UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

Dipartimento di Fisica e Astronomia "Galileo Galilei"

Corso di Laurea in Fisica

Tesi di Laurea

Rappresentazioni proiettive e anomalie di 't Hooft

Relatore

Prof. Roberto Volpato

Laureanda

Arianna Viganò

Anno Accademico 2022/2023

Abstract

La tesi riguarda lo studio di alcuni aspetti delle simmetrie della dinamica in meccanica quantistica. In alcuni modelli fisici, è possibile trasformare una simmetria "globale" continua in una simmetria di "gauge", permettendo che il parametro di simmetria sia una funzione del tempo anziché una costante, e accoppiando il sistema ad un potenziale di gauge esterno. In alcuni sistemi quantistici, questa procedura di "gauging" e il corrispondente accoppiamento ad un potenziale esterno, può avere come conseguenza la rottura di altre simmetrie continue o discrete del sistema. Questo fenomeno è stato studiato soprattutto nell'ambito delle teorie di campo quantistiche, dove è noto come anomalia di 't Hooft. Lo scopo della tesi è mostrare, attraverso lo studio di un esempio concreto, come le anomalie di 't Hooft siano possibili anche in meccanica quantistica non relativistica, e descrivere la relazione tra tali anomalie e la presenza di rappresentazioni genuinamente proiettive del gruppo di simmetria.

Sommario

Parte 1

Introduzione

L'interesse per le simmetrie di gauge – ovvero simmetrie caratterizzate non da parametri costanti, bensì da funzioni delle coordinate spaziotemporali, e dall'accoppiamento del sistema a potenziali detti *di gauge* esterni – ha primariamente origine dalla loro importanza all'interno del *Modello Standard*: infatti, in questo contesto tutte le interazioni fondamentali, eccezion fatta per la gravità, possono essere descritte in termini di simmetrie di gauge.

Il concetto di *anomalia di 't Hooft* nasce nell'ambito delle *Teorie Quantistiche dei Campi* come impossibilità di trasformare simmetrie globali continue in simmetrie di gauge a meno di rompere altre simmetrie discrete o continue del sistema.

Questo fenomeno può, tuttavia, essere già riscontrato in Meccanica Quantistica, dove è possibile analizzare sistemi fisici tramite descrizione operatoriale hamiltoniana. Operando in questo scenario, si decide di ridursi all'osservazione delle simmetrie di gauge il cui campo di gauge e le sue eventuali trasformazioni dipendano solamente dal parametro tempo e non dalle coordinate del sistema, ossia di operare il cosiddetto *gauging*.

Le ragioni di questa decisione sono da ricercarsi nella generalità che questo approccio garantisce. Infatti, sebbene le coordinate del sistema risultino spesso essere legate alla posizione nello spazio di una data particella, questo non esaurisce in alcun modo la varietà di sistemi descrivibili: il formalismo hamiltoniano consente sia variazioni nella dimensione dello spazio delle coordinate che un loro distaccamento dal significato spaziale. Rimane, tuttavia, inalterata la dipendenza parametrica dell'evoluzione del sistema dal tempo.

Inoltre, la trattazione in esame può essere vista come la riduzione alla sola direzione temporale di simmetrie di gauge più generali proprie delle *Teorie Quantistiche dei Campi*, dove tempo e coordinate spaziali sono considerate alla pari come coordinate sullo spaziotempo.

Infine, in Meccanica Quantistica è possibile individuare un legame tra *anomalie di 't Hooft* e *rappresentazioni genuinamente proiettive* del gruppo di simmetria globale $\mathcal{G}$ che si sta analizzando: questo rapporto sarà ampiamente indagato nel corso della tesi. Si osserverà, infatti, come il fatto che il gruppo $\mathcal{G}$ richieda rappresentazione genuinamente proiettiva impedisca, in presenza di un'anomalia, di mantenere l'invarianza del sistema sotto trasformazioni del gruppo $\mathcal{G}$ nel caso in cui si proceda con il *gauging* di un suo sottogruppo $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{G}$ o di $\mathcal{G}$ stesso.

Struttura: Il presente lavoro di tesi si articola in quattro sezioni.

Nella Sezione 2 si introducono, nel contesto del formalismo operatoriale hamiltoniano della Meccanica Quantistica, definizioni dei concetti fondamentali: simmetria fisica, simmetria della dinamica e *rappresentazioni genuinamente proiettive* di gruppi in 2.1, trasformazioni di gauge in 2.2 e *anomalie di 't Hooft* in 2.3.

Il discorso procede nella Sezione 3 con l'introduzione del principale esempio analizzato: una particella in moto su una circonferenza. Se ne indagano lo spettro energetico e gli autostati dell'operatore hamiltoniano in 3.1 e 3.2, e le simmetrie dinamiche globali di traslazione e partià in 3.3.

Con la Sezione 4 si procede con l'esecuzione del *gauging* del gruppo di simmetria traslazionale $U(1)$ sul sistema e si verifica la covarianza del corrispondente operatore hamiltoniano una volta implementato l'accoppiamento al campo di gauge in 4.2. Per la prima volta si osserva l'emergere dell'*anomalia di 't Hooft* da considerazioni sull'applicazione dell'operatore di simmetria di parità a stati e operatori in 4.3.

Infine, nella Sezione 5 si computa la funzione di partizione del sistema tramite prolungamento analitico dell'operatore di evoluzione temporale in 5.1 e se ne deduce la presenza dell'*anomalia di 't Hooft*, osservandone la relazione con la simmetria di parità, la simmetria di gauge e la rappresentazione proiettiva del gruppo traslazionale $U(1)$ in 5.2.

Parte 2

Simmetrie globali, di gauge e anomalie di ’t Hooft

2.1 Simmetrie in Meccanica Quantistica

In Meccanica Quantistica le cosiddette simmetrie della dinamica rivestono un ruolo fondamentale. La loro definizione più rigorosa si deve al fisico Eugene Paul Wigner [1].

Secondo i Postulati della Meccanica Quantistica, ad ogni sistema fisico $\mathcal{S}$ è associato uno spazio di Hilbert $\mathcal{H}$. Ad ogni stato di tal sistema corrisponde un raggio vettore $\hat{\psi}$ nello spazio quoziente $\mathcal{H}/\sim$ rispetto alla relazione di equivalenza

$$\sim: \quad \psi, \phi \in \mathcal{H} \quad \psi \sim \phi \Longleftrightarrow \phi = \lambda\psi \text{ con } \lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \,. \tag{2.1}$$

Una simmetria alla Wigner, ossia una simmetria *fisica*, è una trasformazione biunivoca che agisce su raggi vettori $\hat{\psi} \in \mathcal{H}/\sim$ e operatori lineari (A, D_A), con $D_A \subseteq \mathcal{H}/\sim$ dominio dell'operatore, mantenendo invariati i valori medi di tali operatori sugli stati, ossia:

$$\mathfrak{g} : \begin{cases} \hat{\psi} & \mapsto & \hat{\psi}' \\ A & \mapsto & A' \end{cases} \qquad \text{tale che} \qquad \langle A' \rangle_{\hat{\psi}'} = \langle A \rangle_{\hat{\psi}} \,. \tag{2.2}$$

Per il *Teorema di Wigner* [2] tali trasformazioni possono essere realizzate da trasformazioni unitarie o antiunitarie; ad ogni trasformazione di simmetria $\mathfrak{g}$ è associato un operatore $U(\mathfrak{g})$ unitario o antiunitaro in $\mathcal{H}/\sim$:

$$\mathfrak{g}\hat{\psi} = \widehat{U(\mathfrak{g})\psi} \tag{2.3}$$

tale che l'azione su stati e operatori della trasformazione sia data da

$$\mathfrak{g} : \begin{cases} \hat{\psi} & \mapsto & \hat{\psi}' = \widehat{U(\mathfrak{g})\psi} \\ A & \mapsto & A' = U(\mathfrak{g}) A U^\dagger(\mathfrak{g}) \end{cases} \,. \tag{2.4}$$

In particolare, se $\dim\mathcal{H} \geq 2$, $U(\mathfrak{g})$ è unico a meno di moltiplicare $U(\mathfrak{g})$ per un fattore di fase $e^{i\phi(\mathfrak{g})}$ che non influisce sui valori di aspettazione degli osservabili del sistema.

Si consideri ora un sistema fisico la cui dinamica è descritta dall'operatore hamiltoniano H_0. L'evoluzione temporale degli stati di tale sistema è data dall'equazione di Schrödinger associata all'hamiltoniano

$$i\hbar\frac{d}{dt}\psi(t) = H_0\psi(t), \tag{2.5}$$

le cui soluzioni si possono scrivere come $|\psi(t)\rangle = U_{H_0}(t,t_0)\,|\psi(t_0)\rangle$ con $U_{H_0}(t,t_0) = \mathcal{T}e^{-\frac{i}{\hbar}\int_{t_0}^{t} H_0(t')\,dt'}$, dove $\mathcal{T}$ è l'operatore di *path ordering*.

L'ulteriore richiesta affinché la trasformazione $\mathfrak{g}$ definisca una simmetria *dinamica* è che l'operatore $U(\mathfrak{g})$ ad essa associato sia tale che

$$U(\mathfrak{g})H_0U^\dagger(\mathfrak{g}) = H_0 \Longleftrightarrow [U(\mathfrak{g}), H_0] = 0. \tag{2.6}$$

Ciò equivale ad affermare che operatori di simmetria $U(\mathfrak{g})$ mappano soluzioni dell'equazione di Schrödinger in altre soluzioni.

La definizione a meno di una fase degli operatori unitari associati a trasformazioni di simmetria diventa di ulteriore rilievo nel caso di gruppi di simmetria continui, e in particolare dei *Gruppi di Lie* [3].

Un *Gruppo di Lie* di dimensione n è un gruppo $\mathcal{G}$ fornito anche di una struttura di varietà differenziabile tale che il prodotto $\mathcal{G}\times\mathcal{G}\mapsto\mathcal{G}$ e l'inverso $\mathcal{G}\mapsto\mathcal{G}$ siano applicazioni di classe C^∞ [4].

