshold AutoRegressive*) è stata specificata da Tong e Lim (1980) come segue:

$$X_t = \sum_{i=1}^k \{\phi_0^{(i)} + \phi_1^{(i)} X_{t-1} + \dots + \phi_{p_i}^{(i)} X_{t-p} + \sigma^{(i)} a_t\} I(X_{t-d} \in A_i) \quad (2.4)$$

Dove $a_t \sim WN(0, 1)$, p_1, \dots, p_k e d sono interi positivi ignoti, $\sigma^{(i)} > 0$ e $\phi_l^{(i)}$ parametri ignoti. Inoltre A_i costituisce una partizione dell'insieme \mathbb{R} con $\cup_{i=1}^k A_i = \mathbb{R}$ e $A_i \cap A_j \neq \emptyset$ con $i \neq j$.

Analizzando la struttura della (2.4) si può evidenziare una particolare proprietà dei modelli *SETAR*: la presenza nel modello di due o più strutture differenti utilizzate per descrivere i diversi regimi di un processo stocastico. Queste strutture diventano operative quando la variabile X_{t-d} assume determinati valori, conseguentemente si ha che i parametri del modello (2.4) vengono modificati con il variare dei regimi, i modelli presentano perciò dei punti di discontinuità in corrispondenza delle soglie.

I *SETAR* vengono utilizzati per rappresentare fenomeni caratterizzati da cicli, asimmetrie o periodicità. Uno svantaggio di questi modelli è la difficile derivazione di alcune proprietà teoriche.

Un caso particolare dei *SETAR* sono i modelli *TAR* (*Threshold AutoRegressive*) la cui forma viene così definita:

$$X_t = \sum_{i=1}^k \{\phi_0^{(i)} + \phi_1^{(i)} X_{t-1} + \dots + \phi_{p_i}^{(i)} X_{t-p} + \sigma^{(i)} a_t\} I(Z_t \in A_i) \quad (2.5)$$

Dalla (2.5) si può osservare che la variabile X_{t-d} presente nel modello *SETAR* (2.4) viene sostituita da Z_t che rappresenta una variabile soglia esogena.

Un altro caso specifico dei *SETAR* sono i modelli *STAR* (*Smooth Transition AutoRegressive*) la cui forma viene così definita:

$$X_t = \{\phi_0^{(1)} + \phi_1^{(1)}X_{t-1} + \dots + \phi_{p_1}^{(1)}X_{t-p} + \sigma^{(1)}a_t\}(1 - G(X_{t-d})) + \{\phi_0^{(2)} + \phi_1^{(2)}X_{t-1} + \dots + \phi_{p_2}^{(2)}X_{t-p} + \sigma^{(2)}a_t\}G(X_{t-d}) \quad (2.6)$$

Per semplicità nella (2.6) vengono considerati due regimi, quindi si ha che $k = 2$. Nello specifico i modelli *STAR* come si osserva dalla (2.6) hanno una struttura simile ai *SETAR* tuttavia la variabile soglia X_{t-d} presente nella (2.4) è stata sostituita da una funzione di transizione liscia $0 < G(x_{t-d}) < 1$. Al contrario di quanto accadeva nei *SETAR*, nei modelli *STAR* il cambiamento da un regime ad un altro avviene in maniera più "scorrevole". In altre parole si ha che la dinamica di X_t può essere stata determinata da entrambi i regimi, ma in uno specifico periodo temporale un regime ha un impatto maggiore rispetto all'altro e viceversa.

2.2.3 Modelli Markov Switching

I modelli Markov Switching costituiscono una classe importante dei modelli non lineari. La forma generale di un modello Markov Switching di ordine p , $MS(p)$, con due regimi viene definita da Hamilton (1983) come segue:

$$X_t = \begin{cases} \alpha_1 + \sum_{i=1}^p \phi_{1,i}X_{t-i} + a_{1,t}, & s_t = 1 \\ \alpha_2 + \sum_{i=1}^p \phi_{2,i}X_{t-i} + a_{2,t}, & s_t = 2 \end{cases} \quad (2.7)$$

Dove $a_{i,t}$ sono variabili *i.i.d.* a media 0 e varianza σ_i^2 e s_t è una variabile di stato non osservabile che in questo caso può assumere valori 1 o 2, inoltre il numero di regimi, r , può essere maggiore di due, $r > 2$. Dalla struttura del modello (2.7) si può osservare che esso risulta composto da due modelli $AR(p)$. L'interessante caratteristica dei modelli Markov Switching è la presenza di due strutture dinamiche differenti che diventano operative a seconda del valore che assume s_t .

Nello specifico si assume che la variabile di stato s_t segua la catena di primo ordine di Markov con la seguente matrice di transizione:

$$P = \begin{bmatrix} P(s_t = 1|s_{t-1} = 1) & P(s_t = 2|s_{t-1} = 1) \\ P(s_t = 1|s_{t-1} = 2) & P(s_t = 2|s_{t-1} = 2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

Dove p_{ij} ($i, j = 1, 2$) denota la probabilità di transizione allo stato $s_t = j$ dato lo stato $s_{t-1} = i$. Le probabilità di transizione devono soddisfare la seguente equazione: $p_{11} + p_{12} = p_{21} + p_{22} = 1$. Valori piccoli di p_{ij} indicano che il modello tende a rimanere più a lungo nello stato i con una durata pari a $1/p_{ij}$.

La struttura dei modelli $MS(p)$ risulta molto simile a quella dei *SETAR* (2.4). Tuttavia vi è una differenza significativa tra i due modelli: nei modelli *SETAR* il cambiamento di regime avviene tramite uno schema deterministico una volta che X_{t-d} viene determinato, nei modelli $MS(p)$, al contrario, la variazione di regime è controllata dalla catena di Markov che è un meccanismo casuale. Questa divergenza tra i due modelli risulta avere importanti ripercussioni sulle previsioni.

I modelli di Markov Switching sono particolarmente utilizzati per descrivere fenomeni economici e finanziari. Alcuni svantaggi dei modelli $MS(p)$ sono dovuti in primo luogo alla difficile interpretazione che si ha di essi a causa della natura della variabile non osservabile s_t e, infine, alla difficoltà che si presenta nello stimare i parametri del modello.

