

STUDIO SULLA CAPACITA' DI RETI AD-HOC

Daniele Libralato

Università degli studi di Padova, corso di laurea in Ingegneria delle Telecomunicazioni.

Indice

1	Introduzione	2
1.1	Storia delle reti ad hoc	5
1.1.1	Progetto DARPA	5
1.1.2	Standard 802.11	7
2	Limitazioni sulle performance di rete	8
2.1	Notazione di Knuth	9
3	Reti Arbitrarie	11
3.1	Modello Protocollare	11
3.1.1	Limite superiore per reti arbitrarie nel modello proto- collare	12
3.1.2	Limite inferiore per reti arbitrarie nel modello proto- collare	16
3.2	Modello Fisico	19
3.2.1	Limite superiore per reti arbitrarie nel modello fisico .	19
3.2.2	Limite inferiore per reti arbitrarie nel modello fisico . .	22
4	Reti Casuali	23
4.1	Modello Protocollare	24
4.2	Modello Fisico	25
4.3	Celle di Voronoi	26
4.4	Limitazioni inferiori per reti casuali	29
4.5	Limitazioni superiori per reti casuali	41
5	Conclusioni	50
	Bibliografia	52

1 Introduzione

La società verso cui stiamo andando è sempre più basata sullo scambio di dati e informazioni tra persone distanti anche parecchie migliaia di chilometri, siamo nella cosiddetta “società dell’informazione”.

Dal consiglio straordinario di Lisbona 23-24 Marzo 2000 della Commissione Europea si legge:

“L’economia mondiale sta passando da una società prevalentemente industriale ad un nuovo insieme di regole: la società dell’informazione. Quella che sta emergendo viene spesso chiamata la nuova economia”. E ancora: “La dinamica che sta alla base della nuova economia è molto potente. Le tecnologie digitali rendono più economico e più facile l’accesso, l’elaborazione, la memorizzazione e la trasmissione delle informazioni. La trasformazione delle informazioni digitali in valore economico e sociale è la base della nuova economia. Crea nuove attività economiche, ne trasforma altre e modifica profondamente la vita dei loro cittadini.

Le imprese di tutti i settori stanno iniziando a trasformare le proprie attività in forme di commercio elettronico: ciò comporta una ristrutturazione di tutta l’impresa. Gli operatori di molti settori (dalle compagnie aeree alla vendita di libri, dalle società di intermediazione finanziaria all’editoria, alle telecomunicazioni e alla vendita di computer) non esistevano ancora fino a qualche anno fa. La chiave del loro sviluppo è stato l’uso di internet per aumentare la produttività e ampliare la propria presenza sulla rete. Tutte le imprese, grandi o piccole, devono rispondere alle trasformazioni in atto sul mercato”.

Si capisce quindi che lo sviluppo di metodi di trasmissione dati sempre più efficienti e con capacità di trasporto sempre più elevate è importantissimo per far decollare questa nuova economia più di quanto non lo sia già. Il problema alla base dello sviluppo sono proprio i mezzi su cui viaggiano le informazioni. L’invenzione, lo sviluppo e la diffusione di massa di internet sono stati sicuramente i motivi trainanti che hanno portato alla società dell’informazione. La nascita di internet viene fatta risalire al 1969 con il progetto ARPANET una rete ancora molto rudimentale e inventata per scopi militari. Questa invenzione passò poi all’utenza pubblica, e inizialmente servì per collegare dei computer di quattro università statunitensi alla velocità di 50Kbps, ma ben presto venne utilizzato anche in Europa.

Una svolta è rappresentata dall’invenzione nel 1991 del WWW (World Wide Web), in cui l’accesso alle varie pagine è molto semplice grazie all’utilizzo di

un semplice browser.

Per viaggiare l'informazione ha bisogno di un mezzo trasmissivo, i quali sono:

- Doppino in rame
- Rete di distribuzione dell'elettricità
- Rete di distribuzione analogica broadcast
- Radio mobile GSM e UMTS
- Fibra ottica
- Rete radio WLL, WLAN

La rete elettrica è stata introdotta nei primi anni del '900 ma essendo troppo rumorosa è stata scartata. Il doppino in rame è il mezzo utilizzato, inizialmente era analogico e poteva arrivare fino ad una velocità di 56Kb/s poi ISDN con due canali dati a 64Kb/s e uno per le segnalazioni a 16Kb/s. Nel 1992, anche se poi diverrà di uso comune soltanto dal 2000 in poi, viene inventato il sistema DSL, che elimina il problema della banda del doppino di rame, presente nel collegamento per l'utenza privata, e permette velocità massima fino a 10Mbit/s.

L'UMTS invece ha velocità fino a 2 Mb/s e dipende dal numero di utenti in contemporanea, il satellite fino a 500 Kb/s, fibra e coassiale da alcuni Mb/s fino a oltre 10Mb/s, WLL da 2 a 4 Mb/s, WLAN da 11 a 54 Mb/s entrambi condizionati dal numero di utenti in contemporanea.

Il futuro quindi, per riuscire ad eliminare il problema della bassa velocità del doppino in rame, è di utilizzare fibra ottica per la rete primaria (quella che realizza i grossi collegamenti) e WLAN nella secondaria (la rete che arriva all'utente).

Molto importante quindi è lo sviluppo di reti wireless.

Queste reti possono essere divise, in modo approssimativo, in due categorie: le reti "cellulari" in cui è presente una stazione base che gestisce e controlla tutte le trasmissioni tra i nodi della rete e inoltra i dati ai destinatari, le reti "ad hoc" nelle quali invece tutti i nodi hanno capacità e responsabilità uguali.

La definizione data dal gruppo di lavoro per internet detto IETF (Internet Engineering Task Force) sulle reti senza fili ad-hoc o MANET (Mobile Ad hoc NETWORK) è la seguente:

“Una MANET è un sistema autonomo di router mobili e dei loro host associati, connessi con collegamenti di tipo wireless che sono uniti formando un grafo di forma arbitraria. Tali router sono liberi di muoversi casualmente e di auto organizzarsi, sebbene la topologia wireless vari rapidamente ed in modo imprevedibile. Tale rete può operare da sola oppure essere connessa alla rete internet.”

La modalità di instradamento dei pacchetti nella rete è a salti multipli, cioè ogni nodo partecipa nella comunicazione tra sorgente e destinatario.

L’analisi della capacità di una rete ad hoc risulta molto complicata a causa di svariati motivi, tra cui la difficoltà di modellare l’interferenza presente tra tutti i nodi della rete, la distribuzione casuale e la mobilità dei nodi, le limitazioni di potenza, ecc.

Gli studi presenti sulla ricerca di massimizzare la capacità delle reti sono parecchi e incentrati su metodi e modelli diversi. Ad esempio si possono studiare tecniche diverse per l’accesso al mezzo, modalità di instradamento, limitazione dell’energia, controllo di potenza, cancellazione di interferenza, variazione del rate di trasmissione.

Nella nostra trattazione andremo a studiare un articolo del marzo 2000 redatto da Piyush Gupta e P.R. Kumar, membri dell’IEEE, in cui viene affrontato il problema della capacità delle reti senza fili ad hoc e vengono fornite delle limitazioni superiori ed inferiori nel caso di due diverse reti e con due diversi tipi di protocolli. I risultati qui ottenuti sono la base fondamentale per nuove tecniche in grado di massimizzare la capacità di tali reti.

1.1 Storia delle reti ad hoc

Le prime versioni delle reti ad hoc si hanno attorno agli anni '70. Il primo progetto viene realizzato da un gruppo di lavoro chiamato Defense Advanced Research Projects Agency (DARPA) nel 1973. In questo progetto venivano utilizzati pacchetti radio, infatti la rete veniva chiamata PRNet (Packet Radio Network). Negli anni '80 si ha un'evoluzione di questo progetto, sempre da parte di DARPA, con lo sviluppo del progetto SURAN (Survivable Radio Networks) che utilizzava una trasmissione simile a quella dei radio amatori ma che funzionava con un rate bassissimo.

Negli anni '90 con l'arrivo dello standard 802.11 (Wireless Sensor Network), detto anche WiFi, si inizia un utilizzo su larga scala delle reti ad hoc, grazie anche allo sviluppo di internet.

Per il futuro esiste già un gruppo di lavoro per l'implementazione di nuove tipologie di reti, l' IETF MANET.

I prossimi traguardi in questo campo sono le reti JTRS (Joint Tactical Radio System) e NTDR (Near-Term Digital Radio).

1.1.1 Progetto DARPA

Nel 1973 nasce un progetto il cui scopo è di realizzare comunicazioni radio tra computer tramite l'utilizzo di circuiti a pacchetto e tecnica di comunicazione in cui i nodi intermedi memorizzano i dati per poi ritrasmetterli verso la destinazione (rete PRNET). Le informazioni che vengono fornite in questo paragrafo riguardano il progetto dopo una decina d'anni dalla sua nascita, nel momento in cui il progetto può definirsi completo. Le comunicazioni avvengono tra computer distanti geograficamente e che possono muoversi durante la trasmissione. Ciascun nodo può funzionare creando un gruppo autonomo o collegandosi ad altri gruppi.

L'instradamento dei pacchetti radio avviene in modo dinamico sulla base della connettività. La rete durante una trasmissione può cambiare in maniera improvvisa ma grazie all'automatizzazione essa è in grado di valutare e trovare altri percorsi in modo da mantenere attivo il trasporto dei pacchetti, tutto ciò avviene senza che l'utente se ne accorga. La PRNET è composta da due elementi: i pacchetti radio (PR) che realizzano la trasmissione e i dispositivi d'interfaccia quali computer remoti e terminali collegati tramite il controllo del collegamento dati ad alto livello (HDLC High Level Data Link Control).

I PR hanno capacità di trasmettere o ricevere a 400 kbit/s oppure a 100 kbit/s ma non simultaneamente. Per la gestione degli errori vengono utilizzate tecniche che aggiungono ridondanza sufficiente ad individuarli e correggerli (tecniche FEC Forward Error Correction) e tecniche per la ritrasmissione in caso di invio errato (tecniche ARQ Automatic Repeat Request). Queste ultime utilizzano pacchetti detti ACK per informare la sorgente sulla corretta ricezione.

Il protocollo di rete può supportare fino a 138 nodi, di cui la maggior parte sono attaccati a dispositivi, ma alcuni servono soltanto come ripetitori. Con la crescita della rete cresce anche il numero di vicini di ciascun PR. Il numero massimo di vicini che possono essere accettati sono sedici, altrimenti c'è la possibilità che alcune comunicazioni non possano avere luogo.

Per riuscire nel corretto instradamento dei pacchetti ogni PR mantiene l'informazione sulla topologia della rete in modo da prendere decisioni di volta in volta sul percorso da seguire. Le informazioni sull'instradamento sono mantenute grazie a tre tipi di tavole:

- Tavola dei vicini, dove sono contenuti tutti i dati relativi alla tipologia della rete.
- Tavola dei livelli, in cui vengono trovate le distanze minime verso tutti i nodi della rete.
- Tavola dei dispositivi, in cui viene identificato a quale PR è collegato ciascun nodo.

Per la corretta trasmissione ogni pacchetto contiene al suo interno un'intestazione, la quale solitamente occupa il 10 per cento del totale, molto utile al fine di una trasmissione corretta e senza ritrasmissioni inutili. Nell'intestazione sono presenti l'identificativo della sorgente, del destinatario e dei nodi coinvolti nella trasmissione, il numero di sequenza e flag di controllo per la verifica del corretto invio.

La trasmissione avviene mediante protocollo con ascolto della portante (CSMA Carrier Sense Multiple Access) che permette di evitare che PR vicini trasmettano nello stesso momento e vadano quindi in conflitto. Nella pratica un PR per trasmettere ascolta il canale, se è occupato si mette in ascolto fino a che diventa inattivo, sceglie un tempo casuale e se il canale è nuovamente occupato torna a ripetere procedura, altrimenti trasmette il pacchetto.

1.1.2 Standard 802.11

Lo standard 802.11 nasce nel 1997 ma è stato successivamente sviluppato portando a diverse versioni. La prima versione prevedeva velocità di trasmissione di 1/2 Mbit al secondo su banda ISM a 2.4GHz.

Un primo aggiornamento si ha nel 1999 in cui vengono create le versioni 802.11a e 802.11b con nuove modulazioni e velocità più elevate. Nel 2003 infine viene introdotto lo standard 802.11g, un'ulteriore evoluzione compatibile con i dispositivi 802.11b.

Di seguito viene riportata una tabella con le caratteristiche fisiche:

Protocollo	Modulazione	Velocità	Banda utilizzata
802.11	Infrarosso diffuso	1 o 2 Mbps	-
	FHSS	1 o 2 Mbps	2.4 GHz ISM
	DSSS	1 o 2 Mbps	2.4 GHz ISM
802.11a	OFDM	54 Mbps (max)	5.2 GHz UNII
802.11b	HR-DSSS	11 Mbps (max)	2.4 GHz ISM
802.11g	OFDM	54 Mbps (max)	2.4 GHz ISM

La banda utilizzata ISM (Industriale, Scientifica, Medica) fa parte delle frequenze libere ed è disponibile ovunque. La banda UNII a 5.725GHz invece viene commercializzata soltanto negli USA dove è disponibile anche una banda a 902MHz.

Lo standard 802.11 gestisce sia reti ad-hoc che reti ad infrastruttura, queste ultime caratterizzate dalla presenza di diverse celle e di una stazione di controllo detta access point (AP).

2 Limitazioni sulle performance di rete

Per andare a definire dei limiti sulla capacità di reti senza fili ad hoc andremo ad analizzare una rete di n nodi, ciascuno dei quali in grado di trasmettere ad una velocità definita W , la cui unità di misura è bit/s. Un parametro importante per la trattazione della capacità delle reti è il throughput denotato con $\lambda(n)$. Con questo termine si intende il traffico utile smaltito nell'unità di tempo, ovvero il numero di bit che vengono recapitati con successo al destinatario nell'unità di tempo. Quanto appena detto vale per ciascuna coppia sorgente-destinatario, mentre la capacità di throughput della rete è la somma di quanto ottenuto per tutte le singole coppie.

La principale ragione della limitazione della capacità per le reti è dovuta al fatto che ciascun nodo condivide porzioni di canale con gli altri nodi dato che le trasmissioni avvengono su tutto il dominio della rete e nello stesso tempo possono avvenire più trasmissioni. Provando a suddividere il canale in diversi sottocanali non porta a risultati significativi ai fini della capacità di trasporto della rete. Proprio per questo motivo più sono i nodi nella rete e più il throughput della rete diminuirà, fino a tendere a zero.

