UNIVERSITÀ DI PADOVA

DIPARTIMENTO DI MATEMATICA "TULLIO LEVI CIVITA"

Laurea Magistrale in Matematica

Algebre di pre-Lie

Relatore:

Prof. Alberto Facchini

Candidata:

Michela Cerqua

ANNO ACCADEMICO 2021/2022

16 dicembre 2022

Introduzione

Le algebre di pre-Lie sono una classe di algebre non associative che compaiono per la prima volta nel lavoro di Cayley [8] nel 1890, per il suo studio degli alberi con radice. Verranno poi riprese molti anni dopo da Vinberg [22] (1963) e Koszul [18] (1961): il primo le introduce nello studio dei coni convessi omogenei, mentre il secondo le inserisce nel contesto delle strutture affini di varietà sui gruppi di Lie. È infatti per via di queste pubblicazioni che le algebre in questione vengono chiamate anche "algebre di Vinberg"o, più raramente, "algebre di Koszul-Vinberg". Invece, la denominazione "algebre di pre-Lie" adottata in questa tesi viene introdotta da Gerstenhaber nel 1963 [14] nello studio sulla struttura di co-omologia negli anelli associativi.

Un'algebra A si dice di pre-Lie quando la moltiplicazione rispetta la seguente condizione:

$$(xy)z - x(yz) = (yx)z - y(xz) \tag{$*$}$$

Spesso viene adottata una definizione a questa equivalente, data in termini di morfismo di moltiplicazione a sinistra: se $\lambda\colon A \to \mathrm{End}(A)$ è definito da $x \longmapsto \lambda_x$, dove $\lambda_x(y) = xy$ è la moltiplicazione a sinistra, allora $(*)$ diventa

$$[\lambda_x, \lambda_y] = \lambda_{[x,y]}$$

dove $[-,-]$ è l'usuale commutatore. Chiaramente tutte le algebre associative rispettano questa proprietà e sono quindi esempi banali di algebre di pre-Lie. La condizione di pre-Lie $(*)$ è equivalente a chiedere che l'associatore $[x, y, z] = (xy)z - x(yz)$ sia un'applicazione trilineare simmetrica nello

scambio delle due variabili a sinistra e da qui nasce un'ulteriore denominazione di queste algebre, che vengono spesso chiamate appunto "simmetriche a sinistra". Si vede facilmente che, se invece di scambiare le variabili a sinistra, si scambiano quelle a destra, allora si ottiene una nuova algebra equivalente alla prima e in questo caso si parla di algebre "simmetriche a destra" (tra l'altro, la definizione originale di Gerstenhaber è data proprio in termini di simmetria destra).
È interessante studiare la relazione tra le algebre di pre-Lie e le algebre di Lie: infatti a ogni algebra di pre-Lie si può associare la rispettiva algebra di Lie sottogiacente, il cui prodotto di Lie è dato dal commutatore $[x, y] = xy - yx$. Si sa che nel caso delle algebre associative il commutatore definisce sempre un'algebra di Lie, quindi possiamo vedere le algebre di pre-Lie come una struttura più ampia in cui si verifica questo fatto.

Nel Capitolo 1 di questa tesi vengono presentati, oltre alle prime definizioni sulle algebre non associative, i risultati che riguardano la struttura intrinseca delle algebre di pre-Lie, spesso in termini di funtori e isomorfismi tra categorie. In particolare la terza sezione si concentra sulla definizione di modulo sopra un'algebra di pre-Lie: questa definizione non è di facile approccio, a differenza di quanto accade nel caso di algebre associative o di Lie, ed è strettamente legata all'algebra di Lie sottogiacente. La definizione che viene qui proposta coincide con quella di Nijenhuis in [20] e nasce dal tentativo di definire cosa sia un modulo in modo "naturale". Il Capitolo 2 è dedicato all'esposizione di quattro esempi di algebre di pre-Lie. Tra quelli che riportiamo il più famoso e importante è certamente l'algebra degli alberi con radice, che ha portato all'introduzione delle algebre di pre-Lie ed è analizzato principalmente in [7], [9] e [19]. Nel Capitolo 3 viene studiato l'insieme delle derivazioni su un'algebra di pre-Lie, in particolare vedremo quando ne fanno parte i morfismi di moltiplicazione a sinistra e a destra. I risultati di questo capitolo sono tratti dall'articolo [3] di Bai e Meng. Nel Capitolo 4 ricordiamo brevemente nella prima sezione le definizioni riguardanti le categorie semi-abeliane e i termini di Mal'tsev, mentre nella seconda sezione studiamo i commutatori di Huq [15] e Smith [21], verificando che coincidono nel caso delle algebre di pre-Lie: questo ci permetterà di utilizzare la nozione di commutatore per definire un reticolo moltiplicativo, come vedremo nella terza sezione. Il Capitolo 5 studia gli endomorfismi idempotenti di un'algebra di pre-Lie: grazie a questi saremo in grado di definire prodotti semi-diretti e bimoduli e se ne vedrà il rapporto con le algebre di pre-Lie unitali. Infine, nel Capitolo 6, presentiamo le algebre di anti-pre-Lie come sono state recentemente definite da Bai e Liu in [2], in particolare vedremo le analogie con le algebre di pre-Lie e osserveremo che anche queste ammettono un'algebra di Lie sottogiacente.

Indice

Capitolo 1

Algebre di pre-Lie

1.1 Nozioni preliminari sulle K-algebre

Sia K un anello commutativo con identità e sia M un K-modulo unitario su cui è definita un'ulteriore operazione K-bilineare, detta *moltiplicazione*, $M \times M \to M$, $(x, y) \mapsto xy$ (equivalentemente, un morfismo di K-moduli $M \otimes_K M \to M$). Diremo allora che M è una K*-algebra* (non necessariamente associativa).

Per ogni K-algebra M è possibile considerare l'applicazione $*\colon M \times M \to M$ definita da $(x, y) \mapsto x * y = yx$ ottenendo un'altra K-algebra M^{op}, detta la K-algebra *opposta* alla precedente.

Definizione 1.1.1. Sia N un K-sottomodulo di M chiuso rispetto alla moltiplicazione; ovviamente N eredita una struttura di algebra su K e si dice una *sottoalgebra* di M. Diremo che N è un *ideale* di M se vale $mn, nm \in N$ per ogni $m \in M$ e ogni $n \in N$, e in questo caso si può considerare il modulo quoziente M/N sul quale si definisce la moltiplicazione indotta da quella definita su M, generando una struttura di K-algebra. Diciamo quindi che M/N è l'*algebra quoziente* di M su N.

Proposizione 1.1.2. *Sia M una K-algebra. Allora c'è una corrispondenza biunivoca tra l'insieme degli ideali di M e l'insieme delle relazioni di equivalenza $\sim$ sull'insieme M compatibili con le operazioni di M, ossia tali che per* *ogni* $a, b, c, d \in M$ *e per ogni* $k \in K$*,* $a \sim b$ *e* $c \sim d$ *implicano* $a + c \sim b + d$*,* $ac \sim bd$ *e* $ka \sim kb$*.*

Dimostrazione. Sia I un ideale di M e definiamo, per ogni $a, b \in M$, la relazione $\sim_I$ ponendo $a \sim_I b$ se $a - b \in I$. Verifichiamo che $\sim_I$ è una relazione di equivalenza: $a - a = 0_M \in I$ quindi $a \sim_I a$; se $a \sim_I b$ allora $a - b \in I$ quindi $b - a = -1_M(a - b) \in I$; infine, se $a \sim_I b$ e $b \sim_I c$ allora $a - b, b - c \in I$ quindi $a - c = (a - b) + (b - c) \in I$.
Vediamo ora la compatibilità con le operazioni. Supponiamo che $a \sim_I b$ e $c \sim_I d$. Allora si ha $ac - bd = ac - bc + bc - bd = (a - b)c - b(c - d) \in I$ perché $a - b, c - d \in I$, quindi $ac \sim_I bd$. Per lo stesso motivo abbiamo $(a + c) - (b + d) = (a - b) + (c - d) \in I$, cioè $(a + c) \sim_I (b + d)$, e per $k \in K$ vale $ka - kb = k(a - b) \in I$ ovvero $ka \sim_I kb$.
Osserviamo poi che la classe $[0_M]_{\sim_I}$ coincide con l'ideale I, infatti $[0_M]_{\sim_I} = \{a \in M; a \sim_I 0_M\} = \{a \in M; a - 0_M \in I\} = I$.
Viceversa, sia $\sim$ una relazione di equivalenza sull'insieme M compatibile con le operazioni di M. La classe $[0_M]_\sim$ è chiusa per moltiplicazione: se $x, y \in [0_M]_\sim$ allora $x \sim 0_M$ e $y \sim 0_M$, e quindi, essendo $\sim$ compatibile con la moltiplicazione, abbiamo $xy \sim 0_M 0_M = 0_M$, cioè $xy \in [0_M]_\sim$. Inoltre, se $x \in [0_M]_\sim$ e $a \in M$, vale $x \sim 0_M$ e $a \sim a$ quindi $ax \sim a0_M = 0_M$, cioè $ax \in [0_M]_\sim$. Analogamente si verifica che $xa \in [0_M]_\sim$, quindi $[0_M]_\sim$ è un ideale di M. □

Definizione 1.1.3. Siano M_1 e M_2 due K-algebre e consideriamo un'applicazione $\varphi\colon M_1 \to M_2$. Diremo che φ è un *omomorfismo di K-algebre* se è K-lineare e verifica $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$ per ogni $x, y \in M_1$. Se invece un'applicazione $\psi\colon M_1 \to M_2$ è K-lineare e tale che $\psi(xy) = \psi(y)\psi(x)$ per ogni $x, y \in M_1$ allora diremo che ψ è un *antiomomorfismo di K-algebre.*
Si può osservare che il nucleo $\mathrm{Ker}(\varphi)$ è un ideale di M_1, mentre l'immagine $\varphi(M_1)$ è una sottoalgebra di M_2. Come conseguenza del passaggio al quoziente, φ definisce un isomorfismo dell'algebra $M_1/Ker(\varphi)$ sull'algebra $\varphi(M_1)$, e lo stesso vale per ψ.

Definizione 1.1.4. Sia $(M, \cdot)$ una K-algebra e sia D un'applicazione $M \to M$. Se D è K-lineare e vale $D(xy) = (Dx)y + x(Dy)$ per ogni $x, y \in M$, allora D si dice una *derivazione* di M.
Si può verificare che il nucleo di D è una sottoalgebra di M, e se D_1 e D_2 sono due derivazioni di M allora $[D_1, D_2] = D_1D_2 - D_2D_1$ è ancora una derivazione di M. Inoltre si dimostra facilmente che il gruppo additivo delle derivazioni di $(M, \cdot)$ con l'operazione $[-, -]$ è una K-algebra di Lie, denotata con $\mathrm{Der}(M, \cdot)$.

Definizione 1.1.5. Siano M_1 e M_2 due K-algebre. Consideriamo il prodotto diretto di K-moduli $M = M_1 \times M_2$ sul quale definiamo la moltiplicazione $(x_1, x_2)(y_1, y_2) = (x_1y_1, x_2y_2)$ per ogni $x_1, y_1 \in M_1$, $x_2, y_2 \in M_2$. Otteniamo in questo modo un'algebra detta l'*algebra prodotto diretto* di M_1 e M_2.

Abbiamo le due applicazioni canoniche $x_1 \mapsto (x_1, 0)$ e $x_2 \mapsto (0, x_2)$ rispettivamente da M_1 e M_2 in un ideale di M. Si può verificare che si tratta di isomorfismi, e permettono quindi di identificare M_1 e M_2 con degli ideali di M; in questo modo il K-modulo M è somma diretta di M_1 e M_2.
Viceversa, partendo da due ideali M_1 e M_2 di una K-algebra M, con M somma diretta di M_1 e M_2 come K-moduli, si ha $M_1M_2 \subseteq M_1 \cap M_2 = \{0\}$; quindi se $x_1, y_1 \in M_1$ e $x_2, y_2 \in M_2$ allora $(x_1 + x_2)(y_1 + y_2) = x_1y_1 + x_2y_2$, permettendo di identificare M con il prodotto tra algebre $M_1 \times M_2$.
In particolare, ogni ideale di M_1 è un ideale di M.

Il prodotto di due K-algebre si può generalizzare a prodotto di una famiglia qualsiasi di K-algebre.

Definizione 1.1.6 (Moduli su K-algebre associative)**.** Sia M una K-algebra. Consideriamo l'applicazione tra K-algebre $\lambda\colon M \to \mathrm{End}_K(M)$ definita da $x \mapsto \lambda_x$ per ogni $x \in M$, dove definiamo $\lambda_x(y) = xy$ per ogni $y \in M$. L'algebra $\mathrm{End}_K(M)$ è associativa, quindi se λ è un morfismo di K-algebre allora si ha $(xy)z = \lambda_{xy}(z) = (\lambda_x \circ \lambda_y)(z) = \lambda_x(\lambda_y(z)) = x(yz)$ per ogni $x, y, z \in M$, cioè M è associativa. Viceversa se M è associativa allora $(\lambda_x \circ \lambda_y)(z) = \lambda_x(\lambda_y(z)) = x(yz) = (xy)z = \lambda_{xy}(z)$ quindi in particolare $\lambda(x)\lambda(y) = \lambda_x \circ \lambda_y = \lambda_{xy} = \lambda(xy)$. Perciò λ è un morfismo di K-algebre se

e solo se M è associativa. In questo caso, cioè se M è K-algebra associativa, possiamo definire un M*-modulo sinistro* come un K-modulo A insieme a un morfismo di K-algebre $\lambda\colon M \to \mathrm{End}_K(A)$. Allo stesso modo chiamiamo M*-modulo destro* un K-modulo A con un antiomomorfismo di K-algebre $\lambda\colon M \to \mathrm{End}_K(A)$.
Ricordiamo inoltre che esiste un'altra definizione equivalente per moduli su algebre associative: invece di prendere il morfismo di K-algebre λ, si considera una mappa K-bilineare $*\colon M \times A \to A$ tale che $(mm') * a = m(m' * a)$ per ogni $m, m' \in M$ e ogni $a \in A$.

Date due K algebre M e M', un'applicazione $M \to M'$ è un antiomomorfismo se e solo se è un omomorfismo $M^{op} \to M'$. In altre parole, per una K-algebra associativa M, gli M-moduli destri coincidono con gli M^{op}-moduli sinistri, nel senso che esiste un isomorfismo canonico di categorie tra la categoria di tutti gli M-moduli destri e la categoria di tutti gli M^{op}-moduli sinistri.
In particolare, se M è commutativa, un'applicazione $M \to M'$ è un antiomomorfismo se e solo se è un omomorfismo $M \to M'$, quindi gli M-moduli destri coincidono con gli M-moduli sinistri.

Definizione 1.1.7 (K-algebre di Lie)**.** Una K-algebra M si dice K*-algebra di Lie* se la sua moltiplicazione, denotata $(x, y) \mapsto [x, y]$, verifica le seguenti identità per ogni $x, y, z \in M$:

1. $[x, x] = 0$
2. $[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0$ (*identità di Jacobi*).

La moltiplicazione $[-, -]$ si chiama *prodotto di Lie* ed è un'operazione binaria anticommutativa, ossia si ha che

3. $[x, y] = -[y, x]$

permettendo di riscrivere l'dentità di Jacobi come

4. $[[x, y], z] = [x, [y, z]] + [[x, z], y]$

Definizione 1.1.8 (Moduli su K-algebre di Lie)**.** Sia M una K-algebra, possiamo definire la K-algebra di Lie $\mathrm{Der}_K(M)$ delle derivazioni di M come il sottoinsieme di $\mathrm{End}_K(M)$ dato da tutte le derivazioni di M con moltiplicazione $[D_1, D_2] = D_1D_2 - D_2D_1$ per ogni $D_1, D_2 \in \mathrm{Der}_K(M)$.
Sia A un K-modulo e consideriamo $\mathrm{End}_K(A)$: questa è una K-algebra di Lie, denotata con $\mathfrak{gl}(A)$, rispetto all'operazione $[-,-]$ definita da $[f, g] = fg - gf$ per ogni $f, g \in \mathrm{End}_K(A)$.
Sia ora in particolare M una K-algebra di Lie. Allora esiste un omomorfismo canonico di K-algebre di Lie $ad\colon M \to \mathrm{Der}_K(M)$, con $ad_x\colon M \to M$ definito da $ad_x = [x, -]$, che ci permette di dare le seguenti definizioni: un *M-modulo sinistro* è un K-modulo A con un omomorfismo di K-algebre di Lie $\lambda\colon M \to \mathfrak{gl}(A)$, e un *$M$-modulo destro* è un K-modulo A con un antiomomorfismo di K-algebre di Lie $\lambda\colon M \to \mathfrak{gl}(A)$. Osserviamo però che ogni K-algebra di Lie M è isomorfa a M^{op} tramite l'applicazione $M \to M^{op}$, $x \mapsto -x$, ciò ci permette dunque di trascurare la distinzione tra M-moduli destri e sinistri, riferendoci ad essi semplicemente come "M-moduli".

Definizione 1.1.9. Sia M una K-algebra di Lie e siano A e A' due M-moduli, con $\lambda\colon M \to \mathfrak{gl}(A)$ e $\lambda'\colon M \to \mathfrak{gl}(A')$ i rispettivi omomorfismi che li definiscono. Un *morfismo di M-moduli* è un omomorfismo di K-moduli $\varphi\colon A \to A'$ tale che per ogni $m \in M$ commuti il seguente diagramma:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\varphi} & A' \\ {\scriptstyle\lambda_m}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle\lambda'_m} \\ A & \xrightarrow{\varphi} & A' \end{array}$$

1.2 Algebre di pre-Lie

Definizione 1.2.1. Data un'algebra M, l'*associatore* è l'applicazione K-trilineare $[-,-,-]\colon M \times M \times M \to M$ definita da $[x, y, z] = (xy)z - x(yz)$. Osserviamo che

$$a[x, y, z] + [a, x, y]z = a((xy)z - x(yz)) + ((ax)y - a(xy))z =$$

$$= a(xy)z - ax(yz) + (ax)yz - a(xy)z = -ax(yz) + (ax)yz$$

e che

$$[ax, y, z] - [a, xy, z] + [a, x, yz] =$$

$$= (axy)z - ax(yz) - (axy)z + a(xyz) + (ax)yz - a(xyz) =$$

$$= -ax(yz) + (ax)yz\ ,$$

quindi l'associatore soddisfa sempre l'identità

$$a[x, y, z] + [a, x, y]z = [ax, y, z] - [a, xy, z] + [a, x, yz]$$

per ogni $a, x, y, z \in M$.

Il *nucleo* G di M è l'insieme degli elementi $g \in M$ che "sono associativi" con ogni coppia di elementi $x, y \in M$, cioè $[g, x, y] = [x, g, y] = [x, y, g] = 0$. Il nucleo è una sottoalgebra associativa di M.

Definizione 1.2.2. Un'*algebra di pre-Lie* è una K-algebra $(A, \cdot)$ che soddisfa la relazione

$$(x \cdot y) \cdot z - x \cdot (y \cdot z) = (y \cdot x) \cdot z - y \cdot (x \cdot z) \tag{$*$}$$

per ogni $x, y, z \in A$. In altre parole, l'associatore $[x, y, z] = (x \cdot y) \cdot z - x \cdot (y \cdot z)$ è invariante per scambio delle variabili x e y.

