UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI PADOVA
Dipartimento di Filosofia, Sociologia, Pedagogia e Psicologia applicata

CORSO DI STUDIO MAGISTRALE IN
SCIENZE DELLA FORMAZIONE PRIMARIA

TESI DI LAUREA

Comprensione e riconoscimento dello zero non simbolico nei bambini della scuola dell'infanzia: una ricerca

Relatore
Daniela Lucangeli

Correlatore
Annamaria Porru

Laureanda
Anna Vanzo

Matricola: 1232260

Anno accademico: 2023/2024

INDICE

INTRODUZIONE ... **3**

CAPITOLO 1: Sviluppo della cognizione numerica ... **4**

1.1 Cenni storici, la nascita del numero ... 4

1.2 Capacità numerica negli animali ... 7

1.3 Evoluzione della capacità numerica nell'uomo ... 9

1.4 Subitizing e Approximate Number System ... 12

1.5 Sviluppo dei concetti numerici simbolici ... 14

CAPITOLO 2: Il numero zero ... **20**

2.1 La storia dello zero ... 20

2.2 Studi condotti ... 22

CAPITOLO 3: La ricerca ... **29**

3.1. Le domande di ricerca ... 29

3.1.1 L'accuratezza è differente fra compiti con lo zero e con quantità nelle diverse operazioni di addizione e sottrazione? ... 30

3.1.2 I tempi di reazione sono differenti fra compiti con lo zero e con quantità nelle diverse operazioni di addizione e sottrazione? ... 30

3.1.3 L'accuratezza nei compiti con gli insiemi vuoti dipendono dalla conoscenza della cardinalità 0? ... 31

3.2. Partecipanti ... 31

3.3. Procedura ... 32

3.4. Analisi dei dati ... 35

3.4.1 L'accuratezza fra compiti con lo zero e con quantità nelle diverse in operazioni di addizione e sottrazione ... 35

3.4.2 Tempi di reazione fra compiti con lo zero e con quantità nelle diverse in operazioni di addizione e sottrazione ... 36

3.4.3 L'accuratezza nei compiti con gli insiemi vuoti dipende dalla conoscenza della cardinalità ... 37

3.5. Risultati ... 37

3.5.1 L'accuratezza è differente fra compiti con lo zero e con quantità nelle diverse operazioni di addizione e sottrazione? ... 37

3.5.2 I tempi di reazione sono differenti fra compiti con lo zero e con quantità nelle diverse operazioni di addizione e sottrazione? ... 39

3.5.3 L'accuratezza nei compiti con gli insiemi vuoti dipendono dalla conoscenza della cardinalità 0? ... 41

3.6 Discussione ... 42

3.7 Conclusioni educative e didattiche ... 44

CONCLUSIONI **47**
BIBLIOGRAFIA **49**

INTRODUZIONE

“Se è vero che persone creano la matematica, non è meno vero che, viceversa, la matematica influenza i modi di essere, di vivere e di pensare delle persone” (Luis Radford & Heather Empey, 2007).

L’intelligenza numerica e l'apprendimento dei numeri nei primi anni di vita rappresentano temi di grande rilevanza nell'ambito dell'educazione e della psicologia dello sviluppo, numerose ricerche sono state condotte per comprendere lo sviluppo dell’apprendimento dei numeri nei neonati e bambini (Mandler & Shebo,1982; Gallistel & Gelman, 1992; Wynn, 1992; Butterworth, 2000; Dehaene, 2011). La capacità di comprendere i numeri e di utilizzarli in vari contesti è fondamentale per la crescita e l'apprendimento dei bambini. Per tale motivo è necessario stimolare un’educazione matematica sin dalla scuola dell’infanzia (D.M.254 del 16 novembre 2012).

Non è ancora chiaro il ruolo esercitato dallo zero, assenza di quantità non simbolica e simbolica, nella formazione della rappresentazione numerica del bambino. Studi e ricerche condotte negli ultimi decenni dimostrano che la comprensione di questo numero segue uno sviluppo stadiale (Wellman & Miller, 1986; Fuson, 1988; Butterworth, 2000). Le teorie evidenziano come lo zero rappresenti una sfida cognitiva unica, ma anche una componente fondamentale della comprensione numerica. Vi sono, però, ancora numerosi dubbi su come viene appreso lo zero e quali processi cognitivi intervengono in questa acquisizione (Merritt & Brannon, 2013; Krajcsi et al. 2021).

Questo studio nasce con l’obiettivo di esaminare la letteratura nota riguardante l'acquisizione del concetto di numero e, in particolare, del precursore dello zero nei bambini della scuola dell'Infanzia.

CAPITOLO 1: Sviluppo della cognizione numerica

1.1 Cenni storici, la nascita del numero

L'abilità numerica di conteggio è ancora più antica rispetto alla concezione astratta di numero. Ancora prima di avere un linguaggio specifico per distinguere i vari numeri l'uomo è stato in grado di numerare i vari oggetti e tenerne traccia attraverso vari sistemi che si sono evoluti nel corso dei secoli, fino a condurre l'uomo ad identificare un sistema numerico fisso. (Butterworth, Gallistel & Vallortigara 2017). Risalgono a 35.000 mila anni fa le prime tracce di sistemi di conteggio delle unità, anche se si suppone che l'abilità di numerazione sia precedente, ma non ne abbiamo traccia. Sono stati ritrovati bastoni e ossi intagliati che potevano aiutare i pastori a tenere il conto delle unità del loro gregge al rientro nell'ovile, oppure che venivano utilizzati per conteggiare le prede uccise da un cacciatore. Una delle prime tracce ritrovate è un osso di zampa di lupo, rinvenuto, nel 1937 nell'attuale Cecoslovacchia, nel sito archeologico di Vestonice. Sull'osso vi sono delle incisioni, i segni sono lineari ma non simmetrici; quindi, non possono essere riferiti ad una mera scelta decorativa, ma ad un'esigenza più pratica attribuibile alla volontà di numerare una data quantità. Il ritrovamento di questa ed altre tracce, come l'osso di babuino ritrovato nell'area delle montagne Swaziland nel 1960, permette di ipotizzare che l'associazione biunivoca tra una traccia grafica ed un insieme reale che l'uomo aveva necessità di contare è un'abilità che l'uomo possiede già dalla preistoria (Beccastrini & Nannicini, 2008).

Si può affermare che la capacità di conteggio sia precedente a all'epoca in cui sono stati datati i fossili, prima dell'uso delle incisioni l'uomo raggruppava pietre o conchiglie in gruppi per riuscire a tenere conto delle quantità di cui necessitava avere una stima. Spesso i raggruppamenti effettuati erano fatti su base cinque, questo può evidenziare una relazione con le cinque dita della mano (D'Amore & Sbaragli, 2017). Dita e parti del corpo nell'antichità sono state utilizzate per creare un primordiale codice numerico, in molte civiltà aborigene si riscontra la tendenza a codificare i numeri con parti del corpo, ne sono un esempio gli abitanti delle isole dello stretto di Torres. La numerazione di questa popolazione parte dal mignolo della mano destra per proseguire verso il pollice, braccio destro, sinistro, pollice della mano destra fino al mignolo, proseguono poi con le dita del piede sinistro, le gambe per concludere con le dita del piede destro, in questo modo sono in grado di numerare da uno a 33 (Dehaene, Cohen 1997). Tale sistema di conteggio ha la limitazione di non poter essere infinito, per tale motivo è ipotizzabile che una successiva sintassi dei numeri sia avvenuta a partire dalla numerazione corporea per potersi ampliare all'infinito. In modo particolare, l'invenzione del principio posizionale che permette di eseguire calcoli utilizzando algoritmi relativamente semplici. La prima testimonianza della comparsa di un sistema numerico, simile a quello a cui noi occidentali siamo abituati a pensare, risale al 4000 a. C. sono state ritrovate delle incisioni su pietra in India che testimoniano la presenza di un sistema numerico (Lucangeli, 2010).

La stessa capacità di generalizzare un numero ha seguito un processo evolutivo per fasi, in un primo momento sono stati associati suoni diversi ad un medesimo numero, per esempio il suon "due" a seconda di quale oggetto veniva numerato. Euclide stesso definisce il numero come una moltitudine di unità, dove ogni unità è una singola cosa individuale, per esempio una terna di elementi rappresenta il 3 e quindi esistono innumerevoli tre. In generale, qualsiasi pluralità di k cose è k e ci sono molte ks'. Questa capacità risulta essere fondamentale per la creazione del concetto stesso di numero. "Due galline" e "due cammelli" hanno vocalizzi diversi nonostante la quantità numerica sia la stessa. Solo successivamente avviene il salto evolutivo che ha permesso di definire il nome di un numero indipendentemente dalla qualità degli oggetti contati. Grazie a tale processo astrattivo è stato possibile sviluppare un sistema di numerazione unico in cui il valore del numero non dipende dalla qualità dell'oggetto ma dalla quantità della materia.

È interessante notare come in tutte le culture antiche vi sia una corrispondenza stretta tra simbolo e quantità numerica fino al numero 3, e che per i numeri successivi si cominci ad utilizzare una simbologia arbitraria. Se compariamo la cultura romana, quella cinese, quella indiana e persino quella cuneiforme i numeri uno, due e tre vengono rappresentati da relativi simboli orizzontali o verticali che raffigurano rispettivamente uno, due o tre segni.

Analizzando i successivi numeri, quattro e cinque, qualcosa cambia, il numero non è più rappresentato da quattro simboli lineari ma viene rappresentato in modo diverso, viene attribuito ad un simbolo convenzionale il valore numerico di 4 e dei numeri successivi (Ifrah, 1994). Risulta di interesse chiedersi come mai civiltà distanti nel tempo e nello spazio abbiano la medesima tendenza a mantenere invariati i primi tre numeri e a simbolizzare i successivi. Come notano Dehaene e Changeux (1993) nel loro esperimento i circuiti neuronali della nostra mente sono paragonabili ad un accumulatore, il quale è in grado di distinguere un numero n dai vicini $n+1$ e $n-1$. La capacità dell'accumulatore di contare in maniera accurata diminuisce all'aumentare delle unità, in particolare gli studiosi evidenziano che il quattro è il primo numero che si fatica a distinguere dal suo precedente (tre) e successivo (cinque). Secondo Dehaene (1993) le quantità numeriche non sono immagazzinate come simboli discreti, ma come grandezze continue che possono essere accumulate e confrontate tra loro. Quando un individuo percepisce o conta degli oggetti, l'accumulatore aumenta il suo valore in modo proporzionale alla quantità percepita. Ad esempio, se una persona vede tre oggetti, l'accumulatore registra un valore che riflette la quantità "tre" come una grandezza continua. Le quantità rappresentate nell'accumulatore possono essere confrontate tra loro. Il cervello utilizza i valori accumulati per determinare quale quantità è maggiore, un processo influenzato dalla variabilità gaussiana, rendendo più difficile il confronto tra numeri più grandi o numeri che sono più vicini tra loro. Il modello dell'accumulatore suggerisce che operazioni aritmetiche di base, come l'addizione e la sottrazione, possono essere realizzate mediante l'aumento o la diminuzione dei valori nell'accumulatore. Questo spiega perché alcune operazioni numeriche possono essere più intuitive o difficili a seconda della loro complessità e delle quantità coinvolte (Dehaene, Cohen 1997). L'essere umano è in grado di produrre delle stime approssimative delle grandi quantità, come accennato fino a tre la quantità viene percepita chiaramente, più la numerosità aumenta maggiore è il margine di errore nell'individuare correttamente la quantità, se ci troviamo in una folla è difficile dire se ci sono ottantadue o ottantatré persone, ma è facile fare una stima e sostenere che ci sono circa ottanta o cento persone. Inoltre, la percezione della quantità varia da come sono disposti gli elementi, per esempio, si tende a sovrastimare la numerosità di elementi disposti regolarmente in linea, mentre si sottostima quando gli stessi elementi sono disposti in modo irregolare. L'effetto descritto è correlato al fenomeno di distanza, cioè risulta più facile distinguere due quantità distanti numericamente tra loro che due quantità vicine, per questo distinguiamo meglio se è maggiore 100 rispetto a 70 che 73 rispetto a 75 (Ramani, Siegler, 2008). Le capacità dell'accumulatore nel cervello umano non differiscono di molto rispetto a quelle degli animali poiché l'apparato uditivo e visivo sono pressappoco uguali tra l'uomo e alcune specie di mammiferi e altre specie animali. L'accumulatore è un sistema ancestrale legato alla sopravvivenza, infatti la percezione delle quantità è legata alla raccolta della maggiore quantità di cibo o di stima della numerosità di un branco di animali nel moneto di uno scontro.

1.2 Capacità numerica negli animali

In ambito scientifico vi è un ampio consenso nell'affermare che gli animali percepiscono le numerosità e si relazionano con esse per la loro sopravvivenza. L'idea che gli animali possono avere una forma di percezione della quantità e capacità proto-matematiche risale a diversi decenni fa, le sue radici risalgono alle teorie evoluzioniste di inizio Novecento, che considerano la capacità di distinguere quantità come un vantaggio adattivo necessario alla sopravvivenza della specie. Nell'ultimo secolo sono state numerose le ricerche che hanno evidenziato come la cognizione numerica e la capacità di conteggio non sono prerogativa solo dell'essere umano ma appartengono anche ad altre specie animali. Si tratta di una capacità primitiva che permette all'animale di distinguere piccole e grandi quantità. Nel momento in cui un animale si trova a dover affrontare dei rivali avere la capacità di distinguere la numerosità del gruppo permette di prevedere se l'ingaggio di uno scontro diretto produrrà un esito positivo o negativo. Anche nella raccolta del cibo riconoscere le quantità maggiori e minori permette la sopravvivenza degli individui e della specie. Il processo di discriminazione della numerosità relativa permette di valutare la differenza di dimensione tra due insiemi.

Sono stati condotti esperimenti sia in ambiente controllato sia in natura per comprendere le capacità proto-matematiche degli animali. Gli esperimenti sugli animali sono stati condotti su esemplari adulti, in particolare sui primati ma si sono svolti esperimenti anche su alcune specie di volatili come corvi e pulcini e in alcuni casi sono stati indagati insetti come le api e mammiferi come le leonesse.

Uno degli esperimenti che mostrano come gli animali sappiano distinguere le quantità di un insieme eterogeneo è stato realizzato da Rugani et al. (2017) sui pulcini di un giorno. Sono stati addestrati dei pulcini a discriminare le quantità. I pulcini sono stati allevati con cinque oggetti identici, oggetti di allevamento, al terzo giorno durante i test i pulcini sono stati inizialmente confinati in una scatola di partenza dietro una parete trasparente, da dove potevano vedere due pannelli opachi identici posizionati all'interno dell'arena. Hanno visto gli oggetti scomparire in sequenza, uno dopo l'altro, due oggetti sono scomparsi dietro un pannello e tre oggetti dietro l'altro pannello. Subito dopo, i pulcini venivano liberati sollevando un divisorio trasparente, erano liberi di muoversi dove volevano all'interno dell'arena. Si è notato come i pulcini sceglievano quasi naturalmente il pannello dietro cui era stato nascosto il numero maggiore. La stessa preferenza per il gruppo più numeroso è stata riscontrata sia quando gli oggetti avevano dimensioni identiche, sia quando la dimensione degli oggetti nel gruppo di tre elementi è stata ridotta, utilizzando un oggetto bidimensionale. Possiamo affermare quindi che i pulcini hanno capacità aritmetiche che permettono di comparare insieme e svolgere operazioni di somma.

Riguardo alle operazioni di somma sono stati svolti numerosi esperimenti in vari campi e si è arrivati a definire che ci sono due sistemi di conteggio nella mente: uno che funziona per le piccole quantità inferiori a 4 e uno che funziona per quelle superiori a 4. I due sistemi di conteggio sono indipendenti tra loro. Questo vale sia per animali che per umani, in entrambe le specie diminuisce la precisione con cui riconoscono le quantità quando gli insiemi differiscono di poche unità. Il senso del numero non verbale e non simbolico è una competenza matematica (Vallortigara & Panciera 2014), si può quindi affermare che la conoscenza simbolica del numero si basi su un meccanismo antico preverbale che permette la distinzione di quantità in maniera approssimata. Per il cervello non solo umano è più facile distinguere numerosità molto differenti tra loro rispetto a numerosità molto vicine. Risulta molto più facile distinguere e scegliere se 9 è maggiore di 4 rispetto a 9 maggiore di 7.

Numerosi sono stati gli esperimenti condotti con gli animali che dimostrano la loro capacità matematica in più ambiti: riconoscimento di quantità, conteggio, ordine numerico e operazioni matematiche di base. Nel riconoscimento di quantità sono stati condotti esperimenti con primati e pesci zebrafish, le ricerche dimostrano che le scimmie sono in grado di ordinare correttamente gli insiemi numerici e a riconoscere quelli con quantità maggiori (Brannon e Terrace, 1998; Judge et al., 2005), mentre nei pesci si è osservata la preferenza per gruppi con un numero maggiore di compagni (Agrillo et al., 2012), in entrambi i casi si è dimostrata una comprensione dell'ordine numerico. Nel conteggio con pappagalli (Pepperberg, 2006) e api (Dacke e Srinivasan, 2008) si è osservato come questi sappiano contare oggetti, fino a quattro nelle api e fino a sette nei pappagalli. Nelle semplici operazioni di matematica studi come quelli di Rumbaugh, Savage-Rumbaugh, Hegel (1987), Hauser, Carey, Hauser (2000) e Calton & Brannon (2007) dimostrano che le scimmie possono eseguire semplici operazioni aritmetiche. Ad esempio, possono sommare piccole quantità di cibo per scegliere la quantità maggiore. Nello studio di Calton & Brannon (2007), si può osservare anche che le scimmie riescono a sommare insieme diversi e a dare una risposta di calcolo maggiormente accurata nel momento in cui dovevano scegliere tra due quantità molto distanti numericamente.

1.3 Evoluzione della capacità numerica nell'uomo

L'intelligenza numerica è una capacità che è stata studiata a lungo e da differenti scienziati e filoni teorici, tutti concordano sul fatto che essa non sia un attributo statico ma un processo dinamico in continuo sviluppo (Lucangeli & Mammarella 2010). I vari modelli teorici ideati differiscono per lo sviluppo dell'abilità computazionale, Piaget (1941) afferma che l'intelligenza segue uno sviluppo stadiale a tappe su base individuale e le abilità matematiche si sviluppano in uno di questi stadi. Gardner (1999) invece afferma l'esistenza di una dinamicità e sinergia tra fattori ambientali e biologici nello sviluppo delle abilità matematiche derivanti dall'interazione di varie aree cerebrali distinte.

Nonostante la teoria stadiale di Piaget (1941) è stata ampiamente superata da studi più recenti è giusto citarla per comprendere come per molto tempo ha influenzato, e ancora oggi in parte influenza, la concezione comune che vi sia un'età precisa in cui appaiono i concetti matematici. Piaget (1941) afferma che nel periodo della scuola primaria, con l'acquisizione del pensiero operatorio, appare anche il concetto di numerosità, questo tipo di pensiero prevede la presenza di alcuni prerequisiti come la conservazione della quantità e della materia. Secondo lo studioso svizzero (1941) solamente nello stadio denominato operatorio concreto, che coincide con gli anni della scuola primaria, il bambino è in gradi di svolgere operazioni matematiche in quanto in questa fase viene conquistato il pensiero logico. Nello stadio precedente dai 3 ai 6 anni invece il pensiero è caratterizzato da un pensiero intuitivo basato sull'osservazione diretta. Nello stadio pre-operatorio Piaget (1941) dimostra, attraverso i sui test, che il bambino non ha interiorizzato il concetto di conservazione, ma che le sue intuizioni sulla numerosità dipendono da ciò che osserva. Lo scienziato identifica tre diversi stadi nello sviluppo del concetto di conservazione della quantità:

- I stadio (3-4 anni): il bambino si basa esclusivamente su ciò che può osservare;
- II stadio (5-6 anni): vi è un'acquisizione graduale della capacità di conservazione;
- III stadio (7 anni): vengono acquisiti i meccanismi di seriazione e classificazione che permettono la completa padronanza della conservazione della numerosità.

Gli studi di Piaget e dei suoi colleghi vengono confutati da Mehler & Bever (1967), hanno dimostrato come i risultati dell'esperimento possono cambiare a seconda dell'ambiente e degli stimoli dati al bambino. In una prima fase venne riprodotto l'esperimento di Piaget (1941), disposte due file di biglie si è chiesto quale fosse la più numerosa. Nel secondo esperimento vennero sostituite le biglie con delle caramelle e venne lasciato il bambino libero di scegliere quale fila preferiva e mangiare all'istante le caramelle corrispondenti. Da questo esperimento si è notato come un numero maggiore di bambini abbia scelto la fila di caramelle più numerosa. Si può affermare quindi che già a 3-4 anni i bambini possiedono il concetto di conservazione della quantità.

Lo stesso concetto di numero che Piaget (1941) riteneva emergesse dopo i 6 anni viene smentito da ricerche successivi. Gli esperimenti condotti da Wynn (1992), dimostrano come già bambini neonati di alcuni mesi riescono a discriminare insiemi con quantità diverse. Sono state utilizzate tre tecniche che seguono il seguente principio: i bambini dopo essere stati sottoposti per un tempo ad uno stimolo diminuiscono la loro capacità attentiva, ma questa aumenta se sottoposti ad uno stimolo diverso. (Lucangeli & Mammarella 2010). Il cambio di attenzione da parte dei bambini evidenzia la presenza di un sistema di rappresentazione che permette di distinguere le diverse numerosità, tale sistema è detto "senso del numero" e così denominato per la prima volta da Dehaene (1997), si tratta di un sistema di rappresentazione non simbolico che permette di valutare in modo preciso piccole numerosità e diventa via via meno preciso all'aumentare della grandezza (Starkey & Cooper 1980). Nell'esperimento condotto dagli studiosi i bambini venivano posti di fronte ad un schermo, in cui comparivano in sequenza immagini contenenti due punti neri posti a diverse distanze, si è notato come dopo un determinato tempo da parte dei bambini vi è una perdita di interesse nelle immagini che vengono osservate con un'intensità minore, ma nel momento in cui viene introdotto uno stimolo detto disabituante che conteneva tre punti e si è notato come i bambini tornassero ad osservare l'immagine per un tempo maggiore. Nel 1983 venne riproposto da Starkey e Cooper lo stesso esperimento introducendo anche delle sequenze sonore, il risultato dell'esperimento non cambiò dimostrando che il senso del numero è amodale, comune a vista e udito (Starkey & Cooper 1983).

Anche per quanto riguarda la capacità di somma e sottrazione Wynn (1992) fu una pioniera nella sperimentazione con i bambini e nella dimostrazione che già i neonati possiedono tali abilità matematiche. L'ipotesi iniziale fu che i bambini hanno aspettative riguardo il mondo reale, e quando queste loro aspettative non vengono realizzate si ha una reazione, già a qualche mese i bambini sono sensibili alle operazioni matematiche. Nel suo esperimento la psicologa canadese ha posto i bambini di fronte ad un teatrino in cui appare un pupazzo che è stato poi posizionato al centro di un teatrino e poi nascosto da un pannello che si alzava, appariva poi un altro pupazzo e anche questo era posto dietro al medesimo pannello, successivamente il pannello veniva abbassato e si mostravano i pupazzi. Alcune volte però il numero di pupazzi non corrispondeva al numero di pupazzi mostrati che sparivano dietro al pannello mostrando dei risultati impossibili, in questi casi i bambini aumentano il tempo di osservazione della scena che non corrispondeva alle loro aspettative matematiche (Wynn, 1992).