2.2.4 Modelli a memoria lunga

I modelli $ARIMA(p, d, q)$ *Frazionari*, denotati come $ARFIMA(p, d, q)$, sono stati introdotti indipendentemente da Hosking (1981) e Granger e Joyeux (1980) come una generalizzazione degli usuali modelli $ARMA(p, d, q)$. Volendo sottolineare il collegamento tra i processi $ARMA(p, q)$ e $ARFIMA(p, d, q)$, si può definire un processo $ARMA(p, q)$ come un processo che soddisfa la

seguinte equazione:

$$\Phi(B)X_t = \Theta(B)\epsilon_t \quad (2.9)$$

dove $\epsilon_t \sim WN(0, \sigma^2)$, $\Phi(B)$ e $\Theta(B)$ sono polinomi di grado rispettivamente p e q . Una delle principali proprietà di un processo $ARMA(p, q)$ è la stazionarietà. Tuttavia, in pratica si verifica molto frequentemente che numerose serie siano non stazionarie. In questi casi, quando le serie osservate sono non stazionarie in media, occorre differenziarle per renderle stazionarie. Sia Y_t è d -esima differenza di X_t tale che $Y_t = (1 - B)^d X_t$, con $d \in \mathbb{N}$. Se Y_t è un processo $ARMA(p, q)$, diremo che X_t è un processo integrato di ordine d e lo denoteremo come $ARIMA(p, d, q)$ dove d è il parametro di integrazione o di differenziazione. L'equazione di un modello $ARIMA(p, d, q)$ viene così definita:

$$\Phi(B)(1 - B)^d X_t = \Theta(B)\epsilon_t \quad (2.10)$$

Un processo $ARMA(p, q)$ è un processo $ARIMA(p, 0, q)$. Se il parametro $d \geq 1$, allora la serie originaria X_t non è stazionaria.

I modelli $ARFIMA(p, d, q)$ sono delle generalizzazioni dei modelli $ARMA(p, q)$ poichè in essi il parametro di differenziazione d può assumere qualsiasi valore reale. Pertanto è possibile generalizzare la (2.10) nel senso seguente. Dapprima se d è intero allora:

$$(1 - B)^d = \sum_{k=0}^d \binom{d}{k} (-1)^k B^k$$

dove il coefficiente binomiale è definito come: $\binom{d}{k} = d! / (d - k)! k! = \Gamma(d + 1) / \Gamma(k + 1) \Gamma(d - k + 1)$ e dove $\Gamma(\cdot)$ è la funzione Gamma. Dal momento che la funzione Gamma è estesa per tutti i valori reali, la definizione di coefficiente binomiale può essere estesa a $d \in \mathbb{R}$ come:

$$(1 - B)^d = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{d}{k} (-1)^k B^k = \sum_{k=0}^{\infty} \pi_k B^k$$

dove $\pi_k = \Gamma(k - d) / \Gamma(k + 1) \Gamma(-d) = \prod_{0 < j \leq k} j - 1 - d/j$ con $j = 1, 2, \dots$. I processi $ARFIMA(p, d, q)$ possono quindi essere definiti nel seguente modo:

Definizione 2.2. $X = (X_t, t \in Z)$ è un processo $ARFIMA(p, d, q)$ con $d \in (-1/2, 1/2)$ se è stazionario e se soddisfa l'equazione alle differenze:

$$\Phi(B)\Delta^d X_t = \Theta(B)\epsilon_t \quad (2.11)$$

dove $\epsilon \sim WN(0, \sigma^2)$, $\Phi(\cdot)$ e $\Theta(\cdot)$ sono polinomi di grado rispettivamente p e q .⁴

Quando $d \in (0, 1/2)$ il processo $ARFIMA(p, d, q)$ è un processo stazionario con memoria lunga. Se $d = 0$ si ha un $ARMA(p, q)$. Se $d \in (-1/2, 0)$ il processo $ARFIMA(p, d, q)$ è un processo stazionario con memoria intermedia o dipendenza negativa. I modelli $ARFIMA$ vengono utilizzati per descrivere fenomeni che presentano una struttura di dipendenza che persiste nel tempo. Sebbene i modelli $ARFIMA$ sono lineari, spesso vengono considerati non lineari poichè presentano la caratteristica di cambiare in modo repentino le proprie stime e previsioni.

2.3 Procedure per la verifica della (non)linearità

Negli ultimi anni la letteratura si è interessata allo studio di metodi statistici utili per verificare la caratteristica di linearità e del suo opposto (non linearità) in una serie storica. In questa sede ci si vuole soffermare sull'analisi di alcuni tra i vari test statistici utilizzati per verificare tale proprietà che presentano come ipotesi alternativa un caso non specifico di non linearità. Nello specifico essi vedono contrapposte le seguenti due alternative:

- l'ipotesi nulla, H_0 , dove si assume che un modello lineare possa descrivere in modo adeguato la serie storica che si sta analizzando ipotizzando perciò presenza di linearità nel processo;
- l'ipotesi alternativa, H_1 , che rappresenta l'ipotesi nulla negata, quindi indica presenza di non linearità.

⁴Bisaglia L. (1998), "Processi a memoria lunga: problemi di stima, identificazione e previsione"

2.3.1 Il test di McLeod e Li (1983)

Il test proposto da McLeod e Li (1983) è un test utilizzato per verificare la caratteristica di non linearità presente in una serie storica. Nello specifico questo test presenta un sistema di verifica d'ipotesi così definito: l'ipotesi nulla, H_0 , nella quale si assume che il vero processo generatore dei dati possa essere rappresentato da un modello $ARMA(p, q)$ e l'ipotesi alternativa, H_1 , che rappresenta l'ipotesi nulla negata. La statistica test che viene utilizzata è così definita:

$$Q(m) = n(n+2) \sum_{i=1}^m \frac{\hat{\rho}_i^2(a_i^2)}{n-i} \quad (2.12)$$

dove n è la numerosità campionaria, m indica il numero di autocorrelazioni prese in considerazione (solitamente m è un numero attorno al 20), a_t rappresenta i residui della serie e $\hat{\rho}_i^2(a_i^2)$ indica l'ACF al lag i -esimo dei residui al quadrato, a_i^2 . Sotto H_0 la statistica test assume la seguente distribuzione:

$$Q(m) \rightarrow \chi_{m-p-q}^2 \quad (2.13)$$

dove $m - p - q$ sono i gradi di libertà della distribuzione Chi-quadrato. Nel dettaglio, questo test nella prima fase dell'analisi adatta alle serie che si sta considerando un modello $ARMA(p, q)$ mediante il quale si ottengono i residui al quadrato e la loro funzione di autocorrelazione⁵. In seguito viene applicata la statistica di Ljung-Box al quadrato dei residui per verificare l'adeguatezza del modello lineare che si è adattato alla serie e conseguentemente anche per verificare la presenza di linearità.