In questo caso si ha $U(\mathfrak{g}) = U(\alpha_j) = e^{-\frac{i}{\hbar}\sum_{j=i}^{n}\alpha_j Q_j}$ dove Q_j sono le cariche conservate e α_j dei parametri reali.

Assumendo anche l'ipotesi di connessione del gruppo di simmetria, la possibilità che tali trasformazioni siano rappresentate da operatori antiunitari è da scartare, poiché ogni elemento del gruppo deve essere connesso all'elemento neutro, ossia a $\mathbb{1}$. Si avrà quindi una rappresentazione unitaria del gruppo di simmetria $\mathcal{G}$.

Si considerino $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}' \in \mathcal{G}$. Si ha $\mathfrak{g}\mapsto U(\mathfrak{g})$ e $\mathfrak{g}'\mapsto U(\mathfrak{g}')$. La composizione delle due trasformazioni risulta essere

$$U(\mathfrak{g})U(\mathfrak{g}') = \omega(\mathfrak{g},\mathfrak{g}')U(\mathfrak{g}\mathfrak{g}') \text{ con } |\omega(\mathfrak{g},\mathfrak{g}')| = 1 \text{ modulo del fattore di fase } \omega(\mathfrak{g},\mathfrak{g}') = e^{i\varphi(\mathfrak{g},\mathfrak{g}')}. \tag{2.7}$$

Se esiste una scelta di rappresentanti $U(\mathfrak{g})$, $U(\mathfrak{g}')$ e $U(\mathfrak{g}\mathfrak{g}')$ tali che $\varphi(\mathfrak{g},\mathfrak{g}') = 0$ – ossia $\omega(\mathfrak{g},\mathfrak{g}') = 1$ – per ogni $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}'\in\mathcal{G}$, si dice che il gruppo ammette *rappresentazione non proiettiva*. Al contrario si dice che la rappresentazione del gruppo è *genuinamente proiettiva* se tale scelta non esiste.

2.2 Trasformazioni di gauge

Diversamente da quanto finora considerato per le simmetrie globali, le trasformazioni di gauge possono essere locali – ossia dipendere dal punto nello spaziotempo considerato. In particolare, in questo lavoro di tesi si vuole effettuare operazioni di *gauging*, ossia di introduzione di una dipendenza dal tempo della trasformazione di simmetria $\mathfrak{g}(t)\in\mathcal{G}$, tale da avere

$$\psi(t)\mapsto\psi'(t) = U(\mathfrak{g}(t))\psi(t). \tag{2.8}$$

Nel caso di Gruppi di Lie si ha $U(\mathfrak{g}(\mathfrak{t})) \equiv U(\alpha_j(t)) = e^{-\frac{i}{\hbar}\sum_{j=i}^{n}\alpha_j(t)Q_j}$ dove ora i parametri dipendono da t.

È di cruciale importanza sottolineare che trasformazioni di gauge non modificano lo stato in cui si trova il sistema: le simmetrie di gauge sono piuttosto da intendersi come ridondanze nella descrizione del sistema stesso.

In generale, l'equazione di Schrödinger non risulta invariante per trasformazioni di gauge locali. Infatti

$$H_0\psi'(t) = H_0 U(\mathfrak{g}(t))\psi(t) = U(\mathfrak{g}(t))H_0 U^\dagger(\mathfrak{g}(t))U(\mathfrak{g}(t))\psi(t) = U(\mathfrak{g}(t))H_0\psi(t), \tag{2.9}$$

e al contempo si ha anche

$$\begin{aligned} i\hbar\frac{d}{dt}\left(\psi'(t)\right) &= i\hbar\frac{d}{dt}\left(U(\mathfrak{g}(t))\psi(t)\right) \\ &= i\hbar\left(\frac{d}{dt}U(\mathfrak{g}(t))\right)\psi(t) + U(\mathfrak{g}(t))\left(i\hbar\frac{d}{dt}\psi(t)\right) \\ &= i\hbar\left(\frac{d}{dt}U(\mathfrak{g}(t))\right)\psi(t) + U(\mathfrak{g}(t))H_0\psi(t). \end{aligned} \tag{2.10}$$

Si è ottenuto che i due termini precedentemente legati dall'equazione di Schrödinger non risultano più uguali per via di un contributo aggiuntivo dato dalla derivata temporale dell'operatore unitario, ora dipendente dal tempo.

Per soddisfare l'invarianza si rende, dunque, necessario modificare l'hamiltoniano accoppiando il sistema con un operatore $\mathbb{A}$ che varia in maniera opportuna sotto trasformazioni del tipo $\mathbb{A}(t) \mapsto \mathbb{A}'(t) = \mathfrak{g}(\mathbb{A}(t))$.

In particolare, si richiede che

$$i\hbar\frac{d}{dt} + \mathbb{A}'(t) = U(\mathfrak{g}(t))\left(i\hbar\frac{d}{dt} + \mathbb{A}(t)\right)U^\dagger(\mathfrak{g}(t)). \tag{2.11}$$

L'operatore $i\hbar\frac{d}{dt} + \mathbb{A}'(t)$ è detto derivata covariante, in quanto trasforma sotto simmetria di gauge mantenendo invariata la propria forma e modificando il campo.

Si può, a partire da quest'ultima relazione, ricavare in maniera immediata una definizione dell'operatore $\mathbb{A}'(t)$ in grado di soddisfare quanto imposto:

$$\mathbb{A}'(t) = U(\mathfrak{g}(t))\mathbb{A}(t)U^\dagger(\mathfrak{g}(t)) + i\hbar U(\mathfrak{g}(t))\left(\frac{d}{dt}U^\dagger(\mathfrak{g}(t))\right). \tag{2.12}$$

Nel caso specifico di Gruppi di Lie con $U(\mathfrak{g}(t)) \equiv U(\alpha_j(t)) = e^{-\frac{i}{\hbar}\sum_{j=1}^n \alpha_j(t)Q_j}$, l'operatore $\mathbb{A}(t)$ si scrive come $\mathbb{A}(t) = \sum_{j=1}^n Q_j A_j(t)$ dove Q_j sono le cariche conservate e $A_j(t)$ sono funzioni del tempo e non operatori. Fisicamente, le funzioni $(A_1(t), \dots, A_n(t))$ rappresentano un campo di gauge e si dice che il sistema è accoppiato a tale campo di gauge. Per esempio, nel caso di un gruppo $U(1)$, avremo un unico campo $A(t)$ che trasforma mediante $U(\alpha(t))$ come $A(t) \mapsto A'(t) = A(t) - \dot{\alpha}(t)$, essendo

$$i\hbar U(\alpha(t))\frac{d}{dt}\left(U^\dagger(\alpha(t))\right) = i\hbar e^{-\frac{i}{\hbar}\alpha(t)Q}\left(\frac{d}{dt}e^{\frac{i}{\hbar}\alpha(t)Q}\right) = i\hbar\frac{i}{\hbar}\dot{\alpha}(t)Q = -\dot{\alpha}(t)Q. \tag{2.13}$$

Tornando ora all'operatore hamiltoniano, questo viene modificato secondo la prescrizione

$$H_A(t) = H_0 - \sum_{j=1}^n Q_j A_j(t) - \mathcal{F}\left(A_j(t), \frac{d}{dt}A_j(t), \frac{d^2}{dt^2}A_j(t), \dots\right), \tag{2.14}$$

dove la funzione $\mathcal{F}$ raccoglie eventuali termini gauge-invarianti dipendenti dalle $A_j(t)$ o dalle loro derivate che possono essere aggiunti senza modificare la dinamica del sistema.

La verifica della gauge-invarianza di questo nuovo operatore equivale a verificare che, supponendo vera $i\hbar\frac{d}{dt}\psi(t) = H_{\mathbb{A}}\psi(t)$, valga

$$i\hbar\frac{d}{dt}\psi'(t) = i\hbar\frac{d}{dt}\left(U(\mathfrak{g}(t))\psi(t)\right) \stackrel{?}{=} H_{\mathbb{A}'}\psi'(t) = (H_0 - \mathbb{A}'(t) - \mathcal{F}'(t))U(\mathfrak{g}(t))\psi(t), \tag{2.15}$$

con $\mathcal{F}'(t) = \mathcal{F}\left(A'_j(t), \frac{d}{dt}A'_j(t), \frac{d^2}{dt^2}A'_j(t), \dots\right)$.

Isolando la derivata covariante, al più corretta dal termine $\mathcal{F}(t)$ anch'esso covariante, usando che $[H_0, U(\mathfrak{g}(t))] = 0$ per definizione di simmetria della dinamica, si ricava

$$\left(i\hbar\frac{d}{dt} + \mathbb{A}'(t) + \mathcal{F}'(t)\right)U(\mathfrak{g}(t))\psi(t) \stackrel{?}{=} U(\mathfrak{g}(t))H_0\psi(t). \tag{2.16}$$

Sostituendo nell'espressione appena trovata l'Equazione 2.11 e ricordando che anche $\mathcal{F}(t)$ risulta covariante, si ha che per il primo membro vale

$$U(\mathfrak{g}(t))\left(i\hbar\frac{d}{dt} + \mathbb{A}(t) + \mathcal{F}(t)\right)U^\dagger(\mathfrak{g}(t))U(\mathfrak{g}(t))\psi(t) = U(\mathfrak{g}(t))\left(i\hbar\frac{d}{dt} + \mathbb{A}(t) + \mathcal{F}(t)\right)\psi(t). \tag{2.17}$$

Si ricostruisce a destra dell'uguale $H_\mathbb{A}$ e si osserva che

$$U(\mathfrak{g}(t))i\hbar\frac{d}{dt}\psi(t) \stackrel{?}{=} U(\mathfrak{g}(t))\left(H_0 - \mathbb{A}(t) - \mathcal{F}(t)\right)\psi(t) = U(\mathfrak{g}(t))H_\mathbb{A}\psi(t) \tag{2.18}$$

risulta vera per ipotesi, verificando la coerenza di quanto definito con l'invarianza di gauge.