Le riflessioni di Stanislas Dehaene (2004) in merito a questi esperimenti mettono in luce come i calcoli dei neonati siano corretti per numeri limitati fini a 4, mentre diventano imprecise per quelli superiori. Possiamo quindi ipotizzare che per il bambino di pochi mesi non sia possibile sopra una certa quantità distinguere un numero *n* dal suo successore *n +1*. Dehaene prova che la rappresentazione dei primi tre numeri è diversa dalle altre. L'idea che vi sia una differenza tra la percezione dei piccoli numeri (1-3/4) e le grandi numerosità è sostenuta anche da uno studio di Mandler & Shebo (1982) in cui gli autori hanno indagato i tempi di risposta nel definire la quantità di alcuni item presentati su un monitor. Gli item consistevano in presentazione di pallini, presentati in modo casuale, con differenti numerosità variabili da 1 a 20, sono state condotte due sessioni differenti composte da 100 trial ciascuna. Ciò che si è dimostrato è che la funzione del tempo di reazione, trovata nel subitizing, ha 3 variazioni significative in base alla numerosità presentata:

- vi è una risposta a insiemi da 1 a 3 che è rapida e accurata e si basa su modelli canonici acquisiti;
- una risposta a insiemi da 4 a 6/7 che si basa sul conteggio mentale, cioè il conteggio di insiemi che possono essere mantenuti nella memoria;
- una risposta di stima per insiemi più grandi di 6 che non possono essere mantenuti nella memoria per il conteggio mentale.

I tempi di risposta, per gli item di numerosità da 1 a 3 risultano molto minori rispetto alle altre numerosità. I tempi aumentano linearmente per gli item di numerosità da 4 a 6 ed infine, per gli item di numerosità superiori a 7 sono approssimativamente costanti ma la precisione delle risposte diminuiva fortemente. (Mandler e Shebo, 1982).

Si può affermare quindi che le piccole numerosità 1, 2 e 3 vengono riconosciute in modo quasi immediato, cioè non viene utilizzato il conteggio ma, entra in azione il processo di subitizing legato ad un sistema cognitivo chiamato OTS Object Tracking System.

1.4 Subitizing e Approximate Number System

Butterworth (1999) e Dehaene (2011) sostengono l'esistenza di un meccanismo definito modulo numerico, si tratta di un sistema innato di comprensione delle quantità numeriche da cui poi si sviluppano le capacità cognitive per l'apprendimento della matematica. Possiamo individuare due sistemi cognitivi: l'Object Tracking System (OTS) e l'Approximate Number System (ANS), essi sono distinti tra loro ma interconnessi per quanto riguarda la comprensione e manipolazione del numero.

Per OTS intendiamo il meccanismo cognitivo che opera con le piccole numerosità, esso permette di riconoscere intuitivamente piccole quantità di oggetti fino a tre o quattro, senza necessità di contare le singole unità, questo avviene tramite un processo chiamato Subitizing (Vallortigara & Pancera 2014). L'OTS sembra essere una funzione innata e comune ad esseri umani ed animali. Quando un individuo guarda un insieme piccolo di oggetti il suo cervello elabora in modo simultaneo le percezioni visive e di riconoscimento della quantità numerica. Gallistel & Gelman (1992) ritengono il subitizing basato sul conteggio preverbale, cioè sulla rappresentazione unica di grandezze, di conseguenza, contare preverbalmente porterebbe a risultati inaccurati se applicato a insiemi numerosi, per i quali è più vantaggioso il conteggio verbale, che risulta più preciso. L'abilità di subitizing ha quindi delle ripercussioni nell'apprendimento della matematica e dei suoi concetti (Vallortigara, 2014).

Altro meccanismo cognitivo di nostro interesse è l'Approximate Number System (ANS), si tratta di un sistema cognitivo innato che permette di compiere stime numeriche approssimate senza ricorrere al calcolo preciso della quantità. Il processo sottostante all'ANS è definito counting (Feigenson, Dehaene & Spelke 2004). L'ANS, in quanto meccanismo di stima, presenta alcuni bias di calcolo, infatti, vi è la tendenza a sovrastimare gli oggetti quando questi sono disposti in modo regolare e, viceversa, a sottostimare la loro numerosità se sono sparsi nello spazio. (Frith & Frit, 1972; Izard & Dehaene, 2008; Krueger, 1972). In quanto capacità innate i sistemi di OTS e ANS sono posseduti anche dagli animali, i quali discriminano le numerosità in modo approssimato come gli umani. Nel regno animale questi sistemi sono utilizzati per motivi di sopravvivenza e predatori, grazie ad essi si possono valutare e scegliere il maggiore tra due insiemi di cibo o stimare la grandezza di un branco avversario e scegliere di attaccare in presenza di una superiorità numerica. Infatti, sembrerebbe che animali come: leoni (McComb, Packer, & Pusey, 1994); scimmie (Nieder, Freedman, & Miller, 2002); api (Dacke, & Srinivasan, 2008); pesci (Piffer, Agrillo, & Hyde, 2011); e pulcini (Rugani, Vallortigara, Priftis & Regolin, 2020) siano in grado di discriminare le numerosità.

Possiamo quindi affermare che OTS e ANS hanno delle implicazioni rilevanti nella comprensione ed educazione dello sviluppo delle abilità numeriche nei bambini. Attualmente si ritiene che la rappresentazione della quantità numerica sia un carattere innato e quindi presente fin dalla nascita (Spelke & Xu Fei 2000).

Ancora prima di avere le parole che rappresentano il numero il bambino è in grado di riconoscere e distinguere le quantità. La conoscenza del numero nella specie umana poggia su basi preverbali e pre-simboliche, per tale motivo è possibile riscontrare capacità matematiche nei bambini ancora prima che loro comincino a parlare e ad essere educati al sistema numerico (*Ibidem*).

Come evidenziato fino ad ora possiamo affermare che noi nasciamo con un innato senso del numero, il quale ci aiuta a comprendere e manipolare i concetti numerici (Butterworth (1999); Dehaene (2011). Grazie ai sistemi di base di OTS e ANS, posseduti anche dagli animali, possiamo distinguere in maniera più o meno approssimata le quantità numeriche che osserviamo. In particolare, abbiamo un'accuratezza maggiore per i numeri da 1 a 4, che sono processati attraverso l'ANS, mentre possiamo fornire delle stime più o meno imprecise grazie al sistema OTS (Feigenson et al., 2004).

L'accuratezza delle stime dipende anche dalla distanza che è presente tra due insiemi, infatti, risulta più difficile stimare correttamente grandezze numeriche simili rispetto che due quantità numericamente molto differenti. Vi è una percentuale di errore maggiore nella scelta di un numero maggiore se la distanza tra gli elementi che compongono gli insiemi è numericamente piccola. L'effetto distanza è presente anche in compiti che non richiedono il confronto di numerosità come, ad esempio, quando si chiede al bambino di dire se due numeri sono uguali osservando la loro forma grafica. La risposta risulta più rapida se la differenza tra i due numeri è maggiore (Duncan & McFarland, 1980).

La nostra mente attiva in modo automatico il confronto tra le quantità, questa capacità di rappresentazione della quantità è indipendente e precede la capacità linguistico-simbolica di numerare. Si tratta di abilità così dette di proto-aritmetica che implicano la capacità di discriminare quantità diverse, stimare e confrontare in modo approssimativo insiemi numerici ed effettuare semplici operazioni aritmetiche. Wynn (1990, 1992) ha indagato le abilità di operazione nei bambini di pochi mesi, i risultati emersi dalle sue ricerche evidenziano come i bambini possiedono sin da piccoli capacità accurate di addizionare e sottrarre piccoli insiemi.

1.5 Sviluppo dei concetti numerici simbolici

Negli ultimi decenni sono state elaborate teorie differenti sullo sviluppo delle competenze numeriche nei bambini. Le ricerche condotte dimostrano come vi sia un passaggio progressivo da competenze non simboliche a quelle linguistico-simboliche di conteggio e lettura e scrittura di numeri.

La conquista della conoscenza numerica e del suo sviluppo nella fase infantile è un ambito di ricerca ancora attivo, dopo la formulazione stadiale di Piaget (1941) si sono susseguiti altri filoni di ricerca che hanno stipulato principi differenti per lo sviluppo delle capacità computazionali. Dehaene (1997) spiega come esiste un triplo codice della comprensione dei numeri. Il cervello dell'essere umano utilizza tre codici distinti per rappresentare e manipolare le informazioni numeriche: codice analogico, arabico e verbale. Il codice analogico permette di rappresentare i numeri in un formato non simbolico, basato su una "linea numerica mentale", risulta utile per l'intuizione della quantità e per confrontare le grandezze. Il codice arabico è utilizzato per la rappresentazione visiva dei numeri, come le cifre arabe (1, 2, 3, ...), è necessario per la lettura e la scrittura dei numeri. Infine, il codice verbale è utilizzato per la rappresentazione dei numeri attraverso il linguaggio parlato o scritto. È essenziale per operazioni che coinvolgono numeri memorizzati sotto forma di parole.

Secondo Wynn (1990; 1992) possediamo capacità numeriche molto prima di quanto si possa pensare. I suoi studi mostrano che i neonati possono discriminare tra diverse quantità e comprendere semplici operazioni aritmetiche, suggerendo che queste capacità sono innate e formano la base per lo sviluppo successivo della cognizione numerica. Possiamo affermare che vi è una comprensione innata del concetto di numero nei bambini e che questa evolva attraverso le procedure di calcolo. Dalle abilità di base si passa poi all'interno della cultura matematica, secondo Girelli, Lucangeli & Butterworth (2000), l'automazione nell'elaborazione del numero viene raggiunta man mano che progredisce la competenza numerica. Butterworth (2000) sostiene che nel nostro cervello esistono circuiti specializzati per categorizzare il mondo in termini di numerosità, che lo studioso definisce "Modulo numerico". Lo sviluppo della conoscenza numerica nei bambini è un processo complesso che inizia nelle prime fasi della vita e progredisce attraverso diversi stadi, portando alla comprensione completa dei numeri e delle operazioni matematiche Butterworth (*Ibidem*). Lo studioso individua cinque stadi di sviluppo della conoscenza numerica:

1. Fase Pre-verbale (0-2 anni): i neonati mostrano una capacità innata di discriminare quantità diverse senza l'uso del linguaggio. Questo è dimostrato attraverso comportamenti come il subitizing;
2. Acquisizione del Conteggio (2-5 anni): i bambini iniziano a usare parole per indicare numeri e apprendono a contare in modo sequenziale. Durante questo stadio, sviluppano una comprensione dei principi del conteggio, come il principio di cardinalità;
3. Comprensione del Sistema Numerico (5-7 anni): i bambini iniziano a comprendere la struttura dei numeri e il valore posizionale (unità, decine, centinaia). Questo permette loro di riconoscere e scrivere numeri in modo più complesso;
4. Addizione e Sottrazione (7-9 anni): i bambini imparano a eseguire operazioni aritmetiche di base come l'addizione e la sottrazione. Cominciano a risolvere problemi matematici semplici utilizzando queste operazioni e a sviluppare strategie per farlo;
5. Ragionamento Matematico Avanzato (9+ anni): i bambini acquisiscono abilità di ragionamento matematico avanzate, inclusa la moltiplicazione, la divisione, e la comprensione di frazioni e decimali. Sono capaci di applicare la logica matematica per risolvere problemi complessi.

Fuson (1988) analizza e studia come il bambino acquisisce ed associa il significato alle parole-numero e come il significato viene integrato. L'autrice condivide con gli studiosi precedenti i tre principi di conteggio e presuppone che questi vengano acquisiti in maniera graduale attraverso l'imitazione e la ripetizione di esercizi. Inoltre, un elemento fondamentale per l'acquisizione delle parole-numero è la variabile ambientale: il bambino realizza una propria visione della realtà e del numero basandosi sul mondo che lo circonda e sulle influenze che esso fornisce (*Ibidem*). In relazione all'ambiente Fuson (1988) individua tre differenti contesti d'uso differenti in cui vengono apprese le parole-numero da parte dei bambini, tali parole vengono utilizzate non solamente per indicare la numerosità. Il primo contesto riguarda la sequenza, rappresenta la recita di filastrocche, in cui la sequenza-numero è senza riferimento ad oggetti specifici. Il secondo contesto riguarda la conta, in cui vi è un rapporto uno ad uno tra oggetto e parole-numero enunciate. L'ultimo contesto è quello cardinale, in questo caso la parola-numero rappresenta la numerosità dell'insieme totale.

Nello sviluppo dell'uso delle parole-numero quindi si passa da una prima fase in cui i contesti di utilizzo sono separati e non interconnessi ad un livello superiore in cui il bambino acquisisce e fonde tra di loro i vari significati elaborando l'idea che ogni parola-numero rappresenta una quantità specifica ed è composta da tutte le unità che la precedono. Ogni unità assume il valore cardinale, uno in più rispetto al precedente e uno in meno rispetto al successivo (Lucangeli et al. 2007). Nell'acquisizione della sequenza numerica il bambino comprende e differenzia le parole-numero ed assegna a loro un valore di cardinalità, il processo inizia attorno ai 3 anni e si conclude verso i 9 anni. Fuson (1988) ritiene che il bambino a 4 anni sappia riconoscere il valore cardinale delle parole-numero che vengono pronunciate. Secondo l'autrice, il processo di apprendimento del meccanismo di conta e del concetto di cardinalità prevede almeno cinque livelli evolutivi distinti:

1. sequenza di numeri usata come stringa di parole;
2. si distinguono le parole-numero, ma l'intera sequenza è unidirezionale in avanti;
3. la sequenza è producibile a partire da un numero qualsiasi della serie governata dalle relazioni di prima e dopo;
4. le parole-numero della sequenza sono trattate come entità distinte che non devono più ricorrere ad elementi concreti di corrispondenza biunivoca;
5. la sequenza è usata come catena bidirezionale attraverso la quale si opera in distinti modi.

Al modello dei "contesti diversi" di Fuson (1988) si ispirano anche le ricerche di Steffe, Cobb, Von Glasersfeld (1988), e Steffe (1991) che costituiscono un modello in cinque stadi di sviluppo che differiscono tra loro per differenze qualitative riguardanti il modo di contare dei bambini e sia nello sviluppo delle strutture concettuale relative alla conta stessa.

1. Stadio dello schema di conta percettivo: processo che conta tre capacità, il riconoscimento di una collezione percettive, produzione di una serie numerica e coordinazione di queste due assieme.
2. Stadio dello schema figurativo: il materiale percettivo non risulta più indispensabile al bambino ma c'è la ricerca di qualcosa da contare come le dita o l'enunciazione delle parole-numero.
3. Stadio della serie iniziale dei numeri: c'è la comprensione del valore astratto delle unità, la parola-numero viene considerata unità che contiene le precedenti.
4. Stadio della serie dei numeri con relazioni implicite di inclusione: viene appresa la capacità di ricostruire il concetto di "unità di unità" "unità composite". La parola-numero "quattro" comprende le parole-numero da 1 a 4 ed è compresa nella parola- numero "otto".
5. Stadio della serie dei numeri con relazioni esplicite di inclusione: viene compreso il concetto di ripetibilità. Una sequenza numerica è composta da unità equivalenti iterate e incluse.

Case (2000) individua degli schemi primitivi nella ricostruzione di come si sviluppa la comprensione della relazione tra numeri interi. L'autore individua uno schema relativo al contare, e di aggiungere o togliere. (Lucangeli & Tressoldi 2002). Attraverso questo schema secondo l'autore si arriva poi a creare nella mente del bambino lo schema che è poi la linea numerica mentale ognuno ha come rappresentazione e che permette il passaggio da unità a decine, centinaia migliaia ecc. Per Case (2000) ci sono dei meccanismi che chiama strutture concettuali che sottostanno alla maggior parte dei compiti matematici che i bambini affrontano. Le strutture concettuali sono costituite da tre componenti: strutturale, evolutiva e contestuale. (*Ibidem*)

Il numero è la rappresentazione quantitativa astratta che include le modalità sensoriali, spaziali e temporali, si tratta di un concetto a modale. Il conteggio invece è un'abilità sociale umana. Alla base del concetto numerico vi sono meccanismi percettivi e logici che costituiscono la base dello sviluppo numerico nella mente umana (Keresey & Cantlon 2017).

Il bambino nello sviluppo dell'enunciazione dei numeri procede per stadi, attorno ai due anni comincia a pronunciare le prime parole-numero ma non le utilizza nel modo corretto, le esprime come una sequenza unica di parole, una filastrocca. Successivamente apprende l'ordine sequenziale delle parole-numero prima da 1 a 10 e poi da 1 a 20 fino ad arrivare a 100 alla primaria. La capacità di enumerazione nei bambini in età prescolare è un indicatore delle loro competenze aritmetiche, per tale motivo l'enumerazione dei dots, punti, e il confronto tra grandezze sono fondamentali (Lucangeli, Iannitti & Vettore, 2021).

Il *counting*, capacità di conteggio, poggia sul principio della corrispondenza biunivoca, che differenzia l'enumerazione dalla capacità di collegare un numero ad un dato elemento secondo un ordine ben preciso (Lucangeli & Mammarella, 2010). Per corrispondenza biunivoca si intende la relazione tra due insiemi in modo che ad ogni elemento di un insieme corrisponda uno e un solo elemento del secondo insieme. Attraverso questo principio il bambino apprende che ad ogni Parola-numero corrisponde una quantità specifica ed immutabile. (Lucangeli & Mammarella 2010). Spontaneamente i bambini hanno il concetto di corrispondenza biunivoca se osserviamo come suddividono i giocattoli, uno per persona ma non è chiaro come acquisiscano tale capacità fino ai quattro anni (Liverta Sempio 1997).

La cardinalità risulta il terzo elemento fondamentale per il conteggio, l'ultima parola-numero pronunciata durante il conteggio indica la quantità totale degli oggetti dell'insieme, questa capacità è acquisita attorno ai 5 anni. Rappresenta il legame tra rappresentazione numerica e quella non numerica (Lucangeli et al., 2007).

L'assimilazione della lettura e della scrittura avviene per step, si susseguono vari stadi evolutivi, Frith (1985), studiosa inglese, ne individua quattro: logografico, alfabetico, ortografico, lessicale.

Nello stadio logografico il bambino legge le parole in modo globale perché ne riconosce alcuni grafemi già visti. Lo stadio alfabetico invece legge le lettere e le discrimina associando grafema e fonema. Nello stadio ortografico vi è l'abilità di leggere le parole in modo complesso e riconosce la regolarità della lingua madre. L'ultimo stadio, fonologico, il bambino possiede un vocabolario lessicale per poter leggere in modo autonomo. Frith (1985) sostiene che la capacità di scrittura sia sempre preceduta da quella di lettura o identificazione dei grafemi. Il medesimo principio è messo in atto quando si tratta di codifica verbale dei numeri anche se la capacità di riconoscere un determinato numero è indipendente dalla capacità di rappresentare in modo preciso la numerosità. Accade che i bambini possono saper leggere o individuare un numero senza comprenderne però la quantità che esso rappresenta. Nella discriminazione dei numeri scritti il bambino comprende e riconosce i numeri dall' 1 al 9 ma è in grado di leggere numeri anche maggiori senza però comprenderne la numerosità (Frith 1985). Ogni numero possiede un nome differente a seconda della posizione che occupa, il bambino quindi può essere in grado di leggere il numero ma non di rappresentare la quantità. (Lucangeli et al., 2007).

In età prescolare il bambino acquisisce gli stadi basilari per l'assimilazione dei segni numerici, vengono fatti propri i simboli numerici dopo che si riconosce la relazione tra significato e significante (Lucangeli, Iannitti & Vettore, 2021). Hughes (1987) individua quattro tipologie di rappresentazione grafica della numerosità nei bambini tra i 3 e 5 anni: la rappresentazione idiosincratica che riflette segni incomprensibili da parte dell'adulto; la rappresentazione pittografica in cui il bambino raffigura la numerosità attraverso degli oggetti; la rappresentazione iconica che utilizza segni grafici come linee o punti; la rappresentazione simbolica che è formata dai numeri arabici. Nelle fasi di sviluppo si è notato come i bambini di tre anni utilizzano maggiormente segni idiosincratici e pittografici mentre dai quattro anni inizia l'utilizzo di segni iconici in cui i numeri sono rappresentati con simboli e lettere, solamente a 5 anni vi è l'utilizzo corretto dei numeri arabici per rappresentare quantità fino a 9 (Hughes, 1987).

Possiamo affermare quindi che l'abilità di scrittura del numero nei bambini in età prescolare avviene solo quando i meccanismi di riconoscimento preverbale della numerosità si sono uniti agli apprendimenti del processo di *counting* (Lucangeli et al. 2007).

CAPITOLO 2: Il numero zero

Le ricerche mirate alla comprensione di come viene acquisito il concetto di zero nella fascia prescolare attualmente presentano risultati contrastanti riguardo tale abilità. Da un punto di vista evolutivo lo zero è un numero che possiamo definire "giovane" (1999). Lo zero dimostra di avere una storia differente rispetto agli altri numeri, esso compare in ritardo rispetto agli altri numeri e ha delle modalità di acquisizione differenti in quanto risulta essere un concetto molto più astratto dei numeri con cui quotidianamente entrano in relazione i bambini (Vigna & Benavides-Varela, 2020). Che cosa c'è di speciale nello zero? Nel corso della storia umana, il primo esempio registrato del simbolo zero utilizzato per rappresentare la quantità o la sua assenza è stato un evento relativamente tardivo rispetto ad altri concetti numerici (Nieder, 2016). Questa acquisizione prolungata dello zero nel corso della storia umana rispecchia anche l'acquisizione ritardata dello zero nello sviluppo umano: le ricerche effettuate suggeriscono che la comprensione dei simboli per lo zero da parte dei bambini in età prescolare è molto indietro rispetto a quella di altri numeri piccoli comparabili.

2.1 La storia dello zero

Filosoficamente lo zero è legato al concetto di non-essere, sin da Parmenide fino ai filosofi contemporanei. Attraverso i secoli lo zero è stato oggetto di discussioni in relazione al suo legame con il concetto di nulla e vuoto e anche come numero. Il numero zero ha diversi significati nelle diverse culture e contesti. Dal punto di vista matematico, rappresenta l'assenza di quantità o valore. Tuttavia, il concetto di zero è andato oltre il suo significato numerico. Nella filosofia indiana, ad esempio, il numero zero è associato al concetto di vuoto e rappresenta anche un simbolo di spiritualità. In campo informatico, il numero zero è utilizzato per indicare la presenza o l'assenza di determinate condizioni. Inoltre, il numero zero ha anche un significato simbolico e concettuale, rappresentando l'inizio di un nuovo conteggio o il punto di partenza di una scala di valori. Grazie al numero zero, è stato possibile sviluppare sistemi di numerazione e calcolo più avanzati. Ha reso possibile l'introduzione dei numeri negativi e delle operazioni matematiche più complesse.

