



UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

Dipartimento di Fisica e Astronomia “Galileo Galilei”
Corso di Laurea Triennale in Fisica

Effetti di interazione non locale nei condensati di Bose-Einstein

RELATORE:
Prof. Luca Salasnich

LAUREANDO:
Francesco Sgarlata
matr. 1030007

A mia madre,
che ha donato la sua vita
affinché potessi arrivare a tutto questo.

A mio padre,
che mi ha insegnato a viaggiare
sulle note di Battiato.

A Marina,
che mi ha insegnato a capire il mondo
e ad osservarlo con occhi diversi.

Indice

1	Sistemi di bosoni debolmente interagenti.	7
1.1	Derivazione dell'equazione di Gross-Pitaevskii	7
1.2	Equazione di Gross-Pitaevskii modificata	9
1.2.1	Correzioni alla GPE modificata	13
1.3	GPE unidimensionale	13
1.3.1	Scaling della GPE	14
2	Perturbazioni nei condensati	15
2.1	Linearizzazione della MGPE 1D	15
2.1.1	Calcolo della velocità del suono	17
2.1.2	Precisazioni sulla riduzione dimensionale	17
2.2	Solitoni	18
2.2.1	Solitoni dark	19
2.2.2	Potenziale a sfere dure	20
2.2.3	Potenziale a gradino	20
2.2.4	Potenziale di Van der Waals	22
2.2.5	Solitoni e GPE modificata.	24
2.2.6	Solitoni bright	26

Introduzione

La descrizione statistica della condensazione di bosoni non interagenti, elaborata nei lavori di Bose ed Einstein all'inizio del Novecento, ha portato recentemente a innumerevoli scoperte. Il fenomeno della condensazione ha risentito della mancanza di evidenze sperimentali per oltre settanta anni, periodo durante il quale l'interesse per gli scenari ipotizzati ha portato alla pubblicazione di studi interessanti che hanno messo in relazione la condensazione con fenomeni come la superfluidità[1], le eccitazioni elementari[2] e i vortici quantizzati [3],[4]. Verso la metà degli anni settanta Kleppner ha cominciato ad interessarsi alla condensazione dell'idrogeno con spin polarizzato ma i tempi non erano ancora maturi e il tanto desiderato risultato non venne raggiunto.

Negli anni ottanta, grazie all'implementazione dei metodi laser, si sono sviluppate tecniche di raffreddamento e confinamento degli atomi neutri in reticoli ottici. Gli sviluppi di queste tecnologie hanno permesso di raggiungere valori della temperatura ($\sim nK$) e della densità ($\sim 10^{13}$ - $10^{15} cm^{-3}$) necessari per osservare la condensazione e hanno portato nel 1995 alla realizzazione dei primi condensati di atomi di rubidio [5] e sodio [6], esperimenti considerati da molti la pietra miliare della fisica della materia condensata. Nel 2001 Cornell, Wieman e Ketterle hanno ricevuto Premio Nobel per il raggiungimento della condensazione in gas diluiti di atomi alcalini, confermando ulteriormente il successo dei loro esperimenti e l'interesse che hanno suscitato all'interno della comunità scientifica.

Negli ultimi anni si è registrato un crescente interesse verso la fisica degli atomi ultrafreddi, considerata da molti la nuova frontiera della fisica quantistica moderna perché banco di prova diretto degli effetti quantistici sulla materia. Questi ultimi, in particolari regimi, si manifestano su larga scala e sono osservabili direttamente in laboratorio: da qui il successo della teoria.

L'obiettivo di questo lavoro è di studiare i sistemi di bosoni debolmente interagenti e le conseguenze che questa interazione comporta. La preparazione e la stesura degli argomenti che saranno presentati hanno richiesto lo studio di numerosi articoli scientifici che sono un po' il punto di partenza di questa tesi.

In particolare, si partirà dalla derivazione dell'equazione di Gross-Pitaevskii (GPE), strumento che utilizzeremo per descrivere gli stati stazionari e la dinamica del sistema, e apporremo delle modifiche suggerite da alcuni autori, controllando l'affidabilità dell'uno o dell'altro modello.

Le soluzioni della GPE permettono una descrizione di innumerevoli fenomeni fisici che hanno luogo nei condensati: oscillazioni collettive, vortici quantizzati, solitoni, configurazioni di equilibrio ecc. In questo lavoro ci concentreremo sulle piccole oscillazioni nei condensati quasi-1D, vale a dire fortemente confinati lungo due dire-

zioni, focalizzandoci sulle differenze con il caso tridimensionale e con i modelli della GPE proposti da alcuni autori. Tratteremo inoltre le soluzioni solitoniche stazionarie della GPE e mostreremo come l'osservazione diretta di solitoni sia un'ulteriore conferma della validità della teoria.

Per comprendere meglio la fisica che sta dietro a questi fenomeni sarà necessario capire come si riescono a controllare questi sistemi a molti-corpi. Un ruolo cruciale nella teoria è giocato dalla lunghezza di scattering. Questo valore, che può variare su un intervallo che, come vedremo, può anche non essere limitato, è indispensabile per descrivere i fenomeni che si manifestano in un sistema di bosoni interagenti.

In molti casi la lunghezza di scattering può essere regolata sperimentalmente sfruttando l'utilizzo di un campo magnetico in quelle che vengono chiamate *risonanze di Feshbach*, apportando maggiore versatilità agli esperimenti [7],[8].

L'intenzione di questo studio è di mettere in relazione fra loro le teorie sviluppate da altri autori, vedere come si comportano i singoli modelli e controllare la loro accuratezza attraverso semplici analisi numeriche. Più in dettaglio, analizzeremo gli effetti che la forma dell'interazione (lunghezza di scattering e raggio effettivo) ha sui fenomeni che andremo a studiare.

Capitolo 1

Sistemi di bosoni debolmente interagenti.

In questo capitolo verrà formalizzato il problema di un sistema di bosoni debolmente interagenti. Faremo dunque un passo avanti, abbandonando l'approssimazione di bosoni liberi e aggiungendo un potenziale d'interazione.

La necessità di elaborare tale problema è inoltre dettata dal fatto che sperimentalmente i bosoni vengono confinati con potenziali e il sistema di conseguenza non è omogeneo.

Ricaveremo l'equazione che ci servirà per tutto questo percorso, l'equazione di Gross-Pitaevskii (GPE), per poi utilizzare delle modifiche proposte da alcuni autori, al fine di migliorare la precisione con cui si descrive l'interazione tra bosoni, ottenendo quella che chiameremo GPE modificata (MGPE).

1.1 Derivazione dell'equazione di Gross-Pitaevskii

Il problema che ci accingiamo a risolvere è quello di un gas di bosoni debolmente interagenti a temperatura nulla. Cominciamo dunque scrivendo l'Hamiltoniana del problema che, oltre al termine di particella libera dovrà contenere anche un termine che tenga conto dell'interazione.

$$H = \sum_{i=1}^N \hat{h}(\vec{r}_i) + \sum_{i<j} V(\vec{r}_i, \vec{r}_j) \quad (1.1)$$

dove

$$\hat{h}(\vec{r}_i) = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + U(\vec{r}) \quad (1.2)$$

e $U(\vec{r})$ è il potenziale di confinamento.

Poiché il problema in generale non è separabile, vogliamo trovare un potenziale che riproduca al meglio $V_{ij} \equiv V(\vec{r}_i, \vec{r}_j)$ e che renda i calcoli liberi da possibili divergenze.

La derivazione dell'equazione di Gross-Pitaevskii parte dall'assunzione che le particelle si trovino nello stesso stato quantico di particella singola. Indicando con $\phi(\vec{r})$ la funzione d'onda di tale stato, possiamo supporre che la funzione d'onda totale

possa scriversi come

$$\Psi(\vec{r}) = \prod_i \phi(\vec{r}_i) \quad (1.3)$$

dove $\vec{r} = (\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N)$ è il vettore delle coordinate delle particelle, Ψ è la funzione d'onda totale e $\phi(\vec{r}_i)$ quella di particella singola relativa alla particella i -esima, entrambe normalizzate ad 1.

La (1.3) si chiama **approssimazione di Hartree** [9]. Si ponga attenzione al fatto che (1.3) così scritta rappresenta lo stato fondamentale del sistema a temperatura nulla. La validità dell'approssimazione si basa su quest'ultima assunzione.

Adottiamo un approccio variazionale dove $\phi(\vec{r})$ gioca il ruolo di parametro, scrivendo dunque il funzionale energia.

$$E[\Psi] = \frac{\langle \Psi | H | \Psi \rangle}{\langle \Psi | \Psi \rangle} = \int d^3\vec{r}_1 \int d^3\vec{r}_2 \dots \int d^3\vec{r}_N \Psi^* \left[\sum_{i=1}^N \hat{h}(\vec{r}_i) + \sum_{i<j} V(\vec{r}_i, \vec{r}_j) \right] \Psi(\vec{r}) = \quad (1.4)$$

$$= N \int d^3\vec{r} \phi(\vec{r})^* \hat{h}(\vec{r}) \phi(\vec{r}) + \frac{1}{2} N(N-1) \int d^3\vec{r} \int d^3\vec{r}' |\phi(\vec{r})|^2 V(\vec{r}, \vec{r}') |\phi(\vec{r}')|^2 \quad (1.5)$$

dove gli integrali vanno intesi su tutto lo spazio e si è utilizzata l'approssimazione di campo medio. Abbiamo quindi visto che $E[\Psi] = E[\phi]$. A questo punto, tramite il teorema dei moltiplicatori di Lagrange, si minimizza il funzionale con la condizione di normalizzazione per ogni funzione d'onda di particella singola

$$\int d^3\vec{r} |\phi(\vec{r})|^2 = 1. \quad (1.6)$$

Calcoliamo la variazione del funzionale rispetto a ϕ^* , ignorando la costante moltiplicativa N

$$\delta E[\phi^*, \phi] = \int d^3\vec{r} \left[\hat{h}(\vec{r}) \phi(\vec{r}) + (N-1) \int d^3\vec{r}' |\phi(\vec{r}')|^2 V(\vec{r}, \vec{r}') \phi(\vec{r}) \right] \delta \phi^*(\vec{r}) \quad (1.7)$$

e applichiamo il teorema dei moltiplicatori di Lagrange

$$\delta E[\phi^*, \phi] - \lambda \delta \left(\int d^3\vec{r} |\phi(\vec{r})|^2 - 1 \right) = 0 \quad (1.8)$$

dove λ è il moltiplicatore di Lagrange.

