



UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

DIPARTIMENTO DI FISICA E ASTRONOMIA
CORSO DI LAUREA IN FISICA

Il principio di entropia in fluidodinamica classica e relativistica

Laureando:
Daniele SCHIAVI

Relatore:
Prof. Roberto TUROLLA
Corelatori:
Prof. Tommaso RUGGERI
Prof. Franco CARDIN

Anno accademico 2013/2014

Indice

Introduzione	1
1 Termodinamica ordinaria ed estesa	3
1.1 Termodinamica dei processi irreversibili	3
1.1.1 Termodinamica dei processi irreversibili	4
1.1.2 Paradosso della conduzione del calore	5
1.1.3 L'equazione di Cattaneo	6
1.2 Termodinamica Estesa	7
1.2.1 Teoria cinetica dei gas monoatomici	7
2 Trattazione classica	11
2.1 Sistema iperbolico	11
2.1.1 Iperbolicità dell'equazione di Cattaneo	12
2.2 Onde d'urto	13
2.2.1 Equazione di Burgers	13
2.2.2 Soluzioni deboli	14
2.2.3 Equazione di Rankine-Hugoniot	15
2.3 Crescenza dell'entropia	17
2.3.1 Il problema di Riemann in gasdinamica	17
2.3.2 Condizione di Lax	18
2.4 Simmetrizzazione delle equazioni di bilancio	19
3 Trattazione relativistica	21
3.1 Sistema iperbolico	21
3.2 Simmetrizzazione delle equazioni di bilancio	22
3.2.1 Condizioni di Friedrichs	22
3.2.2 Condizione di simmetrizzabilità	24
3.3 Teoria dei momenti	26
3.3.1 Leggi di bilancio	26
3.3.2 Funzioni di stato	27
3.4 Gas in non-equilibrio	27

3.4.1	Caso non degenere	28
3.4.2	Caso degenere	28
	Bibliografia	29

Introduzione

La prima definizione del concetto di entropia risale a Clausius: “Il calore non può passare spontaneamente da un corpo più freddo ad uno più caldo”. Nelle teoria classica della termodinamica dei processi irreversibili il principio di entropia caratterizzava i processi irreversibili. L'importanza del principio di entropia è fondamentale per lo studio dei processi termodinamici, infatti il secondo principio dell'entropia afferma infatti che in un sistema isolato l'entropia del sistema non può diminuire, questo implica una direzione privilegiata nel tempo.

Il ruolo dell'entropia non si ferma solo a questo. Già nella termodinamica ordinaria viene utilizzata la disuguaglianza di Clausius-Duhem per delimitare la classe delle equazioni costitutive fisicamente accettabili.

Però la termodinamica ordinaria presenta i suoi limiti; le tipiche equazioni costitutive sono quelle di Fourier e di Navier-Stokes, che presentano il problema di fornire equazioni differenziali paraboliche, inoltre nella termodinamica dei processi irreversibili i risultati risultano insoddisfacenti quando si hanno discontinuità o variazioni molto rapide, tipiche dei gas rarefatti.

Una prima soluzione viene proposta da Cattaneo, che introduce nell'equazioni di Fourier un tempo di rilassamento rendendo l'equazione del calore da parabolica a iperbolica, quindi la velocità di propagazione passa da essere infinita a finita. L'equazione di Cattaneo è un modello estremamente semplificato, le approssimazioni usate infatti valgono solo per conduttori rigidi di calore e per materiali con tempi di rilassamento molto piccoli.

Per sovvenire a questi problemi nasce la termodinamica estesa, questa sostituisce le equazioni classiche della termodinamica con leggi di bilancio, inoltre permette di spiegare fenomeni fisici come onde d'urto.

La termodinamica estesa ricava grandezze macroscopiche partendo dai momenti della distribuzione di fase. Quindi partendo da un approccio cinetico, nella quale la distribuzione soddisfa l'equazione del trasporto di Boltzmann, si ottengono delle equazioni del bilancio macroscopiche.

Infatti la termodinamica estesa ha un regime di validità molto ampio; se la termodinamica ordinaria vale per numeri di Knudsen (numero che indica quanto il fluido sia rarefatto) molto piccoli e la teoria cinetica per numeri molto grandi (gas molto rarefatti), la termodinamica estesa si inserisce in un contesto in cui si tenta di unificare i due approcci, inoltre si giunge alle stesse conclusioni già ottenute utilizzando questi due metodi, ad esempio attraverso la teoria dei 13 momenti si ottengono gli stessi risultati a cui era già arrivato Grad con la teoria cinetica.

Partendo dalla teoria cinetica dei gas, si riesce a definire la quantità entropia e utilizzando l'equazione di Boltzmann si giunge alla formulazione del teorema H. Nella termodinamica estesa il teorema H non si riesce ad ottenere come nel caso precedente, ma viene preso come assioma che deve essere soddisfatto dalle equazioni costitutive; questa legge aggiuntiva viene imposta in quanto permette la chiusura del sistema delle equazioni di bilancio.

Nel caso delle onde d'urto il principio di entropia ricopre un altro ruolo fondamentale. Ad esempio il problema di Riemann: questo problema di fluidodinamica molto importante in cui il fluido viene mantenuto in due differenti stati d'equilibrio. È noto che nel caso di sistemi iperbolici di leggi di conservazioni, le soluzioni deboli non sono uniche. Il principio di entropia permette di selezionare i processi fisicamente accettabili.

L'unicità grazie al principio di entropia non è garantita solo per le soluzioni deboli. Si dimostra che un sistema compatibile con un principio di entropia con una densità di entropia convessa può essere scritta come un sistema simmetrico rispetto a un campo privilegiato. È stato dimostrato da Friedrichs che in questo caso il problema di Cauchy è ben posto.

Analogamente si dimostra che questo accade nel caso relativistico. Una delle motivazioni per cui si è cercato di iperbolizzare le equazioni della termodinamica, nasce dal fatto che in relatività viene proibita l'interazione a distanza.

Nel caso relativistico si ha il problema che la densità di entropia non è uno scalare, ma una delle componenti del vettore di flusso di entropia. Esiste una quantità legata ad essa ed è formata dalla contrazione del flusso di entropia con una congruenza di tipo tempo privilegiata. Questo ci permette di avere un sistema simmetrico iperbolico e, di conseguenza, viene garantito che il problema di Cauchy è ben posto.

In molti casi questa congruenza coincide con la densità di entropia, come ad esempio nel limite non relativistico, ma in generale il significato fisico di questa quantità è sconosciuto.

Capitolo 1

Termodinamica ordinaria ed estesa

1.1 Termodinamica dei processi irreversibili

Lo stato termodinamico viene descritto attraverso 5 *variabili di campo*:

$$\begin{array}{ll} \text{densit  di massa} & \rho(\mathbf{x}, t) \\ \text{velocit } & \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \\ \text{temperatura} & T(\mathbf{x}, t) \end{array} \quad (1.1)$$

quindi un obiettivo della termodinamica ordinaria   la determinazione di questi 5 campi per ogni punto del fluido e per tutti i tempi.

Per questo motivo si devono avere delle equazioni di campo, dette *leggi di bilancio*; queste si riconducono a le usuali leggi di conservazioni:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho v_j) &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial t}(\rho v_i) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho v_i v_j - t_{ij}) &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} \left(\rho \varepsilon + \frac{\rho v^2}{2} \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\left(\rho \varepsilon + \frac{\rho v^2}{2} \right) v_j - t_{ij} v_i + q_j \right) &= 0 \end{aligned} \quad (1.2)$$

Queste sono rispettivamente conservazione della massa, del momento, dell'energia.

Qua sorge il problema che queste equazioni non sono equazioni per i campi (1.1). Infatti si osserva che T non appare nelle (1.2), che contengono nuove quantit :

$$\begin{array}{ll}
\text{tensore (simmetrico) degli sforzi} & t_{ij} \\
\text{flusso di calore} & q_i \\
\text{energia interna specifica} & \varepsilon
\end{array} \quad (1.3)$$

ove $t_{ij} = -(p + \Pi)\delta_{ij} + S_{\langle ij \rangle}$, mentre p e Π sono rispettivamente la pressione di equilibrio e dinamica, e $S_{\langle ij \rangle}$ è il tensore degli sforzi viscosi.

Per chiudere il sistema si deve quindi trovare una relazione fra le quantità (1.3), dette *quantità costitutive*, e i campi (1.1). Le quantità costitutive e le variabili di campo sono legate dalle cosiddette *relazioni costitutive*.

1.1.1 Termodinamica dei processi irreversibili

Si considera il fluido in equilibrio termodinamico locale (LTE), ossia che, anche se il sistema non è in equilibrio globale (GTE), per ogni punto esiste un qualche intorno in cui è in equilibrio.

In quell'intorno vale la seguente:

$$TdS = d\varepsilon - \frac{p}{\rho^2}d\rho \quad (1.4)$$

che può essere riscritta come:

$$\dot{s} = \frac{1}{T} \left(\dot{\varepsilon} - \frac{p}{\rho^2} \dot{\rho} \right) \quad (1.5)$$

ove s è l'entropia specifica e p è la pressione statica. Le variabili ε e p sono da considerare come funzioni di ρ e T tramite l'equazione di stato termica $p = p(\rho, T)$ e calorica $\varepsilon = \varepsilon(\rho, T)$.