Nella storia lo zero ha cominciato ad essere utilizzato come numero in tarda epoca, nel IV secolo a.C. con l'invasione dell'India da parte dei Macedoni abbiamo la mescolanza dei sistemi matematici e l'intuizione che lo zero potesse essere utilizzato al pari degli altri numeri, così si introdusse il concetto di zero anche in occidente. In epoca precedente, civiltà come quella cinese o babilonese, utilizzavano lo zero per rappresentare il vuoto, esso non aveva valore posizionale, funge da segnaposto (Vigna & Benavides-Varela, 2020). Allo zero viene associata la funzione di numero per la prima volta dagli indiani, con il termine *shunya-samchyayè.* La concezione di zero come numero sposta il principio di quantità da "non ce n'è nessuno" a "ce ne sono zero" (Capucci, Raiteri & Cazzaniga, 2001). In uno scritto in sanscrito databile 628 d.C. si fa riferimento a delle regole matematiche per calcolare con lo zero, si legge "*Quando zero viene aggiunto a un numero o sottratto da un numero, il numero rimane invariato; e un numero moltiplicato per zero diventa zero"* (Nieder 2016). Quest'intuizione portò alla nascita dell'algebra, che si diffuse sempre più in altri popoli come in quello mussulmano durante la sua conquista della Cina, portando così ad una diffusione sempre più ampia e condivisa di questo nuovo concetto di zero. Solo nel '500, dopo diversi scontri accademici, i numeri arabi e l'uso dello zero vennero definitivamente accettati ed utilizzati in tutta la loro potenzialità (Vigna & Benavides-Varela, 2020). L'introduzione dello zero come numero algebrico viene associata all'indiano Brahmagupta, esso è concepito come quantità che permette di alterare le altre nove cifre algebriche. Ripreso anche dal matematico italiano Leonardo Pisano, Fibonacci, lo zero non è ancora concepito come un numero vero e proprio ma come un'entità di cui bisogna tenere conto per la sua intenzione di introdurlo nelle pratiche mercantili e di commercio, lo zero perde il suo valore di segnaposto come era utilizzato dalle civiltà antiche. In parallelo all'evoluzione europea anche i Maya utilizzano lo zero non solamente come segnaposto ma esso era considerato il primo numero da cui si comincia a contare. Il popolo Maya ha assegnato allo zero un valore religioso, un esempio è il loro calendario, nella loro concezione ogni mese dell'anno era sotto l'influenza di un dio, l'inizio di ognuno di essi non comincia con il primo giorno ma con il "giorno zero" in quanto essi sostenevano che era necessario un giorno di passaggio di potere da un Dio all'altro. (Dello Schiavo & Baccaglini-Franck, 2017).

Nella concezione moderna della matematica lo zero rappresenta l'elemento neutro della somma dell'insieme dei numeri interi. Tale definizione di deve a Giuseppe Peano (1889) il quale include lo zero come primo assioma del suo sistema numerico. Come ha mostrato l'autore "*dalla premessa che zero è un numero e che ogni numero ha un successore è possibile costruire per via induttiva la serie infinita dei numeri naturali*" (Vallortigara & Panciera, 2014).

2.2 Studi condotti

Gli studi compiuti sulla cognizione numerica in rapporto allo zero non sono molti e ancora oggi differiscono riguardo ai risultati ottenuti.

Uno dei primi studi condotti sulla comprensione del numero zero è stato effettuato da Wellman e Miller (1986), i due scienziati hanno ipotizzato che la comprensione del concetto di zero appaia nei bambini dai tre ai sei anni solamente dopo aver compreso le piccole numerosità ed essere in grado di svolgere operazioni numeriche di addizione e sottrazione con esse. L'ipotesi è quella che la comprensione dello zero sia successiva a quella degli altri numeri e quindi il suo riconoscimento avvenga con accuratezza e velocità differente rispetto agli alti numeri. I bambini imparano prima a identificare il simbolo dello *zero* senza realmente capire cosa significhi semanticamente. Solo successivamente si presume che i bambini imparino che lo zero non rappresenta nulla ma inizialmente senza considerarlo un valore numerico. Pertanto, i bambini in questa fase potrebbero ancora non capire se zero è più o meno di uno. Mentre con i numeri naturali la procedura di conteggio si basa sul presupposto che ci sia qualcosa da contare; un insieme vuoto, senza elementi, non può essere numerato. Lo zero pur essendo un insieme rappresenta il nulla, è un concetto numerico che non può essere esperito e necessita la comprensione a livello astratto (Nieder, 2016). Wellman e Miller (1986) per rispondere alle loro domande di ipotesi idearono dei test per analizzare in che modo i bambini acquisiscono e successivamente padroneggiano il concetto di zero. Sono stati presentati ai bambini quattro differenti test con l'intento di indagare il conteggio all'indietro con e senza oggetti e la conoscenza e il riconoscimento dello zero come numero. Il primo task consiste nel chiedere di contare gli elementi presenti in differenti insiemi, compresi gli insiemi vuoti, il secondo prevede la richiesta di nominare il numero più piccolo conosciuto dai bambini, il terzo compito richiede di nominare i numeri indo-arabi e l'ultimo compito prevede il confronto tra numeri compresi tra zero e cinque nella notazione araba.

Vengono identificate tre fasi della comprensione dello zero:

- nella prima fase vi è la capacità di riconoscere e nominare lo zero, è una fase di familiarizzazione in cui il bambino non assegna un valore di quantità né posizionale all'elemento;

- nella seconda fase avviene la comprensione che lo zero rappresenta una non quantità numerica pari al nulla, niente;
- nella terza e ultima fase il bambino comprende che lo zero può essere associato ai piccoli numeri (1-9), e in particolare comprendono che esso rappresenta il più piccolo dei numeri positivi (*Ibidem*).

Lo zero spesso non è presente nella sequenza di conteggio dei bambini, se chiediamo loro di contare molti cominciano da uno, questo elemento è un dato a favore che supporta la tesi per cui lo zero abbia un'evoluzione e una rappresentazione differente rispetto agli altri numeri (Brysbaert, 1995). Attraverso alcuni studi effettuati con numerosità non-simboliche è stato dimostrato come il tempo di lettura dell'insieme vuoto, rappresentante lo zero, è nettamente superiore rispetto al tempo impiegato per la lettura di altri insiemi con piccole numerosità. Da alcune ricerche condotte viene evidenziato come in un campione di bambini in età prescolare la comprensione della cardinalità dei numeri e la comprensione del concetto di zero non sono fenomeni correlati (Pixner, Dresen & Moeller, 2018). Questa differenza di comprensione viene connessa alla quantità rappresentata da zero che a differenza degli altri numeri rappresenta il nulla. Inoltre, viene legata la difficoltà di percepire lo zero come numero più piccolo anche alla sua acquisizione linguistica, lo zero viene associato alla pluralità del sostantivo a cui si riferisce, questo elemento rende difficile la comprensione che lo zero rappresenta una quantità minore di uno. Lo zero come numero è seguito dalla forma plurale di un sostantivo (ad es. zero cars), per un solo oggetto invece utilizza una forma singolare. Per tutti gli altri numeri la forma plurale indica correttamente la differenziazione tra uno e più e può quindi aiutare i bambini ad acquisire il principio di cardinalità dei piccoli numeri, questa differenza può rappresentare un ostacolo per l'acquisizione da parte dei bambini del concetto di zero (*Ibidem*).

Uno studio successivo condotto da Bialystok e Codd (2000) hanno identificato come lo zero abbia una comprensione uguale agli altri numeri positivi. Le conclusioni raggiunte da questo studio differiscono da quelle espresse dagli studiosi precedenti. Sono stati somministrati dei compiti ai bambini di età compresa tra i tre e sette anni ed è stato chiesto loro di dare differenti quantità di biscotti a dei pupazzi e successivamente ricordare il numero di biscotti dati. Le evidenze hanno dimostrato che i bambini sono stati in grado di lavorare anche con la quantità zero e di ricordare la sua numerosità in seguito. Si noti che nell'indicazione fornita dal somministratore non veniva detto “dai zero biscotti” ma “dai nessun biscotto”, i bambini nel registrare e ricordare la numerosità hanno utilizzato il termine “zero”. In un momento successivo è stato chiesto loro di ricordare le numerosità date ai singoli pupazzi e si è notato come i bambini più piccoli faticassero a ricordare lo zero rispetto alle altre numerosità.

La differenza di conclusione degli studi può derivare da differenze metodologiche e di somministrazione delle richieste. Nell’esperimento di Welman e Miller (1986) si evidenzia tra la seconda e la terza fase una possibile fase aggiuntiva, questa è in realtà paradossale: mentre i bambini sanno che zero è più piccolo di uno, pensano che uno sia il numero più piccolo. Cosa causa questa dissociazione nella loro conoscenza dello zero? Come possibile spiegazione ipotizziamo che i bambini non pensino che lo zero sia un numero. Questo possibile malinteso apparente è osservabile anche negli adulti: in uno studio il 15% degli insegnanti di scuola elementare in servizio ha risposto che zero non è un numero (Wheeler & Feghali, 1983). Un’altra possibile spiegazione è che lo zero non fa parte della lista di conteggio (che di solito inizia con “uno”), ed è per questo che i bambini lo gestiscono in modo diverso (Merritt & Brannon, 2013). Entrambe le spiegazioni suggerirebbero che la meta-conoscenza sullo stato numerico pari a zero potrebbe essere indipendente dalla corretta gestione del valore zero. Di conseguenza si potrebbe pensare che i bambini capiscano sufficientemente lo zero se riescono a confrontarlo correttamente ma non sanno ancora che lo zero dovrebbe essere classificato come numero. Lo studio di Krajcsi et al. (2021) mette in evidenza l'inadeguatezza del modello di Wellman e Miller (1986), sostenendo che i bambini non sono in grado di comprendere lo zero prima di quanto originariamente proposto dagli autori sopra citati.

Lo studio condotto da Krajcsi et al. nel 2021 vuole andare ad analizzare se la conoscenza della cardinalità dei numeri può influenzare positivamente la comprensione dello zero. Il seguente studio si basa sulle ricerche svolte precedentemente e sulle differenze di risultato ottenuto. È importante sottolineare che la conoscenza zero viene misurata con lo stesso compito e con gli stessi criteri della conoscenza dei numeri interi positivi; quindi, questo metodo potrebbe servire come punto di partenza appropriato per classificare i bambini se sanno a cosa si riferisce lo zero. I test sviluppati e somministrati vanno ad indagare la conoscenza della cardinalità.

Nel Give-N task viene richiesto ai bambini di dare delle precise quantità di palline ad un uccello pupazzo, con lo scopo di indagare la comprensione della cardinalità per capire se il bambino reagisce nel modo corretto alle richieste contenenti la parola "zero" o "nulla".

Il secondo compito riguardava la classificazione di insiemi in cui ai bambini è stato chiesto di indicare l'insieme più numeroso *(Ibidem)*.

Vengono poi somministrati compiti aritmetici in cui veniva chiesto ai bambini di aggiungere o sottrarre due numeri e dare il risultato. Anche in questo caso il compito poteva essere proposto sia in forma verbale che spiegato mostrando degli oggetti fisici. Nella prima versione lo zero poteva essere espresso indistintamente sia in forma naturale che matematica, invece nella forma pratica, per lo zero non venivano posti oggetti sul tavolo, ma questa era pur sempre affiancata da una descrizione verbale che poteva esprimere lo zero in entrambe le forme. Il compito veniva proposto inserito in una storia.

Un altro gruppo di task chiede di nominare il numero più piccolo. Questa richiesta ha lo scopo di capire se i bambini consideravano lo zero il numero più piccolo *(Ibidem).*

Nell'ultimo compito viene esplicitamente chiesto ai bambini se l'elemento presentato era un numero o meno. Lo scopo del compito è quello di studiare se i bambini considerano lo zero un numero e se la prestazione in questo compito è relazionata ai compiti operativi precedenti basati su addizioni e sottrazioni. Per determinare se i bambini hanno compreso questo compito di categorizzazione, sono state utilizzate parole numeriche e non numeriche aggiuntive per convalidare il compito. Sono state testate le seguenti sei parole nell'ordine indicato: tre, due, niente, gattino, pop (suono) e zero (*Ibidem*).

Nome dell'attività	**Breve descrizione**
Misurare la conoscenza dei numeri	
Give-N (numeri positivi)	Dai N palline a un agente.
Operazioni con zero	
Give-N (niente e zero)	Dai N palline a un agente.
Confronto	Scegli il set più grande.
Aggiunta	Aggiungi due valori.
Sottrazione	Sottrarre un valore da un altro.
Metaconoscenza sullo zero	
Numero più piccolo	Nomina il numero più piccolo.
È un numero?	Specificare se le diverse cose sono numeri oppure no.

Tabella1: *Sommario dei compiti proposti nella ricerca di Krajcsi et al., (2021)*

Le conclusioni a cui arriva lo studio evidenziano che quasi tutti i bambini (96%) hanno compreso la versione naturale del compito dare zero (“non dare palline”), mentre la versione matematica (“dare zero palline”) si è rivelata più difficile, solo il 45% dei bambini riusciva a dare "zero". Questi dati fanno riflettere riguardo difficoltà nella conoscenza della versione matematica dello zero potrebbe essere radicata nel non conoscere la parola “zero”. Si è notato come i bambini in età prescolare comprendono e gestiscono l’insieme vuoto in un contesto numerico, applicandolo in modo adeguato in diversi contesti numerici quali confronto, addizione e sottrazione. I risultati ottenuti sono in contrasto con quanto affermato da Wellman e Miller (1986), sia per quanto riguarda la gestione dello zero che risulta non essere difficile per i bambini in età prescolare, sia per quanto riguarda la comprensione che zero è il numero più piccolo, essa non influenza la capacità di gestione dello zero da parte dei bambini.

Le difficoltà riscontrate da Krajcsi et al. (2021) riguarda il linguaggio matematico, i bambini in età prescolare pur sapendo gestire insiemi vuoti, non sono in grado di muoversi agilmente quando viene utilizzato il linguaggio matematico. Questo, secondo i ricercatori è legato alla conoscenza del significato della parola “zero”, i bambini che non conoscevano la parola “zero” non erano in grado di risolvere compiti in cui ci si riferiva ad esso con un linguaggio matematico, finché non gli veniva riproposto lo stesso compito sostituendo tale termine con altri, come “nulla” o “niente”. Possiamo affermare che le sfide che i bambini possono incontrare nell'apprendimento dello "zero" sembrano legate a questioni sintattiche e che potrebbero non essere legate l'acquisizione del significato cardinale dello zero, in quanto la sua funzione sintattica è maggiormente comprensibile nella manipolazione di numeri a due o più cifre quindi difficile da raggiungere nel periodo della scuola dell’infanzia (Vigna & Benavides-Varela, 2020).

La comprensione del concetto di zero rappresenta una difficoltà significativa sia per i bambini che per gli adulti. Pinhas & Tzelgov (2012) hanno evidenziato che lo zero possiede proprietà cognitive uniche che lo distinguono dagli altri numeri, influenzando la velocità e l'accuratezza delle risposte nei compiti numerici. Si può affermare che, nonostante le differenze di età e sviluppo cognitivo, lo zero continua a rappresentare un ostacolo concettuale significativo sia per bambini che per adulti. Lo studio compiuto da Pinhas & Tzelgov (2012) ha avuto lo scopo di analizzare la comprensione dello zero negli adulti per comprendere come gli effetti della distanza numerica influiscono nel riconoscimento di tale numero. Il primo esperimento condotto aveva lo scopo di verificare se lo zero veniva automaticamente elaborato come il numero più piccolo. I partecipanti hanno eseguito confronti fisici tra numeri interi a una cifra positivi e negativi con zero. L'ipotesi alla base della sperimentazione ritiene che le rappresentazioni numeriche "complesse" concettualmente come lo zero o i numeri negativi hanno il potenziale per diventare una rappresentazione "primitiva" con una quantità sufficiente di pratica, cioè per essere rappresentate unità indipendenti come si evince anche da uno studio precedente condotto da Kallai & Tzelgov, 2009. Sebbene la comprensione di zero non sia intuitiva ma piuttosto si sviluppi gradualmente è possibile che come risultato di un adeguato apprendimento, zero abbia acquisito lo stato di un primitivo nella memoria a lungo termine negli adulti sani. I risultati dell'esperimento hanno dimostrato che lo zero viene processato in modo simile agli altri numeri in alcune situazioni, ma presenta caratteristiche distintive in altre, i risultati suggeriscono che il nostro cervello tratta lo zero come un caso speciale. Questa peculiarità rende la cognizione dello zero particolarmente complessa anche per gli adulti, che spesso devono fare i conti con la sua dualità come numero e simbolo di assenza. Nel secondo esperimento zero o uno sono stati utilizzati come numero più piccolo percepito nell'insieme, cioè come stimolo finale percepito. Ciò è stato fatto per verificare se si riscontra un effetto finale automatico nel confronto con zero, nonché in confronto con uno, il numero più piccolo più familiare e utilizzato frequentemente. I risultati ottenuti evidenziano che lo zero è immagazzinato nella memoria a lungo termine come parte della linea numerica mentale. Questo dovrebbe essere tenuto presente quando lo si valuta dal punto di vista delle incoerenze esistenti riguardo allo stato rappresentazionale di zero. Infatti, Fischer & Rottmann (2005) hanno suggerito che la linea numerica mentale inizia con zero. Per quanto riguarda la relazione tra cardinalità e ordinalità sembra che finché non si comprende la nozione di insieme vuoto, zero, esiste una relazione di identità tra cordialità e cardinalità: uno viene percepito come la grandezza più piccola e la prima in ordine, due corrisponde alla quantità seconda in grandezza e la seconda in ordine, ecc. Tuttavia, una volta compreso il concetto di insieme vuoto di zero è necessario distinguere tra cardinalità, che rappresenta il numero di membri di un insieme e cordialità, che rappresenta la posizione relativa di un dato numero in un insieme. Come sostengono Jacob & Nieder

(2008) e Pinhas & Tzelgov (2012), può essere vero che neuroni diversi sono attivi nella codifica dell'ordinalità e della cardinalità.

Questi diversi studi mettono in evidenza come l'apprendimento del numero zero in rapporto con l'evoluzione del bambino dipende dai suoi significati intrinsechi: il concetto cardinale, ad esempio, viene interiorizzato molto prima rispetto al significato ordinale e quindi alla capacità di collocare questo numero all'interno della linea numerica. Sembrerebbe che l'acquisizione di questo numero avvenga in maniera graduale e dipenda da svariati fattori e diversi step che il bambino è in grado di compiere solo in determinati momenti del suo sviluppo. Il presente studio si inserisce in questo panorama di ricerca al fine di verificare la conoscenza cardinale di zero da parte dei bambini in età prescolare e la loro capacità di operare con insiemi vuoti in operazioni di proto-aritmetica. Ci proponiamo di fare questo attraverso la somministrazione ad un campione di bambini di task digitalizzati che sotto forma di gioco vanno a indagare le loro capacità in compiti di addizione, sottrazione e riconoscimento della cardinalità dei numeri e di zero in diverse condizioni.

CAPITOLO 3: La ricerca

La capacità dei bambini di operare con quantità non simboliche discrete e con il precursore di zero rappresenta un aspetto cruciale nello sviluppo delle loro competenze matematiche. Diversi studi hanno esplorato le modalità con cui i bambini comprendano e manipolino quantità numeriche, mentre il ruolo specifico del precursore dello zero (insiemi vuoti) rimane un'area di ricerca in continua evoluzione e ancora poco esplorata (Merritt & Brannon, 2013; Krajcsi et al., 2021). Le ricerche condotte, fino ad ora, con i bambini per studiare come si apprende il concetto di assenza di quantità sembrano orientate verso l'affermare che esiste uno sviluppo stadiale nella rappresentazione dell'insieme vuoto e del significato di zero (Nieder, 2016). Il precursore dello zero rappresenta un'eccezione nell'ambito dell'acquisizione e dell'apprendimento dei numeri. Rimangono ancora questioni in sospeso riguardanti i tempi e modi nei quali si sviluppa l'abilità di usare l'insieme vuoto come operando, su come si stabilizzi la relazione d'ordine tra zero e gli altri numeri neurali individuando zero come il più piccolo numero e su come, difficoltà riguardo alla percezione dello zero simbolico come più piccolo numero, si sciolgono in età molto tardiva (Krajcsi et al., 2021).

La capacità di addizionare e sottrarre lo zero è stata indagata da Kracjcsi et al. (2021) nel range delle piccole numerosità attraverso compiti verbali e con oggetti reali. Questo potrebbe essere dovuto alla complessità aggiuntiva che lo zero introduce nel concetto di numero e operazioni matematiche. I bambini si dimostrano quindi capaci di gestire insiemi vuoti con esito positivo per risolvere compiti numerici. Ciò non esclude però la possibilità di non aver ancora compreso invece la parola "zero" nei suoi significati, anzi, alcune ricerche hanno supposto che i bambini non siano consci della "natura numerica dello zero" (Vigna & Benavides-Varela, 2020).

La nostra ricerca si pone anche di verificare:

- l'accuratezza e di tempi di risposta nelle operazioni di addizione e sottrazione con insiemi vuoti (zero non simbolico) e con numerosità discreta;
- se vi è una relazione tra l'accuratezza nei compiti con gli insiemi vuoti e la conoscenza della cardinalità di zero.

3.1. Le domande di ricerca

La ricerca effettuata ha lo scopo di rispondere alle seguenti domande che vanno ad analizzare le capacità proto-aritmetiche dei bambini in età prescolare e la loro abilità di operare con insiemi vuoti e di conoscere la cardinalità di zero. Attraverso due tipologie di test differenti ci siamo posti le seguenti domande:

3.1.1 L'accuratezza è differente fra compiti con lo zero e con quantità nelle diverse operazioni di addizione e sottrazione?

Nell'accuratezza con addizione e sottrazione con quantità numeriche e con il precursore dello zero ci aspettiamo che non vi sia differenza di accuratezza nei compiti con numerosità rispetto ai compiti con zero non simbolico. Gli studi effettuati e citati nei capitoli precedenti suggeriscono che i bambini sviluppano in modo graduale il concetto di zero, possono esserci delle difficoltà nel manipolare lo zero a livello lessicale e semantico, ma per quanto riguarda lo svolgimento di operazioni con insiemi non simbolici non vi sono differenze sostanziali. Krajcsi et al. (2021) hanno evidenziato che l'insieme vuoto viene trattato dai bambini come le piccole quantità. Nello studio i bambini si sono dimostrati in grado di comprendere la natura cardinale del numero zero e hanno mostrato capacità di gestire insiemi vuoti, non simbolici, con esito positivo per risolvere compiti numerici. Butterworth (1999) ha suggerito che la comprensione dello zero richiede un ulteriore sviluppo cognitivo, il che potrebbe spiegare perché i bambini potrebbero commettere più errori nei compiti che coinvolgono lo zero simbolico.

3.1.2 I tempi di reazione sono differenti fra compiti con lo zero e con quantità nelle diverse operazioni di addizione e sottrazione?

Relativamente ai tempi di reazione l'ipotesi effettuata è che vi sia una differenza significativa tra i tempi di reazione impegnati per operare con quantità rispetto a quelli impiegati per operare con lo zero. Nello specifico si ipotizza che i tempi di reazione nelle risposte siano minori per quanto riguarda l'operazione con insiemi pieni e in particolare si stima dei tempi di reazione inferiori nelle operazioni di proto-aritmetica di sottrazione rispetto all'addizione. Neider (2016) ha mostrato che i bambini potrebbero avere tempi di reazione più lunghi nei compiti che coinvolgono lo zero, a causa della sua natura unica come rappresentazione dell'assenza di quantità. Dehaene (2011) ha suggerito che i tempi di reazione nei compiti aritmetici sono influenzati dalla familiarità con le quantità coinvolte; quindi, lo zero, essendo meno intuitivo, potrebbe richiedere tempi di elaborazione più lunghi. Krajcsi et al. (2021) hanno anche indicato che la complessità aggiuntiva del concetto di zero potrebbe prolungare i tempi di reazione rispetto a operazioni con altre quantità. Nel suo studio Krajcsi et al. (2021) si riferiscono a compiti simbolici, nel nostro studio noi andremo a verificare i tempi di risposta con insiemi vuoti.

3.1.3 L'accuratezza nei compiti con gli insiemi vuoti dipendono dalla conoscenza della cardinalità 0?

La nostra ipotesi in merito all'accuratezza nello svolgere compiti con insiemi vuoti è quella che essa dipenda dalla conoscenza della cardinalità di zero. Secondo quanto evidenziato dagli studi di Wellman e Miller (1986) l'importanza della concessione dei concetti di zero influenza l'accuratezza nello sviluppo delle competenze aritmetiche dei bambini in particolare la capacità di operare con insieme vuoti dipende dalla padronanza del concetto di zero. La capacità di riconoscere e manipolare insiemi vuoti potrebbe essere strettamente legata alla conoscenza della cardinalità zero.