2.3 Anomalie di 't Hooft

Infine, si vuole definire il concetto di *anomalia di 't Hooft*: con questa dicitura si intende l'impossibilità di promuovere a simmetria di gauge una simmetria globale senza rompere ulteriori simmetrie continue o discrete del sistema [5].

In particolare, considerando il caso in esame di un sistema con simmetria globale $\mathfrak{g}$ accoppiato ad un campo di gauge esterno $\mathbb{A}(t)$ a cui si associa la funzione di partizione $\mathcal{Z}[\beta, \mathbb{A}(t)] = \mathrm{Tr}_\mathcal{H}\left[e^{-\beta H_\mathbb{A}}\right]$, si dice che questo sia affetto da un'*anomalia di 't Hooft* se, in seguito alla trasformazione di gauge di parametro $\alpha_j(t)$ data da $\mathbb{A}(t) \mapsto \mathbb{A}'(t)$, risulta

$$\mathcal{Z}[\beta, \mathbb{A}'(t)] = \mathcal{Z}[\beta, \mathbb{A}(t)]e^{i\mathcal{A}(\mathbb{A}(t),\alpha_j(t))} \tag{2.19}$$

senza che il fattore di fase possa essere neutralizzato tramite l'aggiunta di *controtermini* locali all'operatore hamiltoniano.

Parte 3

Particella in moto su S^1

Con questa sezione si introduce l'applicazione della teoria generale descritta nella Sezione 2 ad un esempio concreto.

Si consideri una particella carica di massa m in moto su una circonferenza di raggio R unitario attorno a un solenoide con flusso θ.

La descrizione classica del sistema è data dalla Lagrangiana $\mathscr{L}_\theta$ relativa alla coordinata angolare $x \in S^1 = \frac{\mathbb{R}}{2\pi\mathbb{Z}}$ e parametrizzata da θ [6]

$$\mathscr{L}_\theta = \frac{m}{2}\dot{x}^2 + \frac{\theta}{2\pi}\dot{x}. \tag{3.1}$$

Il computo del momento p_x coniugato a x, che corrisponde ad un momento angolare,

$$p_x = \frac{\partial}{\partial \dot{x}}\mathscr{L}_\theta = m\dot{x} + \frac{\theta}{2\pi} \qquad \Longrightarrow \qquad \dot{x} = \frac{\left(p_x - \frac{\theta}{2\pi}\right)}{m} \tag{3.2}$$

consente la scrittura dell'hamiltoniana classica come

$$\mathscr{H}_\theta = \left[p_x \cdot \dot{x} - \mathscr{L}_\theta\right]\Big|_{\dot{x}=\frac{p_x - \frac{\theta}{2\pi}}{m}} = \frac{1}{2m}\left(p_x - \frac{\theta}{2\pi}\right)^2. \tag{3.3}$$

3.1 Spettro energetico del sistema

Si consideri ora una descrizione quantistica del sistema in esame. Nel corso di tutta trattazione successiva si pone $\hbar = 1$.

Si prenda lo spazio di Hilbert $\mathcal{H} = L^2(S^1)$ definito sul dominio della coordinata x. Nel formalismo operatoriale, si introducono tramite analogo classico l'operatore posizione X, l'operatore momento Π_x – associati al commutatore elementare $[X, \Pi_x] = i$ – e quello hamiltoniano H_θ, dipendente dal parametro θ, dati da

$$p_x \longleftrightarrow \Pi_x = -i\frac{\partial}{\partial x}, \tag{3.4}$$

$$\mathscr{H}_\theta \longleftrightarrow H_\theta = \frac{1}{2m}\left(\Pi_x - \frac{\theta}{2\pi}\right)^2 = \frac{1}{2m}\left(-i\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\theta}{2\pi}\right)^2 = \frac{1}{2m}\left[-\frac{\partial^2}{\partial x^2} + i\frac{\theta}{\pi}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\theta^2}{4\pi^2}\right]. \tag{3.5}$$

La periodicità del dominio spaziale del sistema porta a imporre che il dominio dell'operatore hamiltoniano H_0 sia $D_{H_0} = \left\{\psi \in \mathcal{H} = L^2(S^1) \text{ tali che } \psi(x + 2\pi) = \psi(x)\, \forall x \in S^1\right\}$.

Per trovare lo spettro di autovalori E_n di H_θ e le relative autofunzioni $\psi_n \in D_{H_0}$ si risolve l'equazione di Schrödinger indipendente dal tempo [7]

$$(-2m) \cdot H_\theta \psi = \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} - i\frac{\theta}{\pi}\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\theta^2}{4\pi^2} \right] \psi = (-2m) \cdot E\psi. \tag{3.6}$$

Ponendo $\gamma = \frac{\theta}{2\pi}$ e $\epsilon = -\frac{\theta^2}{4\pi^2} + 2mE$ e assumendo come forma generica della funzione d'onda $\psi(x) = Ae^{i\lambda x}$, ci si riconduce al polinomio in λ caratteristico $(i\lambda)^2 - 2i\gamma(i\lambda) + \epsilon = 0$ con radici

$$\lambda = \gamma \pm \sqrt{\gamma^2 + \epsilon} = \gamma \pm \sqrt{2mE}. \tag{3.7}$$

Le soluzioni dell'equazione di Schrödinger devono sottostare alla condizione $\lambda \in \mathbb{Z}$ per mantenere la periodicità di ψ in x con periodi di 2π. Si usa dunque $n = \lambda$ come indice dello spettro discreto di H_θ. Invertendo la 3.7 e normalizzando la generica soluzione ψ si ottiene

$$E_n = \frac{(n-\gamma)^2}{2m} = \frac{\left(n - \frac{\theta}{2\pi}\right)^2}{2m}, \qquad \psi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inx}. \tag{3.8}$$

Analizzando lo spettro energetico di H_θ si ricava che lo stato fondamentale del sistema risulta degenere solo nel caso $\theta = \pi$, in cui si osservano gli stati fondamentali $|0\rangle$ e $|1\rangle$ corrispondenti alla stessa energia $E_0 = E_1 = \frac{1}{8m}$.

3.2 Spectral flow

Si vuole ora studiare la periodicità dello spettro energetico in θ. Per $\theta \to \theta + 2\pi$ gli autostati di H_θ del sistema considerato subiscono uno *shift* $|n\rangle \to |n+1\rangle$ che tuttavia lascia invariante lo spettro. In questo caso si può dunque parlare di *spectral flow* [6].

Il fatto che gli hamiltoniani H_θ e $H_{\theta+2\pi}$ abbiamo lo stesso spettro, indica che questi siano legati da una trasformazione unitaria. Infatti, è possibile introdurre l'operatore unitario e^{iX} tramite la cui azione si può esprimere formalmente l'equivalenza di H_θ e $H_{\theta+2\pi}$.

Si noti, inoltre, che questo operatore risulta ben definito su $\mathcal{H}$ in quanto intrinsecamente periodico per 2π in x, al contrario dell'operatore posizione X stesso. Questa periodicità, che porta alla quantizzazione dell'operatore momento Π_x, è all'origine della quantizzazione dello spettro energetico del sistema.

Il commutatore con Π_x associato a questo nuovo operatore risulta essere $[e^{iX}, \Pi_x] = ie^{iX}[X, \Pi_x] = -e^{iX}$.

Si calcola preliminarmente l'azione di e^{iX} su Π_x come

$$e^{iX}\Pi_x e^{-iX} = [e^{iX}, \Pi_x]e^{-iX} + \Pi_x = \Pi_x - 1. \tag{3.9}$$

Sfruttando questa informazione si ottiene

$$\begin{aligned} e^{iX} H_\theta e^{-iX} &= \frac{1}{2m} \left[e^{iX}\Pi_x e^{-iX} e^{iX}\Pi_x e^{-iX} - e^{iX}\frac{\theta}{\pi}\Pi_x e^{-iX} + e^{iX}\frac{\theta^2}{4\pi^2}e^{-iX} \right] \\ &= \frac{1}{2m} \left[(\Pi_x - 1)^2 - \frac{\theta}{\pi}(\Pi_x - 1) + \frac{\theta^2}{4\pi^2} \right] \\ &= \frac{1}{2m} \left[(\Pi_x - 1) - \frac{\theta}{2\pi} \right]^2 = H_{\theta+2\pi}. \end{aligned} \tag{3.10}$$

3.3 Simmetrie della dinamica

Si procede ora con lo studio delle simmetrie del sistema. Queste possono essere tali per ciascun valore di θ o apparire solo per alcuni punti, detti per questo di *high symmetry*.

3.3.1 Simmetria $SO(2) \cong U(1)$

Per prima cosa si considera il gruppo di simmetria $U(1)$ che classicamente agisce come traslazioni a un parametro $x \to x + \alpha$. Poiché la coordinata x è coordinata angolare della circonferenza S^1, tale trasformazione equivale ad una rotazione attorno all'asse di simmetria sul piano ad esso ortogonale, azione del gruppo $SO(2)$.

Nel formalismo operatoriale, si definisce $V_\alpha = e^{-i\alpha\Pi_X}$ per $\alpha \in \frac{\mathbb{R}}{2\pi\mathbb{Z}}$ l'operatore unitario che opera la trasformazione descritta su operatori e stati nel modo seguente

$$V_\alpha e^{iX} V_{-\alpha} = e^{-i\alpha} e^{iX} \qquad V_\alpha |n\rangle = e^{-i\alpha n} |n\rangle . \tag{3.11}$$

3.3.2 Simmetria $\mathbb{Z}_2$

Consideriamo ora $\theta = 0$ e $\theta = \pi$. Per questi due valori si ha un'ulteriore simmetria di parità, associata al gruppo di simmetria $\mathbb{Z}_2$, la cui azione classicamente è $x \to -x$.

In Meccanica Quantistica, si definisce l'operatore unitario idempotente V_P:

$$V_P e^{iX} V_P = e^{-iX}. \tag{3.12}$$

Data la definizione di Π_x, l'operazione di simmetria agisce come $V_P \Pi_x V_P = V_P[-i\frac{\partial}{\partial x}]V_P = -\Pi_x$.