Usando (1.2) e (1.5) otteniamo l'*equazione di bilancio dell'entropia*

$$\frac{\partial \rho s}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\rho s v_i + \frac{q_i}{T} \right) = -\frac{q_i}{T^2} \frac{\partial T}{\partial x_i} + \frac{1}{T} S_{\langle ij \rangle} \frac{\partial v_{\langle i}}{\partial x_{j \rangle}} + \frac{1}{T} \Pi \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \quad (1.6)$$

La (1.6) può essere vista come legge di bilancio dell'entropia in quanto vengono definite le seguenti grandezze:

$$\varphi_i = \frac{q_i}{T} \quad \text{flusso di entropia} \quad (1.7)$$

$$\Sigma = -\frac{q_i}{T^2} \frac{\partial T}{\partial x_i} + \frac{1}{T} S_{\langle ij \rangle} \frac{\partial v_{\langle i}}{\partial x_{j \rangle}} + \frac{1}{T} \Pi \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \quad \text{produzione di entropia} \quad (1.8)$$

La produzione di entropia non deve essere negativa.

La Σ nella TIP può essere vista come prodotto fra *flussi termodinamici* e *forze termodinamiche*:

Flussi termodinamici	Forze termodinamiche
flusso di calore q_i	gradiente di temperatura $\frac{\partial T}{\partial x_i}$
tensore deviatorico degli sforzi $S_{\langle ij \rangle}$	grad. di velocità deviatorico $\frac{\partial v_{\langle i}}{\partial x_{j \rangle}}$
pressione dinamica $\Pi = \frac{1}{3}t_{ii} + p$	divergenza delle velocità $\frac{\partial v_n}{\partial x_n}$

L'ipotesi che viene formulata dalla TIP è fra queste quantità vi siano relazioni lineari in maniera che la Σ sia una forma quadratica positiva. Con questa assunzione si ha che le equazioni costitutive sono della forma:

$$q_i = -\kappa \frac{\partial T}{\partial x_i} \quad \kappa \geq 0 \quad (1.9)$$

$$S_{\langle ij \rangle} = 2\mu \frac{\partial v_{\langle i}}{\partial x_{j \rangle}} \quad \mu \geq 0 \quad (1.10)$$

$$\pi = \lambda \frac{\partial v_n}{\partial x_n} \quad \lambda \geq 0 \quad (1.11)$$

questo ci basta per garantire la positività della Σ . Inoltre aggiungendo le equazioni di stato termiche e caloriche si ottengono tutte le equazioni costitutive e queste chiudono le equazioni dei campi.

Introducendo l'energia libera di Gibbs $\psi = e - TS$ e utilizzando la (1.4) si ha che le si ottengono delle relazioni fra S, p, ε e ρ .

$$p = \rho^2 \frac{\partial \psi}{\partial \rho} \quad S = -\frac{\partial \psi}{\partial T} \quad e = \psi - T \frac{\partial \psi}{\partial T} \quad (1.12)$$

Quindi il principio di entropia permette di definire la funzione libera ψ , dipendente da ρ e T e permette di ricavare le funzioni costitutive $S(\rho, T), p(\rho, T)$ e $e(\rho, T)$.

Le equazioni qui sopra riportate sono più comunemente note come equazione di Fourier (1.9), mentre le (1.10) e (1.11) sono le equazioni di Navier-Stokes. I coefficienti κ, μ, λ sono la *conducibilità termica*, *shear viscosity* e *bulk viscosity*.

1.1.2 Paradosso della conduzione del calore

Qua sorgono i primi problemi della TIP, in quanto la velocità di propagazione della perturbazione è infinita.

Questo è dovuto principalmente al fatto che le equazioni dei campi della TIP sono di forma parabolica.

Si supponga, per esempio, di avere un fluido stazionario. Le equazioni di campo (1.2), utilizzando l'equazione calorica, si riducono a:

$$\rho \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial T} \right) \frac{\partial T}{\partial t} - \kappa \nabla^2 T = 0$$

oppure equivalentemente:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\kappa}{\rho \varepsilon_T} \nabla^2 T \quad (1.13)$$

ove $\varepsilon = \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial T} \right)_\rho$ è il calore specifico a volume costante, che è una quantità positiva.

Questa equazione è nota comunemente come *equazione di diffusione*.

Si può scrivere la soluzione di (1.13) per un dato iniziale $T(\mathbf{x}, 0)$ come:

$$T(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{(4\pi Dt)^{3/2}} \int_{-\infty}^{\infty} T(\mathbf{y}, 0) \exp\left(-\frac{\mathbf{y} - \mathbf{x}}{4Dt}\right) \quad (1.14)$$

dove $D = \kappa/\rho\varepsilon_T$.

Si può osservare che la (1.14) è non nulla per tutti le \mathbf{x} e i tempi positivi, anche se il dato iniziale è non nullo in un intervallo limitato (un ragionamento analogo lo si può fare per la velocità). Questo presuppone che la temperatura e la velocità si propagano a velocità infinita infatti sono non nulle anche fuori dal supporto del dato iniziale.

1.1.3 L'equazione di Cattaneo

Una prima soluzione al problema della conduzione del calore è stata fornita da Cattaneo.

Si suppone che il flusso di calore q_i non dipenda solo dal gradiente della temperatura, ma anche dal gradiente della derivata temporale. Infatti Cattaneo osservò che quando un corpo, o fluido, non si trova in equilibrio la temperatura cambia in funzione del tempo; quindi Cattaneo aggiunse un termine che considera anche la variazione temporale della temperatura.

$$q_i = -\kappa \left(\frac{\partial T}{\partial x_i} - \tau \frac{\partial \dot{T}}{\partial x_i} \right) \quad (1.15)$$

Il τ nella (1.15) viene detto *tempo di rilassamento*. Anche questa equazione non va bene in quanto, anch'essa non è iperbolica e quindi prevede velocità di propagazione infinita.

Cattaneo apportò ulteriori modifiche all'equazione. Supponendo che il tempo di rilassamento fosse molto piccolo, allora si può invertire l'operatore:

$$\left(1 - \tau \frac{d}{dt} \right)^{-1} \approx 1 + \tau \frac{d}{dt} \quad (1.16)$$

In questa approssimazione la (1.15) diventa:

$$q_i + \tau \dot{q}_i = -\kappa \frac{\partial T}{\partial x_i} \quad (1.17)$$

L'ultima equazione è detta *equazione di Cattaneo*.

Utilizzando l'ultima delle equazioni (1.2) con la (1.17), otteniamo l'equazione dei telegrafisti:

$$\tau \ddot{T} + \dot{T} = \frac{\kappa}{\rho \varepsilon_T} \Delta T \quad (1.18)$$

Questa equazione, se $\tau > 0$, è di tipo iperbolico e predice la propagazione del calore a una velocità finita:

$$V = \pm \sqrt{\frac{\kappa}{\rho \varepsilon_T \tau}} \quad (1.19)$$

Questa equazione presenta due grandi problemi. Il primo di questi è che vale solo in degl'intorni di uno stato stazionario, infatti perché le ipotesi dell'equazione di Cattaneo siano soddisfatte bisogna che sia τ , sia d/dt siano molto piccoli; ma il regime di validità non è molto preciso in quanto se $\tau \rightarrow 0$ la (1.15), si riconduce all'equazione di Fourier stazionaria.

Il secondo problema è che la (1.17) non è invariante sotto cambio di sistema di riferimento, sotto trasformazioni galileane.

Inoltre l'equazione di Cattaneo è una semplificazione eccessiva del modello fisico ed inoltre il modello è applicabile quasi esclusivamente ai conduttori rigidi.

1.2 Termodinamica Estesa

Nella teoria della ET si parte dalla descrizione microscopica dei gas; ad ogni momento si associa una grandezza termodinamica macroscopica che saranno legate alla funzione di distribuzione microscopica, in quanto saranno i momenti di quest'ultima.

1.2.1 Teoria cinetica dei gas monoatomici

La teoria cinetica ci descrive lo stato di un gas a partire dalla sua densità di fase o funzione di distribuzione $f(\mathbf{x}, \mathbf{c}, t)$, tale che:

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{c}, t) d\mathbf{c} \quad (1.20)$$

che è la densità di particelle nel punto \mathbf{x} e al tempo t tale che abbiamo velocità compresa fra \mathbf{c} e $\mathbf{c} + d\mathbf{c}$.

La funzione di distribuzione deve soddisfare l'equazione del trasporto Boltzmann:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + c_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = Q \quad (1.21)$$

dove Q rappresenta il termine di collisione fra gli atomi (e sarà funzione dei valori della densità di fase prima e dopo l'urto). In questa equazione non sono presenti eventuali forze esterne che agiscono sul nostro sistema, anche se l'aggiunta di queste non cambierebbe.

Le grandezze termodinamiche macroscopiche si possono ricavare prendendo i vari momenti della f . Un momento n -esimo ha la seguente forma:

$$F_{k_1, k_2, \dots, k_n} = \int f c_{k_1} c_{k_2} \dots c_{k_n} \mathbf{d}\mathbf{c} \quad (1.22)$$

Ad esempio, data la (1.22) che il momento zero è uguale, se si moltiplica per la massa, a ρ ; l'integrale, infatti, è fatto solo sulle velocità dello spazio delle fasi.