Per quanto riguarda la scelta dell'accesso al mezzo (MAC) per le reti ad hoc, ovvero del modo con cui viene gestita ciascuna trasmissione nella rete, la decisione è praticamente obbligata. Si ha infatti che l'utilizzo di tecniche TDMA (modulazione a divisione di tempo) è difficile a causa della mancanza di un controllo centralizzato. Infatti con questa tecnica c'è bisogno di un controllo per la divisione e l'assegnazione degli slot ai vari nodi. L'utilizzo di modulazioni a divisione di frequenza (FDMA) non è efficiente in reti con grande densità, infatti c'è bisogno che i canali adiacenti siano separati in maniera adeguata e con molti utenti servirebbe un intervallo di frequenze molto ampio per non creare interferenze. L'utilizzo di modulazioni a divisione di codice (CDMA) risulta anch'essa di difficile utilizzo a causa della mobilità dei nodi. Per regolare l'accesso al mezzo quindi è preferibile utilizzare tecniche ad accesso casuale come ad esempio l'ALOHA.

Il dominio preso in considerazione per la nostra rete, riguarda un disco di area $1m^2$ in cui sono presenti tutti i nodi. I pacchetti tra due nodi vengono trasmessi con tecnica a salti multipli, il che significa che tutti i nodi nella rete aiutano nella trasmissione. Una precisazione riguardante questa tecnica di trasmissione è che i dati trasmessi vengono memorizzati nei nodi intermedi. Un'altra considerazione riguarda il fatto che la localizzazione di tutti i nodi e la loro richiesta di traffico risulta nota e fissa. Nel caso in cui questa con-

dizione non sia rispettata la capacità potrà essere soltanto inferiore. Infine si considera una rete in condizioni ottimali, ovvero vengono scelti percorsi e livelli di potenza nelle trasmissioni in modo che si abbia il massimo rendimento.

Durante la trattazione andremo a studiare due diversi tipi di reti, le “Reti Arbitrarie” e le “Reti Casuali”, e per ciascuna di esse andremo a considerare due diversi tipi di modelli, il “Modello Protocollare” e il “Modello Fisico”.

2.1 Notazione di Knuth

Prima di iniziare l’analisi delle prestazioni sulla capacità di reti ad hoc, introduciamo una notazione che sarà largamente impiegata per la nostra discussione. Tale notazione è stata introdotta nel 1976 dall’informatico Donald Knuth, e riguarda l’uso delle notazioni asintotiche, ovvero dell’ordine di grandezza delle funzioni. Noi ci concentreremo sulla discussione dei limiti O , Ω e Θ . I primi due forniscono dei limiti meno forti e meno precisi rispetto a Θ .

Definizione di O : *Si prenda una funzione $f(n)$, essa è di ordine $O(g(n))$ soltanto se esistono due costanti positive c ed n_0 tali per cui:*

$$\forall n \geq n_0 \quad f(n) \leq cg(n)$$

dove $g(n)$ sta ad indicare un limite superiore al comportamento asintotico della funzione, ovvero dopo n_0 la funzione $f(n)$ non andrà mai al di sopra di $g(n)$.

Il limite introdotto non è stretto infatti prendendo come esempio la funzione $f(n) \in O(n^2)$ significa che la funzione è maggiorata da n^2 , ma essa è maggiorata anche dalla funzione n^3 e quindi la funzione appartiene anche a $O(n^3)$. Questa precisazione è d’obbligo anche se generalmente si tende a trovare il limite superiore più stretto possibile.

Definizione di Ω : *Si prenda una funzione $f(n)$, essa è di ordine $\Omega(g(n))$ soltanto se esistono due costanti positive c ed n_0 tali per cui:*

$$\forall n \geq n_0 \quad cg(n) \leq f(n)$$

dove $g(n)$ sta ad indicare un limite inferiore al comportamento asintotico della funzione, ovvero dopo n_0 la funzione $f(n)$ non andrà mai al di sotto di

$g(n)$.

Anche in questo caso il limite è debole poiché ci sono molte funzioni che soddisfano la precedente definizione, anche se come detto per O si tende a scegliere il limite più stretto possibile.

Definizione di Θ : *Si prenda una funzione $f(n)$, essa è di ordine theta $\Theta(g(n))$ se essa è sia di ordine $O(g(n))$ sia $\Omega(g(n))$, ovvero esistono tre costanti positive n_0 , c_1 e c_2 tali per cui:*

$$\forall n \geq n_0 \quad c_1 g(n) \leq f(n) \leq c_2 g(n)$$

Dato una funzione $g(n)$ di ordine $\Theta f(n)$, si ha che l'andamento di f è perfettamente caratterizzato da quello di g , per cui asintoticamente le due funzioni si comportano in maniera uguale. In formula:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = c \quad c > 0$$

3 Reti Arbitrarie

Questa tipologia prende in considerazione reti in cui tutti i diversi parametri vengono fissati e scelti in modo arbitrario. Si ha quindi che, in una rete formata da n nodi, la disposizione, la destinazione verso la quale ciascun nodo vuole trasmettere e il livello di potenza sono tutti scelti arbitrariamente.

Per la trattazione matematica si tenga presente quanto segue:

- (A.i) La rete è formata da un disco nel piano all'interno del quale sono disposti n nodi in maniera arbitraria.
- (A.ii) In un tempo di T secondi la rete è in grado di trasportare λnT bit.
- (A.iii) La distanza media tra il nodo che trasmette e quello che riceve viene definita \bar{L} e considerando il precedente punto si ha che la capacità di trasporto raggiungibile è pari a $\lambda nT\bar{L}$ bit-metri/s.
- (A.iv) In ciascun insieme di sottocanali M ciascun nodo può trasmettere ad una capacità pari a W_m bit/s dove $1 \leq m \leq M$ e $\sum_{m=1}^M W_m = W$.
- (A.v) La trasmissione è divisa in slot ciascuno con lunghezza τ secondi.
- (A.vi) Prendendo in considerazione una trasmissione da X_i verso X_j in un certo sottocanale e in un certo slot, in un raggio pari a Δr attorno X_j non ci possono essere altri ricevitori nello stesso sottocanale e nello stesso slot.

Un'importante parametro utilizzato nella trattazione è la "Capacità di Trasporto delle Reti Arbitrarie". Si ha una capacità di trasporto di un bit-metro quando un bit viene trasportato alla distanza di un metro verso la destinazione, dato un insieme di trasmissioni che avvengono con successo.

3.1 Modello Protocollare

Si prenda in considerazione una trasmissioni in cui un nodo X_i debba inviare dati al nodo X_j attraverso il sottocanale m . A livello protocollare la trasmissione avviene con successo nel caso in cui:

$$|X_k - X_j| \geq (1 + \Delta) |X_i - X_j| \quad (1)$$

in cui X_k rappresenta qualunque altro nodo che trasmette simultaneamente ad X_i nello stesso sottocanale. La precedente disequazione garantisce in pratica che venga garantita una distanza minima verso il nodo ricevente, che riguarda tutti gli altri nodi della rete che stanno trasmettendo simultaneamente nello stesso sottocanale, e questo limite viene imposto dal parametro $\Delta > 0$.

La capacità di trasporto di una rete arbitraria sotto il modello protocollare è pari a $\Theta(W\sqrt{n})$ nel nostro caso, se si ha un dominio pari ad Am^2 maggiore, la capacità di trasporto dovrà essere moltiplicata per \sqrt{A} . Per arrivare a tale risultato bisogna considerare che in caso di densità di nodi costante, la capacità totale in ogni salto è dell'ordine di $O(n)$. All'aumentare della rete corrisponde anche un relativo aumento del numero dei salti in ogni comunicazione. La lunghezza media del percorso varia in funzione del diametro della rete, o equivalentemente secondo la radice quadrata dell'area, ovvero $O(\sqrt{n})$, e quindi la capacità sarà funzione di $W\sqrt{n}$. La capacità totale è approssimativamente dell'ordine di $O(n/\sqrt{n})$, e il relativo throughput per ciascun nodo dell'ordine di $O(W/\sqrt{n})$ bit/s, considerando ciascuna coppie sorgente-destinatario alla distanza di $1m$.

Un limite superiore per la capacità di trasporto è dato da $\sqrt{\frac{8}{\pi}} \frac{W}{\Delta} \sqrt{n}$ bit-metri/s per qualunque tipo di protocollo a livello spaziale e temporale. Nel caso in cui i parametri della rete siano scelti in modo ottimale, la capacità di trasporto che può essere raggiunta è limitata superiormente da $\frac{W}{1+2\Delta} \frac{n}{\sqrt{n}+\sqrt{8\pi}}$. Dividendo la capacità di trasporto in maniera omogenea tra tutti i nodi, per ogni nodo si ottiene $\Theta(\frac{W}{\sqrt{n}})$ bit-metri/s e la relativa capacità di throughput pari a $\Theta(\frac{W}{\sqrt{n}})$ bit/s. La limitazione che riguarda la precedente capacità di trasporto è dovuta soltanto alla dispersione che si ottiene al ricevitore a causa dei nodi vicini.

Ciò che dovremo ora andare a dimostrare è che, considerando la notazione di Knuth, esistono delle costanti c , e c' tali per cui $cW\sqrt{n}$ è una limitazione superiore e $c'W\sqrt{n}$ è una limitazione inferiore sulla capacità.

3.1.1 Limite superiore per reti arbitrarie nel modello protocollare

Teorema 1 *Considerando il modello arbitrario nelle reti arbitrarie si ha che:*

- i) La capacità di trasporto, definita come $\lambda n \bar{L}$, è limitata superiormente*

da:

$$\lambda n \bar{L} \leq \sqrt{\frac{8}{\pi}} \frac{1}{\Delta} W \sqrt{n} \quad \text{bit - metri/s} \quad (2)$$

ii) Nel caso in cui il rapporto tra potenza massima e potenza minima $\frac{P_{max}}{P_{min}}$ è limitato superiormente in senso stretto da β allora:

$$\lambda n \bar{L} \leq \sqrt{\frac{8}{\pi}} \frac{1}{\left(\frac{\beta P_{min}}{P_{max}}\right)^{1/\alpha} - 1} W \sqrt{n} \quad \text{bit - metri/s} \quad (3)$$

dove α è il coefficiente di attenuazione dovuto al percorso.

iii) Se il dominio della rete non è di $1m^2$, ma è di Am^2 maggiore, i limiti superiori precedenti devono essere scalati di un fattore pari a \sqrt{A} .

Dimostrazione: Per dimostrare la parte i) del Teorema 1 andiamo a prendere in considerazione un bit, $1 \leq b \leq \lambda n \bar{L}$, il quale partendo dalla sorgente arriverà in $h(b)$ salti alla sua destinazione. Considerando che ad ogni salto il bit percorrerà una distanza pari a r_b^h e tenendo in considerazione il punto (A.iii) si ha:

$$\sum_{b=1}^{\lambda n T} \sum_{h=1}^{h(b)} r_b^h \geq \lambda n T \bar{L} \quad (4)$$

La sommatoria più interna fa riferimento al totale dei salti compiuti da ciascun bit b , e quindi alla distanza totale ricevitore-trasmettitore. L'altra sommatoria fa invece riferimento al totale di bit che vengono generati in un periodo T . Il risultato delle due sommatorie fornisce la distanza totale di tutti i bit inviati in un periodo. Tale distanza sarà perciò maggiore o uguale alla capacità della rete trovata nella (A.iii), espressa nella parte destra della disequazione.

Considerando ora che il numero massimo di coppie ricevitore-trasmettitore è pari a $n/2$, dato che un nodo non può essere sia sorgente che destinatario allo stesso momento, il numero massimo di nodi che trasmettono è nuovamente $n/2$. Andiamo perciò a modificare la parte destra della disequazione in (4) considerando inoltre la velocità di ciascun sottocanale m definita W_m e il tempo τ di ciascun slot s si ha:

$$\sum_{b=1}^{\lambda n T} \sum_{h=1}^{h(b)} 1 (\text{distanza del salto } h\text{-esimo della trasmissione})$$

nel sottocanale m e nello slot s) $\leq \frac{W_m \tau n}{2}$

Sommiamo ora su tutti i sottocanali e su tutti gli slot tenendo presente che in un tempo T secondi possono esserci al massimo $\frac{T}{\tau}$ slot:

$$H := \sum_{b=1}^{\lambda n T} h(b) \leq \frac{W T n}{2} \quad (5)$$

dove si è denotata con H la precedente sommatoria per questioni di semplicità che verranno utili nel seguito.

Andiamo ora a considerare una trasmissione dal nodo X_i verso il nodo X_j e un'altra trasmissione da X_k verso X_l che avvengono simultaneamente e nello stesso sottocanale. Ora considerando la disuguaglianza triangolare possiamo scrivere:

$$|X_j - X_l| \geq |X_j - X_k| - |X_l - X_k| \geq (1 + \Delta) |X_i - X_j| - |X_l - X_k|$$

dove nell'ultimo passaggio siano andati a sostituire il valore di $|X_j - X_k|$ con l'utilizzo della disuguaglianza (1).

Similmente a quanto appena fatto, ma considerando i nodi X_i, X_j, X_l si ottiene:

$$|X_l - X_j| \geq (1 + \Delta) |X_k - X_l| - |X_j - X_i|$$

Si vada ora a sommare le due precedenti disequazioni membro a membro. Il risultato che si ottiene è il seguente:

$$\begin{aligned} 2 |X_j - X_l| &\geq \Delta |X_i - X_j| + |X_i - X_j| - |X_l - X_k| + \\ &+ \Delta |X_k - X_l| + |X_k - X_l| - |X_j - X_i| \end{aligned}$$

andiamo a raccogliere i termini comuni per semplificare il più possibile, tenendo presente che invertendo i due termini all'interno del modulo il risultato non cambia, ovvero $|x - y| = |y - x|$:

$$2 |X_j - X_l| \geq \Delta |X_i - X_j| + \Delta |X_k - X_l|$$

portando il termine 2 a destra della disequazione in modo da lasciare soltanto il termine $|X_j - X_l|$ a sinistra porta al risultato voluto:

$$|X_j - X_l| \geq \frac{\Delta}{2} (|X_k - X_l| + |X_i - X_j|)$$

Dalla precedente formula risulta che la condizione necessaria perché la trasmissione avvenga con successo tra una coppia ricevitore-trasmittitore è che, nello stesso sottocanale e nello stesso slot, non ci siano altri ricevitori in un raggio pari a $\frac{\Delta}{2}$ volte la lunghezza del salto. Tale cerchio ha come centro il destinatario della comunicazione. Tenendo conto dei nodi che si trovano verso la periferia del dominio si nota che un raggio attorno al ricevitore di tale grandezza è eccessivo, dato che viene a trovarsi al di fuori di esso. Si può notare perciò che al massimo un quarto di tale raggio si trova all'interno del dominio. Quindi l'area attorno al ricevitore necessaria per garantire una corretta ricezione è uguale a:

$$A = \frac{\pi R^2}{4} = \frac{\pi \Delta^2 (r_b^h)^2}{4 \times 4} = \frac{\pi \Delta^2 (r_b^h)^2}{16}$$