Fermi[10], Breit [11], Blatt e Weisskopf [12] hanno introdotto il concetto di *pseudopotenziale*, ossia un metodo per descrivere l'interazione in un problema a due corpi. Questo *pseudopotenziale*, che ha origine dalle condizioni al contorno che vengono fissate sulla funzione d'onda complessiva, nel caso a due corpi porta a dei risultati esatti e ci permette di inserire all'interno di (1.7) un'espressione di $V(\vec{r}, \vec{r}')$ che non comporti alcuna divergenza nel calcolo degli integrali.

In questo caso, lo pseudopotenziale ha la forma

$$V(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = g \delta(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \quad (1.9)$$

dove

$$g = \frac{4\pi\hbar^2 a_s}{m} \quad (1.10)$$

con a_s la lunghezza di scattering. Adottando questo potenziale di contatto (1.9) e passando al limite $(N - 1) \sim N$, la condizione di minimizzazione di $E[\phi^*, \phi]$ porta all'equazione di Gross-Pitaevskii:

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + U(\vec{r}) + gN|\phi(\vec{r})|^2 \right] \phi(\vec{r}) = \mu\phi(\vec{r}) \quad (1.11)$$

dove $U(\vec{r})$ è il potenziale di confinamento del sistema e μ il potenziale chimico del gas (v. Appendice).

Si noti che l'equazione ricavata non include termini dipendenti dalla forma dell'interazione, bensì dal processo di diffusione a cui sono soggetti i bosoni, tramite a_s , a causa del potenziale di contatto. Ed è qui che la teoria deve essere messa accuratamente alla prova.

Se si considera un processo di scattering quantistico a due corpi, nel caso più semplice si suppone che l'ampiezza di scattering $f(\theta, \varphi)$ non dipenda dalle variazioni del vettore d'onda \mathbf{k} della particella diffusa. Inoltre, nel caso particolare di campo centrale, l'ampiezza di scattering dipende solamente da θ .

Mentre per un problema a basse energie $k \rightarrow 0$ la lunghezza di scattering non dipende dal momento della particella incidente, quando si vogliono coinvolgere energie più elevate è necessario includerne la dipendenza in a_s . Si deve quindi abbandonare l'assunzione che $f(\theta)$ sia indipendente da \mathbf{k} .

Anticipiamo già da adesso che il successo legato alla GPE è dovuto al fatto che in molti esperimenti i parametri⁽¹⁾ na_s^3 e a_s/a_\perp sono così piccoli da confermare la validità della (1.11). Successivamente si troverà la giustificazione a quest'ultima proposizione: per adesso basti capire che le correzioni che vanno apportate alla teoria dipendono dai parametri appena elencati.

1.2 Equazione di Gross-Pitaevskii modificata

Il potenziale (1.9) ignora completamente la dipendenza dell'ampiezza di scattering dall'energia. Questa approssimazione, valida soltanto per piccoli valori di na_s^3 , diventa inefficace anche sotto potenziali di confinamenti elevati. In [13] è stato proposto un potenziale effettivo che tiene conto di questa dipendenza attraverso un'espansione di raggio effettivo r_e .

In approssimazione di Born⁽²⁾, il potenziale proposto viene scritto come soddisfacente la relazione

$$-\frac{m}{4\pi\hbar^2} \int d^3\vec{r} e^{-i\mathbf{k}\cdot\vec{r}} V_{\text{eff}} e^{i\mathbf{k}\cdot\vec{r}} = \text{Re} [f(k, \theta = 0)]. \quad (1.12)$$

¹Indichiamo con n la densità di bosoni, mentre con a_\perp la lunghezza caratteristica del potenziale di confinamento.

²Poiché gli effetti dell'interazione sono significativi in una regione di spazio limitata in genere molto piccola, si considera il potenziale come una perturbazione il cui valore medio è calcolato considerando le funzioni d'onda della particella libera fuori dalla regione di potenziale effettivo.

A causa del range di energie in gioco, soltanto la componente s dell'onda diffusa è importante. L'ampiezza di scattering si può quindi scrivere in termini dello sfasamento di onda s , definito come $\delta_0(k)$

$$f(k, \theta) = \frac{1}{k \cot \delta_0(k) - i} \quad (1.13)$$

da cui

$$\text{Re}[f(k, \theta)] = \frac{k \cot \delta_0(k)}{k^2 \cot^2 \delta_0 + k^2}. \quad (1.14)$$

La formula del raggio effettivo, che descrive la dipendenza della fase di onda s dall'energia, ci permette di trovare l'espansione di $\text{Re}[f]$ in serie di k . Infatti

$$\text{Re}[f(k, \theta)] \simeq \frac{-a + \frac{1}{2}a^2 r_e k^2}{1 + a^2(a - \frac{r_e}{a})k^2} \stackrel{\frac{1}{1+x} \simeq 1-x+\dots}{\sim} -a + a^2(a - \frac{1}{2}r_e)k^2 \quad (1.15)$$

dove r_e è il range effettivo del potenziale.

Combinando (1.15) con (1.12) è facile mostrare che

$$V_{\text{eff}}(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = g\delta(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) + V_{\text{mod}}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \quad (1.16)$$

dove

$$V_{\text{mod}}(\vec{r}_i - \vec{r}_j) = \frac{g_2}{2} \left[\delta(\vec{r}_i - \vec{r}_j) \nabla_{\vec{r}_i - \vec{r}_j}^2 + \nabla_{\vec{r}_i - \vec{r}_j}^2 \delta(\vec{r}_i - \vec{r}_j) \right] \quad (1.17)$$

con

$$g_2 = \frac{4\pi\hbar^2 a_s^2 (a_s - \frac{1}{2}r_e)}{m}. \quad (1.18)$$

Il contributo al funzionale di energia di quest'ultimo termine si scrive

$$E_{\text{mod}}[\phi^*, \phi] \simeq \frac{N}{2} \int d^3\vec{r}_1 \int d^3\vec{r}_2 \phi^*(\vec{r}_1) \phi^*(\vec{r}_2) V_{\text{mod}} \phi(\vec{r}_1) \phi(\vec{r}_2) \stackrel{\text{s.d.r. centro di massa}}{\implies} \quad (1.19)$$

$$= \frac{N}{2} \int d^3\vec{R} \int d^3\vec{r} \phi^*(\vec{R} + \frac{\vec{r}}{2}) \phi^*(\vec{R} - \frac{\vec{r}}{2}) V_{\text{mod}}(\vec{r}) \phi(\vec{R} + \frac{\vec{r}}{2}) \phi(\vec{R} - \frac{\vec{r}}{2}) \quad (1.20)$$

dove \vec{R} è la coordinata del centro di massa e \vec{r} quella relativa.

Per semplificare la lettura dei calcoli, successivamente useremo la notazione $\phi_+ \equiv \phi(\vec{R} + \frac{\vec{r}}{2})$ e $\phi_- \equiv \phi(\vec{R} - \frac{\vec{r}}{2})$ e integreremo su $d^3\vec{r}$. L'integrale è formato da due contributi:

$$\int d^3\vec{r} \phi_+^* \phi_-^* \nabla_{\vec{r}}^2 [\delta(\vec{r}) \phi_+ \phi_-] \quad (1.21)$$

e

$$\int d^3\vec{r} \phi_+^* \phi_-^* \delta(\vec{r}) [\nabla_{\vec{r}}^2 \phi_+ \phi_-]. \quad (1.22)$$

Cominciamo calcolando (1.21).

$$\int d^3\vec{r} \phi_+^* \phi_-^* \nabla_{\vec{r}}^2 [\delta(\vec{r}) \phi_+ \phi_-] = \quad (1.23)$$

$$\int d^3\vec{r} \phi_+^* \phi_-^* (\phi_- \phi_+ \nabla_{\vec{r}}^2 \delta(\vec{r}) + \delta(\vec{r}) \nabla_{\vec{r}}^2 (\phi_- \phi_+) + 2\nabla_{\vec{r}} \delta(\vec{r}) \cdot \nabla (\phi_- \phi_+)) = \quad (1.24)$$

$$(1.25)$$

che sommato a (1.22) resistuisce

$$\int d^3\vec{r} \stackrel{(a)}{(\nabla^2 (\phi_+^* \phi_-^* \phi_- \phi_+))} \delta(\vec{r}) + 2 \int d^3\vec{r} \phi_+^* \phi_-^* \delta(\vec{r}) \nabla^2 (\phi_- \phi_+) + \quad (1.26)$$

$$+ 2 \int d^3\vec{r} \phi_+^* \phi_-^* \nabla \delta(\vec{r}) \cdot \nabla (\phi_- \phi_+) \quad (1.27)$$

ossia, a meno di costanti moltiplicative e di integrazione su $d^3\vec{R}$, l'integrale (1.20). Per non rendere tedious i calcoli, analizziamo i vari pezzi.

Usando le proprietà della delta di Dirac, possiamo scrivere (c) come

$$\begin{aligned} (c) &= -2 \int d^3\vec{r} \delta(\mathbf{r}) \nabla \cdot (\phi_+^* \phi_-^* \nabla (\phi_- \phi_+)) = \\ &- 2 \int d^3\vec{r} \delta(\vec{r}) \nabla (\phi_+^* \phi_-^*) \cdot \nabla (\phi_- \phi_+) - 2 \int d^3\vec{r} \delta(\vec{r}) \phi_+^* \phi_-^* \nabla^2 (\phi_- \phi_+) \end{aligned}$$

e sostituendo quest'ultimo alla (1.27) otteniamo

$$\int d^3\vec{r} (\nabla^2 (\phi_+^* \phi_-^* \phi_- \phi_+)) \delta(\vec{r}) - 2 \int d^3\vec{r} \delta(\vec{r}) \nabla (\phi_+^* \phi_-^*) \cdot \nabla (\phi_- \phi_+) \quad (1.28)$$

Facendo agire la delta, l'ultimo pezzo si annulla⁽³⁾ e quindi, ripristinando l'integrazione in $d^3\vec{R}$, integrando in $d^3\vec{r}$ e applicando il laplaciano, otteniamo

$$\int d^3\vec{R} \frac{1}{2} (\phi^* \phi (\phi \nabla^2 \phi^* + \phi^* \nabla^2 \phi) - \phi^2 |\nabla \phi^*|^2 - \phi^{*2} |\nabla \phi|^2). \quad (1.29)$$

Aggiungendo e sottraendo il termine $2\nabla \phi^* \cdot \nabla \phi$ all'interno delle parentesi otteniamo

$$\int d^3\vec{R} \frac{1}{2} \phi^* (\nabla^2 (\phi^* \phi)) \phi - \int d^3\vec{R} \frac{1}{2} (\nabla (\phi \phi^*))^2. \quad (1.30)$$

