

UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI
DI PADOVA

Università degli Studi di Padova

DIPARTIMENTO DI MATEMATICA “TULLIO LEVI-CIVITA”

Corso di Laurea Triennale in Matematica

Trasporto ottimo di martingala:
il caso discreto

Relatrice:
Prof.ssa Giorgia Callegaro

Laureando: Carlo Monterubbianesi
Matricola: 2003588

Anno Accademico 2022/2023

22 Settembre 2023

Indice

Introduzione	5
1 Trasporto di martingala	7
1.1 Presentazione del problema	7
1.2 Dalle distribuzioni marginali alla congiunta	11
2 Trasporto monotono sinistro	13
3 Un algoritmo per la costruzione di una soluzione ottima ad un problema di upper bound	19
3.1 Risultati preliminari	20
3.2 Algoritmo	22
A Prerequisiti teorici	35
A.1 Probabilità	35
A.2 Programmazione lineare	36
Bibliografia	39

Introduzione

Uno dei problemi centrali della finanza è il *pricing*: dare ad ogni titolo il suo prezzo equo, ovvero un prezzo che non perturba i mercati. Ad esempio se il mercato è inizialmente privo di possibilità di arbitraggio, tale deve rimanere anche dopo l'inserimento di altri titoli, come dei derivati. Nel caso in cui il mercato sia completo, per il teorema fondamentale dell'*asset pricing*, esiste un'unica misura di martingala equivalente \mathbb{Q} e dunque sono anche unici i possibili prezzi dei vari titoli e derivati. Il limite di un modello di mercato completo è che tale assunzione risulta spesso irrealistica e quindi inapplicabile ai casi concreti. In assenza di completezza esistono diverse misure neutrali a rischio e questo implica la non unicità dei prezzi dei titoli. L'obiettivo di questa tesi è quello di trovare un *upper bound* ai prezzi di alcuni derivati esotici sfruttando la conoscenza dei prezzi delle opzioni call ed utilizzando il concetto di *trasporto ottimo*. Nel corso del tempo si è discusso sull'importanza e l'utilità delle opzioni call e ad oggi i loro prezzi sono informazioni note nel mercato e vengono utilizzate per prezzare opzioni esotiche più complesse. Per questo non si considera più un'unica misura di martingala equivalente, ma un insieme di tali misure che siano coerenti con i prezzi delle call e con l'assenza di possibilità di arbitraggio. Proprio per questo possiamo porci il problema di trovare un *upper bound* dei prezzi di derivati esotici.

La nascita del problema del trasporto ottimo viene attribuita a Gaspard Monge (1746-1818, Francia), il quale voleva trovare il modo di ottimizzare il costo del trasporto di una massa di sabbia da una posizione x ad una y . Noi daremo una riformulazione matematica moderna: date due densità di massa $f, g \geq 0$ su \mathbb{R}^d con $\int_{\mathbb{R}^d} f(x)dx = \int_{\mathbb{R}^d} g(x)dx = 1$, trovare una mappa $T: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ che "porti" f in g , cioè tale che

$$\int_A g(y)dy = \int_{T^{-1}(A)} f(x)dx \quad \text{per ogni sottoinsieme boreliano } A \subset \mathbb{R}^d$$

e che ottimizzi (in questo caso si vuole minimizzare) la quantità

$$M(T) := \int_{\mathbb{R}^d} |T(x) - x|f(x)dx.$$

Possiamo interpretare tale problema come la ricerca di una trasformazione che ottimizzi il passaggio da una configurazione data dalla densità f ad una configurazione data da g dove T è la funzione che descrive il movimento della massa inizialmente posta su x . Nel nostro studio invece che utilizzare le densità utilizzeremo delle misure, più precisamente misure di probabilità.

Sia μ una misura su $X \subset \mathbb{R}^d$, la cui misura immagine su Y è data da $Z_{\#}\mu$ dove $Z : X \rightarrow Y$ è una funzione misurabile, ovvero

$$(Z_{\#}\mu)(A) = \mu(Z^{-1}(A)) \quad \text{per ogni } A \text{ misurabile.}$$

Quindi data una funzione di costo di trasporto $c : X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ possiamo generalizzare il problema precedente

$$\min_Z \{M(Z) := \int c(x, Z(x)) d\mu(x) \quad \text{tale che } Z_{\#}\mu = \nu\}$$

dove ν per noi è nota. Dunque il trasporto ottimo viene matematicamente interpretato come il trasporto di *measure*, che per noi saranno misure di probabilità. Una strategia di trasporto è quella di suddividere la massa-misura iniziale nel punto x e trasportarla separatamente, cosa che vedremo nel Capitolo 3 con la costruzione di un algoritmo per trovare un trasporto ottimo.

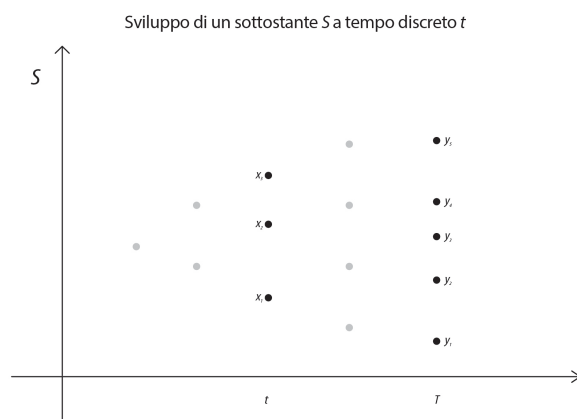
Per trovare un *upper bound* dei prezzi di derivati esotici, inizieremo dallo sviluppo di un sottostante S tra due istanti di tempo discreti $t < T$. Daremo la definizione di *ordine convesso* tra misure e trasporteremo le misure di probabilità date dalle distribuzioni discrete μ al tempo t e ν al tempo T , che prendiamo per note in quanto si conoscono i prezzi delle opzioni call. Dopo aver visto cos'è un *piano di trasporto* saremo in grado di strutturare la ricerca dell'*upper bound* in forma di programma lineare. Daremo la definizione di piano di trasporto *monotono sinistro* e vedremo che se la funzione del costo dei derivati esotici rispetta una particolare condizione di convessità data dalla equazione (2.1) allora una soluzione ottima al programma lineare è un piano monotono sinistro; che tale soluzione è unica verrà mostrato nel Capitolo 3, dove proporrò un algoritmo per la costruzione di un piano di trasporto ottimo monotono sinistro e di cui mostreremo la coerenza e l'efficacia computazionale. Per concludere proporrò un esempio di applicazione di tale algoritmo.

Capitolo 1

Trasporto di martingala

1.1 Presentazione del problema

Andiamo ad illustrare il contesto in cui studieremo l'applicazione del trasporto ottimo di martingala.



Si consideri un mercato finanziario privo di opportunità di arbitraggio con un titolo non rischioso B ed un titolo rischioso dato dal sottostante S e si denotino con t e T i due istanti in cui si studierà il titolo rischioso, sotto l'ipotesi che $0 < t < T$. Si consideri come spazio di probabilità la costruzione canonica $\Omega := \Omega_1 \times \Omega_2 := \{x_1, \dots, x_N\} \times \{y_1, \dots, y_M\}$. Ω_1 rappresenta l'insieme dei possibili prezzi del sottostante S all'istante t mentre Ω_2 fornisce i possibili prezzi di S all'istante T , ovvero Y può essere vista come il *futuro* di X . Il titolo non rischioso ha interesse nullo ed il suo prezzo è dato da $B = (B_t, B_T) = (1, 1)$ e $B_0 = 1$. Questa è un'ipotesi molto forte che rende il titolo rischioso una martingala in quanto scontandolo resta invariato. Indichiamo quest'ultimo con $S = (S_t, S_T) = (X, Y)$ con $S_0 = s_0 \in \mathbb{R}^+$, dove $X : \Omega \rightarrow \Omega_1$ e $Y : \Omega \rightarrow \Omega_2$ sono variabili aleatorie discrete. Sia $\omega \in \Omega$ allora $X(\omega) = X(x, y) = x$ e $Y(\omega) = Y(x, y) = y$. La σ -algebra di riferimento è data dall'insieme delle parti di Ω cioè 2^Ω . Chiamiamo $\mathcal{P}(\Omega)$ l'insieme di tutte le misure di probabilità su Ω . Infine denotiamo con $C_t(K)$ il prezzo nell'istante iniziale 0 di un'opzione call di *strike* K e scadenza t , il cui *payoff* è dunque dato da $(X - K)^+$, e con $C_T(K)$ il prezzo nell'istante iniziale 0 di un'altra opzione call che ha anch'essa *strike* K ma

scadenza T , il cui *payoff* allora è $(Y - K)^+$. Supponiamo che i prezzi delle opzioni call siano noti per ogni *strike* k . Il problema ora è trovare dei *bound* a prezzi di altri derivati che siano coerenti con questo mercato cioè che non lo perturbino. Una generica funzione *payoff* di un tale derivato è data da

$$c : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^+, \quad (x, y) \mapsto c(x, y)$$

dunque il *payoff* dipende solo da S_t e S_T . L'ipotesi di assenza di opportunità di arbitraggio implica l'esistenza di una misura di probabilità \mathbb{Q} tale che il prezzo del processo (X, Y) è una martingala sotto \mathbb{Q} e che la formula del prezzo neutrale a rischio dà ad un derivato con *payoff* c il prezzo

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[c(X, Y)] \tag{1.1}$$

nell'istante iniziale 0. Tale equazione è equivalente alla più classica $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[Y|\mathcal{F}_t]$ in quanto il condizionamento del valore atteso è intrinseco alla definizione della funzione c perché in essa si considerano solo gli eventi accoppiati ovvero quelli in cui esiste, nella storia del sottostante, un collegamento fra gli stati x ed y .

Riportiamo un interessante risultato tratto da [1], ovvero che se i prezzi delle opzioni call $C_t(K)$ per tutti gli *strike* K sono noti allora si conosce la distribuzione marginale al tempo t della misura neutrale a rischio \mathbb{Q} . In modo più approfondito definiamo il seguente lemma

Lemma 1.1. *Sia $\mathbb{Q} \in \mathcal{P}(\Omega)$ misura di probabilità coerente con le funzioni prezzo delle opzioni call, cioè per $t, T \in \mathbb{N}$ con $t < T$ e per ogni $K \in \mathbb{R}$ si ha*

$$C_t(K) = \int_{\mathbb{R}} (x - K)^+ \mathbb{Q}(d(x, y)),$$

$$C_T(K) = \int_{\mathbb{R}} (y - K)^+ \mathbb{Q}(d(x, y)).$$

dove $(x, y) \in \Omega$ dunque è un evento misurabile secondo \mathbb{Q} . Allora

$$\mathbb{Q}(X \leq K, Y) = 1 + C'_t(K^+),$$

$$\mathbb{Q}(X, Y \leq K) = 1 + C'_T(K^+),$$

per le distribuzioni X e Y sotto \mathbb{Q} , dove $C'_t(K^+)$ denota la deriva destra di C_t e analogamente $C'_T(K^+)$ la derivata destra di C_T .

Questo lemma mostra l'importanza delle opzioni call nel mercato: permettono la conoscenza delle leggi di distribuzione di X e Y quindi anche di attribuire una misura di probabilità ai possibili stati del titolo rischioso S negli istanti t e T rappresentati rispettivamente dai singoli punti $x_j \in \Omega_1$ per $j \in \{1, \dots, N\}$ e $y_i \in \Omega_2$ per $i \in \{1, \dots, M\}$. Da ora quindi per prezzare ulteriori derivati assumeremo note le distribuzioni marginali delle variabili aleatorie X e Y del processo di prezzo del titolo rischioso S attribuendo ad X la legge di distribuzione μ e ad Y la legge di distribuzione ν . Come sappiamo: conoscere le distribuzioni marginali non permette di conoscere la distribuzione congiunta, dunque

non siamo pronti a trovare \mathbb{Q} , che è necessaria per prezzare i derivati. Sarà cruciale ora utilizzare il fatto che il processo (X, Y) è una martingala sotto \mathbb{Q} .

D'ora in poi le misure che considereremo saranno finite su \mathbb{R} cioè $\mu(\mathbb{R}) < \infty$ ed integrabili $\int |x|\mu(dx) < \infty$. Ciò permette di introdurre la nozione di *ordine convesso* non solo per misure di probabilità, ma anche per misure in generale.