Considerando ora che il massimo di bit che possono essere trasmessi dal ricevitore al trasmettitore nel relativo slot e sottocanale è pari a $W_m \tau$, utilizzando la formula precedentemente trovata, ed inserendo la porzione di area che abbiamo dimostrato necessaria per la corretta ricezione si ha:

$$\sum_{b=1}^{\lambda n T} \sum_{h=1}^{h(b)} 1(\text{distanza del salto } h\text{-esimo della trasmissione nel sottocanale } m \text{ e nello slot } s) \frac{\pi \Delta^2}{16} (r_b^h)^2 \leq W_m \tau \quad (6)$$

Come precedentemente fatto andando a sommare su tutti i sottocanali e tutti gli slot la parte destra della disequazione diventa uguale a WT :

$$\sum_{b=1}^{\lambda n T} \sum_{h=1}^{h(b)} \frac{\pi \Delta^2}{16} (r_b^h)^2 \leq WT \quad (7)$$

Per riuscire a trovare la soluzione della precedente disequazione dovremo andare a fare delle modifiche. Prima di tutto moltiplichiamo entrambi i membri per il valore $\frac{16}{\pi \Delta^2}$, che nella parte sinistra va a semplificarsi dato che i termini sono tutti costanti e possono essere portati fuori dalla sommatoria. Andiamo inoltre a moltiplicare entrambi i membri anche per $\frac{1}{H}$ il quale rimane all'interno della sommatoria per la dipendenza da n e λ :

$$\sum_{b=1}^{\lambda n T} \sum_{h=1}^{h(b)} \frac{1}{H} (r_b^h)^2 \leq \frac{16WT}{\pi \Delta^2 H} \quad (8)$$

Andiamo ora a prendere in considerazione la nostra parte sinistra della disequazione. Essa è una funzione quadrica di tipo convesso, la quale possiede la seguente proprietà:

$$\left(\sum_{b=1}^{\lambda n T} \sum_{h=1}^{h(b)} \frac{1}{H} (r_b^h) \right)^2 \leq \sum_{b=1}^{\lambda n T} \sum_{h=1}^{h(b)} \frac{1}{H} (r_b^h)^2 \quad (9)$$

Utilizzando tale proprietà nella disuguaglianza (8) ed elevando alla $\frac{1}{2}$ entrambi i membri si ottiene:

$$\sum_{b=1}^{\lambda n T} \sum_{h=1}^{h(b)} \frac{1}{H} r_b^h \leq \sqrt{\frac{16 W T H}{\pi \Delta^2}} \quad (10)$$

Portiamo $\frac{1}{H}$ a destra, il quale diviso per la radice di H sarà uguale alla \sqrt{H} , e andiamo a sostituire $\sum_{b=1}^{\lambda n T} \sum_{h=1}^{h(b)} r_b^h$ con la (4):

$$\lambda n T \bar{L} \leq \sqrt{\frac{16 W T H}{\pi \Delta^2}} \quad (11)$$

Sostituiamo il valore di H con il risultato ottenuto nella (5):

$$\lambda n T \bar{L} \leq \sqrt{\frac{16 W^2 T^2 n}{2 \pi \Delta^2}} \quad (12)$$

semplifichiamo il 16 con il 2 ed estraiamo dalla radice tutti i quadrati:

$$\lambda n T \bar{L} \leq \sqrt{\frac{8}{\pi}} \frac{1}{\Delta} W T \sqrt{n} \quad (13)$$

Semplificando T si arriva al risultato.

Grazie a questa dimostrazione si ha che effettivamente esiste una costante $c = \sqrt{\frac{8}{\pi}} \frac{1}{\Delta}$ che limita superiormente la capacità $W \sqrt{n}$.

3.1.2 Limite inferiore per reti arbitrarie nel modello protocollare

Andremo ora a dimostrare che il limite superiore appena trovato è forte per il modello protocollare. Tutto ciò verrà dimostrato analizzando una certa configurazione di rete.

Teorema 2 *Nel modello protocollare si possono disporre i nodi e gestire la domanda di traffico in maniera tale per cui la capacità che può essere raggiunta è pari a :*

$$\frac{W}{1+2\Delta} \frac{n}{\sqrt{n} + \sqrt{8\pi}} \quad \text{bit - metri/s}$$

dove n è multiplo di quattro.

Dimostrazione: Come prima cosa andiamo a definire una costante r nel seguente modo:

$$r := \frac{1}{1+2\Delta} \frac{1}{\sqrt{\frac{n}{4}} + \sqrt{2\pi}}$$

dove r rappresenta la distanza tra trasmettitore e il ricevitore più vicino. Ricordiamo che il dominio della rete è modellato come un disco sul piano il cui raggio è pari a $\frac{1}{\sqrt{\pi}}$.

Andiamo ad assumere che l'origine degli assi cartesiani sia al centro del dominio e andiamo a disporre i nodi nel seguente modo. I ricevitori andranno posizionati in $(j(1+2\Delta)r \pm \Delta r, k(1+2\Delta)r)$ e in $(j(1+2\Delta)r, k(1+2\Delta)r \pm \Delta r)$ dove si considera che $|j+k|$ sia pari, mentre i ricevitori verranno posizionati in $(j(1+2\Delta)r \pm \Delta r, k(1+2\Delta)r)$ e in $(j(1+2\Delta)r, k(1+2\Delta)r \pm \Delta r)$ dove invece si considera $|j+k|$ dispari.

Considerando ora che il numero massimo di nodi che possono trasmettere all'interno del dominio è pari a $\frac{n}{2}$ e considerando che ciascuna trasmissione avviene alla velocità di W bit/s, si ottiene la capacità del Teorema 2.

Lemma 3: *In riferimento al Teorema 2 si possono raggiungere le seguenti capacità in base al numero dei nodi della rete:*

$$\begin{aligned} & \frac{2W}{\sqrt{\pi}} \text{ bit-metri/s, per } n \geq 2 \\ & \frac{4W}{\sqrt{\pi}(1+\Delta)} \text{ bit-metri/s, per } n \geq 8 \\ & \frac{W}{(1+2\Delta)} \frac{n}{\sqrt{n} + \sqrt{8\pi}} \text{ bit-metri/s, per } n = 2, 3, \dots, 20, 21 \\ & \frac{W}{(1+2\Delta)} \frac{4\lfloor \frac{n}{4} \rfloor}{\sqrt{4\lfloor \frac{n}{4} \rfloor + \sqrt{8\pi}}} \text{ bit-metri/s, per tutti gli } n \end{aligned}$$

Con almeno due nodi, si può dimostrare il raggiungimento della capacità disponendo i due nodi che devono comunicare alle due estremità diametralmente opposte. Infatti essendo il raggio del dominio pari a $\frac{1}{\sqrt{\pi}}$ la distanza sarà $\frac{2}{\sqrt{\pi}}$. Questa dimostrazione vale per $n \leq 8$. Con almeno otto nodi,

quattro possono essere disposti alle estremità di diagonali perpendicolari, e ciascuno di essi trasmette al ricevitore ad una distanza pari a $\frac{1}{\sqrt{\pi(2+2\Delta)}}$ dal centro del dominio. Questo verifica la formula per un numero di nodi minore di 21.

La trattazione sul limite inferiore va a fortificare quanto detto per le reti arbitrarie. Siamo infatti riusciti a trovare che secondo una certa disposizione dei nodi riusciamo a raggiungere la capacità definita nel Teorema 2. Di conseguenza in caso di rete arbitraria secondo modello protocollare abbiamo che l'andamento è effettivamente limitato da $\Theta(W\sqrt{n})$.

3.2 Modello Fisico

Anche in questo caso viene presa in considerazione la rete come precedentemente descritta. Prendiamo ora il sottoinsieme dei nodi che trasmettono simultaneamente e nello stesso sottocanale e lo definiamo $\{X_k; k \in T\}$ e definiamo con P_k i livelli di potenza scelti per ciascun nodo X_k . Una trasmissione da X_i ad X_j con $i \in T$ avverrà con successo nel caso in cui:

$$\frac{\frac{P_i}{|X_i - X_j|^\alpha}}{N + \sum_{k \in T, k \neq i} \frac{P_k}{|X_k - X_j|^\alpha}} \geq \beta \quad (14)$$

Nella precedente formula N rappresenta il livello di potenza del rumore bianco, mentre α rappresenta il coefficiente di attenuazione dovuto al percorso, e si suppone che $\alpha > 2$. La potenza del segnale è in funzione della distanza r tra i nodi e decade come $\frac{1}{r^\alpha}$. In pratica la disequazione impone un limite inferiore β al rapporto segnale-rumore (SIR dall'inglese signal-to-interference ratio) per garantire che la ricezione avvenga con successo.

Nel modello fisico andremo a considerare due diverse situazioni, una più generale in cui la capacità di trasporto che andremo a trovare varierà in funzione di $\Theta(Wn^{\frac{\alpha-1}{\alpha}})$, e un caso più particolare che porterà ad un risultato uguale a quanto trovato per il modello protocollare.

3.2.1 Limite superiore per reti arbitrarie nel modello fisico

Teorema 3 *Considerando il modello fisico nelle reti arbitrarie si ha che:*

- i) *La capacità di trasporto, definita come $\lambda n \bar{L}$, è limitata superiormente da:*

$$\lambda n \bar{L} \leq \left(\frac{2\beta + 2}{\beta} \right)^{\frac{1}{\alpha}} \frac{1}{\sqrt{\pi}} W n^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} \quad \text{bit - metri/s} \quad (15)$$

- ii) *Nel caso in cui il rapporto tra potenza massima e potenza minima $\frac{P_{max}}{P_{min}}$ è limitato superiormente in senso stretto da β allora:*

$$\lambda n \bar{L} \leq \sqrt{\frac{8}{\pi}} \frac{1}{\left(\frac{\beta P_{min}}{P_{max}} \right)^{1/\alpha} - 1} W \sqrt{n} \quad \text{bit - metri/s} \quad (16)$$

- iii) *Se il dominio della rete non è di $1m^2$, ma è di Am^2 maggiore, i limiti superiori precedenti devono essere scalati di un fattore pari a \sqrt{A} .*

Dimostrazione: Per dimostrare il punto (i) del teorema 2 consideriamo una rete in cui un nodo X_i deve trasmettere verso un nodo $X_{j(i)}$, e consideriamo l'insieme T formato dai nodi che trasmettono simultaneamente nello stesso sottocanale m . Ogni trasmissione avverrà ad una certa potenza P_i . Si prenda ora in considerazione la formula (14) considerando la rete appena descritta:

$$\frac{\frac{P_i}{|X_i - X_{j(i)}|^\alpha}}{N + \sum_{k \in T} \frac{P_k}{|X_k - X_{j(i)}|^\alpha}} \geq \frac{\beta}{\beta + 1}$$

Ora lasciando a sinistra il termine $|X_i - X_{j(i)}|^\alpha$ e trasportando tutto il resto a destra della disequazione si ottiene:

$$|X_i - X_{j(i)}|^\alpha \leq \frac{\beta + 1}{\beta} \frac{P_i}{N + \sum_{k \in T} \frac{P_k}{|X_k - X_{j(i)}|^\alpha}}$$

Dato che $|X_k - X_{j(i)}| \leq \frac{2}{\sqrt{\pi}}$, dovuto al fatto che il raggio del dominio è pari a $\frac{1}{\sqrt{\pi}}$, e i nodi non si possono trovare al di fuori del dominio, portando fuori il termine dalla sommatoria otteniamo:

$$|X_i - X_{j(i)}|^\alpha \leq \frac{\beta + 1}{\beta} \frac{P_i}{N + \left(\frac{\pi}{4}\right)^{\alpha/2} \sum_{k \in T} P_k}$$

Sommiamo su tutte le coppie trasmettitore-ricevitore:

$$\sum_{i \in T} |X_i - X_{j(i)}|^\alpha \leq \frac{\beta + 1}{\beta} \frac{\sum_{i \in T} P_i}{N + \left(\frac{\pi}{4}\right)^{\alpha/2} \sum_{k \in T} P_k}$$

Trascurando il termine N , attenuazione dovuta al rumore bianco, e semplificando la sommatorie delle potenze al denominatore e al numeratore, che si possono considerare dello stesso valore:

$$\sum_{i \in T} |X_i - X_{j(i)}|^\alpha \leq 2^\alpha \pi^{-(\alpha/2)} \frac{\beta + 1}{\beta}$$

Sommiamo su tutti gli slot e su tutti i sottocanali, definiamo la lunghezza di ogni salto come $r(h, b) := |X_i - X_{j(i)}|$. Come già visto nel caso del modello protocollare quanto detto equivale a dire:

$$\sum_{b=1}^{\lambda n T} \sum_{h=1}^{h(b)} r^\alpha(h, b) \leq 2^\alpha \pi^{-(\alpha/2)} \frac{\beta + 1}{\beta} W T$$

Il resto della dimostrazione procede in maniera analoga a quanto fatto per il modello protocollare. Per prima caso moltiplichiamo entrambi i termini per $\frac{1}{H}$ e considerando la convessità di r^α si ha:

$$\left(\sum_{b=1}^{\lambda n T} \sum_{h=1}^{h(b)} \frac{1}{H} r(h, b) \right)^\alpha \leq \sum_{b=1}^{\lambda n T} \sum_{h=1}^{h(b)} \frac{1}{H} r^\alpha(h, b)$$

Sostituendo quanto appena scritto:

$$\sum_{b=1}^{\lambda n T} \sum_{h=1}^{h(b)} r(h, b) \leq \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{\beta + 1}{\beta} \right)^{1/\alpha} (WT)^{\frac{1}{\alpha}} H^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}$$

Andando a sostituire il termine a sinistra dell'equazione con la (4) e il valore di H col la (5) otteniamo:

$$\lambda n T \bar{L} \leq \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{\beta + 1}{\beta} \right)^{1/\alpha} (WT)^{\frac{1}{\alpha}} \left(\frac{WTn}{2} \right)^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}$$

Sommando gli esponenti dei termini comuni otteniamo:

$$\lambda n T \bar{L} \leq \frac{2^{1/\alpha}}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{\beta + 1}{\beta} \right)^{1/\alpha} WT n^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}$$

Infine portando il 2 all'interno di $\left(\frac{\beta+1}{\beta} \right)^{1/\alpha}$ e semplificando T si arriva al risultato della (15).

Nel caso in cui il rapporto tra potenza massima e potenza minima sia limitato superiormente da β abbiamo:

$$\frac{\frac{P_i}{|X_i - X_j|^\alpha}}{\frac{P_k}{|X_k - X_j|^\alpha}} \geq \beta$$

Ovvero mantenendo soltanto $|X_k - X_j|$ a sinistra e tutto il resto a destra:

$$|X_k - X_j| \geq \left(\frac{\beta P_{min}}{P_{max}} \right)^{\frac{1}{\alpha}} |X_i - X_j| = (1 + \Delta) |X_i - X_j|$$

dove nell'ultimo passaggio si è andati a definire $\Delta := \left(\frac{\beta P_{min}}{P_{max}} \right)^{\frac{1}{\alpha}} - 1$.