Il primo momento moltiplicata per la massa del gas darà la densità di momento $F_i = \rho v_i$, v_i è la velocità media delle particelle secondo la nostra distribuzione .

Data la (1.21) si ha che i vari momenti soddisfano una gerarchia infinita di equazioni di bilancio in cui il flusso di un equazione diventa la densità in quella successiva:

$$\begin{aligned} \partial_t F + \partial_i F_i &= 0 \\ \partial_t F_i + \partial_i F_{ik_1} &= 0 \\ \partial_t F_{k_1 k_2} + \partial_i F_{ik_1 k_2} &= P_{k_1 k_2} \\ \partial_t F_{k_1 k_2 k_3} + \partial_i F_{ik_1 k_2 k_3} &= P_{k_1 k_2 k_3} \\ &\vdots \\ \partial_t F_{k_1 k_2 \dots k_n} + \partial_i F_{ik_1 k_2 k_3 \dots k_n} &= P_{k_1 k_2 k_3 \dots k_n} \\ &\vdots \end{aligned} \quad (1.23)$$

Le prime quattro equazioni rappresentano la conservazione della massa e del momento, mentre nella traccia della terza si ritrova la legge di bilancio dell'energia interna. Si nota che tutte le equazione che seguono le prime quattro sono tutte leggi di bilancio e, inoltre, abbiamo che ogni equazione aumenta il suo indice tensoriale di uno.

L'idea della termodinamica estesa è di utilizzare come quantità costitutive l'ultimo flusso e le produzioni:

$$\begin{aligned} F_{k_1 \dots k_n k_{n+1}} &\equiv F_{k_1 \dots k_n k_{n+1}} (F, F_{k_1}, F_{k_1 k_2}, \dots, F_{k_1 k_2 \dots k_n}) \\ P_{k_1 \dots k_n k_{n+1}} &\equiv P_{k_1 \dots k_n k_{n+1}} (F, F_{k_1}, F_{k_1 k_2}, \dots, F_{k_1 k_2 \dots k_n}) \quad 2 \leq j \leq n \end{aligned}$$

Le equazioni costitutive dovranno sottostare a due assiomi:

- Principio di relatività: le equazioni costitutive sono covarianti.
- Secondo principio della termodinamica: ogni soluzione del sistema di equazioni deve soddisfare la disuguaglianza di Clausius-Duhem:

$$\frac{\partial \rho S}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\rho S v_i + \frac{q_i}{T} \right) \geq 0 \quad \text{per ogni processo} \quad (1.24)$$

Il principio di entropia viene formulato anche nella teoria cinetica dei gas infatti introducendo i seguenti momenti:

$$\rho S = \int (-k \log f) f d\mathbf{c} \quad \text{e} \quad \phi_i = \int (-k \log f) f c_i d\mathbf{c} \quad (1.25)$$

ove k è la costante di Boltzmann. Abbiamo così il teorema H:

$$\frac{\partial \rho S}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x^i} (\rho S v_i + \phi_i) \geq 0 \quad (1.26)$$

dove è stato generalizzato il flusso di entropia, che generalmente è diverso da q_i/T .

Infatti il flusso di entropia è il primo momento dell'entropia, come si vede dalla (1.25), mentre il flusso di calore che compare in (1.24), in quanto nella descrizione cinetica questa è uguale a $q_i = \frac{1}{2} F_{ijj}$.

Il vantaggio di questa definizione è che non ha bisogno di una definizione a priori della temperatura, che discende naturalmente dalla equazione di Gibbs $TdS = d\varepsilon - p/\rho^2 d\rho$. Infatti, il concetto di temperatura non appare né nelle equazioni costitutive né nel nuovo principio entropico.

Capitolo 2

Trattazione classica

2.1 Sistema iperbolico

Si è osservato nel precedente capitolo come il paradosso della conduzione del calore era dovuto alla velocità infinita della propagazione dell'informazione. Il paradosso nasce da una questione puramente matematica, in quanto le equazioni (1.13) erano PDE paraboliche.

Il sistema di leggi di bilancio (1.23), può essere riscritta, troncata all' n -esima equazione, in forma più compatta:

$$\partial_\alpha \mathbf{F}^\alpha(\mathbf{u}) = \mathbf{f}(\mathbf{u}) \quad (2.1)$$

si indica con \mathbf{u} il vettore dei campi incogniti, quindi questa notazione è proprio le equazioni costitutive.

La precedente equazione può essere riscritta nella seguente forma equivalente:

$$\mathbf{A}^\alpha \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x^\alpha} = \mathbf{f}(\mathbf{u}) \quad (2.2)$$

ove \mathbf{A}^α sono delle matrici $N \times N$ e corrispondono a:

$$\mathbf{A}^\alpha = \frac{\partial \mathbf{F}^\alpha}{\partial \mathbf{u}} \quad (2.3)$$

Un sistema come il (2.2) viene detto in generale sistema *quasi-lineare*, se le matrici \mathbf{A}^α sono costanti è detto *semi-lineare*; inoltre se la funzione $\mathbf{f}(\mathbf{u})$ è lineare nel campo, allora il sistema è *lineare*.

Definizione 2.1.1 (Sistema iperbolico). Un sistema del tipo (2.2) è detto *iperbolico* nella direzione temporale t se soddisfa le seguenti proprietà:

- a. $\det A^0 \neq 0$

b. il problema agli autovalori:

$$(\mathbf{A}^i n_i - \lambda \mathbf{A}^0) \mathbf{d} = 0 \quad (2.4)$$

$\forall n_i \in \mathbb{R}^3$ tale che $\|n\| = 1$, ammette solo autovalori reali e gli autovalori \mathbf{d} formano una base completa dello spazio vettoriale a N dimensioni. Gli autovalori vengono detti *velocità caratteristiche*.

Se il sistema è lineare o semi-lineare le velocità caratteristiche sono costanti, mentre nel caso quasi-lineare dipendono dal campo \mathbf{u} .

Fisicamente le λ rappresentano le velocità dei fronti d'onda con cui si propaga il segnale; il fatto che la matrice \mathbf{A}^0 non sia singolare ci garantisce che il segnale si propaghi con velocità finita, infatti se il $\det \mathbf{A}^0 = 0$ vi è almeno un autovalore tende ad infinito (accade nel caso di PDE parabolica).

Definizione 2.1.2 (Sistema conservativo). Un sistema *iperbolico* è detto conservativo se:

$$\mathbf{A}^\alpha = \frac{\partial \mathbf{F}^\alpha}{\partial \mathbf{u}} \quad (2.5)$$

Nel caso presentato precedentemente il sistema (2.2) è conservativo. Infatti un sistema conservativo esibisce una forma come quella in (2.1).

2.1.1 Iperbolicità dell'equazione di Cattaneo

Si può dimostrare attraverso gli strumenti qui sopra presentati, che il sistema costituito dalla (1.17) e la (1.2) è iperbolico.

Si prenda il caso in cui la densità sia costante e il corpo sia a riposo, allora si ha che il sistema è:

$$\begin{cases} \rho \varepsilon_T \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial q_i}{\partial x_i} = r \\ \tau \frac{\partial q_i}{\partial t} + \kappa \frac{\partial T}{\partial x_i} = -q_i \end{cases} \quad (2.6)$$

Come campo di queste equazioni si ha $\mathbf{u} \equiv (T, q_i)$, quindi possono essere messe nella forma (2.2) con

$$\mathbf{A}^0 = \rho \varepsilon_T \mathbf{e}_{00} + \tau \mathbf{e}_{ii} \quad \mathbf{A}^i = \mathbf{e}_{0i} + \tau \mathbf{e}_{i0} \quad (2.7)$$

Ora si può risolvere il problema agli autovalori (2.4) e si osserva che si hanno due casi:

- a. L'autovalore $\lambda = 0$ ha molteplicità due e i due autovettori corrispondenti $\mathbf{d}_{1,2} = (0, \mathbf{w}_{1,2})$ sono ortogonali. Si osserva che non trasporta variazioni di temperature e, dato che $d_{1,2} \cdot \mathbf{n} = 0$, la variazione del flusso di calore è solo lungo il piano ortogonale. A questi autovalori corrispondono delle onde trasversali.

- b. Gli altri due autovalori $\lambda = \pm \sqrt{\frac{\kappa}{\rho \varepsilon_T \tau}}$ a questi due autovalori corrispondono delle onde termiche. Ci si può ricondurre al sistema parabolico nel caso in cui $\tau \rightarrow 0$ e $\lambda \rightarrow \infty$, ritornando al caso di velocità delle onde termiche infinita.

2.2 Onde d'urto

Passando da equazioni di tipo parabolico al tipo iperbolico, si è risolto il problema della velocità di propagazione delle onde. Inoltre con la teoria della ET si risolvono anche i problemi legati alla formulazione di Cattaneo: il sistema (1.23) è invariante sotto trasformazioni galileiane.

La teoria presenta comunque dei problemi, nonostante le equazioni iperboliche prevedano velocità finite, nel caso in cui il sistema sia quasi-lineare la soluzione può sviluppare discontinuità in tempi finiti, inoltre può anche perdere l'unicità.