Se richiediamo che la funzione d'onda svanisca all'infinito $\int d^3\vec{R} \nabla (\phi \phi^*) \cdot \nabla (\phi \phi^*) = - \int d^3\vec{R} \phi \nabla^2 (\phi \phi^*) \phi^*$ e finalmente si ottiene

$$\int d^3\vec{R} \phi^* (\nabla^2 (\phi^* \phi)) \phi \quad (1.31)$$

che sostituita in (1.20) porta ad un'espressione semplificata del termine modificato del funzionale energia:

$$E_{\text{mod}}[\phi^*, \phi] = \frac{N}{4} g_2 \int d^3\vec{R} \phi^* \nabla^2 (|\phi|^2) \phi. \quad (1.32)$$

D'altra parte, se riscriviamo (1.17) nel sistema di riferimento del centro di massa come

$$V_{\text{mod}}(\vec{r}) = \frac{g_2}{2} \left[\delta(\vec{r}) \overleftarrow{\nabla}_{\vec{r}}^2 + \overrightarrow{\nabla}^2 \delta(\vec{r}) \right] \quad (1.33)$$

³In virtù della sostituzione $\nabla_{\vec{r}} \rightarrow \pm \frac{1}{2} \nabla_{\vec{R}}$ dove il segno dipende se $\nabla_{\vec{r}}$ agisce su ϕ_- o ϕ_+ .

dove le frecce indicano il verso di azione di ogni laplaciano, il conto risulta essere più semplice. Infatti, tralasciando l'integrazione in $d^3\vec{R}$ e le costanti moltiplicative, abbiamo

$$\int d^3\vec{r}\phi_+^*\phi_-^* \left[\delta(\vec{r})\overleftarrow{\nabla}_{\vec{r}}^2 + \overrightarrow{\nabla}^2\delta(\vec{r}) \right] = \quad (1.34)$$

$$= \int d^3\vec{r}\phi_+\phi_-\delta(\vec{r})\nabla^2(\phi_+^*\phi_-^*) + \int d^3\vec{r}\phi_+^*\phi_-^*\delta(\vec{r})\nabla_{\vec{r}}^2(\phi_+\phi_-) \quad (1.35)$$

Risolviamo il primo integrale, essendo il secondo uguale al primo sotto lo scambio $\phi^* \longleftrightarrow \phi$.

$$\int d^3\vec{r}\phi_+\phi_-\delta(\vec{r}) (\phi_+^*\nabla_{\vec{r}}^2\phi_-^* + \phi_-^*\nabla_{\vec{r}}^2\phi_+^* + 2\nabla_{\vec{r}}\phi_+^* \cdot \nabla_{\vec{r}}\phi_-^*) = \frac{\phi^2}{2} (\phi^*\nabla^2\phi^* - |\nabla\phi^*|^2) \quad (1.36)$$

dunque da (1.35) otteniamo

$$\frac{\phi^2}{2} (\phi^*\nabla^2\phi^* - |\nabla\phi^*|^2) + \frac{\phi^{*2}}{2} (\phi\nabla^2\phi - |\nabla\phi|^2) \quad (1.37)$$

e ripristinando l'integrazione in $d^3\vec{R}$ si ottiene (1.29), da cui lo stesso risultato (1.31). In questo modo l'Hamiltoniana totale diventa

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + U(\vec{r}) + \frac{g}{2}N|\phi(\vec{r})|^2 + \frac{N}{4}g_2\nabla^2(|\phi|^2). \quad (1.38)$$

Quest'ultima espressione include il termine cinetico, il potenziale di confinamento, il termine di interazione a contatto proveniente dalla GPE e un nuovo termine dovuto al potenziale proposto in [13].

Minimizzando il funzionale $E_{\text{tot}} = E + E_{\text{mod}}$ rispetto a ϕ^* si ottiene l'equazione di Gross-Pitaevskii modificata (MGPE)

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + U(\vec{r}) + gN|\phi(\vec{r})|^2 + \frac{N}{2}g_2\nabla^2(|\phi|^2) \right] \phi(\vec{r}) = \mu\phi(\vec{r}) \quad (1.39)$$

Si noti che quest'ultima versione della GPE dipende dalla forma dell'interazione attraverso il range effettivo r_e contenuto in (1.18).

Nel nostro caso la densità di particelle si esprime come $n \sim \rho(\vec{r}) = N|\phi(\vec{r})|^2 \sim N/(a_{\perp})^3$. In questo modo possiamo valutare gli ordini di grandezza dei singoli termini correttivi dell'hamiltoniana.

$$\epsilon_{\text{MF}} \sim na_s(\hbar^2/2m) \quad \text{Termine di campo medio} \quad (1.40)$$

$$\epsilon_{\text{mod}} \sim \epsilon_{\text{MF}}(a_s/a_{\perp})^2 \quad \text{Potenziale effettivo} \quad (1.41)$$

In precedenza, si era detto che le correzioni da apportare alle GPE dipendevano dai parametri na_s^3 e a_s/a_{\perp} . Adesso si può capire il perché.

1.2.1 Correzioni alla GPE modificata

D'altra parte, i gas ultrafreddi sono generalmente molto diluiti, in modo tale che la distanza media tra due particelle sia più grande del range d'interazione: in queste condizioni gli urti non sono molto frequenti e, come suggerito da [14], si può descrivere l'interazione utilizzando il modello a due corpi in collisione che ha una forma più semplice.

Come detto precedentemente, le proprietà a bassa energia di un sistema a due corpi possono essere riprodotte abbastanza bene se, invece del potenziale, utilizziamo delle condizioni al contorno per la funzione d'onda relativa. Queste condizioni al contorno dipendono soltanto dalla lunghezza di scattering $a = -\lim_{k \rightarrow 0} \delta(k)/k$ dove $\delta(k)$ è lo sfasamento di onda s . Adottando questo approccio, in [14] viene proposta una correzione al termine g_2

$$g_2 = \frac{4\pi\hbar^2 a_s^2}{m} \left(\frac{1}{3} a_s - \frac{1}{2} r_e \right). \quad (1.42)$$

1.3 GPE unidimensionale

Come anticipato nell'introduzione, grazie alle nuove tecniche di laboratorio è possibile confinare il gas di bosoni a temperature prossime allo $0 \text{ }^\circ\text{K}$ in maniera tale da ottenere un sistema unidimensionale. Si può scegliere un potenziale di confinamento armonico a simmetria cilindrica così forte da poter "schiacciare" il gas lungo un solo asse. Da ora in poi chiameremo z l'asse su cui si estende il condensato. Supponiamo quindi che il sistema sia soggetto ad un potenziale armonico di frequenza ω_\perp lungo gli assi x e y e un potenziale di confinamento non specificato lungo z .

$$U(x, y, z) = V(z) + \frac{1}{2} m \omega_\perp^2 (x^2 + y^2) \quad (1.43)$$

Si utilizzi per la funzione d'onda l'ansatz gaussiano

$$\phi(x, y, z) = \frac{\varphi(z)}{\sqrt{\pi} a_\perp} e^{-\frac{x^2+y^2}{2a_\perp^2}} \quad (1.44)$$

dove $a_\perp = \sqrt{\hbar/(m\omega_\perp)}$ è la lunghezza caratteristica dell'oscillatore armonico e $\varphi(z)$ è normalizzata ad N . La si inserisca nel funzionale energia ricavato nella sezione precedente

$$E[\phi] = \int d^3\vec{r} \phi^* \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + U(x, y, z) + \frac{g}{2} |\phi|^2 + \frac{g_2}{4} \nabla^2 (|\phi|^2) \right] \phi \quad (1.45)$$

dal quale, integrando, otteniamo la versione unidimensionale dell'equazione di Gross-Pitaevskii (MGPE 1D)

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dz^2} + U(z) + \gamma |\varphi|^2 + \frac{1}{2} \gamma_2 \frac{d^2}{dz^2} |\varphi|^2 \right] \varphi(z) = \tilde{\mu} \varphi(z) \quad (1.46)$$

dove

$$\gamma = \frac{1}{2\pi a_{\perp}^2} (g - g_2/a_{\perp}^2) \quad \gamma_2 = \frac{g_2}{2\pi a_{\perp}^2} \quad \tilde{\mu} = \mu - \hbar\omega_{\perp} \quad (1.47)$$

Si noti che (1.44) è ragionevole per l'uso che ne abbiamo fatto, in quanto l'Hamiltoniana imperturbata (ossia quella del sistema di bosoni non interagenti) manca dei termini non lineari della GPE ed essendo separabile la funzione d'onda si può fattorizzare $\phi(x, y, z) = \varphi(z)g(x, y)$ dove $g(x, y)$ è l'autofunzione dell'oscillatore armonico bidimensionale. Allo stato fondamentale $g(x, y)$ è una gaussiana e per la funzione d'onda complessiva utilizzeremo, come fatto prima, l'approssimazione di Hartree. A priori la larghezza della gaussiana a_{\perp} potrebbe dipendere anche dalla coordinata z . Per adesso non evidenziamo questa dipendenza e fissiamo a_{\perp} , il che equivale a dire che si trascura un possibile moto trasverso dei bosoni.

1.3.1 Scaling della GPE

A causa dei calcoli che incontreremo, conviene rendere la lettura delle equazioni un po' più semplice. A tal scopo riscaliamo MGPE 1D. L'obiettivo è di esprimere le lunghezze in unità di a_{\perp} e i tempi in unità di $1/\omega_{\perp}$. Definiamo le grandezze adimensionali

$$\bar{z} = \frac{z}{a_{\perp}} \quad \bar{\varphi}(z) = \varphi(z)\sqrt{a_{\perp}} \quad \bar{a}_s = \frac{a_s}{a_{\perp}} \quad \bar{r}_e = \frac{r_e}{a_{\perp}} \quad (1.48)$$

$$\bar{\mu} = \frac{\tilde{\mu}}{\hbar\omega_{\perp}} = \left(\frac{\mu}{\hbar\omega_{\perp}} - 1 \right) \quad \bar{U}(z) = \frac{U(z)}{\hbar\omega_{\perp}} \quad (1.49)$$

$$\bar{\gamma} = 2\bar{a}_s \left(1 - \bar{a}_s \left(\frac{1}{3}\bar{a}_s - \frac{1}{2}\bar{r}_e \right) \right) \quad \bar{\gamma}_2 = 2\bar{a}_s^2 \left(\frac{1}{3}\bar{a}_s - \frac{1}{2}\bar{r}_e \right) \quad (1.50)$$

Dividendo (1.46) per $\hbar\omega_{\perp}$ ed utilizzando le definizioni precedenti otteniamo l'equazione di Gross-Pitaevskii adimensionale

$$\left[-\frac{1}{2} \frac{d^2}{d\bar{z}^2} + \bar{U}(\bar{z}) + \bar{\gamma}|\bar{\varphi}|^2 + \frac{1}{2}\bar{\gamma}_2 \frac{d^2}{d\bar{z}^2} |\bar{\varphi}|^2 \right] \bar{\varphi} = \bar{\mu}\bar{\varphi} \quad (1.51)$$

che utilizzeremo nel seguito scrivendo φ in luogo di $\bar{\varphi}$ (e così per tutte le altre grandezze).