Il che equivale a dire che in questo particolare caso per la ricerca di limitazioni

superiori ci si riconduce a quanto fatto per il modello protocollare. Nel caso generale di reti arbitrarie secondo il modello fisico si ha quindi che la capacità di trasporto varia come $\Theta\left(\frac{1}{n^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}}\right)$, mentre nel caso particolare citato nella ii) del Teorema 2, la capacità è limitata superiormente da $\Theta(W\sqrt{n})$, come dimostrato nel caso di reti arbitrarie secondo il modello protocollare.

3.2.2 Limite inferiore per reti arbitrarie nel modello fisico

Andremo ora a dimostrare che il limite superiore appena trovato è forte per il modello fisico. Tutto ciò verrà dimostrato analizzando una certa configurazione di rete.

Teorema 4 *Nel modello fisico si possono disporre i nodi e gestire la domanda di traffico in maniera tale per cui la capacità che può essere raggiunta è pari a :*

$$\frac{1}{\left(16\beta\left(2^{\frac{\alpha}{2}} + \frac{6^{\alpha-2}}{\alpha-2}\right)\right)^{\frac{1}{\alpha}}} \frac{Wn}{\sqrt{n} + \sqrt{8\pi}} \quad \text{bit - metri/s}$$

dove n è multiplo di quattro.

Dimostrazione: La dimostrazione si basa sul fatto che il SIR è limitato inferiormente da $\frac{(1+2\Delta)^\alpha}{16\left(2^{\frac{\alpha}{2}} + \frac{6^{\alpha-2}}{\alpha-2}\right)}$ per tutti i ricevitori. Eguagliando questa formula

con β e ricavando il relativo Δ porta al risultato.

Quanto appena dimostrato ci porta a rafforzare quanto trovato per il limite superiore e a confermare che l'andamento della capacità è funzione di $\Theta\left(Wn^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}\right)$.

4 Reti Casuali

Prendendo in considerazione le reti casuali si ha che la differenza sostanziale rispetto alle reti arbitrarie, è che qui tutti i parametri non vengono fissati, ma vengono trattati in maniera aleatoria. Più specificatamente per questo tipo di reti, come precedentemente fatto per le reti arbitrarie, andiamo a prendere come dominio della rete un disco di area $1m^2$, ma in cui gli n nodi sono disposti in maniera casuale, indipendente ed uniforme. Si assume che ciascun nodo della rete voglia trasmettere in modo indipendente verso un destinatario vicino ad un punto scelto in maniera casuale, la cui distanza in media è pari a $1m$.

Un'importante considerazione su quanto detto è relativa al fatto della scelta di $r(n)$, ovvero della distanza di ciascun salto. Considerando che ciascuna trasmissione aiuta nella trasmissione porterebbe a pensare di prendere $r(n)$ il maggiore possibile. Infatti definendo \bar{L} la distanza media trasmettitore-ricevitore e $r(n)$ il raggio di ciascun nodo, il numero medio di salti per ciascun pacchetto è uguale a $\frac{\bar{L}}{r(n)}$ e il relativo traffico totale della rete, con n numero di nodi che trasmettono a W bit/s, è pari a $\frac{\bar{L}n\lambda(n)}{r(n)}$. Si ha quindi $\frac{\bar{L}n\lambda(n)}{r(n)} \leq nW$. La capacità di throughput è quindi limitata superiormente da $\lambda(n) \leq \frac{Wr(n)}{\bar{L}}$, e quindi come si voleva dimostrare si ha un aumento al crescere del raggio di portata dei singoli nodi e quindi del diminuire dei salti in ciascuna trasmissione.

D'altra parte l'aumento di $r(n)$ non può essere eccessivo per due motivi. In primo luogo aumentando eccessivamente $r(n)$ si corre il rischio di perdere la connessione. In secondo luogo la probabilità di collisioni, con la conseguente perdita di pacchetti, aumenta notevolmente, dato che i ricevitori si trovano più spesso occupati.

Il throughput con la quale avviene la trasmissione sorgente-destinatario è definito $\lambda(n)$ e la sua unità di misura è bit/s. Tutte le trasmissioni che avvengono nella rete assumono lo stesso livello di potenza.

Anche in questo scenario, come è stato fatto nel caso di reti arbitrarie, si vanno a studiare i modelli a livello fisico e protocollare.

La capacità di throughput viene nuovamente definita come il numero medio di bit che vengono trasmessi con successo in ciascuna trasmissione, e viene misurata in bit/s.

Andiamo invece a definire il throughput raggiungibile. Prendendo una trasmissione il throughput viene definito raggiungibile se, tramite un certo protocol-

lo, vengono recapitati in media $\lambda(n)$ bit/s verso la destinazione. La modalità con cui avviene la trasmissione è sempre mediante salti multipli in cui i dati vengono memorizzati nei nodi intermedi. In maniera più esplicita, considerando un tempo $T < \infty$ e il suo relativo intervallo $[(i-1)T, iT]$, si ha che la sorgente invia a destinazione $T\lambda(n)$ bit.

Ciò che dovremo andare a dimostrare è che la capacità di throughput nel caso di reti casuali è dell'ordine di $\Theta(f(n))$ bit/s, ciò avviene se esistono le costanti deterministiche $c > 0$ e $c' < +\infty$ tali che:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \text{Prob}(\lambda(n) = cf(n) \quad \text{sia realizzabile}) &= 1 \\ \liminf_{n \rightarrow \infty} \text{Prob}(\lambda(n) = c'f(n) \quad \text{sia realizzabile}) &< 1 \end{aligned}$$

4.1 Modello Protocollare

La distanza impiegata in ciascuna trasmissione viene assunta ad un valore comune r . Poiché una comunicazione dal nodo X_i verso il nodo X_j nel canale m avvenga con successo devono essere soddisfatte le condizioni:

- i) La distanza tra i due nodi deve essere minore o uguale ad r :

$$|X_i - X_j| \leq r$$

- ii) Per ciascun nodo X_k che trasmette simultaneamente nello stesso canale deve valere:

$$|X_k - X_j| \geq (1 + \Delta)r$$

Vediamo che quanto appena scritto è simile al caso di reti arbitrarie. Si impone un limite questa volta anche alla distanza tra ricevitore e trasmettitore, e un limite fissato da $\Delta > 0$ attorno al nodo ricevente in modo che altre trasmissioni non vadano a interferire.

L'ordine del limite sulla capacità di throughput che si vuole dimostrare, considerando la rete descritta, è pari a:

$$\lambda(n) = \Theta\left(\frac{W}{\sqrt{n \log(n)}}\right) \quad \text{bit/s}$$

Il relativo limite superiore che si vuole provare, data la costante c' , è dato da:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{Prob}\left(\lambda(n) = c' \frac{W}{\sqrt{n \log(n)}} \quad \text{sia realizzabile}\right) = 1$$

Più precisamente, tenendo presente la notazione di Knuth, ci sono due costanti c'' e c''' indipendenti da n , Δ e W che, considerando $n \rightarrow \infty$, portano alle seguenti conclusioni:

$$\lambda(n) = \frac{c''W}{(1 + \Delta)^2 \sqrt{n \log(n)}} \quad \text{bit/s}$$

è una situazione che può essere realizzabile, mentre:

$$\lambda(n) = \frac{c'''W}{\Delta^2 \sqrt{n \log(n)}} \quad \text{bit/s}$$

è una situazione che non può essere realizzata.

Si tenga presente che alcune reti possono essere formate oltre che da nodi che partecipano attivamente alla trasmissione anche da nodi disposti in maniera casuale, i quali servono soltanto per ritrasmettere il traffico delle altre comunicazioni ma non fungono da sorgenti. Indicando il numero di questi nodi con m l'ordine della capacità di throughput diventa pari a $\Theta\left(\frac{(n+m)W}{n\sqrt{(n+m)\log(n+m)}}\right)$.

L'utilizzo di nodi per la sola ritrasmissione però non porta a risultati significativi, infatti l'aggiunta di kn nodi per la ritrasmissione, porta ad un incremento della capacità pari a $\sqrt{k+1}$.

4.2 Modello Fisico

Per il modello fisico delle reti casuali si assume che tutti i nodi trasmettano ad un livello di potenza comune P . La trasmissione secondo questo modello avviene con successo nel caso in cui:

$$\frac{\frac{P}{|X_i - X_j|^\alpha}}{N + \sum_{k \subset T, k \neq i} \frac{P}{|X_k - X_j|^\alpha}} \geq \beta \quad (17)$$

dove $\{X_k; k \in T\}$ è l'insieme delle trasmissioni che avvengono nello stesso momento e sullo stesso canale, X_i con $i \in T$ è il nodo sorgente e X_j il nodo ricevente.

Scegliendo in modo appropriato le costanti c e c' , considerando $n \rightarrow \infty$, una capacità di throughput pari a $\lambda(n) = \frac{cW}{\sqrt{n \log(n)}}$ risulta realizzabile, mentre $\lambda(n) = \frac{c'W}{\sqrt{n}}$ non è realizzabile. In maniera più specifica, assumendo

due costanti c'' e c''' indipendenti dai parametri n , N , α , β e W il limite raggiungibile sulla capacità diviene:

$$\lambda(n) = \frac{c''}{\left(2(c'''\beta(3 + \frac{1}{\alpha-1} + \frac{2}{\alpha-2}))^{\frac{1}{\alpha}} - 1\right)^2} \frac{W}{\sqrt{n \log(n)}} \quad \text{bit/s}$$

Infine considerando la distanza media tra due punti \bar{L} e la sequenza deterministica $\epsilon(n) \rightarrow 0$, anch'essa indipendente dai parametri prima citati per c'' e c''' si ha che una capacità pari a:

$$\sqrt{\frac{8}{\pi}} \frac{W}{\bar{L}(\beta^{\frac{1}{\alpha}} - 1)} \frac{1 + \epsilon(n)}{\sqrt{n}} \quad \text{bit/s}$$

risulta irrealizzabile con probabilità che tende a 1.

Tutto ciò che è stato definito per le reti casuali secondo il modello fisico verrà dimostrato nel seguito.

4.3 Celle di Voronoi

Prima di trattare le limitazioni di reti casuali andiamo a introdurre alcune nozioni sulla suddivisione di aree in celle secondo i teoremi di Voronoi (dal nome del matematico russo Georgij Feodos'evič Voronoj 1868-1908). Queste nozioni saranno di fondamentale utilizzo per le successive dimostrazioni.

Si prenda una rete il cui dominio è formato dalla superficie circolare S^2 della sfera, con al suo interno un numero di nodi pari ad n . Si vada a suddividere il dominio in celle, dette appunto celle di Voronoi, le quali sono in relazione al numero di nodi presenti. La scelta della grandezza delle celle deve essere fatta in maniera razionale, esse non devono essere né troppo piccole né troppo grandi. Più precisamente prendendo un insieme di p punti $\{a_1, a_2, \dots, a_p\}$ in S^2 , la cella di Voronoi associata $V(a_i)$ è definita:

$$V(a_i) := \{x \in S^2 : |x - a_i| = \min_{1 \leq j \leq p} |x - a_j|\}$$

In pratica ciascuna cella è formata dall'insieme di punti che sono più vicini ad a_i , definito generatore della cella di Voronoi $V(a_i)$, rispetto a tutti gli altri nodi della rete. Specifichiamo che una tale suddivisione avviene anche per il fatto che i percorsi compiuti durante una trasmissione avvengono in linea

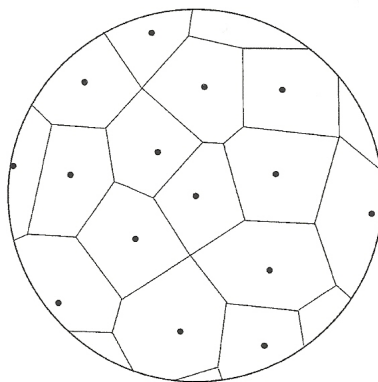


Figura 1: Esempio di suddivisione del dominio della rete in celle di Voronoi.

retta tra i vari nodi.

Lemma 4.1: *Ciascuna cella di Voronoi, secondo una determinata suddivisione del dominio in S^2 , ha la proprietà di contenere un disco di raggio ϵ , ed essere contenuta in un disco di raggio 2ϵ , per ogni $\epsilon > 0$.*

Dimostrazione: Consideriamo un disco $D(x, \epsilon)$ dove x è il centro del raggio, mentre ϵ è il suo raggio. Prendiamo un insieme di punti a_1, \dots, a_p tali per cui la distanza tra due nodi è sempre maggiore o uguale a 2ϵ . Nel caso in cui si prenda un punto x tale per cui $D(x, \epsilon)$ non interseca nessun altro disco dell'insieme degli altri punti, allora x può essere aggiunto alla collezione e si ha $a_{p+1} = x$. In caso questa condizione non venga soddisfatta il punto non verrà aggiunto alla collezione.

Continuando con questa procedura ci troviamo alla fine con un insieme di punti generatori che sono posti alla distanza di almeno 2ϵ tra loro. Questo dimostra il lemma precedente.

I parametri che verranno presi come riferimento per le celle di Voronoi sono i seguenti:

- i) Ciascuna cella di Voronoi contiene un cerchio di area $\frac{100 \log(n)}{n}$ e $\rho(n)$ è definito come il relativo raggio.
- ii) Ciascuna cella di Voronoi è contenuta in un disco di raggio pari a $2\rho(n)$.

Definizione: *Due celle vengono definite adiacenti se hanno un punto del loro dominio in comune.*

Il range $r(n)$ per ciascuna trasmissione è definito come segue:

$$r(n) = 8\rho(n)$$

Il raggio scelto è tale per cui si riesca a comunicare all'interno di una cella e con le celle adiacenti.

Ciascun nodo all'interno di una cella è a una distanza minore o uguale a $r(n)$ rispetto agli altri nodi all'interno della cella o in quelle adiacenti. Quanto detto può essere semplicemente dimostrato prendendo in considerazione che ciascuna cella è contenuta in un cerchio di raggio pari a $2\rho(n)$, per cui il diametro equivale a $4\rho(n)$. Considerando che ciascuna cella adiacente è limitata superiormente alla stessa maniera, la distanza massima tra due nodi della rete sarà uguale a $8\rho(n)$ come volevasi dimostrare.

Un'altra importante definizione riguarda celle adiacenti interferenti. Due celle vicine vengono dette interferenti se c'è un punto su una cella che è ad una distanza inferiore a $(2 + \Delta)r(n)$ rispetto ad un punto della cella adiacente. Questo parametro è molto importante, infatti soltanto nel caso in cui due celle non siano interferenti la comunicazione avviene sicuramente senza collisioni nel modello protocollare.