⁵Il motivo per cui si utilizza il quadrato dei residui è stato chiarito da Granger e Anderson (1978) i quali hanno dimostrato che per un processo X_t che risulta essere normale e quindi lineare vale la seguente uguaglianza:

$$\rho_k(X_t^2) = (\rho_k(X_t))^2$$

se tale uguaglianza non viene soddisfatta allora il processo è non lineare.

2.3.2 Il test BDS

Il test BDS, descritto da Brock, Dechert, Scheinkman e LeBaron (1996), costituisce uno dei test non parametrici maggiormente utilizzati. Questo test è stato inizialmente proposto per verificare la caratteristica di indipendenza ed identica distribuzione (*i.i.d.*), tuttavia è stato dimostrato la capacità che possiede nel discriminare anche la proprietà di non linearità presente nella serie (Brock, 1991). La statistica test che viene utilizzata è così definita:

$$V_{m\epsilon} = \sqrt{T} \frac{C_{m,T(\epsilon)} - C_{1,T(\epsilon)}}{s_{m,T}} \quad (2.14)$$

Questa statistica test sotto H_0 si distribuisce approssimativamente come una $N(0,1)$. Nella (2.14), $C_{m,T(\epsilon)}$ rappresenta l'integrale di correlazione che misura il numero delle volte in cui uno schema temporale si ripete nei dati. Nello specifico sia X_t una serie storica con $t = 1, 2, \dots, n$ e sia $X_t^m = (x_t, x_{t-1}, \dots, x_{t-m+1})$, l'integrale di correlazione è così definito:

$$C_{m,T(\epsilon)} = \sum_{t < s} I_{\epsilon}(X_t^m, X_s^m) \left\{ \frac{2}{T_m(T_m - 1)} \right\} \quad (2.15)$$

dove $T_m = T - (m - 1)$ e $I_{X_t^m, X_s^m}$ è una funzione indicatrice che assume il valore 1 se $\sup \|X_t^m - X_s^m\| < \epsilon$ e 0 altrimenti. In altre parole l'integrale di correlazione stima la probabilità che due punti qualsiasi m -dimensionali siano a una distanza pari a ϵ ovvero:

$$P(|X_t - X_s| < \epsilon, |X_{t-1} - X_{s-1}| < \epsilon, \dots, |X_{t-m+1} - X_{s-m+1}| < \epsilon) \quad (2.16)$$

Nel caso in cui le variabili fossero indipendenti ed identicamente distribuite la (2.16) assume la seguente forma:

$$C_{1,T(\epsilon)} = P(|X_t - X_s| < \epsilon)^m \quad (2.17)$$

2.3.3 Il test RESET di Ramsey (1969)

Il test RESET ideato da Ramsey (1969) è un test utilizzato per verificare la proprietà di non linearità presente in una serie storica. La statistica test che

viene utilizzata è così definita:

$$F = \frac{(SSR_0 - SSR_1)/g}{SSR_1/(n - p - g)} \quad (2.18)$$

dove $g = s + p + 1$, SSR_0 e SSR_1 verranno nel seguito definiti. Sotto l'ipotesi nulla la (2.18) si distribuisce come una $F_{g, n-p-g}$. Questa statistica test analizza la correlazione presente nei residui che sono stati ottenuti adattando un modello lineare a una serie storica e qualora fosse presente una forte correlazione tra essi allora la serie viene definita non lineare.

Nello specifico si adatta inizialmente alla serie storica che si sta analizzando un modello lineare come ad esempio un $AR(p)$:

$$X_t = \phi_0 + \phi_1 X_{t-1} + \dots + \phi_p X_{t-p} + a_t \quad (2.19)$$

Da questo modello si calcolano le stime dei parametri ϕ_i ($i = 1, \dots, p$), i residui $\hat{a}_t = X_t - \hat{X}_t$ e la somma dei residui al quadrato:

$$SSR_0 = \sum_{i=p+1}^n \hat{a}_t^2 \quad (2.20)$$

dove n indica la numerosità del campione. In seguito si considera la regressione lineare:

$$\hat{a}_t = X'_{t-1} \mathbf{a} + M'_{t-1} \mathbf{b} + v_t \quad (2.21)$$

dove $X_{t-1} = (1, X_{t-1}, \dots, X_{t-p})$ e $M_{t-1} = (\hat{X}_t^2, \dots, \hat{X}_t^{s+1})$ per $s > 1$ con v_t che viene così ricavato:

$$\hat{v}_t = \hat{a}_t - X'_{t-1} \hat{\mathbf{a}} - M'_{t-1} \hat{\mathbf{b}} \quad (2.22)$$

Se la serie è lineare allora \mathbf{a} e \mathbf{b} della (2.21) assumono valore nullo. Infine si procede nel calcolare la somma dei quadrati dei residui nel seguente modo:

$$SSR_1 = \sum_{i=p+1}^n \hat{v}_t^2 \quad (2.23)$$

2.3.4 Il test di Keenan (1985) e il test di Tsay (1986)

Keenan (1985) propone un test per la non linearità basato sul test RESET di Ramsey (1969). Nello specifico Keenan assume che la serie X_t possa essere rappresentata come segue:

$$X_t = \mu + \sum_{u=-\infty}^{\infty} \sum_{v=-\infty}^{\infty} \theta_u a_{t-u} + \sum_{u=-\infty}^{\infty} \sum_{v=-\infty}^{\infty} \theta_{uv} a_{t-u} a_{t-v} \quad (2.24)$$

