UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

Dipartimento di Fisica e Astronomia "Galileo Galilei"

Corso di Laurea in Fisica

Tesi di Laurea

Funzione di risposta di LISA ad onde gravitazionali nei canali XYZ e AET

Relatore

Prof. Sabino Matarrese

Correlatore

Dr. Angelo Ricciardone

Laureando

Francesco Flora

Anno Accademico 2019/2020

Abstract

Il *Laser Interferometer Space Antenna* (LISA), sensibile alle onde gravitazionali nella regione dei milli-Hertz, sarà in grado di rivelare segnali provenienti da diverse sorgenti, di origine sia astrofisica che cosmologica. La precisa caratterizzazione di tali segnali sarà di grande importanza per poter distinguere e studiare questi fenomeni. Questa caratterizzazione passa attraverso la costruzione delle *response functions* per LISA, che descrivono la risposta dell'interferometro al passaggio di un'onda gravitazionale. In questo lavoro di tesi le funzioni di risposta vengono calcolate analiticamente e numericamente sia per il singolo canale di *Time Delay Interferometry* (TDI), nonché nel caso di correlazione tra due canali, sia nella base X,Y,Z, che in quella A,E,T. La correlazione tra due canali è necessaria nell'ottica della rivelazione dello *Stochastic Gravitational Waves Background*, in quanto questo, a differenza del rumore, è correlato tra diversi *channels*. Infine la base A,E,T, ottenuta da una rotazione della base X,Y,Z, consente di ottenere dei canali ortogonali, ovvero statisticamente indipendenti.

Indice

1 Introduzione **1**
1.1 LISA 1
1.1.1 Geometria e principi di funzionamento 1
1.1.2 Interferometria 2
1.1.3 Sorgenti di onde gravitazionali rilevanti per LISA 2

2 Funzioni di risposta di LISA per il singolo canale TDI **5**
2.1 Tensori di polarizzazione 5
2.2 Funzione di risposta del detector 6
2.3 Funzione di trasferimento 7
2.4 Sistema di riferimento dell'onda 9
2.5 Sistema di riferimento del detector 11

3 Funzione di risposta di LISA nei canali X,Y,Z e A,E,T **14**
3.1 Correlazione tra due canali 14
3.2 Definizione dei canali X,Y,Z e correlazione tra due canali 15
3.3 Definizione dei canali A,E,T e correlazione tra due canali 17

4 Conclusioni **23**

Capitolo 1

Introduzione

La scoperta delle onde gravitazionali, avvenuta nel 2015 da parte della *Laser Interferometer Gravitational Wave Observatory* (LIGO) *Scientific Collaboration* e della *Virgo Collaboration*, ha segnato l'inizio di una nuova era nello studio dell'universo, affiancando ai tradizionali metodi di studio e ricerca in ambito astrofisico e cosmologico un nuovo e potente strumento. L'osservazione delle onde gravitazionali infatti, permette di esplorare regioni e fenomeni dell'universo che sarebbero inaccessibili utilizzando la sola radiazione elettromagnetica, grazie al fatto che le prime, perturbazioni dello spazio-tempo stesso, viaggiano sostanzialmente indisturbate dal momento della loro creazione [6].

Tuttavia per gli interferometri terrestri la regione di frequenze inferiori ad 1 Hz, potenzialmente molto ricca in termini di sorgenti di onde gravitazionali, risulta essere sostanzialmente inaccessibile a causa, soprattutto, di due fonti di rumore: quello sismico [4, 7] e quello Newtoniano [4]. Il primo è legato a vibrazioni della crosta terrestre provocate da attività di natura sia antropica (come traffico o treni) che naturale (come i venti); il secondo è dovuto a fluttuazioni nella densità di massa intorno all'interferometro che genera dunque fluttuazioni del campo gravitazionale terrestre [4].

L'unico modo per avere accesso a tali frequenze è dunque quello di andare nello spazio, dove tali fonti di rumore sono assenti.