Definizione 1.2. Siano μ e ν misure di probabilità rispettivamente su Ω_1 e Ω_2 . Gli elementi dell'insieme

$$\mathcal{M}(\mu, \nu) := \left\{ \mathbb{Q} \in \mathcal{P}(\Omega) \mid \begin{array}{l} \mu(A) = \mathbb{Q}(A \times \Omega_2) = \mathbb{Q}(X \in A), \\ \nu(B) = \mathbb{Q}(\Omega_1 \times B) = \mathbb{Q}(Y \in B), \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[Y|X] = X \quad \text{q.c.} \end{array} \right\}$$

sono detti *piani di trasporto di martingala* o *possibili misure di prezzo*.

Quindi $\mathcal{M}(\mu, \nu)$ è l'insieme delle possibili misure neutrali a rischio che hanno come distribuzioni marginali μ e ν e tale che Y si comporti come una \mathbb{Q} -*martingala* rispetto all'istante t ; nel problema che noi consideriamo ciò è garantito dall'ipotesi di interesse nullo del titolo non rischioso in quanto implica che Y sia una martingala. Ora dato un derivato con *payoff* c definiamo il problema di *upper bound* come

$$\overline{\mathcal{P}}(\mu, \nu) := \sup_{\mathbb{Q} \in \mathcal{M}(\mu, \nu)} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[c(X, Y)] \quad (1.2)$$

ovvero cerchiamo di massimizzare il prezzo del derivato con *payoff* c senza perturbare il mercato; analogamente il problema di *lower bound* è dato da

$$\underline{\mathcal{P}}(\mu, \nu) := \inf_{\mathbb{Q} \in \mathcal{M}(\mu, \nu)} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[c(X, Y)] \quad (1.3)$$

Noi studieremo solo il problema di *upper bound* (1.2), i risultati del *lower bound* (1.3) sono ottenuti simmetricamente a quelli che otterremo noi. Vedremo a breve che lo studio di $\overline{\mathcal{P}}(\mu, \nu)$ si ridurrà a risolvere dei semplici sistemi di programmazione lineare e nel caso in cui il *payoff* c soddisfi una particolare condizione di convessità data dalla proprietà (2.1), la soluzione sarà data da una struttura speciale per cui daremo un algoritmo risolutivo.

Definizione 1.3. Due misure μ e ν su \mathbb{R} sono dette essere in *ordine convesso* se per ogni funzione convessa $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ per cui esistono gli integrali $\int_{\mathbb{R}} f(x)\mu(dx)$ e $\int_{\mathbb{R}} f(x)\nu(dx)$ si ha che

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\mu(dx) \leq \int_{\mathbb{R}} f(x)\nu(dx)$$

e si scrive $\mu \leq_c \nu$

Osservazione 1.4. Dato che sia $f(x) = x$ e $f(x) = -x$ sono funzioni convesse, se $\mu \leq_c \nu$ allora $\int x\mu(dx) \leq \int x\nu(dx)$ e $-\int x\mu(dx) \leq -\int x\nu(dx)$ cioè $\int x\mu(dx) \geq \int x\nu(dx)$ e quindi $\int x\mu(dx) = \int x\nu(dx)$. Poiché anche $f(x) = 1$ e $f(x) = -1$ sono convesse, si ottiene subito che $\mu(\mathbb{R}) = \nu(\mathbb{R})$ cioè che tutte le misure in ordine convesso tra loro misurano \mathbb{R} allo stesso modo e quindi nel caso in cui esse siano misure di probabilità si ottiene che $\mu(\mathbb{R}) = \nu(\mathbb{R}) = 1$.

Noi lavoreremo con misure di probabilità, dunque la condizione $\mu \leq_c \nu$ può essere vista come una disuguaglianza tra i valori attesi delle variabili X e Y sotto una funzione convessa f

$$\mathbb{E}[f(X)] \leq \mathbb{E}[f(Y)].$$

Essendo nel caso discreto tali valori attesi sono espressi da sommatorie e non integrali.

Definizione 1.5. Data una misura μ su \mathbb{R} definiamo la funzione *call option price*

$$C_\mu : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+, \quad k \mapsto \int_{\mathbb{R}} (x - K)^+ \mu(dx).$$

Nei mercati privi di opportunità di arbitraggio i prezzi dell'opzione call aumentano al crescere della scadenza t quindi possiamo concludere che $C_\mu(K) \leq C_\nu(K)$, perché la funzione *call option price* calcolata rispetto ν fa riferimento ad una scadenza T più lontana rispetto a t che è la scadenza di riferimento della funzione *call option price* calcolata rispetto a μ . Infatti ora riportiamo un risultato che non dimostreremo ma la cui prova può essere trovata in [?]

Lemma 1.6. Siano μ e ν misure su \mathbb{R} tali che $\frac{1}{\mu(\mathbb{R})} \int x \mu(dx) = \frac{1}{\nu(\mathbb{R})} \int x \nu(dx)$. Allora le seguenti affermazioni sono equivalenti:

$$1) \mu \leq_c \nu.$$

$$2) C_\mu \leq C_\nu.$$

Ciò mostra appunto la naturalezza della scelta di considerare le due distribuzioni di legge in ordine convesso in quanto essendo μ e ν distribuzioni di probabilità danno entrambe misura 1 ad \mathbb{R} ed essendo (X, Y) una martingala essa ha valore atteso costante $\int x \mu(dx) = \int x \nu(dx)$ mentre la crescita della funzione *call option price* è coerente con l'assenza di possibilità di arbitraggio e dunque per il lemma appena enunciato $\mu \leq_c \nu$.

Il problema primale (1.2) ha un duale che è dato da

$$\inf_{(\phi, \psi, h) \in D^2} \left(\int \phi(x) \mu(dx) + \int \psi(y) \nu(dy) \right) = \inf_{(\phi, \psi, h) \in D^2} (\mathbb{E}_\mu[\phi(X)] + \mathbb{E}_\nu[\psi(Y)]) \quad (1.4)$$

dove

$$D_2 := \left\{ (\phi, \psi, h) \mid \begin{array}{l} \phi, h : \Omega_1 \rightarrow \mathbb{R}, \quad \psi : \Omega_2 \rightarrow \mathbb{R}, \\ \phi(x) + \psi(y) + h(x)(y - x) \geq c(x, y), \quad (x, y) \in \Omega \end{array} \right\},$$

tale risultato è tratto da [1]. Questo problema può essere interpretato come la ricerca della strategia di super-replicazione più economica per il *payoff* c .

Poste le basi e il giusto contesto per affrontare il problema, iniziamo ora ad avvicinarci alla soluzione cercando innanzitutto una misura di martingala equivalente \mathbb{Q} che soddisfi le condizioni richieste.

1.2 Dalle distribuzioni marginali alla congiunta

D'ora in poi assumeremo che le distribuzioni di probabilità $\mu : \Omega_1 \rightarrow [0, 1]$ con $\mu(x_j) = \omega_j$ e $\nu : \Omega_2 \rightarrow [0, 1]$ con $\nu(y_i) = \theta_i$ siano note e discrete. Siano N e $M \in \mathbb{N}$

$$\mu = \sum_{j=1}^N \omega_j \delta_{x_j} \quad \text{e} \quad \nu = \sum_{i=1}^M \theta_i \delta_{y_i}$$

dove $\omega_j, \theta_i \geq 0, x_j, y_i \in \mathbb{R}$ per tutti i $j = 1, \dots, N$ e gli $i = 1, \dots, M$ e $\sum_{j=1}^N \omega_j = \sum_{i=1}^M \theta_i = 1$. Invece δ_x è la misura di Dirac nel punto x . Inoltre si assume, come preannunciato sopra, che $\mu \leq_c \nu$.

Sotto queste ipotesi un generico piano di trasporto di martingala $\mathbb{Q} \in \mathcal{M}(\mu, \nu)$ è una distribuzione di probabilità discreta dunque è della forma

$$\mathbb{Q} = \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^M q_{j,i} \delta(x_j, y_i),$$

e devono essere soddisfatte anche le seguenti condizioni:

- Le masse di \mathbb{Q} sono non negative, cioè abbiamo $q_{j,i} \geq 0$, per ogni $j = 1, \dots, N$ e ogni $i = 1, \dots, M$.
- Le distribuzioni marginali di \mathbb{Q} sono μ e ν e dato che $\mathbb{Q}(X = x_j) = \sum_i \mathbb{Q}(X = x_j, Y = y_i)$ e sostituendo con i valori che conosciamo μ e ν si ottiene che

$$\sum_{i=1}^M q_{j,i} = \omega_j, \quad j = 1, \dots, N,$$

$$\sum_{j=1}^N q_{j,i} = \theta_i, \quad i = 1, \dots, M.$$

Ciò implica che $\sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^M q_{j,i} = 1$, che mostra che \mathbb{Q} è effettivamente una misura di probabilità.

- La misura \mathbb{Q} soddisfa la condizione di martingala $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[Y|X] = X$ e sfruttando la definizione A.8 di valor atteso condizionato discreto $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[Y = y_i | X = x_j] = x_j = \sum_i y_i \frac{\mathbb{Q}(X=x_j, Y=y_i)}{\mathbb{Q}(X=x_j)}$ si ottiene la condizione

$$\sum_{i=1}^M \frac{q_{j,i}}{\omega_j} y_i = x_j, \quad j = 1, \dots, N \quad \text{e moltiplicando per } \omega_j \quad \sum_{i=1}^M q_{j,i} y_i = \omega_j x_j$$

sviluppando i conti otteniamo

$$\sum_{i=1}^M q_{j,i} y_i = \omega_j x_j \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{i=1}^M q_{j,i} y_i - \sum_{i=1}^M q_{j,i} x_j = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{i=1}^M q_{j,i} (y_i - x_j) = 0,$$

Riassumendo: abbiamo ricondotto la ricerca dell'*upper bound* (1.2) al seguente problema di programmazione lineare

$$\left\{ \begin{array}{l} \max_{\mathbb{Q} \in \mathcal{M}(\mu, \nu)} \quad \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^M q_{j,i} c(x_j, y_i) := \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^M q_{j,i} c_{j,i} \\ \text{s.a.} \quad \sum_{i=1}^M q_{j,i} = \omega_j, \quad j = 1, \dots, N, \\ \sum_{j=1}^N q_{j,i} = \theta_i, \quad i = 1, \dots, M, \\ \sum_{i=1}^M q_{j,i} (y_i - x_j) = 0, \quad j = 1, \dots, N, \\ q_{j,i} \geq 0, \quad j = 1, \dots, N, \quad i = 1, \dots, M. \end{array} \right. \quad (\text{P})$$

Osservazione 1.7. Le prime due equazioni garantiscono le corrette distribuzioni marginali mentre l'ultima equazione impone la condizione di martingala.

Il problema duale è dato da

$$\left\{ \begin{array}{l} \min_{\mathbb{Q} \in \mathcal{M}(\mu, \nu)} \quad \sum_{j=1}^N \omega_j \phi_j + \sum_{i=1}^M \theta_i \psi_i := \sum_{j=1}^N \omega_j \phi_j + \sum_{i=1}^M \theta_i \psi_i \\ \text{s.a.} \quad \phi_j + \psi_i + h_j (y_i - x_j) \geq c_{j,i}, \quad j = 1, \dots, N, \quad i = 1, \dots, M, \\ \phi_j, h_j, \psi_i \in \mathbb{R}, \quad j = 1, \dots, N, \quad i = 1, \dots, M. \end{array} \right. \quad (\text{D})$$

e può essere interpretato come un problema di *super hedging*, tale risultato è preso da [1], così come il seguente lemma.

Lemma 1.8. *Date due misure μ e ν , esse sono in ordine convesso $\mu \leq_c \nu$ se e solo se esiste $q_{j,i} \geq 0$ tale che*

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^M q_{j,i} &= \omega_j, \quad j = 1, \dots, N, \\ \sum_{j=1}^N q_{j,i} &= \theta_i, \quad i = 1, \dots, M, \\ \sum_{i=1}^M q_{j,i} (y_i - x_j) &= 0, \quad j = 1, \dots, N. \end{aligned}$$

Attraverso questo lemma è possibile dimostrare il seguente teorema che implica l'esistenza di una soluzione ottima ai programmi lineari (P) e (D).

