

---

# UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

---

Dipartimento di Fisica e Astronomia “Galileo Galilei”  
Corso di Laurea Triennale in Astronomia

Tesi di Laurea

---

## Test osservativi sull’espansione cosmica dell’universo

---

*Relatore*

Prof. Michele Liguori

*Laureando*

Mario Marco Cosulich

Anno Accademico 2017/2018



12 dicembre 2018



*”Despite what your mom might have told you,  
we shouldn’t assume that we are the centre of the universe.  
(This assumption is sometimes called the cosmological principle)”*  
Baumann, Cosmology

# Indice

<b>1</b>	<b>Introduzione</b>	<b>1</b>
1.1	Cosmologia di base . . . . .	3
1.1.1	Metrica . . . . .	3
1.1.2	Redshift . . . . .	6
1.1.3	Distanze . . . . .	8
1.2	Dinamica Cosmica . . . . .	9
<b>2</b>	<b>Test osservativi</b>	<b>13</b>
2.1	SNe . . . . .	13
2.2	Baryonic Acoustic Oscillation . . . . .	19
2.3	weak lensing . . . . .	25
<b>3</b>	<b>Risultati</b>	<b>29</b>
3.1	Dati e diagramma di Hubble . . . . .	29
3.2	problematiche DE . . . . .	33
<b>4</b>	<b>Conclusioni</b>	<b>35</b>

# 1 — Introduzione

Nella formulazione della Relatività Generale (GR), con un aiuto osservativo, Einstein ipotizzò (correttamente) che l'universo fosse omogeneo su grandi scale e propose uno spazio pieno di materia con una geometria tridimensionale sferica finita e curvatura positiva. Assunse anche (erroneamente) che l'Universo fosse statico. Trovando queste due ipotesi incompatibili, Einstein modificò le equazioni di campo per includere il famigerato "termine cosmologico", ora comunemente noto come "costante cosmologica", denotato con la lettera greca  $\Lambda$ .

Negli anni '20 Friedmann e Lemaitre introdussero modelli cosmologici basati sulla GR con un Universo in espansione o in contrazione. Nel 1929, Hubble fornì prove dirette per l'espansione dell'Universo, rimuovendo così la motivazione originale per il termine aggiuntivo. Nel 1965, la scoperta e l'interpretazione della radiazione cosmica di fondo (*Cosmic Microwave Background*, CMB, Penzias e Wilson 1965) giocò un ruolo fondamentale che vedremo nel seguito. Dagli anni '30 agli anni '80, una costante cosmologica sembrava non essere necessaria per spiegare le osservazioni cosmologiche. Poiché  $\Lambda$  contribuisce come termine energetico a densità costante nel tempo, questa può essere interpretata come contributo dell'energia di vuoto. Da qui, come definito negli anni '80, nasce il problema della "Costante Cosmologica" che si riferisce alla discrepanza di  $\sim 120$  ordini di grandezza tra il valore teorico atteso<sup>1</sup> e quello osservato. Alla fine degli anni '90, tuttavia, due studi indipendenti su supernovae distanti hanno scoperto che l'espansione dell'universo ha accelerato negli ultimi cinque miliardi di anni (Riess et al., 1998; Perlmutter et al., 1999), una scoperta straordinaria che ora è sostenuta da molteplici prove indipendenti. Il Cosmo è in espansione accelerata, laddove un Universo dominato dalla materia avrebbe dovuto portare alla decelerazione dell'espansione.

L'accelerazione cosmica è il puzzle più profondo nella fisica contemporanea: da un lato questa potrebbe richiedere l'esistenza di una nuova componente energetica dell'Universo, che non sia né materia né radiazione, o in alternativa, una modifica su scale cosmologiche della GR. L'accelerazione cosmica può essere l'indizio empirico cruciale che porta nuovi quesiti e mette in discussione la comprensione fisica dell'Universo, come accreditare l'esistenza di dimensioni spaziali aggiuntive oppure far luce sulla natura della gravità.

L'accelerazione inoltre ha ispirato una vasta gamma di ambiziosi sforzi sperimentali, che mirano a misurare la storia evolutiva dell'espansione e lo sviluppo delle strutture nel Cosmo con precisione a livello del percentuale o migliore (Frieman et al. 2008).

Alla fine degli anni '80 e all'inizio degli anni '90, tuttavia, una varietà di prove indirette cominciò ad accumularsi a favore di un valore costante di  $\Lambda$ . Studi di ammassi di galassie su larga scala hanno implicato un basso parametro di densità della materia<sup>2</sup>  $\Omega_m = \rho_m/\rho_{crit} \sim 0.15 - 0.4$  (Copeland et al. 2006), in accordo con le stime dinamiche dirette secondo le quali le galassie sono dei veri e propri indicatori della distribuzione di massa.

La riconciliazione di questo risultato con la previsione cosmologica di un Universo spazialmente piatto, come si evince dallo studio della CMB, richiedeva una nuova componente energetica. Il conflitto tra alti valori della costante di Hubble e l'età degli ammassi globulari favorì una Costante Cosmologica.

---

<sup>1</sup>Questa precisa discrepanza, di  $\sim 120$  ordini di grandezza, deriva dai calcoli effettuati nella teoria quantistica.

<sup>2</sup>Il parametro di densità è un osservabile cosmologico che si utilizza per determinare la geometria dello spazio. Esso è denotato con la lettera greca  $\Omega$  e definito come  $\Omega \equiv \frac{8\pi G\rho}{3}$ , ove  $\rho$  è la densità di energia di materia o radiazione.  $\Omega$  è legato alla curvatura tramite:  $k = \Omega - 1$  dove  $k$  è l'inverso della radice quadrata del raggio di curvatura, ossia il parametro geometrico che definisce una figura.

---

Pertanto, la combinazione dei dati di CMB, dati di struttura su larga scala, età dell'universo hanno portato molti cosmologi a considerare i modelli con una costante cosmologica e alcuni a dichiararla come la soluzione preferita.

A metà degli anni '90, due gruppi di ricerca si misero a misurare la velocità di decelerazione cosmica, determinando in tal modo il parametro di densità della materia  $\Omega_m$ , scoprendo e monitorando supernovae di tipo *Ia* di alto redshift. La scoperta che il picco di luminosità delle supernove sia strettamente correlato alla larghezza della curva di luce ha svolto un ruolo fondamentale in questa strategia, potendo normalizzare le curve di luce trovando un valore intrinseco di luminosità. Attraverso questo valore è possibile calcolare i parametri cosmologici, incluso il parametro di densità della Costante Cosmologica. Mentre la prima analisi di un piccolo campione indicava la decelerazione (Perlmutter et al., 1997), nel 1998 le due squadre erano convergenti su un risultato notevole: rispetto alle supernove locali di tipo *Ia*, le supernovae a  $z = 0.5$  erano più deboli del previsto in un universo dominato dalla materia con  $\Omega_m = 0.2$  (Riess et al., 1998; Perlmutter et al., 1999). Persino un universo vuoto, in espansione, non era coerente con le osservazioni. Entrambe le squadre hanno interpretato le loro misurazioni come prove per un universo in accelerazione con una costante cosmologica, coerente con un universo piatto ( $\Omega_{tot} = 1$ ) avente  $\Omega_\Lambda = 0.7$ .

Allo attuale le prove osservative formano una solida struttura a sostegno di una costante cosmologica e di una espansione accelerata. Ad oggi il quesito non è più se l'universo sia in espansione, ma perchè.

## 1.1 Cosmologia di base

Prima di iniziare la descrizione del cosmo, è importante definire i sistemi di riferimento:

Il **substrato cosmico** è il costituente dell'universo. E' formato sia da particelle relativistiche come i fotoni, sia da particelle non relativistiche.

Il sistema di riferimento solidale con il substrato è definito come **osservatore fondamentale**. Se il substrato è in moto allora l'osservatore sarà detto **comovente**.

Man mano che si osserva l'universo all'aumentare della distanza, esso sembra isotropo. Partendo dal nostro sistema di riferimento, la via Lattea, ed osservando a maggiori distanze, gli oggetti cosmici si raggruppano, formando in primo luogo gli ammassi di galassie e successivamente i super amassi. L'universo assume una forma semplice, isotropa ed omogenea (Fig 1.1).

Dall'era post copernicana non vi sono ragioni per ritenere che la nostra posizione nell'universo sia privilegiata, ne segue che ogni osservatore fondamentale vede la stessa struttura dell'universo ad un determinato tempo cosmico. Queste assunzioni vengono ricapitolate sotto il nome di '**Principio cosmologico**'. In altre parole: 'non importa cosa tua madre possa averti detto, non possiamo assumere di essere al centro dell'universo' [2].

In prima approssimazione, in questa trattazione, lavorerò con l'assunzione di validità del principio cosmologico. Come vedremo più avanti, i dati ricavati dal Fondo Cosmico delle Microonde ( da qui in poi, CMB), sono a supporto dei concetti sopra citati.

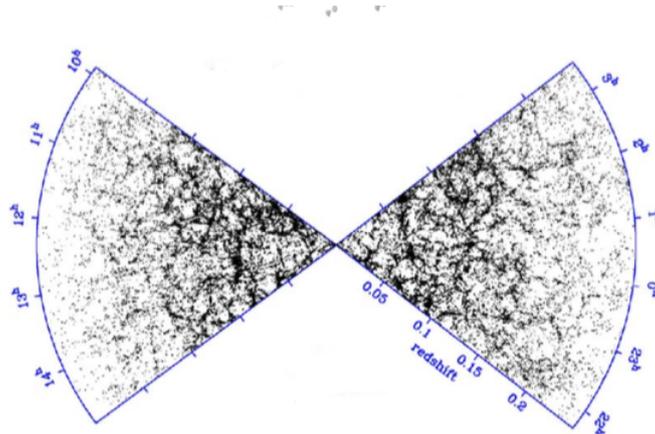


Figura 1.1: Distribuzione degli ammassi di galassie all'aumentare della distanza (z). Presa da [6].

### 1.1.1 Metrica

Una metrica è un oggetto matematico che descrive la geometria di uno spazio attraverso i prodotti scalari. Nel caso di uno spazio di Minkowski <sup>3</sup> con riferimento al punto di coordinate (0,0,0,0) avremo:

$$ds^2 = c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = g_{\mu\nu}dX^\mu dX^\nu \quad (1.1)$$

Ove, la seconda uguaglianza tiene conto della convenzione di Einstein nel formalismo tensoriale, ossia la somma su indici ripetuti. Uno spazio omogeneo e isotropo può assumere solo tre costanti di curvatura: curvatura zero (piatto), positiva (chiuso) e negativa (aperto). Andiamo a vedere nel dettaglio la geometria di questi tre casi.

---

<sup>3</sup>si è assunta una segnatura (3,1), ovvero  $g_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

- **Spazio piatto:** è il comune spazio Euclideo, ove le distanze sono definite tramite:

$$dl^2 = d\vec{x}^2 = \delta_{ij} dx^i dx^j$$

- **Spazio Chiuso:** la costante di curvatura ha un valore positivo. Può essere rappresentato come una sfera tri-dimensionale in uno spazio a 4-dimensioni. L'elemento di linea è:

$$dl^2 = d\vec{x}^2 + du^2, \quad \vec{x}^2 + u^2 = a^2$$

dove  $a^2$  rappresenta il raggio della sfera.

- **Spazio Aperto:** è uno spazio con costante di curvatura negativa. Può essere rappresentato come un iperboloido tri-dimensionale in uno spazio a 4-dimensioni. Le distanze su questo spazio sono definite come:

$$dl^2 = d\vec{x}^2 - du^2, \quad \vec{x}^2 - u^2 = a^2$$

ove  $a^2$  è una costante arbitraria.

Omogeneità ed isotropia dello spazio garantiscono l'invarianza per rotazioni e traslazioni degli elementi di linea.

Riscalando le coordinate per gli ultimi due casi,  $\vec{x} \rightarrow a\vec{x}$  e  $u \rightarrow au$ , si ottiene:

$$dl^2 = a^2 [d\vec{x}^2 \pm du^2], \quad \vec{x}^2 \pm u^2 = 1 \quad (1.2)$$

Dove  $a$  ha le dimensioni di una lunghezza.

Differenziando la condizione al contorno dell'equazione 1.2, si ha  $\vec{x} d\vec{x} = u du$ , allora

$$dl^2 = a^2 \left[ d\vec{x}^2 \pm \frac{(\vec{x}d\vec{x})^2}{1 \mp \vec{x}^2} \right] = a^2 \left[ d\vec{x}^2 + k \frac{(\vec{x}d\vec{x})^2}{1 - k\vec{x}^2} \right] = a^2 g_{ij} dx^i dx^j \quad (1.3)$$

ove

$$g_{ij} = \delta_{ij} + k \frac{x_i x_j}{1 - k x^k x^k}, \quad k = \begin{cases} -1 & \text{Aperto} \\ 0 & \text{Piatto} \\ +1 & \text{Chiuso} \end{cases} \quad (1.4)$$

Utilizzando le coordinate sferiche,  $\vec{x}(r, \theta, \phi)$  è possibile riscrivere l'elemento di linea in forma diagonale. Usando:

$$d\vec{x}^2 = dr^2 + r^2(\sin^2 \theta d\phi^2 + d\theta^2)$$

e

$$\vec{x} d\vec{x} = r dr$$

allora:

$$dl^2 = a^2 \left[ \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\Omega^2 \right] \quad \text{ove} \quad d\Omega^2 = (\sin^2 \theta d\phi^2 + d\theta^2) \quad (1.5)$$

Per semplicità definiamo la coordinata radiale  $\chi$  come:  $d\chi = \sqrt{\frac{dr^2}{1 - kr^2}}$ , allora:

$$dl^2 = a^2 [d\chi^2 + S_k^2(\chi) d\Omega^2] \quad (1.6)$$

con

$$S_k(\chi) \begin{cases} \sinh(\chi) & k = -1 \\ \chi & k = 0 \\ \sin(\chi) & k = +1 \end{cases} \quad (1.7)$$

## Metrica di Freidmann-Robertson-Walker

Con questi elementi possiamo definire una metrica che descriva la geometria del nostro universo. Questa si definisce *metrica Friedman-Robertson-Walker* (FRW da qui in poi). Questa introduce nell'elemento di linea la componente temporale:

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t)g_{ij}dx^i dx^j \quad (1.8)$$

$a(t)$  è un parametro dipendente dal tempo e si chiama *fattore di scala*. Utilizzando le coordinate sferiche si trova<sup>4</sup>:

$$ds^2 = dt^2 - a(t)^2 \left[ \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\Omega^2 \right] \quad (1.9)$$

E utilizzando l'eq. 1.3 si ha:

$$ds^2 = dt^2 - a(t)^2 [d\chi^2 + S_k^2(\chi)d\Omega^2] \quad (1.10)$$

Infine introducendo il *tempo conforme*,  $d\tau = \frac{dt}{a(t)}$ , (10) diventa:

$$ds^2 = a(\tau)^2 [d\tau^2 - d\chi^2 - S_k^2(\chi)d\Omega^2] \quad (1.11)$$

Questa è la metrica che descrive il nostro universo.

È interessante notare, tenendo presente la legge di Hubble<sup>5</sup> che verrà spiegata più avanti, la differenza tra la coordinate comoventi ( $x^i = x^1, x^2, x^3$ ) e quelle "fisiche".