Osservazione 1.2.1. Le algebre di pre-Lie vengono anche chiamate *algebre simmetriche a sinistra*, facendo riferimento al fatto che in $(*)$ le variabili scambiate sono appunto le prime due a sinistra. Si può però dare un'altra definizione scambiando questa volta le ultime due variabili, e dire che una K-algebra $(A, \cdot)$ è *simmetrica a destra* se per ogni $x, y, z \in A$ si ha

$$(x \cdot y) \cdot z - x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot z) \cdot y - x \cdot (z \cdot y)$$

ovvero l'associatore $[x, y, z] = (xy)z - x(yz)$ è invariante per scambio delle variabili y e z.

Possiamo quindi definire le categorie $\mathrm{PreL_s}(K)$ e $\mathrm{PreL_d}(K)$ i cui oggetti sono rispettivamente le K-algebre simmetriche a sinistra e le K-algebre simmetriche a destra, e i cui morfismi sono morfismi di K-algebre.

Proposizione 1.2.3. *Fissato un anello K con identità, le categorie* $\mathrm{PreL_s}(K)$ *e* $\mathrm{PreL_d}(K)$ *sono isomorfe.*

Dimostrazione. Verifichiamo innanzitutto che una K-algebra $(A, \cdot)$ è simmetrica a sinistra se e solo se la K-algebra opposta $(A^{op}, *)$ è simmetrica a destra, dove $x * y = y \cdot x$. Siano $x, y, z \in A$, allora per definizione si ha $(x \cdot y) \cdot z - x \cdot (y \cdot z) = (y \cdot x) \cdot z - y \cdot (x \cdot z)$ se e solo se $z * (y * x) - (z * y) * x = z * (x * y) - (z * x) * y$.
Possiamo quindi definire un funtore $F\colon \mathrm{PreL_s}(K) \to \mathrm{PreL_d}(K)$ che manda un'algebra simmetrica a sinistra di $\mathrm{PreL_s}(K)$ nella sua opposta, che è quindi simmetrica a destra, e che manda un morfismo $f\colon (A, \cdot_A) \to (B, \cdot_B)$ in $\mathrm{PreL_s}(K)$ nello stesso $f\colon (A, *_A) \to (B, *_B)$ in $\mathrm{PreL_d}(K)$. Così facendo, $F(f)$ è un morfismo di K-moduli perché f lo è, inoltre si ha $F(f)(x *_A y) = f(x *_A y) = f(y \cdot_A x) = f(y) \cdot_B f(x) = f(x) *_B f(y) = F(f)(x) *_B F(f)(y)$, cioè $F(f)$ è un morfismo di K-algebre. Si verifica poi immediatamente che F rispetta la regola di composizione tra morfismi e manda un morfismo identico 1_A nel morfismo identico $1_{A^{op}} = 1_{F(A)}$.
Analogamente si può verificare che è ben definito il funtore

$$G\colon \mathrm{PreL_d}(K) \to \mathrm{PreL_s}(K)$$

che manda una K-algebra nella sua opposta e un morfismo in se stesso.
I funtori F e G sono uno l'inverso dell'altro perché $F(G(f)) = F(f) = f$ e $F(G(A)) = F(A^{op}) = A^{op^{op}} = A$, quindi $F \circ G = I_{\mathrm{PreL_d}(K)}$, e similmente si verifica che $G \circ F = I_{\mathrm{PreL_s}(K)}$, cioè F e G sono isomorfismi di categorie. $\square$

Grazie a questo isomorfismo possiamo evitare di fare distinzione tra algebre simmetriche a sinistra o a destra, restringendo lo studio solo alle prime. Dunque in seguito, quando si parlerà di "algebre di pre-Lie" si farà riferimento esclusivamente alla relazione $(*)$, e indicheremo la categoria delle K-algebre di pre-Lie con PreL_K.

Ovviamente ogni algebra associativa è un'algebra di pre-Lie, dato che l'associatore si annulla identicamente.

Inoltre, data une K-algebra di pre-Lie $(A, \cdot)$, consideriamo l'usuale commutatore $[x, y] = x \cdot y - y \cdot x$:

$$[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] =$$

$$= x \cdot (y \cdot z - z \cdot y) - (y \cdot z - z \cdot y) \cdot x + y \cdot (z \cdot x - x \cdot z) +$$

$$-(z \cdot x - x \cdot z) \cdot y + z \cdot (x \cdot y - y \cdot x) - (x \cdot y - y \cdot x) \cdot z =$$

$$= x \cdot (y \cdot z) - x \cdot (z \cdot y) - (y \cdot z) \cdot x + (z \cdot y) \cdot x + y \cdot (z \cdot x) - y \cdot (x \cdot z) +$$

$$-(z \cdot x) \cdot y + (x \cdot z) \cdot y + z \cdot (x \cdot y) - z \cdot (y \cdot x) - (x \cdot y) \cdot z + (y \cdot x) \cdot z = 0$$

dove nell'ultima uguaglianza si usa la proprietà $(*)$. Il commutatore verifica anche $[x, x] = x \cdot x - x \cdot x = 0$, in altre parole $(A, [-, -])$ è una K-algebra di Lie.

Definizione 1.2.4. Sia $(A, \cdot)$ una K-algebra di pre-Lie e sia $[-, -]$ il commutatore relativo alla moltiplicazione $\cdot$. La K-algebra di Lie $(A, [-, -])$ si dice l'algebra di Lie *sottogiacente* a $(A, \cdot)$.

Osservazione 1.2.2. In generale, un'algebra $(A, \cdot)$ si dice *Lie-ammissibile* quando il commutatore $[x, y] = x \cdot y - y \cdot x$ definisce un'algebra di Lie $(A, [-, -])$. Le algebre associative sono un noto esempio di algebre Lie-ammissibili, quindi, per quanto appena visto, le algebre di pre-Lie sono una classe più ampia di algebre Lie-ammissibili che contiene le algebre associative.

Come abbiamo già visto in Definizione 1.1.6, data una K-algebra A, invece di utilizzare la moltiplicazione $\cdot \colon A \times A \to A$ possiamo considerare l'omomorfismo di K-moduli $\lambda \colon A_K \to \mathrm{End}(A_K)$ definito da $x \longmapsto \lambda_x$, dove $\lambda_x(y) = x \cdot y$ è la moltiplicazione a sinistra.
Definiamo un'applicazione $f \colon A \times A \to \mathrm{End}(A_K)$ come $f(a, b) = \lambda_a \lambda_b - \lambda_{ab}$. Questa applicazione è K-bilineare, infatti:

$$f(a + a', b)(x) = \lambda_{a+a'}(\lambda_b(x)) - \lambda_{ab+a'b}(x) = (a + a')(bx) - (ab + a'b)x =$$

$$= a(bx) + a'(bx) - (ab)x - (a'b)x$$

$$f(a,b)(x)+f(a',b)(x)=\lambda_a(\lambda_b(x))-\lambda_{ab}(x)+\lambda_{a'}(\lambda_b(x))-\lambda_{a'b}(x)=$$
$$=a(bx)-(ab)x+a'(bx)-(a'b)x$$

quindi $f(a+a',b)(x)=f(a,b)(x)+f(a',b)(x)$, e analogamente si verifica $f(a,b+b')(x)=f(a,b)(x)+f(a,b')(x)$ per ogni $a,a',b,b',x\in A$. Inoltre

$$kf(a,b)(x)=k\lambda_a(\lambda_b(x))-k\lambda_{ab}(x)=\lambda_a(\lambda_b(xk))-\lambda_{ab}(xk)=$$
$$=a(b(xk))-(ab)(xk)$$
$$f(ka,b)=\lambda_{ka}(\lambda_b(x))-\lambda_{(ka)b}(x)=(ka)(bx)-((ka)b)x\overset{(\star)}{=}$$
$$=a(b(xk))-(ab)(xk)$$
$$f(a,kb)=\lambda_a(\lambda_{kb}(x))-\lambda_{a(kb)}(x)=a((kb)x)-(a(kb))x\overset{(\star)}{=}$$
$$=(a(b(xk))-(ab)(xk)$$

dove in $(\star)$ si sono usate le proprietà di K-algebra, quindi abbiamo verificato che $f(ka,b)=f(a,kb)=kf(a,b)(x)$ per ogni $a,b,x\in A$ e ogni $k\in K$.

Proposizione 1.2.5. *Sia A una K-algebra e siano $\lambda\colon A_K\to \mathrm{End}(A_K)$ definita come $\lambda(x)=\lambda_x$ e $f\colon A\times A\to\mathrm{End}(A_K)$ definita come $f(x,y)=\lambda_x\lambda_y-\lambda_{xy}$, dove λ_x, definita da $\lambda_x(y)=x\cdot y$, è la moltiplicazione a sinistra per x. Le seguenti condizioni sono equivalenti:*

(i) *A è associativa;*

(ii) *l'applicazione λ è un omomorfismo di K-algebre;*

(iii) *l'applicazione f è identicamente nulla.*

Dimostrazione. Verifichiamo che (i) implica (ii). Il morfismo di K-moduli λ è K-lineare perché $\lambda(kx)(y)=(kx)\cdot y=k(x\cdot y)=k\lambda(x)(y)$ per ogni $x,y\in A$ e ogni $k\in K$. Inoltre, usando l'ipotesi di A associativa, abbiamo $\lambda(x\cdot y)(z)=(x\cdot y)\cdot z=x\cdot(y\cdot z)=\lambda(x)(\lambda(y)(z))=(\lambda(x)\circ\lambda(y))(z)$ per ogni $x,y,z\in A$.
Ora, se supponiamo che valga (ii), allora $\lambda_{xy}=\lambda(xy)=\lambda(x)\lambda(y)=\lambda_x\lambda_y$ e

di conseguenza $f(x, y) = \lambda_x\lambda_y - \lambda_{xy} = 0$ per ogni $x, y \in A$, cioè vale (iii). Infine, (iii) implica (i) perché se per ogni $x, y \in A$ $f(x, y) = 0$ allora $\lambda_x\lambda_y = \lambda_{xy}$ e quindi vale $x\cdot(y\cdot z) = \lambda_x(\lambda_y(z)) = \lambda_{xy}(z) = (x\cdot y)\cdot z$ per ogni $x, y, z \in A$, cioè A è associativa. □

Proposizione 1.2.6. *Sia A una K-algebra e siano λ e f definite come sopra. Allora A è una K-algebra di pre-Lie se e solo se $f(x, y) = f(y, x)$ per ogni $x, y \in A$.*

Dimostrazione. Per definizione, A è una K-algebra di pre-Lie se e solo se $(x \cdot y) \cdot z - x \cdot (y \cdot z) = (y \cdot x) \cdot z - y \cdot (x \cdot z)$ per ogni $x, y, z \in A$, ma questo vale se e solo se $f(x, y) = f(y, x)$ per ogni $x, y \in A$, in quanto $f(x, y)(z) = \lambda_x(\lambda_y(z)) - \lambda_{xy}(z) = x \cdot (y \cdot z) - (x \cdot y) \cdot z$ e $f(y, x)(z) = \lambda_y(\lambda_x(z)) - \lambda_{yx}(z) = y \cdot (x \cdot z) - (y \cdot x) \cdot z$ per ogni $x, y, z \in A$. □

Osservazione 1.2.3. Grazie alla precedente proposizione possiamo dare una definizione equivalente di algebra di pre-Lie. Infatti per definizione di f, A è una K-algebra di pre-Lie se e solo se $\lambda_x\lambda_y - \lambda_{xy} = \lambda_y\lambda_x - \lambda_{yx}$ per ogni $x, y \in A$, ossia se e solo se $\lambda_x\lambda_y - \lambda_y\lambda_x = \lambda_{xy} - \lambda_{yx}$, cioè $\lambda_x\lambda_y - \lambda_y\lambda_x = \lambda_{xy-yx}$. Quindi abbiamo che A è una K-algebra di pre-Lie se e solo se

$$[\lambda_x, \lambda_y] = \lambda_{[x,y]}$$

per ogni $x, y \in A$.

Fissiamo ora un anello commutativo K con identità e una K-algebra di Lie $(A, [-, -])$. Consideriamo la categoria degli A-moduli, i cui oggetti sono i morfismi di K-algebre di Lie $L\colon (A, [-, -]) \to \mathfrak{gl}(M)$ (M un qualunque K-modulo) e i cui morfismi $\varphi\colon L \to L'$ sono i morfismi di K-moduli $\varphi\colon M \to M$ tali che per ogni $a \in A$ commuti il seguente diagramma:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "L(a)"'] & M \arrow[d, "L'(\varphi(a))"] \\ M \arrow[r, "\varphi"] & M \end{tikzcd}$$

Questa categoria contiene la sottocategoria piena $\mathcal{M}'_A$ i cui oggetti sono tutti gli A-moduli $L\colon (A,[-,-]) \to \mathfrak{gl}(A)$, che a sua volta contiene la sottocategoria piena $\mathcal{M}_A$ i cui oggetti sono tutti gli A-moduli $L\colon (A,[-,-]) \to \mathfrak{gl}(A)$ tali che $L(x)(y) - L(y)(x) = [x,y]$ per ogni $x, y \in A$.
Consideriamo inoltre la sottocategoria piena $\mathcal{S}_A$ della categoria delle K-algebre di pre-Lie PreL_K, i cui oggetti sono tutte le K-algebre di pre-Lie $(A,\cdot)$ la cui algebra di Lie sottogiacente è $(A,[-,-])$, e i cui morfismi sono i morfismi di K-algebre di pre-Lie $\varphi\colon (A,\cdot) \to (A,*)$.

Teorema 1.2.7. *Le categorie $\mathcal{S}_A$ e $\mathcal{M}_A$ sono isomorfe. In altre parole, le algebre di pre-Lie sono moduli sulle rispettive algebre di Lie sottogiacenti.*

Dimostrazione. Sia $(A,\cdot)$ un oggetto di $\mathcal{S}_A$ e definiamo l'applicazione

$$L\colon (A,[-,-]) \to \mathfrak{gl}(A)$$

definita da $a \mapsto \lambda_a$, dove $\lambda_a(x) = a \cdot x$ per ogni $a, x \in A$. Questa è K-lineare grazie alla K-bilinearità della moltiplicazione $\cdot$, inoltre, usando il fatto che l'algebra di Lie sottogiacente a $(A,\cdot)$ è $(A,[-,-])$ e usando la proprietà di pre-Lie, per ogni $x, y, z \in A$ si ha

$$L([x,y])(z) = L(x\cdot y - y\cdot x)(z) = (x\cdot y - y\cdot x)\cdot z = (x\cdot y)\cdot z - (y\cdot x)\cdot z =$$

$$= x\cdot(y\cdot z) - y\cdot(x\cdot z) = L(x)(L(y)(z)) - L(y)(L(x)(z)) =$$

$$= (L(x)L(y) - L(y)L(x))(z) = [L(x), L(y)](z)$$

cioè vale $L([x,y] = [L(x), L(y)])$ per ogni $x, y \in A$ e quindi L è un morfismo di algebre di Lie. Infine, vale $L(x)(y) - L(y)(x) = x\cdot y - y\cdot x = [x,y]$ per ogni $x, y \in A$, dunque L è un oggetto di $\mathcal{M}_A$.
Prendiamo ora un morfismo $\varphi\colon (A,\cdot) \to (A,*)$ in $\mathcal{S}_A$. Questa stessa applicazione è anche un morfismo di algebre di Lie $\varphi\colon (A,[-,-]) \to (A,[-,-])$, infatti per ogni $a, a' \in A$ si ha

$$\varphi([a,a']) = \varphi(a\cdot a' - a'\cdot a) = \varphi(a) * \varphi(a') - \varphi(a') * \varphi(a) = [\varphi(a), \varphi(a')]$$

Consideriamo ora il seguente diagramma:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\varphi} & A \\ {\scriptstyle L(a)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle L'(\varphi(a))} \\ A & \xrightarrow{\varphi} & A \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{ccc} x & \longmapsto & \varphi(x) \\ \downarrow & & \downarrow \\ a\cdot x & \longmapsto & \varphi(a\cdot x) \end{array}$$

questo commuta perché, essendo φ un morfismo di K-algebre, si ha $\varphi(a\cdot x) = \varphi(a) * \varphi(x) = L'(\varphi(a))(\varphi(x))$, dove ovviamente si definisce $L'(a)(b) = a * b$ per ogni $a, b \in A$.
Quindi possiamo definire un funtore $F\colon \mathcal{S}_A \to \mathcal{M}_A$ che manda un oggetto $(A, \cdot)$ di $\mathcal{S}_A$ in $L\colon a \longmapsto \lambda_a$ e un morfismo $\varphi\colon (A, \cdot) \to (A, *)$ nel morfismo stesso $\varphi\colon L \to L'$.

Costruiamo ora il funtore inverso di F. Prendiamo un A-modulo $L\colon (A, [-,-]) \to \mathfrak{gl}(A)$ in $\mathcal{M}_A$ e definiamo una moltiplicazione su A ponendo $\cdot\colon A \times A \to A$, $(x, y) \longmapsto x\cdot y = L(x)(y)$. Osserviamo innanzitutto che per ipotesi $x\cdot y - y\cdot x = L(x)(y) - L(y)(x) = [x, y]$ per ogni $x, y \in A$, quindi si ha

$$x \cdot (y \cdot z) - y \cdot (x \cdot z) = L(x)(L(y)(z)) - L(y)(L(x)(z)) =$$

$$= (L(x)L(y) - L(y)L(x))(z) = ([L(x), L(y)])(z) = L([x, y])(z) =$$

$$= L(x \cdot y - y \cdot x)(z) = (x \cdot y - y \cdot x) \cdot z = (x \cdot y) \cdot z - (y \cdot x) \cdot z$$

cioè $(A, \cdot)$ è algebra di pre-Lie con algebra di Lie sottogiacente $(A, [-,-])$ ed è quindi un oggetto di $\mathcal{S}_A$.
Sia ora $\varphi\colon L \to L'$ un morfismo in $\mathcal{M}_A$, cioè un morfismo di K-moduli $\varphi\colon A \to A$ tale che commuti il seguente quadrato:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\varphi} & A \\ {\scriptstyle L(x)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle L'(\varphi(x))} \\ A & \xrightarrow{\varphi} & A \end{array}$$

per ogni $x \in A$. Allora $\varphi(x \cdot y) = \varphi(L(x)(y)) = L'(\varphi(x))(\varphi(y)) = \varphi(x) * \varphi(y)$ per ogni $x, y \in A$, cioè φ è un morfismo di algebre di pre-Lie $(A, \cdot) \to (A, *)$ dove ovviamente $x * y = L'(x)(y)$.
A questo punto possiamo definire il funtore $G\colon \mathcal{M}_A \to \mathcal{S}_A$ che manda un

oggetto $L\colon (A, [-,-]) \to \mathfrak{gl}(A)$ di $\mathcal{M}_A$ in $(A, \cdot)$, dove $x \cdot y = L(x)(y)$, e manda un morfismo $\varphi\colon L \to L'$ nello stesso morfismo $\varphi\colon (A, \cdot) \to (A, *)$.