1.1 LISA

1.1.1 Geometria e principi di funzionamento

Il *Laser Interferometer Space Antenna* (LISA) è un esperimento frutto della collaborazione tra l'Agenzia Spaziale Europea (ESA) e la *National Aeronautics and Space Administration* (NASA), che consiste di una costellazione di tre satelliti disposti in modo da formare un triangolo in prima approssimazione equilatero di lato 2.5 milioni di km [4], il cui lancio è previsto intorno al 2035. Questi satelliti seguiranno un'orbita eliocentrica, con periodo di 365.2422 giorni, seguendo la Terra a una distanza di circa 50 milioni di km, ovvero circa 20° lungo l'orbita. Il piano del detector, inoltre, sarà inclinato di 60° rispetto al piano dell'eclittica, con il risultato che il vettore normale al piano, durante il periodo di un anno, ruota disegnando un cono [13], come si nota in fig. 1.1.

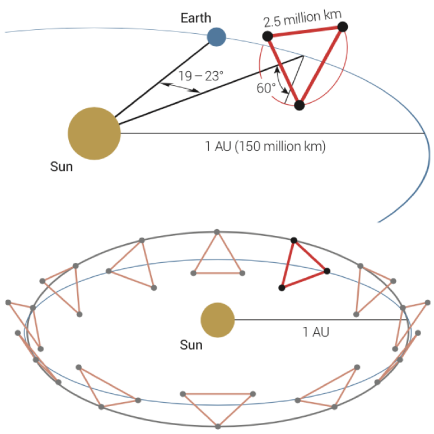

Figura 1.1: L'orbita di LISA [6]

All'interno di ciascun satellite sono poste due *test masses* in caduta libera, ognuna delle quali, poiché segue una geodetica, è utilizzata come riferimento per ogni estremità dei bracci degli interferometri [4]. La posizione delle *test masses* è infatti monitorata grazie a misure di tipo interferometrico e il satellite è vincolato a seguirne il moto grazie a un sistema di *micro-thrusters* detto *Drag Free Attitude Control System* [6]. Questo sistema è in grado di mantenere la caduta libera dei satelliti utilizzando spinte molto piccole, dell'ordine di 100 μN, opponendosi in generale alle spinte esterne dovute al vento solare o a micro meteoriti [4]. Gli effetti di tali agenti esterni, per quanto piccoli, a lungo andare sarebbero in grado di alterare sensibilmente la posizione dei satelliti.

1.1.2 Interferometria

Oltre alle due *test masses*, ogni satellite della costellazione contiene anche due laser e due telescopi [6]. Come per gli interferometri terrestri, i satelliti che compongono LISA scambiano dei segnali laser, al fine di misurare la variazione nel tempo di percorrenza della luce indotto dal passaggio di un'onda gravitazionale. Tuttavia l'enorme lunghezza dei bracci impedisce la riflessione del segnale tramite uno specchio a causa della diffrazione, che ne riduce la potenza [4]. Per questo lo schema di funzionamento di LISA prevede che ogni satellite, una volta rilevato il segnale, ne riproduca uno con la stessa fase per il percorso di ritorno. Inoltre, a differenza di quanto accade per gli interferometri di Michelson, i bracci di LISA non hanno precisamente la stessa lunghezza. Di conseguenza i segnali provenienti da due bracci, che devono essere ricombinati per valutare la variazione nella fase, vengono sovrapposti utilizzando la tecnica del *Time Delay Interferometry* (TDI), grazie al quale è possibile tenere conto della differenza nella lunghezza dei bracci [4].