La velocità fisica di un oggetto è data dalla derivata dello spazio nel tempo:

$$v_{fis}^i = \frac{dx_{fis}^i}{dt} = a(t) \frac{dx^i}{dt} + \frac{da(t)}{dt} x^i = v_{pec}^i + H x_{fis}^i$$

Dove, nella seconda uguaglianza, si è usata la relazione tra coordinate fisiche e comoventi,  $x_{fis}^i = a(t)x^i$ . La velocità di un oggetto è data da due contributi: la velocità peculiare ( $v_{pec}^i$ ) e il così chiamato *Flusso di Hubble* ( $Hx^i$ ). Quindi la velocità di un oggetto corrisponde a quella peculiare per un osservatore comovente, ossia che segue il flusso di Hubble (Fig 1.2).

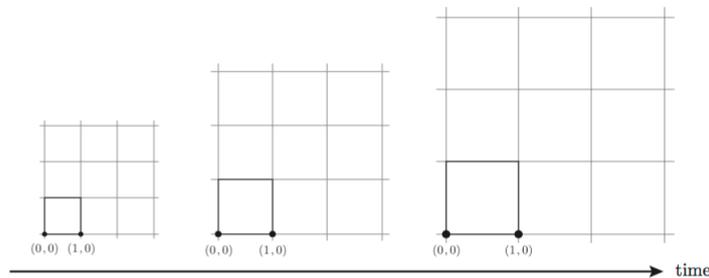


Figura 1.2: La distanza comovente tra i punti rimane la stessa all'aumentare del fattore di scala. La distanza fisica aumenta poiché è proporzionale ad  $a(t)$ . Presa da [2].

<sup>4</sup>Si nota che l'equazione rimane la stessa, ossia la geometria dello spazio-tempo non varia, se si riscalda simultaneamente  $a$ ,  $r$  e  $k$ . Utilizzando questa proprietà si può assegnare il valore unitario al fattore di scala al tempo attuale.  $a_0 = a(t_0) = 1$ .

<sup>5</sup>Deriva dal moto di espansione che fu scoperto nel 1929 da Hubble, ossia un allontanamento progressivo nel tempo di due punti nello spazio. Considerando un'espansione uniforme, Hubble notò che la velocità di una galassia è proporzionale alla distanza dall'osservatore.  $\vec{v} = H\vec{r}$ , ove  $H$  è detto parametro di Hubble ed è definito come:  $\frac{\dot{a}(t)}{a(t)}$

### 1.1.2 Redshift

Tutte le informazioni che abbiamo sugli oggetti celesti ci arrivano dai fotoni. Essi partono dalle sorgenti e arrivano sino al nostro occhio o telescopio percorrendo distanze finite a velocità finita,  $c^6$ . Tuttavia per interpretare al meglio le osservazioni, occorre tenere conto dell'espansione dell'universo e la perdita di energia da parte dei fotoni (i.e. la lunghezza d'onda aumenta) che essa ne causa.

Consideriamo una sorgente puntiforme che emette fotoni con coordinate comoventi  $(r_e, \theta_0, \phi_0, t_e, a(t_e))$  e un osservatore  $(r = 0, \theta_0, \phi_0, t_0, a(t_0))$ .

Un fotone viaggia su una geodetica nulla, ovvero  $ds^2 = 0$ . Ricordando l'eq. 1.9 e integrando lungo la coordinata radiale:

$$\int_{t_e}^{t_0} \frac{dt}{a(t)} = \int_0^{r_e} \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}} \quad (1.12)$$

Consideriamo ora che la sorgente emetta una serie di impulsi con un periodo  $dt_e$  nel sistema di riferimento della sorgente; ricordando che la coordinata radiale non cambia al variare del tempo, il segnale emesso a  $t_e + dt_e$  arriverà all'osservatore al tempo  $t_0 + dt_0$  nel sistema di riferimento dell'osservatore, allora:

$$\int_{t_e+dt_e}^{t_0+dt_0} \frac{dt}{a(t)} = \int_0^{r_e} \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}} \quad (1.13)$$

Inserendo l'ultima equazione nella 1.12 e considerando i vari intervalli coinvolti avremo:

$$\int_{t_e}^{t_e+dt_e} \frac{dt}{a(t)} + \int_{t_e+dt_e}^{t_0} \frac{dt}{a(t)} = \int_{t_e+dt_e}^{t_0} \frac{dt}{a(t)} + \int_{t_0}^{t_0+dt_0} \frac{dt}{a(t)} \quad (1.14)$$

Questa equazione ci dice come vengono osservati i vari impulsi.

Tenendo conto del fatto che,  $dt_e/t_e \ll 1$  e  $dt_0/t_0 \ll 1^7$  e risolvendo gli integrali si ottiene:

$$\frac{dt_e}{a(t_e)} = \frac{dt_0}{a(t_0)} \quad (1.15)$$

Questa è un'importante equazione che ci dice come gli intervalli temporali scalino con il tempo cosmico attraverso il fattore di scala a quel tempo.

Poichè le frequenze dei fotoni sono inversamente proporzionali ai periodi,

$$\frac{\nu_e}{\nu_0} = \frac{dt_0}{dt_e} = \frac{a(t_0)}{a(t_e)} \quad (1.16)$$

Introducendo il parametro di *redshift*  $z$ , ossia la differenza di frequenza tra l'osservatore e la sorgente, normalizzata per la frequenza osservata, in formule:

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} = \frac{\nu_e - \nu_0}{\nu_0} = z$$

<sup>6</sup>Il valore di  $c$  sarà posto unitario ove non specificato

<sup>7</sup>Generalmente l'impulso considerato è la frequenza fotonica, che nell'ottico corrisponde a  $10^{-15}$ s, tempo molto inferiore a quello che ci mette la luce ad arrivare sino a noi (milioni di anni per sorgenti sufficientemente lontane). Quindi questa approssimazione non è troppo vincolante

e utilizzando l'eq. 1.16, otteniamo la seguente relazione fondamentale

$$\frac{\nu_e}{\nu_0} = \frac{a(t_0)}{a(t_e)} = \frac{1}{1+z} \quad (1.17)$$

Dove nella seconda uguaglianza si è tenuto conto del fatto che  $a(t_0) = 1$ . Per sorgenti vicine si può espandere in serie il termine  $a(t_e)$ ,

$$a(t_e) = a(t_0) [1 + (t_e - t_0)H_0 + \dots]$$

Sostituendo in 1.17 si ottiene,  $z = H_0(t_0 - t_e)$ , trascurando i termini di grado superiore. Per un oggetto vicino,  $t_0 - t_e$  è semplicemente la distanza fisica  $r_e$ , allora il redshift aumenta linearmente all'aumentare della distanza

$$z \sim H_0 r_e \quad (1.18)$$

Convenzionalmente si definisce  $H_0$  come<sup>8</sup>:

$$H_0 \equiv 100 h \text{ km.s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$$

Ove  $h$  tiene conto di come le incertezze si propagano nei parametri cosmologici. Ad oggi  $h = 0.67 \pm 0.01$ . Infine è importante sottolineare gli effetti del redshift sulle curve di luce delle Supernovae, che vedremo nello specifico più avanti. Come mostrato in Figura 1.3, la durata del fenomeno luminoso aumenta nel tempo all'aumentare del redshift secondo il fattore  $(1+z)$  e diviene più debole in flusso.

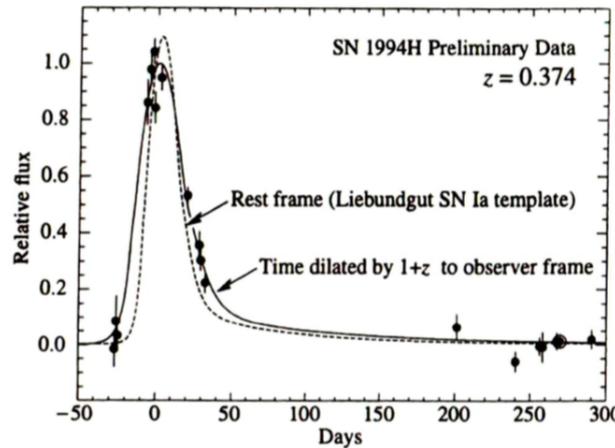


Figura 1.3: Confronto tra la curva di luce media di Supernovae (SN) nell'universo locale (curva a tratti) e quella di una SN osservata a  $z = 0.374$  che risulta dilatata di un fattore  $1 + z$ . Presa da [6].

<sup>8</sup>Un parsec (pc) è la distanza sotto cui una unità astronomica (AU) sottende un arcosecondo. Questa corrisponde a 3.26 anni-luce.

### 1.1.3 Distanze

Introduciamo ora l'ultimo osservabile necessario per comprendere l'espansione del cosmo: la distanza di luminosità ( $d_L$ ) e la distanza di diametro angolare ( $d_A$ ).

Per fare questo, ricordando le equazioni 1.11 e 1.7 e avendo definito la coordinata radiale  $\chi$  come:

$d\chi = \sqrt{\frac{dr^2}{1-kr^2}}$ , introduciamo una distanza che non è osservabile, ma sarà utile per definire gli osservabili: la *distanza metrica*,

$$d_m = S_k(\chi)$$

In uno spazio piatto ( $k = 0$ ),  $d_m$  è semplicemente uguale a  $\chi$ , che può essere scritta come:

$$\chi(z) = \int_{t_e}^{t_0} \frac{dt}{a(t)} = \int_0^z \frac{dz}{H(z)}$$

- **Distanza di luminosità-** L'energia per secondo che un oggetto emette è detta *Luminosità assoluta* ( $L$ ), mentre il flusso osservato ( $F$ ) è l'energia ricevuta per secondo per unità di area. Considerando una sorgente a una fissata distanza comovente, in uno spazio Euclideo, la relazione tra luminosità assoluta e flusso è:

$$F = \frac{L}{4\pi\chi^2} \quad (1.19)$$

Tuttavia, tenendo conto del redshift cosmologico, 1.19 diventa<sup>9</sup>,

$$F = \frac{L}{4\pi d_m^2 (1+z)^2} \equiv \frac{L}{4\pi d_L^2} \quad (1.20)$$

Questo risultato è giustificato da due fattori: la frequenza dei fotoni che arrivano è più bassa di quella emessa di un fattore  $(1+z)$ ; l'energia dei fotoni ricevuti è minore di quando sono stati emessi, sempre per il fattore di redshift.

Questo osservabile sarà fondamentale per ricavare i parametri cosmologici dalle osservazioni di Supernovae, poichè, come vedremo nel dettaglio nel prossimo capitolo, le SN di tipo Ia sono considerate delle candele standard, ossia hanno una luminosità intrinseca definita e conosciuta.

- **Distanza di diametro angolare-** A differenza delle SN, si può conoscere la grandezza fisica ( $D$ ) degli oggetti (i.e. le fluttuazioni della CMB).

Consideriamo un oggetto ad una fissata distanza comovente, con un'estensione intrinseca  $D$  che sottende un angolo  $\theta$  con vertice l'osservatore. Utilizzando la metrica di FRW, la dimensione dell'oggetto è:

$$D = a(t_e) S_k(\chi) \delta\theta = \frac{d_m}{1+z} \delta\theta \quad (1.21)$$

Ricordando la formula Euclidea per le distanze angolari,  $d_A = \frac{D}{\delta\theta}$ , si ha:

$$d_A = \frac{d_m}{1+z} \quad (1.22)$$

La distanza di diametro angolare è correlata con la distanza di luminosità tramite:

$$d_A = \frac{d_L}{(1+z)^2} \quad (1.23)$$

Figura 1.4 mostra gli andamenti delle tre distanze sopra citate:  $d_m$ ,  $d_L$  e  $d_A$  in funzione del redshift. Si nota che tutte le distanze sono maggiori in un universo con Energia Oscura, nella forma di costante cosmologica ( $\Lambda$ ), a causa degli effetti della densità del vuoto ( $\rho_v$ ) sui parametri cosmologici; come vedremo nel prossimo capitolo.

<sup>9</sup>Avendo definito  $d_L = d_m(1+z)$

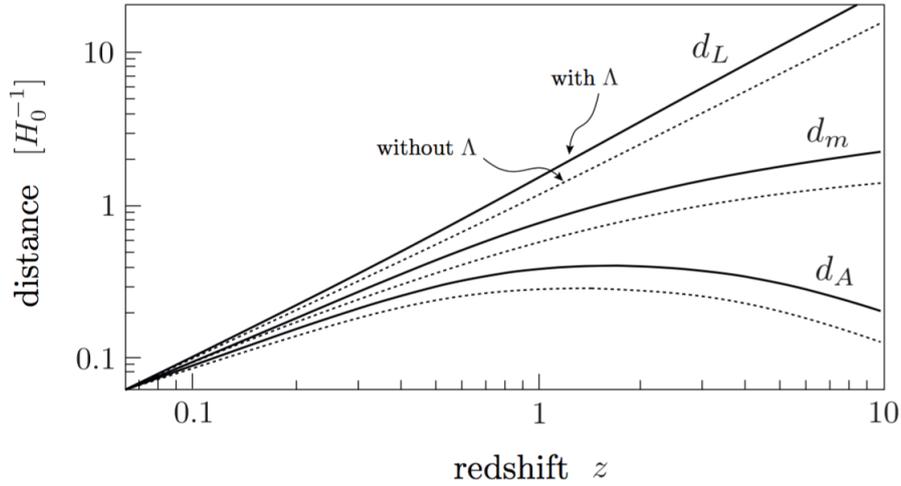


Figura 1.4: Confronto tra le distanze in un universo piatto con solo materia (linee tratteggiate) e con la presenza di energia oscura (linee continue) .Preso da [2].

## 1.2 Dinamica Cosmica

Prima di andare a studiare la dinamica dell'universo è bene definire dei parametri che saranno utili per questa trattazione: i parametri cosmologici.

- Nello scorso paragrafo abbiamo già incontrato un parametro, quello che descrive la derivata prima del fattore di scala  $a(t)$ :

$$H(t) \equiv \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} \quad (1.24)$$

- Il secondo parametro, o parametro di decelerazione, è proporzionale alla derivata seconda del fattore di scala.

$$q(t) \equiv -\frac{a(t)\ddot{a}(t)}{\dot{a}(t)^2} \quad (1.25)$$

- Infine il terzo parametro, che sarà fondamentale in questa trattazione, è chiamato *Parametro di Densità* poichè proporzionale alla densità di energia presente nell'Universo:

$$\Omega(t) \equiv \frac{8\pi G\rho(t)}{3H^2(t)} \quad (1.26)$$

### Equazioni della dinamica

Dalla teoria della Relatività Generale si ricavano le equazioni della dinamica cosmica, vediamo brevemente come.

L'equazione di Einstein è:

$$G_{\mu\nu} = 8\pi GT_{\mu\nu} \quad (1.27)$$

Questa mette in relazione il *tensore di Einstein*  $G_{\mu\nu}$ , che descrive la curvatura dello spazio-tempo, con il *tensore energia-impulso*  $T_{\mu\nu}$  che descrive il contenuto di materia dell'Universo.

Avendo assunto il principio cosmologico, quindi omogeneità ed isotropia,  $T_{\mu\nu}$  sarà diagonale. Più precisamente, per un fluido perfetto, sarà:

$$T_{\mu\nu} = (\rho + P)U_\mu U_\nu - P g_{\mu\nu}$$

dove  $\rho$  e  $P$  sono rispettivamente la densità di energia e la pressione e  $U^\nu$  è la quadri-velocità. Studiando il tensore per componenti, si evince che:

- $T_{00} \equiv \rho(t)$  ;
- per isotropia il valore medio dei vettori tridimensionali sono nulli,  $T_{i0} = T_{0j} = 0$ , per non avere componenti miste;
- sempre per isotropia attorno al punto  $\vec{x} = 0$ , tutti i tensori del tipo  $T_{ij}$  sono proporzionali alla delta di Kroneker ( $\delta_{ij}$ ), ovvero a  $g_{\mu\nu}$ . Per omogeneità questa forma non è dipendente dalla posizione, ma solo dal tempo, allora:  $T_{ij} = -Pg_{ij}(t)$

Allora il tensore energia-impulso per un osservatore fondamentale [ $U^\nu = (1, 0, 0, 0)$ ], avendo contratto un indice, risulta essere:

$$T^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -P & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -P & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -P \end{pmatrix} \quad (1.28)$$

Vediamo ora, senza andare nel dettaglio, le componenti del tensore di Einstein:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu}$$

ove,  $R$  è lo scalare di Ricci e  $R_{\mu\nu}$  è il tensore di Ricci.