Se $\sum_{u=-\infty}^{\infty} \sum_{v=-\infty}^{\infty} \theta_{uv} a_{t-u} a_{t-v}$ assume valore nullo allora la serie considerata è lineare. Conseguentemente a quanto detto l'ipotesi nulla per questo test sarà così definita: $H_0 : \sum_{u=-\infty}^{\infty} \sum_{v=-\infty}^{\infty} \theta_{uv} a_{t-u} a_{t-v} = 0$

Il test di Keenan segue gli stessi passaggi del test di Ramsey (1969) con qualche modifica:

- inizialmente si adattata alla serie storica un modello lineare e si calcola \hat{X}_t , i residui \hat{a}_t e la somma del quadrato dei residui SSR ;
- in seguito si ottiene \hat{X}_t^2 su $(1, X_{t-1}, \dots, X_{t-p})$ e da essa si ottengono i residui $\hat{\zeta}_t$;
- infine si calcola la seguente quantità:

$$\hat{\eta}_t = \frac{\sum_{t=p+1}^n \hat{a}_t \hat{\zeta}_t}{\sum_{t=p+1}^n \hat{\zeta}_t^2} \quad (2.25)$$

La statistica test che viene utilizzata da Keenan è così definita:

$$\hat{F} = \frac{(n - 2p - 2)\hat{\eta}^2}{(SSR - \hat{\eta}^2)} \quad (2.26)$$

La statistica test sotto l'ipotesi nulla e sotto l'assunzione che a_t sono Gaussiani (*i.i.d.*) si distribuisce come una $F_{1, n-2p-2}$.

Tsay (1986) ha proposto invece un test di non linearità modificando il test di Keenan (1985) focalizzandosi sulla dipendenza quadratica delle osservazioni. In particolare, Tsay sostituisce l'utilizzo di \hat{X}_t^2 presente nel test di Keenan con il prodotto $X_{t-i}X_{t-j}$ con $i = 1, 2, \dots, p$. La corrispondente statistica test F si distribuisce asintoticamente sotto l'ipotesi nulla come una $F_{m, n-m-p-1}$ dove $m = p(p-1)/2$.

Capitolo 3

Esperimento Monte Carlo

In questo capitolo viene illustrato un esperimento Monte Carlo realizzato con il software R. L'obiettivo della seguente simulazione è quello di confrontare la potenza dei due test: Ramsey-Rothman (1996) e il BDS utilizzati rispettivamente per verificare la presenza di reversibilità e (non)linearità in una serie storica. Nel dettaglio si vuole valutare la capacità che possiede un test per la reversibilità nel discriminare in modo soddisfacente un eventuale presenza di non linearità in una serie storica.

3.1 Descrizione dell'esperimento Monte Carlo

Sebbene la presenza di irreversibilità in un processo stocastico non implichi necessariamente non linearità, sono rari i processi non lineari che risultano anche reversibili, questi ultimi costituiscono piuttosto delle eccezioni; indicativamente si può dunque affermare che un processo non lineare possiede anche la caratteristica di irreversibilità. Conseguentemente a quanto detto risulta ragionevole confrontare un test per la reversibilità con un test per la (non)linearità sotto le medesime ipotesi: l'ipotesi nulla nella quale si assume che il processo generatore dei dati (*PGD*) sia lineare e l'ipotesi alternativa nella quale si assume la non linearità del *PGD*. Sono stati presi

in considerazione in questa simulazione il test per la reversibilità di Ramsey-Rothman (1996), RR, e il BDS test per la (non)linearità. Quest'ultimo test è stato scelto poichè risulta essere uno tra i più potenti test per la verifica della (non)linearità e poichè possiede come ipotesi alternativa un caso non specifico di non linearità.

Nel dettaglio, il numero di simulazioni effettuate sono pari a $s = 1000$, le numerosità delle serie prese in esame sono $T = 100, 250, 500, 1000$, il livello nominale considerato è $\alpha = 0.05$. Nel test per la reversibilità di Ramsey-Rothman (1996), sono stati presi in considerazione i $lag = k = 1, 2, 3, 4, 5$; mentre nel test BDS per la (non)linearità sono stati valutati i casi in cui $m = 2, 3$.

In particolare nel test RR⁶ una stima di $\hat{\gamma}_{2,1}(k)$ è stata calcolata direttamente dalle serie simulate. Nei casi in cui il *PGD* presentava una correlazione seriale, una stima della $Var(\hat{\gamma}_{2,1}(k))$ è stata calcolata attraverso una simulazione Monte Carlo: in primo luogo si è adattato ai dati un modello di tipo ARMA selezionato con il criterio di AIC e da esso è stata ottenuta una stima della varianza delle innovazioni, infine si è simulato per un numero fissato di volte pari a $N = 500$, delle serie che possiedono coefficienti con valori pari a quelli stimati al punto precedente e innovazioni Gaussiane di media zero e varianza che coincide con quella stimata al punto precedente. Operando in questo modo si ottengono N repliche di $\hat{\gamma}_{2,1}(k)$ calcolate a partire dalle N repliche delle serie simulate e la $Var(\hat{\gamma}_{2,1}(k))$ è stata ricavata a partire dagli N valori replicati di $\hat{\gamma}_{2,1}(k)$. Nei casi in cui il *PGD* era formato da una successione di variabili *i.id.* allora una stima della $Var(\hat{\gamma}_{2,1}(k))$ è stata calcolata a partire dalla formula descritta nel *Teorema 1.3 (Ramsey, Rothman, 1996)*.⁷

⁶Si ricorda che la statistica test nel test RR è così definita: $\hat{\gamma}_{2,1}(k)/Var(\hat{\gamma}_{2,1}(k))^{1/2}$.

⁷Si ricorda che la $Var(\hat{\gamma}_{2,1}(k))$ in questo caso viene stimata nel seguente modo:
 $Var(\hat{\gamma}_{2,1}(k)) = 2(\mu_4\mu_2 - \mu_3^2)/(T - k) - 2\mu_2^3(T - 2k)/(T - k)^2$.