Ciò spiega perché questa simmetria emerga solo per $\theta = 0$ e $\theta = \pi$, infatti

$$\begin{aligned} V_P H_\theta V_P &= V_p \left[\frac{1}{2m} \left(\Pi_x - \frac{\theta}{2\pi} \right)^2 \right] V_P \\ &= \frac{1}{2m} \left(- \left(\Pi_x + \frac{\theta}{2\pi} \right) \right)^2 = \begin{cases} H_\theta & \text{se} \quad \theta = 0, \\ H_{-\theta} \sim H_\theta & \text{se} \quad \theta = \pi, \\ H_{-\theta} \not\sim H_\theta & \text{se} \quad \theta \neq 0, \pi. \end{cases} \end{aligned} \tag{3.13}$$

L'azione della simmetria di parità sugli stati dipende dal parametro di flusso considerato.

Caso $\theta = 0$: Si considera $H_0 = \frac{\Pi_x}{2m}$ con spettro $E_n^{(0)} = \frac{n^2}{2m}$. L'azione delle parità è $V_P |n\rangle = |-n\rangle$. In questo caso lo stato fondamentale rimane non degenere $V_P |0\rangle = |0\rangle$. Per gli stati ad energie superiori, coppie di ket degeneri $|\pm n\rangle$ sono connesse dall'azione della parità.

Caso $\theta = \pi$: Si considera $H_\pi = \frac{1}{2m} \left(\Pi_x - \frac{1}{2} \right)^2$ con spettro $E_n^{(\pi)} = \frac{\left(n - \frac{1}{2}\right)^2}{2m}$. Le coppie di stati degeneri in energia connesse dalla parità sono ora $V_P |n\rangle = |-n+1\rangle$. In particolare, gli stati fondamentali sono mappati uno nell'altro: $V_P |0\rangle = |1\rangle$ e $V_P |1\rangle = |0\rangle$.

3.3.3 Combinazione di traslazioni e parità

Si va ora a studiare la combinazione dell'azione delle simmetrie del sistema individuate.

Anche in questo caso, si divide la discussione per i due valori del parametro di flusso che garantiscono simmetria di parità.

<u>**Caso $\theta = 0$:**</u> Si calcola l'azione dell'operatore unitario $V_P V_\alpha V_P$ su stati e operatori:

$$V_P V_\alpha V_P |n\rangle = V_P V_\alpha |-n\rangle = e^{i\alpha n} V_P |-n\rangle = e^{i\alpha n} |n\rangle = V_{-\alpha} |n\rangle \tag{3.14}$$

$$\begin{aligned} V_P V_\alpha V_P e^{iX} \left(V_P V_\alpha V_P\right)^\dagger &= V_P V_\alpha V_P e^{iX} V_P V_{-\alpha} V_P \\ &= V_P V_\alpha e^{-iX} V_{-\alpha} V_P \\ &= V_P e^{i\alpha} e^{-iX} V_P \\ &= e^{i\alpha} e^{iX} = V_{-\alpha} e^{iX} V_\alpha. \end{aligned} \tag{3.15}$$

Si ha dunque $V_P V_\alpha V_P = V_{-\alpha}$. Da ciò è evidente che $[V_P, V_\alpha] \neq 0$. La combinazione dei gruppi di simmetria $\mathbb{Z}_2$ e $SO(2)$ è, di conseguenza, data dal semiprodotto non commutativo $O(2) \cong \mathbb{Z}_2 \ltimes SO(2)$.

<u>**Caso $\theta = \pi$:**</u> Nuovamente, si calcola l'azione dell'operatore unitario $V_P V_\alpha V_P$ su stati e operatori:

$$V_P V_\alpha V_P |n\rangle = V_P V_\alpha |-n+1\rangle = e^{-i\alpha(-n+1)} V_P |-n+1\rangle = e^{-i\alpha(-n+1)} |n-1+1\rangle = e^{-i\alpha} V_{-\alpha} |n\rangle \tag{3.16}$$

$$\begin{aligned} V_P V_\alpha V_P e^{iX} \left(V_P V_\alpha V_P\right)^\dagger &= V_P V_\alpha V_P e^{iX} V_P V_{-\alpha} V_P \\ &= V_P V_\alpha e^{-iX} V_{-\alpha} V_P \\ &= V_P e^{i\alpha} e^{-iX} V_P \\ &= e^{i\alpha} e^{iX} \\ &= e^{-i\alpha} e^{i\alpha} e^{iX} e^{i\alpha} \\ &= e^{-i\alpha} V_{-\alpha} e^{iX} V_\alpha e^{i\alpha} \\ &= e^{-i\alpha} V_{-\alpha} e^{iX} \left(e^{-i\alpha} V_{-\alpha}\right)^\dagger. \end{aligned} \tag{3.17}$$

In questo caso si osserva $V_P V_\alpha V_P = e^{-i\alpha} V_{-\alpha}$. Come da aspettative, l'azione della fase è influente solo sugli stati.

La necessità di introdurre una fase era già evidente dal fatto che i due stati fondamentali, mappati l'uno nell'altro dalla parità, avessero diversa carica sotto traslazione $U(1)$:

$$V_\alpha |0\rangle = |0\rangle \quad \text{[carica nulla: } Q = n = 0\text{]}, \qquad V_\alpha |1\rangle = e^{-i\alpha} |1\rangle \quad \text{[carica unitaria: } Q = n = 1\text{]}. \tag{3.18}$$

Si vuole ora esplicitare che ciò che si è ottenuto, tuttavia, non è la rappresentazione non proiettiva di $O(2)$ – obiettivo che al contrario era stato raggiunto nel caso $\theta = 0$ – ma una sua rappresentazione genuinamente proiettiva su $\mathcal{H}$.

Per fare ciò, si introduce un nuovo operatore I_β:

$$I_\beta |n\rangle = e^{-i\beta} |n\rangle . \tag{3.19}$$

Essendo $[I_\beta, V_P] = [I_\beta, V_\alpha] = 0$, I_β è detto *centrale*.

Si può riscrivere quanto ottenuto in precedenza come $V_P V_\alpha V_P = I_\alpha V_{-\alpha}$.

Definendo ora un unico generatore $\tilde{V}_\alpha = I_{-\frac{\alpha}{2}} V_\alpha$ con $\alpha \in [0, 4\pi)$, si ha

$$
\begin{aligned}
V_P \tilde{V}_\alpha V_P \left|n\right\rangle &= V_P I_{-\frac{\alpha}{2}} V_\alpha V_P \left|n\right\rangle \\
&= V_P I_{-\frac{\alpha}{2}} V_\alpha \left|-n+1\right\rangle \\
&= V_P I_{-\frac{\alpha}{2}} e^{-i\alpha(-n+1)} \left|-n+1\right\rangle \\
&= V_P e^{i\frac{\alpha}{2}} e^{-i\alpha(-n+1)} V_P \left|-n+1\right\rangle \\
&= e^{-i\frac{\alpha}{2}} e^{i\alpha n} \left|n\right\rangle \\
&= I_{\frac{\alpha}{2}} V_{-\alpha} \left|n\right\rangle \\
&= \tilde{V}_{-\alpha} \left|n\right\rangle .
\end{aligned}
\tag{3.20}
$$

Ciò significa che $\tilde{V}_0 = \mathbb{1}$, ma ora per ottenere nuovamente l'identità è richiesta una periodicità minima in α pari a 4π e non più a 2π, come era per V_α. Infatti, $\tilde{V}_{2\pi} = I_{-\pi} = -\mathbb{1}$. Questa necessità di ridefinire il dominio parametrico di $\tilde{V}_\alpha$ come $\alpha \in \frac{\mathbb{R}}{4\pi\mathbb{Z}}$ equivale a ottenere un doppio ricoprimento di $O(2)$. Questa intuizione può essere formalizzata tramite il concetto di *estensione centrale* [8].

Parte 4

Coupling con il campo di gauge

L'obiettivo di questa sezione è osservare cosa succede alle simmetrie del sistema accoppiandolo ad un campo classico esterno di gauge.

4.1 Accoppiamento al campo esterno di gauge

Si vuole ora trasformare la simmetria globale di traslazione $x \to x + \alpha$ in una simmetria di gauge dove il parametro α non sia più una costante continua in $\frac{\mathbb{R}}{2\pi\mathbb{Z}}$, bensì una funzione del tempo $\alpha(t)$.

4.1.1 Trattazione lagrangiana classica

Così come è stato fatto in precedenza, si riparte dall'analisi classica del sistema.

Se ne accoppia la lagrangiana ad un campo classico esterno A di gauge $U(1)$, gruppo di simmetria associato a traslazioni $x \to x + \alpha$. Si noti che $A = A(t)$ è funzione del solo tempo

$$\mathscr{L}_{\theta,k} = \frac{m}{2}\left(\dot{x} + A\right)^2 + \frac{\theta}{2\pi}\left(\dot{x} + A\right) + kA \tag{4.1}$$

con $k \in \mathbb{R}$ parametro reale. Nella versione quantistica del sistema, come verrà dimostrato nella Sezione 4.2.1, il termine A risulterà compatibile con l'invarianza di gauge se e solo se $k \in \mathbb{Z}$.

Preliminarmente, verifichiamo l'invarianza della lagrangiana sotto questa trasformazione di gauge:

$$\begin{cases} x \mapsto x + \alpha(t) \\ \dot{x} \mapsto \dot{x} + \dot{\alpha}(t) \\ A \mapsto A - \dot{\alpha}(t) \end{cases} \quad \to \quad \mathscr{L}_{\theta,k} \mapsto \mathscr{L}_{\theta,k} - k\dot{\alpha}(t) \tag{4.2}$$

Avendo aggiunto un termine di derivata totale alla lagrangiana, questa risulta invariante sotto la trasformazione.