1.1.3 Sorgenti di onde gravitazionali rilevanti per LISA

La lunghezza dei bracci di LISA è stata scelta per ottimizzare la sensibilità per frequenze intorno al milli-Hertz, regione in cui ci si aspetta di osservare una grande varietà di sorgenti [6]. Di seguito sono presentate alcune delle sorgenti rilevabili individualmente da LISA, considerando come durata della missione un periodo di almeno quattro anni:

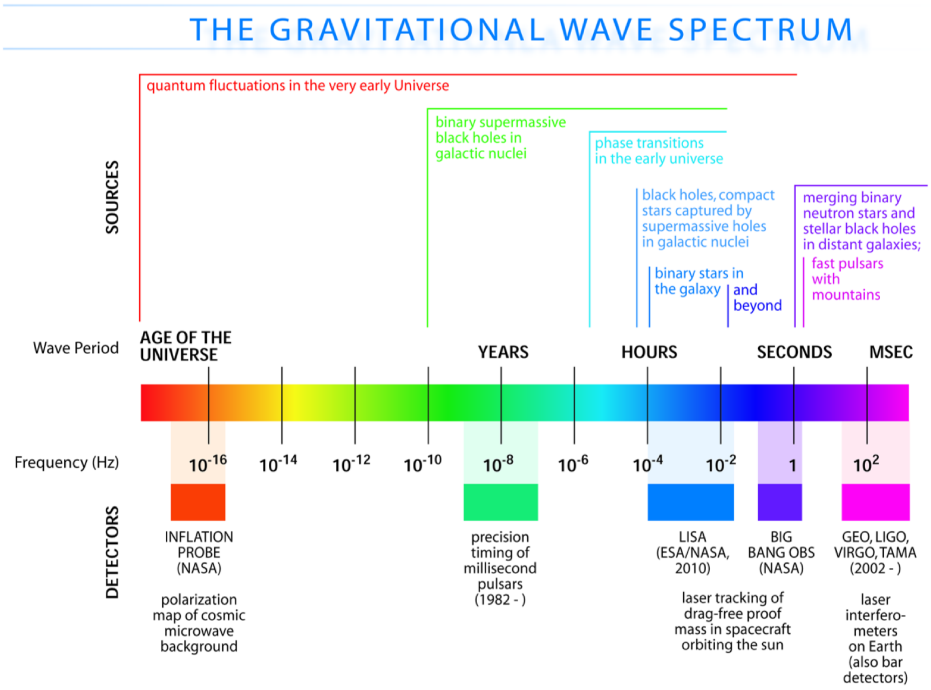

Figura 1.2: Lo spettro delle onde gravitazionali, con possibili sorgenti insieme a metodi di rivelazione e detectors [8]

1. *Inspiral* e *merging* di buchi neri supermassivi -*Supermassive Balck Hole Binaries* (SMBHBs)-, con masse totali tra 10^4 e 10^7 $M_\odot$, dove $M_\odot \approx 2 \cdot 10^{30}$ kg è la massa solare. Probabilmente la fonte principale tra quelle che LISA potrà risolvere singolarmente, in misura di qualche centinaio di eventi [2, 12];

2. *Extreme mass-ratio inspirals*, ovvero cattura attorno a *Supermassive Black Holes* di *Compact Stars*, come nane bianche, stelle di neutroni o buchi neri di simile massa, fino a qualche centinaio di eventi all'anno [7];

3. Sistemi binari di nane bianche, fino a decine di migliaia di eventi [12].

In effetti molti dei sistemi binari di buchi neri che sono individualmente rilevabili da LISA potrebbero iniziare una coalescenza entro dieci anni, producendo onde gravitazionali rilevabili a terra da *Advanced LIGO*. Questo aprirebbe la possibilità di studiare sorgenti di onde gravitazionali in regime *multi-band* [8, 5].

Ci sono inoltre buone ragioni per ritenere che l'Universo sia permeato da un fondo stocastico di onde gravitazionali (in inglese *Stochastic Gravitational Waves Background* o SGWB) [4], residuo di fenomeni avvenuti nell'universo primordiale, come inflazione o transizioni di fase, o anche di fisica delle particelle al di là del Modello Standard [16]. Inoltre, un fondo stocastico di onde gravitazionali può anche emergere dalla sovrapposizione incoerente di un numero elevato di sorgenti, troppo deboli per essere risolte singolarmente. Queste includono [10]:

1. Sistemi binari di oggetti compatti all'interno della nostra galassia;

2. *Merging* di stelle di neutroni e buchi neri di origine stellare;

Alla luce di quanto detto è evidente come sia necessario implementare tecniche quanto più efficaci al fine di poter distinguere il segnale dal rumore di fondo prodotto dal rivelatore, in particolare nell'ottica della rivelazione del fondo stocastico di onde gravitazionali e della distinzione tra l'origine astrofisica e quella cosmologica di questo segnale [15]. Questo lavoro di tesi si inserisce proprio in questo contesto, infatti il calcolo analitico e numerico delle funzioni di risposta viene effettuato sia nei canali X,Y,Z, che nei canali A,E,T. È stato dimostrato che considerando l'ultima combinazione è possibile facilitare la distinzione tra rumore e segnale, poiché vengono rimosse alcune degenerazioni tra i due [11].

Capitolo 2

Funzioni di risposta di LISA per il singolo canale TDI

In questo capitolo vengono calcolate analiticamente e numericamente le funzioni di risposta di LISA nel singolo canale, ovvero misure di Time Delay Interferometry considerando il solo contributo dovuto a due bracci dell'interferometro. Questo calcolo è presentato in due sistemi di riferimento diversi, dopo l'introduzione dei tensori di polarizzazione e della funzione di trasferimento, necessari per lo sviluppo dei conti successivi.

2.1 Tensori di polarizzazione

Vengono ora introdotti i tensori di polarizzazione per le onde gravitazionali nelle due basi più comunemente utilizzate in letteratura: la base $\{+, \times\}$ e quella $\{R, L\}$. Quest'ultima verrà utilizzata soltanto a partire dal capitolo 3. I tensori di polarizzazione possono essere espressi nel seguente modo [13]:

$$e^{+}_{ij} = \hat{m}_i\hat{m}_j - \hat{n}_i\hat{n}_j, \quad e^{\times}_{ij} = \hat{m}_i\hat{n}_j + \hat{n}_i\hat{m}_j \tag{2.1}$$

dove $\hat{m}$ e $\hat{n}$ sono definiti considerando il grado di libertà, detto angolo di polarizzazione ψ, che dipende dall'orientazione della sorgente. Infatti, considerando un generico sistema di riferimento $\{\hat{p}, \hat{q}, \hat{w}\}$, con $\hat{w}$ orientato lungo la direzione di propagazione dell'onda e $\hat{w} = \hat{p} \times \hat{q}$, gli assi $\hat{p}$ e $\hat{q}$ possono ruotare attorno a $\hat{w}$. Allora:

$$\hat{m} = \cos\psi\hat{p} + \sin\psi\hat{q}, \quad \hat{n} = -\sin\psi\hat{p} + \cos\psi\hat{q}. \tag{2.2}$$

A partire da e^{+}_{ij} e $e^{\times}_{ij}$ si definiscono i tensori di polarizzazione nella base $\{R, L\}$:

$$e^{(R)}_{ab} = \frac{e^{(+)}_{ab} + ie^{(\times)}_{ab}}{\sqrt{2}}, \qquad e^{(L)}_{ab} = \frac{e^{(+)}_{ab} - ie^{(\times)}_{ab}}{\sqrt{2}}. \tag{2.3}$$

In un sistema di riferimento cartesiano in cui $\hat{w}$ sia orientato lungo $\hat{z}$, se $\psi = 0$, $\hat{p} = \hat{x}$ e $\hat{q} = \hat{y}$ si ottengono le seguenti espressioni semplificate:

$$e^{+}_{ab} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}_{ab}, \quad e^{\times}_{ab} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}_{ab}, \tag{2.4}$$

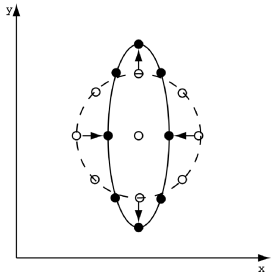

Figura 2.1: Effetto di un'onda polarizzata + su un anello di particelle [3]