I due test sono stati confrontati tramite un esperimento Monte Carlo e considerando le seguenti due situazioni:

- sotto l'ipotesi H_0 , dove il PGD considerato è di tipo lineare;
- sotto l'ipotesi H_1 dove il PGD considerato è di tipo non lineare.

Per i due test, attraverso le s simulazioni, si sono ricavate le statistiche test e in base al tipo di PGD considerato si è calcolata la percentuale di volte in cui il test rigettava l'ipotesi nulla quando il PGD era di tipo lineare (livello empirico del test). Allo stesso modo, per entrambi i test, si è calcolata la potenza empirica del test, ovvero la percentuale di volte in cui il test rigetta l'ipotesi nulla quando il PGD è di tipo non lineare. Un test viene considerato "soddisfacente" se la percentuale di volte in cui rigetta l'ipotesi nulla quando essa è vera (livello empirico) è vicina al livello nominale fissato ($\alpha = 0.05$) e se la potenza empirica del test si avvicina a 1 all'aumentare della numerosità campionaria T .

Qui di seguito si riportano i risultati dell'esperimento Monte Carlo condotto.

3.2 Risultati dell'esperimento Monte Carlo

Risultati sotto l'ipotesi nulla di linearità

Nella prima fase dell'analisi si è considerato, per entrambi i test, il caso in cui il PGD fosse stato generato sotto l'ipotesi nulla di linearità. In particolare nello studio si sono presi in considerazione i seguenti PGD lineari le cui innovazioni sono distribuite secondo una $N(0,1)$

- WN ;
- $AR(1)$ dove $\phi = 0.5, -0.5, 0.8, -0.8$;
- $ARMA(1,1)$ dove $\phi = 0.8$ e $\theta = 0.4$

Come si può notare dai risultati ottenuti e riportati nelle Tabelle 3.1-3.3, il test RR per la reversibilità possiede, per tutti i processi lineari considerati, una bassa percentuale di rifiuti dell'ipotesi nulla, anche quando la numerosità campionaria è ridotta (a partire da $T = 100$), dimostrando in questo modo una buona capacità nel discriminare l'ipotesi di linearità. Il test BDS invece, possiede per tutti i *PGD* lineari considerati un elevato livello empirico quando la numerosità campionaria è bassa (circa pari a 0.15). Tuttavia a partire da $T = 500$, il test BDS tende a riconoscere l'ipotesi di linearità in maniera corretta. In quest'ultimo caso infatti la percentuale di rifiuti dell'ipotesi nulla si avvicina al livello nominale fissato ($\alpha = 0.05$). Pertanto si può concludere che il test BDS per discriminare in maniera adeguata l'ipotesi di linearità, a differenza del test RR, ha bisogno di serie con una numerosità piuttosto elevata.

Risultati sotto l'ipotesi alternativa di non linearità

Nella seconda fase dell'analisi si è considerato, per entrambi i test, il caso in cui il *PGD* fosse stato generato dall'ipotesi alternativa e quindi sotto l'ipotesi di non linearità. In particolare nello studio si sono presi in considerazione i seguenti *PGD* non lineari le cui innovazioni sono distribuite secondo una $N(0,1)$, $a_t \sim N(0,1)$

Processi Bilineari

$$BL(1,0,1,1) \quad X_t = 0.5X_{t-1} + 0.8X_{t-1}a_{t-1} + a_t$$

$$BL(0,0,1,1) \quad X_t = 0.8X_{t-1}a_{t-1} + a_t$$

$$BL(0,0,2,1) \quad X_t = 0.8X_{t-1}a_{t-1} + 0.5X_{t-2}a_{t-1} + a_t$$

Processi TAR

$$TAR(1,1) \text{ , dove}$$

$$X_t = \begin{cases} 2 + 0.5X_{t-1} + a_t & X_{t-1} \leq 1 \\ 0.5 - 0.4X_{t-1} + a_t & X_{t-1} > 1 \end{cases}$$

$$1\text{-TAR } X_t = \begin{cases} -0.5X_{t-1} + a_t & X_{t-1} \leq 1 \\ 0.4X_{t-1} + a_t & X_{t-1} > 1 \end{cases}$$

$$2\text{-TAR } X_t = \begin{cases} 0.5X_{t-1} + a_t & X_{t-1} \leq 1 \\ -0.4X_{t-1} + a_t & X_{t-1} > 1 \end{cases}$$

$$X_t = \begin{cases} 1 - 0.5X_{t-1} + a_t & X_{t-1} \leq 1 \\ 1 + a_t & X_{t-1} > 1 \end{cases}$$

TAR(2,2), dove

$$X_t = \begin{cases} -0.8X_{t-1} + 0.09X_{t-2} + a_{1,t} & X_{t-1} \leq 1 \\ 0.7X_{t-1} - 0.3X_{t-2} + a_{2,t} & X_{t-1} > 1 \end{cases}$$

con $a_{i,t} \sim N(0, \sigma_i^2)$

Processi Markov Switching MS(1), dove

$$X_t = \begin{cases} 2 + 0.5X_{t-1} + a_t & s_t = 1 \\ 1 - 0.4X_{t-1} + a_t & s_t = 2 \end{cases}$$

con probabilità di transizione $p=q=0.5, 0.9$ e dove $q = 1 - p$.

Processo non lineare

$$X_t = 0.4X_{t-1} + \tanh(X_{t-1}) + a_t$$

Come si può osservare dai risultati ottenuti e riportati nelle Tabelle 3.4-3.10, sia il test BDS che il test RR possiedono in generale una buona potenza per la maggior parte dei processi considerati. Nel dettaglio, nel caso in cui il *PGD* è di tipo Bilineare, i risultati riportati nelle Tabelle 3.4-3.6 suggeriscono che entrambi i test, per tutti i processi *BL*, considerati riescono a discriminare

l'ipotesi di non linearità già a una bassa numerosità campionaria, avendo infatti una potenza molto elevata a partire da $T = 100$.