Capitolo 2

Perturbazioni nei condensati

Il successo della GPE è legato al fatto che le soluzioni descrivono molto bene lo stato fondamentale di un sistema di bosoni nel limite di bassa interazione [15]. Negli ultimi anni si sono sperimentati nuovi metodi di misura delle proprietà fisiche dei gas e si sono osservati fenomeni interessanti. Ad esempio, grazie alle tecniche di confinamento ed eccitazione dei condensati, è stato possibile riprodurre ed osservare la propagazione di onde sonore [18]. La teoria che andremo ad esporre servirà per comprendere meglio la dinamica di piccole perturbazioni rispetto ad una configurazione uniforme.

2.1 Linearizzazione della MGPE 1D

Si consideri un sistema di bosoni debolmente interagenti caratterizzato da un rapporto $Na_s/a_\perp \ll 1$ e in regime di collisioni nulle⁽¹⁾. Si inserisca nella versione unidimensionale dipendente dal tempo della MGPE 1D

$$\left(i\frac{\partial}{\partial t} - 1\right)\varphi(z, t) = \left[-\frac{1}{2}\frac{d^2}{dz^2} + \gamma|\varphi|^2 + \frac{1}{2}\gamma_2\frac{d^2}{dz^2}|\varphi|^2\right]\Psi(z, t) \quad (2.1)$$

la funzione d'onda totale scritta come prodotto di un modulo e di una fase,

$$\varphi(z, t) = \sqrt{n(z, t)}e^{iS(z, t)} \quad (2.2)$$

dove $n(z, t)$ descrive il profilo di densità e $S(z, t)$ soddisfa

$$\vec{v}(z, t) = \frac{d}{dz}S(z, t). \quad (2.3)$$

Si ottiene un sistema di equazioni

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{d}{dz} \left[\frac{1}{2}v^2 + \gamma n + \left(\gamma_2 - \frac{1}{4n}\right) \frac{d^2}{dz^2}n + \frac{1}{8n} \left(\frac{dn}{dz}\right)^2 \right] = 0 \\ \frac{\partial n}{\partial t} + \frac{d}{dz}(n\vec{v}) = 0. \end{cases} \quad (2.4)$$

¹Si veda §2.1.2 per la giustificazione della condizione $Na_s/a_\perp \ll 1$.

Poichè siamo interessati ad eccitazioni elementari, possiamo linearizzare il sistema considerando delle piccole variazioni della coppia $(n(z, t), v(z, t))$ intorno a degli equilibri (n_0, v_0) definiti in maniera tale che le loro derivate spaziali e temporali siano nulle. Si noti che n_0 è la densità del condensato allo stato fondamentale. Inserendo le piccole perturbazioni $n'(z, t) = n_0 + \delta n(z, t)$ e $v'(z, t) = \delta v(z, t)$ in (2.4) e prendendo soltanto i termini lineari, si ottiene l'equazione

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \delta n - n_0 \gamma \frac{d^2}{dz^2} (\delta n) - n_0 \left(\gamma_2 - \frac{1}{4n_0} \right) \frac{d^4}{dz^4} \delta n = 0 \quad (2.5)$$

dalla quale, scomponendo la perturbazione in onde piane

$$\delta n(z, t) \propto \int dk d\omega \hat{\delta n}(k, \omega) e^{-i\omega t} e^{-ikz} \quad (2.6)$$

dove $\hat{\delta n}(k, \omega)$ è la trasformata di Fourier, si ottiene la relazione di dispersione

$$\omega = k \sqrt{n_0 \gamma - \left(n_0 \gamma_2 - \frac{1}{4} \right) k^2} \quad (2.7)$$

Utilizzando le dipendenze di g e g_2 dalla lunghezza di scattering e dal raggio effettivo suggerite da [13] con le correzioni contenute in [14] si può analizzare l'andamento di (2.7) al variare dei parametri (opportunamente riscaldati) che caratterizzano l'interazione. Poiché la perturbazione è proporzionale a $e^{i(kz - \omega t)}$ la natura di ω è importante per stabilire la stabilità o meno dell'onda. In particolare se ω è un numero reale, allora la perturbazione è stabile nel tempo.

Definito

$$\Theta = \left(\gamma_2 n_0 - \frac{1}{4} \right) \quad (2.8)$$

da (2.7) si ricava che ω è un numero reale se sussiste la relazione

$$\Theta k^2 < n_0 \gamma \quad (2.9)$$

Per $a_s \neq 3/2r_e$ si differenziano due regimi di perturbazione stabile a seconda del segno di Θ , dipendente dalla frequenza di confinamento ω_\perp .

$$\omega_\perp \lesssim \frac{\hbar}{8mn_0 a_s^2 \left(\frac{1}{3}a_s - \frac{1}{2}r_e \right)} \iff \Theta \geq 0 \implies |k| \lesssim \sqrt{\frac{n_0 \gamma}{|\Theta|}} \quad \text{se } \Theta > 0 \implies a_s > \frac{3}{2r_e} \quad (2.10)$$

Se $a_s = 3/2r_e$ la frequenza di oscillazione è *sempre* un numero reale e la relazione di dispersione assume la forma

$$\hbar^2 \omega^2 = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \left(\frac{\hbar^2 k^2}{2m} + 2mc_s^2 \right) \quad (2.11)$$

che per piccoli valori del momento porta alla relazione di dispersione per i fononi $\omega = c_s k$. Si noti che in (2.10) e (2.11) abbiamo ripristinato le costanti naturali, tornando alle unità di misura convenzionali. L'abbiamo fatto per esplicitare meglio la condizione riguardante ω_\perp e per presentare la relazione di dispersione nella sua espressione usuale.

2.1.1 Calcolo della velocità del suono

Si noti che il termine di interazione g_2 compare in (2.7) sia all'interno di una costante moltiplicata per k^2 sia di all'interno di γ . Per piccoli momenti di oscillazione la relazione diventa

$$\omega = c_s k \quad (2.12)$$

dove la velocità del suono nel sistema 1D vale

$$c_s^2 = n_0 \gamma \quad (2.13)$$

In Fig.2.1 riportiamo il grafico di $c_s(n_0)$ nel caso in cui le interazioni nei condensati siano di diversa natura.

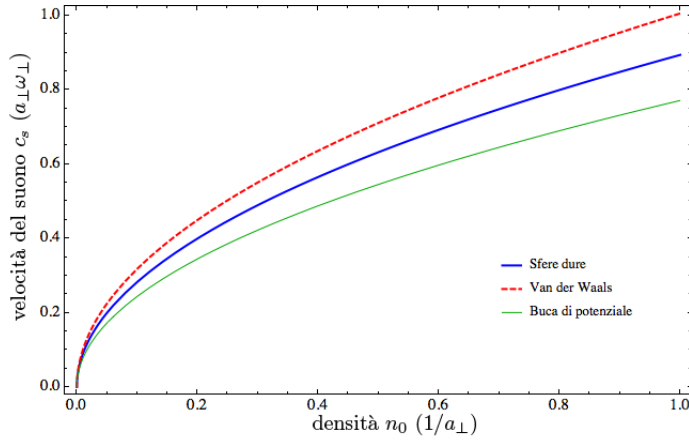


Fig. 2.1: Andamento di c_s al variare della densità n_0 . Le lunghezze e i tempi sono espresse in unità di a_\perp e $1/\omega_\perp$. Per il confronto è stata fissata la lunghezza di scattering $a_s = 0.4$ e sono stati utilizzati tre diversi potenziali: sfere dure, Van der Waals ($C_6 = 0.7331$, $r_0 \sim 0.2$), buca di potenziale ($V_0 = 20.3$, $r_0 \sim 0.96$). Si noti che nel caso del potenziale a sfere dure, la velocità del suono è la stessa prevista dalla GPE con l'unica accortezza che stiamo trattando un sistema 1D.

2.1.2 Precisazioni sulla riduzione dimensionale

Nel contesto delle piccole oscillazioni in un condensato unidimensionale è rilevante la presenza del potenziale modificato (1.17) e tra poco sarà evidente come, grazie a questo termine, la forma dell'interazione influenza la dinamica delle piccole oscillazioni.

Poiché richiediamo che la variazione di densità locale a seguito della perturbazione sia circa costante in modulo, l'equazione (1.46), nel caso di una piccola perturbazione ($n' = n_0 + \delta n$), diventa

$$\left[-\frac{1}{2} \frac{d^2}{dz^2} + \gamma |\varphi|^2 \right] \varphi(z) = \bar{\mu} \varphi(z) \quad (2.14)$$

del tutto equivalente *in forma* alla GPE1D.

Quando abbiamo trattato la riduzione dimensionale della GPE in §1.3 è stato assunto implicitamente che il parametro a_{\perp} che compariva in (1.44) fosse la lunghezza caratteristica del potenziale armonico. Per studiare le piccole oscillazioni però, bisogna rilasciare questo vincolo e ripartire dalla versione dipendente dal tempo del funzionale (1.45).

Nei limiti delle nostre approssimazioni (gas molto diluito, bosoni poco interagenti e piccole perturbazioni) bisogna giustificare la validità della riduzione dimensionale fatta precedentemente.

Cominciamo dunque sfruttando l'Ansatz gaussiano proposto in [16]

$$\phi(x, y, z, t) = \frac{f(z, t)}{\sqrt{\pi}\sigma(z, t)} e^{-\frac{(x^2+y^2)}{2\sigma(z, t)^2}} \quad (2.15)$$

in cui si esplicita la non ovvia dipendenza di σ da (z, t) . Integrando il funzionale rispetto a x e y , trascurando le derivate di σ e sostituendo $\mu = i\partial/\partial t$ si ottiene il seguente funzionale

$$E[f] = \int dt dz f(z, t) \left[-i \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{2\sigma(z, t)^2} - \frac{1}{2} \frac{d^2}{dz^2} + \frac{\sigma^2}{2} + \frac{g}{2\sigma^2} |f(z, t)|^2 + \right] \quad (2.16)$$

$$+ \frac{g_2}{4\sigma^2} \frac{d^2}{dz^2} |f(z, t)|^2 - \frac{g_2}{2\sigma^4} |f(z, t)|^2 |f(z, t)| \quad (2.17)$$

dal quale si può ottenere l'equazione del moto di $\sigma(z, t)$. Poiché siamo interessati agli effetti lungo z e il confinamento in direzione perpendicolare in generale è molto forte, possiamo trascurare l'interazione g_2 e le derivate di $\sigma(z, t)$, ottenendo

$$\sigma^2(z, t) = \sqrt{1 + g|f(z, t)|^2} \quad (2.18)$$

che nel limite di debole interazione, $g|f(z, t)|^2 \ll 1$, diventa la larghezza caratteristica dell'oscillatore armonico, così come assunto precedentemente.