Possiamo andare a ricavare una limitazione sul numero di vicini interferenti di una cella. La limitazione superiore del numero di vicini di una cella è rappresentata da c_1 , la quale dipende soltanto da Δ e cresce come $(1 + \Delta)^2$. Per la dimostrazione si prendano due celle V e V' . Secondo la definizione queste due celle sono interferenti nel caso in cui un punto in V e un punto in V' si trovino ad una distanza inferiore o uguale a $(2 + \Delta)r(n)$. Il diametro di ciascuna cella, come detto prima, è limitato superiormente da $4\rho(n)$, perciò la cella V' , e qualunque altra cella interferente, è contenuta in un disco D di raggio $6\rho(n) + (2 + \Delta)r(n)$. Il termine $6\rho(n)$ viene sommato considerando il caso limite in cui i due nodi si vengano a trovare ai bordi del dominio. Facendo il rapporto tra area del disco D e l'area del disco contenuto in ciascuna cella, si trova che all'interno di D non ci possono essere più di $c_2 \frac{(6\rho(n) + (2 + \Delta)r(n))^2}{\rho^2(n)}$ dischi di raggio $\rho(n)$, il quale equivale anche al limite superiore del numero di celle all'interno del disco. Infatti $\rho(n)$ rappresenta il raggio del cerchio all'interno di ciascuna cella. La formula precedente rappresenta quindi un limite superiore per il numero di vicini interferenti che come visto dipende

soltanto da Δ .

4.4 Limitazioni inferiori per reti casuali

Ciò che si vuole dimostrare in questa sezione è che si riesca a garantire un canale con capacità di throughput pari a $\frac{cW}{(1+\Delta)^2\sqrt{n\log(n)}}$ bit/s con probabilità che tende a 1 per $n \rightarrow \infty$. Questa capacità deve essere garantita per ciascuna coppia sorgente-destinatario, entrambi disposti in una posizione casuale e secondo un determinato protocollo.

Lemma 4.2:

i) Nel modello protocollare si trova un protocollo tale che ogni cella sceglie uno slot tra gli $(1 + c_1)$ disponibili per trasmettere con successo verso un destinatario posto ad una distanza inferiore a $r(n)$.

ii) Per il modello fisico vale la i) se viene scelta Δ tale da soddisfare:

$$(1 + \Delta)^2 > \left(2 \left(c\beta \left(3 + \frac{1}{\alpha - 1} + \frac{2}{\alpha - 2} \right) \right)^{\frac{1}{\alpha}} - 1 \right)^2$$

prendendo c costante indipendente da n, N, α, β, W e considerando un livello di potenza P sufficientemente elevato.

Dimostrazione: Prendiamo in considerazione il grafo della rete, e andiamo a colorare ciascun vertice, in modo che vertici vicini non abbiano mai lo stesso colore. Sotto questa condizione e considerando un grafo di grado minore o uguale a c_1 , il numero di colori da utilizzare per i vertici è minore o uguale a $(1 + c_1)$. In questo caso il numero di colori utilizzati è tale per cui due vicini interferenti non hanno lo stesso colore. Si ha perciò un protocollo in cui ciascun nodo può trasmettere ad un altro vertice dello stesso colore, utilizzando gli $(1 + c_1)$ slot disponibili senza creare collisioni.

Per quanto riguarda il caso del modello fisico invece dovremmo andare a dimostrare che esiste una configurazione tale per cui prendendo un determinato Δ e una potenza sufficientemente grande la trasmissione avviene con successo poiché si garantisce un SIR maggiore di β .

Partiamo considerando il fatto che, perché due comunicazioni avvengano con

successo, ci deve essere una separazione tra i due trasmettitori di almeno $(2 + \Delta)r(n)$, il che equivale a dire che ciascun mittente deve assicurare attorno ad esso un disco di raggio pari a $(1 + \frac{\Delta}{2})r(n)$. L'area relativa è uguale a $c_3\pi(1 + \frac{\Delta}{2})^2 r^2(n)$ dove la costante $c_3 \leq 1$ sta ad indicare che considerando un dominio sferico la relativa area del disco può anche essere minore.

Ora prendiamo in considerazione il ricevitore X_j e l'anello di punti che stanno ad una distanza tra a e b da esso. Nel caso in cui ci sia un trasmettitore in questo anello con il relativo disco di raggio $(1 + \frac{\Delta}{2})r(n)$, esso sarà interamente contenuto in un anello i cui punti si trovano ad una distanza tra $a - (1 + \frac{\Delta}{2})r(n)$ e $b + (1 + \frac{\Delta}{2})r(n)$ rispetto al nodo ricevente. L'area di questo anello è pari a $c_4\pi \left\{ [b + (1 + \frac{\Delta}{2})r(n)]^2 - [a - (1 + \frac{\Delta}{2})r(n)]^2 \right\}$ e quindi il numero massimo di possibili trasmettitori contenuti in questo anello sarà data dal rapporto tra l'area dell'anello e l'area di ciascun disco:

$$\frac{c_4\pi \left\{ [b + (1 + \frac{\Delta}{2})r(n)]^2 - [a - (1 + \frac{\Delta}{2})r(n)]^2 \right\}}{c_3\pi(1 + \frac{\Delta}{2})^2 r^2(n)}$$

Ora andiamo ad assumere $a = k(1 + \frac{\Delta}{2})r(n)$ e $b = (k + 1)(1 + \frac{\Delta}{2})r(n)$, il relativo limite inferiore per il SIR diviene:

$$\frac{\frac{P}{r^\alpha(n)}}{N + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{c_4((k+2)^2 - (k-1)^2)}{c_3} \frac{P}{k^\alpha(1 + \frac{\Delta}{2})^\alpha r^\alpha(n)}} = \frac{\frac{P}{N}}{r^\alpha(n) + \frac{c_4}{c_3(1 + \frac{\Delta}{2})^\alpha} \frac{P}{N} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{6k+3}{k^\alpha}}$$

dove $\alpha > 2$. La definizione data è quella classica per garantire che la trasmissione avvenga con successo a livello fisico, dove al denominatore nella sommatoria è stata assunta la distanza minima tra il ricevitore e gli altri trasmettitori il cui numero è dato dal precedente rapporto delle aree. Nell'ultimo passaggio si è solamente andati a moltiplicare denominatore e numeratore per $\frac{r^\alpha(n)}{N}$, si sono portati fuori dalla sommatoria i termini indipendenti da k e si sono svolti i quadrati.

Si può notare che al denominatore sicuramente la sommatoria converge e il suo valore è minore di $(9 + \frac{3}{\alpha-1} + \frac{6}{\alpha-2})$. Inserendo il valore di Δ come mostrato sulla definizione, assumendo $P \rightarrow +\infty$ e inserendo per la sommatoria il precedente valore, il SIR appena trovato converge ad un valore maggiore di β . La condizione per il modello fisico risulta perciò dimostrata, e la trasmissione avviene con successo.

Prendiamo ora in considerazione il percorso che viene seguito dai bit in ciascuna trasmissione, nella quale il nodo sorgente X_i deve trasmettere informazione in una zona Y_i scelta in modo casuale. I due punti X_i e Y_i sono indipendenti e distribuiti uniformemente (i.i.d.) sulla superficie S^2 della sfera, e di conseguenza anche la sequenza $\{(X_i, Y_i)\}_{i=1}^n$ è i.i.d.. Per la trasmissione verrà scelto il nodo X_j che si trova più vicino al punto Y_i .

La trasmissione tra sorgente-destinatario avviene lungo una linea retta L_i , dove con questo termine si intende un segmento sulla superficie S^2 della sfera. Segue da quanto precedente detto che anche la sequenza dei segmenti in linea retta $\{L_i\}_{i=1}^n$ è i.i.d.. Questa condizione permette di applicare ai segmenti appena citati la legge dei grandi numeri.

Prendendo in considerazione una trasmissione da X_i nella cella V_i e Y_i nella cella V'_i , la trasmissione avverrà in un certo numero di salti. In ogni salto i pacchetti vengono trasmessi in linea retta, intersecando la linea di separazione delle celle, fino all'arrivo nella cella finale V'_i nella quale i pacchetti vengono recapitati al destinatario finale.

Perché la trasmissione di dati tra due celle adiacenti abbia luogo deve sussistere la condizione che ogni cella contenga almeno un nodo. Per la dimostrazione andremo ad utilizzare la convergenza uniforme nella legge dei grandi numeri e i teoremi sulle celle dimostrati dai matematici Vapnik e Chervonenkis.

Prima di tutto andiamo a definire il concetto di *frammentato*. Un insieme finito di punti A viene definito *frammentato* da \mathcal{F} , dove \mathcal{F} denota l'insieme dei sottoinsiemi di punti, se per ciascun sottoinsieme B di A esiste un insieme $F \in \mathcal{F}$ tale per cui $A \cap F = B$. La dimensione secondo Vapnik e Chervonenkis (definita VC-dimensione), e denotata con $VC-d(\mathcal{F})$, viene definita come l'estremo superiore delle dimensioni di tutti gli insiemi finiti che possono essere frammentati da \mathcal{F} .

In pratica prendendo in considerazione un insieme, la sua VC-dimensione è uguale al numero massimo di punti che si possono avere al suo interno in modo che tutti i sottoinsiemi che possono essere creati esistano secondo il modello preso in considerazione.

Teorema Vapnik-Chervonenkis *Si prenda l'insieme \mathcal{F} di dimensioni finite $VC-d(\mathcal{F})$, ed $\{X_i\}$ sequenza di variabili aleatorie i.i.d. con distribuzione*

di probabilità P , si ha che, $\forall \epsilon, \delta > 0$:

$$\text{Prob} \left(\sup_{F \in \mathcal{F}} \left| \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N I(X_i \in F) - P(F) \right| \leq \epsilon \right) > 1 - \delta$$

dove il valore di N è determinato da:

$$N > \max \left\{ \frac{VC-d(\mathcal{F})}{\epsilon} \log \frac{16e}{\epsilon}, \frac{4}{\epsilon} \log \frac{2}{\delta} \right\}$$

Dove all'interno della sommatoria troviamo la variabile indicatrice $I(X_i \in F)$, che identifica se ciascun nodo è all'interno di F , dividendo tale sommatoria per il numero N , definito nella seconda parte del teorema, andando a sottrarre la distribuzione di probabilità, si ottiene che il modulo del suo estremo superiore è prossimo allo zero con alta probabilità.

Andiamo a verificare il teorema per l'insieme di dischi in R^2 , la cui dimensione $VC-d(\mathcal{F})$ è pari a 3.

Dimostrazione: Se si prendono in considerazione tre punti è facile verificare che disponendo i punti ai vertici di un triangolo equilatero le condizioni vengono soddisfatte. Infatti per ciascun sottoinsieme contenente uno, due o tre punti esiste un disco tale che contenga solo i punti del sottoinsieme e non gli altri.

Per dimostrare che la VC-dimensione non può essere pari a quattro si procede per assurdo. Definiamo i quattro punti come $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ e prendiamo come \mathcal{F} l'insieme dei dischi. Si ha che se uno dei punti X_i risiede nell'involuppo convesso¹ degli altri tre punti, non ci sono dischi che possono contenere gli altri punti senza contenere anche X_i . Assumiamo che l'involuppo convesso dei quattro punti sia dato da un quadrilatero.

Si supponga ora che la somma degli angoli x_1 e x_3 sia maggiore o uguale a 180° . Si prenda ora un disco che contenga x_2 e x_4 ma non gli altri due punti. Si prolunghi la diagonale che passa per x_2 e x_4 e si definiscano i punti di intersezione come \tilde{x}_2 e \tilde{x}_4 . Si proceda allo stesso modo anche per i rimanenti due punti, unendo tutti i punti si otterrà un quadrato di vertici $\tilde{x}_1 \tilde{x}_2 \tilde{x}_3 \tilde{x}_4$. Si faccia riferimento alla Figura 2. Andando a verificare si nota che sicuramente

¹L'involuppo convesso di un insieme di punti è definito come la più piccola regione convessa che contiene tutti i punti dati.

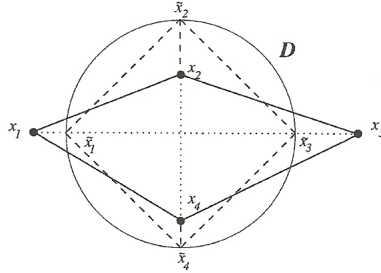


Figura 2: La figura rappresenta graficamente la dimostrazione relativa al fatto che la VC-dimensione dei punti frammentati dall'insieme di tutti i dischi nel piano non può essere 4.

la somma degli angoli in \tilde{x}_1 e \tilde{x}_3 è maggiore rispetto alla somma dei nodi nella loro posizione precedente, ed utilizzando la precedente assunzione si ha:

$$\angle \tilde{x}_1 + \angle \tilde{x}_3 > \angle x_1 + \angle x_3 \geq 180^\circ$$

Quanto appena scritto è assurdo in quanto la somma degli angoli opposti di un quadrato è esattamente pari a 180° , di conseguenza la dimensione dell'insieme dei dischi in S^2 non può essere 4 ma 3. In pratica assumendo un dominio di quattro punti ci sono casi in cui un certo sottoinsieme di punti non può essere frammentato da \mathcal{F} in quanto il disco andrebbe a raggruppare anche altri punti.

Nel caso in cui si consideri il dominio S^2 della sfera, la trattazione risulta analoga a quanto fatto nel piano. In questo caso la differenza è che i dischi hanno area inferiore a quella dell'emisfero. Per convertire i risultati dal piano alla superficie S^2 andiamo a utilizzare una mappa chiamata "mappa d'inversione". La regione considerata è una sfera di raggio $\frac{1}{2}$ con centro nel punto $(0, 0, -\frac{1}{2})$. Andiamo a definire il piano $z_3 = -1$ come H . Utilizziamo la mappa $f(z) := \frac{z}{\|z\|^2}$.

Il simbolo $\|\bullet\|$ sta ad indicare la norma Euclidea, la quale ha le seguenti proprietà:

- i) Essa mappa un punto sulla superficie della sfera in un punto sul piano H , ottenuto facendo passare un raggio proveniente dall'origine degli assi e passante per il punto preso in considerazione.
- ii) $f^{-1}(z) = f(z)$, ovvero l'inverso della funzione rappresenta la funzione stessa.

- iii) La funzione realizza la mappa di dischi in S^2 , in dischi sul piano H , utilizzando la i) su tutti i punti della circonferenza.

Si faccia riferimento alla Figura 3 per comprendere meglio le proprietà appena descritte.

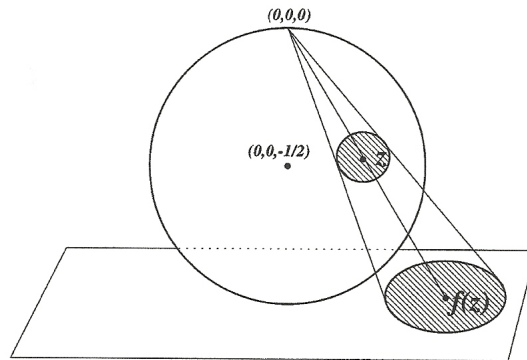


Figura 3: Inversione di mappa di un disco dalla superficie S^2 della sfera, al piano H .

Nel caso considerato, si ha che la VC-dimensione dell'insieme dei dischi in S^2 che sono strettamente minori dell'emisfero è pari a 3.