Allora, basandosi sugli stessi ragionamenti del tensore energia-impulso, le componenti di  $G_{\mu\nu}$  sono:

$$G^0{}_0 = 3 \left[ \left( \frac{\dot{a}}{a} \right)^2 + \frac{k}{a^2} \right] \quad (1.29)$$

$$G^i{}_j = \left[ 2\frac{\ddot{a}}{a} + \left( \frac{\dot{a}}{a} \right)^2 + \frac{k}{a^2} \right] \delta_j^i \quad (1.30)$$

Combinando le equazioni 1.30, 1.29 e 1.28 otteniamo le *Equazioni di Friedmann* che descrivono l'evoluzione del fattore di scala:

$$\frac{\ddot{a}}{a} = \frac{-4\pi G(\rho + 3P)}{3}, \quad (1.31)$$

$$\left( \frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = \frac{8\pi G\rho}{3} - \frac{k}{a^2}. \quad (1.32)$$

É importante definire la *densità critica*, ossia la quantità di energia necessaria per avere un spazio piatto ( $k = 0$ ).

$$\rho_{crit,0} = \frac{3H_0^2}{8\pi G} = 2.8 \times 10^{11} h^2 M_\odot Mpc^{-3}$$

Con il pedice "0" abbiamo indicato i parametri al tempo attuale.

Si possono scrivere le equazioni di Friedmann con il parametro di densità

$$\Omega_{I,0} \equiv \frac{\rho_{I,0}}{\rho_{crit,0}}$$

ovvero,

$$\frac{H^2}{H_0^2} = \Omega_r a^{-4} + \Omega_m a^{-3} + \Omega_k a^{-2} \quad (1.33)$$

Tuttavia, come vedremo nel prossimo capitolo, l'equazione 1.33 non è completa. Poichè l'Universo è in espansione accelerata si dovrà aggiungere anche il contributo che ne deriva.



## 2 — Test osservativi

In questo capitolo si affronteranno i tre osservabili fondamentali per l'energia oscura: le SNe Ia, l'oscillazione acustica dei barioni e il weak lensing.

Della prima si spiegheranno i passaggi basilari che hanno portato alla comprensione delle Supernovae come candele standard, rifacendosi principalmente ai lavori di Perlmutter con il "the cosmology supernova project". Successivamente si introdurrà la CMB e le caratteristiche geometriche che si possono evincere dalle sue osservazioni. Queste verranno poi usate per descrivere al meglio le limitazioni che la BAO pone sui parametri cosmologici. Per ultimo si tratterà brevemente del weak lensing, una trattazione teorica sulla matrice d'ingrandimento e la determinazione della distribuzione di materia attraverso l'osservazione di galassie; da questa poi, attraverso lo spettro di potenza della materia, è possibile trovare i valori del parametro di Hubble.

Si cercherà infine di mettere questi tre argomenti in correlazione per estrapolare i parametri cosmologici con un livello di confidenza elevato.

### 2.1 SNe

Come precedentemente accennato, le Supernovae di tipo Ia (SNe Ia) sono delle cosiddette "candele standard" poichè la loro luminosità intrinseca è ben definita ed uguale per tutte. In questa sezione andremo a vedere perchè e le correzioni che portano a questo risultato.

Prima di tutto, definiamo gli oggetti celesti che andremo a studiare.

Le SNe Ia sono generate dall'esplosione term nucleare di una nana bianca di carbonio-ossigeno (CO). L'esplosione è innescata dal bruciamento del carbonio che avviene a basse temperature e a pressioni sufficientemente elevate ( $2 \times 10^9 \text{ g/cm}^3$ ) poichè il gas è in uno stato degenero. Il centro raggiunge questa densità quando la massa raggiunge la Massa di Chandrasekhar ( $1.4 M_{\odot}$ ).

Questa è raggiunta grazie ad accrescimento da parte di una compagna, generalmente questi sistemi binari vedono come protagonisti una nana bianca ed una gigante rossa. Il bruciamento è instabile, a causa della degenerazione, portando un aumento della temperatura (sino a  $\sim 10^{10} \text{ K}$ ) a pressione e densità costanti, infiammando tutto il materiale all'interno della stella sottoponendola ad un esplosivo bruciamento nucleare sino agli strati più esterni. L'energia totale liberata dalle reazioni nucleari è dell'ordine di  $10^{51} \text{ erg}$ , energia sufficiente per l'esplosione della nana bianca.

La composizione chimica delle polveri è principalmente di  $^{56}\text{Ni}$  per le zone centrali ed elementi più leggeri (i.e. Ca, Si, S, etc) nelle zone esterne. La curva di luce di una supernova è generata dal decadimento del  $^{56}\text{Ni}$ , che corrisponde circa a  $0.5 - 1 M_{\odot}$ .

Nonostante siano molto luminose, non sono semplici da osservare a causa della loro rarità, tuttavia esistono delle strategie osservative per ovviare a questo problema.

In primo luogo bisogna osservare ampi campi di cielo in più bande ottiche con telescopi sensibili su grandi aree e ripetere le osservazioni con scadenza periodica: le SNe sono identificate confrontando, ossia sottraendo, le immagini prese a tempi diversi.

Grazie a queste tecniche si ricava la magnitudine apparente e grazie ai modelli cosmologici introdotti nel primo capitolo, è possibile mettere in relazione la magnitudine apparente  $[m(z)]$  con i parametri

cosmologici:

$$m(z) = M + 5 \log d_L(z, \Omega_I, H_0) + 25 \equiv M + 5 \log D_L(z, \Omega_I) - 5 \log H_0 + 25 \quad (2.1)$$

dove  $D_L \equiv H_0 d_L$ . Nel limite di basso redshift l'equazione 2.1 diventa:

$$m(z) = M + 5 \log cz - 5 \log H_0 + 25 = \mathbf{M} + 5 \log cz \quad (2.2)$$

avendo posto per semplicità  $\mathbf{M} \equiv M - 5 \log H_0 + 25$ <sup>1</sup>. Questa quantità può essere misurata conoscendo la magnitudine apparente e il redshift; avendo determinato  $\mathbf{M}$  si possono trovare gli andamenti per i parametri di densità risolvendo questa equazione:

$$m(z) - \mathbf{M} = 5 \log D_L(z, \Omega_I) \quad (2.3)$$

Per calcolare al meglio  $\mathbf{M}$  è importante utilizzare supernovae a basso redshift ma che siano abbastanza distanti affinché le loro velocità peculiari non siano apprezzabili rispetto al *flusso di Hubble*. Nel lavoro di Hamuy et al. (1995, 1996) sono state scoperte 29 supernovae in un range di redshift  $z = 0.01 - 0.10$ , di cui 18 osservate 5 giorni prima del massimo di luce.

Avendo piccole, o addirittura non avendo estrapolazioni nella misurazione del picco di magnitudine apparente, sono riusciti a determinare al meglio il punto "zero" di magnitudine, ossia  $\mathbf{M}$ , trovando una dispersione<sup>2</sup> in banda B di  $\sigma_{M_b}^{Hamuy} = 0.29$  mag, che restituisce:

$$\mathbf{M} = -3.17 \pm 0.03$$

Tuttavia questo valore non è calibrato per ogni SNe Ia. Si osserva, come mostrato in Figura 2.1, che le più luminose hanno una curva di luce più larga, quindi più duratura nel tempo e le meno luminose sono più veloci, in poche parole: *più è larga più è luminosa*.

Sfruttando questa proprietà è possibile calibrare le magnitudini, utilizzando la linearità in banda

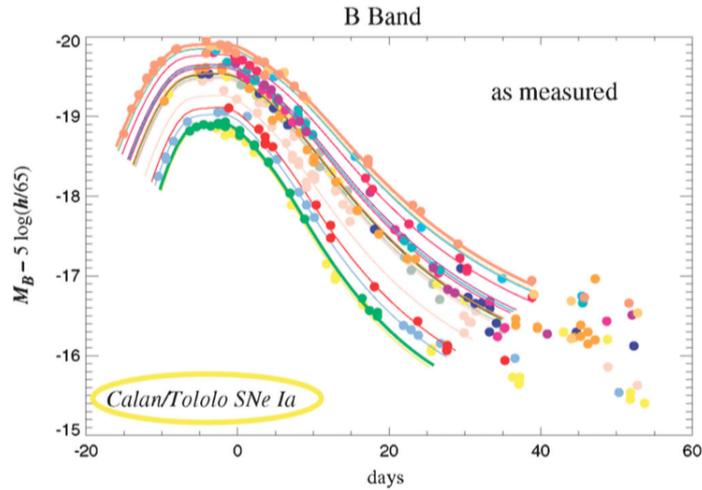


Figura 2.1: Curve di luce- si osservano varie curve di luce in funzione della magnitudine assoluta e del tempo in giorni. Presa da [18].

B<sup>3</sup> tra il cambio di luminosità apparente dopo 15 giorni dal picco ( $\Delta m_{15}$ ) e il picco in magnitudine assoluta.

Allora, per le 18 supernovae sopracitate, osservando una  $\Delta m_{15} = 0.8 - 1.75$  mag si ottiene la correzione:

$$\mathbf{M}_{B,corr} = (0.86 \pm 0.21)(\Delta m_{15} - 1.1) - (3.32 \pm 0.05) \quad (2.4)$$

<sup>1</sup>Si nota che la dispersione di  $M$  e  $\mathbf{M}$  è la stessa,  $\sigma_M = \sigma_{\mathbf{M}}$ .

<sup>2</sup>root-means-square dispersion RMS

<sup>3</sup>Phillips 1993

Il minuendo nell'equazione è detto termine correttivo ( $\Delta_{corr}^{[1.1]}$ ), dove si è scelta un'arbitraria curva di luce con  $\Delta m_{15} = 1.1 \text{ mag}$ .

Aggiungendo il termine correttivo alla magnitudine apparente misurata, si trova quella corretta:  $m_{B,corr} = m_B + \Delta_{corr}^{[1.1]}$ ; che restituisce una dispersione  $\sigma_{M_{B,corr}} = 0.17 \text{ mag}$ .

È interessante notare che l'intercetta della magnitudine a  $\Delta m_{15} = 1.1 \text{ mag}$ , ossia  $M_{B,corr} = -3.32 \pm 0.05$ , si discosta dalla prima trovata  $M = -3.17 \pm 0.03$  semplicemente perchè  $\Delta m_{15} = 1.1 \text{ mag}$  non rappresenta il valor medio.

### Parametrizzazione del fattore di estensione

Avendo introdotto  $\Delta m_{15}$ , seguendo il formalismo di Perlmutter 1997, per ottenere il migliore fit dei dati, bisogna introdurre una parametrizzazione della larghezza della curva di luce. Questa prende il nome di *fattore di estensione*<sup>4</sup> ( $s$ ):

$$\Delta m_{15} = (1.96 \pm 0.17)(s^{-1} - 1) + 1.07 \quad (2.5)$$

Questa relazione riproduce il range di  $\Delta m_{15}$  trovato precedentemente, con un'incertezza di  $\pm 0.01 \text{ mag}$ . È importante notare che con l'eq. 2.5 si può calcolare direttamente il termine correttivo  $\Delta_{corr}^{[1.1]}$ , non basandosi su interpolazione, ed ha un'incertezza minore rispetto a quella trovata con l'eq. 2.4 (Perlmutter, 1997). Con questi metodi è possibile normalizzare le curve di luce (Figura 2.2) evidenziandone le proprietà intrinseche comuni, come appunto la magnitudine assoluta:  $M = -19.45 \pm 0.07 \text{ mag}$  [20].

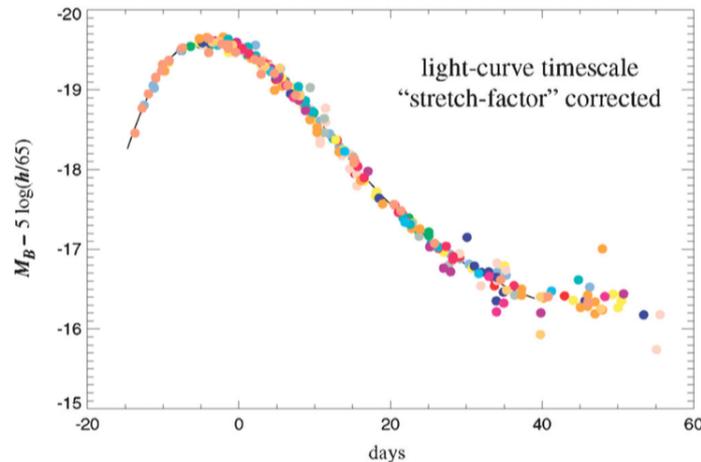


Figura 2.2: Normalizzazione delle curve di luce per un campione di supernovae osservato a Calan/Tololo. Presa da [18].

### Osservazioni

Avendo un metodo di normalizzazione ora è possibile costruire un *diagramma di Hubble* dove si mette in relazione la magnitudine apparente con il redshift (Figura 2.3). Nel 1999 il Supernova Cosmology Project, guidato da Perlmutter, misurò 42 supernovae in un redshift di  $\sim 0.18 - 0.83$  facendo un'importante scoperta [17].

Come si può notare in figura 2.4 le SNe Ia comprese tra  $z \sim 0.4 - 0.8$  hanno una magnitudine maggiore di un Universo privo di materia, ossia della magnitudine massima raggiungibile per un universo in espansione non accelerata. Questo implica che l'Universo è in espansione accelerata.

<sup>4</sup>Il fattore di estensione, o stretch factor, è correlato al redshift e alla larghezza della curva di luce tramite:  $w \equiv s(1+z)$ , ove  $w$  è il parametro di allungamento

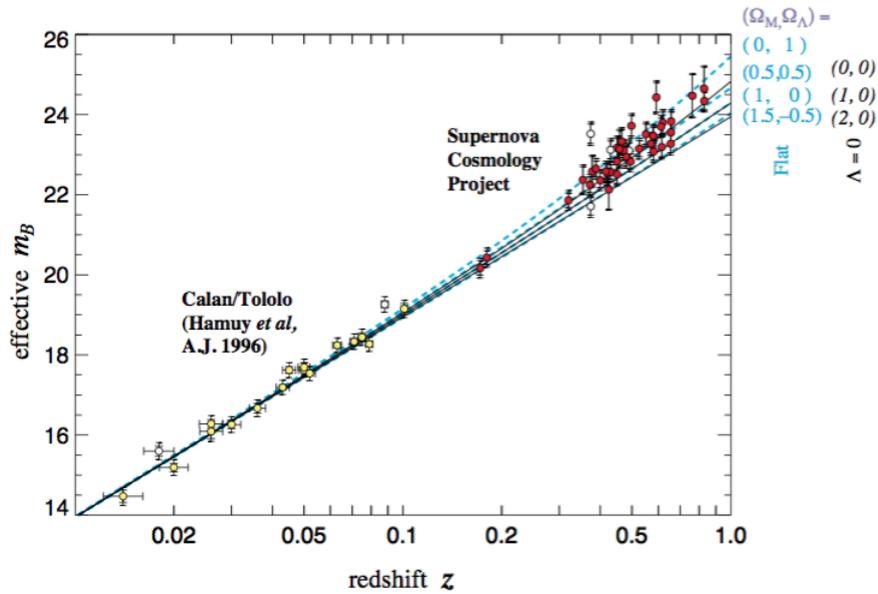


Figura 2.3: Diagramma di Hubble. In rosso i dati presi da [?], in giallo le osservazioni di Calan/Tololo. Le linee blu tratteggiate indicano i vari andamenti in funzione dei parametri di densità. Presa da [17].