3.2. Partecipanti

La ricerca si è svolta presso la scuola dell'infanzia paritaria "Maria di Fatima" del comune di Campo San Martino (PD). Sono state coinvolte le quattro sezioni eterogenee della scuola, nello specifico il campione analizzato si è composto di 29 partecipanti, 15 maschi e 14 femmine, d'età compresa tra i 48 e i 63 mesi. All'interno delle quattro sezioni sono stati considerati quindi solamente coloro che hanno già compiuto quattro anni (M= 4 anni e 10 anni).

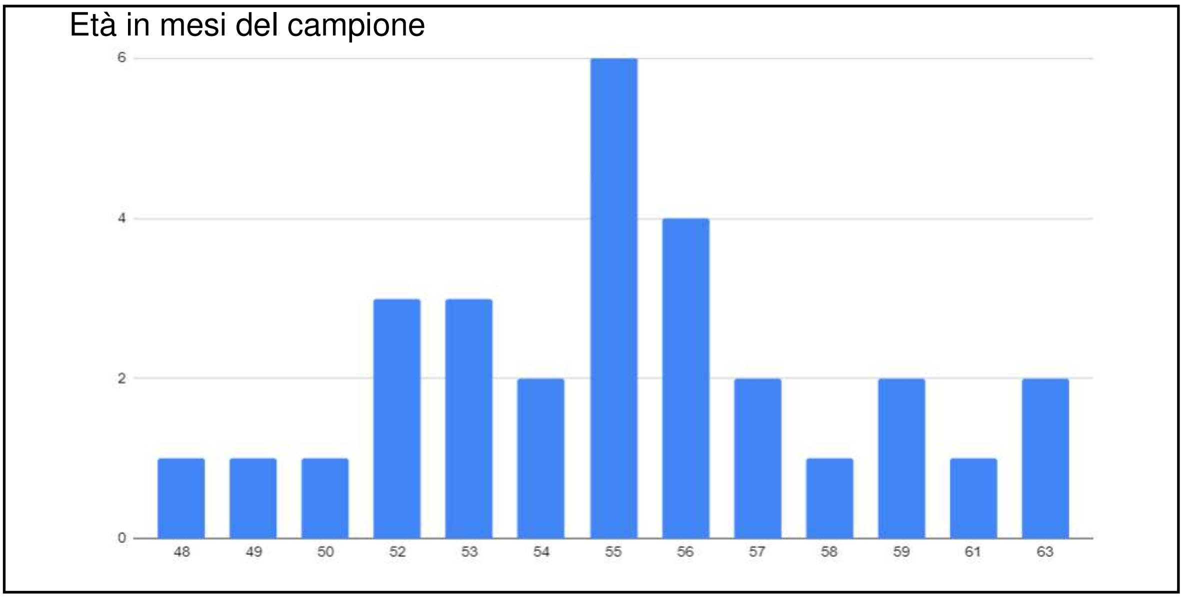


Grafico 1: *Età in mesi del campione*

3.3. Procedura

Per somministrare i task nella presente ricerca, è stata adottata una procedura standardizzata per garantire la coerenza e la validità dei risultati. Le abilità numeriche sono state misurate mediante tre batterie di test digitalizzati su tablet. I bambini sono stati valutati singolarmente in due sessioni della durata di circa 25 minuti intervallate di alcuni giorni.

I partecipanti sono stati accolti in un ambiente controllato e privo di distrazioni. Dopo una breve fase di ambientamento, i bambini sono stati introdotti ai task aritmetici attraverso un'interfaccia interattiva su tablet, progettata per essere intuitiva e coinvolgente. Si sono svolte due sessioni di test la prima ha compreso i compiti di addizione e Give a Number (GAN), la seconda sessione ha previsto il compito di sottrazione. In entrambe le sessioni i compiti di addizione e sottrazione sono stati caratterizzati dalla presentazione operazioni di proto-aritmetica con quantità non simboliche includendo sia lo zero sia altre quantità. Gli item sono stati somministrati in ordine casuale per evitare effetti di apprendimento o affaticamento. Prima dell'inizio di ogni task, ai bambini sono state fornite istruzioni verbali chiare e sono stati eseguiti alcuni esempi pratici per assicurarsi che comprendessero il compito, i primi 6 trial per il test di addizione e di sottrazione erano di familiarizzazione. Durante la somministrazione, un ricercatore era presente per monitorare il progresso e fornire supporto in caso di necessità, senza però influenzare le risposte dei bambini. I tempi di reazione e l'accuratezza delle risposte sono stati registrati automaticamente dal software, consentendo un'analisi precisa e dettagliata dei dati raccolti.
I task somministrati sono stati strutturati nel seguente modo:

a. Il compito di Addizione ha previsto la somministrazione di 6 trial di familiarizzazione de 64 trial di test, in 32 di essi erano presenti operazioni di addizione con lo zero mentre negli altri 32 erano presenti operazioni con quantità discrete.
   Le quantità si presentavano sotto forma di un array di pallini bianchi disposti su un quadrato nero che scendeva dal centro della schermata e successivamente appariva un altro quadrato laterale, entrambi i quadrati si inserivano in una scatola blu presente al centro dello schermo. In seguito, apparivano sullo schermo due quadrati con un numero differente di pallini, uno dei quali corrisponde alla somma dei precedenti quadrati apparsi e dal somministratore veniva chiesto “quanti pallini ci son nella scatola ora? Tanti così o tanti così?”. La risposta corretta veniva

premiata con la comparsa di una caramella colorata che scoppiava accompagnata da un segnale acustico vivace; in caso di risposta errata compariva una volpe triste (Figura 1). Per ogni risposta sono stati registrati sia il tempo di risposta (in millisecondi) sia l'accuratezza della risposta. Le domande sono suddivise compiti di somma con dell'insieme vuoto (8 domande), somma con insieme vuoto e numerosità (24 domande) e somma con insiemi di numerosità diverse (32 domande) (Tabella 1).

Il compito di sottrazione è stato costruito nel medesimo modo del compito di somma, ma ha differito nella numerosità dei trial sono state aggiunte 16 domande, 8 delle quali riguardanti la sottrazione del medesimo insieme (3-3) (Tabella 2).

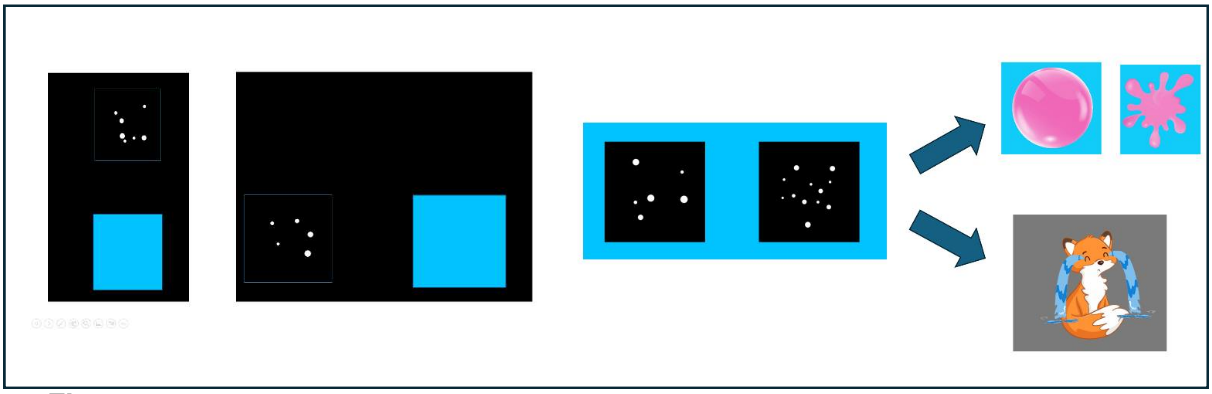


Figura 1

Task	Addendi	Somma /distrattore
Familiarizzazione		
Zero - Zero	0 + 0	0|1 0|2
Numerosità- Zero	0 + 2 0 + 3 0 + 6 0 + 8	2|0 2|1 2|3 2|4 3|2 3|4 3|5 3|6 6|4 6|5 6|7 6|8 6|12 8|4 8|6 8|7 8|9 8|10 8|12
Numerosità- Numerosità	1 +1 1 + 2 3 + 3 2 + 6 5+ 7	2|0 2|1 2|3 2|4 3|1 3|2 3|4 3|5 3|6 6|4 6|5 6|7 6|8 6|12 8|6 8|7 8|9 8|10 8|12 12|6 12|8

***Tabella 1** - Addizione*

Task	Sottraendo/ Minuendo	Somma /distrattore
Familiarizzazione		
Zero - Zero	0 - 0	0|1 0|2
Numerosità- Zero	2 - 0 3 - 0 6- 0 8 - 0	2|0 2|1 2|3 2|4 3|2 3|4 3|5 3|6 6|4 6|5 6|7 6|8 6|12 8|4 8|6 8|7 8|9 8|10 8|12
Numerosità- Numerosità	3 - 1 5 - 2 8 - 2 9 - 1 14-2	2|0 2|1 2|3 2|4 3|1 3|2 3|4 3|5 3|6 6|4 6|5 6|7 6|8 6|12 8|4 8|6 8|7 8|9 8|10 12|6 12|8
Numerosità- Numerosità	3 - 3 14 - 2	0|1 0|2 12|6 12|8

Tabella 2 - Sottrazione

b. Il compito "Give a Number" (GAN) è stato costruito utilizzando un'interfaccia interattiva con un tema accattivante per i bambini, raffigurante un gufo, un albero, delle mele e un cestino (Figura 2). In questo task, i partecipanti sono invitati a "dare un numero" specifico di mele al gufo, mettendole nel suo cestino. L'interfaccia presenta un gufo simpatico posizionato accanto a un cestino vuoto, e un certo numero di mele disponibili su di un albero. Ai bambini viene chiesto verbalmente di mettere un numero preciso di mele nel cestino del gufo. Questo processo richiede ai bambini di contare accuratamente le mele e trascinarle una per una nel cestino, permettendo di valutare la loro capacità di quantificazione e comprensione numerica. Il compito è progettato per essere semplice e intuitivo, con elementi visivi chiari e interazioni facili da gestire, assicurando che i bambini possano concentrarsi sul compito senza difficoltà tecniche. La registrazione automatica delle azioni dei bambini fornisce dati dettagliati sulle loro prestazioni, inclusi il numero di tentativi, l'accuratezza delle risposte e i tempi di esecuzione. Le quantità, chieste, una sola volta, ai bambini da inserire nel cestino sono state in ordine: 2, 4, 3, 6, 7. In caso venisse sbagliato l'inserimento di 2 mele la richiesta successiva non era di 4 mele ma di 1 mela per poi passare a zero mele. Oltre le quantità discrete da inserire nel cestino alla fine del compito viene chiesti di inserire nel cestino "zero mele" e "nessuna mela" questo per poter ottenere dati relativi alla comprensione di zero e di "quantità nulla".

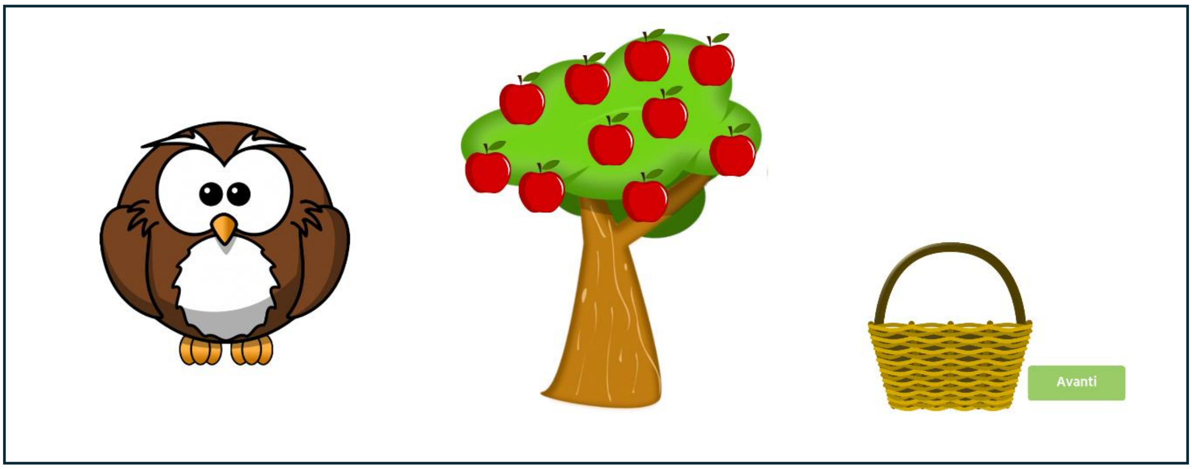


Figura 2

3.4. Analisi dei dati

In questo studio le analisi dei dati sono state condotte attraverso il sistema digitale R-Studio attraverso la realizzazione di un Generalized Linear Model (GLM). Per GLM, si intende una generalizzazione del modello classico di regressione lineare che permette di gestire una varietà di distribuzioni di probabilità per la variabile dipendente. I GLM sono utili quando la relazione tra la variabile dipendente e le variabili indipendenti non è necessariamente lineare e quando la variabile dipendente non è distribuita normalmente. Il GLM consente di dare un peso a tutte le colonne del file e stimare infine il valore di una variabile scelta. Il modello risultante un lineare, rappresentabile con una retta. Una volta che viene individuato un modello è possibile valutarne la "qualità" attraverso l'utilizzo di indicatori come il P- value.

3.4.1 L'accuratezza fra compiti con lo zero e con quantità nelle diverse in operazioni di addizione e sottrazione

Dalle descrittive emerge che l'accuratezza risulta maggiore nei compiti di addizione con lo zero (M=0.53, ds =0.49) rispetto a quelli di addizione con quantità numeriche (M=0.44). Anche l'accuratezza nella sottrazione risulta maggiore nei compiti di sottrazione con zero (M=0.51, ds= 0.49) rispetto a quelli con quantità (M=0.49, ds= 0.50).

Numerosità	Operazione	Media	Deviazione Standard	Standard Error
Quantità	Addizione	0.44	0.49	0.016
Zero	Addizione	0.53	0.49	0.017
Quantità	Sottrazione	0.49	0.50	0.018
Zero	Sottrazione	0.51	0.49	0.016

Tabella 3*: Descrittive di accuratezza tra compiti con zero e quantità in operazioni*

3.4.2 Tempi di reazione fra compiti con lo zero e con quantità nelle diverse in operazioni di addizione e sottrazione

Dall'analisi delle descrittive dei tempi di reazione calcolati in millisecondi risultano mediamente superiori per i compiti di addizione con quantità (M= 3739.138 ms, ds=3101.46 ms) rispetto ai compiti di sottrazione (M=3416.43 ms, ds=2429.03). Nei compiti con lo zero i tempi di reazione risultano simili sia in addizione (M=3680.90 ms, ds=2645.81) che in sottrazione (3464.64 ms, ds=2805.23 ms).

Numerosità	Operazione	RT Media	RT Deviazione Standard	RT Standard Error
Quantità	Addizione	3739.13	3101.46	102.58
Zero	Addizione	3680.90	2645.81	91.18
Quantità	Sottrazione	3416.43	2429.03	88.05
Zero	Sottrazione	3464.63	2805.23	91.74

Tabella 4*: Descrittive dei tempi di reazione tra compiti con zero e quantità*

3.4.3 L'accuratezza nei compiti con gli insiemi vuoti dipende dalla conoscenza della cardinalità

Dalla descrittiva del Give a Number (GAN) si evince che 19 bambini non riconoscono la cardinalità zero, mentre 10 bambini sono in grado di svolgere tale compito.

3.5. Risultati

3.5.1 L'accuratezza è differente fra compiti con lo zero e con quantità nelle diverse operazioni di addizione e sottrazione?

Dall'analisi condotta tramite GLM si evince che nel confronto tra i compiti di addizione con zero e addizione con quantità è presente un effetto significativo ($b = 0.22$, $SE = 0.06$, $z = 3.34$, $p = 0.004$) con un'accuratezza maggiore di zero ($M=0.53$; $Ds=0.49$) rispetto alla quantità ($M=0.44$; $ds=0.49$).

	ACCURACY		
Predictors	*Odds Ratios*	*CI*	*p*
(Intercept)	1.07	0.95 – 1.20	0.289
Quantità	0.79	0.69 – 0.91	**0.001**
Operazioni	1.06	0.93 – 1.21	0.390
Random Effects			
σ^2	3.29		
$\tau_{00\ ID}$	0.00		
N_{ID}	36		
Observations	3431		

Marginal R^2 / Conditional R^2	0.004 / NA

***Tabella 5**: Descrizione modello GLM accuratezza operazioni e quantità*

Inoltre sono stati eseguiti i confronti con metodo Tukey. Dal confronto tra i compiti di sottrazione con zero e addizione con quantità è presente un effetto significativo (b = 0.22, SE = 0.06, z = 3.34, p = 0.004) con un'accuratezza maggiore di zero (M=0.51; ds=0.49) rispetto alla quantità (M=0.49; ds=0.50). Inoltre, si può osservare che da confronto tra i compiti di addizione con la quantità e sottrazione con zero è presente un effetto significativo (b= -0.28; SE=0.09; z=-3.08; p=0.011) con un'accuratezza maggiore della numerosità (M=0.44; ds=0.49) rispetto a zero (M=0.51; ds=0.49).

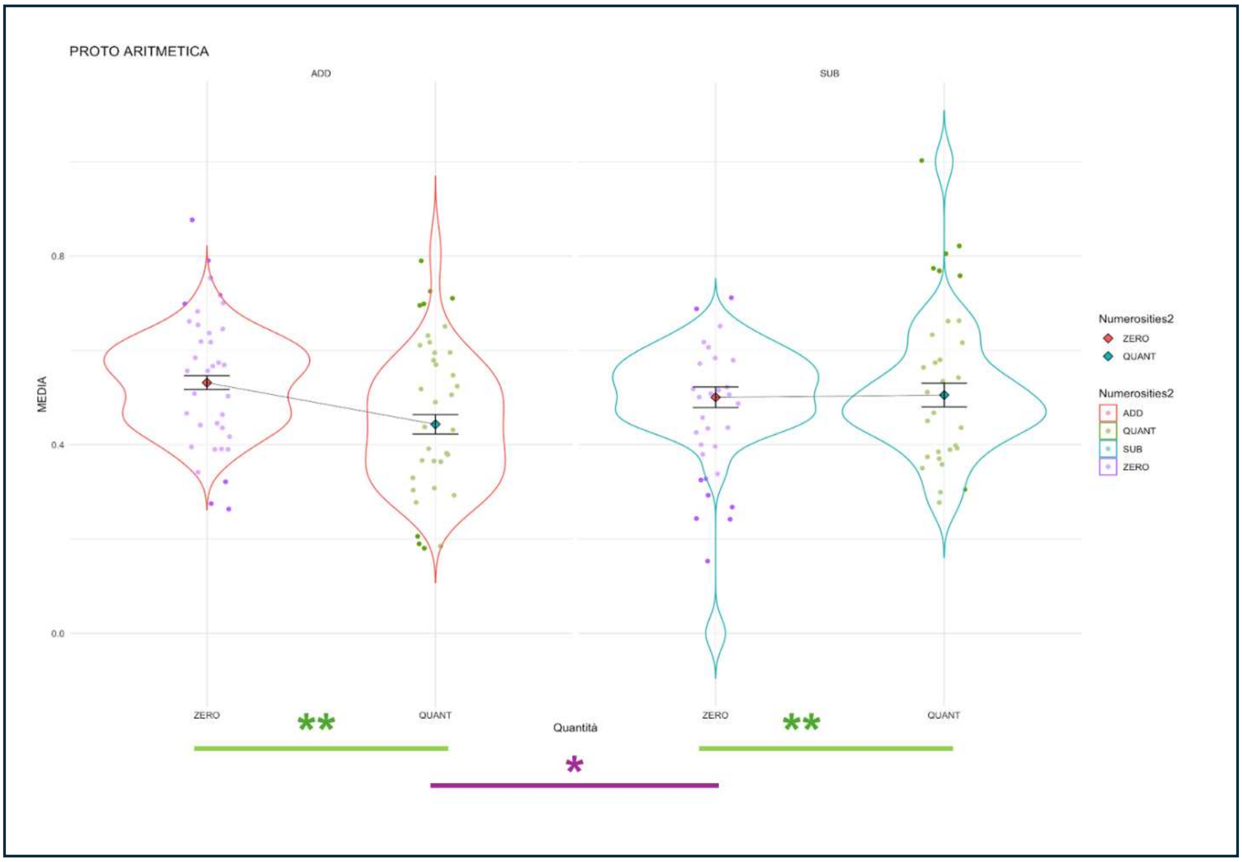


***Grafico 1:** accuratezza nei compiti con lo zero e con quantità nelle operazioni*

3.5.2 I tempi di reazione sono differenti fra compiti con lo zero e con quantità nelle diverse operazioni di addizione e sottrazione?

Attraverso l'analisi del modello lineare generalizzato misto (GLMM) per esaminare l'effetto delle variabili predittive sull'accuratezza sono state incluse le variabili di Numerosità, (quantità vs zero), e Operazioni (addizione vs e sottrazione), come predittori fissi e un effetto casuale per il singolo soggetto.

Predictors	*Estimates*	*CI*	*p*
(Intercept)	3818.72	3807.37 – 3830.08	**<0.001**
Numerosità [QUANT]	5.54	-5.42 – 16.50	0.322
Operazioni [SUB]	-462.76	-479.04 – -446.48	**<0.001**
Random Effects			
σ^2	0.42		
$\tau_{00\ ID}$	664019.67		
ICC	1.00		
N_{ID}	36		
Observations	3452		
Marginal R^2 / Conditional R^2	0.075 / 1.000		

Tabella 4: *Descrizione modello GLM tempi di reazione operazioni e quantità.*

L'analisi ha rilevato che la variabile Numerosità è significativamente associata all'accuratezza (β = -0.22, SE = 0.06, z = -3.34, p < 0.001). Tuttavia, l'intercetta non è risultata significativa (β = 0.06, SE = 0.05, z = 1.0, p = 0.28). La variabile Operazione appare significativamente associata all'accuratezza (E = 0.05, SE = 0.06, z = 0.86, p = 0.39). In seguito con Tukey method dai contrast si è dimostrato che vi è una differenza significativa fra i compiti di addizione con insieme vuoto e i compiti di addizione con insieme pieni (E = 0.22; SE=0.06; z=3.34; p=0.004) con una maggiore accuratezza di zero (M= 0.53; ds=0.49) rispetto alla quantità (M=0.44; ds=0.49).

Inoltre, nei compiti di sottrazione, i tempi di reazione sono significativamente più rapidi con lo zero (E= -462.76; SE= 8.30; z=55.72; p < 0.001). Le differenze nei tempi di reazione tra addizione e sottrazione sono significative, con i tempi di reazione in sottrazione, sia con quantità (M=3416.43 ms) (E= 468.30; SE=10.65; z= 43.98; p<0.001) che con zero (M=3464.639 ms) (E=462.76; SE=8.30; z=55.72; p<0.001), che risultano inferiori rispetto all'addizione.