Teorema 1.9. *I programmi lineari (P) e (D) hanno soluzione ottima q^* e (ϕ^*, h^*, ψ^*) e $\sum_{i=1}^M q_{j,i}^* c_{j,i} = \sum_{j=1}^N \omega_j \phi_j^* + \sum_{i=1}^M \theta_i \psi_i^*$ cioè il valore ottimo delle funzioni obiettivo coincide.*

Dimostrazione. Il Lemma precedente implica che (P) ammette una regione ammissibile non vuota. Poiché $q_{j,i} \in (0, 1)$, la funzione obiettivo è limitata e quindi, grazie al teorema classico di esistenza della programmazione lineare, esiste una soluzione ottimale q^* per (P). Per il teorema di dualità forte della programmazione lineare il problema duale (D) ha una soluzione e i valori ottimali delle funzioni obiettivo coincidono. \square

Capitolo 2

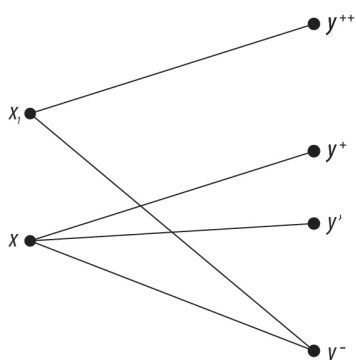
Trasporto monotono sinistro

Consideriamo il programma lineare (P) con funzione *payoff* c . In questo capitolo dimostreremo che se essa possiede la proprietà (2.1) allora esiste una soluzione $\mathbb{Q}^* = q^*$ di (P) *monotona sinistra*.

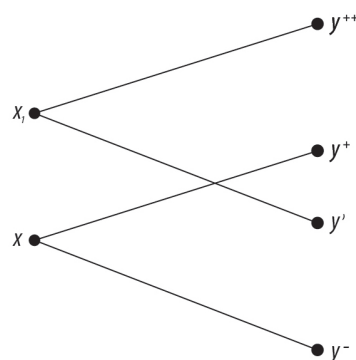
Definizione 2.1. Un piano di trasporto di martingala $\mathbb{Q} \in \mathcal{M}(\mu, \nu)$ è detto *monotono sinistro* se esiste un insieme $\Gamma \subseteq [\text{supp}(\mu) \times \text{supp}(\nu)]$ con $\mathbb{Q}(\Gamma) = 1$ e tale che se $x, x' \in \text{supp}(\mu)$, $y^-, y^+, y' \in \text{supp}(\nu)$ con $(x, y^-), (x, y^+), (x', y') \in \Gamma$ con $x \leq x'$ allora $y' \notin (y^-, y^+)$ estremi esclusi.

In sintesi: nel caso in cui nel grafico dello sviluppo del sottostante S il punto x sia collegato ai punti $y_l < \dots < y_m$, ovvero se S ha prezzo x in t allora i suoi possibili prezzi in T sono gli unici e soli $y_l < \dots < y_m$, un tale piano di trasporto impone che tutti gli y_i con $i \in \{l + 1, \dots, m - 1\}$ siano collegati solo con x . Tale definizione si rivela parecchio utile nel caso in cui la funzione di *payoff* c rispetta la condizione di convessità data dalla (2.1) perché, come dimostreremo in seguito nel capitolo 3, ciò implica che la soluzione ottima esiste, è unica ed è data proprio da un piano di trasporto monotono sinistro. Per fare un esempio presentiamo una situazione coerente con la definizione di monotonia sinistra ed una in contraddizione.

Configurazione ammissibile



Configurazione non ammissibile



La figura di sinistra mostra una situazione di mercato in cui se il titolo all'istante t ha prezzo x_1 allora all'istante T può valere $y^- < y' < y^+$, mentre se all'istante t ha come prezzo x_2 allora all'istante T o vale y^- oppure y^{++} . I segmenti che collegano i punti rappresentano il modo in cui il piano \mathbb{Q} trasporta la massa di probabilità da un punto ad un altro. Tale piano rispetta la monotonia sinistra perché x' non è collegato ad y' . Nella figura di destra il piano di trasporto non è monotono sinistro perché x' è collegato con $y' \in (y^-, y^+)$ ed x è collegato con $y^- < y^+$.

Teorema 2.2. *Sia $c : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione payoff tale che per ogni $x' > x$ e $y^+ > y' > y^-$ con $x, x' \in \text{supp}(\mu)$ e $y^-, y', y^+ \in \text{supp}(\nu)$ abbiamo che*

$$\lambda[c(x', y^+) - c(x, y^+)] + (1 - \lambda)[c(x', y^-) - c(x, y^-)] - [c(x', y') - c(x, y')] > 0 \quad (2.1)$$

dove $\lambda = \frac{y' - y^-}{y^+ - y^-} \in [0, 1]$. Allora $q^* = \mathbb{Q}^*$ soluzione ottima di (P) è monotona sinistra. Anche il viceversa è vero: se esiste un'unica soluzione di (P) che è monotona sinistra allora c deve soddisfare la condizione di sopra

Dimostrazione. Supponiamo che $x, x' \in \text{supp}(\mu)$ e che $y^-, y', y^+ \in \text{supp}(\nu)$ siano tali che $x^+ > x$ e $y^+ > y' > y^-$. Supponiamo inoltre che $\mathbb{Q} \in \mathcal{M}(\mu, \nu)$ soddisfi

$$\begin{aligned} \mathbb{Q}(x, y^-) &:= \theta^- > 0 \\ \mathbb{Q}(x, y^+) &:= \theta^+ > 0 \\ \mathbb{Q}(x', y') &:= \theta' > 0 \end{aligned}$$

dove θ^-, θ^+ e θ' sono le porzioni di massa di probabilità di x che vengono trasportate ai punti a cui esso è collegato. Notiamo che il trasporto \mathbb{Q} non è monotono sinistro perché $\mathbb{Q}(x', y') > 0$, dunque esso appartiene al prodotto dei supporti di μ e ν ma $y' \in (y^-, y^+)$

Sia $\lambda = \frac{y' - y^-}{y^+ - y^-} \in [0, 1]$ allora $y' = \lambda y^+ + (1 - \lambda)y^-$. Definiamo ora una nuova misura $\tilde{\mathbb{Q}} \in \mathcal{M}(\mu, \nu)$ con l'intento poi di mostrare che la funzione obiettivo di (P) calcolata rispetto a $\tilde{\mathbb{Q}}$ abbia un valore maggiore di quella calcolata rispetto alla misura \mathbb{Q} , che quindi risulterà essere non ottima.

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbb{Q}}(x', y^-) &:= \mathbb{Q}(x', y^-) + \theta'(1 - \lambda) \\ \tilde{\mathbb{Q}}(x', y^+) &:= \mathbb{Q}(x', y^+) + \theta'\lambda \\ \tilde{\mathbb{Q}}(x', y') &:= 0 \\ \tilde{\mathbb{Q}}(x, y^-) &:= \theta^- - \theta'(1 - \lambda) \\ \tilde{\mathbb{Q}}(x, y^+) &:= \theta^+ - \theta'\lambda \\ \tilde{\mathbb{Q}}(x, y') &:= \mathbb{Q}(x, y') + \theta' \end{aligned}$$

Sugli altri punti del dominio attribuiamo a $\tilde{\mathbb{Q}}$ gli stessi valori di \mathbb{Q} . Per iniziare mettiamoci nel caso in cui x sia collegato sia a y^- che y^+ , ovvero $\theta^- - \theta'(1 - \lambda) \geq 0$ e $\theta^+ - \theta'\lambda \geq 0$, e richiediamo che $\tilde{\mathbb{Q}}$ sia ammissibile per (P). Verifichiamo che le distribuzioni marginali $\tilde{\mathbb{Q}}$ sono le stesse di \mathbb{Q} , è sufficiente studiare i punti $x < x'$ e $y^- < y' < y^+$ perché altrove

i due piani di trasporto assumono gli stessi valori. Siano $\tilde{\mu}$ e $\tilde{\nu}$ le distribuzioni marginali di $\tilde{\mathbb{Q}}$. Iniziamo da $\tilde{\mu}$

$$\begin{aligned}\tilde{\mu}(x') &= \sum_i \tilde{\mathbb{Q}}(x', y_i) = \tilde{\mathbb{Q}}(x', y^-) + \tilde{\mathbb{Q}}(x', y^+) + \tilde{\mathbb{Q}}(x', y') \\ \mathbb{Q}(x', y^-) + \theta'(1 - \lambda) + \mathbb{Q}(x', y^+) + \theta'\lambda &= \mathbb{Q}(x', y^-) + \mathbb{Q}(x', y^+) + \theta' \\ \mathbb{Q}(x', y^-) + \mathbb{Q}(x', y^+) + \mathbb{Q}(x', y') &= \sum_i \mathbb{Q}(x', y_i) = \mu(x')\end{aligned}$$

I calcoli per x sono analoghi, ora verifichiamo che valga anche per $\tilde{\nu}$

$$\begin{aligned}\tilde{\nu}(y^-) &= \sum_j \tilde{\mathbb{Q}}(x_j, y^-) = \tilde{\mathbb{Q}}(x, y^-) + \tilde{\mathbb{Q}}(x', y^-) \\ \theta^- - \theta'(1 - \lambda) + \mathbb{Q}(x', y^-) + \theta'(1 - \lambda) &= \theta^- + \mathbb{Q}(x', y^-) \\ \mathbb{Q}(x, y^-) + \mathbb{Q}(x', y^-) &= \sum_j \mathbb{Q}(x_j, y^-) = \nu(y^-)\end{aligned}$$

I calcoli per y' e y^+ sono analoghi. Mostriamo che la condizione di martingala è mantenuta anche per $\tilde{\mathbb{Q}}$: dato che siamo in un caso discreto è sufficiente studiare i casi singoli ovvero $X = x$ e $X = x'$. Dobbiamo cioè controllare che $\sum_i \mathbb{Q}(x, y_i)y_i$ e $\sum_i \mathbb{Q}(x', y_i)y_i$ non cambino sotto la nuova misura $\tilde{\mathbb{Q}}$. Partiamo con x

$$\begin{aligned}\sum_i \mathbb{Q}(x, y_i)y_i - \sum_i \tilde{\mathbb{Q}}(x, y_i)y_i &= \\ &= y^-\theta^- + y^+\theta^+ - (y^-(\theta^- - \theta'(1 - \lambda)) + y^+(\theta^+ - \theta'\lambda) + y'\theta') \\ &= y^-\theta^- + y^+\theta^+ - (y^-\theta^- + y^+\theta^+ + \theta'(y' - y^-(1 - \lambda) - y^+\lambda)) \quad \text{i primi 4 termini si semplificano} \\ &= -\theta'y' + \theta'y^- + \theta'\lambda(-y^- + y^+) \quad \text{usiamo la definizione di } \lambda \\ &= -\theta'y' + \theta'y^- + \theta'\frac{y' - y^-}{y^+ - y^-}(y^+ - y^-) \\ &= -\theta'y' + \theta'y^- + \theta'y' - \theta'y^- \\ &= 0\end{aligned}$$

Analogo per x' .

Abbiamo quindi mostrato che $\tilde{\mathbb{Q}} \in \mathcal{M}(\mu, \nu)$. Ora mostriamo che il valore della funzione obiettivo sotto $\tilde{\mathbb{Q}}$ è maggiore di quello della funzione sotto \mathbb{Q} calcolando la differenza fra le due funzioni:

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^M (\tilde{\mathbb{Q}}(x_j, y_i) - \mathbb{Q}(x_j, y_i))c(x_j, y_i) &= \\ &= c(x', y^-)\theta'(1 - \lambda) + c(x', y^+)\theta'\lambda - c(x', y')\theta' - c(x, y^-)\theta'(1 - \lambda) - c(x, y^+)\theta'\lambda + c(x, y')\theta' \\ \text{raccolgiamo parzialmente } \lambda \text{ e } (1 - \lambda) & \\ &= \lambda\theta'[c(x', y^+) - c(x, y^+)] + (1 - \lambda)\theta'[c(x', y^-) - c(x, y^-)] - \theta'[c(x', y^+) - c(x, y^+)] \\ \text{elidiamo } \theta' > 0 \text{ e otteniamo (2.1)} & \\ &= \lambda[c(x', y^+) - c(x, y^+)] + (1 - \lambda)[c(x', y^-) - c(x, y^-)] - [c(x', y') - c(x, y')] > 0\end{aligned}$$

Possiamo anche notare che il nuovo trasporto $\tilde{\mathbb{Q}}$ è monotono sinistro in quanto il punto $(x', y') \notin \text{supp}(\mu) \times \text{supp}(\nu)$ poiché $\tilde{\mathbb{Q}}(x', y') = 0$. Inoltre anche il viceversa del teorema è vero poiché se la funzione *payoff* c non dovesse soddisfare l'ipotesi del teorema allora prendendo come ipotesi che $\tilde{\mathbb{Q}}$ è la soluzione ottima se *invertiamo i trasporti* ovvero costruiamo il trasporto \mathbb{Q} partendo dal noto $\tilde{\mathbb{Q}}$ vediamo che \mathbb{Q} non è peggiore di $\tilde{\mathbb{Q}}$, che dunque non sarebbe unico.