2.2.1 Equazione di Burgers

La modellizzazione più semplice di un sistema iperbolico non-lineare è l'equazione di Burgers; si prenda il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} u_t + uu_x = 0 \\ u(x, 0) = u_0(x) \end{cases} \quad (2.8)$$

L'unico autovalore dell'equazione è $\lambda = u$. Possiamo definire la caratteristica del sistema:

$$\frac{dx}{dt} = \lambda = u(x, t) \quad (2.9)$$

Dalla (2.8) si ha che u rimane costante lungo le curve caratteristica \mathcal{C} :

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \lambda \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (2.10)$$

Allora il valore di u è pari al valore iniziale della caratteristica \mathcal{C} a $t = 0$, $u(x, t) = u_0(x_0)$; le curve caratteristiche di questo problema sono delle rette della forma $x = x_0 + u_0(x_0)t$.

Se il dato iniziale del problema non è costante le caratteristiche si incontreranno in un punto dello spazio-tempo; se poniamo che $u_0(x_1) \neq u_0(x_2)$, allora le due curve caratteristiche si incontreranno infatti le due rette non sono parallele. In questo punto viene a mancare l'unicità della soluzione.

Il più piccolo tempo, nel futuro, per cui si perde l'unicità della soluzione è detto *tempo critico*.

Prima del tempo critico abbiamo una *soluzione classica* della (2.8), dopodiché la soluzione non è più differenziale e si ha la formazione di un' *onda d'urto* che è una classe di *soluzione debole*.

Per il calcolo del tempo critico nel caso dell'equazione di Burgers basta vedere dove perdiamo l'invertibilità della curva caratteristica, in cui perdiamo l'unicità del problema, si perde infatti l'iniettività. La condizione perché questo avvenga è che $dx/dx_0 = 0$:

$$t_c(x_0) = -\frac{1}{u'(x_0)} \quad (2.11)$$

Questo è il tempo critico per ogni dato iniziale, quindi sarà sia nel passato sia nel futuro; ma il tempo critico fisico sarà il più piccolo di questi valori nel futuro:

$$t_c = \inf_{x_0} \{t_c(x_0) > 0\} \quad (2.12)$$

2.2.2 Soluzioni deboli

In generale le equazioni di continuità non presentano soluzioni di tipo classico e bisogna introdurre il concetto di soluzione integrale, o debole.

Bisogna introdurre il concetto di derivata debole che può essere definita anche per le funzioni $L^1(\Omega)$.

Definizione 2.2.1. Derivata debole Sia $V \in L^1(\Omega)$ e sia $v \in \mathbf{R}^d$ allora si dice che la derivata lungo v , $\partial_v F$, esiste debolmente in $L^1(\Omega)$ se esiste una funzione $F \in L^1(\Omega)$ tale che:

$$\int_{\Omega} \phi \partial_v F \, d\Omega = - \int_{\Omega} F \partial_v \phi \, d\Omega \quad \forall \phi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega) \quad (2.13)$$

ove $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ è lo spazio delle funzioni di test (\mathcal{C}^∞ a supporto compatto su Ω).

Nel caso del sistema delle equazioni di bilancio (2.1) si utilizza il concetto di derivata debole per definire le soluzioni integrali del problema.

Moltiplicando (2.1) per una funzione di test $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ e integrando nel dominio Ω .

$$\int_{\Omega} \phi \partial_\alpha \mathbf{F}^\alpha \, d\Omega = \int_{\Omega} \partial_\alpha (\phi \mathbf{F}^\alpha) \, d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{F}^\alpha \partial_\alpha \phi \, d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{f} \phi \, d\Omega \quad (2.14)$$

Applicando il teorema di Gauss della divergenza su $\int_{\Omega} \partial_\alpha (\phi \mathbf{F}^\alpha) \, d\Omega = \int_{\partial\Omega} n^\alpha (\phi \mathbf{F}^\alpha) \, d\Sigma$, o si ottiene un integrale sul bordo $\partial\Omega$ che è nullo in quanto ϕ è a supporto compatto su Ω .

Quindi otteniamo:

$$\int_{\Omega} \mathbf{F}^\alpha \partial_\alpha \phi \, d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{f} \phi \, d\Omega = 0 \quad (2.15)$$

Definizione 2.2.2. Soluzione debole Si dice che una soluzione di (2.1) è debole se è soluzione di per ogni $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$.

Osservazione 2.2.1. Ogni soluzione classica è debole, ma non è vero il viceversa.

2.2.3 Equazione di Rankine-Hugoniot

Preso un sistema di leggi di bilancio tali che esista una superficie regolare Γ di versore normale \mathbf{n} con velocità s che separa due semipiani in cui esistono soluzioni continue del sistema \mathbf{u}_0 e \mathbf{u}_1 , tali che il loro limiti sulla superficie non coincidono. La coppia $(\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_1)$ rappresenta un'onda d'urto e di identifica con il suo fronte d'onda Γ . Il fronte d'onda Γ è parametrizzato come $\varphi = \varphi(t, \mathbf{x})$ e si indica con le parentesi quadre il salto:

$$[\mathbf{u}] = \mathbf{u}_1|_{\varphi^-} - \mathbf{u}_0|_{\varphi^+} \quad (2.16)$$

Se la coppia $(\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_1)$ è una soluzione debole allora devono soddisfare le equazioni di Rankine-Hugoniot.

Lemma 2.2.1. *Affinché un'onda d'urto sia soluzione debole occorre che la componente normale di \mathbf{F}^α sia continua sul fronte d'onda; ossia deve soddisfare le equazioni di Rankine-Hugoniot:*

$$[\mathbf{F}^\alpha] \varphi_\alpha = 0 \quad (2.17)$$

ove la φ^α è la normale al fronte d'onda.

Dimostrazione. Si consideri una superficie Γ con normale φ_α mobile nel dominio Ω e lo divide in due sottodomini Ω^+ e Ω^- di frontiera Σ^+ e Σ^- .

Si applichi la (2.14) in ognuno dei sottodomini e si applichi il teorema di Gauss. Si ha:

$$\int_{\Sigma^\pm \cup \Gamma^\pm} \varphi_\alpha^\pm \phi \mathbf{F}_\pm^\alpha d\Sigma - \int_{\Omega^\pm} \mathbf{F}_\pm^\alpha \partial_\alpha \phi + \mathbf{f}_\pm \phi d\Omega^\pm = 0 \quad (2.18)$$

Poiché ϕ è a supporto compatto l'unica parte non nulla dell'integrale sul bordo è la parte estesa a Γ^\pm . Quindi si può scrivere:

$$\int_{\Gamma^\pm} \varphi_\alpha^\pm \phi \mathbf{F}_\pm^\alpha d\Gamma^\pm - \int_{\Omega^\pm} \mathbf{F}_\pm^\alpha \partial_\alpha \phi + \mathbf{f}_\pm \phi d\Omega^\pm = 0 \quad (2.19)$$

Sommando i due integrali:

$$\int_{\Gamma^+} \varphi_\alpha^+ \phi \mathbf{F}_+^\alpha d\Gamma^+ + \int_{\Gamma^-} \varphi_\alpha^- \phi \mathbf{F}_-^\alpha d\Gamma^- - \int_{\Omega} \mathbf{F}^\alpha \partial_\alpha \phi + \mathbf{f}_\pm \phi d\Omega = 0 \quad (2.20)$$

Ora la soluzione cercata deve essere debole, quindi soddisfa la (2.15), allora l'ultima parte dell'integrale è nulla. Si osservi che $\varphi_\alpha^+ = \varphi_\alpha$ e che $\varphi_\alpha^- = -\varphi_\alpha$ e l'integrale può essere riscritto come:

$$\int_{\Gamma} \varphi_\alpha [\mathbf{F}^\alpha] \phi d\Gamma = 0 \quad (2.21)$$

Poiché l'integrale deve annullarsi per qualsiasi sia la superficie, deve vale che:

$$[\mathbf{F}^\alpha] \varphi_\alpha = 0 \quad (2.22)$$

□

Osservazione 2.2.2. Per scrivere le equazioni di Rankine-Hugoniot, si può utilizzare una regola tra gli operatori:

$$\partial_t \rightarrow -s[\cdot] \quad \partial_i \rightarrow n_i[\cdot] \quad \mathbf{f} \rightarrow 0 \quad (2.23)$$

ove $\varphi_0 = -s$ e $\varphi_i = n_i$.

Fluido di Eulero

Si supponga di avere un fluido inviscido, e in questo specifico caso ideale, allora le equazioni di Navier-Stokes si presentano in una forma più semplificata dette equazioni di Eulero.

In questo caso si vuole analizzare non solo le soluzioni classiche, ma anche quelle deboli, per cui si richiede che le equazioni soddisfino il criterio di Rankine-Hugoniot.

Le equazioni possono essere riscritte nella seguente maniera:

$$\begin{aligned} -s[\rho] + [\rho v_n] &= 0 \\ -s[\rho v_i] + [\rho v_n v_i + p n_i] &= 0 \\ -s\left[\rho \frac{v^2}{2} + \rho e\right] + \left[\left(\rho \frac{v^2}{2} + \rho e + p\right) v_n\right] &= 0 \end{aligned} \quad (2.24)$$

ove $v_n = v_i n^i$.