I due funtori F e G sono l'uno l'inverso dell'altro, infatti $GF((A, \cdot)) = G(L) = (A, *) = (A, \cdot)$ poiché $L(x)(y) = x \cdot y$ quindi $x * y = L(x)(y) = x \cdot y$, e analogamente si ha $FG(L) = L$; inoltre per definizione di F e G si ha $GF(\varphi) = \varphi$ e $FG(\varphi) = \varphi$. □

Osservazione 1.2.4. Se, nel teorema precedente, invece della categoria $\mathcal{M}_A$ considerassimo $\mathcal{M}'_A$, rinunciando quindi alla condizione $L(x)(y) - L(y)(x) = [x, y]$, non sarebbe possibile costruire il funtore inverso di F in quanto l'algebra di Lie sottogiacente a $(A, \cdot)$, dove $x \cdot y = L(x)(y)$, potrebbe non coincidere con $(A, [-,-])$. Si può infatti verificare che l'algebra di Lie indotta da $\cdot$ coincide con $(A, [-,-])$ se e solo se $(A, \cdot)$ è di pre-Lie.
In ogni caso F è un funtore fedele poiché per ogni $(A, \cdot), (A, *)$ in $\mathcal{S}_A$ e per ogni $\varphi, \psi\colon (A, \cdot) \to (A, *)$ morfismi di algebre di pre-Lie, se $F(\varphi) = F(\psi)$ allora $\varphi = F(\varphi) = F(\psi) = \psi$. Non possiamo affermare che F sia un funtore full, infatti dato un morfismo $\varphi\colon L \to L'$ in $\mathcal{M}'_A$, φ è effettivamente un morfismo tra le algebre $(A, \cdot)$ e $(A, *)$ indotte rispettivamente da L e L' poiché $\varphi(a \cdot a') = \varphi(L(a)(a')) = L'(\varphi(a))(\varphi(a')) = \varphi(a) * \varphi(a')$, ma non è detto che le suddette algebre siano di pre-Lie.

Diamo ora una definizione che ci servirà in seguito per studiare ulteriormente la categoria delle algebre di pre-Lie.

Definizione 1.2.8. Siano M, M' due K-algebre qualsiasi e sia $\varphi\colon M \to M'$ un morfismo di K -moduli. Diciamo che φ è un *pre-morfismo di K-algebre* se per ogni $x, y \in M$ vale

$$\varphi(xy) - \varphi(x)\varphi(y) = \varphi(yx) - \varphi(y)\varphi(x)$$

Lemma 1.2.9. (a) *Ogni morfismo di K-algebre è un pre-morfismo;*

(b) *La composizione di due pre-morfismi è un pre-morfismo;*

(c) *L'inverso di un pre-morfismo biettivo è un pre-morfismo.*

Dimostrazione. Il punto (a) è ovvio.

Verifichiamo il punto (b). Siano $\varphi\colon M \to M'$ e $\psi\colon M' \to M''$ due pre-morfismi. Dato che φ è un pre-morfismo, vale

$$\varphi(xy) - \varphi(x)\varphi(y) = \varphi(yx) - \varphi(y)\varphi(x)$$

per ogni $x, y \in M$. Componendo con il morfismo di K-moduli ψ otteniamo

$$\psi(\varphi(xy)) - \psi(\varphi(x)\varphi(y)) = \psi(\varphi(yx)) - \psi(\varphi(y)\varphi(x))$$

Anche ψ è un pre-morfismo, quindi vale

$$\psi(\varphi(x)\varphi(y)) = \psi(\varphi(x))\psi(\varphi(y)) + \psi(\varphi(y)\varphi(x)) - \psi(\varphi(y))\psi(\varphi(x))$$

ottenendo dunque

$$(\psi \circ \varphi)(xy) - (\psi \circ \varphi)(x)(\psi \circ \varphi)(y) - \psi(\varphi(y)\varphi(x)) + (\psi \circ \varphi)(y)(\psi \circ \varphi)(x) =$$

$$= (\psi \circ \varphi)(yx) - \psi(\varphi(y)\varphi(x))$$

ossia troviamo l'equazione richiesta

$$(\psi \circ \varphi)(xy) - (\psi \circ \varphi)(x)(\psi \circ \varphi)(y) = (\psi \circ \varphi)(yx) - (\psi \circ \varphi)(y)(\psi \circ \varphi)(x).$$

Vediamo ora il punto (c). Sia $\varphi\colon M \to M'$ un pre-morfismo biettivo. Se $x, y \in M'$, allora $\varphi^{-1}(x), \varphi^{-1}(y) \in M$, ed essendo φ un pre-morfismo si ha

$$\varphi(\varphi^{-1}(x)\varphi^{-1}(y)) - \varphi(\varphi^{-1}(x))\varphi(\varphi^{-1}(y)) =$$

$$= \varphi(\varphi^{-1}(y)\varphi^{-1}(x)) - \varphi(\varphi^{-1}(y))\varphi(\varphi^{-1}(x))$$

cioè

$$\varphi(\varphi^{-1}(x)\varphi^{-1}(y)) - xy = \varphi(\varphi^{-1}(y)\varphi^{-1}(x)) - yx$$

Applicando il morfismo di K-moduli φ^{-1} otteniamo

$$\varphi^{-1}(x)\varphi^{-1}(y) - \varphi^{-1}(xy) = \varphi^{-1}(y)\varphi^{-1}(x) - \varphi^{-1}(yx)$$

che è l'identità cercata. □

Osservazione 1.2.5. Abbiamo visto nella sezione precedente che un'algebra A è associativa se e solo se il morfismo di K-moduli $\lambda\colon A \to \mathrm{End}(A)$ di moltiplicazione a sinistra è anche un morfismo di K-algebre. Per quanto osservato precedentemente, abbiamo una condizione simile per le algebre di pre-Lie: un'algebra A è di pre-Lie se e solo se λ è un pre-morfismo.

Grazie alle proprietà dei pre-morfismi, possiamo considerare una nuova categoria: la categoria $\mathrm{PreL}_{K,p}$ data dalle K-algebre di pre-Lie con i pre-morfismi. Questa contiene la categoria delle algebre associative e la categoria PreL_K.

Proposizione 1.2.10. *Associare a una K-algebra di pre-Lie $(A, \cdot)$ la sua algebra di Lie sottogiacente $(A, [-,-])$ definisce un funtore U dalla categoria $\mathrm{PreL}_{K,p}$ alla categoria delle K-algebre di Lie.*

Dimostrazione. Se $(A, \cdot)$, $(A', \cdot)$ sono K-algebre di pre-Lie e $\varphi\colon A \to A'$ è un pre-morfismo, allora $\varphi(ab)-\varphi(a)\varphi(b) = \varphi(ba)-\varphi(b)\varphi(a)$ si può riscrivere come $\varphi(ab)-\varphi(ba) = \varphi(a)\varphi(b)-\varphi(b)\varphi(a)$, cioè, $\varphi([a,b]) = [\varphi(a), \varphi(b)]$. Quindi per ogni pre-morfismo $\varphi\colon A \to A'$ di algebre di pre-Lie, la stessa mappa φ è un morfismo di algebre di Lie $\varphi = U(\varphi)\colon (A, [-,-]) \to (A', [-,-])$. $\square$

1.3 Moduli su algebre di pre-Lie

Non esiste una definizione per moduli su algebre non associative, però possiamo prendere spunto dai moduli sulle algebre di Lie: vogliamo definire un'operazione di moltiplicazione che riprenda la proprietà di pre-Lie, cioè cerchiamo una definizione conveniente che ricordi la simmetria a sinistra.

Definizione 1.3.1. Sia A una K-algebra di pre-Lie. Chiamiamo *A-modulo* un qualunque K-modulo M con un'ulteriore applicazione K-bilineare $\odot\colon A \times M \to M$ tale che

$$(xy) \odot m - x \odot (y \odot m) = (yx) \odot m - y \odot (x \odot m)$$

per ogni $x, y \in A$ e ogni $m \in M$.

Se I è un ideale di una K-algebra di pre-Lie $(A, \cdot)$, possiamo prendere come $\odot\colon A \times I \to I$ la restrizione della moltiplicazione $\cdot$ e in questo modo si ha chiaramente che I è un modulo su $(A, \cdot)$.

Definizione 1.3.2. Siano M e M' due A-moduli, con A K-algebra di pre-Lie. Un *morfismo di A-moduli* è un'applicazione K-lineare $\varphi\colon M \to M'$ tale che $\varphi(x \odot_M m) = x \odot_{M'} \varphi(m)$ per ogni $x \in A$ e ogni $m \in M$.

Abbiamo visto che, nel caso di algebre associative, esistono due definizioni equivalenti di modulo. La stessa cosa si può fare nel caso delle algebre di pre-Lie, vediamo dunque la seguente definizione:

Definizione 1.3.3. Sia A una K-algebra di pre-Lie. Chiamiamo *A-modulo* un qualunque K-modulo M con un pre-morfismo $\lambda\colon A \to \mathrm{End}(M_K)$, cioè con un'applicazione K-lineare tale che

$$\lambda_{xy} - \lambda_x \lambda_y = \lambda_{yx} - \lambda_y \lambda_x$$

per ogni $x, y \in A$.
Osserviamo che questa condizione è equivalente a richiedere che $\lambda_{[x,y]} = [\lambda_x, \lambda_y]$ per ogni $x, y \in A$, cioè λ è un omomorfismo di K-algebre di Lie $(A, [-,-]) \to \mathfrak{gl}(M_K)$, dove $(A, [-,-])$ è la K-algebra di Lie sottogiacente ad A. In altre parole, si richiede che M sia un modulo sulla K-algebra di Lie $(A, [-,-])$.
Naturalmente, in questo caso definiamo un *morfismo di A-moduli* come un morfismo tra moduli sull'algebra di Lie $(A, [-,-])$.

Proposizione 1.3.4. *Sia $(A, \cdot)$ una K-algebra di pre-Lie e sia $(A, [-,-])$ la sua K-algebra di Lie sottogiacente. Allora le due precedenti definizioni di modulo su A sono equivalenti, nel senso che la categoria degli $(A, \cdot)$-moduli è isomorfa alla categoria degli $(A, [-,-])$-moduli.*

Dimostrazione. Sia M un oggetto di $(A, \cdot)$–Mod, cioè sia M un K-modulo con un'applicazione K-bilineare $\odot\colon A \times M \to M$ tale che $(x \cdot y) \odot m - x \odot (y \odot m) = (y \cdot x) \odot m - y \odot (x \odot m)$ per ogni $x, y \in A$ e ogni $m \in M$. Possiamo definire un'applicazione $\lambda\colon A \to \mathrm{End}(M_K)$ come $\lambda_x(m) = x \odot m$ per ogni $x \in A$ e ogni $m \in M$. In questo modo λ è K-lineare perché $\odot$ lo è, inoltre per ogni $x, y \in A$ e ogni $m \in M$ si ha

$$(\lambda_{x\cdot y} - \lambda_x\lambda_y)(m) = \lambda_{x\cdot y}(m) - \lambda_x(\lambda_y(m)) = (x \cdot y) \odot m - x \odot (y \odot m) =$$

$$= (y \cdot x) \odot m - y \odot (x \odot m) = (\lambda_{y\cdot x} - \lambda_y\lambda_x)(m)$$

cioè $\lambda_{x\cdot y} - \lambda_x\lambda_y = \lambda_{y\cdot x} - \lambda_y\lambda_x$, quindi M è un modulo su $(A, [-,-])$. Viceversa, se si ha un'applicazione K-lineare $\lambda\colon A \to \mathrm{End}(M_K)$ tale che $\lambda_{xy} - \lambda_x\lambda_y = \lambda_{yx} - \lambda_y\lambda_x$ per ogni $x, y \in A$, allora è sufficiente definire $\odot\colon A \times M \to M$ come $x \odot m = \lambda_x(m)$ per ogni $x \in A$ e ogni $m \in M$ e si verifica con passaggi analoghi che $\odot$ rispetta le proprietà di modulo su $(A, \cdot)$.

Consideriamo ora un morfismo $\varphi\colon M \to M'$ in $(A, \cdot)$–Mod, cioè K-lineare e tale che $\varphi(x \odot_M m) = x \odot_{M'} \varphi(m)$ per ogni $x \in A$ e ogni $m \in M$. Verifichiamo che φ è anche un morfismo tra gli $(A, [-,-])$-moduli definiti da $\lambda\colon (A, [-,-]) \to \mathfrak{gl}(M)$ e $\lambda'\colon (A, [-,-]) \to \mathfrak{gl}(M')$ con $\lambda_x(m) = x \odot_M m$ e $\lambda'_x(m) = x \odot_{M'} m$ rispettivamente. Dobbiamo quindi mostrare che per ogni $x \in A$ commuta il seguente diagramma:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\lambda_x"'] & M' \arrow[d, "\lambda'_x"] \\ M \arrow[r, "\varphi"] & M' \end{tikzcd}$$

Siano $x \in A$ e $m \in M$, allora $\varphi(\lambda_x(m)) = \varphi(x \odot_M m) = x \odot_{M'} \varphi(m) = \lambda'_x(\varphi(m))$, quindi effettivamente φ è morfismo di $(A, [-,-])$-moduli.
Chiaramente, se abbiamo invece un morfismo di $(A, [-,-])$-moduli $\varphi\colon M \to M'$ definiti rispettivamente da $\lambda\colon (A, [-,-]) \to \mathfrak{gl}(M)$ e $\lambda'\colon (A, [-,-]) \to \mathfrak{gl}(M')$, allora questo è un morfismo tra gli $(A, \cdot)$-moduli definiti da $\odot_M$ e $\odot_{M'}$ poiché allo stesso modo $\varphi(x \odot_M m) = \varphi(\lambda_x(m)) = \lambda'_x(\varphi(m)) = x \odot_{M'} \varphi(m)$ per ogni $x \in A$ e ogni $m \in M$.

È quindi ben definito il funtore $F\colon (A, \cdot)\text{–Mod} \to (A, [-,-])\text{–Mod}$ che associa a ogni $(A, \cdot)$-modulo M definito da $\odot$ il $(A, [-,-])$-modulo definito da $\lambda_x(m) = x \odot m$ per ogni $x \in A$ e ogni $m \in M$, e che manda ogni morfismo

$\varphi\colon M \to M'$ di $(A,\cdot)$–Mod in se stesso. Inoltre, si verifica immediatamente che il funtore $G\colon (A,[-,-])$–Mod $\to (A,\cdot)$–Mod, che manda un oggetto M di $(A,[-,-])$–Mod definito da un morfismo λ nel $(A,\cdot)$-modulo definito da $x \odot m = \lambda_x(m)$ per ogni $x \in A$ e ogni $m \in M$ e che manda ogni morfismo $\varphi\colon M \to M'$ di $(A,[-,-])$–Mod in se stesso, è funtore inverso di F. Dunque F è un isomorfismo di categorie, cioè $(A,\cdot)$–Mod $\cong (A,[-,-])$–Mod. □

Corollario 1.3.5. *Se $(A,\cdot)$ e $(A,*)$ sono due K-algebre di pre-Lie con la stessa algebra di Lie sottogiacente allora* $(A,\cdot)$–Mod $\cong (A,*)$–Mod.

Vediamo ora un esempio non banale di un modulo su un'algebra di pre-Lie:

Esempio. Sia $(A,\cdot)$ una K-algebra di pre-Lie e sia $M = \mathrm{End}(A)$ il K-modulo di tutte le applicazioni lineari $f\colon A \to A$. Notiamo in particolare che, per ogni $x \in A$, i morfismi di moltiplicazione a sinistra λ_x stanno in M. Definiamo un prodotto $\odot\colon A \times M \to M$ come

$$x \odot f = [\lambda_x, f] + \lambda_{f(x)}$$

e verifichiamo che valga $(x \cdot y) \odot f - x \odot (y \odot f) = (y \cdot x) \odot f - y \odot (x \odot f)$ per ogni $x, y \in A$ e ogni $f \in \mathrm{End}(A)$. Abbiamo

$$x \odot (y \odot f) = x \odot ([\lambda_y, f] + \lambda_{f(y)}) = [\lambda_x, [\lambda_y, f] + \lambda_{f(y)}] + \lambda_{([\lambda_y,f]+\lambda_{f(y)})(x)} =$$

$$= [\lambda_x, [\lambda_y, f]] + [\lambda_x, \lambda_{f(y)}] + \lambda_{y\cdot f(x) - f(y\cdot x) + f(y)\cdot x}$$

e analogamente, scambiando x e y, otteniamo

$$y \odot (x \odot f) = [\lambda_y, [\lambda_x, f]] + [\lambda_y, \lambda_{f(x)}] + \lambda_{x\cdot f(y) - f(x\cdot y) + f(x)\cdot y}$$

Ricordiamo che $\mathrm{End}(A)$ è un'algebra di Lie con il commutatore $[-,-]$, quindi vale $[\lambda_x, [\lambda_y, f]] - [\lambda_y, [\lambda_x, f]] = [[\lambda_x, \lambda_y], f]$. Si ha dunque

$$x \odot (y \odot f) - y \odot (x \odot f) = [[\lambda_x, \lambda_y], f] + [\lambda_x, \lambda_{f(y)}] + \lambda_{y\cdot f(x) - f(y\cdot x) + f(y)\cdot x} +$$

$$-[\lambda_y, \lambda_{f(x)}] - \lambda_{x\cdot f(y) - f(x\cdot y) + f(x)\cdot y} = [[\lambda_x, \lambda_y] f] + \lambda_C$$

dove $C = x \cdot f(y) - f(y) \cdot x + y \cdot f(x) - f(y \cdot x) + f(y) \cdot x - y \cdot f(x) + f(x) \cdot y - x \cdot f(y) + f(x \cdot y) - f(x) \cdot y = f(x \cdot y) - f(y \cdot x) = f([x, y])$. Quindi in tutto troviamo

$$x \odot (y \odot f) - y \odot (x \odot f) = [\lambda_{[x,y],f}] + \lambda_{f([x,y])} = [x, y] \odot f = (x \cdot y) \odot f - (y \cdot x) \odot f$$

ossia il prodotto $\odot$ definisce un modulo sull'algebra di pre-Lie $(A, \cdot)$.

Osservazione 1.3.1. I moduli sulle algebre di pre-Lie, così come li abbiamo definiti, sono moduli sinistri. Non è possibile definire i moduli destri in modo naturale tramite le algebre opposte, perché l'algebra opposta di un'algebra simmetrica a sinistra è simmetrica a destra.

Capitolo 2

Esempi

In questo capitolo mostriamo i principali esempi di algebre di pre-Lie non associative. L'ultimo esempio è il più noto, mentre il primo (il più basilare) e il secondo vengono esposti in [20].

2.1 Un'algebra di rango 2

Sia K un anello commutativo con identità e sia A il K-modulo libero con insieme libero di generatori $\{e_1, e_2\}$. Definiamo esplicitamente una moltiplicazione sui generatori (la moltiplicazione su tutto A si ottiene estendendo per K-bilinearità):

$$e_1e_1 := 2e_1 \qquad e_1e_2 := e_2 \qquad e_2e_1 := 0 \qquad e_2e_2 := e_1$$

Per verificare la proprietà di pre-Lie è sufficiente studiare i casi in cui $(x, y, z) = (e_1, e_2, e_2)$ e $(x, y, z) = (e_2, e_1, e_1)$, tutti gli altri casi sono simmetrici a questi oppure banali.