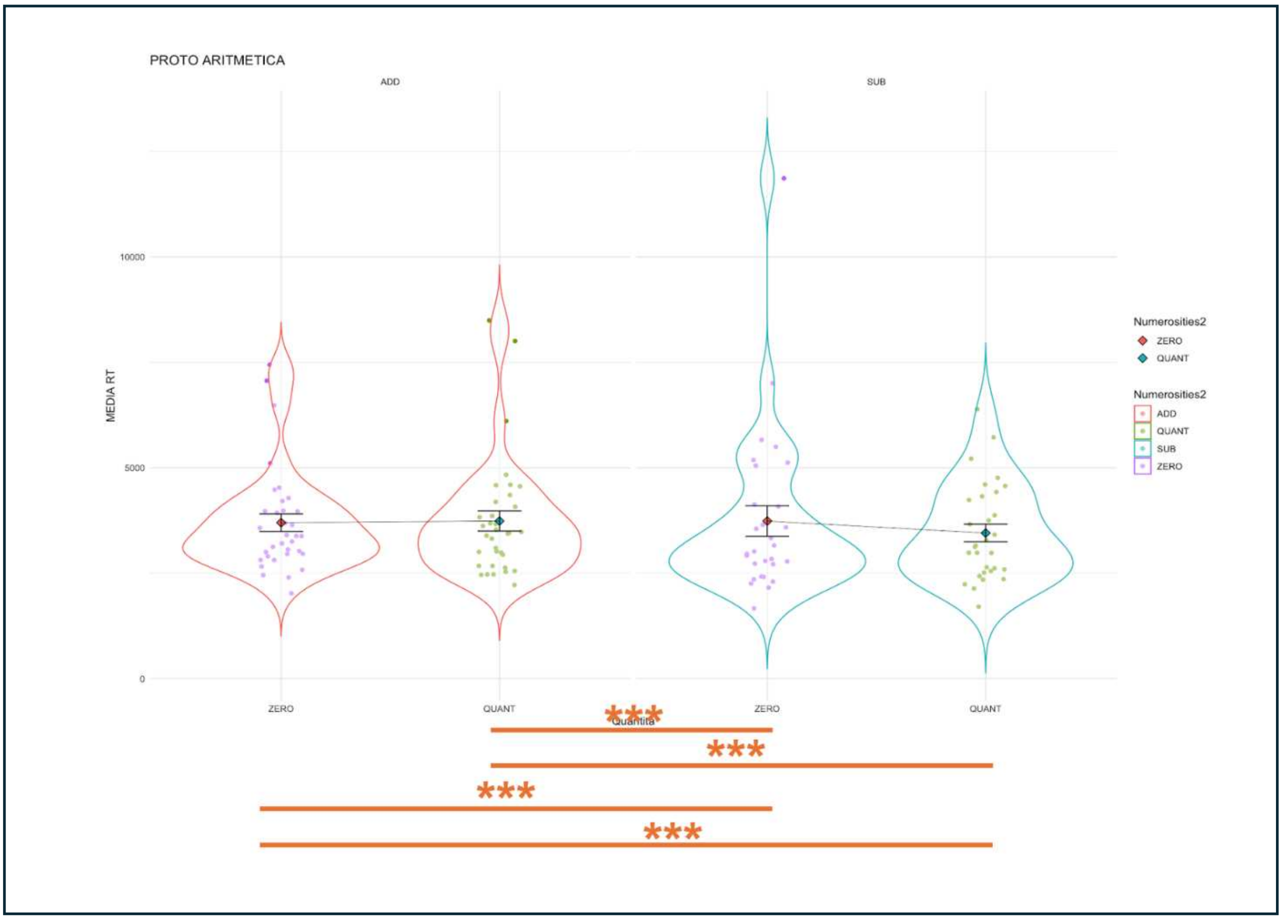


Grafico 2: *Tempi di reazione nei compiti con zero e quantità nelle operazioni*

3.5.3 L'accuratezza nei compiti con gli insiemi vuoti dipendono dalla conoscenza della cardinalità 0?

	ACCURACY		
Predictors	*Odds Ratios*	*CI*	*p*
(Intercept)	1.13	0.96 – 1.33	0.150
Task Name2 [SUB]	0.94	0.77 – 1.14	0.534
GAN Zero	1.03	0.84 – 1.26	0.788
Random Effects			
σ^2	3.29		
$\tau_{00\ ID}$	0.00		
N_{ID}	29		
Observations	1620		
Marginal R^2 / Conditional R^2	0.000 / NA		

Tabella 6: *accuratezza nei compiti con gli insiemi vuoti*

Dall'analisi tramite GLM emerge che non vi è alcun dato significativo, sembra che la conoscenza dello zero non abbia un effetto. L'accuratezza è leggermente superiore nei bambini che conoscono la cardinalità dello zero, sia per addizione che per sottrazione. Tuttavia, le differenze non risultano statisticamente significative. L'accuratezza nei compiti con insiemi vuoti non sembra dipendere significativamente dalla conoscenza della cardinalità zero. I valori p sono tutti superiori a 0.05, suggerendo che la conoscenza della cardinalità 0 non ha un impatto significativo sull'accuratezza nei compiti con insiemi vuoti. Le stime marginali e i contrasti non mostrano differenze significative tra chi conosce la cardinalità zero e chi no.

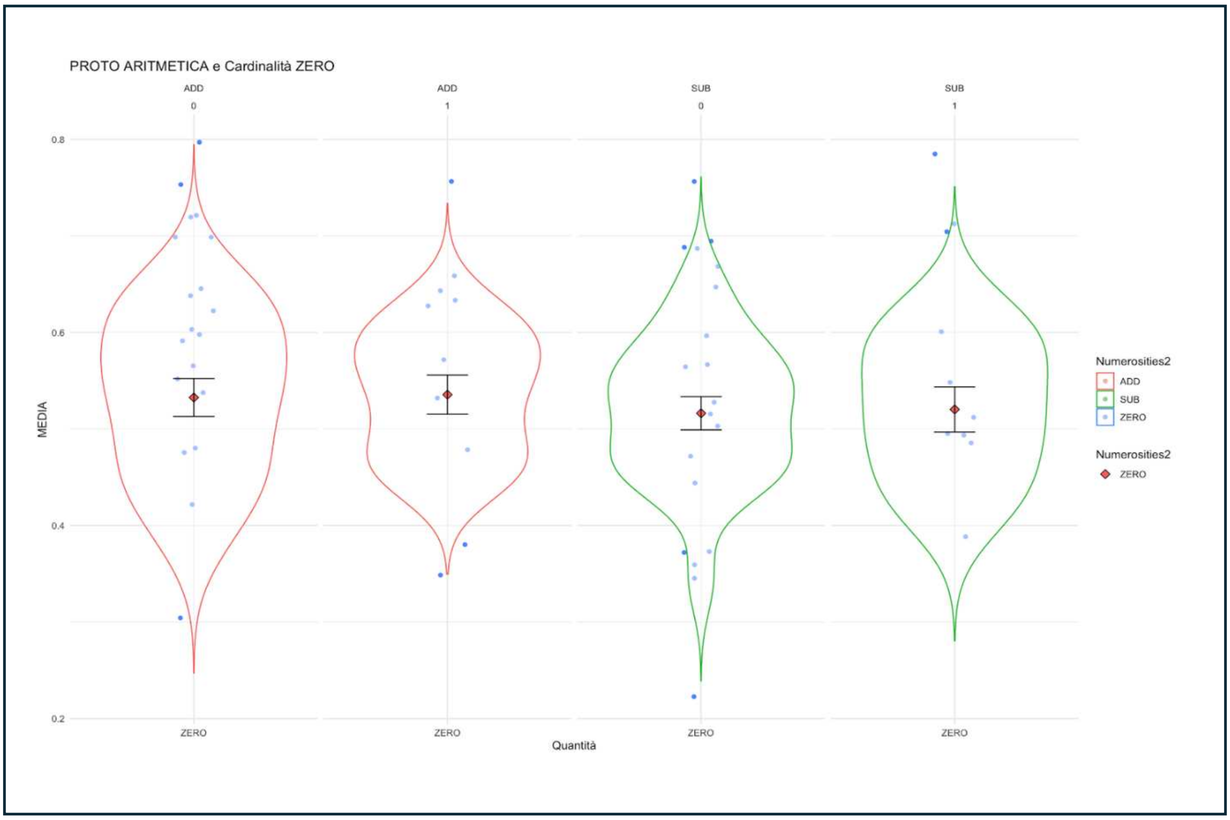


Grafico 3: accuratezza nei compiti con gli insiemi vuoti

3.6 Discussione

I risultati ottenuti ci permettono di affermare che in relazione alla prima ipotesi i dati emersi confutano la nostra idea che le operazioni con zero siano meno accurate rispetto a quelle con numerosità. Possiamo ipotizzare che questo dipenda dal fattore che vengono presentati ai bambini insiemi numerosità non simboliche. Tale affermazione è supportata dagli studi di Wellman e Miller (1986) i quali evidenziano che i bambini imparano a identificare il simbolo dello zero senza comprenderne appieno il significato, portando a una minor accuratezza nei compiti che lo coinvolgono. I bambini in questa fascia d'età percepiscono lo zero come "nulla" o "niente" ma non come numero. In alcuni casi durante la sessione di testing alcuni bambini vedendo comparire un insieme voto hanno affermato "ma non c'è nulla" oppure "è vuoto". Possiamo affermare che sebbene lo zero rappresenti un concetto astratto, i bambini in età prescolare possano avere una comprensione più intuitiva di esso in compiti specifici di addizione e sottrazione. La maggiore accuratezza, in questi compiti, potrebbe essere dovuta al fatto che lo zero, rappresentando un'assenza di quantità, riduce la complessità del compito rispetto alla manipolazione di quantità numeriche diverse. Come afferma anche lo studio sugli adulti di Pinhas e Tzelgov

(2012) lo zero possiede proprietà cognitive uniche che influenzano la velocità e l'accuratezza delle risposte. Questo principio che è espresso nello studio di Pinhas e Tzelgov (2012) in riferimento alle abilità di computazione degli adulti potrebbe forse valere anche per i bambini.

Nella seconda ipotesi in cui si prospettava un tempo di reazione minore nelle operazioni con insiemi pieni rispetto che nelle operazioni con zero e in particolare un minor tempo nelle operazioni di sottrazione è parzialmente comprovato. I dati indicano che i tempi di reazione nei compiti di addizione e sottrazione con lo zero sono leggermente inferiori rispetto ai compiti con altre quantità. In relazione all'accuratezza possiamo affermare che vi è un grado di accuratezza significativo nelle operazioni di addizione con insiemi vuoti rispetto che con insiemi pieni. Questo potrebbe essere in contrapposizione con quanto emerso con i numeri simbolici nello studio di Pixner, Dresen e Moeller (2018) i quali mostrano che il tempo di lettura di un insieme vuoto, rappresentante lo zero, è superiore rispetto agli insiemi con piccole numerosità, i ricercatori suggeriscono che il processo cognitivo necessario per comprendere lo zero è più complesso e richiede più tempo rispetto agli altri numeri. Inoltre, se osserviamo i tempi di reazione delle operazioni di sottrazione rispetto a quelli di addizione risultano inferiori rispetto a quelli di addizione, in conformità con l'ipotesi iniziale. Questi risultati sono parzialmente coerente con l'ipotesi, infatti si osserva che l'effetto della variabile Numerosità sull'accuratezza è rilevante, mentre l'intercetta e la variabile Operazione potrebbero non avere un impatto significativo. Sono necessarie ulteriori indagini per comprendere meglio queste relazioni.

I dati relativi alla terza domanda di ricerca, riguardante l'ipotesi per cui l'accuratezza nei compiti con gli insiemi vuoti dipenda dalla conoscenza della cardinalità zero. Dalle analisi dei dati, è emerso come non vi sia una correlazione tra l'accuratezza dei compiti di operazione con la conoscenza della cardinalità di zero. Secondo le ricerche svolte da Krajcsi (2021) si è notato come i bambini in età prescolare comprendono e gestiscono l'insieme vuoto in un contesto numerico, applicandolo in modo adeguato in diversi contesti numerici quali confronto, addizione e sottrazione. Questo però non ha relazioni con la conoscenza della cardinalità del numero zero. Le difficoltà riscontrate da Krajcsi et al. (2021) riguarda il linguaggio matematico, i bambini in età prescolare pur sapendo gestire insiemi vuoti, non sono in grado di muoversi agilmente quando viene utilizzato il linguaggio matematico. Questo secondo i ricercatori è legato alla conoscenza del significato della parola “zero”, i bambini che non conoscono la parola “zero” non erano in grado di risolvere compiti in cui ci si riferisce ad esso con un linguaggio matematico.

3.7 Conclusioni educative e didattiche

La ricerca educativa in ambito matematico da anni si occupa delle competenze che il bambino deve possedere in entrata nella scuola primaria, ed è ormai affermato che tali competenze sono apprese in modo spontaneo e guidati già in età prescolare grazie alle esperienze vissute in contesti familiari, sociali e alla scuola dell’infanzia. Dehaene (2000) afferma che è necessario stimolare questo aspetto attraverso strategie intelligenti che possano fare leva sull’intuizione dei bambini e permettere quindi il raffinamento del senso dei numeri. Le competenze che si sviluppano sono spesso ingenue, implicite e veicolate da attività di gioco che gli insegnanti predispongono alla scuola dell’infanzia, ciò nonostante, nella scuola dell’infanzia vengono messe le basi per l’apprendimento matematico successivo (Di Paola, 2014). Con quest’approccio fa riferimento all’idea di formazione continua del cittadino e, quindi, al costante approfondimento e/o rivisitazione di conoscenze, abilità e competenze capaci di permettere allo studente di vivere in modo diretto occasioni di ripensamento critico e autonomo del proprio sapere (D’Amore & Sbaragli, 2003; D’Amore & Di Paola, 2016).

Nel decreto ministeriale Indicazioni Nazionali per il Curricolo della scuola dell’Infanzia e del Primo Ciclo d’Istruzione (D.M.254 del 16 novembre 2012) vengono espressi i traguardi per lo sviluppo delle competenze e gli obiettivi di apprendimento per le varie aree di competenze acquisibili alla scuola dell’infanzia. Nel documento sono espressi i campi di esperienza che permettono di suddividere le conoscenze acquisibili in varie aree, attraverso oggetti, contesti, rappresentazioni visive e mezzi di comunicazione, tutti legati ai linguaggi e ai simboli della nostra cultura. Nella sezione dei campi di esperienza possiamo trovare dei riferimenti all’ambito matematico nel campo “la conoscenza del mondo”, attraverso un’esplorazione continua della realtà il bambino si avvicina a quelli che sono i concetti matematici e scientifici facendo ipotesi e verificandone i risultati, questo crea nel bambino la fiducia necessaria per continuare il processo di ricerca di spiegazioni. Il campo di esperienza nel sottoparagrafo “numero e spazio” spiega il rapporto specifico con la matematica in questa età: *“La familiarità con i numeri può nascere a partire da quelli che si usano nella vita di ogni giorno; poi ragionando sulle quantità e sulla numerosità di oggetti diversi, i bambini costruiscono* *le prime fondamentali competenze sul contare oggetti o eventi, accompagnandole con gesti dell'indicare, del togliere e dell'aggiungere. Si avvicinano così alla conoscenza del numero e della struttura delle prime operazioni, suddividono in parti i materiali e realizzano elementari attività di misura. Gradualmente, avviando i primi processi di astrazione, imparano a rappresentare con simboli semplici i risultati delle loro esperienze"* (D.M.254 del 16 novembre 2012, p.28).

A conclusione di questa ricerca sembrerebbe fondamentale ricordare che il bambino ha in sé una predisposizione innata ed orientate all'acquisizione del concetto di numero e al suo uso, già dalla scuola dell'Infanzia. "Tuttavia, l'impatto con il sistema numerico, e con il calcolo in particolare, può essere difficile soprattutto per alcuni bambini se non vengono adeguatamente sviluppate tutte quelle competenze e conoscenze che fungono da precursori all'apprendimento matematico" (Lucangeli et al., 2003).

In particolare, nell'apprendimento dello zero possiamo evidenziare come sia necessario promuovere attività che introducono attraverso la dimensione ludica il concetto di zero come numero con il quale operare. In questo modo si possono prevenire o per lo meno limitare le difficoltà che naturalmente esistono nella manipolazione di questo numero. Per bambini di tre o quattro anni il principale significato associato allo zero è quello di "nulla". A questa età i bambini tendono a indicare la mancanza di elementi come un pugno chiuso, usando espressioni verbali del tipo: «Non ce ne sono». Tuttavia, associare il segno '0' a tale significato sembra richiedere tempi più lunghi rispetto a quelli legati ai segni convenzionali associati a quantità non nulle. A tre o quattro anni i bambini molto più difficilmente usano il termine zero o il suo segno per indicare la mancanza di oggetti, pur essendo circondati dal segno (Dello Schiavo, & Baccaglini-Frank, 2017).

Alla luce degli studi citati in questa tesi e ai suggerimenti forniti dalla normativa ministeriale è necessario promuovere azioni didattiche che stimolino la curiosità degli alunni con giochi e attività coinvolgenti, attraverso l'impiego e la stimolazione dei 5 sensi, che hanno come scopo una familiarizzazione con i numeri compreso lo zero. Queste pratiche dovrebbero essere messe in atto già dal primo anno di scuola dell'Infanzia. In relazione anche ai dati emersi, possiamo dire che i bambini non presentano significative difficoltà nello svolgere compiti matematici con lo zero, per tale motivo è possibile e ipotizzabile un percorso didattico che consideri maggiormente la sua presenza per aumentare le abilità matematiche dei bambini già nella fascia prescolare.

La scuola dell'infanzia, infatti, ha il compito di potenziare quelli che sono identificati come processi cognitivi taciti e permettere, negli anni, il progresso da conoscenze spontanee a scientifiche, non va scordato il potenziale della matematica di attrarre nel momento in cui è insegnata in modo opportuno e adeguato all'età, al contesto, al setting socio-culturale nel quale si realizza l'attività didattica. L'acquisizione di competenze matematiche e proto-matematiche durante tutto l'arco temporale di crescita di uno studente è un processo verticale che comincia già alla scuola dell'infanzia (Di Paola, 2014).

La matematica, nella scuola dell'infanzia, si configura come un sistema simbolico che sostiene gli allievi nei processi di decodificazione della vita reale, nella risoluzione dei problemi, nella revisione ed integrazione delle ipotesi, nell'attribuzione dei significati (Serpe, 2008). Considerata la natura stessa della matematica, l'accesso ai concetti matematici non può avvenire che in maniera indiretta, tramite la mediazione di rappresentazioni semiotiche (D'Amore, 2003; Duval, 2000). Per mobilitare questo processo l'insegnante deve promuovere le motivazioni intrinseche della curiosità, della lucidità e del piacere della scoperta, che sono fattori insostituibili per capire e interpretare la realtà (Costabile & Serpe, 2011). In termini metodologici le proposte didattiche devono collocarsi all'interno di una prospettiva che correla i fenomeni socio-affettivi e le attività di apprendimento, nonché essere trasversali a tutte le aree disciplinari. Per tale motivo le attività che si svolgono in sezione privilegiano la forma del gioco promuovendo il coinvolgimento attivo dei bambini, il gioco è strutturato e diviso in tappe: la definizione della consegna, la situazione d'azione, situazione e formulazione di validazione. Il gioco traduce così il processo di apprendimenti in learning by doing. (Serpe 2018).

CONCLUSIONI

Lo zero è un numero particolare e relativamente giovane. Dalla letteratura precedentemente analizzata e dai dati emersi dalle analisi possiamo affermare che i bambini in età prescolare possiedono una comprensione intuitiva di questo numero, essi sono in grado di operare in addizione e sottrazione con questo numero (Merritt & Brannon, 2013). Da quanto affermato dalle ricerche precedenti si evidenzia che l'apprendimento dello zero segue un processo graduale di acquisizione. I bambini iniziano con una comprensione implicita dell'assenza, progrediscono verso il riconoscimento e l'uso del simbolo "0", e infine acquisiscono una comprensione concettuale avanzata che permette loro di utilizzare lo zero in operazioni matematiche complesse (Wellman & Miller, 1986; Fuson, 1988; Butterworth, 2000). Le teorie precedenti che evidenziano come lo zero rappresenti una sfida cognitiva unica, ma anche una componente fondamentale della comprensione numerica. Vi sono, però, ancora numerose perplessità su come venga appreso il numero zero, quali processi cognitivi intervengono in questa acquisizione e come la mente rappresenti l'assenza di quantità (Merritt & Brannon, 2013; Krajcsi et al. 2021).

Il presente lavoro si è proposto di indagare e verificare tre ipotesi di che si sono concentrate sull'accuratezza, e sui tempi di reazione nei compiti di addizione e sottrazione con insiemi vuoti e quantità numeriche discrete e sulla relazione che l'accuratezza nelle operazioni con zero potesse avere con la conoscenza della cardinalità di questo numero. I dati emersi ed analizzati presentano delle congruenze e delle incongruenze con quanto affermato dalle teorie prese in esame nei capitoli precedenti. Un elemento da considerare nella discussione di questi dati è che il campione preso in esame è molto riduttivo, composto solamente da 29 bambini, e per questo non significativo per negare quanto affermato dalle ricerche condotte su campioni più rappresentativi.

Attraverso il presente studio siamo andati ad indagare il grado di accuratezza e i tempi di risposta nello svolgimento di compiti di proto-aritmetica con operazioni di addizione e sottrazione di insiemi pieni e vuoti. Inoltre, abbiamo indagato se vi fosse una relazione significativa tra l'accuratezza dei compiti in addizione e sottrazione con gli insiemi vuoti e la conoscenza da parte dei bambini della cardinalità di zero. Le modalità di indagine di tali ipotesi si sono svolte attraverso la somministrazione di task simbolici digitalizzati in condizioni controllate.

Le conclusioni, a cui siamo giunti dall'analisi dei dati raccolti, evidenziano che vi è una maggiore accuratezza in addizione e sottrazione nei compiti con insiemi vuoti rispetto a quelli con quantità. Per quanto riguarda i tempi di reazione vi sono dei dati significativi nei tempi relativi alle operazioni con insiemi vuoti sia in addizione che sottrazione con un minor tempo nei compiti di sottrazione. Nonostante ciò, vi sono delle incertezze per cui risulta necessario un ulteriore approfondimento della relazione tra le variabili esaminate. Nell'indagine della relazione significativa tra l'accuratezza dei compiti in addizione e sottrazione con gli insiemi vuoti e la conoscenza da parte dei bambini della cardinalità di zero non sono emersi dati significativi che evidenziano una correlazione tra le due variabili.

BIBLIOGRAFIA

Agrillo, C., Piffer, L., Bisazza, A., & Butterworth, B. (2012). Evidence for two numerical systems that are similar in humans and guppies. PLoS ONE, 7(2), e31923. https://doi.org/10.1371/journal.pone.0031923

Badets A. & Pesenti M., (2013). Ordinality and the nature of symbolic numbers. Journal of Neuroscience, 33(43), 17052-17061. doi: 10.1523/JNEUROSCI.1775- 13.2013

Bassi, L., Vigna, G., & Benavides-Varela, S. (2022). La comprensione dello zero durante l'infanzia. Edizioni Centro Studi Erickson, Trento doi: 10.14605/DIS322201

Beccastrini S., Nannicini M.P. (2008) Il cammino della matematica nella storia. Roma: Armando

Bialystok, E., & Codd, J. (2000). Representing quantity beyond whole numbers: Some, none, and part. Canadian Journal of Experimental Psychology / Revue canadienne de psychologie expérimentale, 54(2), 117–128. https://doi.org/10.1037/h0087334

Boyer C. B. (1990). Storia della matematica [History of Mathematics]. Mondadori.

Brannon, E. M., & Terrace, H. S. (1998). Ordering of the numerosities 1 to 9 by monkeys. Science, 282(5389), 746-749. https://doi.org/10.1126/science.282.5389.746

Brysbaert M. (2005) Number Recognition in Different Formats. Psychology Press

Butterworth, B. (1999). Intelligenza matematica. Vincere la paura dei numeri scoprendo le doti innate della mente. Rizzoli.

Butterworth, B. (2000). "The Mathematical Brain". Macmillan

Butterworth B., C.R. Gallistel, G.Vallortigara (2017). Le origini delle abilità numeriche. Fil. Trans. R.Soc. B.

Case R. (2000). Un modello psicologico dello sviluppo del senso del numero. Età Evolutiva, 65, 5-9.