La dimostrazione è generalizzabile ai casi in cui non valga che $\theta^- - \theta'(1 - \lambda) \geq 0$ e $\theta^+ - \theta^-\lambda \geq 0$: si lascia parte della massa θ' sul trasporto $\tilde{\mathbb{Q}}(x', y')$ in modo da rendere la parte restante θ^* tale che $\min\{\theta^- - \theta^*(1 - \lambda), \theta^+ - \theta^*\lambda\} = 0$. Ovvero si collega x tramite $\tilde{\mathbb{Q}}$ solo con 2 punti e dunque il fatto che x' sia collegato con y' non è in contraddizione con la monotonia sinistra. \square

Osservazione 2.3. Analizziamo più attentamente la (2.1), che possiamo riscrivere

$$\lambda c(x', y^+) + (1 - \lambda)c(x', y^-) - c(x', y') > \lambda c(x, y^+) + (1 - \lambda)c(x, y^-) - c(x, y').$$

Pensiamo ora alla condizione di convessità di una funzione f :

$$\lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y) > f(\lambda x + (1 - \lambda)y).$$

Poiché $y' \in (y^-, y^+)$, y' è un punto della combinazione lineare convessa di y^+ e y^- ovvero esiste λ^* tale che $y' = \lambda^*y^+ + (1 - \lambda^*)y^-$ con $\lambda^* \in (0, 1)$. Da questo possiamo concludere che la (2.1) sta ad indicare che la funzione *payoff* c diventa "più convessa" al crescere di x .

Presentiamo ora la definizione di martingala di Spence Mirrlees che è stata introdotta in [5] dove è stato anche dimostrato che se una funzione c soddisfa la condizione di martingala di Spence Mirrlees allora nel caso di distribuzioni marginali continue il piano di trasporto ottimo è monotono sinistro, noi lo mostreremo per distribuzioni marginali discrete.

Definizione 2.4. Data una funzione $c : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, essa soddisfa la condizione di martingala di Spence Mirrlees se la sua derivata parziale c_{xyy} esiste e $c_{xyy} > 0$

Lemma 2.5. Sia $c : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, se essa soddisfa la condizione di martingala di Spence Mirrlees allora la (2.1) vale per ogni $x' > x$ e $y^+ > y' > y^-$.

Dimostrazione. Notiamo prima che la condizione (2.1)

$$\lambda[c(x', y^+) - c(x, y^+)] + (1 - \lambda)[c(x', y^-) - c(x, y^-)] - [c(x', y') - c(x, y')] > 0$$

è equivalente a

$$\lambda[c(x, y^+) - c(x, y')] + (1 - \lambda)[c(x, y^-) - c(x, y^-)] - [\lambda + (1 - \lambda)][c(x', y') - c(x, y')]$$

raccogliamo λ e $(1 - \lambda)$

$$\lambda[c(x', y^+) - c(x', y') - c(x, y^+) + c(x, y')]$$

$$-(1 - \lambda)[c(x', y') - c(x', y^-)] - c(x, y') + c(x, y^-) > 0$$

sostituiamo λ con $\frac{y' - y^-}{y^+ - y^-}$ e moltiplichiamo per $(y^+ - y^-)$, si ottiene

$$\begin{aligned} & [c(x', y^+) - c(x', y') - c(x, y^+) + c(x, y')](y' - y^-) \\ & - [c(x', y') - c(x', y^-)] - c(x, y') + c(x, y^-) > 0 \end{aligned} \quad (2.2)$$

Ora usiamo la condizione di Spence Mirrlees. Poiché $c_{xyy} > 0$ e $s > y' > u$ per ogni $s \in [y', y^+]$ e $u \in [y^-, y']$, otteniamo:

$$0 < \int_x^{x'} \int_{y'}^{y^+} \int_{y^-}^{y'} \int_u^s c_{xyy}(t, v) dv du ds dt$$

risolviamo gli integrali con il teorema fondamentale del calcolo integrale: la primitiva di $c_{xyy}(t, v)$ rispetto alla variabile v è $c_{xy}(t, v)$ calcolata negli estremi s e u

$$= \int_x^{x'} \int_{y'}^{y^+} \int_{y^-}^{y'} (c_{xy}(t, s) - c_{xy}(t, u)) du ds dt$$

poiché $c_{xy}(t, s)$ è indipendente dalla variabile u la sua primitiva rispetto ad u è $c_{xy}(t, s)(y' - y^-)$

$$\begin{aligned} &= \int_x^{x'} \int_{y'}^{y^+} [c_{xy}(t, s)(y' - y^-) - (c_x(t, y') - c_x(t, y^-))] ds dt \\ &= \int_x^{x'} [(c_x(t, y^+) - c_x(t, y'))(y' - y^-) - (c_x(t, y') - c_x(t, y^-))(y^+ - y^-)] dt \\ &= [c(x', y^+) - c(x, y^+) - c(x', y') + c(x, y')](y' - y^-) \\ &\quad - [c(x', y') - c(x, y') - c(x', y^-) + c(x, y^-)](y^+ - y^-) \end{aligned}$$

Che è esattamente la condizione (2.2). □

Ciò porta immediatamente a formulare il seguente corollario:

Corollario 2.6. *Se una funzione c soddisfa la condizione di Spence Mirrlees allora la soluzione ottima $q^* = \mathbb{Q}^*$ è un trasporto monotono sinistro*

Osservazione 2.7. La prima implicazione del teorema 2.2 vale anche per le distribuzioni continue, mentre il viceversa resta un problema aperto.

Osservazione 2.8. Per il problema di *lower bound* si ottiene un risultato simile: se c soddisfa la condizione di Spence Mirrlees allora il piano di trasporto ottimo è monotono destro. Un piano di trasporto $\mathbb{Q} \in \mathcal{M}(\mu, \nu)$ si dice piano di trasporto *monotono destro* se esiste un insieme $\Gamma \in [\text{supp}(\mu) \times \text{supp}(\nu)]$ con $\mathbb{Q}(\Gamma) = 1$ e tale che per tutti i $(x, y_1), (x, y_2), (x', y') \in \Gamma$ con $x > x'$, si ha che $y' \notin (y_1, y_2)$.

Nel caso in cui $c_{xyy} < 0$ le proprietà di ottimalità si scambiano ovvero: il piano di trasporto monotono destro è soluzione del problema di *upper bound*, mentre la soluzione del problema di *lower bound* è data dal trasporto sinistro.

Capitolo 3

Un algoritmo per la costruzione di una soluzione ottima ad un problema di upper bound

In questo capitolo deriveremo un algoritmo che provvede a trovare una soluzione ottima al problema (P). Assumiamo, in accordo con i capitoli precedenti, che le due leggi di distribuzione μ e ν soddisfino $\mu \leq_c \nu$, $\mu = \sum_{j=1}^N \omega_j \delta_{x_j}$ e $\nu = \sum_{i=1}^M \omega_i \delta_{y_i}$ e che la funzione *payoff* c rispetti la proprietà (2.1). I Teoremi 2.2 e 1.9 implicano l'esistenza di un piano di trasporto monotono sinistro ed in seguito mostreremo la sua unicità, per questo lo denotiamo con $\mathbb{Q}_l(\mu, \nu)$ (l da *left - monotone*). Prima di sviluppare l'algoritmo per determinare $\mathbb{Q}_l(\mu, \nu)$, sviluppiamo intuitivamente l'idea di come potrebbe funzionare. Visto che $\mathbb{Q}_l(\mu, \nu)$ è un particolare *coupling* delle sue distribuzioni marginali μ e ν , dobbiamo stabilire quanta massa di probabilità di ogni atomo x_j viene trasportata a ciascun y_i . Il *coupling* può essere fatto per un atomo di μ alla volta. Il procedimento da seguire è lo stesso proposto quando sono stati determinati i vincoli a cui deve sottostare un generico piano di trasporto $\mathbb{Q} \in \mathcal{M}(\mu, \nu)$. Per non introdurre una contraddizione con la monotonia sinistra quando si accoppia un atomo di μ con atomi di ν , si dovrebbe *accoppiare* il più piccolo atomo di μ con degli atomi di ν in modo tale da non avere altra massa di ν all'interno dell'involucro convesso che contiene questi atomi di ν . Ciò garantisce che, accoppiando il secondo atomo più piccolo di μ o più in generale iterando questo procedimento, non si verifichino contraddizioni con la monotonia sinistra; nel caso in cui la monotonia non potesse essere garantita non si potrebbe trovare una soluzione al problema. Dunque per garantire un problema con soluzione non banale assumiamo che μ e ν soddisfano le seguenti condizioni

- (a) $x_1 < \dots < x_N$ e $y_1 < \dots < y_M$.
- (b) $\mu \neq \nu$, ovvero $t < T$ quindi μ e ν vivono in istanti diversi.
- (c) μ ha almeno due atomi di massa positiva.

3.1 Risultati preliminari

Al centro dell'algoritmo vi è il concetto di monotonia sinistra ed esso è infatti alla base dei seguenti lemmi e delle loro dimostrazioni.

Lemma 3.1. *Date due misure μ e ν se esse sono in ordine convesso $\mu \leq_c \nu$ allora per ogni $x_j \in \text{supp}(\mu)$ esiste un $l \in \{1, \dots, M\}$ tale che $x_j = y_l$ oppure esiste un $l \in \{1, \dots, M - 1\}$ tale che $y_l < x_j < y_{l+1}$.*

Dimostrazione. La dimostrazione segue immediatamente dalla condizione di martingala:

$$\sum_{i=1}^M q_{j,i}(y_i - x_j) = 0$$

che vale in quanto, per il Lemma 1.8, è condizione necessaria e sufficiente all'ipotesi di ordine convesso tra le misure. Se esiste l tale che $y_l = x_j$ allora il contributo di y_l nella condizione di martingala è nullo

$$\sum_{i \neq j} q_{j,i}(y_i - x_j) = 0,$$

da questo deduciamo che sono due gli scenari possibili: o la massa di probabilità di x_j è completamente esaurita nel trasporto a y_l e quindi $q_{j,i} = 0$ per $i \neq l$, oppure x_j è collegato anche, almeno, ad altri due punti $y_{l-1} < x_j < y_{l+1}$ per motivi algebrici e di monotonia sinistra: la sommatoria deve essere nulla quindi si ha bisogno di termini positivi e negativi, se y_{l-1} ed y_{l+1} non fossero accoppiati con x_j dovrebbero essere collegati con altri punti in modo da non rispettare la monotonia sinistra. Se non esiste l tale che $y_l = x_j$ allora, per gli stessi motivi algebrici e di monotonia sinistra, x_l deve essere collegato con y_{l-1} e y_{l+1} □

Lemma 3.2. *Supponiamo $x_1 \in \text{supp}(\nu)$ e poniamo $x_1 = y_l$ per un $l \in \{1, \dots, M\}$, siano ω_1 e θ_1 le masse di probabilità dei punti x_1 e y_1 . Allora*

- (a) (x_1, y_l) è un atomo di $\mathbb{Q}_l(\mu, \nu)$.
- (b) Supponiamo inoltre che $l = 1$, allora $\omega_1 \leq \theta_1$

Dimostrazione. (a) Assumiamo che per assurdo x_1 non sia accoppiato con y_l sotto il piano di trasporto $\mathbb{Q}_l(\mu, \nu)$. Allora per il Lemma 3.1 devono esserci dei punti $y^-, y^+ \in \text{supp}(\nu)$ tali che $y^- < y_l < y^+$ e tale che x_1 è accoppiato sia con y^- che con y^+ . Inoltre, c'è un $x' \in \text{supp}(\mu)$ tale che $x' > x_1$ e che x' è accoppiato con y_l , ma ciò contraddice la monotonia sinistra di $\mathbb{Q}_l(\mu, \nu)$.