È importante porre particolare attenzione su questo punto. Nel ricavare le equazioni del moto di $\sigma(z, t)$ abbiamo assunto che l'interazione fosse trascurabile $g_2 \sim 0$. Ricavando le equazioni del moto per $f(z, t)$, poiché non c'è alcun potenziale di confinamento lungo z , questa approssimazione deve essere abbandonata.

Ma poiché siamo interessati alle piccole oscillazioni, il termine $\partial^2 |f(z, t)|^2 / \partial z^2$ può essere di fatto trascurato e quindi possiamo definitivamente lavorare con l'equazione (2.14) che include, nel termine γ , un termine correttivo proporzionale a g_2 rispetto alla GPE1D.

2.2 Solitoni

I solitoni appartengono ad una famiglia di soluzioni delle equazioni delle onde non lineari e furono osservati per la prima volta, in via del tutto casuale, da J.Scott Russel nel 1843 (anno di pubblicazione).

I solitoni sono onde stabili, ben localizzate che, grazie al termine non lineare dell'equazione, non si disperdono.

Affinché possano formarsi è necessario che il termine non lineare dell'equazione

sia estremamente debole e che compensi il termine dispersivo. Nel nostro caso l'equazione di Gross-Pitaevskii include un termine non lineare le cui conseguenze verranno adesso esaminate.

2.2.1 Solitoni dark

Adesso dimostreremo che, nel caso in cui $\gamma > 0$, esistono delle soluzioni solitoniche stazionarie della (2.14).

Lavorando con la GPE dipendente dal tempo cerchiamo delle soluzioni del tipo

$$\varphi(z, t) = f(z - vt)e^{iv(z-vt)}e^{i(\frac{1}{2}v^2 - \mu)t} \quad (2.19)$$

Definiamo $x = z - vt$ e inserendo (2.19) nella versione dipendente dal tempo della (2.14) si scopre che, per avere soluzione del tipo (2.19) dobbiamo risolvere l'equazione

$$f'' - 2\gamma f^3 - 2f = -2\mu f \quad (2.20)$$

che riscriviamo per semplicità come

$$f'' + gf^3 + af = \tilde{\mu}f. \quad (2.21)$$

Una costante del moto di questa equazione è $k = (f')^2 + \frac{1}{2}gf^4 + af^2 - \tilde{\mu}f^2$ che può essere valutata richiedendo che $|f(\pm\infty)| = f_\infty$, $f'(\pm\infty) = 0$; con queste condizioni la costante k e il potenziale chimico sono fissati

$$k = -1/2 gf_\infty^4 \quad (2.22)$$

$$\tilde{\mu} = gf_\infty^2 + a \quad (2.23)$$

Definito $f(x) = \phi(x)^{1/2}$, per trovare la soluzione dobbiamo integrare la seguente equazione

$$\frac{\phi'}{2\sqrt{\phi(k - \frac{1}{2}g\phi^2 - a\phi + \tilde{\mu}\phi)}} = 1 \quad (2.24)$$

Notiamo che, sfruttando il valore del potenziale chimico e della costante del moto,

$$k - \frac{1}{2}g\phi^2 - a\phi + \tilde{\mu}\phi = -\frac{1}{2}g(f_\infty^2 - \phi)^2 \quad (2.25)$$

In questo modo l'equazione diventa facilmente integrabile. Richiedendo che $f(0) = 0$ otteniamo

$$\int_0^{\phi(x)} dy \frac{1}{\sqrt{y|f_\infty^2 - y|}} = 2x\sqrt{\frac{-g}{2}} \quad (2.26)$$

che, con un cambiamento di variabili, porta a

$$\operatorname{atanh}\left(\frac{f(x)}{f_\infty}\right) = x\sqrt{\frac{-g}{2}} \quad (2.27)$$

da cui

$$f(x) = f_\infty \tanh(\sqrt{\gamma}x) \quad \text{con } x = z - vt \quad (2.28)$$

Questa soluzione viene chiamata **solitone black**. Si può dimostrare che il valore di v è fissato da una condizione che implica il valore minimo del solitone. Se $f_{\min} = 0$ allora ne consegue che $v = 0$. I solitoni black sono soluzioni stazionarie della GPE e quindi la velocità relativa tra il solitone e il condensato è nulla.

Accenniamo al fatto che, nel caso del solitone black, la fase della funzione d'onda subisce un cambiamento repentino in $z = 0$ con un salto pari a π . A livello sperimentale, per realizzare una funzione d'onda con questa caratteristica, si utilizza la tecnica del **phase imprinting** [17] grazie alla quale è possibile generare i solitoni nei condensati.

Si noti inoltre che la funzione (2.19) non è normalizzata, anzi $\int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(z, t)|^2 dz = \infty$. È necessario fissare il valore f_∞ per trovare il potenziale chimico e viceversa.

Nel paragrafo precedente si è posta l'attenzione al fatto che γ include un termine correttivo dovuto al potenziale (1.17). Possiamo quindi scrivere $\gamma = \gamma(a_s, r_e)$ e il segno di γ dipenderà dai valori che assumono a_s e r_e . Ricordiamo l'espressione di

$$\gamma = 2a_s \left(1 - a_s \left(\frac{1}{3}a_s - \frac{1}{2}r_e \right) \right). \quad (2.29)$$

L'esistenza dei solitoni dark dipende dunque dalla relazione tra il raggio effettivo e la lunghezza di scattering.

Purtroppo stabilire una relazione una a_s e r_e non è semplice e in moltissimi casi si esprimono in funzione di alcuni gradi di libertà del sistema caratteristici del potenziale di interazione. La coppia (a_s, r_e) che rende positiva γ bisogna prenderla nel quadrato $[0, 1] \times [0, 1]$.

2.2.2 Potenziale a sfere dure

Un possibile modello di potenziale d'interazione tra due particelle è il così detto *potenziale a sfere dure* definito come

$$V(r) = \begin{cases} \infty & r \leq a_s \\ 0 & r > a_s \end{cases} \quad (2.30)$$

In questo caso $r_e = 2/3a_s$ e dunque si ritorna al limite della GPE in quanto $\gamma_2 = 0$. Detta d l'allargatura del solitone, si trova facilmente che $d \propto a_s^{-\frac{1}{2}}$, come ci si aspettava essendo l'interazione repulsiva.

2.2.3 Potenziale a gradino

Per un potenziale a gradino

$$V(r) = \begin{cases} -V_0 & r \leq r_0 \\ 0 & r > r_0 \end{cases} \quad (2.31)$$

l'equazione di Schrödinger per due particelle nel sistema di riferimento del centro di massa si scrive

$$\begin{cases} u''(r) + (k^2 + \frac{mV_0}{\hbar^2})u(r) = 0 & r \leq r_0 \\ u''(r) + k^2u(r) = 0 & r > r_0 \end{cases} \quad (2.32)$$

Definito $\chi^2(k) = (k^2 + mV_0/\hbar^2)$ la soluzione si scriverà

$$u(r) = \begin{cases} A \sin(\chi(k)r + \delta_1) & r \leq r_0 \\ B \sin(kr + \delta) & r > r_0 \end{cases} \quad (2.33)$$

Dalla condizione $u(0) = 0$ discende immediatamente che $\delta_1 = 0$. Imponendo le condizioni di continuità di $u'(r)$ si trova

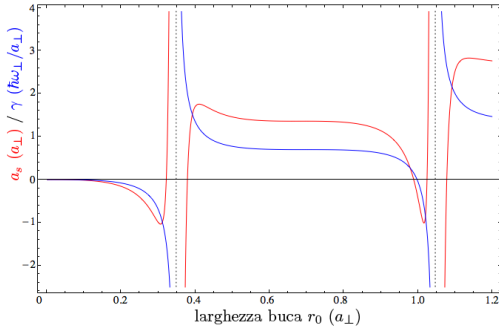
$$\delta(k) = \text{atan} \left(\frac{k}{\chi(k)} \tan \chi(k)r_0 \right) - kr_0 \quad (2.34)$$

da cui, applicando la definizione, ricaviamo la lunghezza di scattering e quindi il range effettivo

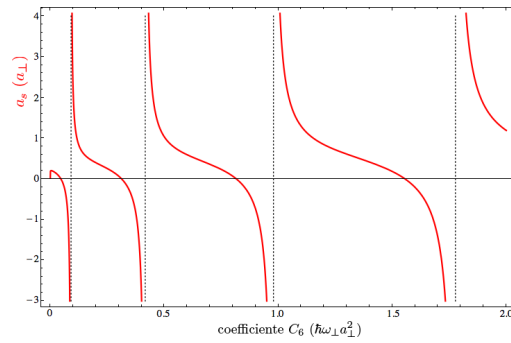
$$a_s = - \lim_{k \rightarrow 0} \frac{\delta(k)}{k} = r_0 \left[1 - \frac{\tan(\chi(0)r_0)}{\chi(0)r_0} \right] \quad (2.35)$$

$$r_e = r_0 \left[1 - \frac{r_0^2}{3a_s^2} - \frac{1}{\chi(0)^2 a_s r_0} \right] \quad (2.36)$$

Le due grandezze sono dipendenti dai gradi di libertà del sistema che devono essere scelti appositamente per rispettare le condizioni di interazione repulsiva.



(a) In questa figura sono rappresentate le curve che descrivono l'andamento di a_s (blu) e γ (rossa) in funzione della larghezza di una buca di potenziale. Tutte le lunghezze sono in unità di misura di a_\perp . La distanza tra due asintoti dipende dal valore di V_0 : più profonda è la buca, più gli asintoti si avvicinano.



(b) E' mostrato l'andamento di $a_s(C_6)$ ad un valore fissato di $r_0 = 0.234$. Al diminuire di r_0 gli asintoti delle curve si avvicinano. Le lunghezze sono espresse in unità di a_\perp .