A partire dal campo imperturbato $(\rho_0, \mathbf{v}_0, p_0)$, s e n_i , le (2.24) equazioni permettono di determinare il campo perturbato (ρ, \mathbf{v}, p) . Per comodità vengono introdotti il numero di Mach e la velocità adiabatica del suono imperturbati, inoltre viene usato il volume specifico al posto della densità $V = 1/\rho$:

$$M_0 = \frac{s - v_n}{c_0} \quad c_0 = \sqrt{\gamma \frac{p_0}{\rho_0}} \quad (2.25)$$

Si ottiene risolvendo le (2.24) (esclusa la soluzione banale $p = p_0$):

$$p = p_0 + \frac{2\gamma}{\gamma + 1} p_0 (M_0^2 - 1) \quad (2.26)$$

$$V = V_0 - \frac{2}{\gamma + 1} p_0 \frac{M_0^2 - 1}{M_0^2} \quad (2.27)$$

Da queste due equazioni si ottiene la condizione:

$$\frac{[p]}{[V]} = -c_0^2 \frac{M_0^2}{V_0^2} \leq 0 \quad (2.28)$$

Qui abbiamo due soluzioni matematicamente accettabili:

- a. $[p] > 0$ e $[V] < 0$, allora si ha $M_0^2 > 1$

b. $[p] < 0$ e $[V] > 0$, allora si ha $M_0^2 < 1$

Le due soluzioni, non sono accettabili dal punto di vista fisico, bisogna infatti usare il principio di crescita dell'entropia per la selezione di processi fisicamente ammissibili. Come si è visto precedentemente nel caso delle soluzioni classiche il principio di entropia permette di selezionare le equazioni costitutive (1.9)-(1.11), in quanto le soluzioni devono soddisfare il secondo principio della termodinamica, quindi ogni soluzione classica soddisfa automaticamente la legge di bilancio dell'entropia.

Nel caso delle soluzioni deboli, invece, l'entropia ci permette di chiudere il sistema di equazione, infatti, se si sostituisce, come si potrebbe fare nel caso di soluzioni classiche, l'equazione di bilancio dell'energia con l'equazione di bilancio dell'entropia avremmo soluzioni deboli diverse.

2.3 Crescenza dell'entropia

Nell'esempio precedente avevamo due soluzioni matematicamente corrette. Per osservare quale delle due è fisicamente accettabile bisogna vedere quale delle due soddisfa il principio di entropia.

La soluzione deve soddisfare la disuguaglianza di Clausius-Duhem (in questo caso si suppone nullo il flusso di entropia, in quanto in un fluido ideale la conducibilità termica è nulla (quindi $q_i = 0$), l'equazione di Rankine-Hugoniot associata all'equazione è:¹

$$\eta = s [\rho S] - [\rho S v_n] = [\rho(s - v_n)S] \quad (2.29)$$

$$= \rho_0(s - v_{0n}) [S] = \rho_0 c_0 M_0 [S] \quad (2.30)$$

$$= \rho_0 c_0 c_V M_0 \log \left(\left(\frac{2 + M_0^2(\gamma - 1)}{M_0^2(\gamma + 1)} \right)^\gamma \frac{2M_0^2\gamma + 1 - \gamma}{1 + \gamma} \right) \quad (2.31)$$

La produzione di entropia η risulta positiva solo se $M_0^2 > 1$, quindi fisicamente risulta che la pressione aumenti dopo il passaggio dell'onda d'urto, mentre il volume diminuisca (*onda di compressione*).

2.3.1 Il problema di Riemann in gasdinamica

Come detto precedentemente le soluzioni deboli non sono uniche nel caso di sistemi iperbolici di leggi di conservazioni. Un esempio banale di ciò è il problema di Riemann nel caso dell'equazione di Burgers

$$u_t + \left(\frac{u^2}{2} \right)_x = 0 \quad u(x, 0) = \begin{cases} u_0 & \text{per } x > 0 \\ u_1 & \text{per } x < 0 \end{cases} \quad (2.32)$$

¹la variazione di entropia nel caso di un fluido comprimibile perfetto $S = c_V \log(p/p^\gamma) + S_0$

Le due soluzioni deboli di questo problema sono:

$$u(x, t) = \begin{cases} u_0 & \text{per } x > st \\ u_1 & \text{per } x < st \end{cases} \quad s = \frac{1}{2}(u_0 + u_1) \quad \text{Onda d'urto} \quad (2.33)$$

$$u(x, t) = \begin{cases} u_1 & \text{per } x < u_1 t \\ \frac{x}{t} & \text{per } u_1 t \leq x \leq u_0 t \\ u_0 & \text{per } x > u_1 t \end{cases} \quad \text{Onda di rarefazione} \quad (2.34)$$

La (2.34) è una soluzione classica al problema (2.32) quindi anche una soluzione debole.

2.3.2 Condizione di Lax

Per la selezione delle soluzione fisicamente

Lemma 2.3.1 (Condizione di Lax). *L'urto è stabile e la soluzione è un'onda d'urto se:*

$$\lambda(u_0) < s < \lambda(u_1) \quad (2.35)$$

Se invece $\lambda(u_1) < \lambda(u_0)$ le soluzioni sono rarefazioni.

Le λ sono le velocità caratteristiche del sistema, nel caso dell'equazione omogenea di Burgers $\lambda = u$. La condizione di Lax si dimostra essere equivalente al principio di crescita di entropia.

Prendiamo per esempio come la seguente legge di entropia:

$$\left(\frac{u^2}{2}\right)_t + \left(\frac{u^3}{3}\right)_x \geq 0 \quad (2.36)$$

si vede che ogni soluzione classica risolve la con un'equaglianza, mentre la condizione di crescita dell'entropia lungo all'urto corrisponde alle condizioni di Lax.

Le condizioni di Lax possono essere generalizzate per un qualsiasi sistema di equazioni di conservazioni dotate di una densità convessa di entropia.

$$\partial_\alpha F^\alpha = 0 \quad \partial_\alpha h^\alpha = \Sigma \leq 0 \quad (2.37)$$

(l'entropia è presa con un cambio di segno).

Definizione 2.3.1 (Onda genuinamente non lineare). Dato un autovalore $\lambda(\mathbf{u})$ associato all'autovalore \mathbf{d} si dice che l'onda è genuinamente non lineare se:

$$\nabla \lambda(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{d}(\mathbf{u}) \neq 0 \quad \forall \mathbf{u} \quad (2.38)$$

ove $\nabla = \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}}$.

Definizione 2.3.2 (Onda eccezionale). L'onda è eccezionale se:

$$\nabla\lambda(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{d}(\mathbf{u}) \equiv 0 \quad \forall \mathbf{u} \quad (2.39)$$

Lemma 2.3.2 (Condizioni di Lax Generalizzate). *Gli urti sono fisicamente accettabili²:*

- se l'onda è genuinamente non lineare, $\lambda(\mathbf{u}_0) < s < \lambda(\mathbf{u}_1) \iff \eta > 0$ e si ha un urto
- se l'onda è eccezionale, $\lambda(\mathbf{u}_0) = s = \lambda(\mathbf{u}_1) \iff \eta = 0$ e si ha un urto caratteristico

nel caso in cui $\lambda(\mathbf{u}_1) < \lambda(\mathbf{u}_0)$ si ha un'onda di rarefazione.

Nel caso delle equazioni di Eulero si aveva che una famiglia di urti caratteristici che viaggiavano con velocità normale uguale a quella delle particelle ed è la soluzione banale in cui $v_{0n} = v_n = s$ e $p = p_0$, mentre dipende da tre parametri arbitrari, questo processo è isoentropico e quindi dal punto di vista termodinamico corrisponde ad un processo reversibile. Questi urti sono detti *materiali* o *di contatto*.

2.4 Simmetrizzazione delle equazioni di bilancio

Il principio di entropia serve non solo per la selezione dei processi ammissibili nel caso di soluzioni deboli o per la selezione delle equazioni costitutive accettabili, ma permette di trovare un *campo privilegiato* in cui il sistema (2.1) è simmetrico.

Definizione 2.4.1. Sistema simmetrico Un sistema quasi-lineare è detto simmetrico se la matrice (2.3) è simmetrica.

Da questa definizione si deduce banalmente che ogni sistema simmetrico è anche iperbolico, ma non è vero il viceversa.