- (b) Assumiamo per assurdo che $\omega_1 > \theta_1$. Dopo aver accoppiato x_1 con y_1 rimane una massa di almeno $\omega_1 - \theta_1$ in x_1 . Questo deve essere poi accoppiato con degli atomi in $\text{supp}(\nu) \setminus \{y_1\}$. Poiché $y_i > x_j$ per ogni $i = \{2, \dots, M\}$, ciò contraddice la condizione di martingala per il Lemma 3.1. □

Lemma 3.3. *Supponiamo che $y_l < x_1 < y_{l+1}$ per qualche $l \in \{1, \dots, M-1\}$. Allora (x_1, y_l) e (x_1, y_{l+1}) sono atomi di $\mathbb{Q}_l(\mu, \nu)$.*

Dimostrazione. Assumiamo per assurdo senza perdere di generalità che x_1 non sia accoppiato con y_{l+1} . Allora c'è un $y^+ \in \text{supp}(\nu)$ tale che $y^+ > y_{l+1}$ e che x_1 sia accoppiato con almeno y_l e y^+ . C'è anche un altro $x' \in \text{supp}(\mu)$ tale che $x' > x_1$ e che è accoppiato con y_{l+1} . Ciò è in contrasto con la monotonia sinistra. \square

Questi tre lemmi concretizzano le caratteristiche che deve avere un piano di trasporto monotono sinistro, cioè impongono dei vincoli allo sviluppo dei prezzi di un sottostante. Il Lemma 3.1 impone che se il sottostante può avere in T un prezzo maggiore che in t allora può avere anche prezzo minore e viceversa, mentre il Lemma 3.3 impone che se il prezzo in T non può essere uguale a quello in t allora il sottostante deve avere la possibilità dal prezzo che ha in t al prezzo in T immediatamente superiore e inferiore. Dunque è garantita una regolarità dello sviluppo del prezzo del sottostante. Il Lemma 3.2 mostra che se il sottostante può avere lo stesso prezzo in t e in T allora deve esserci la possibilità che il sottostante non cambi di prezzo (ovvero che possa passare da x_j in t ad $y_l = x_j$ in T). Prima di procedere a dare l'algoritmo per costruire un piano di trasporto monotono sinistro ottimo mostriamo che esso è unico. Coerentemente con le ipotesi di questo problema, lo mostreremo nel caso discreto, mentre in Beiglböck and Juillet (2016) viene dimostrato anche per distribuzioni marginali continue.

Teorema 3.4. *Dato il problema (P) esiste un unico piano di trasporto monotono sinistro*

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che ci siano almeno due differenti piani di trasporto sinistro $q, \tilde{q} \in \mathcal{M}(\mu, \nu)$. Sia x_{j^*} il più piccolo atomo di μ per cui esiste un $i^* \in \{1, \dots, M\}$ tale che $q_{j^*, i^*} \neq \tilde{q}_{j^*, i^*}$. Eliminiamo dal problema le variabili $q_{j, i} \neq \tilde{q}_{j, i}$ per $j < j^*$ e per gli $i = 1, \dots, M$ in quanto per ipotesi q e \tilde{q} assumono stessi valori per queste variabili, consideriamo dunque i vincoli restanti:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^M q_{j, i} &= \omega_j, \quad j = j^*, \dots, N, \\ \sum_{j=j^*}^N q_{j, i} &= \theta_i - \sum_{j=1}^{j^*-1} q_{j, i}, \quad i = 1, \dots, M, \\ \sum_{i=1}^M q_{j, i}(y_i - x_j) &= 0, \quad j = j^*, \dots, N, \\ q_{j, i} &\geq 0, \quad j = j^*, \dots, N, \quad i = 1, \dots, M. \end{aligned}$$

Non sono state cambiate le proprietà strutturali dei piani di trasporto e per questo sono ancora monotoni sinistri. Consideriamo l'atomo x_{j^*} a cui attribuiamo massa ω_{j^*} . Dati $l \in \{1, \dots, M\}$ e $m \in \{0, \dots, M-1\}$ chiamiamo i punti che sono accoppiati con x_{j^*} $y_l < y_{l+1} < \dots < y_{l+m}$. Siano ω_j e θ_k le masse di probabilità dei punti x_j e y_k . Per la monotonia sinistra sappiamo che i punti $y_{l+1} < \dots < y_{l+m-1}$ sono accoppiati solo con il punto x_{j^*} dunque

$$q_{j^*, k} = \theta_k \text{ per } k = l+1, \dots, l+m-1 \quad (\text{a})$$

poiché $q_{j,k} = 0$ per $j \neq j^*$ in quanto gli x_j non sono collegati agli y_k . Dato che il punto x_{j^*} è collegato solo agli $y_l < y_{l+1} < \dots < y_{l+m}$, possiamo dedurre che

$$\sum_{i=0}^m q_{j^*,l+i} = \omega_{j^*} \tag{b}$$

e in base a questo possiamo scrivere così la condizione di martingala

$$x_{j^*} \omega_{j^*} = \sum_{i=0}^m q_{j^*,l+i} y_{l+i}. \tag{c}$$

che contiene $m + 1$ termini, di cui ne conosciamo $m - 1$ grazie ad (a). Il sistema era inizialmente a $m + 1$ equazioni ed $m + 1$ incognite, con queste considerazioni siamo giunti ad un sistema con 2 equazioni e 2 incognite. I due termini rimanenti da trovare sono $q_{j^*,l}$ e $q_{j^*,m}$ che si trovano grazie alle due condizioni rimaste (b) e (c): tali equazioni hanno coefficienti diversi membro a membro, dunque la soluzione del problema lineare è univocamente determinata, per questo q e \tilde{q} non possono essere diversi. □

Ora determineremo un algoritmo che produce il piano di trasporto monotono. Ricordiamo che il Lemma 3.1 implica che una volta fissato x_j possono presentarsi solo due situazioni: esiste un $l \in \{1, \dots, M\}$ tale che $x_j = y_l$ o esiste un $l \in \{1, \dots, M - 1\}$ tale che $y_l < x_j < y_{l+1}$. L'algoritmo procede in maniera ricorsiva: dopo aver trasportato una massa, si continua con la massa che rimane. Prestare attenzione al fatto che si userà l'indice 1 per riferirsi all'atomo più piccolo di μ tra gli atomi ancora da trasportare, quindi l'indice notazionale nell'algoritmo potrebbe essere diverso dall'indice reale.

3.2 Algoritmo

Uno dei vantaggi dell'introdurre il trasporto monotono sinistro è che possono presentarsi un numero finito di casi, derivati dalla monotonia sinistra. Dunque per determinare l'algoritmo è sufficiente descrivere il primo passo da applicare a ciascuno dei casi possibili; per garantire che le distribuzioni μ e ν rimangano in ordine convesso ad ogni passo è necessario iniziare l'algoritmo dal più piccolo atomo di μ : x_1 . Il nostro obiettivo ora è descrivere quindi come strutturare il primo passo per ognuno dei casi che possono verificarsi.

Caso I Sia $l \in \{1, \dots, M\}$ tale che $x_1 = y_l$. Conviene pensare che x_1 sia accoppiato solo ad y_l e poi verificare, trovando le masse dei punti, se quest'ipotesi è coerente oppure se x_1 è accoppiato con altri y_i con $i \neq l$

Caso 1 $\omega_1 \leq \theta_l$: la probabilità che in t il sottostante S abbia prezzo x_1 è minore-uguale alla probabilità che S valga y_l in T .

Stando alla condizione di martingala $\sum_{i=0}^M q_{j,i} (y_i - x_1) = 0$, se x_1 fosse accoppiato ad un altro evento $y^+ > y_l$ dovrebbe essere accoppiato anche ad almeno un altro $y^- < y_l$ per motivi di segno. Dato che in y_l è ancora presente della

massa, esso è accoppiato ad un altro $x_j > x_1$, ma ciò va contro la monotonia sinistra. Dunque in questo caso x_1 è accoppiato solo con un evento: ovvero tutta la sua massa viene trasportata in y_l .

Allora definiamo

$$q_{1,l} := \omega_1$$

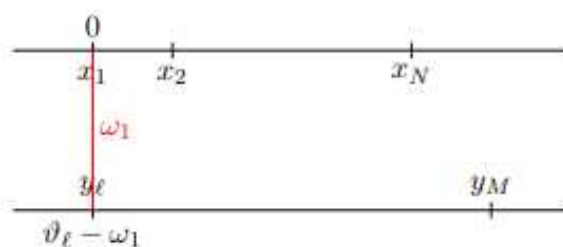
$$q_{1,i} := 0 \quad \text{per } i \neq l \text{ perché } x_1 \text{ è collegato solo ad } y_l$$

e poniamo

$$\theta_l \leftarrow \theta_l - \omega_1 \text{ come la massa di probabilità rimanente in } y_l$$

$$\omega_1 \leftarrow 0 \text{ come la massa di probabilità rimanente in } x_1$$

Le altre masse vengono lasciate inalterate. Abbiamo esaurito la massa di x_1 che dunque non verrà più preso in considerazione durante lo sviluppo dell'algoritmo; ora per continuare l'algoritmo bisogna accoppiare l'atomo più piccolo di μ tra quelli rimasti: x_2 .



Caso 2 $\omega_1 > \theta_l$: la probabilità che in t il sottostante S abbia prezzo x_1 è maggiore della probabilità che S valga y_l in T .

Percorrendo lo stesso ragionamento effettuato nel Caso (I,1), concludiamo che, dato che in x_1 avanza della massa, esso è accoppiato anche ad almeno altri due punti tali che $y^- < y_l < y^+$ per le considerazioni che erano state fatte nel Lemma 3.1.

Definiamo

$$q_{1,l} := \theta_l$$

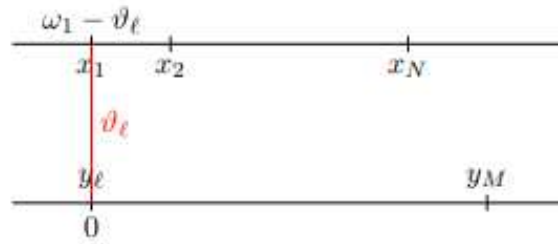
$$q_{j,l} := 0 \quad \text{per } j \neq 1 \text{ perché } y_l \text{ ha esaurito la sua massa nel trasporto con } x_1$$

e poniamo

$$\omega_1 \leftarrow \omega_1 - \theta_l \text{ come la massa di probabilità rimanente in } x_1$$

$$\theta_l \leftarrow 0 \text{ come la massa di probabilità rimanente in } y_l.$$

Lasciamo inalterate le altre masse ed avendo esaurito la massa di y_l esso non verrà più considerato dall'algoritmo. Si procede per iterazione ripartendo da x_1 , poiché la sua massa di probabilità non è ancora stata completamente esaurita.



Caso II Sia $l \in \{1, \dots, M-1\}$ tale che $y_l < x_1 < y_{l+1}$.

Allora esistono θ'_l, θ'_{l+1} tale che

$$\begin{aligned} \theta'_l + \theta'_{l+1} &= \omega_1 \\ \theta'_l y_l + \theta'_{l+1} y_{l+1} &= \omega_1 x_1. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Notiamo che questo è un sistema in θ'_l e θ'_{l+1} ed è determinato con soluzione unica perché ha due equazioni e due incognite ed i coefficienti non sono in rapporto; quindi questi valori possono essere considerati noti. Inoltre θ'_l e θ'_{l+1} rappresentano le quantità in cui viene divisa la massa di x_1 durante il trasporto ovvero sono le probabilità degli eventi possibili sapendo che si è verificato x_1 . A seguire θ_l e θ_{l+1} rappresenteranno rispettivamente le masse dei punti y_l e y_{l+1} . Si ipotizza che da x_1 siano raggiungibili solo quei due eventi e a seconda dei risultati si effettua un procedimento diverso, ora vedremo quali.

Caso 1 $\theta'_l \leq \theta_l, \theta'_{l+1} \leq \theta_{l+1}$.

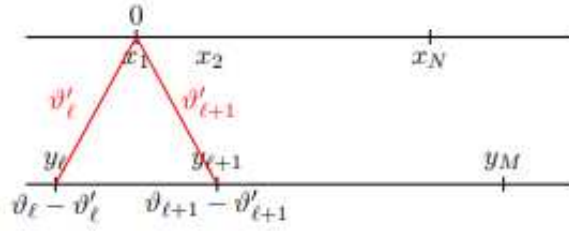
Definiamo

$$\begin{aligned} q_{1,l} &:= \theta'_l \\ q_{1,l+1} &:= \theta'_{l+1} \\ q_{1,i} &:= 0 \quad \text{per } i \neq l, l+1 \end{aligned}$$

e poniamo

$$\begin{aligned} \omega_1 &\leftarrow 0 \quad \text{come la massa di probabilità rimanente in } x_1 \\ \theta_l &\leftarrow \theta_l - \theta'_l \quad \text{come la massa di probabilità rimanente in } y_l \\ \theta_{l+1} &\leftarrow \theta_{l+1} - \theta'_{l+1} \quad \text{come la massa di probabilità rimanente in } y_{l+1} \end{aligned}$$

Tale situazione è perfettamente coerente con l'ipotesi fatta: ovvero che dal punto x_1 sono raggiungibili solo 2 eventi. Se per assurdo fosse raggiungibile anche un terzo evento che noi supponiamo essere y_{l+2} senza perdere di generalità, allora l'evento di mezzo y_{l+1} dovrebbe essere collegato ad un $x_i > x_1$ in quanto nel punto vi è ancora della massa θ_{l+1} , ma ciò andrebbe contro la monotonia sinistra poiché esso si troverebbe tra due punti accoppiati ad x_1 . La massa di x_1 è stata completamente esaurita, l'algoritmo procede con l'atomo più piccolo di μ tra quelli rimasti: x_2 .