Ricordando l'eq 1.33 e che<sup>5</sup>:

$$d_L(z) = (1+z) \int_0^z \frac{dz'}{H(z')}$$

si evince che nelle equazioni bisogna aggiungere un termine che si opponga al contributo gravitazionale. Questo termine prende il nome di *Costante Cosmologica* denotato con la lettera greca  $\Lambda$ .

$\Lambda$ , come precedentemente introdotto, comparì per la prima volta nelle equazioni di campo della GR nel 1917 e la scoperta che conferì il premio nobel a tre gruppi tra cui il Supernova Cosmology Project guidato da Saul Perlmutter e l' High-z Supernova Search Team condotto da Brian Schmidt, ne stabilisce la validità ed il valore numerico.

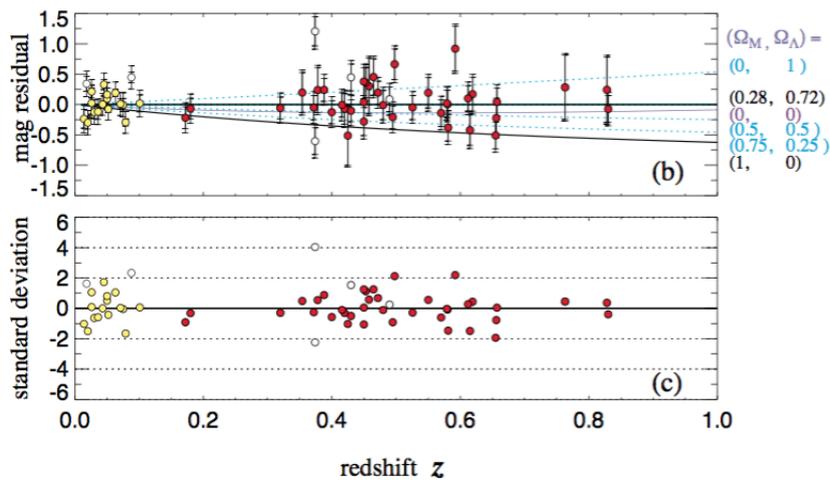


Figura 2.4: Schema delle supernovae tipo Ia in funzione del redshift e della magnitudine riscalata ad un Universo privo di materia (Universo di Milne) (b). In (c) sono riportate le deviazioni standard normalizzate. Presa da [17].

<sup>5</sup>Riporto per completezza la distanza di luminosità per un universo piatto:  
 $d_L(z; \Omega_I, H_0) = \frac{c(1+z)}{H_0} \int_0^z [(1 - \Omega_\Lambda)(1+z')^3 + \Omega_\Lambda]^{-1/2} dz'$ .

## La fisica della Costante Cosmologica

Prima di svelare il valore numerico, diamo una breve introduzione fisica della Costante Cosmologica. Nell'Universo sono presenti principalmente tre componenti.

La prima è la **materia** che ha una pressione molto minore della sua densità. Questo è il caso per esempio del gas non relativistico e i due principali componenti la materia sono: la *Materia Oscura* e i *Barioni*.

Ponendo  $P = 0$  nell'equazione di continuità<sup>6</sup> si ottiene:

$$\rho_m \propto a^{-3} \quad (2.7)$$

Era prevedibile questa soluzione poichè ci dice che la densità è inversamente proporzionale a volume. La seconda componente è la **radiazione** e i suoi protagonisti sono i *fotoni* e i *neutrini*.

Questi, che sono particelle relativistiche, sono soliti ad avere una pressione che è un terzo della densità di energia:  $P = \frac{1}{3}\rho$ , allora:

$$\rho \propto a^{-4} \quad (2.8)$$

La differenza tra materia e radiazione consiste essenzialmente nel perdita di energia da parte dei fotoni a causa dell'espansione (eq. 1.17).

Possiamo definire il parametro dell'equazione di stato  $w = P/\rho$  e descrivere gli andamenti della materia e della radiazione tramite:

$$\rho \propto a^{-3(1+w)} \quad (2.9)$$

Con  $w = 0$  per la materia e  $w = 1/3$  per la radiazione.

Infine, di vitale importanza per questo lavoro, l'*Energia Oscura* rappresenta l'ultima componente dell'universo. Come accennato precedentemente, dai diagrammi delle SNe risulta che nell'Universo è presente un pressione negativa:  $P = -\rho$ ;  $w_\Lambda = -1$ .

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\rho + P) = 0$$

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\rho + (-\rho)) = 0$$

Ovvero:

$$\rho \propto a^0 = \text{cost} \quad (2.10)$$

Quindi avendo introdotto  $\Lambda$  possiamo riscrivere l'equazione 1.33:

$$\frac{H^2}{H_0^2} = \Omega_r a^{-4} + \Omega_m a^{-3} + \Omega_k a^{-2} + \Omega_\Lambda \quad (2.11)$$

Con ovvio significato dei pedici.

Le differenze di andamento della densità di energia implicano che l'Universo è passato attraverso varie epoche in cui un singolo componente dominava. Per un Cosmo piatto, ricordando l'eq. 2.9, l'equazione di Friedmann (2.11) si riduce a:

$$\frac{\dot{a}}{a} = H_0 \sqrt{\Omega_x} a^{-\frac{3}{2}(1+w_x)} \quad (2.12)$$

Integrando l'ultima equazione per le varie componenti dell'Universo troviamo la dipendenza temporale del fattore di scala:

---

<sup>6</sup> $\dot{\rho}_X + 3H(\rho_X + P_X) = 0$

- $a(t) \propto t^{1/2}$  per un Universo dominato dalla radiazione (RD);
- $a(t) \propto t^{2/3}$  dominato dalla materia (MD);
- $a(t) \propto e^{Ht}$  dominato dall'Energia Oscura ( $\Lambda$ ).

Con queste informazioni possiamo tracciare una breve storia evolutiva dell'universo dove inizialmente dominava la radiazione, successivamente la materia ed infine ad oggi l'Energia Oscura (Fig 2.5).

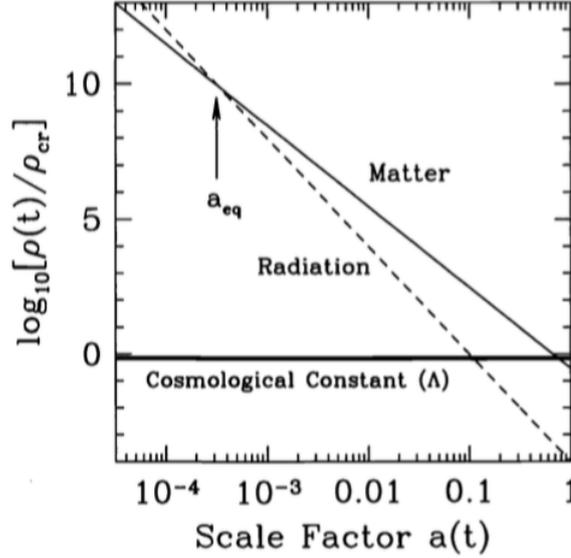


Figura 2.5: Evoluzione della radiazione, materia e energia oscura. [5].

L'effetto fisico di  $\Lambda$  è quello di dare un contributo positivo ad  $\ddot{a}$  agendo come forza repulsiva.

Per la formazione di strutture a grandi scale e a causa degli andamenti dell'evoluzione del fattore di scala, l'andamento della densità di  $\Lambda$  deve essere minore di quello della materia e naturalmente minore di quello di radiazione. Affinchè questo sia possibile,  $w$  deve essere minore di 0.

Inoltre la seconda eq di Friedmann (eq. 1.31) diventa:

$$\frac{\ddot{a}}{a} = \frac{-4\pi G(\rho + P)}{3} + \frac{\Lambda}{3} \quad (2.13)$$

É utile vedere il contributo di  $\Lambda$  nel parametro di decelerazione:

$$q_0 \equiv -\frac{a\ddot{a}}{\dot{a}^2} = \frac{\Omega_0}{2} - \Omega_\Lambda \quad (2.14)$$

In forma più generale dipendente dal redshift si ha,

$$q(z) = \frac{1}{2} \sum_i \Omega_i(z)[1 + 3w_i(z)] \quad (2.15)$$

Dall'ultima equazione si evince che per avere un'accelerazione ( $q < 0$ ) il parametro  $w$  deve essere  $< -1/3$ .

Tuttavia nella trattazione precedente è stato assunto un parametro di stato identicamente uguale a  $-1$ . Questo perchè tacitamente abbiamo assunto il modello della materia oscura fredda ( $\Lambda$ CDM) che verrà giustificato meglio nelle conclusioni.

## 2.2 Baryonic Acoustic Oscillation

Nell'Universo primordiale i fotoni erano così energetici da ionizzare la materia, creando un'intensa nube di fotoni e materia interagenti. Successivamente gli elettroni e i protoni formarono gli atomi neutri, poiché il cosmo si espanse raffreddandosi e la luce si separò dai barioni, rendendo l'universo trasparente; questo fenomeno viene chiamato ricombinazione. La radiazione cosmica di fondo che noi osserviamo è composta dai fotoni della ricombinazione, ad oggi assume la forma di una curva di corpo nero con il picco a 2.7 gradi  $K$ .

Molti satelliti furono spediti per calcolare le proprietà della CMB tra cui, di vitale interesse per questa trattazione, il satellite lanciato nel 2001: *Wilkinson Microwave Anisotropy Probe* (WMAP). I suoi risultati rivelarono che le variazioni di temperatura della radiazione cosmica<sup>7</sup> seguivano un preciso schema teorizzato dalla Baryonic Acoustic Oscillation (BAO): le regioni calde e fredde hanno una grandezza caratteristica.

Per capire al meglio questa frase dobbiamo ricorrere allo spettro di potenza della CMB, ossia il grafico che mette in correlazione le scale angolari con le variazioni di temperatura.

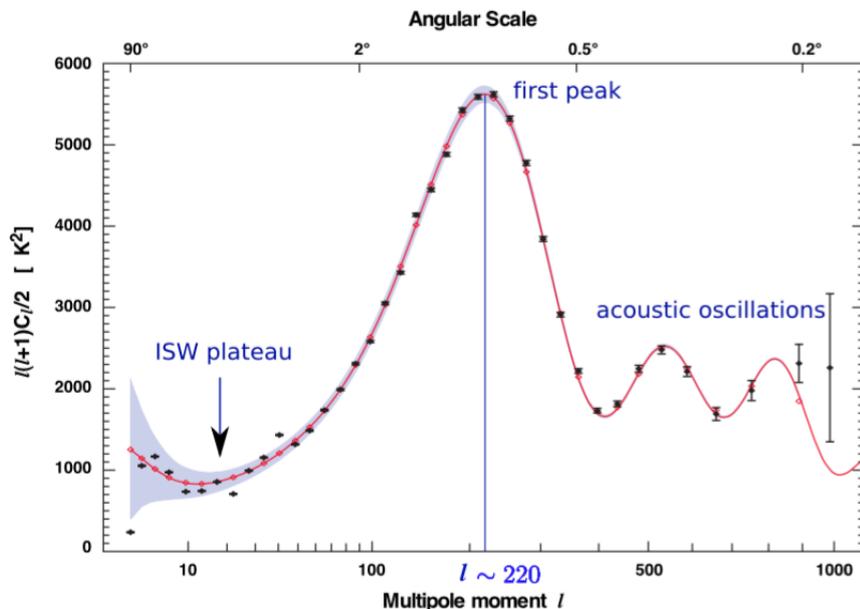


Figura 2.6: Spettro di potenza della CMB in funzione delle fluttuazioni di temperatura e la scala angolare. A larghe scale si nota il plateau dell'effetto integrato de Sachs-Wolfe, a  $l \sim 220$  c'è il primo picco. La linea continua è rappresenta l'andamento del modello  $\Lambda$ CDM. Presa da [9].

Come si nota in figura 2.6, ci sono due principali componenti: il plateau dovuto all'effetto Sachs-Wolfe integrato ed una serie di picchi.

Le fluttuazioni che si osservano su grandi scale, piccoli momenti di mutipolo<sup>8</sup>, sono quelle primordiali, poiché solo recentemente sono entrate *nell'orizzonte*<sup>9</sup> mentre su piccole scale si osservano le fluttuazioni che sono entrate nell'orizzonte prima della ricombinazione, subendo le oscillazioni acustiche del

<sup>7</sup>Scoperte da COBE (Cosmic Background Explorer) nel 1990, oltre che la forma di corpo-nero.

<sup>8</sup>Prendiamo in considerazione una sfera in coordinate polari. Il monopolo,  $l = 1$  indica tutta la sfera, nel nostro caso tutto il Cosmo. Se dovessimo ora suddividere la sfera in due parti, emisfero australe e boreale, il nostro valore di multipolo salirebbe a  $l = 2$ . Con questo principio è possibile parametrizzare piccole aree di Universo che corrispondono a valori di multi-polo elevati.

<sup>9</sup>Immaginiamo di essere un osservatore che assiste al big bang e la successiva espansione. In qualsiasi punto, vedremo solo una regione limitata dell'universo che comprende la distanza percorsa dalla luce dal big bang. I cosmologi definiscono l'orlo di questa regione *l'orizzonte*, il luogo oltre il quale non si può vedere. Questa regione cresce continuamente fino a raggiungere il raggio dell'universo osservabile oggi. Poiché l'informazione non può essere trasmessa più velocemente della luce, l'orizzonte definisce la sfera di influenza di qualsiasi meccanismo fisico (la causalità). Mentre andiamo indietro nel tempo per cercare l'origine delle strutture di una particolare dimensione fisica, l'orizzonte alla fine diventa più piccolo della struttura. Pertanto, nessun processo fisico che obbedisce alla causalità può spiegare l'origine della struttura. In cosmologia, questo dilemma è noto come problema all'orizzonte.

fluido fotoni-barioni. Queste oscillazioni sono il frutto della competizione tra potenziale gravitazionale e pressione di radiazione.

Focalizzandosi sul primo picco, ci aspetteremmo che l'ampiezza massima sia data da una fluttuazione che entra nell'orizzonte appena prima la ricombinazione, quindi ad una larghezza angolare corrispondente l'orizzonte al tempo del disaccoppiamento<sup>10</sup>. Per giustificare l'ultima frase, consideriamo una regione sferica di raggio  $R$  che si contrae sotto la stessa gravità ad un tempo scala  $R^{11}$ .

Se  $R$  fosse molto più grande del tempo di Hubble della ricombinazione, la regione sferica non avrebbe il tempo di collassare in confronto al tempo di vita dell'universo alla ricombinazione non creando anisotropie. Invece se  $R \ll H_{ric}^{-1}$  il collasso sarebbe già ben avviato all'epoca della ricombinazione creando un aumento della temperatura. Questo produrrebbe una forza da parte dei fotoni che estinguerebbe le inomogeneità.

Chiaramente, quindi, la massima anisotropia sarà su una scala che ha avuto il tempo di equilibrarsi ovvero  $R \sim H_{ric}^{-1}$ . Per un universo piatto ci aspetteremmo il picco a  $l \sim 220$ , come è mostrato in figura 2.6 ed è una forte prova della piattezza dell'Universo.

Andiamo ora ad analizzare il problema in maniera più quantitativa.