Dimostrazione: La dimostrazione è analoga a quanto fatto nel caso del piano. Si prende l'insieme di punti $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ che sono frammentati dall'insieme dei dischi. Essi, per l'assunzione precedentemente fatta, sono sicuramente contenuti in un cerchio di area minore rispetto all'emisfero. Si prendano due dischi, uno dei quali contiene x_1 e x_3 ma esclude x_2 e x_4 , mentre l'altro include x_2 e x_4 , ma esclude x_1 e x_3 . Considerando che questi due cerchi sono minori in senso stretto dell'emisfero, si trova un punto in comune. Si ruoti la sfera in modo che questo punto venga a trovarsi all'estremo superiore, cioè all'origine degli assi. Applicando ora l'inversione di mappa sul piano H si vengono a trovare due dischi, uno che contiene $f(x_1)$ e $f(x_3)$ ma non $f(x_2)$ e $f(x_4)$, e l'altro che realizza la condizione inversa. Ora la situazione è la medesima che è stata realizzata sul piano, dato che, considerando l'insieme \mathcal{F} dei dischi nel piano, in alcuni sottoinsiemi B di A risulta impossibile trovare un altro sottoinsieme $F \in \mathcal{F}$ tale per cui $A \cap F = B$. Risulta quindi impossibile che la dimensione sia pari a 4, ma può essere soltanto minore, cioè 3.

Lemma 4.3: *Esiste una sequenza $\delta(n) \rightarrow 0$ tale per cui:*

$$Prob(\text{Ogni cella } V \in V_n \text{ contenga un nodo}) \geq 1 - \delta(n)$$

Dimostrazione: Prendiamo il nostro insieme \mathcal{F} precedentemente utilizzato per definire la VC-dimensione, il quale rappresenta l'insieme di tutti i dischi la cui area è uguale a $(100 \log n)/n$ (area del disco contenuto in ciascuna cella di Voronoi, come definito nella i) della sezione 4.3). Come è stato dimostrato la VC-dimensione di \mathcal{F} è 3, per cui, andando a considerare il teorema di Vapnik-Chervonenkis si ha:

$$Prob\left(\sup_{D \subset \mathcal{F}} \left| \frac{\text{Numero di nodi in } D}{n} - \frac{100 \log(n)}{n} \right| \leq \epsilon(n)\right) > 1 - \delta(n)$$

dove andiamo a sostituire n con il valore della seconda parte del teorema, e sostituendo la VC-dimensione:

$$n > \max \left\{ \frac{24}{\epsilon(n)} \log \frac{16e}{\epsilon(n)}, \frac{4}{\epsilon(n)} \log \frac{2}{\delta(n)} \right\}$$

I valori di $\delta(n)$ e $\epsilon(n)$ che soddisfano le precedenti condizioni sono:

$$\epsilon(n) = \delta(n) = \frac{50 \log(n)}{n}$$

Dato che come precedentemente detto ciascuna cella contiene un disco di area $\frac{100 \log(n)}{n}$ si ha:

$$Prob(\text{Numero di nodi in } V \geq 50 \log(n), \forall V \in \mathcal{V}_n) > 1 - \delta(n)$$

il che porta alla dimostrazione del teorema.

Si ha quindi che le informazioni fin'ora dimostrate portano ad avere una rete in cui ciascuna cella possiede almeno un nodo in grado di comunicare con tutte le celle adiacenti e i cui dati vengono trasmessi di salto in salto in linea retta. La probabilità che la rete funzioni nella maniera in cui è stata appena definita è molto elevata, e più precisamente è pari a $1 - \frac{50 \log(n)}{n}$.

Altro parametro importante che interessa per riuscire a delimitare inferiormente la capacità di throughput, riguarda il numero medio di percorsi e il traffico che ciascuna cellula è in grado di servire.

Riguardo al numero medio di percorsi serviti da ogni cella andiamo prima a definire la probabilità che ciascuna linea retta L_i vada ad intersecare una

determinata cella $V \in \mathcal{V}_n$. Ricordando che ciascuna cella di Voronoi è contenuta in un disco di raggio massimo pari a $\sqrt{\frac{400 \log(n)}{\pi n}}$ si ha:

Lemma 4.4: *Per ogni linea retta L_i , per ogni cella $V \in \mathcal{V}_n$, esiste una costante c_5 tale che:*

$$Prob(\text{La linea } L_i \text{ intersechi } V) \leq c_5 \sqrt{\frac{\log(n)}{n}}$$

Dimostrazione: Si prenda il nodo X_i posto ad una distanza x dal disco di area $\sqrt{\frac{400 \log(n)}{n}}$ circoscritto alla cella $V \in \mathcal{V}_n$ presa in considerazione. Si consideri una costante positiva c_6 si ha che l'angolo α sotteso a X_i dal disco non può essere maggiore di $\frac{c_6}{x} \sqrt{\frac{\log(n)}{n}}$. L'angolo del disco dipende cioè soltanto dalla distanza del punto dal disco e dal raggio. Più precisamente il risultato deriva dal fatto che l'angolo per piccole aperture è molto prossimo al suo seno, e l'ipotenusa ha una lunghezza quasi uguale a quella del cateto maggiore.

La superficie S^2 della sfera ha un'area pari a $4\pi r^2$, quindi il raggio r è pari a $\frac{1}{2\sqrt{\pi}}$. L'area di un settore è $A_s = \frac{1}{2}r^2\alpha$ quindi non può essere superiore a $\frac{c_7\alpha}{2\pi}$. Ora soltanto se il punto X_i giacerà all'interno del settore con angolo α la linea di collegamento L_i passerà attraverso la cella V presa in considerazione. Quindi con le considerazioni fin qui fatte una linea che collega i nodi X_i e Y_i passerà per la cella V con probabilità non superiore a $\frac{c_8}{x} \sqrt{\frac{\log(n)}{n}}$.

Prendendo in considerazione il fatto che X_i è distribuita in maniera uniforme sulla superficie della sfera, la probabilità che la distanza tra il disco e il nodo sia proprio x è limitata superiormente da $2c_9\pi \left(x + \sqrt{\frac{400 \log(n)}{\pi n}} \right)$. Per concludere dobbiamo ora andare ad integrare il prodotto della probabilità che la linea intersechi la cella per la probabilità che la distanza tra nodo e disco sia x . L'estremo inferiore $\sqrt{\frac{400 \log(n)}{n}}$, caso in cui il nodo si trova sull'estremità della circonferenza del disco, mentre l'estremo superiore è pari a $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ che rappresenta la lunghezza di metà circonferenza. Infatti la distanza massima x non potrà mai essere superiore a metà circonferenza.

$$Prob(L_i \text{ intersechi } V) \leq \int_{\sqrt{\frac{400 \log(n)}{n}}}^{\frac{\sqrt{\pi}}{2}} \left(\frac{c_8}{x} \sqrt{\frac{\log(n)}{n}} \right) 2c_9\pi \left(x + \sqrt{\frac{400 \log(n)}{\pi n}} \right) dx$$

Svolgendo l'integrale si arriva alla conclusione finale e viene dimostrato il teorema:

$$Prob(L_i \text{ intersechi } V) \leq c_5 \sqrt{\frac{\log(n)}{n}}$$

L'integrale è stato svolto prendendo in considerazione le regole di integrazione, più precisamente considerando che l'integrale di una costante i in dx è pari a $ix + C$, dove C denota una costante, mentre l'integrale di $\frac{1}{x}$ in dx è uguale a $\log(x) + C$. Andando a sostituire i due estremi di integrazione si trovano quattro membri, uno dei quali positivo e i tre restanti negativi. Il termine positivo è pari a $c_5 \sqrt{\frac{\log(n)}{n}}$, dove c_5 congloba tutte le costanti presenti, quindi esso rappresenterà sicuramente un limite superiore per la probabilità che una linea L_i intersechi una cella V .

Se invece di prendere il segmento L_i si prende il cerchio formato dal prolungamento del segmento lungo tutta la superficie della sfera, si ha nuovamente che la probabilità di intersezione dipende da $\sqrt{\frac{\log(n)}{n}}$ come cita il seguente lemma:

Lemma 4.5: *Per ciascun cerchio C_i formato dall'estensione di L_i e per ciascuna cella $V \in \mathcal{V}_n$ si ha:*

$$Prob(\text{Il cerchio } C_i \text{ intersechi } V) \leq c_{10} \sqrt{\frac{\log(n)}{n}}$$

Andiamo ora a calcolare la media delle due precedenti probabilità, si ottiene:

$$E[\text{Numero di linee in } \{L_i\}_{i=1}^n \text{ che intersecano una cella } V] \leq c_5 \sqrt{n \log(n)}$$

$$E[\text{Numero di cerchi in } \{C_i\}_{i=1}^n \text{ che intersecano una cella } V] \leq c_{10} \sqrt{n \log(n)}$$

Il risultato deriva semplicemente dal calcolo della media nel caso discreto che è pari $E[x] = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i$ dove x_i rappresenta il valore assunto e p_i la probabilità corrispondente. Nel nostro caso ciascuna linea o cerchio interseca la cella con la stessa probabilità, quindi per trovare la media basterà moltiplicare la probabilità per il numero totale di linee o cerchi n .

Avendo trovato un limite superiore per il numero medio di cerchi lungo la superficie della sfera che passano attraverso ciascuna cella, possiamo anche trovare un limite superiore del traffico che ogni cella dovrebbe essere in grado di trasportare.

Andiamo a prendere un punto qualunque z disposto sulla superficie S^2 della

sfera. Andiamo a far passare un cerchio per questo punto il cui raggio è pari a quello della circonferenza equatoriale. In questo caso il cerchio passa per due poli della sfera, il che crea un problema, dato che l'inversione di mappa in questa situazione non è ben definita. Per superare questo problema si scelga in maniera arbitraria uno dei due poli, e si proceda a disegnare l'inversione di mappa. Si consideri un disco D , di raggio ζ centrato nel nostro punto z . Definiamo la funzione $F(D) := \cup_{x \in D} F(x)$, la quale rappresenta una banda attorno alla sfera di larghezza 2ζ . In pratica questa fascia è l'estensione del disco D lungo tutta la superficie della sfera lungo il cerchio C . La Figura 4 aiuterà nella comprensione di quanto fatto.

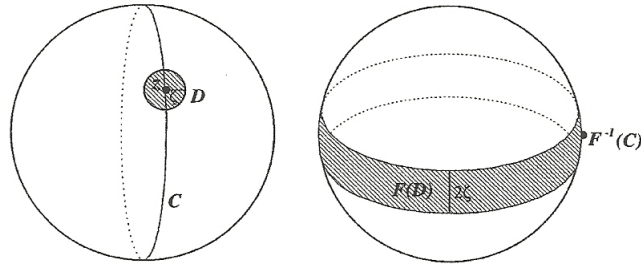


Figura 4: Trasformazione del disco centrato in z nella banda di punti $F(D)$.

Prendendo in considerazione l'insieme di tutti i dischi \mathcal{D} su S^2 e ciascun cerchio C andiamo a definire il seguente lemma e il rispettivo corollario.

Lemma 4.6: Prendendo in considerazione il cerchio C , esso andrà ad intersecare il disco D se e solo $F^{-1}(C)$, che rappresenta un punto del cerchio, è contenuto nella fascia $F(D)$.

Corollario 4.1: Si definisca come $\mathcal{C}(D)$ l'insieme di tutti i cerchi che intersecano il disco $D \in \mathcal{D}$. La VC-dimensione di $\{\mathcal{C}(D) : D \in \mathcal{D}\}$ è la stessa della VC-dimensione di $F(D) : D \in \mathcal{D}$.

La VC-dimensione di $F(D)$ con $D \in \mathcal{D}'$ è sicuramente limitata, per la convergenza uniforme data dalla legge dei grandi numeri. Inoltre è facile verificare che la VC-dimensione di una classe di insiemi è la stessa di una classe formata dal complemento degli insiemi formanti la classe. Nel caso in cui invece una classe \mathcal{A} sia un insieme di insiemi, mentre \mathcal{B} sia formato da insiemi ottenuti dall'intersezione di due insiemi di \mathcal{A} allora la VC-dimensione sarà così

definita:

$$VC - d(\mathcal{B}) \leq 10VC - d(\mathcal{A})$$

quanto appena citato è stato discusso e dimostrato da M.Vidyasagar nel suo articolo “A Theory of Learning and Generalization”. Trasferendo il teorema al nostro caso, e notando che ciascuna banda $F(D)$ è ottenuta dall’intersezione di due dischi $D \in \mathcal{D}'$:

Lemma 4.7: *La VC-dimensione di $\{F(D) : D \in \mathcal{D}'\}$ è pari a non più di dieci volte la VC-dimensione di \mathcal{D}' .*

Dove come citato in precedenza la VC-dimensione di \mathcal{D}' , che rappresenta l’insieme dei dischi sulla superficie della sfera, è pari a 3.

Utilizzando nuovamente la convergenza uniforme nella legge debole dei grandi numeri possiamo scrivere il seguente lemma:

Lemma 4.8: *Per una certa sequenza $\delta'(n) \rightarrow 0$ si ottiene:*

$$Prob \left(\sup_{V \subset \mathcal{V}_n} (\text{Numero di linee } L_i \text{ che intersecano } V) \leq c_5 \sqrt{n \log(n)} \right) \geq 1 - \delta'(n)$$

Dove nella precedente formula si è andato a considerare il limite superiore del numero medio di linee intersecanti ciascuna cella, e la probabilità con cui avviene il precedente avvenimento tende a 1 con alta probabilità.

In ciascuna linea che attraversa ogni cella si possono trovare due casi. Nel primo caso la cella contiene il nodo Y_i destinatario della trasmissione, e il percorso massimo è pari ad un salto. Nel secondo caso, in cui la cella non contiene Y_i , il traffico viene trasmesso alla cella successiva. Il traffico portato da ciascuna cella sarà quindi basato sul numero di linee che la attraversano. In ciascuno dei due casi precedenti ciascuna linea trasporta un livello di traffico pari a $\lambda(n)$ bit/s, si ha quindi:

Lemma 4.9: *Per una sequenza $\delta'(n) \rightarrow 0$ si ottiene:*

$$Prob \left(\sup_{V \in \mathcal{V}_n} (\text{Traffico portato dalla cella } V) \leq c_5 \lambda(n) \sqrt{n \log(n)} \right) \geq 1 - \delta'(n)$$

dove per traffico portato dalla cella V , si intende il traffico che necessita di

trasportare ciascuna cella per permettere il successo della trasmissione di tutte le linee che passano attraverso ad essa.