Figg. 2.2

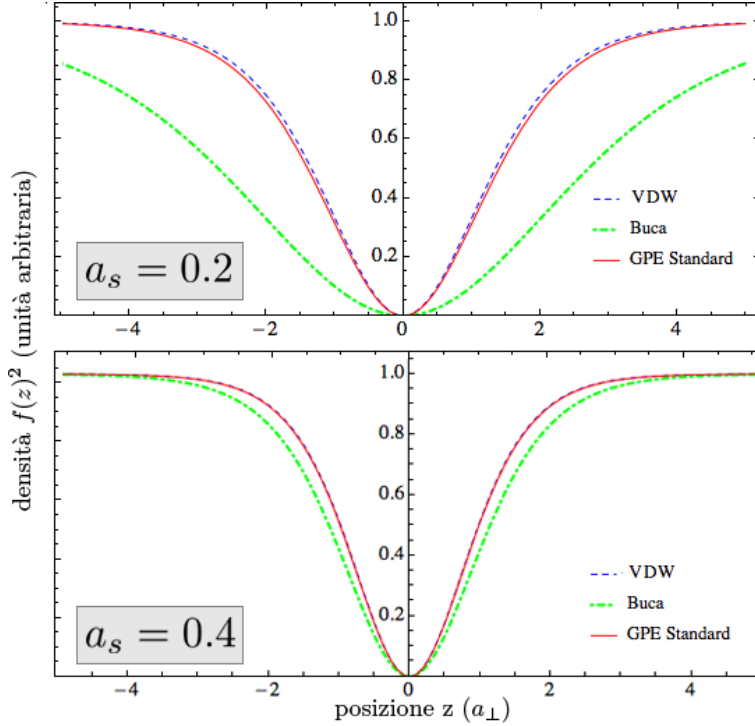


Fig. 2.3: Profilo di densità di solitoni in potenziali differenti. **Van der Waals:** $C_6 = 0.0562$; **Buca:** $|V_0| = 20.3$. Tutte le lunghezze sono espresse in a_\perp . Nel caso del potenziale di Van der Waals e di sfere dure i due solitoni sono molto simili.

2.2.4 Potenziale di Van der Waals

Per un'interazione di tipo Van der Waals ⁽²⁾, si approssima il potenziale ad una buca per $r < r_0$ (quest'ultimo detto *raggio di hard-core*), mentre per $r > r_0$ si utilizza una funzione $-C_6/r^6$ dove C_6 è un opportuno coefficiente che caratterizza l'interazione. Come mostrato in [19] è possibile determinare le relazioni di a_s e r_e

$$a_s = \frac{\Gamma^2\left(\frac{3}{4}\right)}{\pi} (1 - \tan\Phi) l_{vd} \quad r_e = \frac{2\pi}{3\Gamma^2\left(\frac{3}{4}\right)} \frac{1 + \tan^2\Phi}{(1 - \tan\Phi)^2} l_{vd} \quad (2.37)$$

dove l_{vd} è la lunghezza caratteristica dell'interazione dipendente dal coefficiente C_6 e Φ una funzione dipendente dal rapporto l_{vd}^2/r_0^2 ; essi valgono

$$l_{vd} = \left(\frac{mC_6}{\hbar^2}\right)^{1/4} \quad \Phi = \frac{l_{vd}^2}{2r_0^2} - \frac{3\pi}{8} \quad (2.38)$$

I gradi di libertà del problema relativi al potenziale sono C_6 e r_0 e a causa delle relazioni precedenti è più semplice descrivere l'andamento di a_s in funzione di C_6 a r_0 fissato (v. Fig.2.2b). Con questi potenziali proposti abbiamo fatto un confronto tra solitoni black caratterizzati da un fattore di interazione γ diverso fra loro. Se è facile descrivere la dipendenza della larghezza del solitone dall'interazione γ nel caso del potenziale a sfere dure, lo stesso non si può dire nel caso della buca o del modello del potenziale di Van der Waals a causa della complicate espressioni in gioco. Abbiamo fatto un confronto (si veda Fig.2.3 e Fig.2.4) tra i profili dei solitoni nei potenziali studiati a due valori di a_s . Si noti come in questo caso all'aumentare di a_s la larghezza del solitone tenda a diminuire. Questo non è

² $V(r) \rightarrow -C_6/r^6$ per $r \rightarrow \infty$

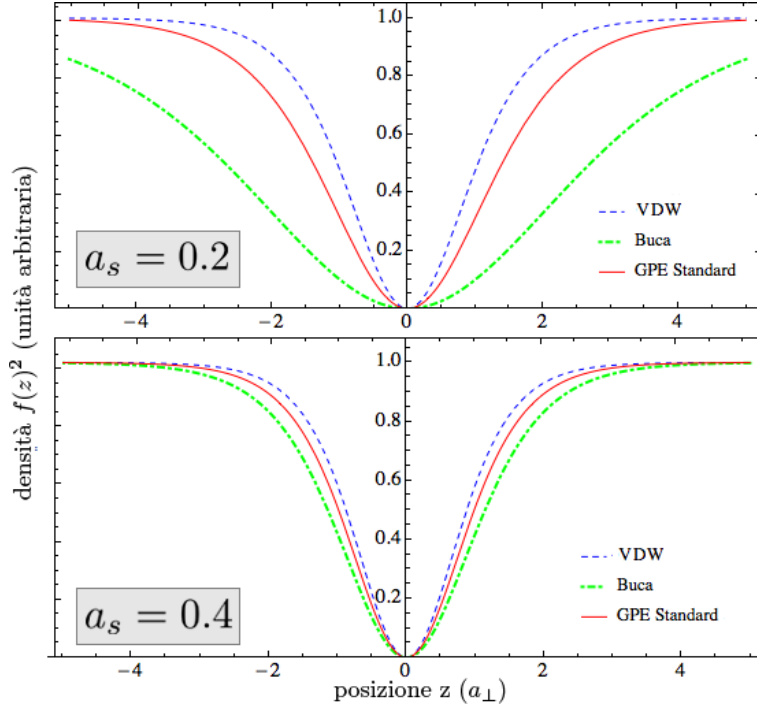


Fig. 2.4: Profilo di densità di solitoni in potenziali differenti. **Van der Waals:** $C_6 = 0.7331$; **Buca:** $|V_0| = 20.3$. Tutte le lunghezze sono espresse in a_{\perp} . Rispetto alla Fig.2.3 è stato cambiato il valore di C_6 e ne è stato scelto uno per cui il profilo del solitone nel caso di potenziale di Van der Waals è diverso da quello nel caso di sfere dure.

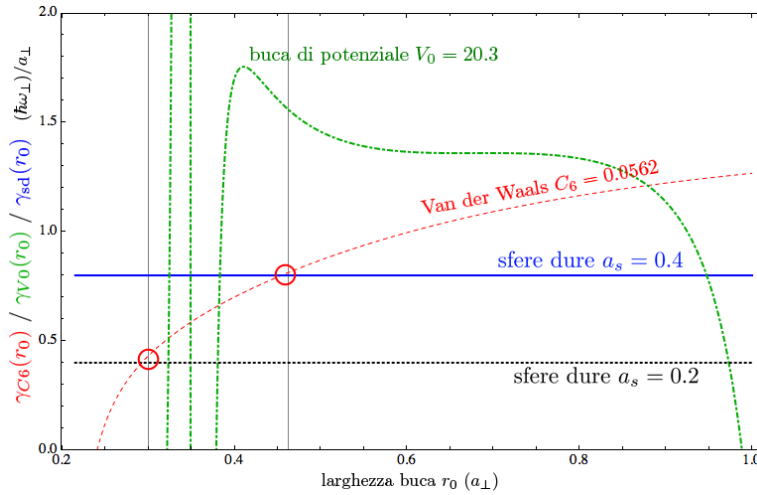
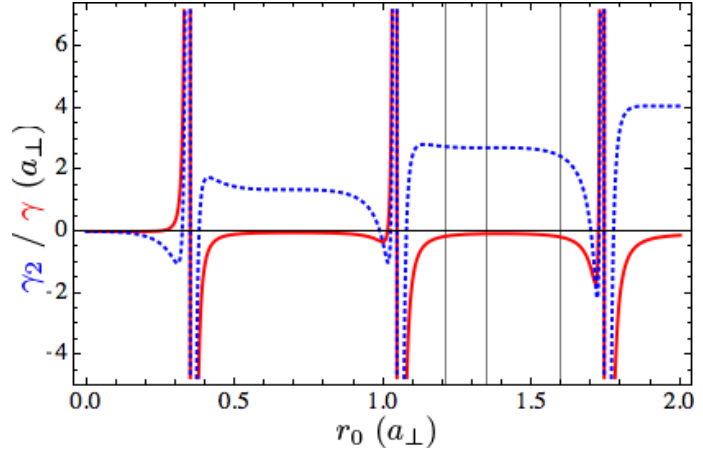


Fig. 2.5: In questa figura sono rappresentate le funzioni $\gamma_{C_6}(r_0)$, $\gamma_{V_0}(r_0)$, $\gamma_{sd}(r_0)$. Si noti che i punti di intersezione cerchiati in rosso corrispondono a quei valori di r_0 per cui i solitoni non sono facilmente distinguibili. Questi valori sono $r_0 \sim 0.46$ e $r_0 \sim 0.3$ in unità di lunghezza di a_{\perp} , gli stessi usati nel confronto di Fig.2.3 .

sempre vero, infatti come si può vedere in Fig.2.2a nel caso della buca a V_0 fissato, le funzioni $\gamma(r_0)$ e $a_s(r_0)$ hanno la stessa monotonia soltanto in alcuni intervalli limitati di r_0 . Ciò vuol dire che, fissato V_0 si può trovare una regione in cui al diminuire di r_0 la lunghezza di scattering e γ aumentano, portando quindi alla diminuzione della larghezza del solitone. Oltre un certo valore la monotonia della γ si inverte, mentre quella di a_s rimane invariata. Ne consegue che il solitone si allarga *anche* se la lunghezza di scattering aumenta.

La funzione $\gamma_{C_6}(r_0)$ (con il pedice indichiamo il parametro fissato) per il potenziale di Van der Waals ha un comportamento molto complicato per piccoli valori di r_0 a causa della dipendenza da potenze di $\cot(1/r_0^2)$. Dai grafici riportati in Fig.2.3 e Fig.2.4 si nota che nel primo confronto il profilo del solitone in potenziale di Van der Waals o sfere dure può essere molto simile. Quando il valore di γ coincide per ogni potenziale, allora il profilo dei solitoni è identico (v. Fig.2.5).

Fig. 2.6: Rappresentazione delle funzioni $\gamma(r_0)$ (blu), $\gamma_2(r_0)$ (rosso) per la buca di potenziale con $V_0 = 20.3$. I valori di r_0 per cui le funzioni divergono corrispondono a quelli per cui la lunghezza di scattering diverge, ossia quando $\chi(0)r_0 = (m+1/2)\pi$ (v. (2.35)).