4.1.2 Trattazione hamiltoniana quantistica

Si procede ora con il passaggio all'hamiltoniana classica tramite il computo del momento p_x. L'obiettivo è ottenere un operatore hamiltoniano modificato in modo tale che l'equazione di Schrödinger ad esso associata risulti covariante per trasformazioni di gauge traslazionale:

$$p_x = \frac{\partial \mathscr{L}_{\theta,k}}{\partial \dot{x}} = m\left(\dot{x} + A\right) + \frac{\theta}{2\pi} \qquad \Longrightarrow \qquad \dot{x} = \frac{\left(p_x - \frac{\theta}{2\pi}\right)}{m} - A, \tag{4.3}$$

$$\begin{aligned}\mathscr{H}_{\theta,k} &= [p_x \cdot \dot{x} - \mathscr{L}_\theta]\,\Big|_{\dot{x}=\frac{p_x-\frac{\theta}{2\pi}}{m}-A} \\ &= \frac{1}{2m}\left[2\left(p_x^2 - \frac{\theta}{\pi}p_x + \frac{\theta^2}{4\pi^2}\right) - \left(p_x - \frac{\theta}{2\pi}\right)^2\right] - (k+p_x)A \\ &= \frac{1}{2m}\left(p_x - \frac{\theta}{2\pi}\right)^2 - (k+p_x)A.\end{aligned} \tag{4.4}$$

Per analogo classico, è ora permesso il passaggio all'operatore hamiltoniano:

$$\mathscr{H}_{\theta,k} \longleftrightarrow H_{\theta,k} = \frac{1}{2m}\left(\Pi_x - \frac{\theta}{2\pi}\right)^2 - (\Pi_x + k)A. \tag{4.5}$$

4.2 Da simmetria globale a simmetria di gauge

Si studiano ora le proprietà di simmetria del sistema quantistico appena introdotto.

4.2.1 Verifica della covarianza di $H_{\theta,k}$

L'obiettivo di questa sezione è verificare la covarianza dell'equazione di Schrödinger associata a $H_{\theta,k}$ sotto simmetria di gauge traslazionale con campo $A(t)$ e parametro $\alpha(t)$ di gauge dipendenti dal tempo nel formalismo operatoriale.

Il generico operatore unitario $G_{\alpha(t)}$ associato a tale simmetria – che trasforma l'operatore posizione come $G_\alpha X G_\alpha^\dagger = X - \alpha$ – è $e^{-i\alpha(t)\Pi_x}e^{-if(\alpha(t))}$ con $f(\alpha)$ funzione scalare nel tempo. Si richiede, in aggiunta, che le possibili $f(\alpha(t))$ siano tali da soddisfare le condizioni tali di rappresentazione non proiettiva del gruppo di simmetria:

- $G_0 = \mathbb{1}$
- $G_\alpha G_{\alpha'} = G_{\alpha+\alpha'}$
- $G_{\alpha+2\pi} = G_\alpha$.

La seconda richiesta impone che

$$f(\alpha(t)) + f(\alpha'(t)) = f(\alpha(t) + \alpha'(t)), \tag{4.6}$$

da cui si deduce che la funzione scalare risulta lineare in $\alpha(t)$, ossia $f = k\alpha(t) + \gamma$, con k e γ parametri reali. Per soddisfare la prima richiesta, inoltre, deve essere $\gamma = 0$.

Dunque, la soluzione è data da $f(\alpha(t)) = k\alpha(t)$ tale che $k \in \mathbb{Z}$, in modo da garantire anche $e^{-i\alpha(t)\cdot(\Pi_x+k)}\big|_{\alpha(t)=2\pi} = \mathbb{1}$ per ogni t. Complessivamente, si ha $G_{\alpha(t)} = e^{-i\alpha(t)\cdot(\Pi_x+k)}$.

Si noti che gli operatori appena individuati per $k = 0$ non sono altro che gli operatori V_α su cui si è lavorato nella Sezione 3.3.1 e seguenti, mentre per $k = -\frac{1}{2}$ corrispondono ai $\tilde{V}_\alpha$ introdotti alla fine della Sezione 3.3.3.

Bisogna ora verifica che se $\psi(t)$ soddisfa l'equazione di Schrödinger per $H_{\theta,k}$ caratterizzato da campo di gauge $A(t)$, allora $\psi' = G_{\alpha(t)}\psi = e^{-i\alpha(t)\cdot(\Pi_x+k)}\psi$ soddisfa l'equazione di Schrödinger associata al campo $A'(t) = A(t) - \dot{\alpha}(t)$.

La condizione di covarianza può essere riscritta come

$$e^{-i\alpha(t)\cdot(\Pi_x+k)}\left[i\frac{\partial\psi}{\partial t} - H_{\theta,k}\psi\right] \stackrel{?}{=} \left[i\frac{\partial\psi'}{\partial t} - H'_{\theta,k}\psi'\right]. \tag{4.7}$$

Dunque, ricordando $[\Pi_x, \alpha(t)] = [\Pi_x, \theta] = 0$, $\Pi_x \cdot A(t) = 0$ e $\left[A(t), e^{-i\alpha(t)\cdot(\Pi_x+k)}\right] = 0$, si procede al calcolo:

$$\begin{aligned}
\left[i\frac{\partial\psi'}{\partial t} - H'_{\theta,k}\psi'\right] &= \left[i\frac{\partial\psi'}{\partial t} - \left[\frac{1}{2m}\left(\Pi_x - \frac{\theta}{2\pi}\right)^2 - (\Pi_x + k)(A - \dot\alpha(t))\right]\psi'\right] \qquad (4.8)\\
&= \Bigg[i(-i\dot\alpha(t)(\Pi_x + k))\left(e^{-i\alpha(t)\cdot(\Pi_x+k)}\psi\right) + ie^{-i\alpha(t)\cdot(\Pi_x+k)}\frac{\partial\psi}{\partial t} - \frac{1}{2m}\left(\Pi_x - \frac{\theta}{2\pi}\right)^2\left(e^{-i\alpha(t)\cdot(\Pi_x+k)}\psi\right)\\
&\quad + ke^{-i\alpha(t)\cdot(\Pi_x+k)}A\psi - k\dot\alpha(t)\left(e^{-i\alpha(t)\cdot(\Pi_x+k)}\psi\right) + e^{-i\alpha(t)\cdot(\Pi_x+k)}A(\Pi_x\psi) - \dot\alpha(t)\left(\Pi_x\left(e^{-i\alpha(t)\cdot(\Pi_x+k)}\psi\right)\right)\Bigg]\\
&= e^{-i\alpha(t)\cdot(\Pi_x+k)}\left[i\frac{\partial\psi}{\partial t} - \left(\frac{1}{2m}\left(\Pi_x - \frac{\theta}{2\pi}\right)^2\psi - kA\psi - A\cdot(\Pi_x\psi)\right)\right]\\
&= e^{-i\alpha(t)\cdot(\Pi_x+k)}\left[i\frac{\partial\psi}{\partial t} - H_{\theta,k}\psi\right].
\end{aligned}$$

4.2.2 Periodicità in (θ, k)

Se si prova a verificare la periodicità della lagrangiana classica $\mathscr{L}_{\theta,k}$ per $\theta \mapsto \theta + 2\pi$, questa non risulta più soddisfatta. È necessario individuare coppie di parametri $(\theta', k') \sim (\theta, k)$ modificandoli simultaneamente. Si ottiene

$$\mathscr{L}_{\theta-2\pi,k+1} = \frac{m}{2}(\dot x + A)^2 + \frac{\theta - 2\pi}{2\pi}(\dot x + A) + (k+1)A = \mathscr{L}_{\theta,k} - \dot x \sim \mathscr{L}_{\theta,k}. \qquad (4.9)$$

Analogamente, l'operatore hamiltoniano $H_{\theta,k}$ non risulta più equivalante a $H_{\theta+2\pi,k}$. Si verifica $(\theta - 2\pi, k+1) \sim (\theta, k)$ ricordando la relazione di trasformazione di Π_x tramite l'operatore e^{iX} data dall'Equazione 3.9 e esplicitando

$$\begin{aligned}
H_{\theta-2\pi,k+1} &= \frac{1}{2m}\left[\Pi_x - \frac{\theta - 2\pi}{2\pi}\right]^2 - (\Pi_x + k + 1)A\\
&= \frac{1}{2m}\left[(\Pi_x + 1) - \frac{\theta}{2\pi}\right]^2 - ((\Pi_x + 1) + k)A \qquad (4.10)\\
&= e^{-iX}H_{\theta,k}e^{iX} \sim H_{\theta,k}.
\end{aligned}$$

4.3 Simmetria di parità

Si vuole ora capire se la simmetria di parità, per il sistema originario presente nei punti di *high symmetry* $\theta = 0$ e $\theta = \pi$, caratterizzi anche il sistema accoppiato con il campo di gauge traslazionale [5].

Caso $\theta = 0$: fissato θ, la parità rimane simmetria del sistema a condizione che $k = 0$, poiché $V_P H_{0,0} V_P \sim H_{0,0}$. Infatti, dal momento che $V_P \Pi_x V_P = -\Pi_x$ e che $V_P A V_P = -A$, in quanto campo di gauge associato al gruppo di simmetria $U(1)$ delle traslazioni che trasformano per parità richiedendo un segno negativo, risulta

$$V_P H_{0,k} V_P = V_P\left[\frac{\Pi_x^2}{2m} - (\Pi_x + k)A\right]V_P = \frac{\Pi_x^2}{2m} - ((-\Pi_x) + k)(-A) = \frac{\Pi_x^2}{2m} - (\Pi_x - k)A, \qquad (4.11)$$

che consente di affermare che in presenza di un termine aggiuntivo kA per $k \neq 0$ non si ha invarianza, poiché l'unico intero uguale al suo opposto è zero.

Caso $\theta = \pi$: osservando ora l'azione dell'operatore parità sull'hamiltoniano a $\theta = \pi$, si ottiene

$$\begin{aligned} V_P H_{\pi,k} V_P &= V_P \left[\frac{1}{2m} \left(\Pi_x - \frac{1}{2} \right)^2 - (\Pi_x + k)A \right] V_P \\ &= \frac{1}{2m} \left(-\Pi_x - \frac{1}{2} \right)^2 + (-\Pi_x + k)A \\ &= \frac{1}{2m} \left(\Pi_x + \frac{1}{2} \right)^2 - (\Pi_x - k)A, \end{aligned} \tag{4.12}$$

ovvero si mappa $\theta = \pi \mapsto \theta = -\pi$ e $k \mapsto -k$. Attuando uno *shift* di 2π in θ per riportarlo al valore iniziale, anche il termine k va modificato come ricavato nella sezione precedente. Si ha dunque

$$(\pi, k) \mapsto (-\pi, -k) \sim (\pi, -k - 1). \tag{4.13}$$

La condizione da soddisfare per garantire simmetria di parità è quindi $k = -k - 1$, che però non ha soluzione per $k \in \mathbb{Z}$.