Confrontiamo ora le informazioni appena trovate con il Lemma 4.2, secondo cui ciascuna cella derivante dalla divisione della superficie della sfera sceglie uno tra gli $(1 + c_1)$ slot disponibili per trasmettere con successo verso un trasmettitore posto ad una distanza pari a $r(n)$. Dividendo la velocità di trasmissione globale per tutti gli slot si ottiene la velocità massima di ciascuna trasmissione, cioè $\frac{W}{(1+c_1)}$. Dall'altra parte abbiamo appena trovato che la velocità minima che necessita ciascuna cella per trasmettere è pari a $c_5\lambda(n)\sqrt{n\log(n)}$ con alta probabilità. Si ha quindi che:

$$c_5\lambda(n)\sqrt{n\log(n)} \leq \frac{W}{(1+c_1)}$$

Considerando che in ciascuna cella tutti i nodi, i quali trasmettono alla velocità di W bit/s, provvedono alla trasmissione e che come precedentemente dimostrato c_1 cresce in funzione di $(1 + \Delta)^2$ per il modello protocollare, e prendendo il Δ scelto per il modello fisico, otteniamo il seguente teorema:

Teorema 5 *Per le reti casuali in S^2 si ha:*

- i) *Secondo il modello protocollare, prendendo una costante $c > 0$ indipendente da n, δ, W , un throughput pari a:*

$$\lambda(n) = \frac{cW}{(1 + \Delta)^2\sqrt{n\log(n)}}$$

bit/s risulta realizzabile con alta probabilità.

- ii) *Secondo il modello fisico, prendendo due costanti c' e c'' indipendenti da n, N, α, β, W , un throughput pari a:*

$$\lambda(n) = \frac{c'}{\left(2\left(c''\beta\left(3 + \frac{1}{\alpha-1} + \frac{2}{\alpha-2}\right)\right)^{\frac{1}{\alpha}} - 1\right)^2} \frac{W}{\sqrt{n\log(n)}}$$

bit/s risulta realizzabile con alta probabilità.

Tutti i throughput sono stati ottenuti senza suddividere il canale in sotto-canali di capacità minore, anche perché come detto non porta a risultati significativi.

4.5 Limitazioni superiori per reti casuali

Andiamo ora a calcolare quale sia la limitazione superiore nel caso di reti casuali. Per la ricerca del limite risulta necessario trovare prima il raggio di trasmissione minimo per ciascun nodo in modo che tutte le sorgenti siano in grado di comunicare.

Dalla trattazione dei dischi di area unitaria sul piano si trova che il raggio minimo di ciascuna trasmissione deve essere pari a $r(n) = \sqrt{\frac{\log(n)+kn}{\pi n}}$.

Il dominio della rete in questo caso riguarda invece la superficie S^2 di una sfera, e questo ci permette di semplificare il problema. Infatti non si devono considerare i problemi relativi a nodi sul bordo del dominio, inoltre il nostro interesse si focalizza soltanto sul fatto che ogni nodo debba comunicare soltanto con il suo destinatario e non con l'intera rete. Il problema quindi riguarda lo studio della probabilità che si presentino nodi isolati, i quali non riescano a comunicare con la propria sorgente o con il proprio destinatario. Perciò soltanto la presenza di nodi non isolati porterà ad assicurarci che il throughput trovato sia effettivamente realizzabile.

Per sviluppare la trattazione sui nodi isolati andremo a trattare un altro articolo, redatto nuovamente da P. Gupta e P.R. Kumar, dal titolo "Critical power for asymptotic connectivity in wireless networks". Estrapoliamo da esso due importanti lemmi:

Lemma 5.1:

i) Per ogni $p \in [0, 1]$ si ha $(1 - p) \leq e^{-p}$.

ii) Per ogni $\theta \geq 1$ dato, esiste un $p_0 \in [0, 1]$, tale che:

$$e^{-\theta p} \leq (1 - p), \quad \forall 0 \leq p \leq p_0$$

Nel caso in cui si prenda θ strettamente maggiore di 1, si avrà che p_0 è strettamente maggiore di 0.

Lemma 5.2: Fissando $\theta < 1$, e considerando il raggio di ciascun nodo come nel caso del disco nel piano, cioè $\pi r^2(n) = \frac{\log(n)+k}{n}$, e per tutti gli n sufficientemente grandi si ha:

$$n(1 - \pi r^2(n))^{n-1} \geq \theta e^{-k}$$

Il raggio preso in considerazione nel precedente Lemma 5.2, assicura che la rete sia asintoticamente connessa con probabilità che tende ad 1, considerando $n \rightarrow +\infty$ e la costante $k \rightarrow +\infty$.

Si prenda in considerazione un grafo $\mathcal{G}(n, r(n))$, il quale contiene al suo interno nodi che hanno almeno un nodo ad una distanza inferiore a $r(n)$. Si faccia riferimento a $P^{(k)}(n, r(n))$ come alla probabilità che nel grafo ci sia un insieme di $k = 1, 2, \dots$ nodi connessi tra di loro, ma non connessi con qualunque altro nodo della rete. Definiamo infine come $P_d(n, r(n))$ la probabilità che il grafo sia disconnesso. Le relative probabilità vengono espresse nel seguente lemma:

Lemma 5.3: *Nel caso in cui $\pi r^2(n) = \frac{\log(n)+k_n}{n}$ dove $\lim_{n \rightarrow \infty} k_n = k < +\infty$ si ha:*

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} P^{(1)}(n, r(n)) \geq e^{-k}(1 - e^{-k})$$

ed inoltre

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} P_d(n, r(n)) \geq e^{-k}(1 - e^{-k})$$

Dimostrazione: Secondo le assunzioni fatte sul lemma andiamo a ricavare la probabilità che il grafo abbia almeno un componente di ordine 1, ovvero almeno un nodo che sia isolato da tutti gli altri. Si ha:

$$P^{(1)}(n, r(n)) \geq \sum_{i=1}^n P(\{\text{Il nodo } i \text{ é l'unico isolato nel grafo}\})$$

La precedente disuguaglianza deriva dal fatto che sicuramente la probabilità che ci sia almeno un nodo isolato sia maggiore o uguale alla sommatoria delle singole probabilità. Si ha inoltre che la parte destra della disuguaglianza sarà maggiore o uguale alla sommatoria delle probabilità che ciascun nodo sia isolato meno la probabilità che ci sia un altro nodo j con $i \neq j$ che sia a sua volta isolato, quindi:

$$\begin{aligned} P^{(1)}(n, r(n)) &\geq \sum_{i=1}^n P(\{\text{Il nodo } i \text{ é isolato nel grafo}\}) + \\ &\quad - \sum_{j \neq i}^n P(\{\text{I nodi } i \text{ e } j \text{ sono isolati nel grafo}\}) \end{aligned}$$

la quale a sua volta sarà maggiore o uguale alla medesima parte di destra della disequazione precedente, ma andando a sommare la probabilità che sia i che j siano isolati per i che va da 1 a n :

$$P^{(1)}(n, r(n)) \geq \sum_{i=1}^n P(\{\text{Il nodo } i \text{ é isolato nel grafo}\}) + \\ - \sum_{i=1}^n \sum_{j \neq i}^n P(\{\text{I nodi } i \text{ e } j \text{ sono isolati nel grafo}\}) \quad (18)$$

Ora non resta altro che calcolare le sommatorie presenti nella disuguaglianza. Per fare ciò andiamo prima a calcolarci l'area $A(r)$ di ciascun disco sulla superficie della sfera S^2 . Per fare questo si prenda come riferimento la Figura 5.

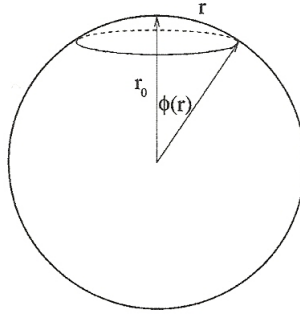


Figura 5: Rappresentazione della sfera di area superficiale unitaria e del relativo disco di cui si vuole calcolare l'area.

r_0 che rappresenta il raggio della sfera è pari a $\frac{1}{\sqrt{4\pi}}$ derivante dal fatto che l'area della superficie è pari ad $1m^2$ e dalle nozioni di geometria, l'area della superficie è uguale a $A = 4\pi r_0^2$. Ora avendo denotato con r il raggio del disco sulla superficie, la misura dell'angolo al centro misurato in radianti sarà pari a $\phi(r) := r/r_0$. Ricordando che un'area sulla superficie della sfera può essere calcolata utilizzando gli integrali doppi e le coordinate polari, dove gli estremi di integrazione sono tra 0 e 2π per il primo integrale in $d\theta$, e tra 0 e $\phi(r)$ in $d\phi$ per il secondo integrale otteniamo:

$$A(r) = \int_0^{2\pi} \int_0^{\phi(r)} r_0(\sin(\phi))r_0 d\theta d\phi$$

dove il primo termine r_0 rappresenta il jacobiano del cambiamento di variabili, mentre il secondo termine rappresenta la coordinata y . Infatti con l'utilizzo delle coordinate polari la variabile $x = r_0 \cos(\phi)$ mentre $y = r_0 \sin(\phi)$. L'integrale in $d\theta$ da come risultato 2π , dato dal fatto che non c'è nessuna variabile dipendente da θ :

$$A(r) = \int_0^{\phi(r)} 2\pi r_0 (\sin(\phi)) r_0 d\phi$$

ora si estrae dall'integrale il termine costante $2\pi r_0^2$, l'integrale indefinito di $\sin(\phi)$ è pari a $-\cos(\phi) + C$, andando ad applicare la regola degli integrali definiti e sostituendo i valori degli estremi di integrazione si ottiene:

$$A(r) = 2\pi r_0^2 (1 - \cos(\phi(r)))$$

Sostituiamo $r_0 = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}$, come precedentemente detto, e semplifichiamo con 2π , otteniamo la costante $\frac{1}{2}$. Considerando infine che lo sviluppo in serie di Taylor di $\cos(x) = \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^6)\right)$ si ottiene:

$$A(r) = \frac{1}{2} \left(\frac{\phi^2(r)}{2} - \frac{\phi^4(r)}{4!} + \dots \right)$$

infine sostituendo a $\phi(r) := r/r_0$ e nuovamente il valore $r_0 = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}$, si ottiene $\phi(r) = r\sqrt{4\pi}$. Inseriamo il valore nella precedente equazione:

$$A(r) = \pi r^2 - \frac{\pi r^4}{3} + \dots$$

Dove si può notare che questi due valori sono un limite inferiore per l'area del disco e sicuramente avremo un'area minore di πr^2 :

$$\pi r^2 - \frac{\pi r^4}{3} < A(r) < \pi r^2$$

Ciascun nodo X_j risulta disconnesso dal nodo X_i nel caso in cui il disco di raggio $r(n)$ da esso formato non vada ad intersecare il disco formato da X_i . L'area sulla quale può essere localizzato il disco formato da X_j è quindi pari a quella superficiale della sfera ($1m^2$) meno $A(r)$. Considerando tutti i rimanenti $n - 1$ nodi della rete porta a trovare la probabilità che il nodo i sia isolato:

$$P(\{\text{Il nodo } i \text{ é isolato}\}) = (1 - A(r(n)))^{n-1}$$

avendo precedentemente trovato che l'area è strettamente minore di πr^2 si trova la seguente limitazione:

$$P(\{\text{Il nodo } i \text{ è isolato}\}) > (1 - \pi r^2(n))^{n-1}$$

Il termine appena trovato è relativo alla parte destra della disequazione in (18). Nel secondo termine invece si prendono in considerazione due nodi isolati nel grafo. I casi che si possono presentare sono due. Il primo in cui la distanza tra i due nodi isolati è compresa tra $r(n)$ e $2r(n)$. In questo caso i due dischi si sovrappongono, quindi si andrà a considerare come limite per cui nessun altro nodo sia in comunicazione con i e j l'area superficiale della sfera meno $\frac{3}{2}A(r(n))$, il quale può essere considerato un limite superiore. Nel secondo caso si ha che la distanza è maggiore a $2r(n)$ e quindi i due dischi non si sovrappongono. Il risultato è che la probabilità di ogni nodo di non trovarsi in collegamento con i e j è pari all'area superficiale meno due volte l'area del disco (data dalla somma delle singole aree dei nodi X_i e X_j). Per concludere bisogna andare ad utilizzare il teorema della probabilità totale, cioè andare a moltiplicare ciascuno dei due termini per la probabilità che accada l'evento. La probabilità che i nodi siano a una distanza compresa tra $r(n)$ e $2r(n)$ è pari a $A(2r(n))$, mentre la probabilità che i e j siano ad una distanza superiore è pari a $1 - A(2r(n))$. In formula:

$$\begin{aligned} P(\{i \text{ e } j \text{ isolati nel grafo}\}) < (A(2r(n)) - A(r(n)))(1 - \frac{3}{2}A(r(n)))^{n-2} + \\ + (1 - A(2r(n)))(1 - 2A(r(n)))^{n-2} \end{aligned} \quad (19)$$

Ora si può sostituire quanto appena trovato nella equazione precedente (18):

$$\begin{aligned} P^{(1)}(n, r(n)) \geq n(1 - \pi r^2(n))^{n-1} - n(n-1) \cdot \left(3\pi r^2(n) + \frac{\pi^2 r^4(n)}{3} \right) \\ \cdot \left(1 - \frac{3}{2}(\pi r^2(n) - \pi^2 r^4(n)/3) \right)^{n-2} + n(n-1)(1 - 2(\pi r^2(n) - \pi^2 r^4(n)/3))^{n-2} \end{aligned}$$

Utilizzando i Lemmi 5.1 e 5.2, per $\theta > 1$ e per $\epsilon, \epsilon' > 0$ e assumendo nuovamente la condizione $\pi r^2(n) = \frac{\log(n)+k}{n}$ otteniamo:

$$\begin{aligned} P^{(1)}(n, r(n)) \geq \theta e^{-k} - n(n-1) \cdot (3(1 + \epsilon')\pi r^2(n)e^{-(3/2)(n-2)\pi r^2(n)} + \\ + (1 + \epsilon')e^{-2(n-2)\pi r^2(n)}) \geq \theta e^{-k} - (1 + \epsilon)e^{-2k} \end{aligned}$$

il che vale per tutti gli $n > N(\epsilon, \theta, k)$. Si tenga presente che nel precedente passaggio sono stati tralasciati i termini di grado r^4 precedentemente trovati per l'area del disco. L'approssimazione fatta è lecita dato che la differenza risulta minima e quello che stiamo cercando è un limite inferiore.

Come si può vedere la probabilità di avere un nodo isolato dipende esclusivamente da k e decresce con essa. Si vada a sostituire k con k_n dove si ha che $\lim_{n \rightarrow \infty} k_n = \bar{k}$, che $k_n < \bar{k}$ ed inoltre $\epsilon > 0$. Inseriamo questi termini nella disequazione, si ottiene:

$$P^{(1)}(n, r(n)) \geq \theta e^{-(\bar{k}+\epsilon)} - (1 + \epsilon)e^{-2(\bar{k}-\epsilon)}$$

dove $n \geq \max\{N(\epsilon, \theta, \bar{k} + \epsilon, N'(\epsilon))\}$.

La precedente formula rappresenta un limite inferiore per la probabilità che ci sia almeno un nodo isolato nel grafo:

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} P^{(1)}(n, r(n)) \geq \theta e^{-(\bar{k}+\epsilon)} - (1 + \epsilon)e^{-2(\bar{k}-\epsilon)}$$

Il risultato finale discende dal fatto che $P^{(1)}(n, r(n)) \leq P_d(n, r(n))$ e prendendo $\epsilon > 0$ e $\theta < 1$.