2.2.5 Solitoni e GPE modificata.

Nello studio dei solitoni stazionari abbiamo trascurato il termine $\propto \partial^2/\partial z^2|\varphi|^2$ giustificando l'approssimazione con il nostro obiettivo di studiare le piccole oscillazioni. Se si reintroduce nella GPE questo termine aggiuntivo, la ricerca di soluzioni solitoniche diventa non banale. In questo caso, dai calcoli si ricava un'espressione che definisce implicitamente la soluzione $f(x)$:

$$\sqrt{1 - 2\gamma_2 f(x)^2} \operatorname{arctanh} \left(\frac{f(x)}{f_\infty} \right) = \sqrt{\gamma} f_\infty x \quad (2.39)$$

dove $\gamma > 0$. Per poter generare i solitoni black bisogna che i parametri caratteristici dell'interazione siano tali che l'argomento sotto radice sia positivo, visto che $\gamma > 0$. Nel caso della buca di potenziale, l'andamento delle due funzioni a V_0 fissato è riportato in Fig.2.6. Per il potenziale di Van der Waals invece la questione è un po' complicata. In questo caso la funzione $\gamma_{C6}(r_0)$, come detto precedentemente, ha un andamento non semplice da descrivere. I valori utilizzati per i confronti in Fig.2.3 e Fig.2.4 rendono positivi γ e γ_2 e quindi è necessario discutere l'esistenza della soluzione. Per i valori scelti, tuttavia, $2\gamma_2 < 1$ e quindi il solitone esiste in quanto $f(x) < 1$. Nel caso del potenziale a sfere dure, (2.39) si riduce a (2.28). Detta $d(f_1)$ la larghezza del solitone all'altezza f_1 si trova facilmente che

$$d(f_1) \propto \frac{\sqrt{1 - 2\gamma_2 f_1^2}}{\sqrt{\gamma}} \quad (2.40)$$

dalla quale⁽³⁾, nel limite $\gamma_2 \rightarrow 0$, si ritrova la relazione di proporzionalità analizzata nella sezione precedente. In Fig.2.7 mostriamo $d(f_1)$ in funzione di r_0 per i tre potenziali. Risolvendo numericamente la (2.39) per il potenziale a sfere dure, buca e Van der Waals abbiamo confrontato i profili dei solitoni $f(x)^2$ con quelli calcolati analiticamente nella sezione precedente (v. Fig.2.8). Come ci si aspettava l'effetto del termine aggiuntivo comporta una modifica ulteriore alla larghezza del solitone black.

³Si userà come definizione di $d(f_1)$ quest'ultima espressione.

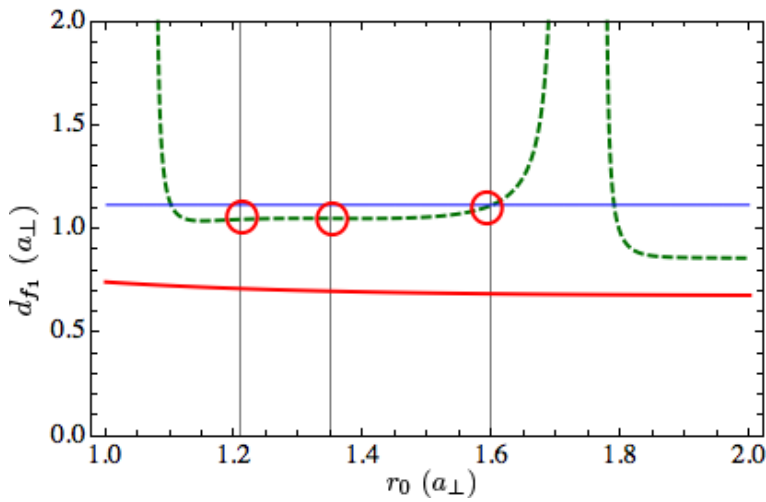


Fig. 2.7: $f_1 = 0.4$. I tre cerchi rossi corrispondono a tre valori arbitrari di $r_0 = 1.21, 1.35, 1.6$ con cui mostriamo in Fig.2.9 l'andamento del profilo dei solitoni nel caso di una buca di potenziale. Le lunghezze sono espresse in unità di a_\perp .

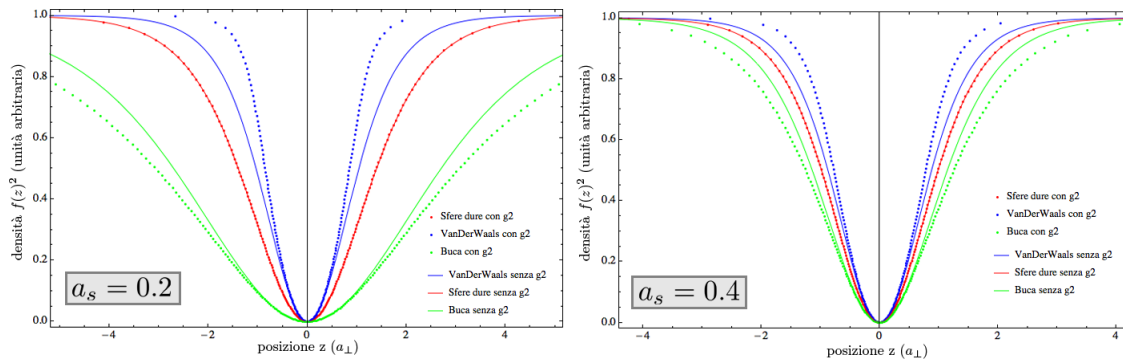


Fig. 2.8: Confronto tra profili di densità di solitoni black nel caso in cui $\gamma_2 = 0$ e $\gamma_2 \neq 0$ a potenziali diversi. **Van der Waals:** $C_6 = 0.73311, r_0(a_s = 0.2) = 0.298, r_0(a_s = 0.4) = 0.2$; **Buca:** $V_0 = 20.3, r_0(a_s = 0.2) = 0.9847, r_0(a_s = 0.4) = 0.9624$; Le lunghezze sono espresse in unità di a_\perp .

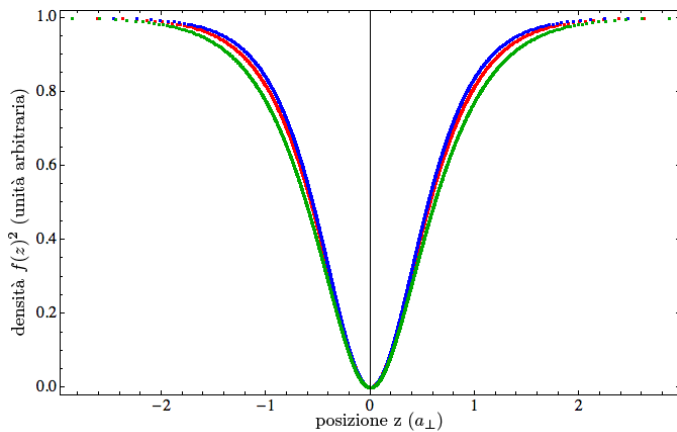


Fig. 2.9: Solitoni black nel caso di una buca di potenziale con r_0 variabile (v. Fig.2.7). $r_0 = 1.21$ (rosso), 1.35 (blu), 1.6 (verde). Le lunghezze sono espresse in unità di a_\perp .

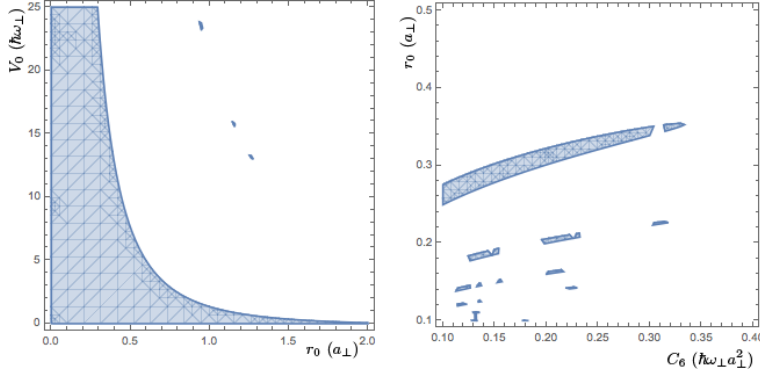


Fig. 2.10: Rappresentiamo le regioni dei valori caratteristici C_6, r_0, V_0 per cui $\gamma < 0$ e $\gamma_2 < 0$ nel caso di buca di potenziale e potenziale di Van der Waals. Si noti che le regioni sono molto irregolari e i valori devono essere scelti in maniera tale da determinare un valore della lunghezza di scattering desiderato.

2.2.6 Solitoni bright

Oltre ai solitoni dark esistono altri tipi di soluzioni solitoniche nella forma di (2.19), chiamati *bright*. La differenza tra i dark e i bright è nella forma della perturbazione localizzata. Mentre i primi costituiscono una depressione della densità, i secondi costituiscono una specie di "dosso" con forma imperturbata, determinando un massimo di densità.

I solitoni bright sono soluzioni della GPE1D quando $\gamma < 0$ ossia con interazione attrattiva. Utilizzando la definizione (2.19) e inserendola in nella MGPE 1D otteniamo l'equazione

$$-\frac{1}{2}f'' + \gamma f^3 + \frac{1}{2}\gamma_2 (f^2)'' f = \tilde{\mu}f \quad (2.41)$$

dove $\tilde{\mu} = \mu - 1$. Nel seguito scriveremo μ in luogo della definizione di $\tilde{\mu}$. La costante del moto di (2.41) è

$$k = \frac{1}{2}(f')^2 + \mu f^2 - \frac{1}{2}\gamma f^4 - \frac{1}{4}\gamma_2 [(f^2)']^2. \quad (2.42)$$

Se richiediamo che la funzione f e la sua derivata all'infinito vadano a zero, otteniamo che $k = 0$. Se invece richiediamo che il punto 0 sia un punto di massimo per $f(x)$ possiamo ricavare il valore del potenziale chimico $\mu = -\frac{1}{2}|\gamma|f(0)^2$. Definendo $f = \phi(x)^{1/2}$, dall'espressione della costante del moto otteniamo

$$\phi' = \pm \sqrt{\frac{8(k - \mu\phi + \frac{1}{2}\gamma\phi^2)}{(\frac{1}{\phi} - 2\gamma_2)}} \quad (2.43)$$

Integrando l'espressione con il segno positivo e usando le informazioni su μ e k otteniamo

$$2\sqrt{|\gamma|x} = \int_{f(0)^2}^{f(x)^2} dy \sqrt{\frac{1 + 2|\gamma_2|y}{y^2(f(0)^2 - y)}}. \quad (2.44)$$

dove, per semplicità, abbiamo richiesto $\gamma_2 < 0$. L'integrale (2.44) può essere risolto numericamente, permettendo così di studiare il profilo del solitone al variare di γ

e γ_2 .