Come già precedentemente detto, la distanza tra un punto caldo e uno freddo è data dalla grandezza dell'orizzonte: in termini di oscillazioni acustiche, la distanza che il suono ( $c_s$ ) può percorrere da il big bang alla ricombinazione. La velocità è data da:  $c_s = \sqrt{\delta p / \delta \rho}$  quando i fotoni e i barioni erano accoppiati.

Allora:

$$c_s = \sqrt{\frac{\delta p_\gamma}{\delta \rho_B + \delta \rho_\gamma}} = \sqrt{\frac{\delta p_\gamma}{3(\delta \rho_B + \delta \rho_\gamma)}} = \frac{1}{\sqrt{3(1+R)}} \quad (2.16)$$

dove  $R \equiv \delta \rho_B / \delta \rho_\gamma$ ;  $\rho_\gamma = \alpha T^4$  e  $p_\gamma = \frac{1}{3} \alpha T^4$ , ovvero  $p_\gamma / \rho_\gamma = 1/3$ .

Per calcolare  $R$  assumiamo che le fluttuazioni siano adiabatiche, allora ogni componente ( $X$ ) obbedirà all'equazione di continuità:  $\dot{\rho}_X + 3H(\rho_X + p_X) = 0$ .

Riscrivendola in modo tale che il secondo termine sia indipendente dalla densità, avremo:  $\delta \rho_X / [\rho_X(1 + w_X)] = -3H\delta t$ , dove  $w \equiv p/\rho$ .

Per fotoni e barioni restituisce:

$$\frac{\delta \rho_B}{\rho_B} = \frac{3\delta \rho_\gamma}{4\rho_\gamma} \quad (2.17)$$

Utilizzando l'equazione 2.17 avremo:

$$R \equiv \frac{\delta \rho_B}{\delta \rho_\gamma} = \frac{3\rho_B}{4\rho_\gamma} = \frac{3\Omega_B}{4\Omega_\gamma} a \quad (2.18)$$

L'orizzonte è definito come la distanza  $r_s = \int dt/a(t)$ , ricordando che la velocità del suono è  $c/\sqrt{3}$ :

$$r_s = \frac{c}{\sqrt{3}} \int_0^{a_r} \frac{da}{a^2 H(a) \sqrt{1 + \frac{3\Omega_B}{4\Omega_\gamma} a}} \sim 100 h^{-1} \text{ Mpc} \quad (2.19)$$

Dove  $a_r$  è il fattore di scala alla ricombinazione.

Noi osserviamo l'orizzonte come un "righello standard" alla distanza corrispondente il disaccoppiamento. L'angolo del primo picco della CMB, come anticipato precedentemente, corrisponde all'angolo della ricombinazione, in formule:

$$l_{picco} \sim \frac{\pi}{\theta_{picco}} = \pi \frac{d_A(z_r)}{r_s} \quad (2.20)$$

Dalle informazioni della CMB come i picchi dello spettro di potenza e il raggio dell'orizzonte, è possibile calcolare in maniera molto accurata la distanza della ricombinazione.

<sup>10</sup> Poichè conosciamo la grandezza fisica di quest'ultimo, possiamo utilizzarlo come "righello standard".

<sup>11</sup>  $c$  è posto uguale a 1

Infine accenniamo brevemente un'altra importante caratteristica fenomenologica dei picchi di anisotropia. Come sappiamo il primo picco è a  $\sim 220l$  e questa informazione contiene all'interno la geometria dello spazio-tempo. Se consideriamo la distanza dei picchi gli uni dagli altri è possibile determinare i parametri cosmologici.

Senza andare nello specifico della teoria delle perturbazioni e seguendo il formalismo di [11], abbiamo

$$\frac{\Delta l_{picco}}{l_{picco}} \sim -0.24 \frac{\Delta \Omega_m h^2}{\Omega_m h^2} + 0.07 \frac{\Delta \Omega_b h^2}{\Omega_b h^2} - 0.17 \frac{\Delta \Omega_\Lambda h^2}{\Omega_\Lambda h^2} - 1.1 \frac{\Delta \Omega_{tot} h^2}{\Omega_{tot} h^2} \quad (2.21)$$

Tuttavia non è sufficiente da sola questa equazione per trovare i parametri cosmologici. Allora, sapendo che  $\Omega_{tot} = 1$ , si considerano l'estensione dell'orizzonte all'epoca della equivalenza ( $l_{eq}$ ) e all'effetto di smorzamento delle oscillazioni del fluido fotoni-barioni ( $l_d$ ); questi due contributi sono proporzionale all'ampiezza delle oscillazioni.

$$\frac{\Delta l_{eq}}{l_{eq}} \sim 0.5 \frac{\Delta \Omega_m h^2}{\Omega_m h^2} - 0.17 \frac{\Delta \Omega_\Lambda h^2}{\Omega_\Lambda h^2} - 1.1 \frac{\Delta \Omega_{tot} h^2}{\Omega_{tot} h^2} \quad (2.22)$$

$$\frac{\Delta l_d}{l_d} \sim -0.21 \frac{\Delta \Omega_m h^2}{\Omega_m h^2} + 0.20 \frac{\Delta \Omega_b h^2}{\Omega_b h^2} - 0.17 \frac{\Delta \Omega_\Lambda h^2}{\Omega_\Lambda h^2} - 1.1 \frac{\Delta \Omega_{tot} h^2}{\Omega_{tot} h^2} \quad (2.23)$$

Mettendo insieme queste equazioni e sapendo che,  $l_{picco} = 304 \pm 4$ ,  $l_{eq} = 168 \pm 15$  e  $l_d = 1392 \pm 18$ , è possibile determinare i parametri cosmologici. Come mostrato in figura 2.7, una modifica dei parametri cosmologici comporta una modifica diretta della forma dello spettro di potenza, è anche per questo che lo spettro di potenza della CMB è una forte prova dell'espansione accelerata dell'Universo.

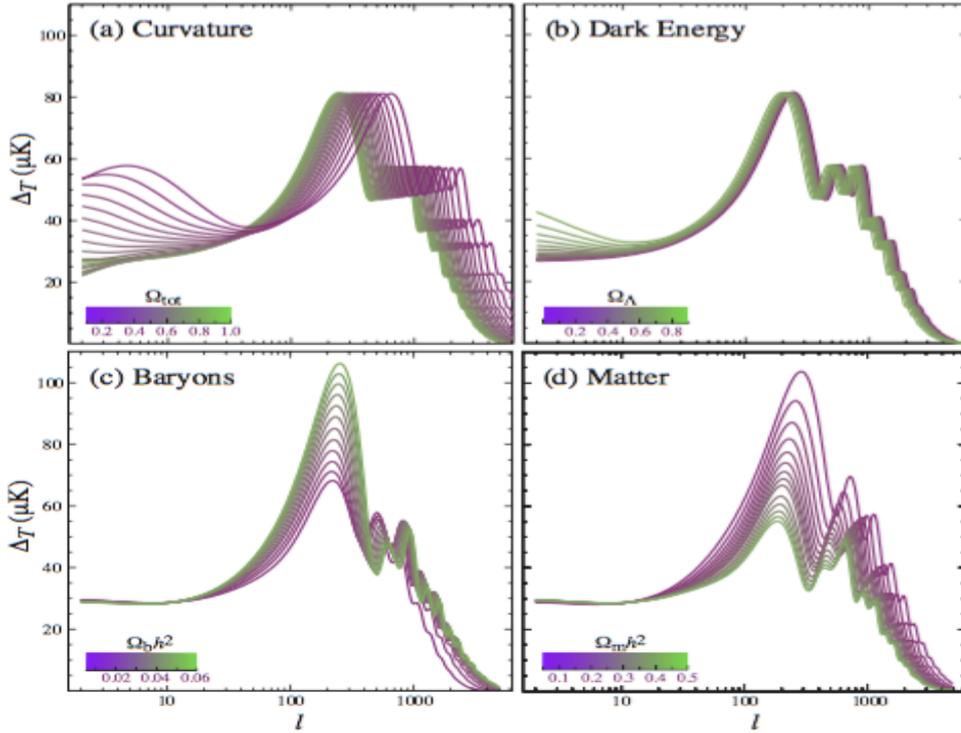


Figura 2.7: Spettro di potenza della CMB in funzione delle fluttuazioni di temperatura e la scala angolare. Variazione della forma dello spettro in base a vari valori dei parametri cosmologici. Nel primo pannello (a) si mostra la variazione in base alla curvatura dell'Universo. Nel secondo pannello (b) si mostra la dipendenza dalla DE in un modello  $\Lambda\text{CDM}$  ( $w = -1$ ). In (c) e in (d) si ha rispettivamente la densità fisica di barioni e di materia. Presa da [11].

### Integrated Sachs Wolfe effect

Un'altra prova dell'espansione è data dal plateau dello spettro di potenza a grandi valori angolari. Considerando dei fotoni che attraversano una buca di potenziale gravitazionale, quando essi entrano nella buca acquisteranno dell'energia (blueshift) e quando scalano la buca, perderanno dell'energia (redshift); questo effetto prende il nome di *Integrated Sachs Wolfe* (ISW).

Se consideriamo un Universo in espansione e quindi una variazione delle buche di potenziale, dopo che i fotoni avranno passato la buca, essi risultano con una frequenza spostata verso il rosso (2.8).

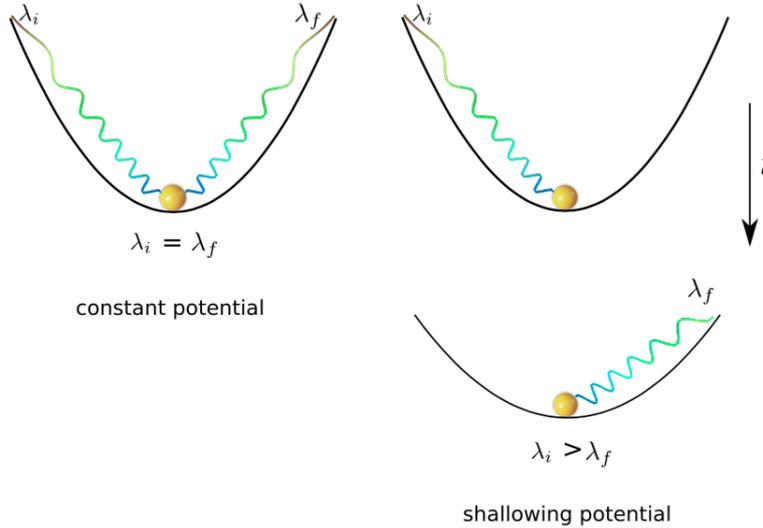


Figura 2.8: Rappresentazione dell'effetto integrato di Sachs Wolfe. A sinistra un fotone percorre una buca di potenziale costante nel tempo, non risente di variazioni energetiche. A destra la buca di potenziale varia nel tempo e i fotoni perdono energia a causa del redshift gravitazionale. Presa da [9].

Andiamo a vedere come la teoria delle BAO porti prove a favore di una espansione accelerata del cosmo.

### Barionic acoustic oscillations (BAO)

**Teoria Lineare**-All'epoca della ricombinazione l'Universo era caldo e denso e gli elettroni erano soggetti allo scattering di Thomson creando un forte accoppiamento tra i nuclei barionici e i fotoni. In questo *fluido*, la competizione tra la pressione di radiazione e la forza gravitazionale diede vita a delle perturbazioni oscillanti simili alle oscillazioni di propagazione del suono. Dopo la ricombinazione il cammino libero medio dei fotoni diventa praticamente infinito, lasciando i barioni vittime delle instabilità gravitazionali, come quelle delle perturbazioni di materia oscura (DM). Quest'ultime sono introdotte nella teoria lineare come fonte gravitazionale. In principio la DM crea un potenziale gravitazionale nel quale il fluido fotoni-barioni, grazie alla pressione di radiazione, si sposta verso l'esterno (Figura 2.9) come un'onda sonora. Dopo il disaccoppiamento i barioni sono disposti a formare un guscio sferico attorno all'origine gravitazionale, collassando su loro stessi e creando degli aloni di materia nei quali si formeranno le galassie.

Come spiegato, gli ammassi di galassie si troveranno ad una distanza comoviente di  $100 h^{-1} Mpc$ . Allora grazie alle BAO, si misura la distanza di diametro angolare ( $d_A(z)$ ) ad un determinato redshift, poichè osserviamo l'angolo sotto cui è visto orizzonte grazie ai picchi dello spettro di potenza.

Nello specifico, per due galassie allo stesso redshift separate da una distanza comoviente  $\Delta r$  e viste sotto un angolo  $\Delta\theta$ , si può misurare la distanza  $d_A$  tramite  $\Delta\theta = \Delta r / d_A(z)$ ; similmente per due galassie a differente redshift ( $\Delta z$ ) si utilizza  $\Delta r = \Delta z / H(z)$ .

Queste due formule rappresentano la grandezza comoviente dell'oggetto considerando la linea di vista

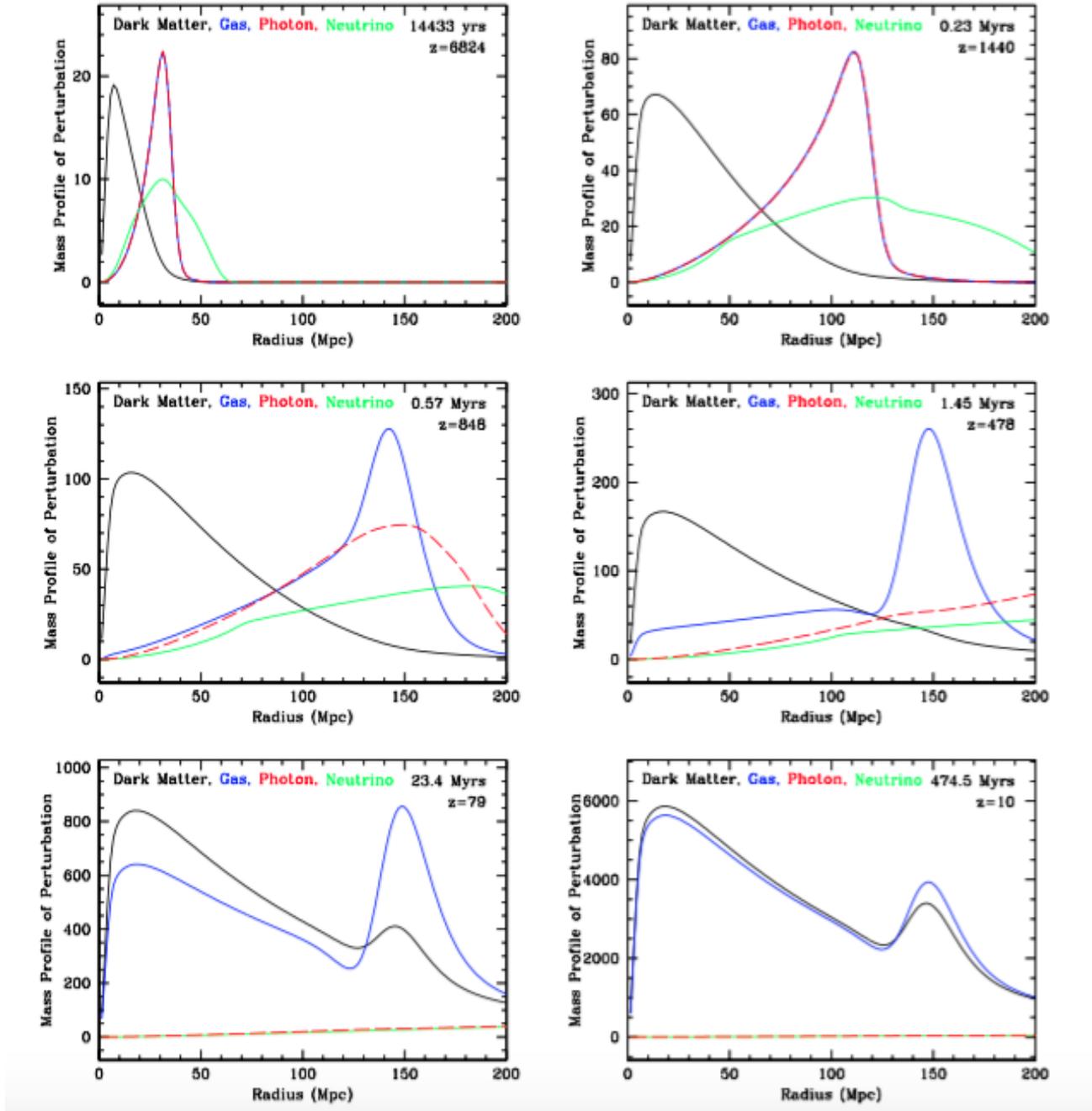


Figura 2.9: Ogni pannello mostra il profilo di massa perturbato in funzione della distanza dal centro gravitazionale: DM (in nero), barioni (blu), fotoni (rosso) e neutrini (verde). In (a) i fotoni e barioni sono accoppiati in una conformazione sferica. (c) avviene la ricombinazione, i fotoni si separano dai barioni. (d) il picco dei barioni è situato ad un raggio di 150 Mpc mentre quello della DM è ancora vicino all'origine. (e) A causa della bassa pressione di radiazione i barioni e la DM sono attratti gravitazionalmente. (f) la formazione delle galassie è favorita vicino l'origine e a 150 Mpc da essa. Presa da [22].