Vediamo il primo caso. Si ha $(e_1e_2)e_2 - e_1(e_2e_2) = e_2e_2 - e_1e_1 = e_1 - 2e_1 = -e_1$ e invertendo i primi due termini otteniamo $(e_2e_1)e_2 - e_2(e_1e_2) = 0e_2 - e_2e_2 = 0 - e_1 = -e_1$, quindi effettivamente vale $(e_1e_2)e_2 - e_1(e_2e_2) = (e_2e_1)e_2 - e_2(e_1e_2)$.

Nel secondo caso invece abbiamo $(e_2e_1)e_1 - e_2(e_1e_1) = 0e_1 - 2e_2e_1 = 0 - 0 = 0$, mentre $(e_1e_2)e_1 - e_1(e_2e_1) = e_2e_1 - e_10 = 0 - 0 = 0$, cioè $(e_2e_1)e_1 - e_2(e_1e_1) = (e_1e_2)e_1 - e_1(e_2e_1)$.

Quindi con questo prodotto A è una K-algebra di pre-Lie, e la sua algebra di Lie sottogiacente è data da $[e_1, e_2] = e_2$ ed è un esempio di algebra di Lie di grado 2 non abeliana.

2.2 Matrici triangolari superiori $n \times n$

Consideriamo innanzitutto un'applicazione τ che manda ogni matrice $n \times n$ nella matrice triangolare superiore ottenuta sostituendo tutti gli elementi sotto la diagonale con 0, dividendo gli elementi della diagonale per 2 e lasciando invariati gli elementi sopra la diagonale. Sia A il K-modulo delle matrici triangolari superiori $n \times n$ e, date $x, y \in A$, denotiamo con "xy" l'usuale prodotto riga per colonna. Definiamo una moltiplicazione $\cdot$ su A come

$$x \cdot y = xy + \tau(xy^T + yx^T)$$

per ogni $x, y \in A$ e dove x^T, y^T indicano la matrice trasposta. Verifichiamo ora che $(A, \cdot)$ è una K-algebra di pre-Lie: per farlo mostreremo che la differenza $(x \cdot y) \cdot z - x \cdot (y \cdot z)$ è simmetrica in x e y per ogni $x, y, z \in A$.

Consideriamo il primo termine:

$$(x \cdot y) \cdot z = (x \cdot y)z + \tau((x \cdot y)z^T + z(x \cdot y)^T) =$$

$$= (xy)z + \tau(xy^T + yx^T)z + \tau((x \cdot y)z^T + z(x \cdot y)^T) =$$

$$= (xy)z + \tau(xy^T + yx^T)z + \tau((xy)z^T + \tau(xy^T + yx^T)z^T + z(xy)^T + z\tau(xy^T + yx^T)^T) =$$

$$= xyz + \tau(xyz^T + zy^Tx^T) + [\text{termini simmetrici in } x \text{ e } y]$$

Per il secondo termine occorre osservare due semplici proprietà dell'applicazione τ:

(1) per ogni matrice simmetrica s vale $\tau(s) = s - \tau(s)^T$ e $\tau(s)^T = s - \tau(s)$

(2) per ogni matrice triangolare superiore w vale $w = \tau(w + w^T)$

Abbiamo quindi

$$x \cdot (y \cdot z) = x(y \cdot z) + \tau(x(y \cdot z)^T + (y \cdot z)x^T) =$$

$$= x(yz) + x\tau(yz^T + zy^T) + \tau(x(yz)^T + x\tau(yz^T + zy^T)^T + (yz)x^T + \tau(yz^T + zy^T)x^T) =$$

Ora, usando (1), il secondo e il quarto termine dentro al secondo operatore τ diventano rispettivamente

$$x\tau(yz^T + zy^T)^T = x(yz^T + zy^T) - x\tau(yz^T + zy^T)$$

$$\tau(yz^T + zy^T)x^T = (yz^T + zy^T)x^T - \tau(yz^T + zy^T)^T x^T$$

mentre, usando (2), il secondo termine diventa

$$x\tau(yz^T + zy^T) = \tau(x\tau(yz^T + zy^T) + \tau(yz^T + zy^T)^T x^T)$$

Mettendo tutto insieme otteniamo quindi

$$x \cdot (y \cdot z) = xyz + \tau(x\tau(yz^T + zy^T) + \tau(yz^T + zy^T)^T x^T + xz^T y^T +$$

$$+ x(yz^T + zy^T) - x\tau(yz^T + zy^T) + yzx^T + (yz^T + zy^T)x^T - \tau(yz^T + zy^T)^T x^T) =$$

$$= xyz + \tau(xz^T y^T + xyz^T + xzy^T + yzx^T + yz^T x^T + zy^T x^T) =$$

$$= xyz + \tau(xyz^T + zy^T x^T) + [\text{termini simmetrici in } x \text{ e } y]$$

Vediamo così che la differenza $x \cdot (y \cdot z) - x \cdot (y \cdot z)$ risulta in termini simmetrici in x e y, quindi $(A, \cdot)$ è una K-algebra di pre-Lie.

Osservazione 2.2.1. L'algebra di Lie sottogiacente ad $(A, \cdot)$ è definita da

$$[x, y] = x \cdot y - y \cdot x = xy + \tau(xy^T + yx^T) - yx - \tau(yx^T + xy^T) = xy - yx$$

ovvero ritroviamo l'usuale struttura di algebra di Lie delle matrici triangolari superiori.

2.3 Derivazioni su $K[x_1,...,x_n]^n$

Sia K un anello commutativo con identità e sia $n \geq 1$. Sia A il $K[x_1,...,x_n]$-modulo libero $K[x_1,...,x_n]^n$ con insieme libero di generatori $\{e_1,...,e_n\}$. Visto come K-modulo, A è K-modulo libero con generatori $\{x_1^{i_1}...x_n^{i_n}e_j\ ;\ i_1,...,1_n \geq 0, j = 1,...,n\}$. Consideriamo l'usuale derivazione su A:

$$\frac{\partial}{\partial x_k}(x_1^{i_1}...x_n^{i_n}e_j) = \begin{cases} x_1^{i_1}...i_k x_k^{i_k-1}...x_n^{i_n}e_j\,, & \text{se } i_k \neq 0. \\ 0\,, & \text{se } i_k = 0. \end{cases}$$

e osserviamo che per ogni $j,k = 1,...,n$ vale

$$\frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_j} = \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k} \tag{$\star$}$$

Siano ora $u = (u_1,...,u_n), v = (v_1,...,v_n) \in A$. Definiamo una moltiplicazione come segue:

$$v \cdot u = (\sum_{j=1}^n v_j \frac{\partial u_1}{\partial x_j},..., \sum_{j=1}^n v_j \frac{\partial u_n}{\partial x_j})$$

Allora, dato $w = (w_1,...,w_n) \in A$, si ha

$$w \cdot (v \cdot u) = (\sum_{j=1}^n w_j \frac{\partial}{\partial x_j}(\sum_{k=1}^n v_k \frac{\partial u_1}{\partial x_k}),..., \sum_{j=1}^n w_j \frac{\partial}{\partial x_j}(\sum_{k=1}^n v_k \frac{\partial u_n}{\partial x_k})) =$$

$$= (\sum_{j,k=1}^n w_j (\frac{\partial v_k}{\partial x_j}\frac{\partial u_1}{\partial x_k} + v_k \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_j \partial x_k}),..., \sum_{j,k=1}^n w_j (\frac{\partial v_k}{\partial x_j}\frac{\partial u_n}{\partial x_k} + v_k \frac{\partial^2 u_n}{\partial x_j \partial x_k}))$$

mentre

$$(w \cdot v) \cdot u = (\sum_{j=1}^n (\sum_{k=1}^n w_k \frac{\partial v_j}{\partial x_k})\frac{\partial u_1}{\partial x_j},..., \sum_{j=1}^n (\sum_{k=1}^n w_k \frac{\partial v_j}{\partial x_k})\frac{\partial u_n}{\partial x_j}) =$$

$$= (\sum_{j,k=1}^n w_k \frac{\partial v_j}{\partial x_k}\frac{\partial u_1}{\partial x_j},..., \sum_{j,k=1}^n w_k \frac{\partial v_j}{\partial x_k}\frac{\partial u_n}{\partial x_j})$$

Quindi $w \cdot (v \cdot u) - (w \cdot v) \cdot u$ ha come i-esima componente

$$(w\cdot(v\cdot u) - (w\cdot v)\cdot u)_i = \sum_{j,k=1}^n w_j \frac{\partial v_k}{\partial x_j}\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \sum_{j,k=1}^n w_j v_k \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_k} - \sum_{j,k=1}^n w_j \frac{\partial v_k}{\partial x_j}\frac{\partial u_i}{\partial x_k} =$$

$$= \sum_{j,k=1}^{n} w_j v_k \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_k} = \sum_{j,k=1}^{n} v_k w_j \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k \partial x_j} = (v \cdot (w \cdot u) - (v \cdot w) \cdot u)_i$$

dove nella penultima uguaglianza si è usata la proprietà ($\star$) e la commutatività di K.
Di conseguenza, $w \cdot (v \cdot u) - (w \cdot v) \cdot u = v \cdot (w \cdot u) - (v \cdot w) \cdot u$ per ogni $w, v, u \in A$, cioè A è una K-algebra di pre-Lie.

Osservazione 2.3.1. Consideriamo l'anello $K = \mathbb{R}$ e la $\mathbb{R}$-algebra $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ e sia A il $C^\infty(\mathbb{R}^n)$-modulo libero $C^\infty(\mathbb{R}^n)^n$. Se per $f = (f_1, ..., f_n), g = (g_1, ..., g_n) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ definiamo $\frac{\partial}{\partial x_k} f_j$ come l'usuale derivazione parziale per ogni $k, j = 1, ..., n$ e definiamo $f \cdot g = (\sum_{j=1}^n f_j \frac{\partial}{\partial x_j} g_1, ..., \sum_{j=1}^n f_j \frac{\partial}{\partial x_j} g_n)$, allora restano validi i calcoli precedentemente fatti e si verifica quindi che $C^\infty(\mathbb{R}^n)^n$ è una $\mathbb{R}$-algebra di pre-Lie. Lo stesso vale più in generale per $C^\infty(U^n)^n$, con U aperto di $\mathbb{R}^n$.

2.4 Alberi con radice

Definizione 2.4.1. Un *albero* è un grafo non vuoto connesso senza cicli.
Un *albero con radice* di grado n è una coppia (T, r), dove T è un albero con n vertici indicizzati nell'insieme $\{1, ..., n\}$, e la *radice* r è un vertice contraddistinto di T.

Teorema 2.4.2. *Sia G un grafo, sia V l'insieme dei vertici di G e sia L l'insieme dei lati di G. Le seguenti condizioni sono equivalenti:*

(a) *G è un albero;*

(b) *per ogni $v, w \in V$ esiste un unico cammino da v a w;*

(c) *G è connesso e per ogni $l \in L$ il grafo $G' = (V, L \setminus \{l\})$ è un grafo sconnesso;*

(d) *G non ha cicli, e per ogni $v, w \in V$, con v e w vertici distinti non adiacenti, se $l = \{v, w\}$ allora il grafo $G''(V, L \cup \{l\})$ ha un unico ciclo.*

Per la dimostrazione si veda [11, Teorema 14.1].

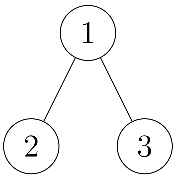
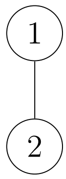
Sia $\mathcal{T}_n$ lo spazio vettoriale avente per base l'insieme di tutte le classi di isomorfismo degli alberi con radice di grado n e sia

$$\mathcal{T} = \bigoplus_{n \geq 1} \mathcal{T}_n$$

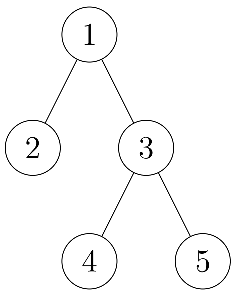
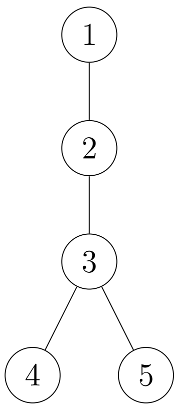
Dati $T_1, T_2 \in \mathcal{T}$, definiamo una moltiplicazione su $\mathcal{T}$ come segue:

$$T_1 \cdot T_2 = \sum_{v \in V(T_2)} T_1 \circ_v T_2$$

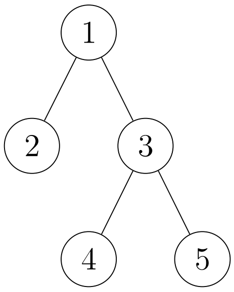
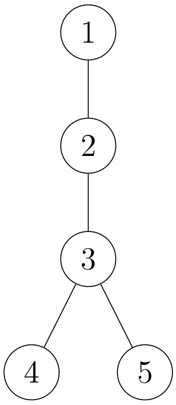
dove $V(T_2)$ è l'insieme dei vertici di T_2 e $T_1 \circ_v T_2$ è l'*innesto di* T_1 *in* v, cioè l'albero ottenuto unendo con un nuovo lato la radice di T_1 al vertice v di T_2 e la cui radice è la radice di T_2. Estendiamo poi per bilinearità per ottenere una moltiplicazione su tutto $\mathcal{T}$.
Vediamo un esempio. Siano

$T_1 =$  , $T_2 =$ 

allora, rietichettando i vertici di T_1, otteniamo

$T_1 \circ_1 T_2 =$  , $T_1 \circ_2 T_2 =$ 

quindi in tutto si ha

$T_1 \cdot T_2 =$  $+$ 

Verifichiamo che in questo modo abbiamo definito un'algebra di pre-Lie. Siano $T_1, T_2, T_3 \in \mathcal{T}$, allora

$$T_1 \cdot (T_2 \cdot T_3) - (T_1 \cdot T_2) \cdot T_3 = T_1 \cdot (\sum_{v \in V(T_3)} T_2 \circ_v T_3) - (\sum_{v \in V(T_2)} T_1 \circ_v T_2) \cdot T_3 =$$

$$= \sum_{w \in V(T_2 \cup T_3)} \sum_{v \in V(T_3)} T_1 \circ_w T_2 \circ_v T_3 - \sum_{w \in V(T_3)} \sum_{v \in V(T_2)} T_1 \circ_v T_2 \circ_w T_3 =$$

$$= \sum_{w \in V(T_2)} \sum_{v \in V(T_3)} T_1 \circ_w T_2 \circ_v T_3 + \sum_{w \in V(T_3)} \sum_{v \in V(T_3)} T_1 \circ_w T_2 \circ_v T_3 - \sum_{w \in V(T_3)} \sum_{v \in V(T_2)} T_1 \circ_v T_2 \circ_w T_3 =$$

$$= \sum_{w, v \in V(T_3)} T_1 \circ_w T_2 \circ_v T_3$$

e analogamente abbiamo

$$T_2 \cdot (T_1 \cdot T_3) - (T_2 \cdot T_1) \cdot T_3 = \sum_{w, v \in V(T_3)} T_2 \circ_w T_1 \circ_v T_3$$

ma $\sum_{w,v \in V(T_3)} T_1 \circ_w T_2 \circ_v T_3 = \sum_{w,v \in V(T_3)} T_2 \circ_w T_1 \circ_v T_3$ perché T_1 e T_2 si innestano in entrambi i casi solo in T_3, quindi, prendendo la somma su tutti i vertici di T_3, non è importante quale albero si innesti prima.

Capitolo 3

Derivazioni su algebre di pre-Lie

In questo capitolo viene fornita una dimostrazione dei risultati esposti nella quinta parte di [3].

Sia $(A, \cdot)$ una K-algebra di pre-Lie e sia $(A, [-,-])$ la sua algebra di Lie sottogiacente. Sia D una derivazione di $(A, \cdot)$, allora:

$$D([x, y]) = D(x \cdot y - y \cdot x) = D(x) \cdot y + x \cdot D(y) - D(y) \cdot x - y \cdot D(x) =$$

$$= (D(x) \cdot y - y \cdot D(x)) + (x \cdot D(y) - D(y) \cdot x) = [D(x), y] + [x, D(y)]$$

cioè D è anche una derivazione di $(A, [-,-])$, quindi si ha $\mathrm{Der}(A, \cdot) \subseteq \mathrm{Der}(A, [-,-])$.

Definizione 3.0.1. Sia A una K-algebra qualsiasi e consideriamo, per ogni $x \in A$, i morfismi di moltiplicazione a destra e a sinistra $\lambda_x, \rho_x \colon A \to A$, rispettivamente definiti come $\lambda_x(y) = xy$ e $\rho_x(y) = yx$ per ogni $y \in A$. La sottoalgebra di Lie di $\mathfrak{gl}(A)$ generata da tutti morfismi λ_x, ρ_x per ogni $x \in A$ è detta l'*algebra di moltiplicazione di Lie* di A e si denota con $\mathcal{L}(A)$.

Definizione 3.0.2. Una derivazione D di A si dice *derivazione interna* se $D \in \mathcal{L}(A)$.

In seguito, data una K-algebra $(A,\cdot)$, per semplicità scriveremo $ab = a\cdot b$ per ogni $a,b\in A$.

Proposizione 3.0.3. *Le seguenti condizioni sono equivalenti per un morfismo $D\in\mathfrak{gl}(A)$:*

(a) *D è una derivazione di $(A,\cdot)$*

(b) *$[D,\lambda_x]=\lambda_{D(x)}$ per ogni $x\in A$*

(c) *$[D,\rho_x]=\rho_{D(x)}$ per ogni $x\in A$*

Dimostrazione. Sia D una derivazione. Per definizione $D(xy)=(Dx)y+x(Dy)$ per ogni $x,y\in A$, quindi $[D,\lambda_x](y)=D(\lambda_x(y))-\lambda_x(D(y))=D(xy)-xD(y)=D(x)y+xD(y)-xD(y)=\lambda_{D(x)}(y)$ e analogamente si verifica che $[D,\rho_x]=\rho_{D(x)}$. Viceversa supponiamo che valga (b), cioè $[D,\lambda_x]=\lambda_{D(x)}$ per ogni $x\in A$ (la verifica è analoga se supponiamo valga (c)). Allora $D(x)y=\lambda_{D(x)}(y)=D(\lambda_x(y))-\lambda_x(D(y))=D(xy)-xD(y)$, da cui $D(xy)=D(x)y+xD(y)$ per ogni $x,y\in A$. $\square$

Chiamiamo $\mathrm{Inder}(A)$ l'insieme di tutte le derivazioni interne di A. Come conseguenza della proposizione precedente, $\mathrm{Inder}(A)$ è un ideale di $\mathrm{Der}(A,\cdot)$.