In questo caso definiamo la larghezza del solitone d ad un'altezza fissata f_1 come

$$d_{f_1} \propto \int_{f_1}^1 dy \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \sqrt{\frac{1 + 2|\gamma_2|y}{y^2(1-y)}} \quad (2.45)$$

dove abbiamo imposto $f(0) = 1$.

Nel seguito indicheremo con ξ la funzione integranda. In Fig.2.11 rappresentiamo l'andamento di ξ per i tre potenziali proposti con lunghezza di scattering $a_s = -0.4$.

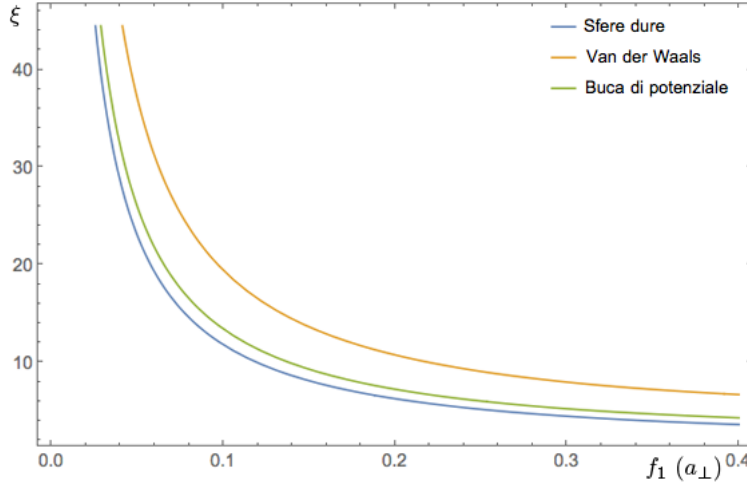


Fig. 2.11: Andamento della funzione $\xi(f_1)$ in casi con potenziale differente. Una valutazione qualitativa della larghezza del solitone può essere fatta guardando questo grafico. Infatti, scelto un potenziale d'interazione, la larghezza del solitone è proporzionale all'area sottesa ad una delle curve.

Dall'andamento della funzione ξ notiamo che la larghezza del solitone è maggiore nei condensati con bosoni interagenti attraverso il modello del potenziale di Van der Waals. Questa analisi qualitativa ovviamente deve essere condotta caso per caso. Infatti l'intervallo di valori selezionato in Fig.2.11 è tale per cui le tre curve presentino lo stesso tipo di monotonia. In generale però non è così, infatti il punto di minimo di ogni curva è

$$f_1^{\min} = \frac{-3 + 2\gamma_2 + \sqrt{(3 - 2\gamma_2)^2 + 32\gamma_2}}{8\gamma_2},$$

che è una funzione di γ_2 .

I risultati numerici del confronto si possono vedere in Fig.2.12 dove mostriamo i profili di densità dei solitoni al variare della lunghezza di scattering. I parametri C_6, r_0, V_0 sono stati scelti appositamente in una regione tale da garantire il segno negativo di γ e γ_2 (v. Fig.2.10). Anche in questo caso, si constata che l'effetto del termine aggiuntivo della MGPE è di modificare la forma del solitone. Nel caso del potenziale a sfere dure, ritroviamo la forma del solitone bright per la GPE1D.

Se avessimo lavorato con la GPE1D allora $g_2 = 0$ e quindi la larghezza del solitone sarebbe stata proporzionale a $a_s^{-1/2}$ come nel caso dei solitoni black.

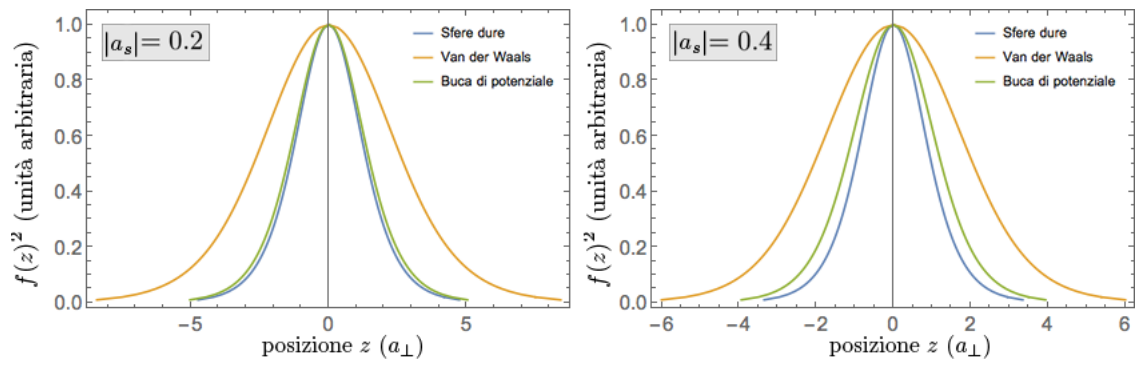


Fig. 2.12: Confronto tra solitoni per valori della lunghezza di scattering diversi. I valori costanti di riferimento per entrambi i casi sono $C_6 = 0.114$, $V_0 = 5$. Il valore della velocità di propagazione è arbitrario.

Conclusioni

Il problema a molti-corpi di bosoni nel limite di debole interazione ci ha portato ad analizzare la propagazione delle onde sonore e il fenomeno dei solitoni stazionari in potenziali di interazione differenti. In particolare ci siamo interessati agli effetti che il termine di potenziale effettivo proposto in [13] comporta su questi fenomeni. Il nostro studio ha evidenziato una forte dipendenza (e la complessità nel descriverla) di alcune grandezze fisiche dai parametri caratteristici del potenziale d'interazione: lunghezza di scattering e raggio effettivo. Lo studio di questa dipendenza è stato fatto sui condensati quasi-1D, ovvero fortemente confinati da un potenziale esterno armonico isotropo sul piano perpendicolare all'asse del condensato. Abbiamo dovuto quindi ricavare la versione unidimensionale della GPE e adattarla al nostro caso.

Purtroppo dei dati sperimentali che possano confermare o meno l'analisi che abbiamo condotto non sono disponibili. Crediamo dunque che questi fenomeni vadano esplorati, cosa certamente possibile grazie alle tecniche sperimentali utilizzate in laboratorio che permettono, attraverso le risonanze di Feshbach, di variare i valori della lunghezza di scattering, così da permettere lo studio dei fenomeni in regimi differenti.

Appendice

Mostriamo che il moltiplicatore di Lagrange μ che appare in (1.11) è proprio il potenziale chimico del gas.

Esso è definito come

$$\tilde{\mu} = \frac{\partial A}{\partial N} = \frac{\partial E}{\partial N} \quad (2.46)$$

dove $A = E - TS$ è l'energia libera di Helmholtz che, nel nostro caso ($T=0$), si riduce all'energia interna E . Partiamo dunque dal funzionale totale

$$E = N \int d^3\vec{r} \left\{ \phi^*(\vec{r}) \left[\frac{-\hbar^2}{2m} \nabla^2 + U(\vec{r}) \right] \phi(\vec{r}) + \frac{gN}{2} |\phi(\vec{r})|^4 \right\} \quad (2.47)$$

che, derivato rispetto ad N , porta a

$$\tilde{\mu} \int d^3\vec{r} \phi^*(\vec{r}) \phi(\vec{r}) = \int d^3\vec{r} \left\{ \phi^*(\vec{r}) \left[\frac{-\hbar^2}{2m} \nabla^2 + U(\vec{r}) \right] \phi(\vec{r}) + \frac{gN}{2} |\phi(\vec{r})|^4 \right\} \quad (2.48)$$

da cui l'uguaglianza $\tilde{\mu} = \mu$.

Bibliografia

- [1] F. London, Nature **141**, 643 (1938); Phys. Rev. **54**, 947 (1938).
- [2] L.D. Landau J. Phys. USSR, **5**, 71 (1941).
- [3] L. Onsager Nuovo Cimento, **6**, Suppl. 2, 249 (1949).
- [4] Feynman, R. P. In Progress in Low Temperature Physics, Vol. I., (ed. C. J. Gorter), p.17. Noth-Holland, Amsterdam (1955)
- [5] M. H. Anderson, J.R. Ensher, M. R. Matthews, C. E. Wieman, and E. A. Cornell, Science **269**, 198 (1995)
- [6] K. B. Davis, M.-O. Mewes, M. R. Andrews, N. J. van Druten, D. S. Durfee, D. M. Kurn, and W. Ketterle, Phys.Rev.Lett. **75**, 3969(1995).
- [7] S. Inouye, M. R. Andrews, J. Stenger, H.-J. Miesner, D. M. Stamper-Kurn and W. Ketterle. Nature, **392**,151 (1998)
- [8] J. L. Roberts, N. R. Claussen, James P. Burke, Jr., Chris H. Greene, E. A. Cornell, and C. E. Wieman, Phys. Rev. Lett, **81**, 5109 (1998).
- [9] L. Salasnich, Quantum Physics of Light and Matter (Springer, Berlin, 2014).
- [10] E. Fermi, Ricerca sci. **7**, 13 (1936).
- [11] G. Breit, Phys. Rev. **71**, 215 (1947).
- [12] J. M. Blatt and V. F. Weisskopf, Theoretical Nuclear Physics (John Wiley and Sons , New York, 1952), p. 74
- [13] H. Fu, Y. Wang, and B. Gao, Phys. Rev. A **67**, 053612 (2003)
- [14] A. Collin, P. Massignan and C. J. Pethick, Phys. Rev. A **75**, 013615 (2007)
- [15] F. Dalfovo, S. Giorgini, L. P. Pitaevskii, and S. Stringari, Rev. Mod. Phys. **71**, 463 (1999).
- [16] L. Salasnich, A. Parola, and L. Reatto, Phys. Rev. A **65**, 43614 (2002).
- [17] J. Denschlag, J. E. Simsarian, D. L. Feder, Charles W. Clark, L. A. Collins, J. Cubizolles, L. Deng, E. W. Hagley, K. Helmerson, W. P. Reinhardt, S. L. Rolston, B. I. Schneider, and W. D. Phillips Science **287** (5450), 97 (2000)

- [18] M. R. Andrews, D. M. Kurn, H.-J. Miesner, D. S. Durfee, C. G. Townsend, S. Inouye, and W. Ketterle, *Phys. Rev. Lett.* **79**, 553 (1997); **80**, 2927 (E) (1998)
- [19] B. Gao, *Phys. Rev. A* **58**, 4222 (1998)