Calton, J. L., & Brannon, E. M. (2007). Discrimination of continuous and discrete quantity by Rhesus monkeys (Macaca mulatta). Journal of Experimental Psychology: Animal Behavior Processes, 33(1), 32-41. https://doi.org/10.1037/0097-7403.33.1.32

Capucci G, Raiteri A. C., Cazzaniga G. (2001). Lo zero e il senso comune. Rapporto di ricerca sulla provviaorietà di un apprendimento disciplinare. Roma: Amando

Cheung S. K., Chan W.W.L. (2022). The roles of different executive functioning skills inyoung children's mental computation and appliedmathematical problem-solving. British Journal of Developmental Psychology, 40, 151–169.

Coluccelli S., (2018). Montessori incontra. Trento: Erickson.

Coluccelli S. & Pietrantonio S., (2017). Il metodo Montessori oggi. Trento: Erickson.

Costabile, A., & Serpe, A. (2011). Il ruolo della motivazione nella didattica della matematica. Napoli: Liguori Editore.

D'Amore, B. (2003). Didattica della matematica. Bologna: Pitagora Editrice

D'Amore B., Fandiño Pinilla M.I., Cabellini G., Marazzani I., Masi F. & Sbaragli S., (2004). Infanzia e matematica: didattica della matematica nella scuola dell'infanzia. Bologna: Pitagora editrice.

D'Amore B. & Di Paola B. (2016). Dialogo sulla matematica nella scuola dell'infanzia. In: D'Amore B., Sbaragli S. (Editors) (2016). La matematica e la sua didattica, Convegno del trentennale. Atti del Convegno Nazionale "Incontri con la matematica", 30, Castel San Pietro Terme 4-6 novembre 2016. Bologna: Pitagora. ISBN: 88-371-1924-0. 83-84.

D'Amore B., Sgarbagli S. (2017). La matematica e la sua storia. Bari: Edizioni Dedalo

Dacke, M., & Srinivasan, M. V. (2008). Evidence for counting in insects. Animal Cognition, 11(4), 683-689. https://doi.org/10.1007/s10071-008-0159-y

Dehaene, S. (1992). Varieties of numerical abilities. Cognition, 44(1–2), 1–42. https://doi.org/10.1016/0010-0277(92)90049-n

Dehaene, S., & Changeux, J. P. (1993). Development of elementary numerical abilities: A neuronal model. Journal of Cognitive Neuroscience, 5(4), 390-407. https://doi.org/10.1162/jocn.1993.5.4.390

Dehaene, S. (1997). The number sense: How the mind creates mathematics. Oxford University Press. u

Dehaene s., Cohen L. (1997) Cerebral Pathways for Calculation: Double Dissociation between Rote Verbal and Quantitative Knowledge of Arithmetic. Cortex: vol.33, issue 2, 219-250

Dehaene S. (2001). Subtracting Pigeons: Logarithmic or Linear?, Psychological Science, 12 244–246

Deahaene S. (2010) Il pallino della matematica. Scoprire il genio dei numeri che è in noi. Milano: Mondadori.

Dehaene, S. (2011). The number sense: How the mind creates mathematics, Rev. and updated ed (pp. xxii, 316). Oxford University Press.

Dello Schiavo, L., & Baccaglini-Frank, A. (2017). La quantità del nulla. Itacha: Viaggio nella Scienza, X, 95–108.

Di Paola, B. (2014). La matematica nella scuola dell'infanzia. Milano: Franco Angeli.

Di Paola, B., & Montone, A. (2018). Mi descrivi il tuo disegno del Mattoncino Lego? Un'esperienza didattica di matematica nella scuola dell'infanzia. Didattica Della Matematica. Dalla Ricerca Alle Pratiche d'aula

Duncan E.M., McFarland C.E. (1980). Isolating the effects of symbolic distance, and semantic congruity in comparative judgments: An additive-factors analysis. Memory & Cognition 8, 612–622 . https://doi.org/10.3758/BF03213781

Duval, R. (2000). La notion de registre de représentation sémiotique et les fonctions cognitives de la pensée. Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 5, 37-65.

Feigenson, L., Dehaene, S., & Spelke, E. (2004). Core systems of number. Trends in Cognitive Sciences, 8(7), 307-314

Fischer H. Shaki S., (2018). Number concepts: abstract and embodied. The Royal Society. https://doi.org/10.1098/rstb.2017.0125

Frith, C. D., & Frit, A. (1972). The nature of the approximate number system. Journal of Experimental Psychology, 94(2), 147-164.

Fuson, K. C. (1988). Children's Counting and Concepts of Number. Springer-Verlag. Gardner, H. (1999). Intelligence Reframed: Multiple Intelligences for the 21st Century. Basic Books.

Gallistel C.R., Gelman R. (1978). The child understanding of number. Cambridge, MA: Harvard University Press.

Gallistel C.R., Gelman R. (1992). Preverbal and verbal counting and computation. Cognition, 44, 43-74.

Giaquinto M. (2017) Accesso cognitivo ai numeri: il significato filosofico dei risultati empirici sulle abilità numeriche di base. Fil. Trans. R.Soc.

Girelli L., Lucangeli D. Butterworth B. (2000) The Development of Automaticity in Accessing Number Magnitude Journal of Experimental Child Psychology

Volume 76, Issue 2, Pages 104-122

Graziano (2007) Pitagorici si nasce. L'origine naturale del sapere matematico. Roma: Aracne editrice.

Hauser, M. D., Carey, S., & Hauser, L. B. (2000). Spontaneous number representation in semi-free-ranging rhesus monkeys. Proceedings of the Royal Society of London. Series B: Biological Sciences, 267(1445), 829-833. https://doi.org/10.1098/rspb.2000.1078

Ifrah, G. (1994). The universal history of numbers: From prehistory to the invention of the computer (Translated from French by D. Bellos, E. F. Harding, & S. Wood). Wiley.

Izard, V., & Dehaene, S. (2008). Calibrating the mental number line. Cognition, 106(3), 1221-1247.

Jacob S. N., Nieder A. (2008). The ABC of cardinal and ordinal number representations. Trens in Cognitive Science vol. 12. 41-43. DOI: https//doi.org/10.1016/j.tics.2007.11.006

Judge, P. G., Evans, T. A., & Vyas, D. K. (2005). Ordinal representation of numeric quantities by brown capuchin monkeys (Cebus apella). Journal of Experimental Psychology: Animal Behavior Processes, 31(1), 79-94. https://doi.org/10.1037/0097-7403.31.1.79

Kallai, A. Y., & Tzelgov, J. (2009). A generalized fraction: An entity smaller than one on the mental number line. Journal of Experimental Psychology: Human Perception and Performance, 35(6), 1845–1864. https://doi.org/10.1037/a0016892

Kersey, A. J., & Cantlon, J. F. (2017). Primitive concepts of number and the developing human brain. Trends in Cognitive Sciences, 21(10), 790-793. https://doi.org/10.1016/j.tics.2017.06.011

Krajcsi, A., Kojouharova, P., & Lengyel, G. (2021). Development of Preschoolers' Understanding of Zero. Frontiers in Psychology, 12.

Krueger, L. E. (1972). Perception of numerosity. Perception & Psychophysics, 11(5), 375-378.

Liverta-Sempio, O., Marchetti, A. (1997). Cognitive development and theories of mind: towards a contextual approach. Eur J Psychol Educ 12, 3–21
https://doi.org/10.1007/BF03172866

Lucangeli D., Tressoldi E.D. (2002) Lo sviluppo della conoscenza numerica: alle origini del "capire i numeri" Giornale italiano di psicologia. 701-726 | DOI: 10.1421/7749

Lucangeli D., Poli S. & Molin A., (2003). L'intelligenza numerica: abilità cognitive e metacognitive nella costruzione della conoscenza numerica dai 3 ai 6 anni. Trento: Erickson.

Lucangeli, D., Ianniti, A., & Vettore, M. (2007). Lo sviluppo dell'intelligenza numerica. Carocci.

Lucangeli D. & Mammarella I., (2010). Psicologia della cognizione numerica. Milano: Franco Angeli.

Lucangeli D., Ianniti A. & Vettore M., (2021). Lo sviluppo dell'intelligenza numerica. Roma: Carocci.

Mandler, G., and Shebo, B.J. (1982). Subitizing: An analysis of its component processes.Journal of Experimental Psychology: General, 111, 12

McComb K., Packer C., Pusey A., (1994). Roaring and numerical assessment in contests between groups of female lions, Panthera leo. Animal Behaviou. Vol.47 379-387. https://doi.org/10.1006/anbe.1994.1052

Merritt, D. J., and Brannon, E. M. (2013). Nothing to it: precursors to a zero concept in preschoolers. Behav. Process. 93, 91–97. doi: 10.1016/j.beproc.2012.11.001

Negen, J., and Sarnecka, B. W. (2012). Number-concept acquisition and general vocabulary development. Child Dev. 83, 2019–2027. doi: 10.1111/j.1467- 8624.2012.01815.x

Nieder A., Freedman D. J., Miller E.K. (2002). Representation of the Quantity of Visual Items in the Primate Prefrontal Cortex. Science vol. 297. 1708-1711 DOI: 10.1126/science.1072493

Nieder, A. (2016). Representing Something Out of Nothing: The Dawning of Zero. Trends in Cognitive Sciences, 20(11), 830–842.

Pepperberg, I. M. (2006). Grey parrot numerical competence: A review. Animal Cognition, 9(4), 377-391. https://doi.org/10.1007/s10071-006-0034-7

Piaget, J., & Szeminska, A. (1941). La genèse du nombre chez l'enfant. Delachaux & Niestlé.

Piaget J., (2018). La nascita dell'intelligenza nel bambino. Milano: Centauria edizioni.

Piffer, L., Agrillo, C. & Hyde, D.C. (2012) Small and large number discrimination in guppies. Anim Cogn 15, 215–221 . https://doi.org/10.1007/s10071-011-0447-9

Pinhas M., Tzelgov J. (2012) Expanding on the mental number line: zero is perceived as the "smallest" Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory, and Cognition, 38(5), 1187–1205. https://doi.org/10.1037/a0027390

Pixner S, Dresen V, Moeller K. Differential Development of Children's Understanding of the Cardinality of Small Numbers and Zero. Front Psychol. 2018 Sep 25;9:1636. doi: 10.3389/fpsyg.2018.01636. PMID: 30319475; PMCID: PMC6167490.

Radford, L., & Empey, H. (2007). Mathematics and its influence on human thought and behavior. Educational Studies in Mathematics, 65(1), 123-139

Ramani G.B., Siegler R.S. (2008) Promoting Broad and Stable Improvements in Low-Income Children's Numerical Knowledge Through Playing Number Board Games. https://doi.org/10.1111/j.1467-8624.2007.01131.x

Rugani, R., Fontanari, L., Simoni, E., Regolin, L., & Vallortigara, G. (2017). Arithmetic in newborn chicks. Proceedings of the Royal Society B: Biological Sciences, 284(1858), Article 20170683. https://doi.org/10.1098/rspb.2017.0683

Rugani R., Vallortigara G., Priftis K. L. Regolin. (2020) Numerical magnitude, rather than individual bias, explains spatial numerical association in newborn chicks. eLife https://doi.org/10.7554/eLife.54662

Rumbaugh, D. M., Savage-Rumbaugh, S., & Hegel, M. T. (1987). Summation in the chimpanzee (Pan troglodytes). Journal of Experimental Psychology: Animal Behavior Processes, 13(2), 107-115. https://doi.org/10.1037/0097-7403.13.2.107

Serpe, A. (2008). Matematica e scuola dell'infanzia: percorsi e strumenti. Bari: Laterza

Serpe A., (2018). Programmare giocando con ScratchJr nella scuola dell'infanzia. La corrispondenza quantità-numero. DOI: 10.33683/ddm.18.3.7

Starkey, P., & Cooper, R. G. (1980). Perception of numbers by human infants. Science, 210(4473), 1033-1035. https://doi.org/10.1126/science.7433999

Starkey, P., & Cooper, R. G. (1983). The development of subitizing in young children. British Journal of Developmental Psychology, 1(4), 113-126. https://doi.org/10.1111/j.2044-835X.1983.tb00482.x

Starkey, P., Spelke, E. S., & Gelman, R. (1990). Numerical Abstraction by Human Infants. Cognition, 36, 97–127.

Starkey G.S., McCandliss B.D. (2014) The emergence of "groupitizing" in children's numerical cognition. Journal of Experimental Child Psychology. Elsevier

Springer, New York, NY. https://doi.org/10.1007/978-1-4612-3844-7_1

Steffe, L.P., von Glasersfeld, E. (1988). On the Construction of the Counting Scheme. In: Construction of Arithmetical Meanings and Strategies. Recent Research in Psychology.

Steffe L. (1991). Operations that generate quantity. Learning and Individual Differences vol. 3, Issue 1, 61-82 https://doi.org/10.1016/1041-6080(91)90004-K

Trail P. et al. (2008) Counting Ability in an African Lioness. International Journal of Comparative Psychology, vol. 21, no. 4 pp. 432-443.

Vallortigara, G., & Panciera, N. (2014). Cervelli che contano. Adelphi

Vallortigara, G. (2017). 2.2 An animal's sense of number. The nature and development of mathematics: cross disciplinary perspectives on cognition, learning and culture, 43–65

Vighi P. (2011) Raccontare i numeri. I primi passi nella matematica sono un gioco e una scoperta da fare attraverso la narrazione. L'école valdôtaine 89

Vigna G., Benavides-Varela S. 2020, Una revisione della letteratura sulla comprensione del concetto di zero e dei suoi precursori durante l'infanzia. DOI: 10.14605/DIS132003

Wellman, H. M..; Miller, K. F. (1986). Thinking about nothing: Development of concepts of Zero. British Journal of Developmental Psychology, 4(1), https://doi.org/10.1111/j.2044-835x.1986.tb00995.x

Wheeler M. M., Feghali I. (1983). Much Ado about Nothing: Preservice Elementary School Teachers' Concept of Zero. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.14.3.0147

Wynn, K. (1990). Children's understanding of counting. Cognition, 36(2), 155–193.

Wynn K. (1992b). Children's acquisition of the number words and the counting system. Cognitive Psychology, 24, 220-251.

Xu F., Spelke E.S. (2000). Large numbers discrimination in 6-month-old infants. Cognition, 74, B1-B11.

Zamarian, L., Granà A., Semenza C., & Girelli L. (2007). Rappresentarsi il «nulla». Indagine sul concetto di «zero» in bambini di cinque e sei anni. Giornale italiano di psicologia, 2, 427–450.

Normativa ministeriale

D. M. 16 novembre 2012, n. 254, Regolamento recante indicazioni nazionali per il curricolo della scuola dell'infanzia e del primo ciclo d'istruzione, a norma dell'articolo 1, comma 4, del decreto del Presidente della Repubblica n. 89 del 20 marzo 2009. https://www.gazzettaufficiale.it/eli/id/2013/02/05/13G00034/sg

UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI PADOVA
Dipartimento di Filosofia, Sociologia,
Pedagogia e Psicologia applicata

CORSO DI STUDIO MAGISTRALE IN
SCIENZE DELLA FORMAZIONE PRIMARIA

RELAZIONE FINALE DI TIROCINIO

MISURE E GIOCHI A TERRA
percorso didattico sulla misurazione

Relatore
Martina Giuliato

Laureanda
Anna Vanzo

Matricola: 1232260

Anno accademico: 2023/2024

INDICE

1. Introduzione al percorso di tirocinio dell'ultimo anno..2

1.1 Presentazione della classe...2

1.2 Scelta dell'argomento del progetto didattico..3

2. Evoluzione della mia figura professionale in relazione alla dimensione istituzionale...... 5

3. Evoluzione della figura professionale in relazione alla dimensione didattica.................. 8

3.1 Inclusività...9

3.2 Valutazione...10

3.3 Influenze estere..13

4. Evoluzione della mia personalità come docente in ottica professionalizzante...............14

Riferimenti.. 17

Allegati.. 19

1. Introduzione al percorso di tirocinio dell'ultimo anno

Il tirocinio del quinto anno di Scienze della Formazione Primaria ha previsto la progettazione e la realizzazione di una serie di interventi legati tra di loro da continuità didattica. Il focus di questa annualità è stato la progettazione di un percorso in cui si è tenuto in considerazione il raccordo tra le varie aree scolastiche, in modo particolare il raccordo con l'esterno e la dimensione didattica, istituzionale e professionale.

Gli obiettivi di apprendimento di tirocinio si sono basati su:

- predisposizione e utilizzo di strumenti di osservazione per la comprensione e la rilevazione dei processi di apprendimento;
- progettazione, conduzione e valutazione di interventi didattici in classe con focus sul raccordo sistematico tra le dimensioni didattica, istituzionale e professionale;
- conoscenza e utilizzo di modalità e strumenti di auto-osservazione, documentazione dell'esperienza in merito al proprio profilo professionale emergente;
- modalità di relazione nei contesti contesti educativi, formativi e professionali.

In relazione agli obiettivi dell'annualità la mia progettazione didattica e realizzazione dell'intervento hanno previsto il coinvolgimento dell'intera classe nella realizzazione di un progetto in collaborazione con il Comune per la costruzione di giochi a terra. In linea con gli obiettivi didattici e i traguardi espressi nelle Indicazioni Nazionali (2012) l'intento è stato quello di promuovere un percorso di scoperta delle misure, in particolare del metro, allenare i bambini nella capacità di misurare e successivamente, riprendendo competenze da loro già acquisite riguardo il disegno in scala, chiedere loro di produrre un prototipo di un possibile gioco da realizzare nel cortile della scuola.

1.1 Presentazione della classe

La classe in cui ho svolto la mia esperienza di tirocinio è la 3D dell'Istituto Comprensivo di Villafranca Padovana della scuola primaria "Guido Negri". La scuola rientra tra le scuole Senza Zaino e DADA, come sostenuto nel PTOF, tali scuole sono arredate in modo funzionale alle attività da realizzare e attrezzate con materiali didattici avanzati. Nella concezione DADA ogni spazio della scuola (corridoi, scale, atri, giardini, cortili esterni e ovviamente le aule) diventa un unico grande ambiente di apprendimento. Tutti gli spazi sono allestiti con materiali e arredi che stimolano cognitivamente gli studenti e li motivano.

La classe è composta da 23 alunni di cui 9 femmine e 14 maschi, la situazione di apprendimento è molto eterogenea, sono presenti ragazzi con disabilità, alunni con bes e stranieri.

La pratica osservativa permette di ricavare in modo scientifico molteplici informazioni su un dato fenomeno. Per chi si occupa di processi di insegnamento-apprendimento l'osservazione rappresenta lo strumento fondamentale per rilevare dati certi e conoscere fenomeni complessi sottesi ai processi educativi. Le ore dedicate all'osservazione mi hanno permesso di individuare i punti di forza e di debolezza degli studenti, annotare le modalità e le metodologie maggiormente utilizzate dalla docente e le reazioni degli alunni. Grazie all'utilizzo di una griglia osservativa ho analizzato i bisogni della classe, ho appuntato domande, incertezze ed elementi su cui mi sono poi confrontata con la docente. Il dialogo con la mentore mi ha permesso di diventare maggiormente consapevole dei processi di apprendimento-insegnamento stimolati. In ottica professionalizzante ritengo che l'osservazione sia uno degli strumenti più utili ad un insegnante quando si trova ad affrontare un nuovo contesto. I dati rilevati con la griglia di osservazione mi sono serviti per la realizzazione di attività mirate e costruite sulla base delle metodologie che ho ritenuto più opportune ed adatte alle esigenze educative degli alunni.

1.2 Scelta dell'argomento del progetto didattico

Il progetto di tirocinio si è svolto nel periodo tra Febbraio ed Aprile per un totale di 30 ore, 10 di osservazione e 20 di interventi riguardanti il metro e le misurazioni. L'argomento scelto mi ha dato la possibilità di attuare un percorso trasversale in cui venissero incluse competenze logico-matematiche, ma anche storico-culturali riguardanti le differenze dei parametri di misurazione delle varie nazioni ed aree continentali, oltre che offrirmi la possibilità di dedicare spazio alle applicazioni pratiche e ai compiti di realtà. L'organizzazione degli interventi è avvenuta in modo progressivo e lineare grazie alla progettazione a ritroso per competenze che ha portato alla pianificazione sistematica dell'intero progetto. Come sostiene Mumaw (2012) il contesto partecipativo permette lo sviluppo della creatività, competenza chiave che sollecita gli individui ad individuare problemi e risolverli in modo originale. La congiunzione di pratica e teoria fornisce agli studenti un valido supporto per riflettere criticamente sull'acquisizione di competenze spendibili nei contesti reali di vita e di lavoro. Da questo tirocinio è apparso evidente che per un apprendimento efficace, è

indispensabile lo scambio di esperienze e il confronto fra studenti e studentesse. Lo scambio reciproco e le attività sperimentate in prima persona attivano un apprendimento profondo. Dal punto di vista della riflessione pedagogica e dell'agire didattico si tratta di favorire l'attivazione, l'espressione e l'organizzazione di aspetti cognitivi, meta-cognitivi, socio-affettivi, relazionali e motivazionali (Grange & Patera, 2022).
L'argomento della misurazione è stato per me molto interessante e di estrema versatilità. Data la grande eterogeneità della classe e dei processi di apprendimento, ho cercato di fornire ad ogni lezione stimoli diversificati. Spesso le difficoltà maggiori in ambito matematico derivano dalla scollatura tra l'argomento insegnato e la grande ricchezza di esperienze che gli alunni maturano al di fuori della scuola. Gli argomenti matematici sono affrontati in modo asettico senza una adeguata contestualizzazione nella realtà (Bonotto, 2007). Il mio intento didattico è stato unire le esperienze possedute dai ragazzi e i concetti teorici attraverso l'utilizzo di metodologie attive che hanno permesso agli studenti di ricorrere alle conoscenze apprese in ambito extrascolastico ed integrarle con quelle apprese nel contesto scolastico. Nell'apprendimento della matematica Freudenthal (1994) espone come essa venga appresa per integrazione e rielaborazione dei modelli proposti. L'insegnante ha il compito di guidare l'appropriazione dei concetti e degli algoritmi. La procedura fondamentale per ottenere questo risultato deriva dall'osservazione degli allievi, dei loro processi di apprendimento, della loro storia intellettuale. Nella pratica didattica sono partita da esperienze concrete in cui i bambini hanno sperimentato in prima persona differenti modi di misurare, prima con strumenti non convenzionali, successivamente anche con strumenti convenzionali come metro. Il legame alla realtà non è avvenuto solamente nella costruzione dei giochi a terra, ma anche durante altre attività didattiche come la misurazione e il taglio della focaccia in parti uguali. I miei interventi sono stati caratterizzati da una modalità dialogica e riflessiva che ha stimolato il problem solving, ho concesso agli alunni molti momenti in cui loro in prima persona hanno dovuto trovare soluzioni o ipotizzare risposte ai quesiti pratici proposti. In uno degli interventi, dopo aver affrontato il metro ed essersi allenati su come misurare, ai ragazzi è stata proposta una sfida: trovare il modo di tagliare una focaccia, portata in classe quel giorno, in modo tale che ognuno ne potesse un pezzo uguale agli altri. Lo scopo dell'attività era quello di osservare e valutare le loro capacità di problem solving e di misurazione in un contesto reale.

Il legame della parte teorica con la realizzazione di esperienze pratiche rientra in una modalità didattica basata sull'uso di un compito autentico per la valutazione dell'apprendimento, nell'idea di progettazione a ritroso (Wigging, Mctighe, 2004) è ben chiaro il fine del percorso didattico che si sta andando a realizzare, le attività proposte sono state ideate e valutate in base alle evidenze di accertamento che si intendono verificare.