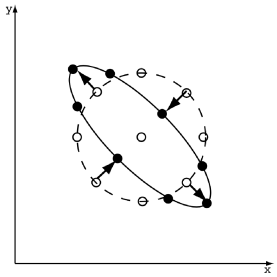

Figura 2.2: Effetto di un'onda polarizzata × su un anello di particelle [3]

con $a, b = 1, 2$, coprendo così il piano (x,y). In generale, tuttavia, i tensori di polarizzazione hanno espressioni più complesse, che dipendono dalla direzione di arrivo dell'onda gravitazionale e che verranno presentati successivamente. In ogni caso può essere utile visualizzare graficamente il significato delle polarizzazioni $\{+, \times\}$ in questo caso particolare, considerando l'effetto che avrebbe il passaggio dell'onda su un sistema di particelle, disposte a cerchio e in quiete, posizionato sul piano (x,y) (fig: 2.1 e 2.2).

2.2 Funzione di risposta del detector

In generale input e output del detector sono definiti da quantità scalari, dipendenti dal tempo, mentre l'onda gravitazionale è descritta da un tensore h_{ij}. Ad esempio, per un'onda che si propaga in direzione $\hat{w}$, nella *Lorentz transverse-traceless gauge* (TT gauge), vale [4]:

$$h_{ij}(t, \vec{x}) = \sum_{A=+,\times} \int_{-\infty}^{+\infty} df \int d^2\hat{w}\, \tilde{h}_A(f, \hat{w})\, e^A_{ij}(\hat{w})\, e^{-2\pi i f(t - \hat{w}\cdot\vec{x}/c)}. \tag{2.5}$$

Il contributo dell'onda gravitazionale all'output del rivelatore si può scrivere nel seguente modo:

$$h(t) = \sum_A D^{ij}\, e^A_{ij}\, h_A(t), \tag{2.6}$$

dove D^{ij} è un tensore costante che dipende dalle geometria del rivelatore, detto *detector tensor*. È possibile dunque definire le funzioni di risposta angolari come:

$$F^A \equiv D^{ij} e^A_{ij}, \tag{2.7}$$

con $A = +, \times$. Il *detector tensor* è dato da:

$$D^{ij} \equiv \frac{1}{2}\left[\hat{u}^i\hat{u}^j T(f, \hat{u}\cdot\hat{w}) - \hat{v}^i\hat{v}^j T(f, \hat{v}\cdot\hat{w})\right], \tag{2.8}$$

dove $\hat{u}$ e $\hat{v}$ sono i versori orientati lungo i bracci del detector e $T(f, \hat{u}\cdot\hat{w})$ è la funzione di trasferimento. In effetti gli interferometri terrestri come LIGO o VIRGO (non dunque LISA) operano nel limite di bassa frequenza [4], di conseguenza il *detector tensor* per questi strumenti si riduce a:

$$D^{ij} \equiv \frac{1}{2}\left(\hat{u}^i\hat{u}^j - \hat{v}^i\hat{v}^j\right), \tag{2.9}$$

poiché, come sarà mostrato in seguito, la funzione di trasferimento tende a uno in tale limite.

In generale la funzione di risposta contiene informazioni in merito a come uno strumento con le braccia lungo $\hat{u}$ e $\hat{v}$ risponda al passaggio di un'onda gravitazionale che si propaga lungo $\hat{w}$.

2.3 Funzione di trasferimento

È possibile definire la funzione di trasferimento a partire dal calcolo del tempo che un fotone impiega per compiere il percorso di andata e ritorno lungo un braccio del detector, considerando la perturbazione indotta dal passaggio di un'onda gravitazionale che si propaga lungo $\hat{w}$ [8]. In particolare si considera un sistema di assi cartesiani $\{x, y, z\}$ in cui i due estremi del braccio del detector sono posti rispettivamente in $\vec{x_1}$ e $\vec{x}_2 = \vec{x}_1 + L\hat{u}$. La variazione nel tempo impiegato dal fotone che viene emesso dall'estremo 1 al tempo t_1 e che arriva all'estremo 2 è data dalla seguente espressione [8, 9]:

$$\Delta T(t) = \frac{1}{2c}\hat{u}^a\hat{u}^b \int_{s=0}^{L} ds\, h_{ab}(t(s), \vec{x}(s)), \tag{2.10}$$

con $t(s) = (t - L/c) + s/c$ e $\vec{x}(s) = \vec{x}_1 + s\hat{u}$.