Nel caso in cui il *PGD* considerato è di tipo *TAR*, come si può notare dai risultati riportati nelle Tabelle 3.7-3.8, sia il test BDS che il test RR possiedono nella maggior parte dei *PGD* considerati una elevata potenza a partire da una numerosità campionaria pari a $T = 500$. In particolare, in alcuni casi si può notare che il test RR presenta una potenza empirica più elevata rispetto al test BDS quando la numerosità campionaria è bassa (si veda Tabella 3.7 quando il *PGD* è di tipo 1-*TAR* o *TAR*(1,1) *con costante*). I risultati ottenuti per i processi di tipo *TAR* sono in linea con quelli ottenuti da Rothman (1992). L'autore in quella sede aveva confrontato il test BDS e il test RR calcolando, per gli stessi processi qui considerati, 1-*TAR* e 2-*TAR*, la potenza empirica attraverso delle simulazioni Monte Carlo, dimostrando la buona capacità che possiede il test RR nel discriminare l'ipotesi di non linearità per questi processi. Ciò non avviene nel caso in cui il *PGD* è un *TAR*(1,1) *con White Noise*, cioè dove uno dei due regimi del processo è un *WN*. Come si può notare dalla Tabella 3.7, infatti, entrambi i test non riescono a discriminare l'ipotesi di non linearità in modo corretto, nei due test, infatti, la potenza tende a crescere molto lentamente all'aumentare della numerosità campionaria. L'incapacità da parte dei due test di distinguere la presenza di non linearità può essere dovuta alla presenza di un White Noise con costante in uno dei due regimi del *PGD*.

Nel caso in cui il *PGD* è di tipo Markov Switching (si veda Tabella 3.9), quando le probabilità di transizione sono pari a $p = q = 0.5$, il test BDS possiede una potenza empirica molto elevata a partire da una bassa numerosità campionaria ($T = 100$); la stessa caratteristica non si riscontra quando le probabilità di transizione sono pari a $p = q = 0.9$, in questo caso infatti il test BDS non riesce a discriminare l'ipotesi di non linearità correttamente. Per quanto riguarda il test RR, esso per entrambi i processi *MS*(1) considerati

possiede una potenza empirica discreta (circa 0.70) quando la numerosità campionaria è elevata ($T = 1000$) ciò significa che il test RR ha bisogno di serie molto lunghe per discriminare in maniera corretta l'ipotesi di non linearità per questi tipi di processi considerati.

Nel caso in cui il *PGD* non lineare è così definito: $X_t = 0.4X_{t-1} + \tanh(X_{t-1}) + a_t$, come si può osservare dai risultati riportati nella Tabella 3.10, il test BDS non riesce a discriminare per nessuna numerosità campionaria presa in considerazione l'ipotesi di non linearità mentre il test RR possiede quando la numerosità campionaria è molto alta una potenza empirica modesta pari circa a 0.40 ciò significa che la potenza per il test RR tende ad aumentare lentamente all'aumentare di T .

Qui di seguito si riportano le Tabelle contenenti i risultati ottenuti dalla simulazione Monte Carlo.

3.3 Tabelle

	PGD: <i>WN</i>			
	$T=100$	$T=250$	$T=500$	$T=1000$
BDS test, $m=2$	14.2	7.6	6.1	5.4
BDS test, $m=3$	15.7	7.7	6	5.5
RR test, $k=1$	6.1	4.1	4.9	5.5
RR test, $k=2$	5	5.2	5.2	5.8
RR test, $k=3$	5.2	4.7	4.6	4.3
RR test, $k=4$	5.3	3.9	6.1	6.2
RR test, $k=5$	4.6	4.4	4.9	5.2

Tabella 3.1: *PGD: WN*. Percentuali di rifiuto sotto H_0 (livello nominale $\alpha = 0.05$).

	$\phi = 0.5$			
	$T=100$	$T=250$	$T=500$	$T=1000$
BDS test, $m=2$	14.2	8.3	6.7	5.3
BDS test, $m=3$	12.2	7.7	6.2	5.1
RR test, $k=1$	5.4	5.1	5	5.2
RR test, $k=2$	5.1	6.1	5.6	3.7
RR test, $k=3$	4.6	5.5	5.3	6.2
RR test, $k=4$	4.5	5.6	4.9	4.5
RR test, $k=5$	5.5	5.6	5.6	4.8
	$\phi = -0.5$			
	$T=100$	$T=250$	$T=500$	$T=1000$
BDS test, $m=2$	14.3	7.8	6.3	5.5
BDS test, $m=3$	13	7.9	6.7	5.7
RR test, $k=1$	5.8	5.2	5.8	6.2
RR test, $k=2$	5.1	5.8	4.4	6.2
RR test, $k=3$	6.3	6.5	4.4	5
RR test, $k=4$	4.8	4.9	4.9	5
RR test, $k=5$	5.6	6.2	4.7	6
	$\phi = 0.8$			
	$T=100$	$T=250$	$T=500$	$T=1000$
BDS test, $m=2$	14	7.3	5.9	5.2
BDS test, $m=3$	12.8	7.6	6	5.7
RR test, $k=1$	5	4.1	3.8	4.6
RR test, $k=2$	5.2	4.8	5.4	5.5
RR test, $k=3$	4.9	4.7	5.4	5.3
RR test, $k=4$	6.2	4.1	4.9	4.9
RR test, $k=5$	6.4	5.5	5.8	4.3
	$\phi = -0.8$			
	$T=100$	$T=250$	$T=500$	$T=1000$
BDS test, $m=2$	13.8	7.1	5.8	5.7
BDS test, $m=3$	12.9	7.6	5.9	5.7
RR test, $k=1$	4.8	5.7	4.9	5.4
RR test, $k=2$	5.4	4.4	5	4.5
RR test, $k=3$	5	4.5	4.5	5
RR test, $k=4$	5	5.2	4.1	5.9
RR test, $k=5$	4.9	5	5.1	4.2

Tabella 3.2: PGD: AR(1). Percentuali di rifiuto sotto H_0 (livello nominale $\alpha = 0.05$).