Tagli della focaccia

2. **Evoluzione della mia figura professionale in relazione alla dimensione istituzionale**

Uno degli obiettivi del progetto è stato quello della realizzazione di un compito autentico che prevedeva la possibilità di dipingere e costruire dei giochi a terra nel cortile della scuola. Per realizzare il mio obiettivo ho dovuto richiedere e avere l'approvazione del progetto anche da parte dell'amministrazione comunale. Le procedure di interazione con il Comune non sono state semplici, i tempi di risposta sono stati molto lunghi, ma nel mio rapportarmi con l'ente ho avuto il supporto della mia tutor, delle colleghe insegnanti e della vicepreside che ha tenuto i rapporti con l'assessore. Da questa esperienza ho compreso che per realizzare un progetto in collaborazione con enti esterni alla scuola vi sono numerose procedure burocratiche da compiere e la tempistica è l'incognita maggiore da affrontare. Io mi sono organizzata con puntualità e anticipo, ma nonostante questo ci sono state delle complicazioni che non hanno permesso la piena realizzazione del progetto. L'approvazione per il disegno non è arrivata nei tempi prestabiliti, ma è stata concessa per il mese di maggio e questo non mi ha permesso di realizzare a pieno il progetto. Ho dovuto trovare una soluzione alternativa per permettere agli alunni il completamento del progetto e del percorso e non perdere la finalità educativa iniziale. In ottica professionalizzante questi avvenimenti mi hanno fatto riflettere su quali competenze un docente dovrebbe possedere, ritengo che la capacità di reinventare e trovare soluzioni alternative siano indispensabili in questo tipo di lavoro.

Durante tutto il percorso di tirocinio lo strumento del diario di bordo mi ha aiutato a riflettere in ottica critica, professionale e oggettiva sulla mia azione didattica e su ciò che ho osservato in aula. Questo è stato di grande aiuto per guidare la mia riprogettazione, la stesura delle relazioni finali di ogni annualità e per tenere traccia delle mie riflessioni. Grazie a questo strumento ho avuto la possibilità di rendicontare alcune delle esperienze più significative che mi hanno fatto riflettere sull'esperienza vissuta in ottica critica ed oggettiva permettendomi di valutare il mio operato in un momento di calma emotiva e riflettere sulle possibili azioni di miglioramento. Un esempio pratico di ciò è accaduto alla fine di una conduzione in cui ho preparato un esercizio da proporre ai ragazzi troppo difficile. Nella predisposizione dell'attività non ho valutato in modo adeguato le conoscenze possedute, ho dato per scontato che sapessero operare con le divisioni. Durante la conduzione sono stata aiutata dalla mia mentore nel concludere l'attività, successivamente nella stesura del diario di bordo ho riflettuto su quali attività potessi svolgere per rendere maggiormente comprensibile il passaggio da un'unità di misura all'altra senza ricorrere alle divisioni. Ho valutato la possibilità di inserire alcuni esercizi propedeutici la lezione successiva partendo dalla difficoltà rilevata.

In ottica professionalizzante ritengo che l'ultima annualità di tirocinio mi abbia permesso di riflettere su quali sono le mie modalità di azione nel rapportarmi con i docenti, la direzione scolastica e gli enti esterni. Nella mia esperienza ho notato come la collaborazione è la chiave di volta che ha permesso di realizzare al meglio gli interventi e trovare soluzioni in caso di necessità. Una comunicazione efficace è in grado di instaurare legami di fiducia reciproca e di sostegno, che permettono al docente di non essere da solo nella progettazione e realizzazione degli interventi, ma di essere inserito in un team di lavoro il cui obiettivo è quello di promuovere la crescita dell'alunno. Come sostiene il modello bio-psicosiociale di Engel (1977), ciò che conta è tenere in equilibrio il benessere fisico e psichico della persona, all'interno del contesto scolastico la collaborazione tra docenti è un elemento fondamentale per permettere ciò. Attivare processi di cooperazione tra gli insegnanti è la chiave per promuovere il cambiamento e attivare una didattica basata sulla collaborazione multi-attoriale, il docente titolare non è da solo nel progettare ma discute e condivide idee con tutti gli educatori che sono all'interno della classe. Tra i vari attori si sviluppano processi di collaborazione che arricchiscono di stimoli l'ambiente di apprendimento valorizzando l'approccio delle capability (Ghedin, 2021).

Una risorsa importante nella mia conduzione è stata la presenza di più insegnanti all'interno della classe e del supporto che esse hanno dato durante i vari incontri. Come afferma la dottoressa Ghedin (2013) la presenza di più insegnanti all'interno della stessa classe è una risorsa e un valore aggiunto da stimare e riconoscere come utile e di supporto per l'apprendimento degli studenti e la realizzazione di esperienze collaborative di maggiore impatto per gli studenti stessi. In un'ottica di sviluppo delle competenze trasversali, così come vengono elencate nella Raccomandazione del Consiglio Europeo del 22 maggio 2018 relativa alle competenze chiave per l'apprendimento permanente, è stata mia cura sviluppare attraverso il percorso non solamente la competenza matematica, ma anche quella sociale, di imparare ad imparare e di cittadinanza. Un elemento di buon funzionamento, nella relazione e nell'apprendimento, è stato la collaborazione tra insegnanti, nell'ottica di sviluppare un contesto di crescita e formazione della cittadinanza e del supporto reciproco. Le insegnanti presenti in classe si sono messe in gioco aiutando me nei momenti di difficoltà nella gestione della classe e supportando, quando necessario, i miei interventi con esempi mirati sulla vita dei bambini e si sono rese disponibili a sostenere gli studenti nell'apprendimento di nuove conoscenze. Il clima di collaborazione instaurato con gli insegnanti ha influenzato positivamente anche la relazione tra gli alunni, i quali sono stati molto comprensivi e collaborativi tra di loro nell'aiutarsi reciprocamente nelle attività di gruppo e anche individuali.

3. Evoluzione della figura professionale in relazione alla dimensione didattica

Nella preparazione, progettazione e realizzazione del percorso didattico e dei vari interventi, la crescita personale e professionale è stata molta. Dopo aver definito il tema, l'indicazione da parte delle tutor di tirocinio di utilizzare lo strumento dell'analisi SWOT, dispositivo nato e solitamente utilizzato in ambito aziendale, è stata una pratica che ha aumentato le mie conoscenze professionali riguardo agli strumenti utili che un docente possiede e sfrutta per progettare in ottica di continuità didattica, un percorso a lungo termine, a partire dai traguardi e obiettivi indicati nelle Indicazioni Nazionali (2012). Grazie all'analisi ho riflettuto sulla migliore modalità per realizzare il percorso didattico in relazione ai punti di forza personali, professionali e del contesto in cui sono inserita. L'attenzione ad avere ipotizzato anche i possibili punti di difficoltà e criticità mi ha permesso di mettere in campo azioni per prevenire l'avvento di situazioni non gestibili. Per esempio una difficoltà riscontrata è stata quella di dover individuare tutte le preconoscenze necessarie che gli studenti dovevano possedere per affrontare un argomento completamente nuovo come quello delle misure. Ho provveduto a fare un elenco di quelle che erano le conoscenze indispensabili e ho chiesto alla mia mentore se questi fossero stati argomenti già svolti dai ragazzi, in base alle sue risposte abbiamo steso il piano di progettazione dei vari interventi. Lo strumento dell'analisi SWOT (Allegato 1) non è stato utilizzato solamente ad inizio percorso in fase di ideazione ma successivamente è stato utilizzato anche per i singoli interventi per verificare e diventare maggiormente consapevole dei rischi e delle criticità di ogni intervento. Tale pratica mi ha permesso di mettere in campo strumenti compensativi per ovviare ai possibili problemi, infatti è accaduto che l'elenco delle preconoscenze stilato non fosse sufficiente e mi fossero sfuggite alcune di queste, come la conoscenza delle divisioni. Inoltre, ho individuato come possibile minaccia la difficoltà di mantenere una relazione proficua con il Comune che permettesse di ottenere in tempo i permessi per dipingere nel cortile della scuola. Sin da subito ho ipotizzato possibili soluzioni che si sono rivelate utili nel momento in cui non è arrivata nei tempi prestabiliti la conferma del Comune di poter dipingere nel cortile, come l'utilizzo dei gessi al posto della vernice.

3.1 Inclusività

L'aspetto inclusivo in questa annualità di tirocinio è diventato un contenuto intrinseco nella mia progettazione. Nella progettazione dei vari interventi e nella loro realizzazione in classe c'è stata l'attenzione alle varie differenze tra gli alunni. Nella classe in cui ho svolto il mio percorso ho notato come per tutti gli alunni è stato utile avere un supporto visivo e per tale motivo ho realizzato dei powerpoint con gli elementi salienti e utili della lezione.
Nella diversificazione delle attività didattiche ho tenuto conto della presenza in classe di un alunno plusdotato e per lui ho promosso attività con un grado di difficoltà maggiore per stimolare la sua partecipazione. Per esempio, in un'attività in cui è stato chiesto ai bambini di misurare con il metro ho fornito a lui un metro senza i millimetri segnati e ho chiesto di provare a ipotizzare la misura precisa. Come sostiene la professoressa Lucangeli (2019) i gifted spesso sono riconosciuti per la velocità di apprendimento, essi rispetto ai loro compagni apprendono con tempi molto più veloci e hanno capacità di astrazione, concettualizzazione e sintesi molto sviluppata. Nella didattica scolastica spesso non sono attivate le giuste forme di supporto per l'apprendimento di questi studenti e tale difficoltà danneggia il loro potenziale di apprendimento che nel corso del tempo si riduce se non adeguatamente stimolato. Gli alunni gifted così come quelli con difficoltà di apprendimento manifestano esigenze di apprendimento diverse, rispetto alla norma, ed è necessario identificare le pratiche educative adatte per favorire il miglior sviluppo dell'apprendimento in un'ottica educativa di tipo inclusivo (Lucangeli 2020). In ottica professionale ritengo la realizzazione di attività inclusive un aspetto su cui nel corso del tirocinio sono migliorata molto. Noto che riguardo a questo aspetto non ho tutte le conoscenze necessarie per definirmi preparata completamente ma sono in un processo di continuo miglioramento e sarà mia cura e intenzione nel mondo lavorativo della scuola formarmi ed acquisire maggiori strumenti sia attraverso l'esperienza sul campo che attraverso corsi di formazione specifici. L'aspetto che sento essere ancora carente riguarda le disabilità in quanto durante il mio tirocinio non ho avuto la possibilità di sperimentarmi in classi in cui fossero presenti studenti con gravi disabilità.

In un'ottica di sviluppo delle competenze trasversali così come vengono elencate nella Raccomandazione del Consiglio Europeo del 22 maggio 2018 relativa alle competenze chiave per l'apprendimento permanente con il presente progetto sono state sviluppate la competenza matematica, sociale di imparare ad imparare e di cittadinanza. Durante la realizzazione del progetto è stato evidenziato come i giochi realizzati dagli studenti saranno messi a disposizione di tutti, un sostegno e supporto per il gioco ludico e l'apprendimento non solo della classe terza ma dell'intera comunità scolastica. Il concetto di inclusività nella scuola in cui ho svolto il tirocinio quest'anno è integrato nella programmazione degli insegnanti e nelle loro metodologie educative, la diversità è diventata la normalità della pratica quotidiana. Vengono attuate numerose pratiche sia per quanto riguarda gli alunni stranieri, come l'utilizzo dell'inglese come lingua primaria di comunicazione tra docente e alunno, che uno stretto rapporto di collaborazione con le famiglie, sia strumenti compensativi per studenti con difficoltà di apprendimento, come compiti facilitati ed ore aggiuntive di doposcuola per rinforzare alcuni aspetti di difficoltà o lacune nelle conoscenze. In aula erano presenti due insegnanti di sostegno che supportavano l'apprendimento di alunni con difficoltà, molto disponibili verso l'intera classe, questo aspetto ha sviluppato un legame collaborativo anche negli alunni stessi che sono molto disponibili a supportarsi reciprocamente nell'apprendimento e nelle difficoltà. Durante i miei interventi questo elemento mi ha permesso di realizzare numerose attività in gruppo in cui i ragazzi sono riusciti ad autogestirsi e a raggiungere l'obiettivo didattico preposto in autonomia, senza indicazioni di supporto che avevo predisposto preventivamente in caso di necessità. Da questa esperienza ho riflettuto sull'importanza e il valore che può avere lavorare con l'intero gruppo classe sulla collaborazione e l'aiuto reciproco. Queste pratiche sostengono molto l'opera dell'insegnante e permettono di creare un contesto scolastico in cui vengono sviluppate abilità necessarie e utili allo sviluppo di life skills e della personalità di un futuro cittadino che è educato a vivere in società. Nella classe si sviluppa un'interdipendenza positiva, la condivisione degli obiettivi delle singole attività permette un maggiore supporto reciproco da parte di tutti gli attori della comunità educante che fanno emergere le peculiarità di ognuno in un'ottica collaborativa (Zorzi 2021).

3.2 Valutazione

Durante uno degli incontri di tirocinio indiretto, abbiamo lavorato sull'analisi dei nostri processi valutativi. Riflettendo con le mie compagne ho rilevato come una pratica utile sia quella di avere ideato nella mia progettazione almeno un'attività per ogni indicatore della valutazione così da essere certa di creare una continuità tra obiettivi didattici, attività e modalità valutative. Come sostiene la professoressa Acquario (2022) dietro ad ogni idea di valutazione è veicolata un'idea di scuola precisa. La mia idea di scuola è quella di promuovere un contesto di apprendimento la cui finalità sia quella di sviluppare e sostenere conoscenze e capacità sulla base delle potenzialità di ognuno. Per promuovere questa idea di scuola è necessario che la valutazione sia in linea con questo principio, una valutazione continua basata sul modello di Tomlison (2006) che consiste in:

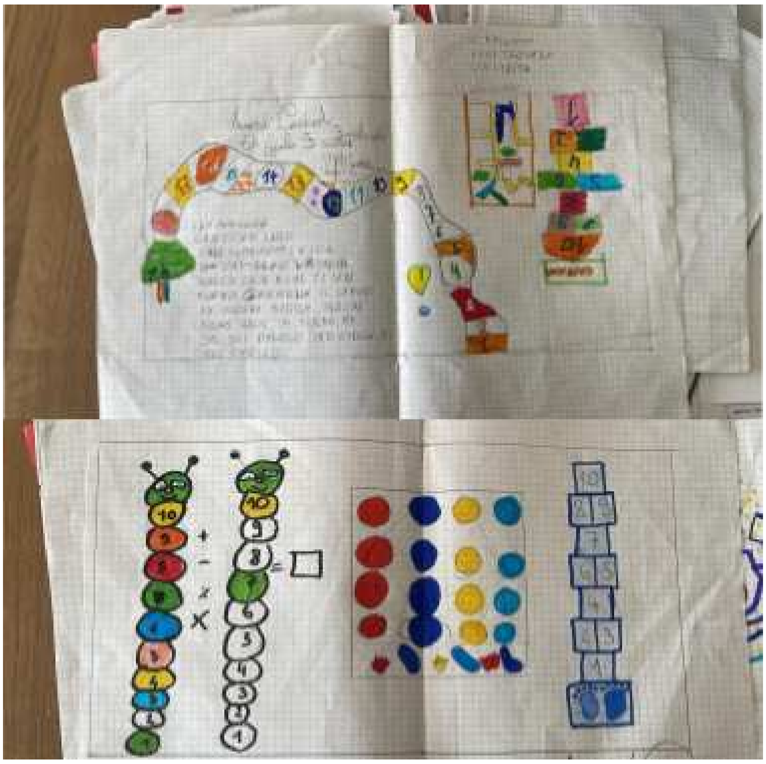
- pre-assessment per valutare le conoscenze possedute all'inizio del percorso;
- ongoing-assessment per una continua raccolta di informazioni basata su capacità acquisite, conoscenze imparate e la verifica di una comprensione profonda dell'argomento;
- final-assessment alla fine di ogni ciclo di apprendimento per valutare quali sono le conoscenze e le abilità rimaste e fissate nello studente.

Alla scuola primaria mi sono accorta di come i feedback siano importanti per i bambini, per crescere e migliorare nel loro processo di apprendimento. Sviluppare una routine di feedback per gli alunni è utile per monitorare le loro azioni e i loro apprendimenti e per sviluppare in loro una riflessione critica sui processi di apprendimento. Il feedback dato agli alunni da parte mia ha rispecchiato le caratteristiche del feedback così elencate dalla professoressa Acquario (2022): chiaro, basato sulla fiducia di un suggerimento volto al miglioramento dello studente, specifico e focalizzato, immediato e comprensibile, capace di attivare processi di riflessione e autovalutazione.

Nonostante il grande impegno messo da parte mia per svolgere una valutazione il più inclusiva e diversificata possibile sento che la valutazione rimane comunque una mia difficoltà. L'elemento utile però è sentire che la valutazione è una modalità per dare valore a quello che i bambini stanno facendo e permettere all'insegnante di comprendere in quale direzione sta andando la classe. Non solo una verifica degli apprendimenti ma un metodo didattico che permette una continua riflessione da parte di tutti i membri coinvolti nel processo di apprendimento. Per permettere una verifica degli apprendimenti coerente con il percorso didattico sono stati utilizzati differenti strumenti, dall'osservazione alle domande in itinere fino alla realizzazione di un compito autentico e una verifica finale. La diversificazione degli strumenti permette di poter valutare da vari punti di vista una stessa competenza e monitorare nel tempo il suo sviluppo.

Valutare significa dare valore e la finalità di tale pratica è sviluppare e sostenere le conoscenze e la capacità dello studente sulla base degli apprendimenti emergenti (Acquario 2021). Nella valutazione del percorso didattico è stata mia cura individuare a priori gli indicatori relativi alle competenze da sviluppare e conoscenze da acquisire e in base a questi sono stati declinati i vari livelli per ogni indicatore. Come pratica valutativa ha avuto grande importanza per me la realizzazione del compito autentico: i ragazzi divisi in coppie hanno avuto il compito di proporre dei progetti che fossero realizzabili nel cortile della scuola tra cui poi sarebbero stati scelti dagli insegnanti i migliori da realizzare. Attraverso questo compito i ragazzi hanno avuto modo di unire tutte le conoscenze apprese durante il percorso realizzato, misurare, scegliere l'unità di misura corretta, collaborare attraverso la realizzazione del lavoro in gruppo e risolvere problemi. Oltre alla verifica scritta realizzata per accertare le conoscenze apprese, ho potuto notare, attraverso il compito autentico che cosa delle conoscenze teoriche apprese, i ragazzi sono riusciti ad utilizzare nella vita concreta, in una situazione reale, quali sono stati i collegamenti realizzati e le difficoltà nel traslare concetti appresi teoricamente nel pratico. Da questo processo è emersa un riflessione in ottica professionalizzante: ho notato come nonostante io abbia impostato il mio percorso in modo induttivo, proponendo sempre di partire da attività pratiche per poi passare al concetto teorico e alla definizione scientifico-matematica precisa, alcuni ragazzi non hanno acquisito a pieno la conoscenza. Nel momento in cui gli alunni hanno dovuto applicare le conoscenze possedute in un contesto non completamente noto come quello della progettazione di un gioco a terra, il progetto non è stato realizzato inserendo gli elementi di misura fondamentali come l'unità di misura. Questa riflessione mi ha portato a chiedermi quali altre modalità avrei potuto utilizzare nei vari interventi per migliorare questo risultato e ottenere un prototipo di progetto il più preciso possibile. Alcune soluzioni che ho ipotizzato sono state la possibilità di presentare loro dei progetti già realizzati ed analizzare assieme a loro gli elementi fondamentali da inserire. Ho pensato anche di aggiungere un incontro in cui si riprendono le competenze e conoscenze riguardo alla progettazione in scala.

Prototipi realizzati dai ragazzi di 3°D.



3.3 Influenze estere

In ottica di progettazione degli interventi un grande aiuto è stata la mia esperienza svolta in Erasmus nel primo semestre dell'ultimo anno. L'esperienza di Erasmus in Danimarca è stata estremamente formativa, mi ha permesso di aprire i miei orizzonti sia personali che professionali. Essermi confrontata con un sistema scolastico e di vita diverso da quello a cui sono sempre abituata mi ha fatto crescere moltissimo. Osservare la libertà e l'autonomia che vengono concesse agli studenti mi ha permesso di riflettere su come lasciare il giusto spazio agli studenti non comporta una perdita di autorità da parte degli insegnanti né mancanza di disciplina da parte degli studenti, è possibile instaurare una relazione basata sulla fiducia reciproca. Essermi sperimentata nella conduzione di interventi in un contesto poco noto e utilizzando la lingua inglese come veicolo di comunicazione, mi ha permesso di affinare la mia percezione rispetto all'importanza del materiale inclusivo e di progettare le lezioni in modo chiaro, semplice e ricco di stimoli di vario genere. Mi sono resa conto nelle conduzioni effettuate che l'esperienza all'estero mi ha influenzato positivamente nella gestione delle lezioni, ho messo maggiore attenzione nel chiedere se sono stata compresa nelle comunicazioni e se gli alunni hanno bisogno di ulteriori spiegazioni o esempi. Nella progettazione ho riflettuto su quale sia il modo migliore e più immediato per arrivare alla conoscenza e raggiungere l'obiettivo della giornata in modo efficace e in un clima rilassato di fiducia reciproca. Ho inoltre dato molto spazio ad attività di tipo pratico, ho ridotto la spiegazione teorica all'inizio della lezione o traslando alla fine, in questo modo a partire dall'esperienza realizzata i ragazzi sono stati in grado di raggiungere autonomamente la conoscenza di quanto esperito.

4. Evoluzione della mia personalità come docente in ottica professionalizzante

Alla conclusione di questo percorso di tirocinio posso affermare di avere acquisito strumenti, competenze e abilità differenti che hanno creato la mia identità di docente professionale. Come ritiene la dott.ssa Zorzi (2021) è fondamentale che un insegnante possieda abilità di progettazione, organizzazione, osservazione, facilitazione e anche competenze comunicative di negoziazione. Ugualmente Semeraro (2007) esplicita che il docente per essere tale deve essere un progettista, egli deve saper pianificare le attività in relazione alle varie dimensioni di apprendimento e basarsi sulle specificità del contesto di classe in cui si trova ad operare. Riflettendo in ottica critica sulle mie capacità alla fine del percorso di tirocinio posso affermare che la valorizzazione del contesto di apprendimento e tessere una relazione con gli alunni di reciproca fiducia e supporto sono due pilastri della mia identità di docente. La competenza comunicativa con gli alunni è una mia qualità che utilizzo per rendere la relazione con gli alunni sicura e di fiducia, attraverso l'ascolto e la comprensione dei loro bisogni non solamente di apprendimento ma anche personali come esseri umani. Ad inizio di ogni intervento è stata mia cura chiedere ai ragazzi come stavano, attivando in questo modo processi di motivazione e socializzazione per condurre gli studenti all'interno dell'argomento della lezione. La richiesta di sapere come stavano gli studenti è stato un modo per me di avere un feedback immediato della situazione della classe, conoscere lo stato emotivo con cui gli studenti affronteranno la lezione.

Nell'ottica di progettazione abilità fondamentali che ho acquisito sono quelle di organizzazione e facilitazione, allenate attraverso la progettazione nel corso dei vari anni di tirocinio, e in particolare nell'ultimo anno in cui ho tenuto conto di vari elementi che influenzano il processo di progettazione. Lo strumento dell'analisi SWOT in questo caso è stato estremamente utile e sarà utilizzato da me anche in futuro nei momenti di progettazione. Tale strumento mi ha permesso di avere una visione chiara ed ampia degli aspetti positivi e delle problematiche e difficoltà. Nell'utilizzo di una progettazione a ritroso con il modello di Wiggins e McTighe (2004) ho potuto realizzare un percorso unitario con lo scopo di attivare un apprendimento profondo e lo sviluppo di competenze utili alla formazione dei ragazzi non solo come studenti ma come cittadini. Le Indicazioni Nazionali e nuovi scenari (2018) sottolineano come la finalità della scuola sia quella di insegnare ad imparare ad apprendere e ad essere ciò che Dewey definisce comunità di apprendimento. Vygotskij afferma che l'apprendimento è un processo trasformativo, che si compie attraverso atti e azioni consapevoli, i quali attivano un apprendimento profondo, grazie alla relazione con l'adulto educatore e allo scaffolding. Attraverso la presenza di un educatore che funge da scaffolder il discente apprende molto meglio e maggiori informazioni ed è in grado di trasformarle in conoscenze durature e competenze che applica nella vita quotidiana.