( $\Delta z$ ) oppure perpendicolarmente ad essa ( $\Delta\theta$ ). Mettendo insieme questi due casi si può generalizzare la distanza in funzione del redshift ( $D_V$ ), che è il valore misurato (Figura 2.10), come:

$$D_V(z) \equiv \left[ \frac{(1+z)^2 d_A^2(z) cz}{H(z)} \right]^{1/3} \quad (2.24)$$

Questa formula dà importanti informazioni sulla geometria dell'Universo attraverso lo studio della costante di Hubble e la distanza di diametro angolare, in questo caso il prodotto<sup>12</sup> utilizzando il test Alcock-Paczynski. Questo consiste nel misurare le dimensioni angolari e spaziali di un oggetto che si espande seguendo il flusso di Hubble, più precisamente il rapporto  $\Delta z/\Delta\theta$ .

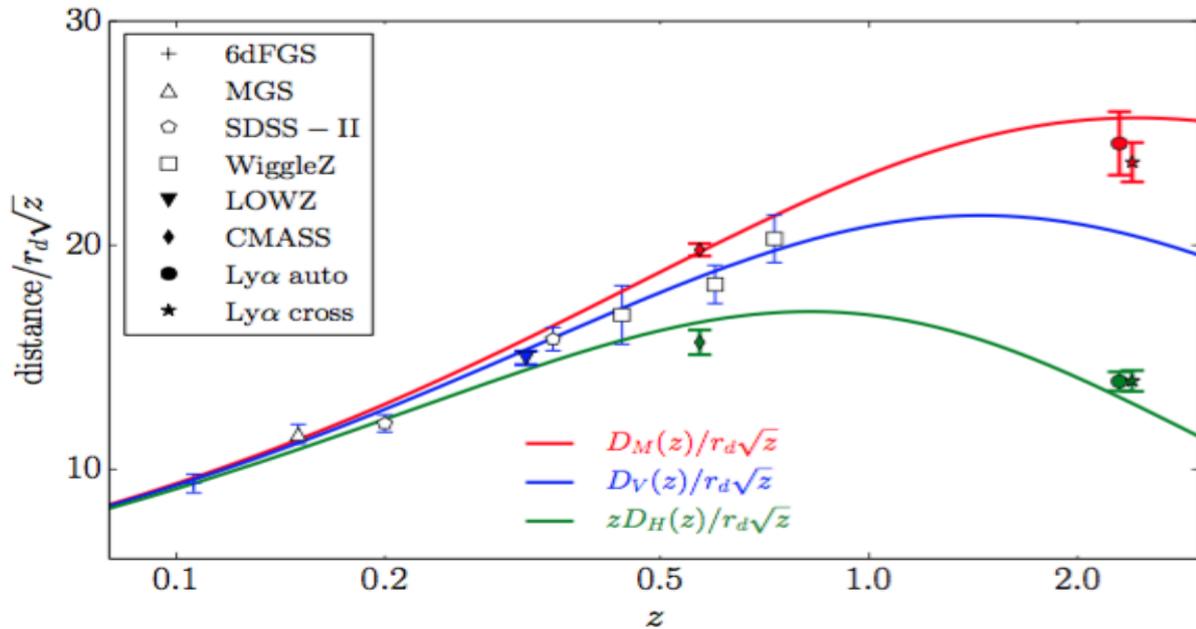


Figura 2.10: Misure di distanze attraverso surveys di galassie.  $D_V$  è definita dall'equazione 2.10,  $D_M$  è la distanza comovente mentre  $D_H(z) \equiv 1/H(z)$ . Presa da [7].

L'ultima generazione di surveys di galassie è in grado di sondare le scale di lunghezza per effettuare una misura precisa del segnale BAO<sup>13</sup>, e questo quindi è un metodo geometrico per valutare l'accelerazione cosmica. La scala di lunghezza, quella che il suono ha percorso tra  $a = 0$  e  $a = a_r$ , può essere misurata sia lungo che attraverso la linea di vista, consentendo all'osservatore di ricostruire il parametro di Hubble e la distanza del diametro angolare in funzione del redshift.

Ricordando l'equazione 1.33, questi metodi pongono dei limiti sui parametri di densità ed utilizzando i dati di WMAP e SDSS si è trovato un valore sul parametro di densità della materia pari a  $\Omega_M^0 = 0.25 \pm 0.03$  [9]

<sup>12</sup>Per maggiori precisazioni si veda Alcock-Paczynski 1979.

<sup>13</sup>Le BAO sono stati rilevati nei dati di *Sloan Digital Sky Survey* (SDSS).

## 2.3 weak lensing

Il weak lensing (WL) consiste nella curvatura della luce a causa di una sorgente gravitazionale. Questa distorsione consente di misurare la distribuzione della materia oscura e la sua evoluzione con il tempo, sondando così l'influenza dell'energia oscura sulla crescita della struttura dell'Universo.

Utilizzando il formalismo del *Principio di Fermat*: di tutti i possibili cammini che un raggio di luce può percorrere per andare da un punto a un altro, esso segue il cammino che richiede il tempo più breve. In un campo gravitazionale debole,  $\psi$  è molto più piccolo di  $c^2$ , allora la metrica dello spazio-tempo si può scrivere come segue:

$$ds^2 \sim c^2 dt^2 - dx^2 + \frac{2\psi}{c^2} (c^2 dt^2 + dx^2) \quad (2.25)$$

dove  $\psi = -\frac{GM}{r^2+a^2^{1/2}}$ .

Per un raggio di luce  $ds = 0$  che si propaga lungo l'asse  $z$  ed espandendo in serie per  $\psi/c \rightarrow 0$ , si ha

$$cdt \sim (1 - 2\psi/c^2) dz \quad (2.26)$$

Allora, integrando sul tempo troviamo due contributi:  $z/c$  ed il così chiamato *Shapiro delay*  $-\frac{2}{c^3} \int \psi dz$ . La differenza di percorso ( $\delta l$ ) tra l'effetto di lente e quello senza è:

$$\delta l \sim \frac{X^2}{2D_d} + \frac{X^2}{2D_{ds}} = \frac{D_d D_s}{2D_{ds}} (\beta - \theta)^2 \quad (2.27)$$

con le notazioni che si rifanno alla figura 2.11.

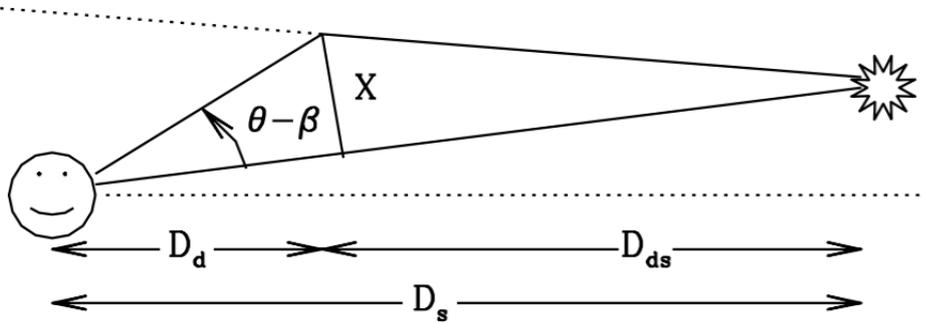


Figura 2.11: L'ipotenusa del triangolo con base  $D$  ed altezza  $H$  è uguale a  $D + X^2/2D$ , per  $X \ll D$ . Presa da [12].

Infine per comodità chiamiamo lo *Shapiro delay* come

$$-\frac{2}{c^3} \int \psi dz = -\frac{2}{c^3} \Psi(D_d \theta). \quad (2.28)$$

Allora la somma dei contributi diventa:

$$c\delta t = \frac{D_d D_s}{2D_{ds}} (\beta - \theta)^2 - \frac{2}{c^2} \Psi(D_d \theta) \equiv \Phi(\beta, \theta) \quad (2.29)$$

La quantità  $\Phi$  è detta *Potenziale di Fermat*.

Le lenti gravitazionali producono la distorsione delle immagini di galassie lontane, queste distorsioni possono essere descritte mettendo in relazione geometrica il piano della sorgente ( $S$ ) con il piano dell'immagine ( $I$ ):

$$A_{ij} \equiv \frac{\delta\beta_i}{\delta\theta_j} = \left( \delta_{ij} - \frac{2}{c^2} \frac{D_{ds} D_d}{D_s} \Psi_{ij} \right)^{-1} \quad (2.30)$$

$A$  è la matrice di distorsione,

$$A^{-1} = \frac{1}{(1-k)^2 - \gamma_1^2 - \gamma_2^2} \begin{pmatrix} 1-k+\gamma_1 & \gamma_2 \\ \gamma_2 & 1-k-\gamma_1 \end{pmatrix} \quad \text{dove} \quad \begin{pmatrix} k \\ \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{pmatrix} = \frac{D_{ds} D_d}{c^2 D_s} \begin{pmatrix} \Phi_{11} + \Phi_{22} \\ \Phi_{11} - \Phi_{22} \\ 2\Phi_{12} \end{pmatrix} \quad (2.31)$$

Possiamo riscrivere  $k$  come l'integrale sulla linea di vista

$$k(\vec{n}, \chi) = \int_0^\chi W(\chi') \delta(\chi') d\chi' \quad (2.32)$$

ove  $W$  è l'efficienza del lensing e  $\delta$  la perturbazione di densità della materia. Ed infine lo spettro angolare della convergenza  $k$

$$P_l^k(z_s) = \int_0^{z_s} \frac{dz}{H(z) d_A^2(z)} W(z)^2 P \left( k = \frac{l}{d_A}; z \right) \quad (2.33)$$

$P(k; z)$  è lo spettro di potenza della materia.

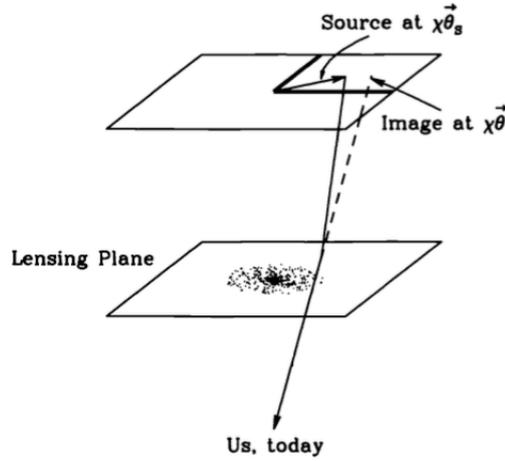


Figura 2.12: Un raggio di luce che parte dal piano della sorgente e viene deflesso da una fonte gravitazionale. Dove  $\theta = \theta$  e  $\theta_s = \beta$  nel nostro formalismo. Presa da [5].

A livello osservativo si studia l'ellitticità. Definendo un momento di quadripolo di un immagine (Fig 2.12):

$$q_{ij} \equiv \int d^2\theta I_{obs}(\theta) \theta_i \theta_j \quad (2.34)$$

Ove per un immagine circolare  $q_{xx} = q_{yy}$  e  $q_{xy} = 0$  ed  $I$  è l'intensità. Allora definiamo due parametri di ellitticità:

$$\epsilon_1 \equiv \frac{q_{xx} - q_{yy}}{q_{xx} + q_{yy}} \quad (2.35)$$

$$\epsilon_2 \equiv \frac{2q_{xy}}{q_{xx} + q_{yy}} \quad (2.36)$$

Vediamo una correlazione quantitativa, tra l'eq 2.31 e le equazioni 2.35 ed 2.36. Studiando prima  $\epsilon_1$  abbiamo,

$$\epsilon_1 = \frac{\int d^2\theta I_s(\beta)[\theta_x\theta_x - \theta_y\theta_y]}{\int d^2\theta I_s(\beta)[\theta_x\theta_x + \theta_y\theta_y]} \quad (2.37)$$

Avendo utilizzato il fatto che  $I_{obs}(\theta) = I_s(\beta)$ .

Gli integrali sopra sono integrati sugli angoli osservati, mentre le quantità da integrare dipendono dagli angoli nel piano della sorgente. Per piccoli angoli si ha  $\theta_i = (A^{-1})_{ij}\beta_j$ .

Allora sostituendo  $\theta_i$  si ottiene:

$$\epsilon_1 \equiv \frac{\sum_{ij}[(A^{-1})_{xi}(A^{-1})_{xj} - (A^{-1})_{yi}(A^{-1})_{yj}] \int d^2\beta I_s(\beta)\beta_i\beta_j}{\sum_{ij}[(A^{-1})_{xi}(A^{-1})_{xj} + (A^{-1})_{yi}(A^{-1})_{yj}] \int d^2\beta I_s(\beta)\theta_i\beta_j} \quad (2.38)$$

Allora, poiché l'integrale è nullo, per un'immagine circolare, a meno che  $i = j$ , ossia proporzionale a  $\delta_{ij}$ ,

$$\epsilon_1 \equiv \frac{(A^{-1})_{xi}(A^{-1})_{xi} - (A^{-1})_{yi}(A^{-1})_{yi}}{(A^{-1})_{xi}(A^{-1})_{xi} + (A^{-1})_{yi}(A^{-1})_{yi}} = \frac{(A_{xx}^{-1})^2 - (A_{yy}^{-1})^2}{(A_{xx}^{-1})^2 + (A_{yy}^{-1})^2 + 2(A_{xy}^{-1})^2} \quad (2.39)$$

Ricordando l'equazione 2.31 si ottiene,

$$\epsilon_1 = \frac{(1 - k + \gamma_1)^2 - (1 - k - \gamma_1)^2}{(1 - k + \gamma_1)^2 + (1 - k - \gamma_1)^2} = \frac{4\gamma_1(1 - k)}{2(1 - k)^2 + 2\gamma_1^2 + 2\gamma_2^2} \quad (2.40)$$

Se le distorsioni sono piccole si ottiene:

$$\epsilon_1 \sim 2\gamma_1 \quad (2.41)$$

Quindi studiando l'ellitticità delle galassie è possibile costruire il così detto *shear field*, un campo che dipende dal potenziale gravitazionale, ossia dalla distribuzione di massa.