Seguendo quanto fatto in [8], è possibile inserire l'equazione (2.5) in (2.10) e integrando si ottiene la seguente espressione:

$$\Delta T(t) = \frac{2L}{c}\int_{-\infty}^{+\infty} df \int d^2\hat{w}\, \frac{1}{2}\hat{u}^a\hat{u}^b \sum_A e^A_{ab}(\hat{w})\, \tilde{h}_A(f) \\ \frac{c}{i4\pi fL}\frac{1}{1-\hat{w}\cdot\hat{u}}\left[e^{-i2\pi f(t_2-\hat{w}\cdot\vec{x}_2/c)} - e^{-i2\pi f(t_1-\hat{w}\cdot\vec{x}_1/c)}\right], \tag{2.11}$$

in cui $t_2 = t$ corrisponde al tempo di ricezione in x_2 mentre $t_1 = t - \frac{L}{c}$ corrisponde al tempo di emissione in x_1. Dato che $t_1 - t_2 = L/c$ e raccogliendo un termine $e^{i2\pi f(t_2-\hat{w}\cdot\vec{x}_2/c)}$ si ottiene:

$$\Delta T(t) = \frac{2L}{c}\int_{-\infty}^{+\infty} df \int d^2\hat{w}\, \frac{1}{2}\hat{u}^a\hat{u}^b \sum_A e^A_{ab}(\hat{w})\, \tilde{h}_A(f) \\ e^{-i2\pi f(t_2-\hat{w}\cdot\vec{x}_2/c)}\frac{c}{i4\pi fL}\frac{1}{1-\hat{w}\cdot\hat{u}}\left[1 - e^{-\frac{i2\pi fL}{c}(1-\hat{w}\cdot\hat{u})}\right]. \tag{2.12}$$

Dalla precedente equazione si può definire l'espressione per la funzione di trasferimento legata al percorso di sola andata del fotone, che risulta:

$$T_{12}(f, \hat{u}\cdot\hat{w}) \equiv \frac{c}{i4\pi fL}\frac{1}{1-\hat{w}\cdot\hat{u}}\left[1 - e^{-\frac{i2\pi fL}{c}(1-\hat{w}\cdot\hat{u})}\right]. \tag{2.13}$$

Raccogliendo un termine $e^{-\frac{i\pi fL}{c}(1-\hat{w}\cdot\hat{u})}$ e la funzione di trasferimento può essere riscritta come:

$$T_{12}(f, \hat{u}\cdot\hat{w}) = \frac{c}{2\pi fL}\frac{e^{-\frac{i\pi fL}{c}(1-\hat{w}\cdot\hat{u})}}{1-\hat{w}\cdot\hat{u}}\left[\frac{e^{\frac{i\pi fL}{c}(1-\hat{w}\cdot\hat{u})} - e^{-\frac{i\pi fL}{c}(1-\hat{w}\cdot\hat{u})}}{2i}\right] =$$

$$= \frac{1}{2} e^{-\frac{i\pi f L}{c}(1-\hat{w}\cdot\hat{u})} \operatorname{sinc}\left[\frac{\pi f L}{c}(1-\hat{w}\cdot\hat{u})\right], \tag{2.14}$$

con $\operatorname{sinc} = \frac{\sin(x)}{x}$.