	PGD: $ARMA(1,1)$ con $\theta = 0.4$ e $\phi = 0.8$			
	$T=100$	$T=250$	$T=500$	$T=1000$
BDS test, $m=2$	14.1	8.5	6.2	5.9
BDS test, $m=3$	13.4	7.6	6.4	6
RR test, $k=1$	6.5	6.1	6	5.9
RR test, $k=2$	5.1	5	5.2	5.2
RR test, $k=3$	5	5.5	4.6	5
RR test, $k=4$	5.2	5.7	4.4	4.9
RR test, $k=5$	4.8	4.7	5.3	4.9

Tabella 3.3: PGD: $ARMA(1,1)$. Percentuali di rifiuto sotto H_0 (livello nominale $\alpha = 0.05$).

	PGD: $BL(1,0,1,1)$			
	$T=100$	$T=250$	$T=500$	$T=1000$
BDS test, $m=2$	81.7	98.7	99.9	100
BDS test, $m=3$	75.8	97.4	99.8	100
RR test, $k=1$	78.1	94.2	97.4	99.3
RR test, $k=2$	59.3	85.2	92.9	97.5
RR test, $k=3$	41.9	68.6	85.6	93.8
RR test, $k=4$	31.4	56.2	72.8	86.9
RR test, $k=5$	29.4	49.3	60	76.1

Tabella 3.4: PGD: $BL(1,0,1,1)$. Potenza empirica del test.

	PGD: $BL(0, 0, 1, 1)$			
	$T=100$	$T=250$	$T=500$	$T=1000$
BDS test, $m=2$	87.5	97.5	100	100
BDS test, $m=3$	88	96	100	100
RR test, $k=1$	51.1	77.2	89.1	96.4
RR test, $k=2$	31.6	48	63	76.7
RR test, $k=3$	18.5	37	46.5	59.5
RR test, $k=4$	14.7	27.9	35.2	46.5
RR test, $k=5$	15	23.9	33.5	39.5

Tabella 3.5: PGD: $BL(0, 0, 1, 1)$. Potenza empirica del test.

	PGD: $BL(0, 0, 2, 1)$			
	$T=100$	$T=250$	$T=500$	$T=1000$
BDS test, $m=2$	89.7	99.9	100	100
BDS test, $m=3$	78.6	98.7	100	100
RR test, $k=1$	75.3	94.5	96.6	98.2
RR test, $k=2$	64.7	86	94	96.6
RR test, $k=3$	43.9	67.5	83.2	92.1
RR test, $k=4$	34.7	56.1	71.1	85.4
RR test, $k=5$	29.9	48.2	64	78.5

Tabella 3.6: PGD: $BL(0, 0, 2, 1)$. Potenza empirica del test.

PGD: $TAR(1,1)$ con costante	$T=100$	$T=250$	$T=500$	$T=1000$
BDS test, $m=2$	13.3	16.9	22.7	25.4
BDS test, $m=3$	21.3	33.2	53	84.9
RR test, $k=1$	56.4	89.7	98.1	100
RR test, $k=2$	11.6	31.6	46.3	68.7
RR test, $k=3$	10.8	16.6	24.6	28.7
RR test, $k=4$	9.1	8.9	10.8	19.1
RR test, $k=5$	7.8	10.5	10	11.5
PGD: 1- TAR	$T=100$	$T=250$	$T=500$	$T=1000$
BDS test, $m=2$	43.9	69	92.1	99.5
BDS test, $m=3$	38.8	63.4	87.4	99.1
RR test, $k=1$	63.2	94.7	99.4	100
RR test, $k=2$	10.7	13.5	24.8	39.8
RR test, $k=3$	9.1	15.7	13.3	14.3
RR test, $k=4$	9.7	11	17.3	20.6
RR test, $k=5$	8.5	8.6	11.9	13
PGD: 2- TAR	$T=100$	$T=250$	$T=500$	$T=1000$
BDS test, $m=2$	66.6	95	99.8	100
BDS test, $m=3$	58.3	91.1	99.6	99.9
RR test, $k=1$	44.7	76.37	94.8	99.8
RR test, $k=2$	13.2	20.4	31.5	50.5
RR test, $k=3$	10.9	12.8	13.9	14.67
RR test, $k=4$	10.2	12.3	13.6	9.7
RR test, $k=5$	11.2	12.3	13.7	11.5
PGD: $TAR(1,1)$ con WN	$T=100$	$T=250$	$T=500$	$T=1000$
BDS test, $m=2$	12.2	12.8	16.6	23.5
BDS test, $m=3$	12.7	12.8	15	19.6
RR test, $k=1$	7.2	11.7	14.1	25
RR test, $k=2$	6.5	7	8.6	9.6
RR test, $k=3$	6.7	7.7	7.2	9.6
RR test, $k=4$	5.7	5.7	7.3	7.5
RR test, $k=5$	6.8	8	8.4	7.1

Tabella 3.7: PGD: $TAR(1,1)$. Potenza empirica del test.

	PGD: $TAR(2, 2)$			
	$T=100$	$T=250$	$T=500$	$T=1000$
BDS test, $m=2$	26.8	30.5	40.9	55.8
BDS test, $m=3$	25.8	31	40	57.8
RR test, $k=1$	16.5	37.2	66.3	90.5
RR test, $k=2$	7.8	13	14.9	21.2
RR test, $k=3$	5.2	15.5	27.8	52.3
RR test, $k=4$	7.6	13.2	15	18
RR test, $k=5$	5.3	9.8	15.2	27.7

Tabella 3.8: PGD: $TAR(2, 2)$. Potenza empirica del test.

$p = q = 0.5$	PGD: $MS(1)$ con costante			
	$T=100$	$T=250$	$T=500$	$T=1000$
BDS test, $m=2$	90.3	98.7	100	100
BDS test, $m=3$	90.4	99	100	100
RR test, $k=1$	9.6	23.3	44.5	78.6
RR test, $k=2$	2.9	3.1	6.2	7.5
RR test, $k=3$	2.4	3.2	3	2.6
RR test, $k=4$	2.3	1.5	2.8	2.3
RR test, $k=5$	2	2	2.1	2.2
$p = q = 0.9$	PGD: $MS(1)$ con costante			
	$T=100$	$T=250$	$T=500$	$T=1000$
BDS test, $m=2$	11.2	9.6	11	17.3
BDS test, $m=3$	10.5	8.2	10	13.9
RR test, $k=1$	23.1	47.3	53	61.2
RR test, $k=2$	7.2	17.4	29.3	42.9
RR test, $k=3$	6	6.2	10.2	12.9
RR test, $k=4$	6.9	6.2	7.8	8.3
RR test, $k=5$	6.5	6.8	6.7	6.4

Tabella 3.9: PGD: $MS(1)$. Potenza empirica del test.