Caso 2 $\theta'_l > \theta_l$, $\theta'_{l+1} \leq \theta_{l+1}$. Notiamo che la massa di x_1 che può essere trasportata in y_l , cioè θ'_l , è maggiore della massa di y_l , quindi la massa di probabilità che si deve trasportare da x_1 a y_l è θ_l mentre la massa restante va trasportata in un altro y_i . Visto che la massa di probabilità trasportata da x_1 a y_l è data dal coefficiente di y_l della seconda equazione nell'equazione (3.1) andiamo a moltiplicare per $\frac{\theta_l}{\theta'_l} < 1$ nell'equazione (3.1) e otteniamo:

$$\begin{aligned} \frac{\theta_l}{\theta'_l} \theta'_l + \frac{\theta_l}{\theta'_l} \theta'_{l+1} &= \omega_1 \frac{\theta_l}{\theta'_l} \\ \frac{\theta_l}{\theta'_l} \theta'_l y_l + \frac{\theta_l}{\theta'_l} \theta'_{l+1} y_{l+1} &= \omega_1 x_1 \frac{\theta_l}{\theta'_l} \end{aligned}$$

e semplificando si ottiene

$$\begin{aligned} \theta_l + \frac{\theta_l}{\theta'_l} \theta'_{l+1} &= \omega_1 \frac{\theta_l}{\theta'_l} \\ \theta_l y_l + \frac{\theta_l}{\theta'_l} \theta'_{l+1} y_{l+1} &= \omega_1 \frac{\theta_l}{\theta'_l} x_1. \end{aligned}$$

Confrontando questo sistema con la (3.1) concludiamo che la porzione di massa di x_1 che viene trasportata non è ω_1 ma è $\omega_1 \frac{\theta_l}{\theta'_l}$ di cui θ_l è trasportata ad y_l mentre $\frac{\theta_l}{\theta'_l} \theta'_{l+1}$ è trasportata ad y_{l+1} .

Quindi definiamo

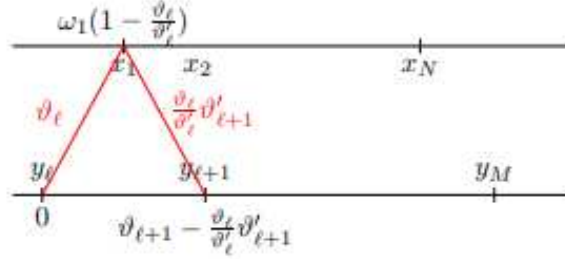
$$\begin{aligned} q_{1,l} &:= \theta_l \\ q_{1,l+1} &:= \frac{\theta_l}{\theta'_l} \theta'_{l+1} \\ q_{1,i} &:= 0 \text{ per } i \neq l, l+1 \end{aligned}$$

e poniamo

$$\begin{aligned} \omega_1 &\leftarrow \omega_1 \left(1 - \frac{\theta_l}{\theta'_l}\right) \text{ come la massa di probabilità rimanente in } x_1 \\ \theta_l &\leftarrow 0 \text{ come la massa di probabilità rimanente in } y_l \\ \theta_{l+1} &\leftarrow \theta_{l+1} - \frac{\theta_l}{\theta'_l} \theta'_{l+1} \text{ come la massa di probabilità rimanente in } y_{l+1} \end{aligned}$$

È bene notare che sia x_1 che y_{l+1} devono essere accoppiati con altri punti poiché hanno ancora massa. Se x_1 si accoppia con y_{l-1} non si hanno problemi; è anche possibile che esso possa essere nuovamente accoppiato con y_{l+1} . Se

tutta la massa di x_1 è trasportata allora y_{l+1} può essere accoppiato con x_2 , invece se x_1 deve essere accoppiato con y_{l+2} è necessario che y_{l+1} esaurisca la sua massa nel trasporto con x_1 . Tutto ciò per mantenere la monotonia sinistra. Da questo passo in poi non si considera più y_l perché ha esaurito la massa e si ricomincia con l'algoritmo da x_1 con la sua nuova massa ω_1 .



Caso 3 $\theta'_l \leq \theta_l$, $\theta'_{l+1} > \theta_{l+1}$. Notiamo che la massa di x_1 che può essere trasportata in y_{l+1} , cioè θ'_{l+1} , è maggiore della massa di y_{l+1} , quindi la massa di probabilità che si deve trasportare da x_1 a y_{l+1} è θ_{l+1} mentre la massa restante va trasportata in un altro y_i . Visto che la massa di probabilità trasportata da x_1 a y_{l+1} è data dal coefficiente di y_{l+1} della seconda equazione nell'equazione (3.1) andiamo a moltiplicare per $\frac{\theta_{l+1}}{\theta'_{l+1}} < 1$ nell'equazione (3.1) e otteniamo:

$$\begin{aligned} \theta'_l \frac{\theta_{l+1}}{\theta'_{l+1}} + \theta'_{l+1} \frac{\theta_{l+1}}{\theta'_{l+1}} &= \omega_1 \frac{\theta_{l+1}}{\theta'_{l+1}} \\ \theta'_l \frac{\theta_{l+1}}{\theta'_{l+1}} y_l + \theta'_{l+1} \frac{\theta_{l+1}}{\theta'_{l+1}} y_{l+1} &= \omega_1 \frac{\theta_{l+1}}{\theta'_{l+1}} x_1 \end{aligned}$$

e semplificando si ottiene

$$\begin{aligned} \theta'_l \frac{\theta_{l+1}}{\theta'_{l+1}} + \theta'_{l+1} &= \omega_1 \frac{\theta_{l+1}}{\theta'_{l+1}} \\ \theta'_l \frac{\theta_{l+1}}{\theta'_{l+1}} y_l + \theta_{l+1} y_{l+1} &= \omega_1 \frac{\theta_{l+1}}{\theta'_{l+1}} x_1. \end{aligned}$$

Confrontando questo sistema con la (3.1) concludiamo che la porzione di massa di x_1 che viene trasportata non è ω_1 ma è $\omega_1 \frac{\theta_{l+1}}{\theta'_{l+1}}$ di cui $\theta'_l \frac{\theta_{l+1}}{\theta'_{l+1}}$ è trasportata ad y_l mentre θ_{l+1} è trasportata ad y_{l+1} .

Quindi definiamo

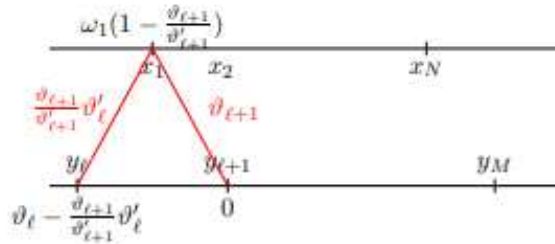
$$\begin{aligned} q_{1,l} &:= \frac{\theta_{l+1}}{\theta'_{l+1}} \theta'_l \\ q_{1,l+1} &:= \theta_{l+1} \\ q_{i,l+1} &:= 0 \quad \text{per } i \neq 1 \end{aligned}$$

e poniamo

$\omega_1 \leftarrow \omega_1 \left(1 - \frac{\theta_{l+1}}{\theta'_{l+1}}\right)$ come la massa di probabilità rimanente in x_1
 $\theta_l \leftarrow \theta_l - \frac{\theta_l}{\theta'_l} \theta'_l$ come la massa di probabilità rimanente in y_l
 $\theta_{l+1} \leftarrow 0$ come la massa di probabilità rimanente in y_{l+1}

Attraverso il ragionamento seguito nel Caso (II, 2) arriviamo alla conclusione che x_1 può essere accoppiato con y_{l-1} solo se vi è un altro accoppiamento con y_l che ne esaurisce la massa, mentre può essere accoppiato con y_{l+2} senza problemi.

L'algoritmo non passerà più per y_{l+1} perché ha terminato la massa, si riprenderà da x_1 con la sua nuova massa.



Caso 4 $\theta'_l > \theta_l$, $\theta'_{l+1} > \theta_{l+1}$.

Definiamo $k := \min\{\frac{\theta_l}{\theta'_l}, \frac{\theta_{l+1}}{\theta'_{l+1}}\}$. Se $k = \frac{\theta_l}{\theta'_l}$ allora si procede come nel Caso (II, 2), altrimenti come nel Caso (II, 3).

Dai casi studiati possiamo osservare che l'idea di base dell'algoritmo è quella di cercare di esaurire le masse di probabilità degli atomi con il minor numero di accoppiamenti possibile, coerentemente con la monotonia sinistra.

Teorema 3.5. *L'algoritmo produce un piano di trasporto monotono sinistro in un numero finito di passi*

Dimostrazione. In ogni passo si esaurisce la massa di almeno un atomo, mentre nel passo finale si esauriscono le masse di almeno due atomi. Perciò possiamo facilmente concludere che l'algoritmo termina dopo un numero finito di passi: precisamente $N + M - 1$. Inoltre, mostriamo che l'output dell'algoritmo è un piano di trasporto di martingala $\mathbb{Q} \in \mathcal{M}(\mu, \nu)$ in quanto

- (a) Tutta la massa ω_j è trasportata da x_j per ogni $j \in \{1, \dots, N\}$ e tutta la massa θ_i è ricevuta da y_i per ogni $i \in \{1, \dots, M\}$. Sono cioè soddisfatte le condizioni

$$\sum_{i=1}^M q_{j,i} = \omega_j, \quad j = 1, \dots, N,$$

$$\sum_{j=1}^N q_{j,i} = \theta_i, \quad i = 1, \dots, M.$$

- (b) La proprietà di martingala $\sum_{i=1}^M q_{j,i} y_i = \omega_j x_j$ è soddisfatta. Nel Caso I è immediato verificarlo, mentre nel Caso II è garantita dalla seconda equazione lineare dell'equazione (3.1)

$$\theta'_l y_l + \theta'_{l+1} y_{l+1} = \omega_j x_j.$$

La monotonia sinistra di \mathbb{Q} è garantita dai singoli passi dell'algoritmo per costruzione. Rimane solo da mostrare che l'algoritmo non si interrompa durante l'esecuzione, ovvero bisogna verificare che ad ogni passo le masse rimanenti soddisfino ancora l'ipotesi di ordine convesso $\mu \leq_c \nu$. Per questo è fondamentale iniziare l'algoritmo con il più piccolo atomo di μ : x_1 . Alla proprietà di ordine convesso è collegato il Lemma 1.6. Dato che μ e ν sono misure di probabilità e siamo nel caso discreto, l'equazione $\frac{1}{\mu(\mathbb{R})} \int x \mu(dx) = \frac{1}{\nu(\mathbb{R})} \int x \nu(dx)$ diventa

$$\sum_{j=1}^N x_j \omega_j = \sum_{i=0}^M y_i \theta_i$$

che è soddisfatta perché ad ogni passo dell'algoritmo si sottraggono le stesse quantità di massa di probabilità e perché, come per condizione di martingala, si ottiene dalla somma delle seconde equazioni lineari del Caso II. I seguenti casi che si studieranno sono gli stessi descritti nell'algoritmo, dunque valgono le stesse condizioni che sono state già viste precedentemente. Verifichiamo ora che ad ogni iterazione dell'algoritmo si mantiene l'ordine connesso $\mu \leq_c \nu$.