Il sistema accoppiato con il campo di gauge $U(1)$ risulta quindi non invariante per parità a $\theta = \pi$. Ciò è sintomo dell'*anomalia di 't Hooft* da cui è affetto il sistema.

Parte 5

Funzione di partizione

In questa sezione si vuole ottenere nuovamente l'emergere delle conseguenze dell'*anomalia di 't Hooft*, ma tramite un formalismo differente: quello della funzione di partizione, già introdotta come indicatrice di anomalia nella Sezione 2.3.

In Meccanica Quantistica, la funzione di partizione associata ad un sistema è definita dalla traccia sullo spazio di Hilbert $\mathcal{H}$ di un operatore dipendente dall'hamiltoniano H del sistema in funzione di un parametro β, ossia $\mathcal{Z}[\beta] = \mathrm{Tr}_{\mathcal{H}}\left[e^{-\beta H}\right]$.

5.1 Evoluzione temporale e trasformazioni di gauge

Si vuole ora guardare agli operatori hamiltoniani come dipendenti dal campo $A(t)$ di gauge; per questo, si definiscono $H_0 = \frac{1}{2m}\left(\Pi_x - \frac{\theta}{2\pi}\right)^2$ e $H_A = \frac{1}{2m}\left(\Pi_x - \frac{\theta}{2\pi}\right)^2 - (\Pi_x + k)A(t)$.

Le funzioni d'onda $|\psi(t)\rangle$ del sistema descritto dell'hamiltiano H_A soddisfano l'equazione di Schrödinger

$$i\frac{\partial}{\partial t}|\psi(t)\rangle = H_A|\psi(t)\rangle\,. \tag{5.1}$$

Come dimostrato nella sezione precedente, applicare l'operatore unitario $G_{\alpha(t)}$ associato alla simmetria di gauge con parametro $\alpha(t)$ a $|\psi(t)\rangle$ mappa la funzione d'onda in $|\psi'(t)\rangle$, soluzione dell'equazione di Schrödinger associata all'hamiltoniano $H_{A'}$ con $A'(t) = A(t) - \dot{\alpha}(t)$, ovvero

$$i\frac{\partial}{\partial t}G_{\alpha(t)}|\psi(t)\rangle = i\frac{\partial}{\partial t}|\psi'(t)\rangle = H_{A'}|\psi'(t)\rangle = H_{A'}G_{\alpha(t)}|\psi(t)\rangle\,. \tag{5.2}$$

A questo punto, si studia l'evoluzione degli stati tramite l'operatore di evoluzione temporale. H_0 è indipendente dal tempo, al contrario di H_A, che presenta invece dipendenza temporale tramite $A(t)$.

Si ha dunque l'operatore di evoluzione temporale $U_A(t, t_0)$ definito come

$$U_A(t,t_0) = \mathcal{T}e^{-i\int_{t_0}^{t} H_A(t')\,dt'} = e^{-i\left[H_0\cdot(t-t_0) - (\Pi_x+k)\int_{t_0}^{t} A(t')\,dt'\right]}, \tag{5.3}$$

con $\mathcal{T}$ operatore di *path ordering*, che è tale da soddisfare

$$i\frac{d}{dt}U_A(t,t_0) = H_A U_A(t,t_0). \tag{5.4}$$

Modificare il campo di gauge $A(t)$ corrisponde ad un cambiamento dell'operatore hamiltoniano, che a sua volta definisce un operatore di evoluzione temporale differente:

$$|\psi(t)\rangle = U_A(t,t_0)\,|\psi(t_0)\rangle\,, \qquad\qquad |\psi'(t)\rangle = U_{A'}(t,t_0)\,|\psi'(t_0)\rangle\,. \tag{5.5}$$

Ricordando che $G_{\alpha(t)}$ mappa ψ in ψ' si ha

$$G_{\alpha(t)}\,|\psi(t)\rangle = G_{\alpha(t)}U_A(t,t_0)\,|\psi(t_0)\rangle = U_{A'}(t,t_0)\,G_{\alpha(t_0)}\,|\psi(t_0)\rangle\,. \tag{5.6}$$

Dovendo questa relazione valere per ogni $\psi \in \mathcal{H} = L^2(S^1)$, si può affermare che

$$U_{A'}(t,t_0) = G_{\alpha(t)}U_A(t,t_0)\,G^\dagger_{\alpha(t_0)}. \tag{5.7}$$

Osservando l'espressione della funzione di partizione $\mathcal{Z}[\beta] = \mathrm{Tr}_{\mathcal{H}}\left[e^{-\beta H}\right]$, si riesce ad apprezzare una analogia tra l'operatore $e^{-\beta H}$ e quello di evoluzione temporale definito per operatori hamiltoniani indipendenti dal tempo come e^{-iHt}, e per il caso specifico in esame nell'Equazione 5.3.

Nasce quindi l'idea di estendere analiticamente il dominio nel tempo di $U(t,t_0)$, implicitamente assunto come $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, a $\mathbb{C}\times\mathbb{C}$ definendo le variabili $\tau = it$ e $\tau_0 = it_0$, con $t,\ t_0 \in i\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ e $\tau, \tau_0 \in \mathbb{R}$.

Tale prolungamento analitico, generalmente chiamato *euclideo*, risulta essere definito per H_0 come

$$\tilde{U}_0(\tau,\tau_0) = U_0\left(\frac{\tau}{i},\frac{\tau_0}{i}\right) = e^{-iH_0\cdot\left(\frac{\tau}{i}-\frac{\tau_0}{i}\right)} = e^{-H_0\cdot(\tau-\tau_0)}, \tag{5.8}$$

che soddisfa

$$\frac{d}{d\tau}\tilde{U}_0(\tau,\tau_0) = -H_0\tilde{U}_0(\tau,\tau_0) = -\tilde{H}_0\tilde{U}_0(\tau,\tau_0), \tag{5.9}$$

dove la seconda uguaglianza è dovuta all'indipendenza dell'hamiltoniano dal tempo. Si cerca ora di estendere quanto trovato alla generica H_A.

Si definisce $\tilde{A}(\tau)$ in modo tale che $\tilde{A}(\tau)d\tau = A(t)dt$ e l'operatore di evoluzione temporale *euclideo*, ossia associato alla nuova variabile reale τ, come

$$\begin{aligned}\tilde{U}_{\tilde{A}}(\tau,\tau_0) &= U_A\left(\frac{\tau}{i},\frac{\tau_0}{i}\right)\\ &= e^{-i\left[H_0\cdot\left(\frac{\tau}{i}-\frac{\tau_0}{i}\right)-(\Pi_x+k)\int_{\frac{\tau_0}{i}}^{\frac{\tau}{i}}A(t')\,dt'\right]}\\ &= e^{-\left[H_0\cdot(\tau-\tau_0)-i(\Pi_x+k)\int_{\tau_0}^{\tau}\tilde{A}(\tau')\,d\tau'\right]}\\ &= \mathcal{T}e^{-\int_{\tau_0}^{\tau}\tilde{H}_{\tilde{A}}(\tau')\,d\tau'},\end{aligned} \tag{5.10}$$

con $\tilde{H}_{\tilde{A}} = \frac{1}{2m}\left(\Pi_x - \frac{\theta}{2\pi}\right)^2 - i(\Pi_x+k)\tilde{A}(\tau)$.

Coerentemente con quanto imposto, si può inoltre concludere che

$$A(t) = i\tilde{A}(\tau) \quad \text{con} \quad t \in i\mathbb{R}\subset\mathbb{C} \text{ e } \tau = it \in \mathbb{R}. \tag{5.11}$$

Si noti che l'operatore $\tilde{U}_{\tilde{A}}$ in generale non è unitario, come d'altronde ci si aspettava in quanto analogo a $e^{-\beta H}$.

Analogamente al caso di tempo reale, l'operatore di evoluzione temporale soddisfa l'equazione

$$\frac{d}{d\tau}\tilde{U}_{\tilde{A}}(\tau,\tau_0) = -\tilde{H}_{\tilde{A}}\tilde{U}_{\tilde{A}}(\tau,\tau_0). \tag{5.12}$$

La scrittura dell'Equazione 5.12 si può interpretare come un'evoluzione temporale euclidea analoga al caso di tempo reale, sebbene non unitaria e, dunque, tale da non preservare il modulo delle funzioni d'onda, ma anzi contrarlo.