Ora prendiamo un sistema del tipo (2.1) dotato di una legge di entropia. Ora possiamo riscrivere il sistema con una legge di bilancio supplementare.

$$\partial_\alpha \begin{pmatrix} \mathbf{F}(\mathbf{u})^\alpha \\ h^\alpha(\mathbf{u}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{f}(\mathbf{u}) \\ \Sigma(\mathbf{u}) \end{pmatrix} \quad (2.40)$$

Chiamano il vettore a sinistra \mathbf{q}^α e il vettore a destra \mathbf{p} . Supponendo che il nostro campo $\mathbf{u} \in \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^N$, aperto connesso, allora abbiamo che il sistema ha N equazioni di bilancio indipendente, mentre una è supplementare, quindi

²la $\eta = -s[h] + n_i[h^i]$ rappresenta la crescita dell'entropia lungo l'urto

la compatibilità è assicurata dall'esistenza di un $N + 1$ -vettore $\mathbf{y}(\mathbf{u})$ tale che :

$$\mathbf{y} \cdot \partial_\alpha \mathbf{q}^\alpha = \mathbf{y} \cdot \mathbf{p} \quad \forall \mathbf{u} \quad (2.41)$$

Le condizioni equivalenti possono essere scritte come:

$$\mathbf{y} \cdot \frac{\partial \mathbf{q}^\alpha}{\partial \mathbf{u}} = 0 \quad (2.42)$$

$$\mathbf{y} \cdot \mathbf{p} = 0 \quad (2.43)$$

La \mathbf{y} è definita a meno di moltiplicazione per uno scalare, quindi è comodo definirlo come $\mathbf{y} = (-\mathbf{u}', 1)$:

$$\mathbf{u}' \cdot \nabla \mathbf{F}^\alpha = \nabla h^\alpha \quad (2.44)$$

$$\mathbf{u}' \cdot \mathbf{f} = \Sigma \quad (2.45)$$

Ora si può dimostrare che il sistema può essere trasformato in un sistema simmetrico, e quindi iperbolico.

Lemma 2.4.1. *Un sistema iperbolico del tipo (2.1) compatibile con un principio entropico è simmetrico rispetto al campo \mathbf{u}'*

Dimostrazione. Sia il generatore h'^α un vettore a quattro componenti definito come:

$$h'^\alpha = \mathbf{u}' \cdot \mathbf{F}^\alpha - h^\alpha \quad (2.46)$$

se ne fa il gradiente rispetto al nuovo campo (il campo principale) otteniamo:

$$\mathbf{F}^\alpha = \nabla' h'^\alpha \quad (2.47)$$

Allora se inserito nel sistema (2.1), il sistema può essere scritto tramite le matrici Hessiane del potenziale h'^α :

$$\partial_\alpha \left(\frac{\partial h'^\alpha}{\partial \mathbf{u}'} \right) = \mathbf{f} \iff \frac{\partial^2 h'^\alpha}{\partial \mathbf{u}' \partial \mathbf{u}'} \partial_\alpha \mathbf{u}' = \mathbf{f} \quad (2.48)$$

Infine questo sistema è iperbolico in quanto $\frac{\partial^2 h'^\alpha}{\partial \mathbf{u}' \partial \mathbf{u}'}$ è definita positiva in quanto h^0 è convessa rispetto a \mathbf{u} , quindi anche h'^α è convessa in \mathbf{u}' quanto trasformata di Legendre di una funzione convessa; viene garantito che $\det A^0 \neq 0$. \square

Il fatto che venga richiesto che il sistema oltre ad essere iperbolico debba essere anche simmetrico è dato dal fatto che garantisce che il problema di Cauchy sia ben posto (ci viene garantita l'esistenza, l'unicità, etc.).

Esiste un teorema che ci garantisce l'unicità delle soluzioni.

Teorema 2.4.2. *Ogni sistema simmetrico iperbolico, il cui dato iniziale appartiene³ a $W^{s,2}(\mathbb{R}^N)$ con $s \geq 4$ allora ha un'unica soluzione appartenente a $W^{s,2}(\mathbb{R}^N)$.*

³ $W^{s,2}$ è lo spazio di Sobolev, con la norma che è data dalle sue derivate deboli

Capitolo 3

Trattazione relativistica

3.1 Sistema iperbolico

Si supponga di avere una varietà 4-dimensionale differenziale dotata di una metrica pseudo-Riemanniana e il tensore metrico, in coordinate locali, $g_{\alpha\beta}$ ha segnatura $(+ - - -)$.

Su questa varietà consideriamo il sistema di N leggi di bilancio, in funzione del campo $\mathbf{u}(x^\alpha) \in \mathbb{R}^N$. Il sistema di legge di bilancio è scritto come:

$$\partial_\alpha \mathbf{F}^\alpha(\mathbf{u}) = \mathbf{f}(\mathbf{u}) \quad (3.1)$$

Questo sistema può essere scritto come sistema quasi-lineare:

$$\mathbf{A}^\alpha \partial_\alpha \mathbf{u} = \mathbf{f}(\mathbf{u}) \quad (3.2)$$

La definizione di sistema iperbolico differisce da quello nel caso classico.

Definizione 3.1.1 (Sistema iperbolico). Il sistema (3.2) è detto iperbolico se esiste un quadrivettore di tipo tempo ξ_α tale che:

- a. $\det(\xi_\alpha \mathbf{A}^\alpha) \neq 0$
- b. Per ogni vettore di tipo spazio ζ_α , allora il problema agli autovalori:

$$\mathbf{A}^\alpha (\zeta_\alpha - \lambda \xi_\alpha) \mathbf{d} = 0 \quad (3.3)$$

ha solo autovalori reali λ e gli autovettori \mathbf{d} formano una base di \mathbb{R}^N .

Definizione 3.1.2 (Sistema simmetrico). Un sistema iperbolico è detto simmetrico se:

- a. $\mathbf{A}^\alpha = \mathbf{A}^{\alpha T}$
- b. esiste un vettore ξ_α tale che la matrice $\mathbf{A}^\alpha \xi_\alpha$ è definita positiva $\forall \mathbf{u} \in \mathbb{R}^N$.

3.2 Simmetrizzazione delle equazioni di bilancio

3.2.1 Condizioni di Friedrichs

Le equazioni di bilancio possono essere scritte come (2.40)¹. In questo caso per ottenere un sistema simmetrico viene richiesta una condizione aggiuntiva, ossia che esista un quadrivettore di tipo tempo ξ_α indipendente dal campo \mathbf{u} tale che la forma quadratica.

$$Q = \mathbf{y} \cdot \delta^2 \mathbf{q}^\alpha \xi_\alpha > 0 \quad \forall \delta \mathbf{u} \quad (3.4)$$

ove $\delta \mathbf{u}$ è una qualsiasi variazione non nulla del campo e

$$\delta^2 \mathbf{q}^\alpha = \delta \mathbf{u} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{q}^\alpha}{\partial \mathbf{u} \partial \mathbf{u}} \delta \mathbf{u} \quad (3.5)$$

Le condizioni di Friedrichs possono essere riscritte rispetto al campo privilegiato:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}' \cdot \nabla \mathbf{F}^\alpha &= \nabla h^\alpha \\ \mathbf{u}' \cdot \mathbf{f} &= g \\ Q &= \xi_\alpha (-\mathbf{u}' \cdot \delta^2 \mathbf{F}^\alpha + \delta^2 h^\alpha) > 0 \quad \forall \delta \mathbf{u} \neq 0 \end{aligned} \quad (3.6)$$

La prima delle equazione si può scrivere come:

$$\mathbf{u}' \cdot \delta \mathbf{F}^\alpha \equiv \delta h^\alpha \quad \forall \delta \mathbf{u} \quad (3.7)$$

Applicando l'operatore differenziale δ a (3.7):

$$\delta \mathbf{u}' \cdot \delta \mathbf{F}^\alpha + \mathbf{u}' \cdot \delta^2 \mathbf{F}^\alpha = \delta^2 h^\alpha \quad (3.8)$$

Si prenda invece la (3.6)₃, questa non è equivalente alla convessità della densità di entropia. Nel caso relativistico è possibile ricavare un concetto di convessità dell'entropia. La (3.6)₃ per il è equivalente a:

$$Q = \delta \mathbf{u}' \cdot \delta \mathbf{F}^\alpha \xi_\alpha > 0 \quad (3.9)$$

Si sceglie \mathbf{u} , dato che non vi è una dipendenza dal campo, tale per cui:

$$\mathbf{u} = \mathbf{F}^\alpha \quad (3.10)$$

Da questo nuovo campo è definita la quantità $h = h^\alpha \xi_\alpha e^2$ si ottiene dalla (3.10) che:

$$\mathbf{A}^\alpha \xi_\alpha = \mathbb{1} \Rightarrow \mathbf{u}' \cdot \delta \mathbf{u} = \delta h$$

¹Viene utilizzata la stessa notazione introdotta precedentemente.

²Da questo punto in poi viene utilizzata l'ipotesi che ξ_α non dipenda dal campo \mathbf{u} , quindi tutto quello detto in precedenza vale per una qualsiasi congruenza

Da questa relazione, la (3.9) diventa:

$$Q = \delta \mathbf{u}' \cdot \delta \mathbf{u} = \delta h^2 > 0 \quad (3.11)$$

La condizione è equivalente alla concavità di h .