Proposizione 3.0.4. *Sia $(A,\cdot)$ una K-algebra di pre-Lie, sia $x\in A$. Allora:*

(i) *$\lambda_x\in\mathrm{Der}(A,\cdot)$ se e solo se $(ax)b=0$ per ogni $a,b\in A$*

(ii) *$\rho_x\in\mathrm{Der}(A,\cdot)$ se e solo se $(ab)x-a(bx)=(ax)b$ per ogni $a,b\in A$*

(iii) *$\mathrm{ad}_x=\lambda_x-\rho_x\in\mathrm{Der}(A,\cdot)$ se e solo se $(ab)x=a(bx)$ per ogni $a,b\in A$*

(iv) *$\mathrm{T}(A)=\{x\in A\ ;\ \mathrm{ad}_x\in\mathrm{Der}(A,\cdot)\}$ è una sottoalgebra associativa di $(A,\cdot)$*

Dimostrazione. Verifichiamo (i). Il morfismo λ_x è una derivazione di $(A,\cdot)$ se e solo se $x(ab)=(xa)b+a(xb)$ per ogni $a,b\in A$, ma grazie alla proprietà di pre-Lie, questo vale se e solo se $a(xb)=x(ab)-(xa)b=a(xb)-(ax)b$, cioè se e solo se $0=-(ax)b$.

La verifica di (ii) è ancora più immediata in quanto si ha $(ab)x - a(bx) = (ax)b$ se e solo se $(ab)x = (ax)b + a(bx)$ per ogni $a, b \in A$, ovvero se e solo se $\rho_x(ab) = \rho_x(a)b + a\rho_x(b)$.

Per il punto (iii) vediamo che $\mathrm{ad}_x(ab) = x(ab) - (ab)x$ mentre $\mathrm{ad}_x(a)b + a\mathrm{ad}_x(b) = (xa)b - (ax)b + a(xb) - a(bx)$, quindi ad_x è una derivazione se e solo se $(ax)b - a(xb) + a(bx) = (xa)b - x(ab) + (ab)x$ per ogni $a, b \in A$. A questo punto, per la proprietà di pre-Lie, possiamo eliminare i primi due termini a sinistra e a destra, ottenendo $a(bx) = (ab)x$.

Infine, $\mathrm{T}(A)$ è chiaramente un sottomodulo di A grazie alla K-bilinearità della moltiplicazione e per definizione $\mathrm{T}(A)$ è associativa, quindi basta mostrare la chiusura rispetto all'operazione di algebra. Osserviamo che il punto (iii) ci permette di scrivere $\mathrm{T}(A) = \{x \in A \ ; \ (ab)x = a(bx) \text{ per ogni } a, b \in A\}$, quindi per ogni $x, y \in \mathrm{T}(A)$ e per ogni $a, b \in A$ abbiamo

$$a(b(xy)) = a((bx)y) = (a(bx))y = ((ab)x)y = (ab)(xy)$$

cioè $xy \in \mathrm{T}(A)$. □

Corollario 3.0.5. *Sia $(A, \cdot)$ una K-algebra di pre-Lie. Allora:*

(i) $\mathrm{ad}_\lambda(A) = \{\mathrm{ad}_x \ ; \ \mathrm{ad}_x \in \mathrm{Der}(A, \cdot)\}$ *è un ideale di Lie di* $\mathrm{Der}(A, [-,-])$ *se e solo se* $D(\mathrm{T}(A)) \subseteq \mathrm{T}(A)$ *per ogni* $D \in \mathrm{Der}(A, [-,-])$

(ii) $\mathrm{ad}(A) = \{\mathrm{ad}_x \ ; \ x \in A\}$ *è un ideale di* $\mathrm{Der}(A, \cdot)$ *se e solo se* $(A, \cdot)$ *è associativa*

(iii) *Se* $\mathrm{Der}(A, \cdot) = \mathrm{Der}(A, [-,-])$ *allora A è associativa*

Dimostrazione. Verifichiamo (i). Per definizione, $\mathrm{ad}_\lambda(A)$ è un ideale di Lie di $\mathrm{Der}(A, [-,-])$ se e solo se per ogni $D \in \mathrm{Der}(A, [-,-])$ e ogni $x \in \mathrm{T}(A)$ si ha $[\mathrm{ad}_x, D], [D, \mathrm{ad}_x] \in \mathrm{ad}_\lambda(A)$. Siano $a \in A, x \in \mathrm{T}(A), D \in \mathrm{Der}(A, [-,-])$, allora vale

$$[\mathrm{ad}_x, D](a) = \mathrm{ad}_x(D(a)) - D(\mathrm{ad}_x(a)) = [x, D(a)] - D([x, a]) =$$

$$= [x, D(a)] - [D(x), a] - [x, D(a)] = -[D(x), a] = \mathrm{ad}_{-D(x)}(a)$$

quindi $[\mathrm{ad}_x, D] = \mathrm{ad}_{-D(x)} \in \mathrm{Der}(A,\cdot)$ se e solo se, per ogni $D \in \mathrm{Der}(A,[-,-])$ e ogni $x \in \mathrm{T}(A)$, si ha $-D(x) \in \mathrm{T}(A)$, cioè se e solo se $D(\mathrm{T}(A)) \subseteq \mathrm{T}(A)$ per ogni $D \in \mathrm{Der}(A,[-,-])$. Analogamente si verifica per $[D, \mathrm{ad}_x]$.

Per quanto riguarda (ii), $\mathrm{ad}(A)$ è un ideale di $\mathrm{Der}(A,\cdot)$ se e solo se valgono due condizioni:

(1) $[\mathrm{ad}_x, D]$ e $[D, \mathrm{ad}_x]$ sono morfismi aggiunti per ogni $x \in A$ e ogni $D \in \mathrm{Der}(A,\cdot)$

(2) $\mathrm{ad}_x \in \mathrm{Der}(A,\cdot)$ per ogni $x \in A$

Per ogni $a, x \in A$ e ogni $D \in \mathrm{Der}(A,\cdot)$ vale

$$[\mathrm{ad}_x, D](a) = \mathrm{ad}_x(D(a)) - D(\mathrm{ad}_x(a)) = xD(a) - D(a)x - D(xa - ax) =$$
$$= xD(a) - D(a)x - D(x)a - xD(a) + D(a)x + aD(x) =$$
$$= -D(x)a + aD(x) = \mathrm{ad}_{-D(x)}(a)$$

e analogamente si verifica che $[D, \mathrm{ad}_x] = \mathrm{ad}_{D(x)}$, quindi (1) è sempre verificato. Per il punto (iii) della proposizione precedente, (2) è equivalente a chiedere che $a(bx) = (ab)x$ per ogni $a, b, x \in A$, cioé vale se e solo se $(A,\cdot)$ è associativa.

Infine, abbiamo già visto che vale sempre $\mathrm{Der}(A,\cdot) \subseteq \mathrm{Der}(A,[-,-])$. Supponiamo che valga anche l'inclusione opposta, cioé che ogni derivazione in $(A,[-,-])$ sia anche una derivazione in $(A,\cdot)$. Allora, in particolare, per ogni $c \in A$ si ha $\mathrm{ad}_c \in \mathrm{Der}(A,\cdot)$, quindi per il punto (iii) della proposizione precedente vale $a(bc) = (ab)c$ per ogni $a, b, c \in A$, ovvero A è associativa. $\square$

Proposizione 3.0.6. *Sia $(A,\cdot)$ una K-algebra di pre-Lie. Allora:*

(i) $N(A) = \{x \in A \; ; \; \lambda_x = 0\}$ *è un ideale di* $(A,\cdot)$

(ii) $R(A) = \{x \in A \; ; \; \rho_x = 0\}$ *è un ideale sinistro di* $(A,\cdot)$

Dimostrazione. Si verifica facilmente che $N(A)$ e $R(A)$ sono sottomoduli di $(A,\cdot)$. Siano $a, b \in A$, $x \in N(A)$, allora per la proprietà di pre-Lie si ha

$\lambda_{ax}(b) = (ax)b = a(xb) + (xa)b - x(ab)$ dove i tre addendi a destra sono tutti nulli poiché $x \in N(A)$, quindi $\lambda_{ax} = 0$. Si ha anche che $\lambda_{xa} = \lambda_0 = 0$, dunque per ogni $x \in N(A)$ e ogni $a \in A$ si ha $a \cdot x, x \cdot a \in N(A)$ e il punto (i) è quindi verificato.

Il punto (ii) è ovvio in quanto $\rho_{ax}(b) = \rho_0 = 0$ per ogni $x \in R(A)$ e ogni $a \in A$. $\square$

Capitolo 4

Commutatore su algebre di pre-Lie

4.1 Algebre semi-abeliane e termini di Mal'cev

Per le definizioni e i risultati di questa sezione facciamo riferimento a [6] e [4].

Ricordiamo che in un'algebra universale X un *termine di Mal'cev* è un termine ternario $t(x, y, z)$ tale che $t(x, x, z) = z$ e $t(x, z, z) = x$ per ogni $x, z \in X$. Questo induce quindi un'applicazione $p\colon X \times X \times X \to X$ tale che $p(x, x, z) = z$ e $p(x, z, z) = x$ per ogni $x, z \in X$.

Definizione 4.1.1. Sia $\mathcal{C}$ una categoria e siano $u\colon U \to X$ e $v\colon V \to X$ due monomorfismi in $\mathcal{C}$. Diciamo che la coppia (u, v) è un *covering pair* quando ogni altro monomorfismo $m\colon Z \to X$ che fattorizza u e v è necessariamente un isomorfismo.

$$\begin{tikzcd} & Z \arrow[d, hook, "m"] & \\ U \arrow[ur, dashed] \arrow[r, hook, "u"] & X & V \arrow[ul, dashed] \arrow[l, hook', "v"'] \end{tikzcd}$$

Definizione 4.1.2. Una categoria $\mathcal{C}$ che ammette limiti finiti e ha un oggetto nullo si dice *protomodulare* se per ogni epimorfismo split $(f, s)\colon X \rightleftarrows Y$ la coppia di monomorfismi $s\colon Y \to X$ e $k\colon \mathrm{Ker}f \to X$ è un covering pair.

Definizione 4.1.3. Una categoria $\mathcal{C}$ si dice *semi-abeliana* quando:

1. $\mathcal{C}$ ha un oggetto nullo;

2. $\mathcal{C}$ è esatta;

3. $\mathcal{C}$ è protomodulare;

4. $\mathcal{C}$ ammette prodotti binari.

Osserviamo che la varietà delle K-algebre di pre-Lie è una categoria Barr-esatta, è una varietà di Ω-gruppi, è protomodulare e semi-abeliana [16, Example (2)]. In particolare, ogni algebra A di pre-Lie presenta una struttura di gruppo rispetto all'addizione dunque, come mostra [4, Prop. 5.3.1], c'è un termine di Mal'tsev definito da $p(x, y, z) = x - y + z$ per ogni $x, y, z \in A$. Inoltre si verifica facilmente che $p(p(x, y, 0), 0, y) = 0$ per ogni $x, y \in A$, quindi, per [4, Prop. 3.1.8], la varietà delle algebre di pre-Lie è protomodulare. Vale anche $p(p(x, y, t)t, z) = p(x, y, z)$ per ogni $x, y, z, t \in A$, quindi la varietà è semi-abeliana per [4, Prop. 5.3.3].

Definizione 4.1.4. Sia $\mathcal{C}$ una categoria protomodulare, siano X, Y, Z oggetti di $\mathcal{C}$ e consideriamo due morfismi $f\colon X \to Z$, $f'\colon Y \to Z$. Diciamo che la coppia (f, f') *commuta* se esiste un morfismo $\phi\colon X \times Y \to Z$ tale che sia commutativo il seguente diagramma:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\varepsilon_X"] \arrow[dr, "f"'] & X \times Y \arrow[d, dotted, "\phi"] & Y \arrow[l, "\varepsilon_Y"'] \arrow[dl, "f'"] \\ & Z & \end{tikzcd}$$

Diciamo che X è *abeliano* se $(1_X, 1_X)$ commuta.

4.2 Commutatori di Huq e Smith

Siamo interessati a trovare una buona definizione di commutatore di due ideali in un'algebra di pre-Lie, in modo da poterne studiare il reticolo moltiplicativo. Per farlo utilizzeremo i commutatori di Huq, introdotti appunto da Huq in [15], e i commutatori di Smith, che sono stati introdotti da Smith in [21]. In particolare vedremo che questi due commutatori coincidono nelle algebre di pre-Lie.

Abbiamo visto nella sezione precedente che la varietà delle K-algebre di pre-Lie è semi-abeliana, e in questo caso il commutatore di Huq si definisce come segue:

Definizione 4.2.1. Sia A una K-algebra di pre-Lie e siano I, J ideali di A. Definiamo il *commutatore di Huq* $[I, J]_H$ come il più piccolo ideale di A tale che l'omomorfismo canonico $I \times J \to A/[I, J]_H$ sia ben definito.

Proposizione 4.2.2. *Siano I, J due ideali in una K-algebra di pre-Lie A, allora vale $[I, J]_H = IJ + JI$.*

Dimostrazione. L'omomorfismo $\bar{\sigma} \colon I \times J \to A/[I, J]_H$ è ben definito se e solo se, presi $(i, j), (i', j') \in I \times J$, vale $\bar{\sigma}((i, j) \cdot (i', j')) \equiv \bar{\sigma}(i, j)\bar{\sigma}(i', j')$, cioè se e solo se $ii' + jj' \equiv (i + j)(i' + j')$ modulo $[I, J]_H$. Quindi otteniamo che $\bar{\sigma}$ è un omomorfismo se e solo se $ij' + ji' \equiv 0$ modulo $[I, J]_H$, cioè se e solo se $ij' + ji' \in [I, J]_H$. Si ha dunque che $[I, J]_H = IJ + JI$. $\square$

Definizione 4.2.3. Sia A una K-algebra di pre-Lie, siano I, J ideali di A e consideriamo il termine di Mal'stev definito da $p(a, b, c) = a-b+c$. Il *commutatore di Smith* $[I, J]_S$ è il più piccolo ideale di A tale che $p \colon \{(a, b, c); a, b, c \in A, a \equiv b \text{ mod} I, b \equiv c \text{ mod} J\} \to A/[I, J]_S$ sia un morfismo di algebre di pre-Lie.

Proposizione 4.2.4. *Siano I, J due ideali in una K-algebra di pre-Lie A, allora vale $[I, J]_S = IJ + JI$.*

Dimostrazione. L'applicazione $p\colon \{(b+i, b, b+j); b \in A, i \in I, j \in J\} \to A/[I,J]_S$ è un omomorfismo se e solo se, per ogni $b, b' \in A$, $i, i' \in I$, $j, j' \in J$, vale

$$p((b+i, b, b+j)(b'+i', b', b'+j')) \equiv p(b+i, b, b+j)p(b'+i', b', b'+j') \bmod [I,J]_S$$

cioè $p((b+i)(b'+i'), bb', (b+j)(b'+j')) \equiv (b+i+j)(b'+i'+j') \bmod [I,J]_S$, da cui si ottiene $0 \equiv ij' + ji' \bmod [I,J]_S$. Quindi il commutatore di Smith è l'ideale generato da $\{ij', ji'; i, i' \in I, j, j' \in J\}$, cioè $[I,J]_S = IJ + JI$. □

Corollario 4.2.5. *Siano I, J due ideali in una K-algebra di pre-Lie A, allora i commutatori di Huq e Smith coincidono e vale*

$$[I,J]_H = [I,J]_S = IJ + JI$$

Possiamo quindi evitare di distinguere tra commutatori di Huq e Smith, riferendoci ad essi semplicemente come *commutatori*. Chiaramente il commutatore è commutativo, nel senso che $[I,J] = [J,I]$.

In generale, se X è un sottoinsieme qualsiasi di una K-algebra di pre-Lie A, si definisce l'ideale generato da X come l'intersezione di tutti gli ideali di A che contengono X e lo si denota con $\langle X \rangle$. Questo ideale può anche essere scritto come l'unione $\langle X \rangle = \bigcup_{n \geq 0} X_n$ della catena ascendente $X_0 \subseteq X_1 \subseteq ...$ di K-sottomoduli di A, dove X_0 è il sottomodulo generato da X, mentre si definisce ricorsivamente $X_{n+1} = X_n + AX_n + X_nA$.
In particolare, abbiamo la seguente caratterizzazione per l'ideale $[I,J]$:

Proposizione 4.2.6. *Siano I, J due ideali in una K-algebra di pre-Lie A, allora si ha*

$$[I,J] = IJ + \sum_{n \geq 0} S_n$$

con $S_n = ((...(((JI)A)A)...)A)A$ dove il fattore A compare n volte a destra.

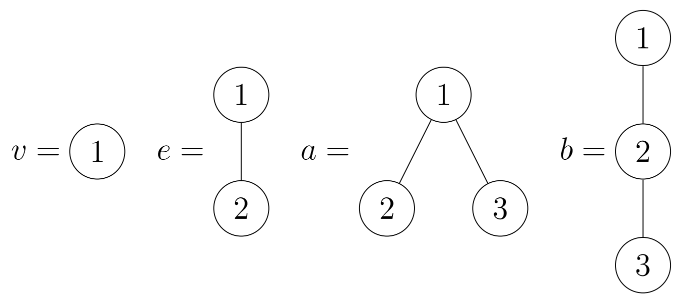
Dimostrazione. Il K-sottomodulo $IJ + \sum_{n \geq 0} S_n$ contiene chiaramente IJ e JI ed è contenuto nell'ideale generato da $IJ \cup JI$, quindi basta mostrare che è chiuso per moltiplicazione a destra e a sinistra per elementi di A.

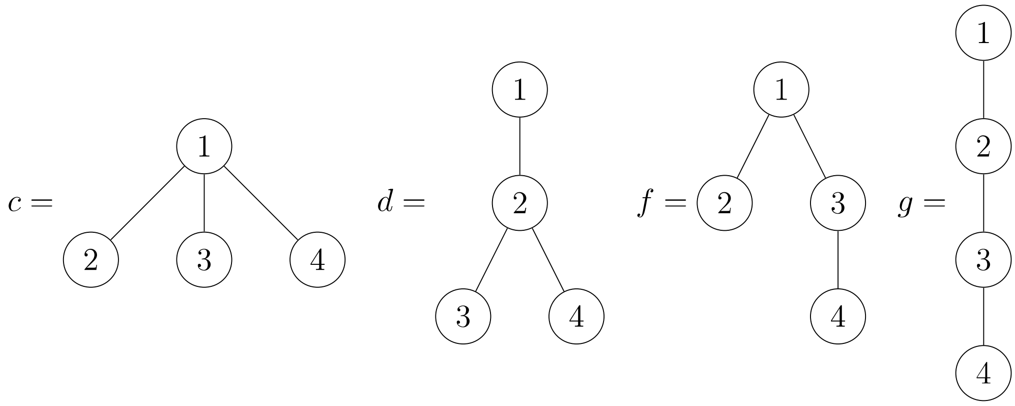
Per la proprietà di pre-Lie si ha $A(IJ) \subseteq (AI)J + (IA)J + I(AJ) \subseteq IJ$, e analogamente otteniamo $A(JI) \subseteq JI$.
Verifichiamo ora per induzione che $AS_n \subseteq S_n + S_{n+1}$ per ogni $n \geq 0$. Il caso $n = 0$ segue da quanto appena visto poiché $AS_0 = A(JI) \subseteq JI \subseteq JI + (JI)A = S_0 + S_1$. Supponiamo quindi che la proprietà valga per un generico $n > 0$ e verifichiamo per $n + 1$: abbiamo $AS_{n+1} = A(S_nA) \subseteq (AS_n)A + (S_nA)A + S_n(AA) \subseteq (S_n + S_{n+1})A + S_{n+1}A + S_nA = S_nA + S_{n+1}A = S_{n+1} + S_{n+2}$.
Per la moltiplicazione a destra per definizione vale $S_nA = S_{n+1}$ e infine vediamo che $(IJ)A \subseteq I(JA) + (JI)A + J(IA) \subseteq IJ + S_1 + S_0$.