Da questa esperienza di tirocinio un concetto che ho acquisito e che sento di estremo valore nella mia crescita professionale, è la definizione di insegnante come improvvisatore. Come afferma Zorzi (2021) un insegnante ha varie tipologie di profili, egli è sia scaffolder che progettista che improvvisatore. Per insegnante improvvisatore si intende un docente che è in grado di modificare la propria progettualità in relazione ai cambiamenti della classe senza che questo modifichi l'obiettivo delle attività. Questa pratica è possibile nel momento in cui il docente conosce bene gli obiettivi e i traguardi di apprendimento ideati ed è consapevole delle sue competenze, in tal modo può improvvisare attività che ritiene maggiormente adatte e modificare la progettazione ipotizzata.

Come docente ritengo di avere svolto numerose esperienze, grazie al tirocinio sia in italia che all'estero durante il periodo di Erasmus. In questo particolare contesto ho potuto assistere e condurre lezioni in una scuola danese di Copenaghen, ho potuto osservare come gli insegnanti padroneggiano in modo magistrale l'abilità di insegnante improvvisatore. L'insegnante danese ha come obiettivo principale che lo studente sia felice nel suo percorso di apprendimento, ciò che impara gli servirà nella vita per questo motivo egli deve essere messo nelle migliori condizioni di apprendimento. Per realizzare questa visione un docente deve essere flessibile, saper adattare e modificare le proprie progettazioni sulle esigenze degli alunni.

In conclusione si potrebbe in modo riduttivo riassumere il percorso di tirocinio in una parola: flessibilità. Un insegnante preparato e formato è in grado di essere flessibile, modificare le sue scelte didattiche senza snaturare la progettazione e gli obiettivi di apprendimento preposti. Posso affermare con certezza di aver acquisito delle migliori capacità di programmazione e gestione delle azioni didattiche condotte. Nel proseguire con i vari interventi ho notato che la mia progettazione nel corso del tempo è risultata sempre più precisa e anche la risposta dei ragazzi è diventata sempre più attinente e pertinente alle richieste e ha dimostrato la loro acquisizione degli obiettivi prefissati. Anche dal dialogo formativo con la mentore è emerso come la mia capacità di attirare i bambini nel mio progetto e di farmi seguire sia stata un elemento fondamentale della mia figura come docente. Rendere la conoscenza un viaggio in cui gli studenti hanno un ruolo attivo e partecipe è la mia missione come futura docente, trasportare i ragazzi in una dimensione scolastica di apprendimento in cui si sentano liberi di esplorare, sperimentare e sbagliare. Promuovere una modalità di stare a scuola che permetta all'individuo di crescere come persona consapevole e cosciente delle proprie abilità attraverso la scoperta e l'apprendimento di conoscenze. Come afferma la professoressa Lucangeli (2020) "L'amore per lo studio, per me, è una delle forme che abbiamo per nutrire la nostra vita che rischia a volte di fermarsi a quello che so già. Il desiderio di imparare spinge come un vento ciascuno di noi a superare se stesso" (p. 51).

Riferimenti

Bibliografia

Aquario D., (2021) Through the lens of justice. A systematic review on equity and fairness in learning assessment. Education Science & Society, 2,96-110

Bonotto C. (2007).Quotidianizzare la Matematica. Lecce: La Biblioteca Pensa Multimedia

De Rossi, M. (2023). Costruire l'azione didattica. Lecce: Pensa Multimedia

Freudenthal, H. (1994). Ripensando l’educazione matematica. Brescia: La Scuola.

Gardner H. (1983). Frames of Mind: A theory of Multiple Intelligences. New York: Basic Books

Ghedin E., Aquario D., Di Masi D., (2013). Co-teaching in action: Una proposta per promuovere l’educazione inclusiva

Ghedin E. (2021). Per un design (connettivo) inclusivo. Valorizzare capability connettive nelle scuole, Guerini Associati: Milano.

Israel G., Millán Gasca A.,(2012). Pensare in matematica. Bologna: Zanichelli.

Lucangeli, D.; Vicari, S.(2019). Psicologia dello Sviluppo. Firenze: Mondadori

Lucangeli, D. (2020) Cinque lezioni leggere sull’emozione di apprendere. Trento: Erickons.

Zorzi E. (2020) L’insegnante improvvisatore. Liguori

Santi M., ZORZI E. (2016). Education as jazz. interdisciplinary sketches on a new metaphor. New Castle: Cambridge scholars

Semeraro R.(2007).La progettazione didattica. Padova: Domeneghini

Tomlinson, C.A.,(2006). Adempiere la promessa di una classe differenziata. Strategie e strumenti per un insegnamento attento alla diversitàCarol Ann Tomlinson. Roma: LAS

Wiggins G., Mctighe J., (2004) Fare progettazione. La "teoria" di un percorso didattico per la comprensione significativa. Roma: LAS.

Zago G., Polenghi S., Agostinetto L. (2020). Memorie ed Educazione Identità, Narrazione, Diversità. Lecce: Pensa MultiMedia

Documentazione scolastica

Curricolo d’istituto: https://icvillafrancapadovana.edu.it/documento/curricolo-distituto/

Documento di presentazione della classe

Programmazioni di classe

Programmazione di plesso

PTOF:https://icvillafrancapadovana.edu.it/?s=ptof&type=any

Normativa ministeriale

Indicazioni nazionali per il curricolo della scuola dell’infanzia e del primo ciclo d’istruzione (2012)

Indicazioni nazionali e nuovi scenari (2018)
Raccomandazione del Consiglio Europeo del 22 maggio 2018 relativa alle competenze chiave per l'apprendimento permanente (2018)
O.M. 4 dicembre 2020 n° 172 (2020)

Allegati

1 - Analisi SWOT

PUNTI DI FORZA	PUNTI DI DEBOLEZZA
• Passione e conoscenza per le materie matematico-scientifiche • Capacità di porre domande e far riflettere gli studenti • capacità di problem solving • relazione di fiducia con la mentore	• Preconoscenze degli studenti • 20 ore sono poche • difficoltà di diversificare alcune attività per BES • Grande eterogeneità della classe
OPPORTUNITÀ • presenza della mentore e di due insegnanti di sostegno • progetto condiviso con altre classi • eterogeneità della classe	MINACCE • difficoltà di contattare il Comune • possibilità di presentare il lavoro ai genitori • possibilità di dipingere per terra

Allegato 2 - Progettazione

MISURE E GIOCHI A TERRA: percorso

PRIMA FASE: IDENTIFICARE I RISULTATI DESIDERATI
(Quale/i apprendimento/i intendo promuovere negli allievi?)

Competenza chiave
Competenza matematica e sociale

Disciplina di riferimento
MATEMATICA-GEOMETRIA

Traguardo/i per lo sviluppo della competenza
Lo studente utilizza strumenti per il disegno geometrico (riga, compasso, squadra) e i più comuni strumenti di misura (metro, goniometro...).

Obiettivi di apprendimento
- Misurare grandezze (lunghezze, tempo, ecc.) utilizzando sia unità arbitrarie sia unità e strumenti convenzionali (metro, orologio, ecc.).
-Disegnare figure geometriche e costruire modelli materiali anche nello spazio.
-Leggere, scrivere, confrontare numeri decimali, eseguire semplici addizioni e sottrazioni, anche in relazione ai risultati di semplici misure.

Conoscenze e abilità
Conoscenza dell'unità di misurazione
Conoscenza teorica del lessico relativo alla misurazione (metro, centimetro…)
Conoscenza delle conversioni numeriche riguardanti le misure
Conoscenza della storia relativa alle diverse tipologie di misurazione e la loro evoluzione nel tempo
Conoscenza dei giochi a terra e il loro funzionamento

Abilità di collaborazione
Abilità di misurazione con vari strumenti (arbitrari e convenzionali)
Abilità di realizzare conversioni con le unità di misura

Abilità di progettazione e costruzione di prototipi
Abilità di esposizione e presentazione di fronte ad un pubblico
Abilità di utilizzare i giochi a terra nel gioco ludico e strutturato

Aggancio-attivazione
Agli studenti viene proposto un percorso sulle misurazioni, viene spiegato loro che l'obiettivo finale del progetto è la realizzazione di giochi a terra che verranno costruiti nel cortile della scuola. Viene proposto alla classe di collaborare in quanto per realizzare questi giochi è necessario lavorare con le misurazioni.

SECONDA FASE: DETERMINARE EVIDENZE DI ACCETTABILITÀ
(In che modo sollecito la manifestazione della competenza negli allievi?)

Rubrica valutativa

DIMENSIONI	**INDICATORI**	**PRIMA ACQUISIZIONE**	**BASE**	**INTERMEDIO**	**AVANZATO**
Numerica	Eseguire misurazioni e fare confronti	Lo studente ha difficoltà nell'effettuare misurazioni ed eseguire confronti tra essi. Esegue le operazioni esclusivamente con il supporto dell'insegnante; in situazioni note.	Lo studente sa effettuare misurazioni e stabilisce relazioni tra unità di misura corrispondenti in semplici contesti/standard con il supporto dell'insegnante con continuità e talvolta in modo autonomo ma con discontinuità.	Lo studente sa effettuare misurazioni e stabilisce correttamente relazioni tra unità di misura corrispondenti. In situazioni note in modo autonomo e continuo; in situazioni non note con risorse fornite dal docente e/o reperite altrove in modo discontinuo e non del tutto autonomo.	Lo studente sa effettuare più misurazioni e stabilisce relazioni tra unità di misura corrispondenti in modo autonomo e sempre corretto. In situazioni note e non note; Risorse fornite dal docente e reperite altrove; in modo autonomo e con continuità.
Problem solving	Rilevare problemi e trovare soluzioni alternative	Lo studente trova difficoltà ad individuare soluzioni di fronte a situazioni di difficoltà. Segue i suggerimenti dell'insegnante per risolvere tali situazioni.	Lo studente con lievi suggerimenti dell'insegnante individua soluzioni intuitive per risolvere una situazione di difficoltà.	Lo studente individua in maniera autonoma soluzioni per risolvere una situazione di difficoltà. Necessita l'aiuto della docente in situazioni di sostanziale difficoltà.	Lo studente individua soluzioni efficaci per la risoluzione della situazione di difficoltà sia essa lieve o sostanziale.
Linguistico espositiva	Presentazione del lavoro realizzato	Lo studente espone con incertezza i contenuti, necessita del supporto dell'insegnante che interviene con domande stimolo.	Lo studente espone con sicurezza la maggior parte dei contenuti. L'esposizione risulta tuttavia superficiale e non approfondita. Si riscontra un atteggiamento generale di incertezza che influenza in parte l'esposizione. L'insegnante pone domande per approfondire.	Lo studente espone con sicurezza i contenuti, con approfondimenti generali. L'insegnante pone domande per approfondire maggiormente.	Lo studente espone con sicurezza i contenuti, gli approfondimenti sono pertinenti ed esposti. Si riscontra fiducia e certezza nell'esposizione.
Relazionale	Collaborare con i compagni per completare i	Lo studente dimostra difficoltà nel collaborare con il gruppo. Spesso è necessario l'intervento dell'insegnante per	Lo studente dimostra capacità di collaborare. In alcuni casi è necessario l'intervento	Lo studente dimostra capacità di collaborazione e in alcuni casi dimostra iniziativa nel ricercare il	Lo studente dimostra spiccate capacità di collaborazione in tutti i contesti. Dimostra iniziativa nel ricercare il

	compiti assegnati	mediare il dialogo e spronare lo studente ad eseguire i propri compiti.	dell’insegnante per mediare il dialogo e spronare lo studente ad eseguire i propri compiti.	dialogo con i compagni. Esegue i compiti a lui assegnati.	dialogo con i compagni. Esegue i compiti a lui assegnati e sostiene i compagni nei loro.
Autovalutazion e	Riflessione critica sulle proprie azioni	Lo studente riflette sulle sue azioni solamente con il supporto costante dell'insegnante. Non sa definire il corretto livello delle proprie abilità	Lo studente riflette sulle proprie azioni e con l’aiuto dell'insegnante è in grado di esprimere una valutazione corretta delle proprie abilità.	Lo studente è in grado di eseguire una valutazione generale corretta delle proprie abilità in autonomia. Con l’intervento dell’insegnante Sa determinare il livello delle proprie abilità.	Lo studente è in grado di eseguire una valutazione personale precisa e corretta in relazione alle diverse azioni compiute. Sa determinare il livello delle proprie abilità.

Strumenti di rilevazione

STRUMENTI DI RILEVAZIONE	**MODALITÀ DI RILEVAZIONE DEGLI APPRENDIMENTI**		
	Quando	**Come**	**A che scopo**
Domande in itinere	Durante l'arco degli interventi	Attraverso domande mirate poste agli alunni le cui risposte saranno registrate in una tabella dall'insegnante. Viene segnato se il ragazzo sa rispondere correttamente o meno	Comprendere lo stato di acquisizione delle conoscenze degli alunni
Osservazione	Durante tutto il percorso	Attraverso check list e diari di bordo vengono rilevati i miglioramenti degli alunni. Vengono segnati i punti di forza e di debolezza degli alunni.	Monitorare lo sviluppo delle conoscenze e competenze dei ragazzi per calibrare il percorso e adattarlo alle esigenze degli alunni
Verifica finale degli apprendimenti	Al termine degli interventi dedicati alla misurazione	- Attraverso una verifica scritta in cui vengono sondate e verificate le conoscenze teoriche riguardo l’argomento - Tramite il compito autentico nella realizzazione dei giochi a terra	Verificare le conoscenze teoriche e pratiche degli studenti nella costruzione dei giochi a terra
Elaborato finale	Alla conclusione del percorso	- Esposizione orale - Questionario	Vengono verificate le competenze espositive degli studenti

Modalità di utilizzo degli strumenti con attenzione ai processi autovalutativi e di valutazione tra pari

STRUMENTI	**MODALITÀ AUTOVALUTATIVE E VALUTAZIONE TRA PARI**
- Circle time **- Conversazioni cliniche** **- Lavoro di gruppo** **- Questionari**	Attraverso momenti di gruppo e individuali vengono verificate le conoscenze e le competenze degli alunni. Saranno previsti momenti di peer review degli esercizi a coppie e in gruppo. Durante i lavori di gruppo verrà assegnato il ruolo, a turno, agli studenti di controllare il lavoro del gruppo e fornire feedback per migliorare. Attraverso il questionario e le conversazioni cliniche si vuole mettere lo studente nelle condizioni di analizzare le proprie azioni e partecipazione all’interno delle varie attività proposte e realizzate durante il percorso didattico.

TERZA FASE: PIANIFICARE ESPERIENZE DIDATTICHE

(Quali attività ed esperienze ritengo significative per l’apprendimento degli allievi?)

Pianificare le esperienze didattiche in ottica inclusiva.

Tempi	Ambiente/i di apprendimento *(setting)*	Contenuti	Metodologie	Tecnologie *(strumenti e materiali didattici analogici e digitali)*	Attività
2 h	Aula Palestra	Presentazione del contenuto di misura. Ci soffermiamo in modo particolare sugli strumenti arbitrari di misura	Brainstorming Sperimentazione attiva	-Lavagna -Cancelleri -Quaderno degli studenti -Nastro	La lezione comincia con L'aggancio in cui vengono mostrati ai ragazzi dei giochi a terra e si chiede loro se li hanno mai visti e cosa sono. Verrà spiegato loro che in collaborazione con il Comune sarà nostro compito realizzare alcuni giochi a terra nel cortile della scuola e per fare questo abbiamo bisogno di andare a scoprire un nuovo argomento che è la misura. Con un'attività di brainstorming si chiede cosa si intende per misura e quali parole collegano a questo concetto. Si passa poi a riflettere su quale strumento è necessario per misurare e qui verranno proposti degli esercizi sulla misurazione di oggetti presenti nell' aula con vari strumenti. Viene chiesto ai ragazzi di segnare le misure che trovano. In un momento successivo vi sarà la discussione sui diversi risultati ottenuti dalle misurazioni. Ci si sposterà poi in palestra e verrà riproposta la stessa attività ma con l'intenzione di misurare la palestra. Lo scopo di questa seconda parte è giungere alla creazione di uno strumento di misura comune. (il passo)
2 h	Aula	Primi approcci alle conversioni	Dialogo Sperimentazione	-Nastri per misurare -Quaderno -Cancelleria -Lavagna	Viene ripreso l'argomento della lezione precedente. Successivamente approfondiamo il concetto di misura fino ad arrivare al concetto di Unità di Misura attraverso esercizi pratici di misuramento. Dall'unità di misura il passo si porta a comprendere che abbiamo bisogno anche di misure più piccole, come il palmo o il dito. Comprendendo che vi sono differenti misure possiamo fare dei confronti, arrivando al concetto di conversione con misure non convenzionali. Dopo aver sperimentato a voce assieme vengono realizzati degli esercizi nel quaderno di conversione della misura. Attraverso un metodo induttivo si comprende che è necessario ottenere una misura comune standard per tutti. Viene scritta sul quaderno la definizione di unità di misura.
2 h	Aula	La storia della misura	Lezione frontale Attività in autonomia e a coppie	- Lim -Schede didattiche	Vengono ripresi gli argomenti delle lezioni precedenti e ci si sofferma sul concetto di unità di misura comune. Vengono presentati agli alunni delle immagini di vari strumenti per misurare, e viene avviato un dialogo su quali sono state nel corso del tempo e nelle varie culture le unità di misura utilizzate fino ad arrivare al sistema internazionale di misura. Viene poi consegnata una scheda con la storia della misura e sul Sistema Internazionale. Sul quaderno vengono incollate le schede. Viene presentato il metro (cos'è che cosa possiamo misurare…) saranno fatti vedere differenti tipi di metro (righello da geometra, metro da dart, da muratore) e vengono svolti alcuni esercizi relativi alla misurazione con il metro. Seguirà un momento di confronto in cui viene posta l'attenzione sulla misurazione degli oggetti, alcuni oggetti e più utile misurarli con i centimetri altri con i metri. Successivamente viene ripreso il concetto di conversione affrontato nella lezione precedente e vengono affrontati esercizi sulla conversione. Per casa viene chiesto loro di misurare alcuni oggetti che serviranno per le attività della lezione successiva.
2 h	Aula	Il metro	Esercitazione	-Metro - Quaderno - Cancelleria - Libro	Lo scopo della lezione sarà di consolidamento riguardo alla misurazione e alle conversioni. Saranno svolti alcuni esercizi assieme e verranno fatte delle domande agli studenti per comprendere il livello di acquisizione delle conoscenze.

					I ragazzi saranno poi divisi in gruppi e verranno affidati loro degli oggetti da misurare, assieme dovranno registrare le misure di questi oggetti utilizzano l'unità di misura corretta (metro o centimetro). Vengono poi assegnati degli esercizi da svolgere in autonomia.
2 h	Aula	Misure in scala	Conversazione clinica	- Quaderno - Cancelleria	Vengono ripresi i concetti fondamentali delle lezioni precedenti. Gli studenti affronteranno il concetto di misurazione in scala. Tramite una conversazione clinica si andranno a sondare le conoscenze dei ragazzi riguardo alle proporzioni in scala. Si apprende come quando di raffigurano degli oggetti se questi sono grandi vengono ridotti, vi è una unità di misura rappresentativa. Saranno svolti degli esercizi di disegno in scala
2 h	Aula informatica Palestra	Giochi a terra	Cooperative learning - ricerca	- Lim - Computer - Materiale per realizzare i giochi	Vengono presentati i giochi a terra, vengono mostrate delle immagini (cosa sono, quali sono, quando sono nati) agli studenti vengono poste delle domande per indagare le pre conoscenze riguardo all'argomento. Viene poi raccontata la storia dei giochi a terra e come vengono utilizzati in tutto il mondo. Vengono mostrati video e immagini dei giochi a terra utilizzati nelle varie culture. Viene poi chiesto ai ragazzi tra i giochi raffigurati qual'è quello che maggiormente li ha colpiti e che vorrebbero approfondire. In base alle preferenze si divideranno gli studenti in gruppi omogenei e verrà chiesto loro di fare una breve ricerca riguardo al gioco scelto. La delle informazioni comincerà in classe e terminerà poi a casa
2 h	Aula	Ideazione e Progettazione dei giochi a terra	Cooperative learning	-Lim - Quaderno - Cancelleria	Lo scopo della lezione è quello di realizzare il progetto dei giochi a terra. Viene ricordato ai ragazzi qual è l'obiettivo finale del percorso didattico. In un primo momento verranno eseguite le misurazioni del cortile che ci serviranno per la fase successiva. Gli studenti divisi nei gruppi dovranno realizzare su carta il prototipo dei giochi a terra che verranno realizzati negli interventi successivi.
2 h	Spazio esterno	Realizzazione dei Giochi a terra	Sperimentazione Lavoro collaborativo	-Materiale utile alla realizzazione dei giochi	L'intervento sarà condotto all'esterno nel cortile della scuola. Gli studenti nei gruppi stabiliti in precedenza hanno a disposizione il materiale necessario per realizzare i giochi. Una volta terminato il lavoro in classe verrà effettuato una conversazione clinica riguardo l'esperienza, e le aspettative per l'ultimo incontro in cui si svolgerà la presentazione dei giochi.
2 h	Aula	Realizzazione della presentazione	Lavoro di gruppo	-Materiale utile per la presentazione	In gruppo i ragazzi ideano una presentazione da realizzare nell'ultimo incontro per spiegare cosa è stato realizzato durante il percorso didattico. Attraverso una drammatizzazione vengono mostrate e valutate le varie presentazioni. Saranno presenti feedback da parte della docente al termine delle presentazioni.
2 h	Aula Spazio esterno	Presentazione del progetto concluso	Presentazione del progetto realizzato e conclusione degli interventi	-Giochi realizzati -Presentazione degli studenti	Gli studenti avranno la possibilità di presentare il loro progetto concluso alle altre classi e ai delegati del comune in visita alla scuola. Successivamente in aula sarà fatto un momento conclusivo in cui agli studenti verranno chiesti dei feedback, tramite un dialogo con l'intera classe. riguardo il progetto realizzato, sensazioni ed emozioni provate durante la presentazione. Sarà proposto loro un questionario riguardante l'intero percorso didattico.

Ringraziamenti

Al termine di questo lavoro desidero fare alcuni ringraziamenti alle persone che mi hanno accompagnata e sostenuta in questo percorso.

Ringrazio in particolare la dott.ssa Annamaria Porru per la disponibilità e la cortesia mostrata nel sostenermi nella realizzazione di questa entusiasmante ricerca sulla comprensione dello zero nei bambini in età prescolare.

Un grazie speciale va alla mia amica e compagna di corso Martina con cui ho condiviso questo percorso e che mi ha supportato e sopportato in questi anni, nei momenti felici e in quelli in cui avremmo voluto rinunciare.

A Miriam, Sonia, Michela e Cinzia che mi hanno sostenuto a tenere anche di fronte alle difficoltà e a portare le abilità nella vita.

Alle "Tre Moschettiere" che hanno pazientemente sopportato me e i miei mille cambiamenti d'umore. Grazie per i momenti di svago che mi hanno permesso di avere una vita sociale nonostante l'università.

Alla mia famiglia, mamma, papà, Paolo e Alessandra che mi ha sostenuto in questo percorso lasciandomi libera di scegliere ciò che mi esprimeva, grazie a Silvia per i caffè e il sostegno nella recisione degli elaborati.

A tutte le mentori, tutor e insegnati da cui ho imparato e appreso che non ci sarà lavoro più bello di insegnare e che la scelta di mettersi a disposizione degli alunni per sostenerli nel loro percorso di formazione come individui consapevoli e unici è il mio impegno per un futuro migliore.