Ora si può dimostrare che il sistema (3.1), analogamente al caso classico, è simmetrico

Teorema 3.2.1. *Sia il sistema (3.1) dotato di una legge di bilancio supplementare $\partial_\alpha h^\alpha = \Sigma$, tale per cui esista una congruenza di tipo tempo ξ_α , indipendente dal campo \mathbf{u} , tale che la densità $h = h^\alpha \xi_\alpha$ è una funzione convessa rispetto al campo $\mathbf{u} = \mathbf{F}^\alpha \xi_\alpha$. Allora il sistema è simmetrico nel campo \mathbf{u}' .*

Dimostrazione. La dimostrazione è analoga a quella del caso non relativistico. Si prenda il generatore h'^α , come definito in (2.46), e vale quindi $\mathbf{F}^\alpha = \frac{\partial h'^\alpha}{\partial \mathbf{u}'}$. Si trova quindi che partendo da:

$$\frac{\partial \mathbf{F}^\alpha}{\partial \mathbf{u}'} \partial_\alpha \mathbf{u}' = \mathbf{f} \Rightarrow \frac{\partial^2 h'^\alpha}{\partial \mathbf{u}' \partial \mathbf{u}'} \partial_\alpha \mathbf{u}' = \mathbf{f}$$

Ora se contraiamo il generatore con la congruenza ξ_α e dalla (3.10) si ottiene:

$$h' = h'^\alpha \xi_\alpha = \mathbf{u}' \cdot \mathbf{u} - h \quad (3.12)$$

Quindi $h'(\mathbf{u}')$ è la trasformazione di Legendre di $h(\mathbf{u})$ e allora è una funzione convessa \mathbf{u}' . E allora si ha che:

$$\mathbf{A}'^\alpha \xi_\alpha = \frac{\partial^2 h'^\alpha}{\partial \mathbf{u}' \partial \mathbf{u}'} \quad (3.13)$$

è definita positiva. Si conclude quindi che il sistema è simmetrico iperbolico rispetto al campo \mathbf{u}' \square

Condizioni di validità

Queste condizioni valgono nel caso in cui la congruenza non dipenda dal campo \mathbf{u} . Per esempio nel caso non relativistico, questo può essere considerato un caso particolare, basta prendere come congruenza $\xi_\alpha = (1, \mathbf{0})$. Ma nel caso relativistico la densità di entropia $-h^0$ non è uno scalare, esiste una quantità scalare legata all'entropia:

$$-h_u = -h^\alpha \frac{u_\alpha}{c^2} \quad (3.14)$$

Ma il problema in questo caso è che in questo caso la congruenza non è costante e dipende, inoltre questa congruenza dipende dal campo \mathbf{u} .

Si dimostra che nel caso di una congruenza qualsiasi non la convessità di $h = h^\alpha \xi_\alpha$ non implica la simmetria del sistema.

3.2.2 Condizione di simmetrizzabilità

Si vuole dimostrare che esiste una congruenza privilegiata di tipo tempo non costante tale per cui la convessità dello scalare h implica la simmetria del sistema.

La (3.5) viene anche detta condizione di simmetrizzabilità. A differenza del caso non relativistico in cui la densità di entropia bastava la convessità di h^0 per la simmetrizzabilità delle equazioni del moto, nel caso relativistico questo non è garantito; infatti si può dimostrare che per una generica congruenza con una generica congruenza ζ_α la convessità di

$$h = h^\alpha \zeta_\alpha \quad (3.15)$$

rispetto al campo

$$u \equiv F^\alpha \zeta_\alpha \quad (3.16)$$

non garantisce che il sistema sia simmetrico.

Lemma 3.2.2. *Esiste una identità generale:*

$$Q = \delta^2 + h'^\alpha \delta^2 \zeta_\alpha \quad (3.17)$$

ove il differenziale è fatto rispetto al campo $\mathbf{u} \equiv \mathbf{F}^\alpha \zeta_\alpha$ e h' è definito nella stessa maniera di (2.46).

Dimostrazione. Differenziando due volte h si ottiene:

$$\delta^2 h = \delta^2 h^\alpha \zeta_\alpha + 2\delta h^\alpha \delta \zeta_\alpha + h^\alpha \delta^2 \zeta_\alpha \quad (3.18)$$

Differenziando ulteriormente la (3.7) si ha

$$\delta^2 h^\alpha = \delta \mathbf{u}' \cdot \delta \mathbf{F}^\alpha + \mathbf{u}' \cdot \delta^2 \mathbf{F}^\alpha$$

E, definendo Q in maniera analoga a (3.4) solo per una qualsiasi congruenza, allora

$$\delta^2 h = Q + h^\alpha \delta^2 \zeta_\alpha + \mathbf{u}' \cdot \delta^2 \mathbf{F}^\alpha \zeta_\alpha + 2\delta h^\alpha \delta \zeta_\alpha$$

Per calcolare gli ultimi due termini si è differenziato il campo (3.16) due volte:

$$\begin{aligned} 0 &= \delta^2 \mathbf{u} = \delta^2 \mathbf{F}^\alpha \zeta_\alpha + 2\delta \mathbf{F}^\alpha \zeta_\alpha + \mathbf{F}^\alpha \delta^2 \zeta_\alpha \\ &\Rightarrow \mathbf{u}' \cdot \delta^2 \mathbf{F}^\alpha \zeta_\alpha + 2\delta h^\alpha \delta \zeta_\alpha = -\mathbf{u}' \mathbf{F}^\alpha \delta^2 \zeta_\alpha \end{aligned}$$

Nell'ultima relazione abbiamo moltiplicato per il campo privilegiato ed abbiamo usato la relazione (3.7). Infine sostituendo l'ultima relazione nella (3.18), si ottiene la relazione cercata:

$$\delta^2 h = Q - h'^\alpha \delta^2 \zeta_\alpha$$

□

Per dimostrare l'esistenza di una congruenza privilegiata possono essere utili delle proprietà di vettori di tipo tempo

Lemma 3.2.3. *Tutti i vettori di tipo tempo ζ_α con norma costante $\zeta_\alpha \zeta^\alpha = \text{const.} = k^2 > 0$, soddisfano le seguenti identità:*

$$\zeta^\alpha \delta \zeta_\alpha = 0 \quad (3.19)$$

$$\delta \zeta_\alpha \delta \zeta^\alpha \leq 0 \quad (3.20)$$

$$\zeta^\alpha \delta^2 \zeta_\alpha \geq 0 \quad (3.21)$$

Dimostrazione. 1. La prima uguaglianza è una conseguenza del fatto che la norma della congruenza è costante, $\delta(\zeta_\alpha \zeta^\alpha) = 2\zeta_\alpha \delta \zeta^\alpha = 0 = \delta k^2$.

2. Si consideri il sistema di riferimento locale istantaneo in cui $\zeta_\alpha \equiv (k, 0_i)$, dalla prima relazione si ricava che $\delta \zeta^0 = 0$, quindi $\delta \zeta_\alpha \delta \zeta^\alpha = -(\delta \zeta_i)^2 \leq 0$.

3. Se si differenzia ulteriormente la prima identità si ha $\delta(\zeta_\alpha \delta \zeta^\alpha) = \delta \zeta_\alpha \delta \zeta^\alpha + \zeta_\alpha \delta^2 \zeta^\alpha = 0$, sapendo che $\delta \zeta_\alpha \delta \zeta^\alpha \leq 0$ allora $\zeta_\alpha \delta^2 \zeta^\alpha \geq 0$.

Tutte le disuguaglianze sono uguaglianze solo nel caso di congruenze non dipendenti dal campo. \square

Attraverso queste identità si può dimostrare l'esistenza di una congruenza di tipo tempo privilegiata.

Teorema 3.2.4. *Se h'^α è un vettore di tipo tempo orientato verso il futuro, allora esiste una congruenza*

$$\xi_\alpha = \frac{h'_\alpha}{c \sqrt{h'^\beta h'_\beta}} \quad (3.22)$$

parallelo a h'^α e con norma costante $\xi_\alpha \xi^\alpha = 1/c^2$ tale che:

$$h'^\alpha \delta^2 \xi_\alpha \geq 0 \quad h'^\alpha \delta^2 \xi_\alpha = 0 \quad \forall \delta \mathbf{u} \quad (3.23)$$

Se si assume che $h = h^\alpha \xi_\alpha$ è una funzione convessa $\delta^2 h > 0$ rispetto al campo $\mathbf{u} \equiv \mathbf{F}^\alpha \xi_\alpha$ allora $Q = \delta \mathbf{u}' \cdot \mathbf{F}^\alpha \xi_\alpha > 0$, che ci garantisce che il sistema sia iperbolico simmetrico.

Dimostrazione. Sia ξ_α una congruenza di tipo tempo con norma costante $\xi_\alpha \xi^\alpha = 1/c^2$ e chiamiamo T lo spazio ortogonale a ξ_α .

Se imponiamo che valga la (3.23)₂, allora dalla (3.19) abbiamo che $\delta \xi_\alpha \in T$ e quindi h'^α è collineare a ξ_α :

$$\xi_\alpha = \lambda h'_\alpha$$

Utilizzando la (3.20), la condizione richiesta da (3.23)₁ è soddisfatta solo se λ è positiva e conoscendo la norma di ξ_α , si ha che:

$$\lambda = \frac{1}{c\sqrt{h'^\beta h'_\beta}}$$

Escluse quindi le congruenze costanti si ha che l'unica congruenza che soddisfa le (3.23) è proprio la (3.22).

Infine assumendo che h sia convessa allora la (3.17), garantisce che $Q > 0$. Per poi ottenere la forma simmetrica si procede come nel caso di una congruenza non dipendente dal campo. \square

3.3 Teoria dei momenti

Per determinare lo stato termodinamico viene usato il 14 campo definito da:

$$\begin{aligned} V^\alpha(x^\lambda) &= nu^\alpha && \text{numero di particelle - flusso di particelle} \\ T^{\alpha\beta}(x^\lambda) &&& \text{tensore energia-impulso} \end{aligned} \quad (3.24)$$

Si assume che $T^{\alpha\beta} = T^{\beta\alpha}$ sia simmetrico, quindi ha 10 componenti indipendenti.