$\square$

Nel prossimo esempio utilizzeremo questa caratterizzazione per mostrare che il commutatore non è associativo, cioè non vale necessariamente $[I, [J, L]] = [[I, J], L]$ per I, J, L ideali di un'algebra di pre-Lie.

Esempio. Sia $\mathcal{T}$ l'algebra degli alberi con radice vista nella quarta sezione del Capitolo 2 e consideriamo l'algebra $A := \mathcal{T}/\mathcal{T}_{\geq 5}$, dove $\mathcal{T}_{\geq 5}$ è l'ideale di $\mathcal{T}$ generato da tutti gli alberi con radice con almeno 5 vertici. Come K-modulo, $\mathcal{T}_{\geq 5}$ è il sottomodulo generato da tutti gli alberi con radice con almeno 5 vertici. A meno di isomorfismo, gli alberi con radice che hanno al massimo 4 vertici sono i seguenti:





quindi A è il K-modulo libero generato da $\{v, e, a, b, c, d, f, g\}$ e ha quindi dimensione 8. La moltiplicazione $\cdot$ tra i generatori di A è riassunta nella seguente tabella:

$\boldsymbol{\cdot}$	$\boldsymbol{v}$	$\boldsymbol{e}$	$\boldsymbol{a}$	$\boldsymbol{b}$	$\boldsymbol{c}$	$\boldsymbol{d}$	$\boldsymbol{f}$	$\boldsymbol{g}$
$\boldsymbol{v}$	$\boldsymbol{e}$	$\boldsymbol{a+b}$	$\boldsymbol{c+2f}$	$\boldsymbol{f+d+g}$	0	0	0	0
$\boldsymbol{e}$	$\boldsymbol{b}$	$\boldsymbol{f+g}$	0	0	0	0	0	0
$\boldsymbol{a}$	$\boldsymbol{d}$	0	0	0	0	0	0	0
$\boldsymbol{b}$	$\boldsymbol{g}$	0	0	0	0	0	0	0
$\boldsymbol{c}$	0	0	0	0	0	0	0	0
$\boldsymbol{d}$	0	0	0	0	0	0	0	0
$\boldsymbol{f}$	0	0	0	0	0	0	0	0
$\boldsymbol{g}$	0	0	0	0	0	0	0	0

Dalla tabella si vede che $A^2 = AA$ è generato da $\{e, a, b, c, d, f, g\}$ ed è quindi un K-modulo di dimensione 7, e analogamente si evince che A^2A è generato da $\{b, d, g, f\}$.
Sfruttando la proposizione precedente otteniamo dunque

$$[A, A] = AA + \sum_{n\geq 0}(...((AA)A)...A)A = A^2 + A^2A = A^2$$

Consideriamo ora A^2A^2: sempre dalla tabella vediamo che è generato da $\{f + g\}$, inoltre $(f + g)A = A(f + g) = 0$ quindi vale

$$[A^2, A^2] = \sum_{n\geq 0}(...((A^2A^2)A...)A)A = A^2A^2 + 0 + 0 + ... = A^2A^2$$

cioè $[A^2, A^2]$ è il K-modulo libero di dimensione 1 generato da $\{f + g\}$.
Guardiamo ancora la tabella e vediamo che AA^2 è generato da $\{a + b, f + g, c+2f, f+d+g\}$, mentre $(A^2A)A$ è generato da $\{g\}$ quindi $((A^2)A)A = 0$.
In tutto otteniamo

$$[A, A^2] = AA^2 + A^2A + (A^2A)A$$

cioè $[A, A^2]$ è il K-modulo libero di dimensione 6 generato da $\{a, b, c, d, g, f\}$.
Inoltre $[A, A^2]A$ è generato da $\{d, g\}$, dunque $([A, A^2]A)A = 0$, mentre $A[A, A^2]$ è generato da $\{c + 2f, f + g + d\}$.
Alla fine risulta quindi che $[A, [A, A^2]] = A[A, A^2] + [A, A^2]A$ è il K-modulo libero di dimensione 4 generato da $\{c, d, f, g\}$, mentre abbiamo visto prima che $[[A, A], A^2] = [A^2, A^2]$ ha dimensione 1 ed è generato da $\{f + g\}$. In particolare osserviamo che $[A, [A, A^2]] \neq [[A, A], A^2]$, cioè in questo caso il commutatore non è associativo.

4.3 Reticolo degli ideali

Con la definizione di commutatore data nella sezione precedente, possiamo introdurre il reticolo moltiplicativo di tutti gli ideali di una K-algebra di pre-Lie A: lo definiamo come il reticolo modulare completo $\mathcal{L}(A)$ di tutti gli ideali di A insieme al commutatore di ideali.

Definizione 4.3.1. Una K-algebra di pre-Lie A si dice *abeliana* se $[A, A] = 0$. Questo significa richiedere che $ij = 0$ per ogni $i, j \in A$. In particolare si richiede che la somma $\sigma\colon A \times A \to A$, $\sigma(i, j) = i + j$, sia un morfismo di algebre di pre-Lie perché σ è un morfismo se e solo se $\sigma((i, j), (i', j')) = \sigma(i, j)\sigma(i', j')$, ossia se e solo se $ii' + jj' = ii' + ij' + ji' + jj'$, quindi se e solo se $ij' + ji' = 0$ per ogni $i, i', j, j' \in A$.

Definizione 4.3.2. Un ideale P di una K-algebra di pre-Lie A si dice *primo* se è propriamente contenuto in A e, per ogni ideale I, J di A, la condizione $[I, J] \subseteq P$ implica $I \subseteq P$ o $J \subseteq P$.

L'ideale P si dice *semiprimo* se, per ogni ideale I di A, la condizione $[I, I] \subseteq P$ implica $I \subseteq P$.

Osservazione 4.3.1. Invece del commutatore $[I, J]$ avremmo potuto adottare un'altra definizione di prodotto tra ideali in un'algebra di pre-Lie: avremmo potuto prendere l'usuale prodotto IJ, cioè il K-sottomodulo generato da tutti i prodotti finiti ij, oppure l'ideale $\langle IJ \rangle$ generato dal K-sottomodulo IJ. Osserviamo che vale $IJ \subseteq \langle IJ \rangle \subseteq [I, J] = \langle IJ \rangle + \langle JI \rangle$. A queste diverse scelte di prodotto corrispondono diverse nozioni di "ideale primo", ma vedremo nella prossima proposizione che queste nozioni sono equivalenti:

Proposizione 4.3.3. *Le seguenti condizioni sono equivalenti per un ideale P di una K-algebra di pre-Lie A:*

(a) *Se I, J sono ideali di A e $IJ \subseteq P$, allora $I \subseteq P$ o $J \subseteq P$;*

(b) *Se I, J sono ideali di A e $\langle IJ \rangle \subseteq P$, allora $I \subseteq P$ o $J \subseteq P$;*

(c) *Se I, J sono ideali di A e $[I, J] \subseteq P$, allora $I \subseteq P$ o $J \subseteq P$;*

Dimostrazione. Le implicazioni $(a) \Rightarrow (b) \Rightarrow (c)$ sono conseguenza diretta del fatto che $IJ \subseteq \langle IJ \rangle \subseteq [I, J]$; vediamo dunque che $(c) \Rightarrow (a)$. Sia P un ideale che soddisfa la condizione (c) e siano I, J due ideali di A tali che $IJ \subseteq P$. Essendo P un ideale, allora vale $\langle IJ \rangle \subseteq P$. Inoltre, $[\langle JI \rangle, \langle JI \rangle] = \langle \langle JI \rangle \langle JI \rangle \rangle \subseteq \langle IJ \rangle \subseteq P$. Quindi, per l'ipotesi (c), abbiamo $\langle JI \rangle \subseteq P$ e dunque $[I, J] = \langle IJ \rangle + \langle JI \rangle \subseteq P$. Usando ancora (c), otteniamo che $I \subseteq P$ o $J \subseteq P$. $\square$

In particolare, quest'ultima proposizione mostra che se l'algebra di pre-Lie A è associativa allora la nozione di ideale primo coincide con l'usuale nozione di ideale primo per le algebre associative.

Definizione 4.3.4. Una K-algebra di pre-Lie A si dice *idempotente* (o *perfetta*) se $[A, A] = A$.

Definizione 4.3.5. Sia A un'algebra di pre-Lie. Denotiamo con $\mathrm{Spec}(A)$ l'insieme di tutti i suoi ideali primi, e per ogni $I \in \mathcal{L}(A)$ sia $V(I) = \{P \in \mathrm{Spec}(A)\ ;\ P \supseteq I\}$. Allora possiamo dare una topologia a $\mathrm{Spec}(A)$ prendendo come famiglia di insiemi chiusi tutti i $V(I)$, con $I \in \mathcal{L}(A)$. Questo spazio topologico è detto *spettro* di A ed è uno spazio sobrio (si veda [13]).

Definizione 4.3.6. Una K-algebra di pre-Lie si dice *iperabeliana* se non ha ideali primi.
Per esempio, le algebre di pre-Lie abeliane sono iperabeliane.

Definizione 4.3.7. Data una K-algebra di pre-Lie A, la sua *serie centrale discendente* è la seguente serie discendente:

$$A = A_1 \geq A_2 \geq A_3 \geq ...$$

dove $A_{n+1} = [A_n, A]$ per ogni $n \geq 1$.
Se $A_n = 0$ per qualche $n \geq 1$ allora A si dice *nilpotente*. Non è necessario distinguere tra nilpotenza destra e sinistra perché il commutatore è commutativo, cioè $[A_n, A] = [A, A_n]$.
La *serie derivata* di A è la seguente serie discendente:

$$A = A^{(0)} \geq A^{(1)} \geq A^{(2)} \geq ...$$

dove $A^{(n+1)} = [A^{(n)}, A^{(n)}]$ per ogni $n \geq 0$.
Se $A^{(n)} = 0$ per qualche $n \geq 0$ allora A si dice *risolubile*.

Come abbiamo osservato nella sezione precedente, il commutatore non è associativo, quindi non possiamo affermare che la condizione di risolubilità sia equivalente alla nilpotenza.

Capitolo 5

Prodotti semidiretti e bimoduli su algebre di pre-Lie

5.1 Endomorfismi idempotenti e prodotti semidiretti

Sia A una K-algebra di pre-Lie e sia e un endomorfismo idempotente di A. Allora abbiamo la scomposizione di K-moduli $A = \mathrm{Ker}(e) \oplus e(A)$, dove $\mathrm{Ker}(e)$ è un ideale di A e $e(A)$ è una K-sottoalgebra di pre-Lie di A. Tenendo a mente questa scomposizione, vedremo ora la nozione di prodotto semidiretto e la sua relazione con gli endomorfismi idempotenti.

Definizione 5.1.1. Sia A una K-algebra di pre-Lie che si scompone come somma diretta di K-moduli in $A = I \oplus B$, con I ideale di A e B K-sottoalgebra di pre-Lie di A. Allora diciamo che A è *prodotto semidiretto (interno)* di I e B.

Proposizione 5.1.2. *Sia A una K-algebra di pre-Lie, sia I un ideale di A e B una K-sottoalgebra di pre-Lie di A. Le seguenti condizioni sono equivalenti:*

i) $A = I \oplus B$ *come K-modulo;*

ii) *Per ogni* $a \in A$ *esiste un unico* $i \in I$ *e un unico* $b \in B$ *tale che* $a = i+b$*;*

iii) *Esiste un morfismo di* K*-algebre di pre-Lie* $A \to B$ *la cui restrizione a* B *è l'identità e il cui nucleo è* I*;*

iv) *Esiste un endomorfismo di* K*-algebre di pre-Lie idempotente di* A *la cui immagine è* B *e il cui nucleo è* I*.*

Dimostrazione. Vediamo che i) implica ii): sia $a \in A$, allora, poiché $A = I + B$, possiamo scrivere $a = i + b$ per qualche $i \in I$ e $b \in B$. Vediamone l'unicità. Se esistono $i' \in I$ e $b' \in B$ tali che $a = i' + b'$ allora $i + b = i' + b'$, cioè $i - i' = b - b'$. Ma la somma è diretta, quindi $B \cap I = 0$, e otteniamo $i - i' = b - b' = 0$, da cui $i = i'$ e $b = b'$.

Supponiamo adesso che valga ii). Allora possiamo definire un morfismo $\pi \colon A \to B$ come $\pi(a) = b$ se e solo se esiste un $i \in I$ tale che $a = i + b$, con $b \in B$. Questa applicazione è K-lineare, infatti, dati $a = i + b, a' = i' + b' \in A$, si ha $\pi(a + a) = \pi((i + i') + (b + b')) = b + b' = \pi(a) + \pi(a')$ e $\pi(aa') = \pi((i + b)(i' + b')) = \pi(ii' + ib' + bi' + bb') = bb' = \pi(a)\pi(a')$, inoltre per ogni $k \in K$ vale $\pi(ka) = \pi(ki + kb) = kb = k\pi(b)$. Abbiamo poi che $a = i + b \in \mathrm{Ker}(\pi)$ se e solo se $0 = \pi(a) = b$, cioè se e solo se $a = i \in I$. Infine, chiaramente se $a = b \in B$ si ha $\pi(b) = b$, ossia π ristretto a B è l'identità, verificando dunque iii).

Se vale iii), cioè se esiste un morfismo π di K-algebre di pre-Lie $A \to B$ la cui restrizione a B è l'identità e il cui nucleo è I, allora dato che $B \subseteq A$ possiamo definire un endomorfismo $f \colon A \to A$ come $f(a) = \pi(a)$ per ogni $a \in A$. Se $b \in B$ allora $f^2(b) = f(f(b)) = \pi(\pi(b)) = \pi(b) = f(b)$ poiché $\pi|_B = id_B$. Se invece $a \in A \backslash B$ allora $f(a) = 0 = f^2(a)$, quindi f è idempotente ed è verificata la condizione iv).

Supponiamo infine che esista un endomorfismo f come in iv) e dimostriamo che consegue i). Poiché $B, I \subseteq A$ basta mostrare che $I + B = A$ e $I \cap B = 0$. Chiaramente $I + B \subseteq A$, mostriamo quindi l'inclusione opposta: sia $a \in A$, e scriviamo $a = a - f(a) + f(a)$. Essendo f idempotente, vale $f(a - f(a)) = f(a) - f^2(a) = f(a) - f(a) = 0$, quindi $a - f(a) \in \mathrm{Ker}(f) = I$.

Inoltre ovviamente $f(a) \in f(A) = B$, quindi possiamo scrivere ogni $a \in A$ come somma di un elemento $a - f(a)$ di I e un elemento $f(a)$ in B. Sia ora $a \in I \cap B = \mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f)$. Allora $f(a) = 0$ ed esiste un elemento $a' \in A$ tale che $f(a') = a$, quindi otteniamo $0 = f(a) = f^2(a') = f(a') = a$, dunque $I \cap B = 0$. $\square$

Dalla precedente proposizione vediamo che esiste una corrispondenza 1-1 tra l'insieme di tutti gli endomorfismi idempotenti di una K-algebra di pre-Lie A e l'insieme di tutte le coppie (I, B) dove I è un ideale di A, B è una K-sottoalgebra di A e A è somma diretta di I e B come K-modulo.

Sia ora $(A, \cdot)$ una K-algebra di pre-Lie che sia prodotto semidiretto di un suo ideale I e una sua K-sottoalgebra di pre-Lie B. Nella Sezione 1.3 avevamo osservato che ogni ideale è un modulo, quindi abbiamo un pre-morfismo $\lambda \colon (B, \cdot) \to (\mathrm{End}(I_K), \circ)$ dato dalla moltiplicazione a sinistra per elementi di B. Possiamo considerare un ulteriore morfismo di K-moduli $\rho \colon B \to \mathrm{End}(I_K)$, dato dalla moltiplicazione a destra per elementi di B, cioè $\rho \colon b \mapsto \rho_b$, con $\rho_b(i) = i \cdot b$ per ogni $i \in I$. In questo modo possiamo riscrivere la proprietà di pre-Lie come $\rho_a(\lambda_b(i)) - \lambda_b(\rho_a(i)) = (\rho_a \circ \rho_b - \rho_{b \cdot a})(i)$ per ogni $a, b \in B$ e $i \in I$, oppure come $\lambda_a(i) \cdot j - \lambda_a(i \cdot j) = \rho_a(i) \cdot j - i \cdot \lambda_a(j)$ per ogni $a \in B$ e $i, j \in I$, o ancora come $\rho_a(x \cdot y) - x \cdot \rho_a(y) = \rho_a(y \cdot x) - y \cdot \rho_a(x)$ per ogni $a \in B$ e $i, j \in I$.

Viceversa, vediamo con il seguente teorema che possiamo costruire un prodotto semidiretto *esterno*:

Teorema 5.1.3. *Siano I e B due K-algebre di pre-Lie e sia (λ, ρ) una coppia di mappe K-lineari $B \to \mathrm{End}(I_K)$ tali che:*

(a) $\lambda \colon (B, \cdot) \to (\mathrm{End}(I_k), \circ)$ *sia un pre-morfismo;*

(b) $\rho_a \circ \lambda_b - \lambda_b \circ \rho_a = \rho_a \circ \rho_b - \rho_{b \cdot a}$ *per ogni $a, b \in B$;*

(c) $\lambda_a(i) \cdot j - \lambda_a(i \cdot j) = \rho_a(i) \cdot j - i \cdot \lambda_a(j)$ *per ogni $a \in B$ e $i, j \in I$;*

(d) $\rho_a(i \cdot j) - i \cdot \rho_a(j) = \rho_a(j \cdot i) - j \cdot \rho_a(i)$ *per ogni $a \in B$ e $i, j \in I$.*

Sulla somma diretta di K-moduli $I \oplus B$ definiamo una moltiplicazione $*$ ponendo

$$(i, b) * (j, c) = (i \cdot j + \lambda_b(j) + \rho_c(i), b \cdot c)$$

per ogni $(i, b), (j, c) \in I \oplus B$. Allora $(I \oplus B, *)$ è una K-algebra di pre-Lie.