Nel nuovo parametro temporale $\tau \in \mathbb{R}$ possono ora essere riscritti stati e operatori:

$$|\tilde{\psi}(\tau)\rangle = \tilde{U}_{\tilde{A}}(\tau,\tau_0)\,|\tilde{\psi}(\tau_0)\rangle\,, \qquad\qquad |\tilde{\psi}'(\tau)\rangle = \tilde{U}_{\tilde{A}'}(\tau,\tau_0)\,|\tilde{\psi}'(\tau_0)\rangle\,. \tag{5.13}$$

Ripercorrendo quanto già ottenuto per il caso di tempo reale, si trova la trasformazione di $\tilde{U}_{\tilde{A}}$ sotto trasformazione di gauge relativa alla simmetria $U(1)$. Nel nuovo parametro temporale del sistema, l'operatore unitario $\tilde{G}_{\alpha(\tau)} = e^{-i\alpha(\tau)(\Pi_x+k)}$, estensione del precedente a dominio temporale in t immaginario, mappa ancora $\tilde{\psi}$ in $\tilde{\psi}'$ e si ha

$$\tilde{G}_{\alpha(\tau)}\,|\tilde{\psi}(\tau)\rangle = \tilde{G}_{\alpha(\tau)}\tilde{U}_{\tilde{A}}(\tau,\tau_0)\,|\tilde{\psi}(\tau_0)\rangle = \tilde{U}_{\tilde{A}'}(\tau,\tau_0)\,\tilde{G}_{\alpha(\tau_0)}\,|\tilde{\psi}(\tau_0)\rangle\,. \tag{5.14}$$

Dovendo questa relazione valere per ogni $\tilde{\psi} \in \mathcal{H} = L^2(S^1)$, si può concludere

$$\tilde{U}_{\tilde{A}'}(\tau,\tau_0) = \tilde{G}_{\alpha(\tau)}\tilde{U}_{\tilde{A}}(\tau,\tau_0)\,\tilde{G}^{\dagger}{}_{\alpha(\tau_0)}. \tag{5.15}$$

5.1.1 Funzione di partizione e invarianza di gauge

Nel caso in esame, considerando l'hamiltoniano di partenza H_0, si può scrivere la relativa funzione di partizione $\mathcal{Z}[\beta]$ come

$$\mathcal{Z}_0[\beta] = \mathrm{Tr}_{\mathcal{H}}\left[e^{-\beta H_0}\right] = \mathrm{Tr}_{\mathcal{H}}\left[e^{-H_0(\tau_0+\beta-\tau_0)}\right] = \mathrm{Tr}_{\mathcal{H}}\left[\tilde{U}_0(\tau_0+\beta,\tau_0)\right]. \tag{5.16}$$

L'obiettivo è ora la generalizzazione a sistemi accoppiati con il campo di gauge $\tilde{A}(\tau)$. Definita la funzione di partizione di tali sistemi con $\mathcal{Z}[\beta,\tilde{A}(\tau)]$, questa dipende non solo dal parametro β ma anche dal campo di gauge $\tilde{A}(\tau)$, dunque

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}[\beta,\tilde{A}(\tau)] &= \mathrm{Tr}_{\mathcal{H}}\left[\tilde{U}_{\tilde{A}}(\tau_0+\beta,\tau_0)\right]\\ &= \mathrm{Tr}_{\mathcal{H}}\left[e^{-\beta H_0 + i\int_{\tau_0}^{\tau_0+\beta}\tilde{A}(\tau)d\tau(\Pi_x+k)}\right]\\ &= \mathrm{Tr}_{\mathcal{H}}\left[e^{-\beta H_0 + i\mu(\Pi_x+k)}\right],\end{aligned} \tag{5.17}$$

dove si è introdotta la nuova grandezza $\mu = \int_{\tau_0}^{\tau_0+\beta}\tilde{A}(\tau)d\tau$, potenziale chimico associato alla simmetria $U(1)$ del sistema. Si noti che la funzione di partizione risulta invariante per $\mu \mapsto \mu+2\pi$ per le proprietà dell'operatore di simmetria $U(1)$ imposte all'inizio della Sezione 4.2.1.

Si considerino ora trasformazioni di gauge tali che $\tilde{A}'(\tau) = \tilde{A}(\tau) - \frac{d\alpha(\tau)}{d\tau}$. Anche per l'hamiltoniana associata al campo $\tilde{A}'(\tau)$ trasformato vale la definizione della funzione di partizione proposta in precedenza. Combinandola con il risultato trovato nell'Equazione 5.15 e per ciclicità della traccia, si può ricavare

$$
\begin{aligned}
\mathcal{Z}[\beta, \tilde{A}(\tau)] &= \mathrm{Tr}_{\mathcal{H}}\left[\tilde{U}_{\tilde{A}'}(\tau_0+\beta, \tau_0)\right] \\
&= \mathrm{Tr}_{\mathcal{H}}\left[\tilde{G}_{\alpha(\tau_0+\beta)}\tilde{U}_{\tilde{A}}(\tau_0+\beta, \tau_0)\,\tilde{G^{\dagger}}_{\alpha(\tau_0)}\right] \\
&= \mathrm{Tr}_{\mathcal{H}}\left[\tilde{U}_{\tilde{A}}(\tau_0+\beta, \tau_0)\,\tilde{G^{\dagger}}_{\alpha(\tau_0)}\tilde{G}_{\alpha(\tau_0+\beta)}\right].
\end{aligned}
\tag{5.18}
$$

Guardando alla definizione di potenziale chimico e alla condizione di invarianza $\mu \mapsto \mu + 2\pi$ si possono estrapolare informazioni sulla periodicità di $\alpha(\tau)$, infatti

$$
\mu' = \int_{\tau_0}^{\tau_0+\beta} \tilde{A}'(\tau)d\tau = \int_{\tau_0}^{\tau_0+\beta}\left[\tilde{A}(\tau) - \frac{d\alpha(\tau)}{d\tau}\right]d\tau = \mu - [\alpha(\tau_0+\beta) - \alpha(\tau_0)],
\tag{5.19}
$$

che risulta invariante per $\alpha(\tau_0+\beta) - \alpha(\tau_0) = 2n\pi$ con $n \in \mathbb{Z}$.

Ciò equivale a imporre che il tempo *euclideo* τ sia periodico con periodo β, fatto che ridà la periodicità della trasformazione di gauge associata al parametro $\alpha(\tau)$ considerando $\alpha(\tau_0+\beta) = \alpha(\tau_0)+2n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$. Dunque si ha

$$
\tilde{G}_{\alpha(\tau_0+\beta)} = e^{-i\alpha(\tau_0+\beta)(\Pi_x+k)} = e^{-i(\alpha(\tau_0)+2n\pi)(\Pi_x+k)} = e^{-i\alpha(\tau_0)(\Pi_x+k)} = \tilde{G}_{\alpha(\tau_0)},
\tag{5.20}
$$

dove la penultima uguaglianza vale per le condizioni di rappresentazione non proiettiva imposte all'inizio della Sezione 4.2.1.

Per concludere, sfruttando il risultando dell'Equazione 5.20 e per ciclicità della traccia, si può ottenere l'invarianza della funzione di partizione per trasformazioni di gauge nelle condizioni di rappresentazione non proiettiva del gruppo di simmetria $U(1)$ traslazionale, più volte sfruttate durante questa trattazione:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{Z}[\beta, \tilde{A}'(\tau)] &= \mathrm{Tr}_{\mathcal{H}}\left[\tilde{G}_{\alpha(\tau_0+\beta)}\tilde{U}_{\tilde{A}}(\tau_0+\beta, \tau_0)\,\tilde{G^{\dagger}}_{\alpha(\tau_0)}\right] \\
&= \mathrm{Tr}_{\mathcal{H}}\left[\tilde{G}_{\alpha(\tau_0)}\tilde{U}_{\tilde{A}}(\tau_0+\beta, \tau_0)\,\tilde{G^{\dagger}}_{\alpha(\tau_0)}\right] \\
&= \mathrm{Tr}_{\mathcal{H}}\left[\tilde{U}_{\tilde{A}}(\tau_0+\beta, \tau_0)\,\tilde{G^{\dagger}}_{\alpha(\tau_0)}\tilde{G}_{\alpha(\tau_0)}\right] \\
&= \mathrm{Tr}_{\mathcal{H}}\left[\tilde{U}_{\tilde{A}}(\tau_0+\beta, \tau_0)\right] \\
&= \mathcal{Z}[\beta, \tilde{A}(\tau)].
\end{aligned}
\tag{5.21}
$$

5.2 Funzione di partizione e parità

La domanda a cui si vuole ora rispondere è se la funzione di partizione risulta invariante anche per simmetria di parità [6]. Dai risultati della sezione precedente ci si aspetta che ciò non sia verificato, a causa dell'*anomalia di 't Hooft*, nel punto di *high simmetry* $\theta = \pi$.

La simmetria di parità dà $\tilde{A} \mapsto -\tilde{A}$. Si cerca dunque di calcolare $\mathcal{Z}[\beta, -\tilde{A}(\tau)]$ per cercarne la relazione con $\mathcal{Z}[\beta, \tilde{A}(\tau)] = \mathrm{Tr}_{\mathcal{H}}\left[e^{-\beta H_0 + i\mu(\Pi_x+k)}\right] = \mathcal{Z}[\beta, \mu]$, dove nell'ultimo passaggio si è scelto di rendere la dipendenza da $\tilde{A}(\tau)$ implicita in quella da μ. Si ha

$$
\begin{aligned}
\mathcal{Z}[\beta, -\tilde{A}(\tau)] &= \mathrm{Tr}_{\mathcal{H}}\left[\tilde{U}_{-\tilde{A}}(\tau_0+\beta,\tau_0)\right] \\
&= \mathrm{Tr}_{\mathcal{H}}\left[e^{-\beta H_0 + i\int_{\tau_0}^{\tau_0+\beta}(-\tilde{A}(\tau))d\tau(\Pi_x+k)}\right] \\
&= \mathrm{Tr}_{\mathcal{H}}\left[e^{-\beta H_0 - i\mu(\Pi_x+k)}\right] \\
&= \mathcal{Z}[\beta,-\mu].
\end{aligned} \tag{5.22}
$$

Quindi la simmetria di parità agisce sulla funzione di partizione mappando $\mu \mapsto -\mu$.