Corollario 5.1: *Un grafo $\mathcal{G}(n, r(n))$ ha una probabilità asintotica di avere un nodo isolato e disconnesso dalla rete che è strettamente positiva nel caso in cui $\pi r^2(n) = \frac{\log(n)+k_n}{n}$ e $\limsup_n k_n < +\infty$.*

Andiamo a definire ora un altro parametro molto importante utile per definire una limitazione superiore alle reti casuali. Il parametro è definito dal seguente lemma:

Lemma 5.4: *Il numero massimo di trasmissioni simultanee che avvengono nello stesso canale non è maggiore di*

$$\frac{4}{c_{11}\pi\Delta^2r^2(n)}$$

assumendo il caso di modello protocollare.

Dimostrazione: La dimostrazione risulta molto semplice e discende direttamente da quanto enunciato come condizione necessaria perché avvenga una comunicazione con successo nel caso di reti casuali secondo il modello protocollare. Nello specifico perché una comunicazione dal nodo X_i a X_j avvenga

con successo, è necessario che qualunque altro nodo X_k che trasmette simultaneamente e nello stesso sottocanale si trovi a una distanza maggiore o uguale a $\Delta r(n)$, si veda Figura 6.

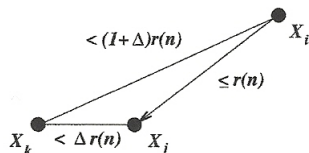


Figura 6: Rappresentazione del caso in cui la distanza tra il nodo X_j e il nodo X_k è sufficiente per permettere la trasmissione con successo.

Quindi per realizzare la condizione precedente basta considerare un disco di raggio $\frac{\Delta r(n)}{2}$ centrato al ricevitore che non intersechi i dischi degli altri nodi che trasmettono simultaneamente sullo stesso sottocanale. L'area di tale dischi sarà uguale a $\pi r^2(n)$, e sostituendo $r(n)$ si arriva al risultato $\frac{c_{11}\pi\Delta^2 r^2(n)}{4}$ dove c_{11} rappresenta una costante. Dividendo l'area della superficie della sfera per quella appena trovata porta al numero di trasmissioni simultanee sul sottocanale m -esimo che possono essere supportate. Tale valore risulta pari a $\frac{4}{c_{11}\pi\Delta^2 r^2(n)}$.

La velocità totale di cui si necessita sarà perciò uguale al prodotto tra il numero medio di trasmissioni in ciascun sottocanale per la relativa velocità W_m bit/s, e andando a fare la sommatoria su tutti i sottocanali. Il risultato è il seguente

$$\frac{4}{c_{11}\pi\Delta^2 r^2(n)} \sum_{m=1}^M = \frac{4}{c_{11}\Delta^2 r^2(n)} W \quad \text{bit/s} \quad (20)$$

Per quanto riguarda ciascuna trasmissione la lunghezza media del percorso seguito dai pacchetti nella trasmissione, è di almeno $\bar{L} - o(1)$. Il termine \bar{L} indica la lunghezza media di una linea che collega due punti i.i.d. sulle superficie della sfera, mentre $o(1)$ deriva direttamente dall'assunzione fatta sul Lemma 4.3 in cui si ha che con elevata probabilità un nodo si trova ad una distanza minore di $o(1)$ rispetto ad un punto sulla sfera. Dividendo ora la lunghezza media del percorso dei pacchetti per il raggio di trasmissione di ciascun nodo otteniamo il numero medio di salti $n = \frac{\bar{L}-o(1)}{r(n)}$. Moltiplicando tale valore per il numero totale di nodi n e per il throughput di ciascun nodo $\lambda(n)$ si ottiene il numero totale minimo di bit/s che la rete richiede di

servire. Per assicurare che tutto il traffico venga trasportato con successo questo valore deve essere minore al numero massimo di bit/s che possono essere trasportati dalla rete secondo il modello protocollare trovati in (20). Si ottiene:

$$\frac{(\bar{L} - o(1))n\lambda(n)}{r(n)} \leq \frac{4W}{c_{11}\pi\Delta^2 r^2(n)}$$

estraiamo la nostra incognita $\lambda(n)$:

$$\lambda(n) = \frac{c_{12}W}{\Delta^2 nr(n)}$$

dove la costante c_{12} congloba tutte le costanti presenti nella formula ed è pari a $c_{12} = \frac{4}{c_{11}\pi(\bar{L}-o(1))}$.

Prendendo in considerazione questa limitazione per il throughput e la limitazione trovata precedentemente nel corollario 5.1 per $r(n)$ si ottiene il seguente teorema:

Teorema 5.1: *Per reti casuali il cui dominio è rappresentato dalla superficie della sfera S^2 e secondo il modello protocollare, si ha:*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{Prob} \left(\lambda(n) = \frac{c'W}{\Delta^2 \sqrt{n \log(n)}} \text{ é realizzabile} \right) = 0$$

dove $c' < +\infty$ e non dipende da n, Δ, W .

Considerando invece il caso del modello fisico si ottiene il seguente limite superiore:

Teorema 5.2: *Per reti casuali con dominio la superficie della sfera S^2 e secondo il modello fisico, si ha:*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{Prob} \left(\lambda(n) = \sqrt{\frac{8}{\pi}} \frac{W}{\bar{L}(\beta^{1/\alpha} - 1)} \frac{1 + \epsilon(n)}{\sqrt{n}} \text{ é realizzabile} \right) = 0$$

dove $\epsilon(n) \rightarrow 0$ è una sequenza deterministica e non dipende da N, α, β, W , e \bar{L} rappresenta la distanza media tra due punti i.i.d. sulla superficie unitaria della sfera.

Dimostrazione: Il Teorema 5.1 discende direttamente da quanto precedentemente trovato, semplicemente sostituendo a $\lambda(n)$ il valore di $r(n)$. Il throughput di reti casuali secondo modello protocollare è quindi effettivamente limitato superiormente da $\frac{W}{\sqrt{n \log(n)}}$ come da definizione sulla capacità di throughput per reti casuali. Per la dimostrazione del Teorema 5.2 invece andremo a considerare la capacità di trasporto delle reti arbitrarie secondo il modello protocollare, e dimostreremo che il limite superiore di tali reti pari a $\sqrt{\frac{8}{\pi}} \frac{W}{\Delta} \sqrt{n}$ bit/s è uguale a quello delle reti casuali secondo il modello fisico. Prendendo come riferimento la rete casuale secondo il modello fisico, abbiamo che l'insieme di trasmissioni tra i nodi X_i ed X_j avverranno con successo simultaneamente alle trasmissioni che avvengono sullo stesso sottocanale tra i nodi X_k ed X_l , se (come già definito):

$$\frac{\frac{P}{|X_i - X_j|^\alpha}}{\frac{P}{|X_k - X_l|^\alpha}} \geq \beta$$

e se $|X_k - X_l| \geq (1 + \Delta) |X_i - X_j|$ dove $\Delta := (\beta^{\frac{1}{\alpha}} - 1)$.

Si ha quindi che il limite superiore è valido in entrambi i casi, dato che ciascun insieme di trasmissioni simultanee realizzabili per reti casuali secondo il modello fisico, è anche realizzabile per reti arbitrarie secondo il modello protocollare. Questo dimostra il throughput trovato nel Teorema 5.2 e che $\sqrt{\frac{8}{\pi}} \frac{W}{\Delta \sqrt{n}}$ rappresenta una limitazione superiore.

5 Conclusioni

Per concludere la nostra trattazione andremo a confrontare i vari risultati ottenuti.

Per quanto riguarda il livello protocollare andiamo a vedere che il throughput raggiungibile nel caso si prenda una rete di tipo casuale varia in funzione di $\Theta\left(\frac{W}{\sqrt{n \log(n)}}\right)$ bit/s. Nelle reti di tipo casuale si considerano n nodi che trasmettono ciascuno alla velocità di W bit/s, con una lunghezza di trasmissione fissa e comune, in cui la localizzazione dei nodi sorgente e destinatario sono di tipo aleatorio. Una limitazione superiore nel caso descritto è pari a $\lambda(n) = \frac{c'W}{\Delta\sqrt{n \log(n)}}$ bit/s, mentre una limitazione inferiore è $\lambda(n) = \frac{cW}{(1+\Delta)^2\sqrt{n \log(n)}}$ bit/s.

L'andamento del throughput vale sia che venga preso un disco nel piano che la superficie S^2 della sfera.

Nel caso in cui invece ci troviamo nella situazione di reti arbitrarie, in cui la disposizione dei nodi è fissa e ottimale, sorgente e destinatario vengono scelti in maniera arbitraria e nuovamente il raggio d'azione dei nodi è fisso, il throughput raggiungibile è dell'ordine di $\Theta\left(\frac{W}{\sqrt{n}}\right)$ bit/s. La capacità totale di trasporto della rete risulta pari a $\Theta(W\sqrt{n})$ bit-m/s. La limitazione superiore è pari a $\sqrt{\frac{8}{\pi}}\frac{W}{\Delta}\sqrt{n}$ bit-m/s, che nel caso in cui si scelga il rapporto tra potenza massima e minima inferiore al parametro β , diventa $\sqrt{\frac{8}{\pi}}\frac{1}{\left(\frac{\beta P_{min}}{P_{max}}\right)^{\frac{1}{\alpha}}-1}W\sqrt{n}$ bit-m/s, dove α indica l'esponente di attenuazione dovuto al percorso ed è sempre maggiore di 2. Ovviamente come si può notare si può ottenere una capacità più elevata in questo caso, dovuto al fatto che si conosce perfettamente la rete e siamo nelle condizioni ottimali.

Andiamo invece a considerare le reti a livello fisico e a comparare nuovamente i risultati nei diversi casi. Considerando reti di tipo arbitrario come precedentemente definito la capacità varia come $\Theta\left(Wn^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}\right)$ bit-m/s, e il corrispondente throughput è pari a $\Theta\left(\frac{W}{n^{\frac{1}{\alpha}}}\right)$ bit/s. Nello specifico il limite superiore trovato è uguale a $\left(\frac{2\beta+2}{\beta}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\frac{1}{\sqrt{\pi}}Wn^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}$ bit-m/s. Anche in questo tipo di modello andando a considerare condizioni ottimali, e che il rapporto tra potenza massima e potenza minima sia inferiore al parametro β si può

raggiungere un limite superiore pari a $\sqrt{\frac{8}{\pi}} \frac{1}{\left(\frac{\beta P_{min}}{P_{max}}\right)^{\frac{1}{\alpha}} - 1} W \sqrt{n}$ bit-m/s, il quale

è perfettamente uguale alla limitazione superiore trovata per le reti arbitrarie secondo il modello protocollare. La trattazione sui limiti inferiori realizzabili ha portato a rafforzare i limiti e gli andamenti trovati.

Nel caso invece si tratti il modello fisico per le reti casuali il limite superiore trovato per il throughput è dell'ordine di $\Theta\left(\frac{W}{\sqrt{n}}\right)$ bit/s, uguale al modello

protocollare per reti arbitrarie. Il limite superiore è pari a $\sqrt{\frac{8}{\pi}} \frac{W}{L(\beta^{1/\alpha} - 1)} \frac{1 + \epsilon(n)}{\sqrt{n}}$ bit/s, dove $\epsilon(n)$ è una sequenza deterministica che tende a zero, mentre il limite inferiore che può essere realizzato è uguale a

$$\frac{c'}{\left(2\left(c'\beta\left(3 + \frac{1}{\alpha-1} + \frac{2}{\alpha-2}\right)\right)^{1/\alpha} - 1\right)} \frac{W}{\sqrt{n \log(n)}} \text{ bit/s.}$$

Tutti i risultati trovati valgono sia nel caso in cui il dominio della rete sia un disco sul piano di area $1m^2$, sia nel caso in cui il dominio sia la superficie S^2 di una sfera la cui area è pari a $1m^2$. Nel caso in cui i domini che vengono presi siano di area Am^2 maggiore, tutte le capacità e i throughput trovati devono essere scalati della quantità \sqrt{A} . Si tenga presente inoltre che la suddivisione in sottocanali non ha portato a miglioramenti significativi.

Si può notare da quanto ottenuto, che la capacità di trasmissione e il relativo throughput della rete, sono in tutti i casi dipendenti soltanto dal numero di nodi presenti nella rete. Più la rete è densa più bassa sarà la sua capacità, fino a tendere a zero per $n \rightarrow +\infty$. Nella nostra trattazione inoltre si è presa una situazione ottimale, senza considerare la mobilità dei nodi, la presenza di traffico di tipo impulsivo, o la presenza di collegamenti falliti. La capacità che risulta considerando i precedenti problemi potrà quindi essere soltanto inferiore.

La nostra trattazione quindi può essere considerata la base per studi in grado di incrementare la capacità trovata. L'argomento è molto ampio e i parametri da trattare sono parecchi. Per riuscire ad incrementare la capacità si possono ad esempio trattare modulazioni alternative, utilizzare schemi per l'accesso al mezzo che riescano a velocizzare le comunicazioni riducendo al minimo le collisioni, utilizzare diversi livelli di potenza per ciascuna comunicazione, migliorare l'instradamento dei dati, utilizzare schemi per la cancellazione dell'interferenza dovuta ai nodi vicini e così via.

Riferimenti bibliografici

- [1] Piyush Gupta, P.R. Kumar, “*The capacity of wireless networks*”, IEEE Trans. 2 Marzo 2000.
- [2] Piyush Gupta, P.R. Kumar, “*Critical Power for Asymptotic Connectivity*”, Proceedings of the 37th IEEE Conference on Decision and Control, Florida USA Dicembre 1998.
- [3] John Jubin, Janet D. Tornow, “*The DARPA packet radio network protocols*”, Proceedings of the IEEE, vol.75, No.1, Gennaio 1987.
- [4] Rohit Negi, Arjunan Rajeswaran, “*Capacity of power constrained ad-hoc networks*”, IEEE INFOCOM 2004.
- [5] M. Vidyasagar, “*A theory of learning and generalization*”, Springer, Berling 1997.
- [6] Vladimir Cherkassky, Filip Mulier, “*Vapnik–Chervonenkis (VC) Learning Theory and Its Applications*”, IEEE Trans. on neurals networks, vol. 10, No. 5, Settembre 1999.
- [7] R. Nowak, “*The Proof of the Vapnik-Chervonenkis (VC) Inequality*”, Lecture 19, 5/17/2009.
- [8] Atsuyuki Okabe, Barry Boots, Kokichi Sugihara, Sung Nok Chiu, “*Spatial Tessellations, concepts and applications of Voronoi diagrams*”, Wiley, Second edition, 2000.
- [9] Marco Muselli, “*Introduzione alla teoria statistica dell’apprendimento*”, Rapporto interno 2/98, Aprile 1998, Genova, Italia.
- [10] Martin Sewel, “*VC Dimension*”, Department of Computer Science University College London, Settembre 2008.