Caso I Sia $l \in \{1, \dots, M\}$ tale che $x_1 = y_l$. Prima di iniziare con l'algoritmo sappiamo per ipotesi che l'equazione $\frac{1}{\mu(\mathbb{R})} \int x \mu(dx) = \frac{1}{\nu(\mathbb{R})} \int x \nu(dx)$ e che $\mu \leq_c \nu$, dunque per il Lemma 1.6 $C_\mu \leq C_\nu$, dove C_μ e C_ν sono funzioni *call option price* relative alle distribuzioni μ e ν . Ciò si traduce in

$$\mathbb{E}[(X - K)_+] = \sum_{j=1}^N (x_j - K)_+ \omega_j \leq \sum_{i=1}^M (y_i - K)_+ \theta_i = \mathbb{E}[(Y - K)_+]. \quad (3.2)$$

Dove K è lo *strike* dell'opzione call.

Nel Caso I le nuove masse di probabilità sono costruite sottraendo ad entrambi i membri la stessa quantità di massa, perciò la disequazione (3.2) mantiene lo stesso segno ad ogni passaggio ed essa è equivalente al fatto che $\mu \leq_c \nu$.

Caso II Sia $l \in \{1, \dots, M-1\}$ tale che $y_l < x_1 < y_{l+1}$.

Caso a) $\theta'_l \leq \theta_l$, $\theta'_{l+1} \leq \theta_{l+1}$.

Assumiamo inizialmente che $K \leq y_l$, quindi $K < x_1 < \dots < x_N$. D'ora in poi $m_K := \min\{i : y_i > K\}$ ovvero $(y_i - K)_+ = 0$ per gli $i < m_K$, dunque la condizione $C_\mu \leq C_\nu$ può essere riscritta

$$\mathbb{E}[(X - K)_+] = \sum_{j=1}^N (x_j - K) \omega_j \leq \sum_{i=m_K}^M (y_i - K) \theta_i = \mathbb{E}[(Y - K)_+].$$

Alla fine del primo passo dell'algoritmo la massa di $(x_1 - K)$ è stata completamente trasportata e quindi adattiamo la disequazione all'inizio del secondo passo dell'algoritmo sottraendo $(x_1 - K)\omega_j$ ad entrambi i membri

$$\begin{aligned} \sum_{j=2}^N (x_j - K)\omega_j &\leq \sum_{i=m_K}^M (y_i - K)\theta_i - (x_1 - K)\omega_j \text{ usiamo la seconda equazione lineare} \\ &= \sum_{i=m_K}^M (y_i - K)\theta_i - (y_l - K)\theta'_l - (y_{l+1} - K)\theta'_{l+1}. \end{aligned}$$

La situazione descritta è corretta: la sommatoria inizia da x_2 perché dopo il primo passo dell'algoritmo, in questo caso, in x_1 non rimane massa che è stata totalmente trasportata a y_l e y_{l+1} ed infatti va a sottrarsi nel membro di destra, dunque le nuove masse soddisfano ancora la disuguaglianza e dunque μ e ν sono ancora in ordine convesso.

Ora assumiamo che $K \geq y_{l+1}$, in questo caso tutti gli atomi le cui masse cambiano danno contributo nullo alla disuguaglianza perché $(x_1 - K)_+ < (y_{l+1} - K)_+ = 0$ e quindi la disuguaglianza (3.2) è soddisfatta.

Assumiamo ora che $K \in (y_l, y_{l+1})$ e definiamo $n_K := \min\{j : x_j > K\}$. Mostriamo ora che la disuguaglianza vale anche all'inizio del secondo passo, quando la massa di x_1 è stata trasportata su y_l e y_{l+m_1} come θ'_l e θ'_{l+1} e dato che $(y_l - K)_+ = 0$ si ottiene

$$\sum_{j=n_K}^N (x_j - K)\omega_j \leq \sum_{i=l+1}^M (y_i - K)\theta_i - (y_{l+1} - K)\theta_{l+1}$$

che è equivalente a mostrare che $f(K) \geq 0$ per $K \in (y_l, y_{l+1})$ dove

$$f(K) := \sum_{i=l+1}^M y_i \theta_i - y_{l+1} \theta'_{l+1} - \sum_{j=n_K}^N x_j \omega_j + K \left(\sum_{j=n_K}^N \omega_j - \sum_{i=l+1}^M \theta_i + \theta'_{l+1} \right)$$

che, essendo una funzione in k , possiamo vedere come

$$f(K) = mK + q$$

Notiamo che

- (a) f è continua e lineare a tratti (cambia pendenza in $K = x_j$ perché in questi punti cambia $\sum_{n_K}^M \omega_j$ e quindi la pendenza m non è costante)
- (b) $f(y_l), f(y_{l+1}) \geq 0$ perché abbiamo visto che la disuguaglianza vale per $K \leq y_l$ e $K \geq y_{l+1}$
- (c) la pendenza diminuisce all'aumentare di K perché aumenta n_K e quindi diminuisce anche $\sum_{n_K}^M \omega_j$, ciò fa diminuire la pendenza m .

Dunque f è concava e possiamo quindi concludere che $f(K) \geq 0$ per $K \in (y_l, y_{l+1})$, dunque la disuguaglianza è rispettata e per questo anche in questo passo $\mu \leq_c \nu$.

Caso b) $\theta'_l > \theta_l$, $\theta'_{l+1} \leq \theta_{l+1}$.

Assumiamo inizialmente che $K \leq y_l$. Per ipotesi vale

$$\mathbb{E}[(X - K)_+] = \sum_{j=1}^N (x_j - K)\omega_j \leq \sum_{i=m_K}^M (y_i - K)\theta_i = \mathbb{E}[(Y - K)_+].$$

Ciò implica che

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^N (x_j - K)\omega_j - (x_1 - K)\omega_1 \frac{\theta_l}{\theta'_l} &\leq \sum_{i=m_K}^M (y_i - K)\theta_i - (x_1 - K)\omega_j \frac{\theta_l}{\theta'_l} \\ &= \sum_{i=m_K}^M (y_i - K)\theta_i - (y_l - K)\theta_l - (y_{l+1} - K) \frac{\theta_l}{\theta'_l} \theta'_{l+1}. \end{aligned}$$

quindi le nuove masse soddisfano ancora la disuguaglianza.

Ora assumiamo che $K \geq y_{l+1}$ e quindi nessuno degli atomi la cui massa è cambiata contribuisce alla disuguaglianza che per questo è soddisfatta.

Infine assumiamo che $t \in (y_l, y_{l+1})$, definiamo

$$\begin{aligned} f(K) &:= \sum_{i=l+1}^M y_i \theta_i - y_{l+1} \frac{\theta_l}{\theta'_l} \theta'_{l+1} - \sum_{j=n_K}^N x_j \omega_j - \mathbf{1}_{\{n_K=1\}} x_1 \omega_1 \frac{\theta_l}{\theta'_l} \\ &\quad + K \left(\sum_{j=n_K}^N \omega_j - \mathbf{1}_{\{n_K=1\}} \omega_1 \frac{\theta_l}{\theta'_l} - \sum_{i=l+1}^M \theta_i + \frac{\theta_l}{\theta'_l} \theta'_{l+1} \right). \end{aligned}$$

in cui è stata introdotta la funzione indicatrice $\mathbf{1}_{\{n_K=1\}}$ e serve per specificare il caso in cui $x_1 > K$, se invece $x_1 < K$ il termine della sommatoria associato ad x_1 vale zero.

Notiamo che

- (a) f è continua e lineare a tratti (cambia pendenza in x_j)
- (b) $f(y_l), f(y_{l+1}) \geq 0$
- (c) la pendenza diminuisce in K .

Dunque f è concava e possiamo quindi concludere che $f(K) \geq 0$ per $K \in (y_l, y_{l+1})$, dunque la disuguaglianza è rispettata e per questo anche in questo caso si ha ancora che $\mu \leq_c \nu$.

Caso c) $\theta'_l \leq \theta_l$, $\theta'_{l+1} > \theta_{l+1}$.

Assumiamo inizialmente che $K \leq y_l$. Per ipotesi vale

$$\mathbb{E}[(X - K)_+] = \sum_{j=1}^N (x_j - K)\omega_j \leq \sum_{i=m_K}^M (y_i - K)\theta_i = \mathbb{E}[(Y - K)_+].$$

Ciò implica che

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^N (x_j - K)\omega_j - (x_1 - K)\omega_1 \frac{\theta_{l+1}}{\theta'_{l+1}} &\leq \sum_{i=m_K}^M (y_i - K)\theta_i - (x_1 - K)\omega_1 \frac{\theta_{l+1}}{\theta'_{l+1}} \\ &= \sum_{i=m_K}^M (y_i - K)\theta_i - (y_l - k)\theta'_l \frac{\theta_{l+1}}{\theta'_{l+1}} - (y_{l+1} - K)\theta_{l+1}. \end{aligned}$$

quindi le nuove masse soddisfano ancora la disuguaglianza.

Ora assumiamo che $K \geq y_{l+1}$ e quindi nessuno degli atomi la cui massa è cambiata contribuisce alla disuguaglianza che per questo è soddisfatta.

Infine assumiamo che $K \in (y_l, y_{l+1})$, definiamo

$$f(k) := \sum_{i=l+2}^M y_i \theta_i - \sum_{j=n_K}^N x_j \omega_j - \mathbf{1}_{\{n_K=1\}} x_1 \omega_1 \frac{\theta_{l+1}}{\theta'_{l+1}} + K \left(\sum_{j=n_K}^N \omega_j - \mathbf{1}_{\{n_K=1\}} \omega_1 \frac{\theta_{l+1}}{\theta'_{l+1}} - \sum_{i=l+2}^M \theta_i \right).$$

Notiamo che

- (a) f è continua e lineare a tratti (cambia pendenza in x_j)
- (b) $f(y_l), f(y_{l+1}) \geq 0$
- (c) la pendenza diminuisce all'aumentare di K .

Dunque f è concava e possiamo quindi concludere che $f(K) \geq 0$ per $K \in (y_l, y_{l+1})$, dunque la disuguaglianza è rispettata e per questo anche in questo caso si ha che $\mu \leq_c \nu$.

Caso d) $\theta'_l > \theta_l, \theta'_{l+1} > \theta_{l+1}$.

Questo caso, come nell'algoritmo, si riconduce al Caso (II, 2) o al Caso (II, 3).

Abbiamo terminato di dimostrare che l'algoritmo può procedere senza problemi perché ad ogni passo le misure μ e ν sono sempre in ordine convesso, anche se le masse di probabilità cambiano. Noi abbiamo mostrato che questo vale al termine del primo passaggio e dunque all'inizio del secondo, ma dato che abbiamo precedentemente dimostrato che l'algoritmo termina dopo un numero finito di passi è sufficiente iterare tale procedimento fino a quando non saranno esaurite le masse di tutti gli atomi di μ e ν . \square

Portiamo ora un esempio di applicazione di tale algoritmo per trovare la soluzione ad un problema (P).

Esempio

Consideriamo una funzione *payoff* $c : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ che rappresenta i *payoff* di un dato sottostante e che possiede la proprietà (2.1), il suo problema (P) associato è

$$\mathcal{P}(\mu, \nu) := \sup_{Q \in M(\mu, \nu)} \mathbb{E}_Q[c(X, Y)]$$

che scritto in programmazione lineare diventa

$$\max_{\mathbb{Q} \in \mathcal{M}(\mu, \nu)} \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^M q_{j,i} c_{j,i}.$$

Vengono date le seguenti distribuzioni marginali

$$\mu = \frac{1}{2}(\delta_1 + \delta_3) \leq_c \nu = \frac{1}{2}\delta_0 + \frac{1}{6}\delta_2 + \frac{1}{3}\delta_5 \quad (\text{A})$$

Verifichiamo che vale $\frac{1}{\mu(\mathbb{R})} \int x \mu(dx) = \frac{1}{\nu(\mathbb{R})} \int x \nu(dx)$: dato che μ e ν sono distribuzioni di probabilità $\mu(\mathbb{R}) = \nu(\mathbb{R}) = 1$.

$$\int x \mu(dx) = \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 3 = 2$$

$$\int x \nu(dx) = \frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{1}{6} \cdot 2 + \frac{1}{3} \cdot 3 = 2.$$

Possiamo allora applicare il Lemma 1.6 e dato che siamo in un mercato privo di arbitraggio vale $C_\mu \leq C_\nu$, dove C_μ e C_ν sono le funzioni *call option price* relative a μ e ν , dunque $\mu \leq_c \nu$. Gli atomi di μ rappresentano i possibili prezzi del sottostante ad un tempo $t > 0$ mentre quelli di ν i prezzi dello stesso ad un tempo $T > t$. Da (A) capiamo che gli atomi di μ sono $x_1 = 1 < x_2 = 3$, che gli atomi di ν sono $y_1 = 0 < y_2 = 2 < y_3 = 5$ e che le masse di probabilità iniziali di tali punti sono

punto	$x_1 = 1$	$x_2 = 3$	punto	$y_1 = 0$	$y_2 = 2$	$y_3 = 5$
massa	$\mu(x_1) = \frac{1}{2}$	$\mu(x_2) = \frac{1}{2}$	massa	$\nu(y_1) = \frac{1}{2}$	$\nu(y_2) = \frac{1}{6}$	$\nu(y_3) = \frac{1}{3}$

I valori di c sono noti, a noi è sufficiente trovare i valori $q_{j,i}$ che massimizzano il problema. Abbiamo precedentemente dimostrato che la soluzione ottima a un tale problema con queste ipotesi è il piano di trasporto monotono sinistro, andiamo dunque ad applicare l'algoritmo. Iniziamo con l'accoppiare la massa di δ_1 . Risolviamo

$$\begin{aligned} \theta'_1 + \theta'_2 &= \omega_1 = \frac{1}{2} \\ \theta'_1 \cdot 0 + \theta'_2 \cdot 2 &= \omega_1 \cdot 1 = \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

dove θ'_1 e θ'_2 sono le porzioni di massa di x_1 trasportate rispettivamente ad y_1 e y_2 . Piccola riflessione: poiché $y_1 < x_1 < y_2$, x_1 deve essere necessariamente accoppiato con entrambi per il Lemma 3.1. Svolgendo i calcoli otteniamo $\theta'_1 = \theta'_2 = \frac{1}{4}$. Poiché $\theta'_1 \leq \theta_1$ e $\theta'_2 > \theta_2$ ci troviamo nel **caso II, 3**. Perciò definiamo $q_{1,1} := \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{4}} = \frac{1}{6}$, $q_{1,2} := \frac{1}{6}$, $\omega_1 := \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{6}) = \frac{1}{6}$, $\theta_1 := \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$, $\theta_2 := 0$.