Ricordando che $\langle x|n\rangle = \psi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{inx}$, si calcola la funzione di partizione del sistema come

$$
\begin{aligned}
\mathcal{Z}[\beta, \pm\tilde{A}(\tau)] &= \mathcal{Z}[\beta,\pm\mu] \\
&= \mathrm{Tr}\left[e^{-\beta H_0 \pm i\mu(\Pi_x+k)}\right] \\
&= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \langle n| e^{-\beta H_0 \pm i\mu(\Pi_x+k)} |n\rangle \\
&= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \langle n| e^{-\beta E_n \pm i\mu(n+k)} |n\rangle \\
&= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[e^{-\beta\left[\frac{\left(n-\frac{\theta}{2\pi}\right)^2}{2m}\right] \pm i\mu(n+k)} \right].
\end{aligned} \tag{5.23}
$$

5.2.1 Funzione di partizione per $\theta = 0$

Si consideri il caso $\theta = 0$. Risulta

$$
\mathcal{Z}[\beta,\pm\mu]\big|_{\theta=0} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left[e^{-\beta\left[\frac{\left(n-\frac{\theta}{2\pi}\right)^2}{2m}\right] \pm i\mu(n+k)} \right]\Big|_{\theta=0} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left[e^{-\beta\left[\frac{n^2}{2m}\right]\pm i\mu(n+k)}\right]. \tag{5.24}
$$

Per evitare la perdita di simmetria di parità nel caso $\theta = 0$ risulta sufficiente imporre $k = 0$, per cui $\mathcal{Z}[\beta,\mu] = \mathcal{Z}[\beta,-\mu]$. Ciò accade poiché gli stati $|\pm n\rangle$ risultano essere a coppie degeneri, mappati l'uno nell'altro dalla simmetria di parità – come ricavato nella Sezione 3.3.2 – e danno ugual contributo alla funzione di partizione. In questo punto non si verifica, quindi, la presenza di un'*anomalia di 't Hooft*, come già riscontrato nelle sezione precedenti.

Si poteva dedurre il medesimo risultato anche solo limitandosi a $\mathcal{Z}_{\text{fond}}$, ossia alla traccia operata sull'unico stato fondamentale $|0\rangle$ tale che $E_0 = 0$:

$$
\mathcal{Z}_{\text{fond}}[\beta,\pm\mu]\big|_{\theta=0} = \langle 0| e^{-\beta H_0 \pm i\mu(\Pi_x+k)} |0\rangle\big|_{\theta=0} = \langle 0| e^{-\beta E_0 \pm i\mu(0+k)} |0\rangle\big|_{\theta=0} = e^{\pm i\mu k}. \tag{5.25}
$$

5.2.2 Funzione di partizione per $\theta = \pi$

Si passa ora al caso $\theta = \pi$. La funzione di partizione del sistema risulta essere

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z}[\beta, \pm\mu]\big|_{\theta=\pi} &= \mathrm{Tr}\left[e^{-\beta H_0 \pm i\mu(\Pi_x+k)}\right]\Big|_{\theta=\pi} \\
&= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \langle n|\, e^{-\beta H_0 \pm i\mu(\Pi_x+k)}\, |n\rangle \,\Big|_{\theta=\pi} \\
&= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \langle n|\, e^{-\beta E_n \pm i\mu(n+k)}\, |n\rangle \,\Big|_{\theta=\pi} \\
&= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[e^{-\beta\left[\frac{\left(n-\frac{1}{2}\right)^2}{2m}\right] \pm i\mu(n+k)} \right].
\end{aligned} \tag{5.26}$$

La simmetria di parità mappa $|n\rangle \mapsto |-n+1\rangle$, come osservato nella Sezione 3.3.2. Si prova dunque a calcolare $\mathcal{Z}'[\beta, \mu]$ in seguito a tale trasformazione di simmetria; rinominando $n \mapsto -n+1$ nella sommatoria si ottiene:

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z}'[\beta, \mu]\big|_{\theta=\pi} &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[e^{-\beta\left[\frac{\left(-n+1-\frac{1}{2}\right)^2}{2m}\right] + i\mu(-n+1+k)} \right] \\
&= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[e^{-\beta\left[\frac{\left(n-\frac{1}{2}\right)^2}{2m}\right] - i\mu(n+k)} e^{i\mu(2k+1)} \right] \\
&= e^{i\mu(2k+1)} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[e^{-\beta\left[\frac{\left(n-\frac{1}{2}\right)^2}{2m}\right] - i\mu(n+k)} \right] \\
&= e^{i\mu(2k+1)} \mathcal{Z}[\beta, -\mu]\big|_{\theta=\pi}.
\end{aligned} \tag{5.27}$$

In questo caso, per ottenere $\mathcal{Z}'[\beta, \mu]\big|_{\theta=\pi} = \mathcal{Z}[\beta, -\mu]\big|_{\theta=\pi}$, sarebbe necessario imporre $k = -\frac{1}{2}$. Con questa scelta, tuttavia, si induce la rottura della invarianza per $\mu \mapsto \mu + 2\pi$, e quindi dell'invarianza di gauge per $\alpha(\tau)$ con $\alpha(\tau_0 + \beta) = \alpha(\tau_0) + 2n\pi$, poiché, in riferimento all'Equazione 5.20, si ha

$$\tilde{G}_{\alpha(\tau_0+\beta)}\big|_{k=-\frac{1}{2}} = e^{-i(\alpha(\tau_0)+2n\pi)\left(\Pi_x-\frac{1}{2}\right)} = e^{-i\alpha(\tau_0)\left(\Pi_x-\frac{1}{2}\right)} e^{-i2n\pi\left(\Pi_x-\frac{1}{2}\right)} = (-1)^n \tilde{G}_{\alpha(\tau_0)}\big|_{k=-\frac{1}{2}}. \tag{5.28}$$

Questo risultato rende evidente la presenza di un'*anomalia di 't Hooft* per $\theta = \pi$, come da aspettative. In conclusione, non è possibile che la funzione di partizione sia invariante sotto trasformazioni di simmetria del gruppo $O(2)$. La scelta di un $k \in \mathbb{Z}$ consente l'invarianza di gauge del sistema accoppiato al campo di gauge associato al gruppo $U(1)$, rompendo tuttavia la simmetria di parità. Al contrario, si può scegliere di mantenere quest'ultima con $k = -\frac{1}{2}$, ma come conseguenza si ha la perdita di invarianza di gauge traslazionale $U(1)$ e l'introduzione di una fase proiettiva nella rappresentazione del gruppo. Questo rende inapplicabile quanto discusso nella Sezione 5.1.1, e in particolare l'invarianza della funzione di partizione ottenuta nell'Equazione 5.21, dove ora $\tilde{G}^\dagger_{\alpha(\tau_0)}\tilde{G}_{\alpha(\tau_0+\beta)} \neq \mathbb{1}$, essendo invece uguali a un fattore di fase.

Parte 6

Conclusioni

Lo studio del semplice modello di una particella in moto su una circonferenza attorno a un solenoide attraversato da flusso θ ha consentito di ripercorrere quanto discusso nella trattazione generale e di osservare la presenza di un'*anomalia di 't Hooft* che caratterizza il sistema nel caso $\theta = \pi$.

Questa è stata individuata dapprima mediante lo studio dell'azione combinata di operatori di simmetria traslazionale $U(1)$ e di parità $\mathbb{Z}_2$ su stati e operatori, e successivamente tramite il calcolo della funzione di partizione del sistema.

Riassumendo, per valore del flusso fissato a $\theta = 0$ non si ha un'*anomalia di 't Hooft* poiché il sistema risulta invariante rispetto al semiprodotto non commutativo $O(2) \cong \mathbb{Z}_2 \ltimes SO(2)$ come trovato nella Sezione 3.3.3 e ammette rappresentazione non proiettiva di $U(1)$, sottogruppo di cui viene effettuato il *gauging* e per cui si ha invarianza di gauge, pur preservando la simmetria di parità della funzione di partizione per $k = 0$, come ricavato nella Sezione 5.2.1.

Per $\theta = \pi$, invece, l'*anomalia di 't Hooft* impedisce l'invarianza del sistema sotto trasformazioni del gruppo $O(2)$, richiedendo al contrario un doppio ricoprimento di tale gruppo, ossia una una sua rappresentazione genuinamente proiettiva, come descritto nella Sezione 3.3.3, implementato tramite l'introduzione degli operatori $\tilde{V}_\alpha$. Questi ultimi corrispondono alla scelta di $k = -\frac{1}{2}$ necessaria per mantenere l'invarianza per parità della funzione di partizione calcolata nella Sezione 5.2.2, che tuttavia contraddice le ipotesi di non proiettività della rappresentazione del gruppo $U(1)$ e rompe l'invarianza di gauge del sistema accoppiato con il campo esterno di gauge traslazionale.

Si è dunque mostrato come in presenza di un'*anomalia di 't Hooft* vada operata una scelta: o si decide di rimuovere i fattori di fase dalla fuzione di partizione al fine di preservare la simmetria discreta di parità, ma ciò induce una contraddizione rispetto alle ipotesi di non proiettività della rappresentazione del gruppo di simmetria traslazionale e una rottura della simmetria di gauge, oppure si impone quest'ultima, perdendo simmetria di parità.

Bibliografia

[1] D. Martin. «E. P. Wigner, Group Theory and its Application to the Quantum Mechanics of Atomic Spectra, (Academic Press Inc., New York, 1959), J. J. griffin, ix 372 pp.,80s.» In: *Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society* 12.1 (1960), pp. 67–67. DOI: 10.1017/S0013091500025220.

[2] Kantaro Ohmori. «Quantum Anomalies as Projective Phases». In: (2022). URL: https://kantohm11.github.io/symmetry_review/.

[3] Franco Strocchi. *Symmetry Breaking*. Springer Berlin, Heidelberg, 2021, pp. 121–124. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-662-62166-0.

[4] Marco Abate e Francesca Tovena. *Geometria Differenziale*. Springer Milano, 2011, p. 96. DOI: https://doi.org/10.1007/978-88-470-1920-1.

[5] Yuta Kikuchi e Yuya Tanizaki. «Global inconsistency, 't Hooft anomaly, and level crossing in quantum mechanics». In: *Progress of Theoretical and Experimental Physics* 2017.11 (nov. 2017). DOI: 10.1093/ptep/ptx148. URL: https://doi.org/10.1093%2Fptep%2Fptx148.

[6] David Tong. *Gauge Theory*. 2018, pp. 178–183. URL: https://www.damtp.cam.ac.uk/user/tong/gaugetheory.html.

[7] David J. Griffiths e Darrell F. Schroeter. *Introduction to Quantum Mechanics*. 3ª ed. Cambridge University Press, 2018. DOI: 10.1017/9781316995433.

[8] Davide Gaiotto et al. «Theta, time reversal and temperature». In: *Journal of High Energy Physics* 2017.5 (mag. 2017). DOI: 10.1007/jhep05(2017)091. URL: https://doi.org/10.1007%2Fjhep05%282017%29091.