Il segnale statistico dovuto alla lente gravitazionale da parte di una struttura su larga scala viene definito *cosmic shear*. Il *cosmic shear* in un punto nel cielo viene stimato calcolando la media locale delle forme di un gran numero di galassie distanti. La misura statistica primaria del cosmic shear è lo spettro di potenza (eq. 2.33) misurato come funzione di source-galaxy redshift  $z_s$ .

L'errore statistico dello spettro di potenza è

$$\Delta P_l^k = \sqrt{\frac{2}{(2l+1)f_{sky}}} \left[ P_l^k + \frac{\sigma^2(\gamma_i)}{n_{eff}} \right] \quad (2.42)$$

Dove  $f_{sky}$  è l'area di cielo coperta dalla survey,  $\sigma_{\gamma_i}$  è la deviazione standard di una delle componenti della deflessione e  $n_{eff}$  è la densità numerica per steradiani delle galassie. Il primo termine è chiamato *varianza cosmica* e domina su grandi scale, a causa del suo contributo, non si possono avere informazioni aggiuntive sulla scala dell'universo (o oltre).

Errori sistematici nelle misurazioni del weak lensing derivano da una serie di fonti : stime di deflessione errate, incertezze nelle stime del redshift fotometrico della galassia, correlazioni intrinseche delle forme delle galassie e incertezze teoriche nello spettro di potenza di massa su piccole scale . La causa principale dell'errore di misurazione della forma della galassia nelle attuali indagini sul lensing è l'anisotropia della funzione di diffusione dei punti dell'immagine (PSF) causata da distorsioni ottiche e CCD, errori di tracciamento, oscillazione del vento, rifrazione atmosferica, ecc. Un secondo tipo di errore di misurazione dello shape deriva dalla errata taratura della relazione tra la forma della galassia misurata e la modifica inferita, derivante da una correzione imprecisa per la sfocatura circolare delle immagini della galassia dovuta al seeing atmosferico. Gli errori fotometrici del redshift influiscono sulle stime dello spettro di potenza principalmente attraverso incertezze nella dispersione.



## 3 — Risultati

In questo capitolo si presentano i dati presi da [21] con i quali è stato fatto un diagramma di Hubble e nel quale si mostra vari andamenti di curve teoriche al variare dei parametri cosmologici. Infine si presentano i risultati per due modelli di universo ossia il  $\Lambda$ CDM e il  $w$ CDM.

### 3.1 Dati e diagramma di Hubble

I dati utilizzati per questo lavoro sono una raccolta di varie osservazioni negli anni da parte del " *The Supernova Cosmology Project*". In questa breve trattazione limiterò a discutere dei più recenti, ossia 20 Supernovae di tipo Ia osservate con HST Cluster Supernova Survey. Queste sono state scoperte in un intervallo di redshift compreso tra 0.623 – 1.415, di cui 14 superano i criteri sotto citati e 10 hanno un redshift maggiore di 1.

Prima di discutere dei criteri di selezione, è importante contestualizzare l'osservazione di queste SNe. Degno di nota in questo articolo è la correzione di correlazione tra la supernova e la galassia ospitante. È stato osservato che SNe Ia che risiedono in galassie così chiamate *early-type galaxies*<sup>1</sup>, offrono una serie di vantaggi. Sono considerate più vecchie ed hanno un range di massa meno ampio, che porta ad una popolazione più omogenea di progenitori. Inoltre le SNe Ia delle early-type seguono una distribuzione più minuziosa rispetto a quelle nelle late-type galaxies. Queste caratteristiche hanno portato gli autori di [21] a trovare una differenza di magnitudine tra le due tipologie di  $0.14 \pm 0.07$  mag dopo aver corretto le curve di luce. Questo valore è di fondamentale rilevanza per la correzione di errori sistematici per la determinazione dei parametri cosmologici. Inoltre le early-type galaxies presentano una quantità molto minore di polveri rispetto alle galassie a spirale, questo offre una via per lo studio separato di SNe Ia con lo scopo di capire l'effettivo contributo delle polveri su un campione molto ampio di stelle.

Delle venti SNe classificate è stato attribuito un livello di confidenza tra: *sicuro*, *probabile* o *plausibile*. Sempre mantenendo il formalismo di [21], una SNe Ia **sicura** è confermata direttamente dallo spettro oppure soddisfa una di due condizioni:

- è situata in una galassia ospite le cui proprietà spettroscopiche, fotometriche e morfologiche sono concordi ad una early-type galaxy senza segno di recente formazione stellare;
- ha una forma della curva di luce consistente con quella delle SNe Ia ed inconsistente con gli altri tipi di SNe (Fig 3.1).

Una **probabile** SNe Ia è un candidato che non ha una conferma dello spettro ma soddisfa uno dei due requisiti sopra elencati.

Infine, un **plausibile** candidato presenta una curva di luce verosimile al tipo Ia ma non si hanno sufficienti dati per scartare gli altri tipi di SN.

Come precedentemente annunciato, 16 sono stati gli oggetti classificati come sicuri o probabili.

Utilizzando i dati proposti dal Supernova Cosmology Project è stato possibile tracciare un diagramma di Hubble e mostrare gli andamenti delle curve teoriche (Fig. 3.2). I dati utilizzati sono stati corretti

---

<sup>1</sup>Così chiamate perchè si rifanno alla classificazione di Hubble a tridente.

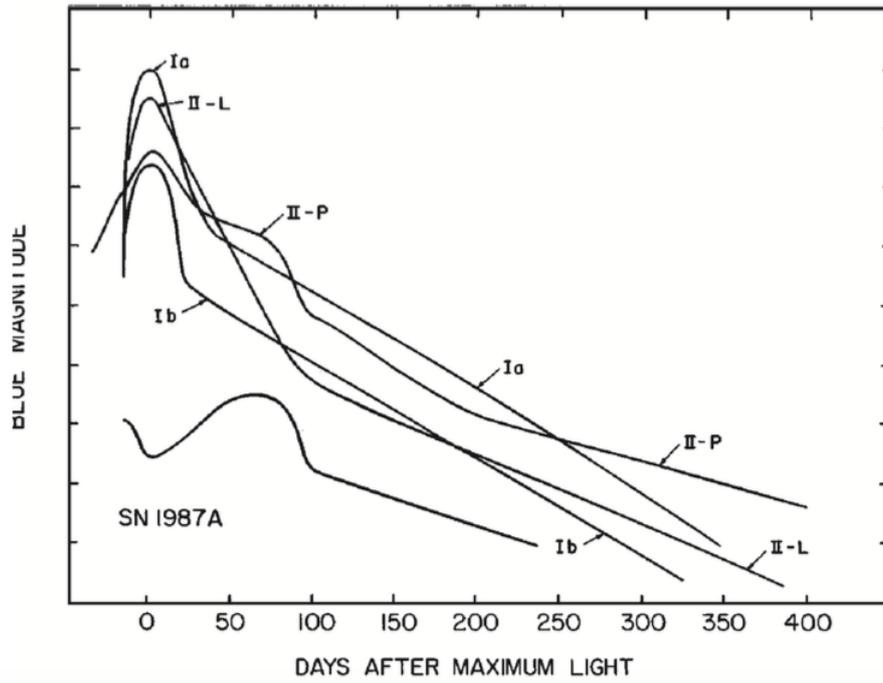


Figura 3.1: Varie curve di luce di Supernovae. Presa da [14].

dagli autori per magnitudine, colore e correzione-K. L'equazione utilizzata per mettere in correlazione i dati e le curve teoriche è la distanza di luminosità. Ricordando l'equazione 2.1 e scrivendola esplicitamente per un universo piatto

$$d_L(z; \Omega_I, H_0) = \frac{c(1+z)}{H_0} \int_0^z [(1-\Omega_\Lambda)(1+z')^3 + \Omega_\Lambda]^{-1/2} dz' \quad (3.1)$$

è stato possibile, al variare dei parametri, tracciare varie curve teoriche.

Per estrapolare al meglio i parametri di densità, gli autori hanno utilizzato il metodo della minimizzazione del  $\chi^2$ .

$$\chi^2 = \sum_{SNe} \frac{[\mu_B(\alpha, \beta, \delta, M_B) - \mu(z; \Omega_m, \Omega_w, w)]^2}{\sigma_{Ic}^2 + \sigma_{ext}^2 + \sigma_{sample}^2} \quad (3.2)$$

Dove  $\mu_B(\alpha, \beta, \delta, M_B)$  è il modulo di distanza parametrizzato come segue:

$$\mu_B = m_B^{max} + \alpha x_1 - \beta c + \delta P(m^{true} < m^{threshold}) - M_B \quad (3.3)$$

Con  $x_1$  la deviazione dalla media della forma della curva di luce,  $c$  la deviazione dal valor medio della correzione in banda  $B - V$ .

Poichè esiste una correlazione tra luminosità e massa della galassia ospite,  $P$  rappresenta la probabilità che la massa della galassia ospite si minore di una massa di soglia  $m_{threshold} = 10^{10} M_\odot$  usata per le correzioni. Infine  $\delta$  rappresenta il miglio coefficiente di correzione di massa, basato su calcoli probabilistici sopra introdotti.

### Vincoli sulla Dark Energy

Utilizzando i dati delle SNe Ia e combinandoli con i dati della CMB e BAO è stato possibile misurare con accuratezza il parametro di Hubble  $H(z)$ . Ricordando, per una generica equazione di stato della DE, l'equazione di Friedmann:

$$\frac{H^2(z)}{H_0^2} = \Omega_m(1+z)^3 + \Omega_k(1+z)^2 + \Omega_\Lambda \exp \left[ \int 3(1+w(z)) d \ln(1+z) \right] \quad (3.4)$$

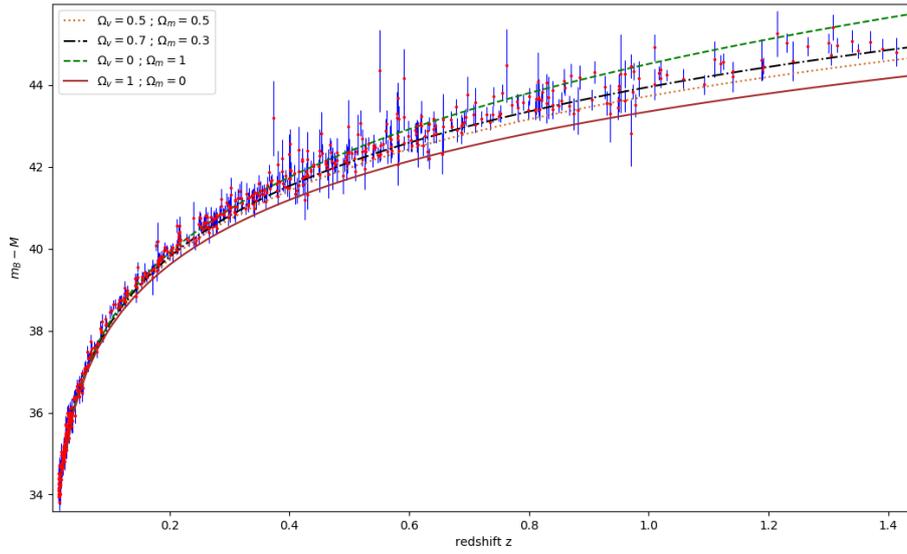


Figura 3.2: Diagramma di Hubble in funzione del redshift e del modulo di distanza. Sono state tracciate delle curve teoriche al variare del parametro di densità del vuoto e della materia.

ove  $H_0$  è misurato per altre vie, come il metodo delle Cefeidi. Si nota che se  $w$  fosse uguale a  $-1$  si avrebbe la solita equazione 2.11.

In questa trattazione mi concentrerò su due modelli:

- CDM-In questo modello l'equazione di stato è costante ed uguale a  $w = -1$ . Utilizzando solo i dati di SNe Ia si ottiene un valore di  $\Omega_\Lambda = 0.705 \pm 0.0415$ . Aggiungendo i dati della CMB, BAO e  $H_0$  per ridurre l'incertezza si ottiene [21]:

$$\Omega = 0.729 \pm 0.014$$

In questo modello, l'Universo ha iniziato la sua espansione accelerata a  $z = 0.752 \pm 0.041$ . In figura 3.4 è mostrato il livello di confidenza di  $\Omega_m$  e  $\Omega_\Lambda$  dai dati di SNe, CMB e BAO. Se si togliesse la condizione di spazio piatto, il miglior fit di  $\Omega_k$  sarebbe  $\Omega_k = 0.002 \pm 0.005$ .

- $w$ CDM-In questo modello il parametro di stato è sempre costante, ma può essere diverso da  $-1$ . I dati di SNe Ia da soli restituiscono un  $w = -1.001 \pm 0.3485$ , tuttavia combinando le quattro prove osservative, si trova  $w = -1.013^{+0.068}_{-0.073}$ , come mostrato in figura 3.3.

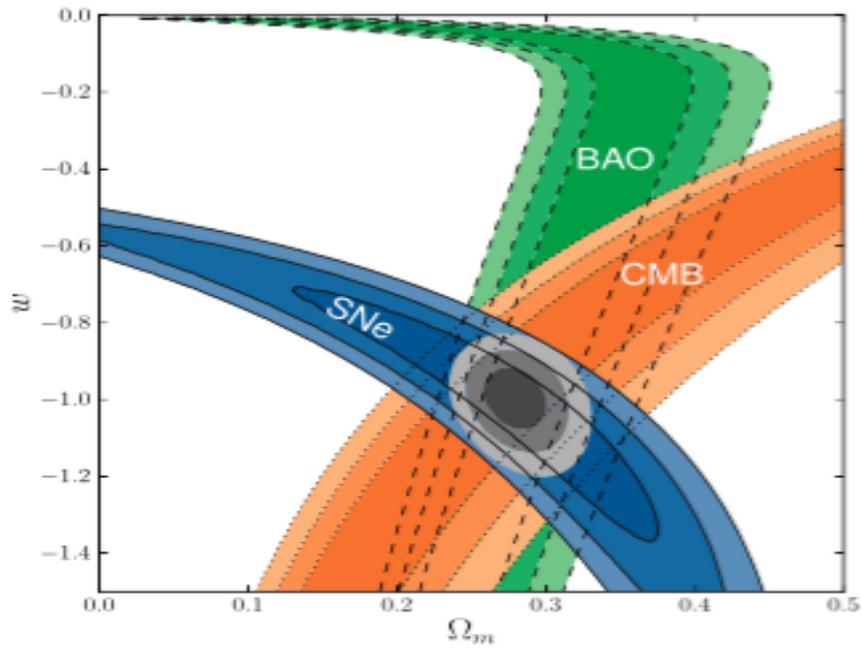


Figura 3.3: Grafico per il modello  $w$ CDM. Il fatto che i limiti dettati dai dati della CMB e dalle SNe siano quasi perpendicolari indica che l'unione di questi set è una forte combinazione per lo studio della natura della DE. Preso da [21]

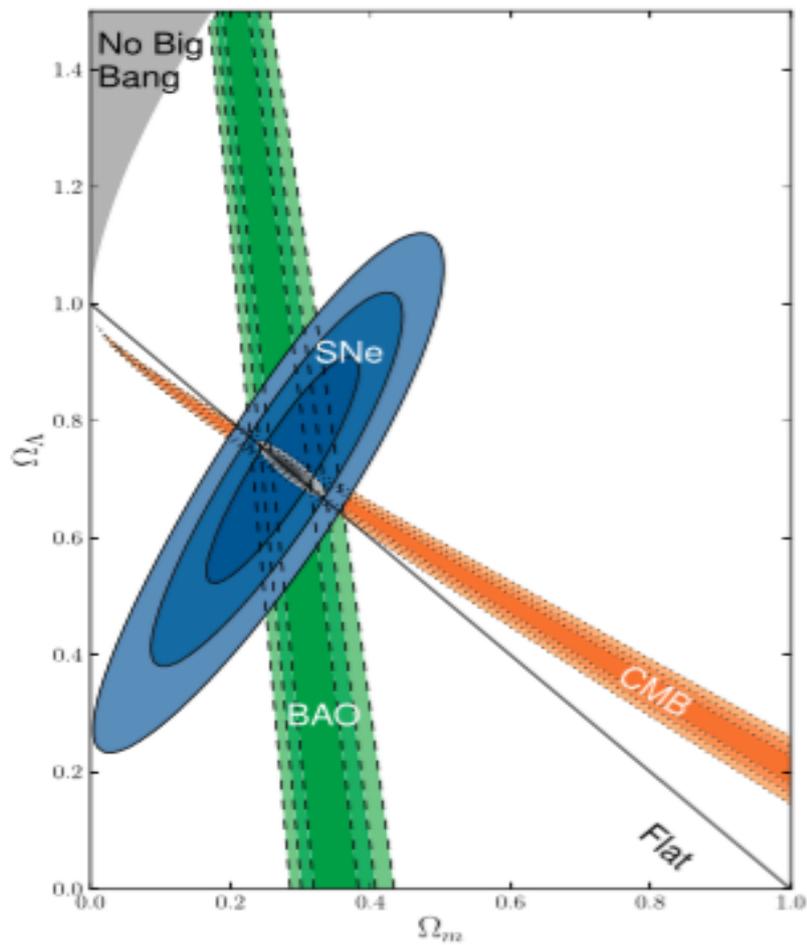


Figura 3.4: Grafico per il modello  $\Lambda$ CDM. Preso da [21]

## 3.2 problematiche DE

L'evidenza di una componente aggiuntiva al contributo energetico dell'Universo, la Dark Energy, ha fatto sorgere dei problemi per quanto concerne la sua natura, il suo rapporto con gli altri contributi energetici e i modelli cosmologici. Il Problema della Costante Cosmologica esprime l'incertezza sulla natura della Dark Energy e le discrepanze presenti tra predizioni teoriche ed evidenze empiriche, invece il Problema della Coincidenza e il Principio Antropico sono questioni prettamente interpretative piuttosto che fisiche.