Dato che in δ_1 non si è esaurita la massa dobbiamo trovare un altro trasporto e dato che

y_2 ha ora massa nulla, cerchiamo un accoppiamento con y_3

$$\begin{aligned}\theta'_1 + \theta'_3 &= \omega_1 = \frac{1}{6} \\ \theta'_1 \cdot 0 + \theta'_3 \cdot 5 &= \omega_1 \cdot 1 = \frac{1}{6},\end{aligned}$$

si ottiene che $\theta'_1 = \frac{2}{15}$, $\theta'_3 = \frac{1}{30}$. Poiché $\theta'_1 \leq \theta_1$ e $\theta'_3 \leq \theta_3$ siamo nel **caso II, 1**. Quindi definiamo $q_{1,1} := \frac{2}{15}$, $q_{1,3} := \frac{1}{30}$, $\omega_1 := 0$, $\theta_1 := \frac{1}{3} - \frac{2}{15} = \frac{1}{5}$, $\theta_3 := \frac{1}{3} - \frac{1}{30} = \frac{3}{10}$.

Ora che la massa in δ_1 si è esaurita, accoppiamo δ_3 . Dato che y_2 non ha più massa da ricevere, studiamo il trasporto da x_2 a y_1 e y_3 . Risolviamo

$$\begin{aligned}\theta'_1 + \theta'_3 &= \omega_2 = \frac{1}{2} \\ \theta'_1 \cdot 0 + \theta'_3 \cdot 5 &= \omega_2 \cdot 3 = \frac{3}{2},\end{aligned}$$

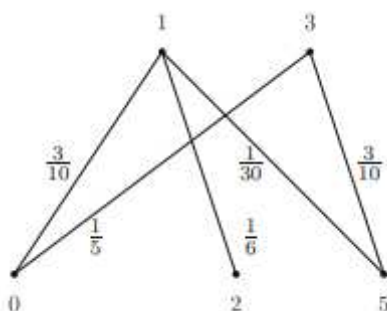
e otteniamo $\theta'_1 = \frac{1}{5}$ e $\theta'_3 = \frac{3}{10}$ e siccome $\theta'_1 \leq \theta_1$ e $\theta'_3 \leq \theta_3$ siamo nel **caso II, 1**. Quindi definiamo $q_{2,1} := \frac{1}{5}$, $q_{2,3} := \frac{3}{10}$, $\omega_2 := 0$, $\theta_1 := \frac{1}{5} - \frac{1}{5} = 0$, $\theta_3 := \frac{3}{10} - \frac{3}{10} = 0$.

Visto che ogni atomo ha esaurito la sua massa, l'algoritmo è terminato.

In questo problema abbiamo potuto vedere che è possibile dover trasportare della massa tra due stessi atomi in 2 passaggi consecutivi, alla fine poi queste masse vanno sommate. Ora possiamo scrivere l'unico piano di trasporto monotono sinistro

$$\mathbb{Q}_i(\mu, \nu) = \frac{3}{10}\delta_{1,0} + \frac{1}{6}\delta_{1,2} + \frac{1}{30}\delta_{1,5} + \frac{1}{5}\delta_{3,0} + \frac{3}{10}\delta_{3,5}$$

tali $q_{j,i}$ sono i coefficienti che massimizzano la funzione obiettivo del problema (P). Presentiamo, per concludere, un grafico che rappresenta il problema appena studiato.



Appendice A

Prerequisiti teorici

A.1 Probabilità

Definizione A.1. Sia (Ω, \mathbb{P}) uno spazio di probabilità discreto ed E un insieme generico. Si dice *variabile aleatoria discreta* ogni funzione $X: \Omega \rightarrow E$ definita su Ω a valori in E . Se $X: \Omega \rightarrow E$ è una variabile aleatoria, per ogni $A \subseteq E$ indichiamo con $\{X \in A\}$ la controimmagine di A tramite X .

Definizione A.2. Sia $X: \Omega \rightarrow E$ una variabile aleatoria discreta definita su uno spazio di probabilità discreto (Ω, \mathbb{P}) a valori in un insieme arbitrario E , si dice *distribuzione di X* (o *legge*) l'applicazione $\mu_X: \mathcal{P}(E) \rightarrow [0, 1]$ definita da

$$\mu_X(A) := \mathbb{P}(X \in A).$$

Definizione A.3. Date due variabili aleatorie $X: \Omega \rightarrow E$ ed $Y: \Omega \rightarrow F$ definiamo la variabile aleatoria $Z(X, Y): \Omega \rightarrow E \times F$. La legge di Z è $\mu_{X,Y}$ ed è detta *distribuzione congiunta* delle variabili aleatorie X e Y , mentre le leggi μ_X e μ_Y sono dette *distribuzioni marginali*. Valgono le seguenti uguaglianze:

$$\begin{aligned} \forall x \in E : \mu_X(x) &= \sum_{y \in F} \mu_{X,Y}(x, y); \\ \forall y \in F : \mu_Y(y) &= \sum_{x \in E} \mu_{X,Y}(x, y). \end{aligned}$$

Dove, con abuso di linguaggio, con $\mu_X(x)$ si intende $\mu_X(\{x\})$.

Definizione A.4. Date due misure di probabilità \mathbb{P} e \mathbb{P}' definite su uno stesso spazio Ω il *coupling* è una qualsiasi misura di probabilità $\tilde{\mathbb{P}}$ definita sullo spazio prodotto $\Omega \times \Omega$ le cui distribuzioni marginali sono \mathbb{P} e \mathbb{P}' , cioè

$$\mathbb{P} = \tilde{\mathbb{P}} \circ \pi^{-1}, \quad \mathbb{P}' = \tilde{\mathbb{P}} \circ \pi'^{-1},$$

dove π e π' sono le proiezioni sinistra e destra, definite da

$$\pi(x, x') = x, \quad \pi'(x, x') = x', \quad (x, x') \in \Omega \times \Omega.$$

Definizione A.5. Date due variabili aleatorie discrete $X: \Omega \rightarrow E$ e $Y: \Omega \rightarrow F$, un *coupling* di X e Y è una qualsiasi coppia di variabili aleatorie discrete (\tilde{X}, \tilde{Y}) definita su $\Omega \times \Omega$ a valori in $E \times F$ le cui distribuzioni marginali che hanno le stesse leggi di probabilità delle variabili X e Y .

Osservazione A.6. La legge \tilde{P} di (\tilde{X}, \tilde{Y}) è un coupling delle leggi di P, P' delle variabili X e Y .

Definizione A.7. Data una misura di probabilità P su uno spazio discreto Ω , un insieme $A \subseteq \Omega$ è detto *atomo* se ha probabilità (o massa di probabilità) non nulla e se $\forall B \subset A$ $P(B) = 0$.

Definizione A.8. Siano A e B due eventi di uno spazio di probabilità discreto (Ω, P) , con $P(B) > 0$. Si dice *probabilità condizionata* di A dato B la quantità

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Tale definizione può essere estesa al caso in cui A e B siano esiti di due variabili aleatorie X e Y :

$$P(X \in A|Y \in B) = \frac{P(\{X \in A\} \cap \{Y \in B\})}{P\{Y \in B\}}.$$

In particolare se si ha che $A = \{x\}$ e $B = \{y\}$ si ha:

$$P(X = x|Y = y) = \frac{P(X = x \wedge Y = y)}{P(Y = y)}.$$

Posto ciò, definiamo il *valor atteso condizionato discreto* come

$$\mathbb{E}[X|Y = y] = \sum_{x \in E} \frac{P(X = x \wedge Y = y)}{P(Y = y)}.$$

Definizione A.9. Una *filtrazione* è una famiglia di σ -algebre che soddisfa $\mathcal{F}_t \subseteq \dots \subseteq \mathcal{F}_T$. Dati uno spazio Ω e uno spazio d'arrivo E un *processo stocastico* è un insieme di variabili aleatorie indicizzate dal tempo t definite su Ω e a valori in E . Un processo stocastico si dice *adattato* se X_t è misurabile rispetto ad \mathcal{F}_t per ogni t .

Un processo stocastico X rispetto ad una filtrazione \mathcal{F}_t è una *martingala* a tempo discreto se è :

- a) adattato
- b) $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[X_t|\mathcal{F}_{t-1}] = X_{t-1}$ per ogni $t = 0, \dots, T$

A.2 Programmazione lineare

Definizione A.10. Un problema di Programmazione Lineare (detto anche programma lineare) è un problema di ottimizzazione vincolata in cui la funzione da massimizzare (o

minimizzare) è lineare e tutti i vincoli sono descritti da equazioni e/o disequazioni lineari. Un programma si dice essere in *forma standard* se è della forma

$$\begin{cases} \max & c^T x \\ \text{s.a.} & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{cases}$$

con $x, c \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^m$ ed $A \in \mathcal{M}_{n,m}$

Definizione A.11. Una *soluzione ottima* ad un problema di programmazione lineare è un vettore $x \in \mathbb{R}^n$ che soddisfa i vincoli del problema. Un problema di programmazione lineare è detto *illimitato* se $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ esiste $x \in \mathbb{R}^n$ tale che $\alpha < c^T x$ (oppure $\alpha > c^T x$), ovvero quando il problema non ammette max (o min)

Teorema A.12. *Dato un programma lineare, vale una e una sola delle seguenti alternative:*

- a) *il problema ha almeno una soluzione ottima*
- b) *il problema è inammissibile, cioè non ha soluzioni ammissibili*
- c) *il problema è illimitato.*

Osservazione A.13. Qualunque problema scritto in forma standard è detto *primale* ed ammette problema *duale* che è della forma

$$\begin{aligned} & \max && b^T y \\ & \text{s.a.} && A^T y \leq c \end{aligned}$$

con $c \in \mathbb{R}^n$, $b, y \in \mathbb{R}^m$ ed $A^T \in \mathcal{M}_{m,n}$.

Teorema A.14. *Se il problema primale ha una soluzione ottima x^* , allora il suo duale ammette soluzione ottima y^* tale che valga $c^T x^* = b^T y^*$.*

Bibliografia

- [1] N. Bâuerle, D. Schmithals (2019), *Martingale optimal transport in the discrete case via simple linear programming techniques*, Springer
- [2] F. Santambrogio (2015), *Optimal Transport for Applied Mathematicians*, Edition Number 1, Birkhäuser Charm
- [3] Frank den Hollander (2012), *Probability Theory: The Coupling Method*, third draft, Elviesier B.V.
- [4] Mathias Beiglböck and Nicolas Juillet (2016), *On a problem of optimal transport under marginal martingale constraints*, The Annals of Probability 44
- [5] Henry-Labordère and Touzi (2016), *An explicit martingale version of the one-dimensional Brenier theorem*. Finance Stoch