3.3.1 Leggi di bilancio

Le leggi di bilancio nel caso del 14 campo sono:

$$\partial_\alpha V^\alpha = 0 \quad \text{Conservazione del numero di particelle} \quad (3.25)$$

$$\partial_\alpha T^{\alpha\beta} = 0 \quad \text{Conservazione dell'energia-impulso} \quad (3.26)$$

$$\partial_\alpha A^{\alpha\beta\gamma} = I^{\beta\gamma} \quad \text{Legge di bilancio dei flussi} \quad (3.27)$$

Il tensore $I^{\alpha\beta} = I^{\beta\alpha}$ è simmetrico ed è a traccia nulla $I^\alpha_\alpha = 0$, mentre il tensore $A^{\alpha\beta\gamma}$ è simmetrico rispetto a tutti e tre gli indici, inoltre si ha che la traccia del tensore è :

$$A^\beta_\alpha = m^2 c^2 V^\alpha$$

Da queste condizioni si deduce che le equazioni indipendenti sono 14.

Dato che questi due tensori non sono variabili di campo, sono grandezze costitutive e sono legate tramite funzioni locali al campo tramite le equazioni costitutive.

3.3.2 Funzioni di stato

Le grandezze introdotte precedentemente possono essere viste come dei momenti di una densità di fase.

Nel caso relativistico risulta che la distribuzione all'equilibrio segue la distribuzione di Jüttner ed ha la seguente forma:

$$f|_E = \frac{y}{\exp\left(\frac{\alpha}{T} + \frac{p^\alpha u_\alpha}{kT}\right) \mp 1} \quad (3.28)$$

Il segno si sopra e di sotto si riferiscono ai bosoni e ai fermioni rispettivamente.

La $y = g/h^3$ ove h è la costante di Planck, mentre $g = 2s + 1$ per particelle con spin $sh/2\pi$. Mentre $\alpha = -G/T$ è la *fugacità* ed è legata all'energia libera di Gibbs.

I momenti in generale per una qualsiasi distribuzione nel caso relativistico vengono calcolati come:

$$\begin{aligned} V^\alpha &= c \int p^\alpha f dP \\ T^{\alpha\beta} &= c \int p^\alpha p^\beta f dP \\ A^{\alpha\beta\gamma} &= c \int p^\alpha p^\beta p^\gamma f dP \\ h^\alpha &= -kc \int p^\alpha \left[f \ln\left(\frac{f}{y}\right) \mp y \left(1 \pm \frac{f}{y}\right) \ln\left(1 \pm \frac{f}{y}\right) \right] dP \end{aligned}$$

In questo caso abbiamo che $dP = \frac{\sqrt{|detg|}}{p^0} dp^i$ è l'elemento invariante dello spazio dei momenti.

Il quadrivettore associato all'entropia h^α è una grandezza costitutiva e dipende dalle variabili di campo prese in considerazione. Analogamente al caso classico l'equazione di bilancio dell'entropia:

$$\partial_\alpha h^\alpha \geq 0 \quad (3.29)$$

viene utilizzata per garantire la chiusura del sistema di equazioni (3.1).

3.4 Gas in non-equilibrio

Per lo studio di un è possibile trovare un espressione per il 14 campo, le grandezze $A^{\alpha\beta\gamma}$, $I^{\alpha\beta}$ e per le componenti del campo privilegiato $\mathbf{u}' = (\zeta, \Lambda_\alpha, \Sigma_{\alpha\beta})$, con $\Sigma_\alpha^\alpha = 0$, in funzione delle quantità $n, T, u^\alpha, \Pi, q^\alpha, t^{(\alpha\beta)}$. Le quantità tipiche dei fluidi in non equilibrio sono la pressione di non equilibrio Π , il flusso di calore $q^\alpha u_\alpha = 0$ e il tensore deviatorico di stress $t^{(\alpha\beta)} u_\alpha = 0$.

Si può quindi calcolare h'^α :

$$h'^\alpha = \left(\frac{p}{T} + A_1^\pi \Pi + A_2^\pi \Pi^2 + A^q q_\beta^\beta \right) u^\alpha + (B^0 + B^\pi \Pi) q^\alpha + C t^{(\alpha\beta)} q_\beta \quad (3.30)$$

Trascurando i termini non lineari si ha che la congruenza privilegiata è:

$$\xi_\alpha = \frac{u^\alpha}{c^2} + \frac{B^0 T}{pc^2} q^\alpha = \frac{u^\alpha}{c^2} + \frac{\Omega}{p\gamma} q^\alpha \quad (3.31)$$

ove $\gamma = \frac{mc^2}{kT}$ e

$$\Omega = \frac{1}{k} \frac{I_{4,1} J_{4,0} - I_{4,0} J_{4,1}}{I_{4,2} I_{4,0} - I_{4,1}^2} \quad (3.32)$$

e:

$$J_{m,n} = \int_0^\infty \frac{\sinh(\rho)^m \cosh(\rho)^n}{\exp(\alpha/k + \gamma \cosh(\rho)) \mp 1} d\rho \quad (3.33)$$

$$I_{m,n} = \frac{\partial}{\partial \alpha} J_{m,n} \quad (3.34)$$

3.4.1 Caso non degenere

Nel caso non degenere si ha che il termine ∓ 1 sparisce, quindi si dimostra che $I_{m,n} = -J_{m,n}/k$. Si deduce da questo fatto che $\Omega = 0$ e allora la congruenza privilegiata coincide con quella usuale, anche in non equilibrio.

3.4.2 Caso degenere

Limite classico

Nel limite classico si ha che $c \rightarrow \infty$ e si ha di conseguenza che $\Omega \rightarrow 0$. Da questo per tutti i gas si ha che la congruenza è quella usuale.

Limite ultrarelativistico

Nel caso ultrarelativistico si suppone che $\gamma \rightarrow 0$ e si ha che:

$$\lim_{\gamma \rightarrow 0} \frac{\Omega}{\gamma} = \frac{4i_3 i_5 - 5i_4^2}{24i_3 i_5 - 25i_4} \quad (3.35)$$

ove

$$i_m = \int_0^\infty \frac{\rho^m}{\exp(\alpha/k + \rho) \mp 1} d\rho \quad (3.36)$$

Ribandendo quanto già detto per i gas degeneri, si ha che per quest'ultimi $i_m = \Gamma(m+1)$ e utilizzando la proprietà che $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$, si deduce che la (3.35) è nulla e si ottiene come già detto la congruenza cercata. Si distinguono ora il caso dei gas di Fermi e di Bose:

a. Gas di Fermi fortemente degenere

In questo caso si ha che:

$$\lim_{\gamma \rightarrow 0} \frac{\Omega}{p\gamma} \approx -\frac{3c^2 T^4}{10h^2 k^4 \pi^3 y} \frac{1}{x^2} \quad (3.37)$$

Quando $x \rightarrow \infty$ allora si ottiene la congruenza usuale.

b. *Gas di Bose fortemente degenere*

In questo caso si ha che $\alpha = 0$ e:

$$i_m = \zeta_{m+1} \Gamma(m+1) \quad \zeta_m = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r^m} \quad (3.38)$$

ove la ζ_m è la funzione zeta di Riemann e si ottiene che:

$$\lim_{\gamma \rightarrow 0} \frac{\Omega}{\gamma} \approx 0.0210 \quad (3.39)$$

Come si può vedere dai risultati riportati qui sopra non sempre l'entropia privilegiata $-h^\alpha \xi_\alpha$ coincide con lo scalare (3.14), infatti nel caso del gas degenere questo non accade sempre. La scelta di (3.14) non è adeguata e bisognerebbe trovare una grandezza analoga, infatti nei gas degeneri, anche nel caso non relativistico, si hanno dei problemi per l'iperbolicità delle equazioni.

Bibliografia

- [1] I. Liu, I. Müller, T. Ruggeri et al. “Relativistic thermodynamics of gases”. *Annals of Physics* 169.1 (1986), pp. 191–219.
- [2] I. Müller e T. Ruggeri. *Extended thermodynamics*. Vol. 27. Springer-Verlag New York, 1993.
- [3] I. Müller e T. Ruggeri. *Rational extended thermodynamics*. Springer New York, 1998.
- [4] T. Ruggeri. “Convexity and symmetrization in relativistic theories”. *Continuum Mechanics and Thermodynamics* 2.3 (1990), pp. 163–177.
- [5] T. Ruggeri. *Introduzione alla termomeccanica dei continui*. Monduzzi, 2007.
- [6] T. Ruggeri. “The Entropy Principle from Continuum Mechanics to Hyperbolic Systems of Balance Laws: The Modern Theory of Extended Thermodynamics”. *Entropy* 10.3 (2008), pp. 319–333.
- [7] T. Ruggeri e A. Strumia. “Main field and convex covariant density for quasi-linear hyperbolic systems: relativistic fluid dynamics”. 34.1 (1981), pp. 65–84.