Dimostrazione. Per ogni $a, b, c \in B$ e $x, y, z \in I$ abbiamo

$$\begin{aligned} &((x, a) * (y, b)) * (z, c) = (x \cdot y + \lambda_a(y) + \rho_b(x), a \cdot b) * (z, c) = \\ &= ((x \cdot y) \cdot z + \lambda_a(y) \cdot z + \rho_b(x) \cdot z + \lambda_{a \cdot b}(z) + \\ &+\rho_c(x \cdot y + \lambda_a(y) + \rho_b(x)), (a \cdot b) \cdot c) \end{aligned} \tag{1}$$

e

$$\begin{aligned} &(x, a) * ((y, b) * (z, c)) = (x, a) * (y \cdot z + \lambda_b(z) + \rho_c(y), b \cdot c) = \\ &= (x \cdot (y \cdot z) + x \cdot \lambda_b(z) + x \cdot \rho_c(y) + \\ &+\lambda_a(y \cdot z + \lambda_b(z) + \rho_c(y)) + \rho_{b \cdot c}(x), a \cdot (b \cdot c)). \end{aligned} \tag{2}$$

La differenza tra (1) e (2) è

$$\begin{aligned} ((x \cdot y) \cdot z &- x \cdot (y \cdot z) + \lambda_a(y) \cdot z - \lambda_a(y \cdot z) + \\ &+\rho_b(x) \cdot z - x \cdot \lambda_b(z) + \lambda_{a \cdot b}(z) - (\lambda_a \circ \lambda_b)(z) + \\ &+\rho_c(x \cdot y) - x \cdot \rho_c(y) + \rho_c(\lambda_a(y)) - \lambda_a(\rho_c(y)) + \rho_c(\rho_b(x)) - \rho_{b \cdot c}(x)), \\ &(a \cdot b) \cdot c - a \cdot (b \cdot c)). \end{aligned}$$

Allo stesso modo, per simmetria, vale

$$\begin{aligned} ((y, b) &* (x, a)) * (z, c) - (y, b) * ((x, a) * (z, c)) = \\ &((y \cdot x) \cdot z - y \cdot (x \cdot z) + \lambda_b(x) \cdot z - \lambda_b(x \cdot z) + \rho_a(y) \cdot z - y \cdot \lambda_a(z) + \\ &+\lambda_{b \cdot a}(z) - (\lambda_b \circ \lambda_a)(z) + \rho_c(y \cdot x) - y \cdot \rho_c(x) + \rho_c(\lambda_b(x)) - \lambda_b(\rho_c(x)) + \\ &+\rho_c(\rho_a(y)) - \rho_{a \cdot c}(y)), (b \cdot a) \cdot c - b \cdot (a \cdot c)). \end{aligned}$$

Per ipotesi su I e B vale la proprietà di pre-Lie, quindi basta mostrare che

$$\begin{aligned} &\lambda_a(y) \cdot z - \lambda_a(y \cdot z) + \rho_b(x) \cdot z - x \cdot \lambda_b(z) + \lambda_{a \cdot b}(z) - (\lambda_a \circ \lambda_b)(z) + \\ &+\rho_c(x \cdot y) - x \cdot \rho_c(y) + \rho_c(\lambda_a(y)) - \lambda_a(\rho_c(y)) + \rho_c(\rho_b(x)) - \rho_{b \cdot c}(x)) = \\ &\lambda_b(x) \cdot z - \lambda_b(x \cdot z) + \rho_a(y) \cdot z - y \cdot \lambda_a(z) + \\ &+\lambda_{b \cdot a}(z) - (\lambda_b \circ \lambda_a)(z) + \\ &+\rho_c(y \cdot x) - y \cdot \rho_c(x) + \rho_c(\lambda_b(x)) - \lambda_b(\rho_c(x)) + \\ &+\rho_c(\rho_a(y)) - \rho_{a \cdot c}(y)) \end{aligned} \tag{3}$$

Ora

$$\begin{aligned}
&\lambda_a(y)\cdot z-\lambda_a(y\cdot z)=\rho_a(y)\cdot z-y\cdot\lambda_a(z) && \text{per l'ipotesi (c);}\\
&\rho_b(x)\cdot z-x\cdot\lambda_b(z)=\lambda_b(x)\cdot z-\lambda_b(x\cdot z) && \text{per l'ipotesi (c);}\\
&\lambda_{a\cdot b}(z)-(\lambda_a\circ\lambda_b)(z)=\lambda_{b\cdot a}(z)-(\lambda_b\circ\lambda_a)(z) && \text{per l'ipotesi (a);}\\
&\rho_c(x\cdot y)-x\cdot\rho_c(y)=\rho_c(y\cdot x)-y\cdot\rho_c(x) && \text{per l'ipotesi (d);}\\
&\rho_c(\lambda_a(y))-\lambda_a(\rho_c(y))=\rho_c(\rho_a(y))-\rho_{a\cdot c}(y)) && \text{per l'ipotesi (b);}\\
&\rho_c(\rho_b(x))-\rho_{b\cdot c}(x))=\rho_c(\lambda_b(x))-\lambda_b(\rho_c(x)) && \text{per l'ipotesi (b).}
\end{aligned}$$

Sommando insieme queste equazioni si ottiene l'equazione (3). □

Dunque il teorema ci mostra le quattro proprietà che deve avere un'azione (λ, ρ), ovvero una coppia di mappe K-lineari $B \to \mathrm{End}(I_K)$, per costruire il prodotto semidiretto di una K-algebra di pre-Lie B che agisce su una K-algebra di pre-Lie I.

5.2 Bimoduli su un'algebra di pre-Lie

Un caso interessante di prodotto semidiretto è quando l'algebra di pre-Lie I è abeliana, cioè il caso in cui l'azione, ovvero la coppia (λ, ρ) di mappe K-lineari $B \to \mathrm{End}(I_K)$, è un'azione della K-algebra di pre-Lie B su un K-modulo M. In altre parole, quando I è un B-bimodulo:

Definizione 5.2.1. Sia A una K-algebra di pre-Lie. Un *bimodulo* su A è un K-modulo M_K con una coppia (λ, ρ) di mappe K-lineari $A \to \mathrm{End}(M_K)$ tali che:

(a) $\lambda\colon (A, \cdot) \to (\mathrm{End}(M_K), \circ)$ sia un pre-morfismo (cioè, M è un modulo su A);

(b) $\rho_a \circ \lambda_b - \lambda_b \circ \rho_a = \rho_a \circ \rho_b - \rho_{b\cdot a}$ per ogni $a, b \in B$.

Osserviamo che le condizioni (c) e (d) del teorema precedente sono sempre soddisfatte perché in questo caso il K-modulo M viene visto come un'algebra di pre-Lie abeliana, cioè un'algebra con moltiplicazione nulla.

Questa definizione appare per esempio in [20], dove l'autore A. Nijenhuis dà la seguente interpretazione della condizione (b): In (b) il termine a sinistra $\rho_a \circ \lambda_b - \lambda_b \circ \rho_a$ misura quanto l'azione non riesce ad essere associativa (per i bimoduli su un'algebra associativa questo termine deve essere zero), mentre il termine a destra $\rho_a \circ \rho_b - \rho_{b\cdot a}$ descrive quanto ρ non riesce a essere un antiomomorfismo di K-algebre.

5.3 Algebre unitali e estensione di Dorroh

Abbiamo visto che la classe delle algebre di pre-Lie contiene la classe delle algebre associative. Queste ultime, in particolare, si considerano solitamente con identità, e quando l'identità non è presente allora la si aggiunge con una costruzione detta "Estensione di Dorroh" [10]. Vediamolo più precisamente:

Definizione 5.3.1. Sia $(A, \cdot)$ una K-algebra qualsiasi. Una *identità* su A è un elemento $1_A \in A$ tale che $a \cdot 1_A = 1_A \cdot a = a$ per ogni $a \in A$. Chiaramente, se esiste, l'identità è unica.
Se un'algebra ha un'identità allora si dice *unitale*.

Definizione 5.3.2. Sia $(A, \cdot)$ una K-algebra qualsiasi. Un elemento $e \in A$ si dice *idempotente* se $e^2 := e \cdot e = e$.
Lo zero è sempre un elemento idempotente e, se esiste, anche l'identità è idempotente.

Sia A una K-algebra di pre-Lie. Anche l'anello associativo commutativo K è una K-algebra di pre-Lie, e c'è una corrispondenza 1-1 tra l'insieme di tutti i morfismi di K algebre di pre-Lie $K \to A$ e l'insieme di tutti gli elementi idempotenti di A. Infatti, se $e \in A$ è idempotente allora il morfismo corrispondente è $\varphi_e \colon K \to A$ dato da $\varphi_e(\alpha) = \alpha e$ per ogni $\alpha \in K$, e viceversa per ogni morfismo $\varphi \colon K \to A$, il corrispondente elemento idempotente di A è $\varphi(1)$.

Essendo K una K-algebra di pre-Lie, possiamo considerare la coppia di morfismi di K-moduli (λ, ρ) definiti come mappe $K \to \mathrm{End}(A_K)$ dove

$\lambda_\alpha = \rho_\alpha$ è la moltiplicazione per α per ogni $\alpha \in K$. Con questa scelta le condizioni (a), (b), (c), (d) del teorema precedente sono banalmente soddisfatte e otteniamo quindi il prodotto semidiretto $A\#K$, dove $A\#K = A \oplus K$ come K-modulo e la moltiplicazione è definita da

$$(x, \alpha)(y, \beta) = (x \cdot y + \beta x + \alpha y, \alpha\beta)$$

per ogni $x, y \in A$ e ogni $\alpha, \beta \in K$. Osserviamo in particolare che, per ogni $x \in A$ e ogni $\alpha \in K$, vale $(x, \alpha)(0_A, 1_K) = (x \cdot 0 + 1_K x + \alpha 0_A, \alpha 1_K) = (x, \alpha)$ e analogamente $(0_A, 1_K)(x, \alpha) = (x, \alpha)$, dunque $A\#K$ è una K-algebra di pre-Lie unitale con unità $(0_A, 1_K)$.
L'algebra di Lie sottogiacente a $A\#K$ è la somma diretta dell'algebra di Lie sottogiacente di $(A, \cdot)$ e l'algebra di Lie abeliana K, infatti

$$[(x, \alpha), (y, \beta)] = (x \cdot y + \beta x + \alpha y, \alpha\beta) - (y \cdot x + \alpha y + \beta x, \beta\alpha) =$$

$$= (x \cdot y - y \cdot x, \alpha\beta - \beta\alpha) = ([x, y], [\alpha, \beta])$$

Vediamo ora il caso particolare in cui anche A è unitale:

Proposizione 5.3.3. *Sia $(A, \cdot)$ una K-algebra di pre-Lie unitale. Allora $A\#K \cong A \times K$ come K-algebre.*

Dimostrazione. Consideriamo la mappa $\eta\colon A\#K \to A \times K$ definita come $\eta(x, \alpha) = (x + \alpha 1_A, \alpha)$. Chiaramente η è un isomorfismo di K-moduli, quindi basta verificare che sia anche un morfismo di K algebre. Siano dunque $(x, \alpha), (y, \beta) \in A\#K$, abbiamo

$$\eta((x, \alpha)(y, \beta)) = \eta(x \cdot y + \beta x + \alpha y, \alpha\beta) = (x \cdot y + \beta x + \alpha y + \alpha\beta 1_A, \alpha\beta)$$

e

$$\eta(x, \alpha)\eta(y, \beta) = (x + \alpha 1_A, \alpha)(y + \beta 1_A, \beta) =$$

$$= (x \cdot y + x \cdot (\beta 1_A) + (\alpha 1_A) \cdot y + (\alpha 1_A)(\beta 1_A), \alpha\beta) =$$

$$= (x \cdot y + \beta(x \cdot 1_A) + \alpha(1_A \cdot y) + \alpha\beta(1_A \cdot 1_A), \alpha\beta) =$$

$$= (x \cdot y + \beta x + \alpha y + \alpha\beta 1_A, \alpha\beta)$$

dove nella penultima uguaglianza si è usato il fatto che A è una K-algebra, quindi la moltiplicazione $\cdot$ è K-bilineare. Abbiamo quindi $\eta((x,\alpha)(y,\beta)) = \eta(x,\alpha)\eta(y,\beta)$ per ogni $(x,\alpha),(y,\beta) \in A\#K$, perciò η è un isomorfismo di K-algebre. □

Consideriamo ora la categoria $\mathrm{PreL}_{K,1}$ i cui oggetti sono le K-algebre di pre-Lie con identità e i cui morfismi sono i morfismi di K-algebre $f\colon A \to B$ tali che $f(1_A) = (1_B)$.
Possiamo anche considerare la categoria $\mathrm{PreL}_{K,1,a}$ i cui oggetti sono le K-algebre di pre-Lie con *aumentazione*, cioè le coppie (A,ε_A) dove A è un oggetto di $\mathrm{PreL}_{K,1}$ e $\varepsilon_A\colon A \to K$ è un morfismo di $\mathrm{PreL}_{K,1}$ inverso a sinistra di φ_{1_A}, cioè tale che commuti

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, "\varphi_{1_A}"] \arrow[rr, bend right, "id_K"'] & A \arrow[r, "\varepsilon_A"] & K \end{tikzcd}$$

Poi, un morfismo $f : (A,\varepsilon_A) \to (B,\varepsilon_B)$ in $\mathrm{PreL}_{K,1,a}$ è un morfismo $f : A \to B$ in $\mathrm{PreL}_{K,1}$ tale che $\varepsilon_B f = \varepsilon_A$, cioè tale che commuti

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\varepsilon_A"'] & & B \arrow[dl, "\varepsilon_B"] \\ & K & \end{tikzcd}$$

Osserviamo che $A\#K$ è un oggetto di $\mathrm{PreL}_{K,1,a}$ se prendiamo come aumentazione la proiezione canonica $\pi_K\colon A\#K = A \oplus K \to K$.

Teorema 5.3.4. *Le categorie* PreL_K *e* $\mathrm{PreL}_{K,1,a}$ *sono equivalenti.*

Dimostrazione. Consideriamo il funtore $F\colon \mathrm{PreL}_K \to \mathrm{PreL}_{K,1,a}$ che associa a ogni K-algebra di pre-Lie A la coppia $(A\#K, \pi_K^A)$ e che a ogni morfismo $f\colon A \to B$ in PreL_K associa il morfismo $F(f)\colon (A\#K,\pi_K^A) \to (B\#K,\pi_K^B)$ definito come $F(f)(x,\alpha) = (f(x),\alpha)$. Questo funtore è ben definito perché, come abbiamo osservato, $A\#K$ è unitale con aumentazione π_K^A, $F(f)$ è un morfismo di algebre di pre-Lie perché f lo è, vale $F(f)(1_{A\#K}) = F(f)(0,1) = (f(0),1) = (0,1) = 1_{B\#K}$ e $\pi_K^B f(x,\alpha) = \pi_K^B(f(x),\alpha) = \alpha = \pi_K^A(x,\alpha)$

per ogni $(x, \alpha) \in A\#K$. Infine, se abbiamo due morfismi $f\colon A \to B$ e $g\colon B \to C$ in PreL_K allora $F(g \circ f)(x, \alpha) = (g \circ f(x), \alpha) = (g(f(x)), \alpha) = F(g)(f(x), \alpha) = F(g)(F(f)(x, \alpha)) = F(f) \circ F(g)(x, \alpha)$ e chiaramente $F(id_A)(x, \alpha) = (id_A(x), \alpha) = (x, \alpha)$, cioè $F(id_A)$ è il morfismo identico su $(A\#K, \pi_K^A)$. Riassumendo, abbiamo definito un funtore $F\colon \mathrm{PreL}_K \to \mathrm{PreL}_{K,1,a}$ come

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, mapsto, "F"] \arrow[d, "f"'] & (A\#K, \pi_K^A) \arrow[d, "F(f)"] & (x, \alpha) \arrow[d, mapsto] \\ B \arrow[r, mapsto, "F"] & (B\#K, \pi_K^B) & (f(x), \alpha) \end{tikzcd}$$

Costruiamo ora il funtore quasi-inverso. Sia $G\colon \mathrm{PreL}_{K,1,a} \to \mathrm{PreL}_K$ il funtore che manda ogni K-algebra di pre-Lie unitale con aumentazione (A, ε_A) in $\mathrm{Ker}(\varepsilon_A)$ e ogni morfismo $f\colon (A, \varepsilon_A) \to (B, \varepsilon_B)$ nella restrizione $f|_{\mathrm{Ker}(\varepsilon_A)}$. Questo funtore è ben definito perché, essendo ε_A un morfismo di K-algebre di pre-Lie, $\mathrm{Ker}(\varepsilon_A)$ è una K-sottoalgebra di pre-Lie di A quindi in particolare è di pre-Lie, e se $x \in \mathrm{Ker}(\varepsilon_A)$ allora $\varepsilon_B(G(f))(x) = \varepsilon_B(f(x)) = \varepsilon_A(x) = 0$ per le proprietà di f, ossia $G(f)(x) \in \mathrm{Ker}(\varepsilon_B)$ quindi $G(f)$ è un morfismo di K-algebre di pre-Lie $\mathrm{Ker}(\varepsilon_A) \to \mathrm{Ker}(\varepsilon_B)$. Si verifica poi immediatamente che, dati due morfismi $f\colon (A, \varepsilon_A) \to (B, \varepsilon_B)$ e $g\colon (B, \varepsilon_B) \to (C, \varepsilon_C)$, si ha $G(g \circ f) = G(g) \circ G(f)$ e $G(id_{(A,\varepsilon_A)}) = id_{\mathrm{Ker}(\varepsilon_A)}$. Abbiamo dunque definito un funtore $G\colon \mathrm{PreL}_{K,1,a} \to \mathrm{PreL}_K$ come

$$\begin{tikzcd} (A, \varepsilon_A) \arrow[r, mapsto, "G"] \arrow[d, "f"'] & \mathrm{Ker}(\varepsilon_A) \arrow[d, "G(f)"] & x \arrow[d, mapsto] \\ (B, \varepsilon_B) \arrow[r, mapsto, "G"] & \mathrm{Ker}(\varepsilon_B) & f(x) \end{tikzcd}$$

Costruiamo adesso l'equivalenza di categorie. Consideriamo il funtore identico I e il funtore FG da $\mathrm{PreL}_{K,1,a}$ in se stessa e osserviamo innanzitutto che se $(A, \varepsilon_A), (B, \varepsilon_B)$ sono K-algebre di pre-Lie unitali con aumentazione allora abbiamo $FG(A, \varepsilon_A) = F(\mathrm{Ker}\varepsilon_A) = (\mathrm{Ker}\varepsilon_A\#K, \pi_K)$, e se $f\colon (A, \varepsilon_A) \to (B, \varepsilon_B)$ è un morfismo allora vale $FG(f)(x, \alpha) = (G(f)(x), \alpha) = (f(x), \alpha)$ per ogni $(x, \alpha) \in (\mathrm{Ker}\varepsilon_A\#K, \pi_K)$. Consideriamo ora la famiglia di applicazioni

$\eta = \{\eta_A\}_{(A,\varepsilon_A)\in \mathrm{PreL}_{K,1,a}}$, dove definiamo ogni η_A come

$$\begin{aligned} \eta_A \colon (\mathrm{Ker}\varepsilon_A \# K, \pi_K) &\longrightarrow (A, \varepsilon_A) \\ (x,\alpha) &\longmapsto x + \alpha 1_A \end{aligned}$$

Abbiamo dunque il seguente diagramma:

$$\begin{tikzcd} FG(A,\varepsilon_A) = (\mathrm{Ker}\varepsilon_A \# K, \pi_K) \arrow[r, "\eta_A"] \arrow[d, "FG(f)"'] & (A,\varepsilon_A) \arrow[d, "f"] \\ FG(B,\varepsilon_B) = (\mathrm{Ker}\varepsilon_B \# K, \pi_K) \arrow[r, "\eta_B"] & (B,\varepsilon_B) \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} (x,\alpha) \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & x + \alpha 1_A \arrow[d, mapsto, dashed] \\ (f(x),\alpha) \arrow[r, mapsto] & f(x) + \alpha 1_B \end{tikzcd}$$

Il diagramma è chiaramente commutativo poiché, usando le proprietà di f, vale $f\eta_A(x,\alpha) = f(x+\alpha 1_A) = f(x)+\alpha f(1_A) = f(x)+\alpha 1_B$. Dobbiamo quindi verificare che η_A sia effettivamente un morfismo in $\mathrm{PreL}_{K,1,a}$. È immediato vedere che si tratta di un morfismo di K-moduli, verifichiamo dunque che η_A è morfismo di K-algebre:

$$\eta_A((x,\alpha)(y,\beta)) = \eta_A(xy + \beta x + \alpha y, \alpha\beta) = xy + \beta x + \alpha y + \alpha\beta 1_A$$

$$\eta_A(x,\alpha)\eta_A(y,\beta) = (x + \alpha 1_A)(y + \beta 1_A) = xy + \beta x + \alpha y + \alpha\beta 1_A$$

ossia $\eta_A((x,\alpha)(y,\beta)) = \eta_A(x,\alpha)\eta_A(y,\beta)$ per ogni $(x,\alpha),(y,\beta) \in (\mathrm{Ker}\varepsilon_A \# K, \pi_K)$. Ricordiamo che $\varphi_{1_A} \colon K \to A$ è definito come $\varphi_{1_A}(\alpha) = \alpha 1_A$ per ogni $\alpha \in K$, e vale $\varepsilon_A \varphi_{1_A} = id_K$. Abbiamo dunque $\varepsilon_A \eta_A(x,\alpha) = \varepsilon_A(x + \alpha 1_A) = \varepsilon_A(x + \varphi_{1_A}(\alpha)) = \varepsilon_A(x) + \varepsilon_A\varphi_{1_A}(\alpha) = 0 + \alpha = \pi_K(x,\alpha)$, e infine $\eta_A(0,1_K) = 0 + 1_K 1_A = 1_A$.