	<i>PGD: Processo non lineare</i>			
	<i>T=100</i>	<i>T=250</i>	<i>T=500</i>	<i>T=1000</i>
BDS test, $m=2$	13.1	8.5	7.5	8.2
BDS test, $m=3$	14.3	8.2	7.7	8.7
RR test, $k=1$	4.9	5.5	4.3	4.4
RR test, $k=2$	6.8	10.6	10.1	13
RR test, $k=3$	8.1	15.4	18.4	23
RR test, $k=4$	9.7	19.2	23.2	34
RR test, $k=5$	12.3	19.5	28.6	41.6

Tabella 3.10: *PGD: Processo non lineare. Potenza empirica del test.*

Conclusioni

In questa relazione si è voluto capire se un test per la reversibilità come quello di Ramsey-Rothman (1996) potesse essere utilizzato al fine di individuare in maniera adeguata la caratteristica di non linearità in una serie storica. A questo proposito si è condotta una simulazione Monte Carlo nella quale si sono confrontati in termini di potenza, il test RR per la reversibilità e il test BDS per la (non)linearità. Alla fine di questa analisi comparativa si può concludere, in base ai risultati ottenuti, che un test per la reversibilità sembrerebbe riuscire a discriminare correttamente la presenza di non linearità in una serie storica come un test per la (non)linearità. Ciò è stato dimostrato dall'elevata potenza che possiede il test RR per la maggior parte dei processi considerati in questa relazione in particolare per i *PGD* Bilineari e TAR. Conseguentemente a quanto detto, pur consapevole dei limiti di questa simulazione, si può concludere che il test di Ramsey-Rothman (1996) per la reversibilità potrebbe essere utilizzato come una valida alternativa per verificare la presenza di non linearità. Per completezza si potrebbe estendere questo lavoro considerando ulteriori *PGD*.

Bibliografia

- [1] ASTOLFI, R., GAMBA, M. e GIUIDETTI, E. (2015), "International evidence on business cycles asymmetries using the OECD composite leading indicators". *OECD Statistics Working Papers*, OECD Publishing, Paris.
- [2] BAI, J. e NG, S. (2005), "Tests for Skewness, Kurtosis, and Normality for Time Series Data". *Journal of Business Economic Statistics*, **23**, 46-60.
- [3] BEAUDRY, P. e KOOP, G. (1993), "Do recessions permanently change output?". *Journal of Monetary Economics*, **31**, 149-163.
- [4] BELAIRE-FRANCH, J. e CONTRERAS, D. (2004), "A power comparison among tests for time reversibility". *Economics Bulletin*, **3(23)**, 1-17.
- [5] BISAGLIA, L. (1998), "Processi a memoria lunga: problemi di stima, identificazione e previsione". Tesi di dottorato, Università degli Studi di Padova.
- [6] BISAGLIA, L. e GEROLIMETTO, M. (2014), "Testing for (non)linearity in economic time series: a Montecarlo comparison". *Journal of Methodological and Applied Statistics*, **16**, 5-32.

- [7] BISAGLIA, L. e GEROLIMETTO, M. (2018), "Reversibility and (non)linearity in time series". *Books of Short Papers, SIS 2018, Pearson, Palermo*.
- [8] CLEMENTS, M.P. e KROLZIG H-M. (1999), "Business Cycle Asymmetries: Characterisation and Testing based on Markov-Switching Autoregressions". *Journal of Business Economic Statistics*, **21**, 196-211.
- [9] CHEN, Y-T., CHOU, R.Y. e KUAN C-M. (2000), "Testing time reversibility without moment restrictions". *Journal of Econometrics*, **95**, 199-218.
- [10] DI FONZO, T. e LISI, F. (2005), "Serie storiche economiche. Analisi statistiche e applicazioni", Roma, Carocci editore.
- [11] PETER, G. (1999), "Nonlinear Time Series Modelling: An Introduction". *SSRN Eletronic Journal*, **13**.
- [12] RAMSEY, J.B. e ROTHMAN, P. (1996), "Time irreversibility and Business Cycle Asymmetry". *Journal of Money, Credit and Banking*, **28**, 1-21.
- [13] RAMSEY, J.B. e ROTHMAN, P. (1998), "Characterization of the Time Irreversibility of Economic Time Series: Estimators and Test Statistics". Working Papers (C.V. Starr Center for Applied Economics, New York University 1998).
- [14] ROTHMAN, P. e HINICH, M.J. (1998), "Frequency-domain test of time reversibility". *Macroeconomic Dynamics*, **2**, 72-88.
- [15] ROTHMAN, P., CHOU, R.Y. e KUAN C-M (2000), "Testing time reversibility without moment restrictions". *Journal of Econometrics*, **95**, 199-218.

- [16] SHARIFDOUST, M. e MAHMOODI,S. (2012), "On Time Reversibility of Linear Time Series". *Journal of Mathematical Extension*, **6**, 33-47.
- [17] SHELEF, A. e SCHECHTMAN, E. (2016), "A Gini-based time series analysis and test for reversibility". *Stat papers*, DOI: <https://doi.org/10.1007/s00362>.
- [18] SUBBA RAO, T. (1981), "On the Theory of Bilinear Time Series Models". *Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological)*, **43(2)**, 244-255.
- [19] TONG, H. e ZHANG,Z. (2005), "On time reversibility of multivariate linear processes.". *Statistica Sinica*, **15**, 495-504.
- [20] WEISS, G. (1975), "Time reversibility of linear stochastic processes". *Journal of Applied Probability*, **12**, 831-836.