### Problema della Costante Cosmologica

L'energia del vuoto sembra essere la candidata migliore per spiegare la Dark Energy, di conseguenza equivarrebbe matematicamente alla costante cosmologica con equazione di stato  $w = -1 = \text{cost.}$  Dalla fisica quantistica è noto che l'energia di punto zero di un oscillatore armonico e non-nulla e pari a  $(1/2)\hbar\omega$  quindi per calcolare il valore della densità di energia del vuoto si integra su tutti i momenti:

$$\rho_{\Lambda} = \frac{1}{2} \sum_{\text{campo}} g_i \int_0^{\infty} \sqrt{k^2 + m^2} \frac{d^3k}{4\pi^4} = \infty \quad (3.5)$$

e il risultato diverge a infinito (nella formula  $m$  si riferisce alla massa dei campi,  $g_i$  ai gradi di libertà con  $g_i = \pm 1$  rispettivamente per bosoni e fermioni). La densità di energia del vuoto  $\rho_{\Lambda}$  sarebbe quindi dovuta alle fluttuazioni quantistiche del vuoto, in accordo col principio di indeterminazione di Heisenberg: questo infatti impedisce ad una particella di rimanere ferma poiché, in tal caso, si conoscerebbero contemporaneamente posizione e impulso. Il vuoto ha perciò un'energia non nulla la cui evidenza sperimentale è data per esempio dall'effetto Casimir<sup>2</sup>.

È possibile fare una stima migliore dell'energia del vuoto troncando l'integrale nell'eq. 3.5 alla scala di Planck ( $\sim 10^{19} \text{ GeV}$ ) dove ci si può aspettare che la teoria quantistica dei campi in una metrica classica dello spazio-tempo non sia più valida, in questo modo la densità di energia del vuoto varrebbe  $\rho_{\Lambda,q} \sim 10^{76} \text{ GeV}^4$  eccedendo di 120 ordini di grandezza il valore misurato.

Questo problema è detto Problema della Costante Cosmologica ed esprime la discrepanza tra le predizioni teoriche e il valore di energia del vuoto richiesto per dar conto dei dati osservativi. La Supersimmetria (SUSY) prevede un'ipotetica simmetria tra bosoni e fermioni così che nel modello standard della fisica delle particelle ogni fermione avrebbe un partner di eguale massa sotto forma di bosone, e viceversa, di modo che il contributo di fermioni e bosoni di punto zero si elida nel calcolare  $\rho_v$ ; questa assunzione riduce la discrepanza tra valore calcolato e valore misurato a 60 ordini di grandezza, che sono comunque un'enormità. Tuttavia nessuna delle particelle predetta dalla Supersimmetria è stata ancora osservata negli acceleratori, quindi esse devono essere più pesanti rispetto ai partner del modello standard. Un approccio differente al problema si basa sull'idea che l'energia del vuoto possa assumere differenti valori in diverse regioni disconnesse dell'Universo; basandosi su una visione antropica<sup>3</sup> un valore troppo elevato precluderebbe la formazione di galassie e perciò non potremmo trovarci in una regione con un valore così elevato di  $\rho_v$ . Questo approccio ha trovato uno sviluppo nella teoria delle

<sup>2</sup>L'effetto Casimir consiste in una forza attrattiva presente tra due piastre poste nel vuoto e non soggette a campi elettromagnetici; questa forza attrattiva è causata dalla continua creazione di particelle virtuali generate dalle fluttuazioni quantistiche (consistentemente col principio di indeterminazione). Sperimentalmente, poiché le due piastre poste nel vuoto sono distanti pochi micron, tra esse possono generarsi solamente particelle virtuali la cui lunghezza d'onda associata sia un sottomultiplo intero della distanza tra le piastre; l'interazione delle suddette particelle virtuali con le piastre causa una spinta che all'interno delle due piastre risulta minore di quella dovuta alle particelle virtuali create all'esterno.

<sup>3</sup>Il Principio Antropico afferma che le cose che vediamo sono così in quanto se fossero diverse la vita come la conosciamo non esisterebbe. In particolare nella forma debole afferma che la misura di specifici parametri cosmologici può essere solo quella compatibile con l'esistenza di osservatori. È interessante in quanto dopo secoli dalla Rivoluzione Copernicana ritorna il tema dell'uomo al centro dell'Universo; rimane tuttavia di interesse la citazione di Kolb e Turner "It is unclear to one of the authors how a concept so lame [as the anthropic principle] could have been elevated to a status of the principle."

stringhe in cui la costante cosmologica puo praticamente avere ogni valore; questa struttura a multi-universo fornirebbe una spiegazione ad un valore cosi basso della costante cosmologica. Inoltre sono in corso ricerche su una teoria gravitazionale differente dalla Relativita Generale in grado di risolvere il Problema della Costante Cosmologica : l'accelerazione dell'Universo potrebbe essere la manifestazione di una teoria gravitazionale differente dalla Relativita Generale.

### Problema della Coincidenza

Il Problema della Coincidenza si pone come questione per spiegare come, nell'era attuale, il rapporto tra dark matter e dark energy sia di circa 1 : 3; in maniera equivalente ci si puo domandare come mai la transizione tra dominio della materia e quello della dark energy sia avvenuto proprio nell'epoca presente. In altri termini, poiche la densita di materia e dell'energia del vuoto (associata alla Costante Cosmologica nel modello  $\Lambda$ CDM ) scalano diversamente, affinche nell'epoca presente ci sia un passaggio tra il dominio della materia a quello di  $\Lambda$  occorre che le densita al tempo attuale debbano circa coincidere (come mostrato dal grafico in Figura 2.5). Conseguentemente la densita di energia oscura deve assumere un determinato valore nell'universo primordiale. Ricordando che le densita scalano nel seguente modo:

$$\rho_m \propto a^{-3} \quad \rho_\Lambda \propto a^{-3(1+w)} \quad (3.6)$$

in cui  $w$  è negativa e circa costante, il seguente problema si riduce al ricavarne dei vincoli sulle condizioni iniziali di  $\rho_\Lambda$ ; il Problema della Coincidenza espresso in questi termini viene detto Coincidenza Debole.

## 4 — Conclusioni

L'argomento centrale di questa tesi riguarda la nozione di distanza in cosmologia. Si è visto come non esista una maniera univoca di definirla (a causa principalmente dell'espansione dell'Universo), pertanto si sono introdotte le definizioni di distanza comovente, di luminosità, e di diametro angolare e le loro applicazioni in campo cosmologico.

La distanza di diametro angolare è applicabile alla Radiazione di Fondo Cosmico nelle Microonde (CMB), cosicché si possa stabilire una relazione tra: distanza di diametro angolare, orizzonte sonoro e i picchi acustici nello spettro di potenza. La CMB è sensibile ai parametri cosmologici e, poiché è la radiazione emessa all'epoca della Ricombinazione che non ha più interagito con la materia, è un'immagine dell'Universo così com'era 380.000 anni dopo il Big Bang. Le anisotropie in temperatura della CMB riflettono quelle del fluido foto-barionico nell'epoca dell'ultimo Scattering. Queste si sono sviluppate nel tempo tramite processi gravitazionali cosicché la distribuzione delle anisotropie nella CMB è correlata alla distribuzione delle Strutture su Larga Scala. Gran parte della tesi si è concentrata sulla distanza di luminosità e la sua applicazione a standard candle, quali sono le Supernovae di tipo Ia, ai fini di stimare i valori di alcuni parametri cosmologici. Per determinare al meglio i parametri cosmologici è stato ricostruito un diagramma di Hubble tramite programmazione python di circa 300 SNe Ia, i dati sono stati presi da Perlmutter et al. 2011. Come mostrato nel capitolo 2.1, il risultato mostra un Universo dominato energeticamente dalla Dark Energy che guida attualmente un'espansione accelerata.

La Dark Energy, nel modello cosmologico che fitta meglio i dati ( $\Lambda$ CDM), è identificata mediante l'equazione di stato  $w = -1$ , rappresentata matematicamente da una costante cosmologica  $\Lambda$  (interpretata come energia quantistica del vuoto); l'equazione di stato in questa forma però non descrive altre possibili spiegazioni di Dark Energy. Uno dei motivi per i quali si è teorizzata una parametrizzazione di  $w$  non costante nel tempo, oltre che essere un motivo valido la discussione di  $w = \text{cost}$ , è il problema di  $H_0$ , la così chiamata *tensione di  $H_0$* . Ossia il valore della costante di Hubble è diverso per via diretta (SNe Ia) o per via indiretta. Teorie come la gravità modificata o il modello di quintessenza cercano di spiegare questa discrepanza. Infine, per avere un'altra accuratezza dei dati, è stato mostrato un grafico per i due modelli  $\Lambda$ CDM e  $w$ CDM utilizzando tre osservabili fondamentali: SNe Ia, CMB e BAO. Da questi si evince che per il primo il valore è  $\Omega = 0.729 \pm 0.014$ , che rappresenta un buon contributo dominante dell'energia dell'Universo attuale. Nel secondo caso è stato trovato un valore del parametro di stato pari a  $w = -1.013^{+0.068}_{-0.073}$  che si discosta leggermente dal modello precedente con un parametro di densità pari a  $\Omega_m = 0.272 \pm 0.013$ .

Con questi risultati si nota la forte discrepanza che sussiste con la teoria quantistica per la costante del vuoto, essendo  $\rho_v = \Omega_\Lambda \times \rho_{crit}$ .



# Bibliografia

- [1] ALCOCK, C., PACZYNSKI, B., 1979. *An evolution free test for non-zero cosmological constant.* Nature Vol. 281
- [2] BAUMANN, D., 2018. *Cosmology. Part III Mathematical Tripos.*
- [3] BLAKE, C., GLAZEBROOK, K., 2003. *Probing dark energy using baryonic oscillations in the galaxy power spectrum as a cosmological ruler.* arXiv:astro-ph/0301632
- [4] COPELAND, E. J., SAMI, M., TSUJIKAWA, S., 2006. *Dynamics of Dark Energy.* International Journal of Modern Physics D 15, 1753–1935
- [5] DODELSON, S., 2003. *Modern Cosmology.*
- [6] FRANCESCHINI, A., 2018. *Corso di Cosmologia.*
- [7] FRIEMANN, J. A., TURNER, M., HUTERER, D., 2008. *Dark Energy and the Accelerating Universe.* Ann. Rev. AA 46, 385–432.
- [8] HUTERER, D., SHAFER, D. L., 2018. *Dark energy two decades after: Observables, probes, consistency tests.*
- [9] SILVESTRI, A., TRODDEN, M., 2009. *Approaches to Understanding Cosmic Acceleration.* arXiv:0904.0024v2 [astro-ph.CO]
- [10] SEO, H.J., EISENSTEIN, D. J., 2003. *Probing dark energy with barionic acoustic oscillations from future large galaxy redshift surveys.* arXiv:astro-ph/0307460
- [11] HU, W., DODELSON, S., 2002. *Cosmic Microwave Background Anisotropies.* Annu. Rev. Astron. and Astrophys. 2002
- [12] KUIJKEN, K., 2003. *The basic of lensing* arXiv:astro-ph/0304438v1
- [13] LEPORI, F., DI DIO, E., VIEL, M., BACCIGALUPI, C., DURRER, R., 2017. *The Alcock Paczynski test with Baryon Acoustic Oscillations: systematic effects for future surveys.* arXiv:1606.03114v2.
- [14] MARIGO, P., 2018. *Theoretical Astrophysics. Lectures notes.*
- [15] PERLMUTTER, S., GOOBAR, A., 1995. *Feasibility of Measuring the Cosmological Constant and Mass Density using Type Ia Supernovae.* Astrophysical Journal, to appear in 1 September 1995 issue.
- [16] PERLMUTTER, S., GABI, S., GOLDHABER, G., GOOBAR, A., GROOM, D. E., HOOK, I. M., et al., Jul. 1997. *Measurements of the Cosmological Parameters Omega and Lambda from the First Seven Supernovae at  $z \geq 0.35$ .* ApJ 483, 565.
- [17] PERLMUTTER, S., ALDERING, G., GOLDHABER, G., KNOP, R. A., NUGENT, P., CASTRO, P. G., et al., Jun. 1999. *Measurements of Omega and Lambda from 42 High-Redshift Supernovae.* ApJ 517, 565– 586.
- [18] PERLMUTTER, S., 2012. *Nobel Lecture: Measuring the acceleration of the cosmic expansion using supernovae.* REVIEWS OF MODERN PHYSICS, VOLUME 84

- 
- [19] RIESS, A. G., FILIPPENKO, A. V., CHALLIS, P., CLOCCHIATTI, A., DIERCKS, A., GARNAVICH, P. M., et al., Sep. 1998. *Observational Evidence from Supernovae for an Accelerating Universe and a Cosmological Constant*. AJ 116, 1009–1038
- [20] THE SUPERNOVA COSMOLOGY PROJECT, 1997. *Implications For The Hubble Constant from the First Seven Supernovae at  $z < 0.35$* . ApJ, 476, L63
- [21] THE SUPERNOVA COSMOLOGY PROJECT, 2011. *The hubble space telescope cluster supernova survey: V. Improving the dark energy constraints above  $z > 1$  and building an early type-hosted supernova sample*. arXiv:1105.3470v1.
- [22] WEINBERG, D. H., MORTONSON, M. J., EISENSTEIN, D. J., HIRATA, C., RIESS, A. G., ROZO, E., 2013. *Observational probes of cosmic acceleration*. arXiv:1201.2434v2.