Vediamo ora che η_A è un isomorfismo presentandone l'inverso. Osserviamo per prima cosa che, per ogni $x \in A$, vale $\varepsilon_A(x - \varphi_{1_A}(\varepsilon_A(x))) = \varepsilon_A(x) - \varepsilon_A\varphi_{1_A}\varepsilon_A(x) = \varepsilon_A(x) - id_K\varepsilon_A(x) = 0$, cioè $x - \varphi_{1_A}(\varepsilon_A(x)) \in \mathrm{Ker}\varepsilon_A$ per ogni $x \in A$. Possiamo quindi definire

$$\begin{aligned} \nu_A \colon (A,\varepsilon_A) &\longrightarrow (\mathrm{Ker}\varepsilon_A \# K, \pi_K) \\ x &\longmapsto (x - \varphi_{1_A}(\varepsilon_A(x)), \varepsilon_A(x)) = (x - \varepsilon_A(x)1_A, \varepsilon_A(x)) \end{aligned}$$

Si vede facilmente che ν_A è morfismo di K-moduli; inoltre, per ogni $x, y \in A$ vale

$$\nu_A(x)\nu_A(y) = (x - \varepsilon_A(x)1_A, \varepsilon_A(x))(y - \varepsilon_A(y)1_A, \varepsilon_A(y)) =$$

$$= ((x - \varepsilon_A(x)1_A)(y - \varepsilon_A(y)1_A) + \varepsilon_A(y)(x - \varepsilon_A(x)1_A) + \varepsilon_A(x)(y - \varepsilon_A(y)1_A), \varepsilon(xy)) =$$

$$= (xy - \varepsilon_A(y)x - \varepsilon_A(x)y + \varepsilon_A(x)\varepsilon_A(y)1_A + \varepsilon_A(y)x - \varepsilon_A(x)\varepsilon_A(y)1_A + \varepsilon_A(x)y +$$

$$-\varepsilon_A(x)\varepsilon_A(y)1_A, \varepsilon_A(xy)) = (xy - \varepsilon_A(xy)1_A, \varepsilon_A(xy)) = \nu_A(xy)$$

quindi ν_A è morfismo di K-algebre. Si ha poi $\nu_A(1_A) = (1_A - \varepsilon(1_A)1_A, \varepsilon(1_A)) = (1_A - 1_K 1_A, 1_K) = (0, 1_K)$, e infine $\pi_K\nu_A(x) = \pi_K(x - \varepsilon_A(x)1_A, \varepsilon_A(x)) = \varepsilon_A(x)$ per ogni $x \in A$, dunque ν_A è un morfismo in $\mathrm{PreL}_{K,1,a}$.
Vediamo che η_A e ν_A sono effettivamente inversi l'uno dell'altro. Sia $x \in A$, allora

$$\eta_A\nu_A(x) = \eta_A(x - \varepsilon_A(x)1_A, \varepsilon_A(x)) = x - \varepsilon_A(x)1_A + \varepsilon_A(x)1_A = x$$

e se $(x, \alpha) \in (\mathrm{Ker}\varepsilon_A \# K, \pi_K)$ allora abbiamo

$$\nu_A\eta_A(x, \alpha) = \nu_A(x + \alpha 1_A) = (x + \alpha 1_A - \varepsilon_A(x + \alpha 1_A)1_A, \varepsilon_A(x + \alpha 1_A)) =$$

$$= (x + \alpha 1_A - \varepsilon_A(x)1_A - \varepsilon_A\varphi_{1_A}(\alpha)1_A, \varepsilon_A(x) + \varepsilon_A\varphi_{1_A}(\alpha)) =$$

$$= (x + \alpha 1_A - 0 - \alpha 1_A, 0 + \alpha) = (x, \alpha)$$

dove nella penultima uguaglianza si è usato il fatto che $x \in \mathrm{Ker}\varepsilon_A$.
Abbiamo quindi dimostrato che $\eta \colon FG \to I$ è un'equivalenza naturale di endofuntori di $\mathrm{PreL}_{K,1,a}$.

Vediamo in ultimo che esiste anche un'equivalenza naturale $\theta \colon GF \to I$ di endofuntori di PreL_K. Se A, B sono K-algebra di pre-Lie, allora si ha $GF(A) = G(A\#K, \pi_K) = \mathrm{Ker}\pi_K = A \times \{0\}$ e se $f \colon A \to B$ è un morfismo allora $GF(f)(x, 0) = F(f)(x, 0) = (f(x), 0)$ per ogni $(x, 0) \in A \times \{0\}$. Consideriamo quindi la famiglia $\theta = \{\theta_A\}_{A \in \mathrm{PreL}_K}$ dove definiamo

$$\begin{aligned} \theta_A \colon A \times \{0\} &\longrightarrow A \\ (x, 0) &\longmapsto x \end{aligned}$$

Abbiamo dunque il seguente diagramma commutativo:

$$\begin{tikzcd}
GF(A) = A \times \{0\} \arrow[r, "\theta_A"] \arrow[d, "GF(f)"'] & A \arrow[d, "f"] & (x,0) \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & x \arrow[d, mapsto] \\
GF(B) = B \times \{0\} \arrow[r, "\theta_B"] & B & (f(x),0) \arrow[r, mapsto] & f(x)
\end{tikzcd}$$

Chiaramente ogni θ_A è morfismo di K-algebre di pre-Lie e ha ovviamente inversa

$$\begin{aligned} \tau_A \colon A &\longrightarrow A \times \{0\} \\ x &\longmapsto (x,0) \end{aligned}$$

Possiamo dunque affermare che $\theta \colon GF \to I$ è un'equivalenza naturale, e questo ci permette di concludere che le categorie PreL_K e $\mathrm{PreL}_{K,1,a}$ sono equivalenti. $\square$

Capitolo 6

Algebre di anti-pre-Lie

Le algebre di anti-pre-Lie sono state introdotte molto recentemente da Bai e Liu in [2]. Come vedremo, anche queste algebre sono Lie-ammissibili e presentano proprietà analoghe alle algebre di pre-Lie.

Definizione 6.0.1. Una K-algebra $(A, \circ)$ si dice di *anti-pre-Lie* se per ogni $x, y, z \in A$ valgono le due seguenti condizioni:

(1) $(x \circ y) \circ z + x \circ (y \circ z) = (y \circ x) \circ z + y \circ (x \circ z)$

(2) $[x, y] \circ z + [y, z] \circ x + [z, x] \circ y = 0$

dove definiamo l'usuale commutatore $[x, y] = x \circ y - y \circ x$.

Osservazione 6.0.1. In un'algebra di anti-pre-Lie $(A, \circ)$, la condizione (2) è equivalente alla seguente:

(3) $x \circ [y, z] + y \circ [z, x] + z \circ [x, y] = 0$

Infatti, $[x, y] \circ z + [y, z] \circ x + [z, x] \circ y = (x \circ y) \circ z - (y \circ x) \circ z + (y \circ z) \circ x - (z \circ y) \circ x + (z \circ x) \circ y - (x \circ z) \circ x = y \circ (x \circ z) - x \circ (y \circ z) + z \circ (y \circ x) - y \circ (z \circ x) + x \circ (z \circ y) - z \circ (x \circ y) = x \circ [z, y] + y \circ [x, z] + z \circ [y, x] = -x \circ [y, z] - y \circ [z, x] - z \circ [x, y]$, dove nella seconda uguaglianza usiamo la proprietà (1).

Vediamo ora una caratterizzazione di queste algebre:

Proposizione 6.0.2. *Una K-algebra $(A, \circ)$ è di anti-pre-Lie se e solo se*

(i) *è Lie-ammissibile;*

(ii) *il morfismo di moltiplicazione a sinistra $\lambda\colon (A, \circ) \to \mathrm{End}(A_K)$ induce un antiomomorfismo di algebre di Lie $\lambda\colon (A, [-,-]) \to \mathfrak{gl}(A)$.*

Dimostrazione. Se $(A, \circ)$ è di anti-pre-Lie allora in particolare valgono le proprietà (2) e (3), quindi si ha

$$[[x, y], z] + [[y, z], x] + [[z, x], y] =$$

$$= [x, y] \circ z + [y, z] \circ x + [z, x] - x \circ [y, z] - y \circ [z, x] - z \circ [x, y] = 0$$

per ogni $x, y, z \in A$, cioè il commutatore rispetta l'identità di Jacobi e $(A, [-,-])$ è quindi un'algebra di Lie. Inoltre, per la proprietà (1), vale $\lambda_x\lambda_y - \lambda_y\lambda_x = \lambda_{y\circ x} - \lambda_{x\circ y}$, ossia $[\lambda_x, \lambda_y] = \lambda_{[y,x]}$, cioè λ è un antiomomorfismo di algebre di Lie.

Viceversa, se $\lambda\colon (A, \circ) \to \mathrm{End}(A_K)$ induce un antiomomorfismo di algebre di Lie $\lambda\colon (A, [-,-]) \to \mathfrak{gl}(A)$ allora in particolare, per ogni $x, y \in A$, vale $[\lambda_x, \lambda_y] = \lambda_{[y,x]}$, che è equivalente alla condizione (1). Quindi, come visto nell'osservazione precedente, si ha $[x, y] \circ z + [y, z] \circ x + [z, x] \circ y = x \circ [z, y] + y \circ [x, z] + z \circ [y, x]$. Inoltre $(A, \circ)$ è Lie-ammissibile, dunque troviamo

$$0 = [[x, y], z] + [[y, z], x] + [[z, x], y] =$$

$$= [x, y] \circ z + [y, z] \circ x + [z, x] \circ y - z \circ [x, y] - x \circ [y, z] - y \circ [z, x] =$$

$$= 2([x, y] \circ z + [y, z] \circ x + [z, x] \circ y)$$

cioè vale anche la condizione (2). □

Osserviamo in particolare che anche le algebre di anti-pre-Lie sono Lie-ammissibili, ma a differenza delle pre-Lie necessitano la condizione aggiuntiva (2) per far sì che il commutatore soddisfi l'identità di Jacobi.

Ricordiamo che un'algebra A è di pre-Lie se e solo se l'associatore $[x, y, z] = (xy)z - x(yz)$ è invariante per scambio delle variabili y e z. Allo stesso modo possiamo definire l'*anti-associatore* come l'applicazione K-trilineare $[-,-,-]_a\colon A\times A\times A\to A$, $[x,y,z]_a=(xy)z+x(yz)$. Così vediamo che la condizione (1) significa chiedere che l'anti-associatore sia invariante per lo scambio delle prime due variabili. Diciamo poi che una K-algebra è *anti-associativa* se l'anti-associatore si annulla identicamente, quindi in particolare abbiamo che un'algebra anti-associativa è di anti pre-Lie se e solo se è Lie-ammissibile.

Ora siamo interessati a definire la categoria delle algebre di anti-pre-Lie. Vediamo dunque la seguente definizione:

Definizione 6.0.3. Siano M, M' due K-algebre qualsiasi e sia $\varphi\colon M\to M'$ un morfismo di K-moduli. Diciamo che φ è un *anti-pre-morfismo* se, per ogni $x,y\in M$, vale

$$\varphi(xy)+\varphi(x)\varphi(y)=\varphi(yx)+\varphi(y)\varphi(x)$$

Chiaramente, se φ è un anti-pre-morfismo allora $-\varphi$ sarà un pre-morfismo. Di conseguenza si ha che la composizione di due anti-pre-morfismi è un pre-morfismo e l'inverso di un anti-pre-morfismo biettivo è un anti-pre-morfismo.

Possiamo ora definire la categoria $\mathrm{AntiPreL}_{K,p}$ i cui oggetti sono le K-algebre di anti-pre-Lie e i cui morfismi sono gli anti-pre-morfismi. È necessario però fare attenzione perché l'usuale composizione di due anti-pre-morfismi non è un anti-pre-morfismo. Quindi è opportuno definire una nuova regola di composizione come segue: dati due anti-pre-morfismi $\varphi\colon M\to M'$ e $\psi\colon M'\to M''$, definiamo $\psi*\varphi:=-(\psi\circ\varphi)$ ottenendo così quanto richiesto.

Proposizione 6.0.4. *Esiste un funtore U dalla categoria $\mathrm{AntiPreL}_{K,p}$ alla categoria delle K-algebre di Lie che associa a ogni algebra di anti-pre-Lie $(A,\cdot)$ la sua algebra di Lie sottogiacente $(A,[-,-])$, e a ogni anti-pre-morfismo $\varphi\colon(A,\cdot)\to(A',\cdot)$ la mappa $-\varphi\colon(A,[-,-])\to((A',[-,-])$.*

Dimostrazione. Se $(A,\cdot)$, $(A',\cdot)$ sono K-algebre di anti-pre-Lie e $\varphi\colon A\to A'$ è un anti-pre-morfismo, allora l'identità $\varphi(ab)+\varphi(a)\varphi(b)=\varphi(ba)+$

$\varphi(b)\varphi(a)$ si può riscrivere come $\varphi(ab) - \varphi(ba) = \varphi(b)\varphi(a) - \varphi(a)\varphi(b)$, cioè, $\varphi([a, b]) = -[\varphi(a), \varphi(b)]$. Quindi per ogni anti-pre-morfismo $\varphi\colon A \to A'$ di algebre di anti-pre-Lie, la mappa $-\varphi$ è un morfismo di algebre di Lie $-\varphi = U(\varphi)\colon (A, [-, -]) \to (A', [-, -])$. Osserviamo infine che U preserva la composizione di morfismi, perché $U(\psi * \varphi) = U(-\psi \circ \varphi) = \psi \circ \varphi$. $\square$

Bibliografia

Bai [1] C. Bai, *An Introduction to Pre-Lie Algebras*, Algebra and Applications 1, A. Makhlouf (Ed.) (2021).

BL [2] C. Bai and G. Liu, *Anti-pre-Lie algebras, Novikov algebras and commutative 2-cocycles on Lie algebras*, arXiv https://doi.org/10.48550/arXiv.2207.06200

BM [3] C. Bai and D. Meng, *Left-symmetric algebras and complete Lie algebras*, Communications in Algebra, (2002) , 30:2, 1001-1015.

BB [4] F. Borceux and D. Bourn, *Mal'cev, protomodular, homological and semi-abelian categories*, Mathematics and Its Applications 566, Kluwer (2004).

B [5] N. Bourbaki, *Éléments de mathématique. Fasc. XXVI. Groupes et algèbres de Lie. Chapitre I: Algèbres de Lie*, Seconde édition Actualités Scientifiques et Industrielles **1285**, Hermann, Paris (1971).

Bo [6] D. Bourn, *From Groups to Categorial Algebra: Introduction to Protomodular and Mal'tsev Categories*, Springer International Publishing (2017).

Bu [7] D. Burde, *Left-symmetric algebras, or pre-Lie algebras in geometry and physics*, Central European Journal of Mathematics **168** (2006), 323–357.

Ca [8] A. Cayley, *On the Theory of Analytic Forms Called Trees*, Collected Mathematical Papers of Arthur Cayley, Cambridge Univ. Press, Cambridge, **3** (1890), 242–246.

CL [9] F. Chapoton and M.Livernet, *Pre-Lie algebras and the rooted trees operad*, International Mathematics Research Notices **8** (2001), 395–408.

CY [10] H. Chen and L. You, *Dorroh extensions of algebras and coalgebras*, Front. Math. China **16** (2021), 857–888.

Fa [11] A. Facchini, *Algebra e matematica discreta–Per studenti di informatica, ingegneria, fisica e matematica. Con numerosi esempi ed esercizi svolti*, Italia, Zanichelli (2000).

Fa2 [12] A. Facchini, *Algebraic structures from the point of view of complete multiplicative lattices*, available at: http://arxiv.org/abs/2201.03295 accepted for publication in Rings, Quadratic Forms, and their Applications in Coding Theory, Contemporary Math. (2022).

FFJ [13] A. Facchini, C. A. Finocchiaro and G. Janelidze, *Abstractly constructed prime spectra*, Algebra Universalis **83** (2022), no. 1, Paper No. 8, 38 pp.

Ge [14] M. Gerstenhaber, *The cohomology structure of an associative ring*, Ann. of Math. (2) **78** (1963), 267–288.

Hu [15] S. A. Huq, *Commutator, nilpotency, and solvability in categories*, Quart. J. Math. Oxford Ser. (2) **19** (1968), 363–389.

JMT [16] G. Janelidze, L. Márki and W. Tholen, *Semi-abelian categories*, J. Pure Appl. Algebra **168** (2002), no. 2–3, 367–386.

JMV [17] G. Janelidze, L. Márki and S. Veldsman, *Commutators for near-rings: Huq $\neq$ Smith*, Algebra Universalis **76** (2016), no. 2, 223–229.

Ko [18] J.-L. Koszul, *Domaines bornés homogènes et orbites de groupes de transformations affines*, Bulletin de la Société Mathématique de France **89** (1961), 515–533.

KS [19] K. Kremnizer and M. Szczesny, *Feynman graphs, rooted trees, and Ringel-Hall algebras*, Comm. Math. Phys. **289** (2009), no. 2, 561?577.

Ni [20] A. Nijenhuis, *Sur une classe de propriétés communes à quelques types différents d'algèbres*, Nieuw Arch. Wisk. (3) **17** (1969), 17–46. French translation in Enseign. Math. (2) **14** (1968), 225–277.

Sm [21] J. D. H. Smith, *Mal'cev varieties*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 554. Springer-Verlag, Berlin-New York, (1976).

Vi [22] È. B. Vinberg, *Theory of homogeneous convex cones*, Trudy Moscow Mat. Obshch. **12** (1963), 303–358. English translation in Transactions of the Moscow mathematical society, American Mathematical Society (1963).