Considerando il percorso di andata e ritorno la variazione del tempo di percorrenza del fotone è dato da [8]:

$$\Delta T(t) = \Delta T_{12}(t - 2L/c) + \Delta T_{21}(t - L/c), \tag{2.15}$$

con cui è possibile definire l'espressione completa della funzione di trasferimento del detector [8]:

$$\begin{aligned} &T(f, \hat{u}\cdot\hat{w}) \equiv \\ &\equiv \frac{1}{2} e^{-\frac{i2\pi f L}{c}} \left[e^{-\frac{i\pi f L}{c}(1+\hat{w}\cdot\hat{u})} \operatorname{sinc}\left(\frac{\pi f L}{c}[1-\hat{w}\cdot\hat{u}]\right) + e^{\frac{i\pi f L}{c}(1-\hat{w}\cdot\hat{u})} \operatorname{sinc}\left(\frac{\pi f L}{c}[1+\hat{w}\cdot\hat{u}]\right)\right]. \end{aligned} \tag{2.16}$$

Considerando un'onda che incida normalmente sul detector ($\hat{w}\cdot\hat{u} = 0$) il modulo della funzione di trasferimento in funzione della frequenza ha l'andamento mostrato in fig. 2.3:

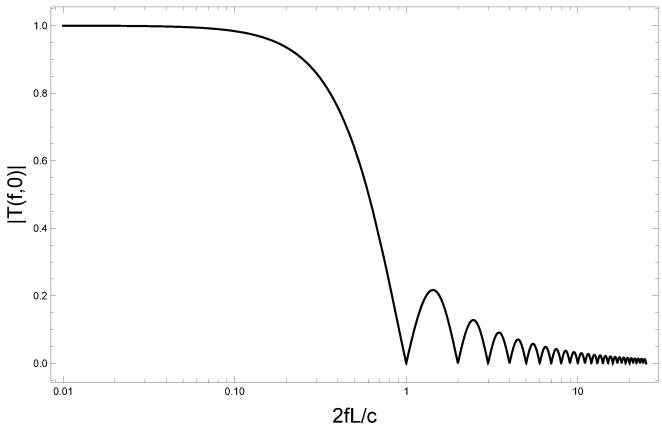

Figura 2.3: Modulo della funzione di trasferimento per un singolo braccio con un valore di $\hat{w}\cdot\hat{u} = 0$.

Si nota dunque come la funzione di trasferimento tenda a 1 a bassa frequenza, mentre vale zero per multipli interi di $\frac{2fL}{c}$.

È infine possibile riscrivere l'eq. (2.16) introducendo la frequenza caratteristica del detector, definita da $f_* = c/(2\pi L) \approx 0.019$ Hz [13], ottenendo:

$$T(f, \hat{u}\cdot\hat{w}) \equiv \frac{1}{2}\left[e^{-i\frac{f}{2f*}(3+\hat{w}\cdot\hat{u})} \operatorname{sinc}\left(\frac{f}{2f*}[1-\hat{w}\cdot\hat{u}]\right) + e^{-i\frac{f}{2f*}(1+\hat{w}\cdot\hat{u})} \operatorname{sinc}\left(\frac{f}{2f*}[1+\hat{w}\cdot\hat{u}]\right)\right], \tag{2.17}$$

che coincide con l'espressione presente in [13].

2.4 Sistema di riferimento dell'onda

Il sistema di riferimento dell'onda si costruisce [13] considerando un sistema di assi cartesiani $\{x, y, z\}$ in cui z corrisponde alla direzione di propagazione dell'onda, ovvero a $\hat{w}$. In questo sistema i due bracci dell'interferometro giacciono lungo le direzioni $\hat{u}$ e $\hat{v}$: $\hat{u}$ giace sul piano $x-z$, ad un angolo θ_1 dall'asse z, mentre per descrivere $\hat{v}$ è necessario introdurre un nuovo angolo, ϵ, tra il piano $\hat{u}-\hat{w}$ e quello del detector $\hat{u}-\hat{v}$, e considerare l'angolo di apertura dei bracci γ, che nel caso di LISA corrisponde a 60°. Infine l'angolo ψ_1 tra x e $\hat{m}$ corrisponde all'angolo di polarizzazione.

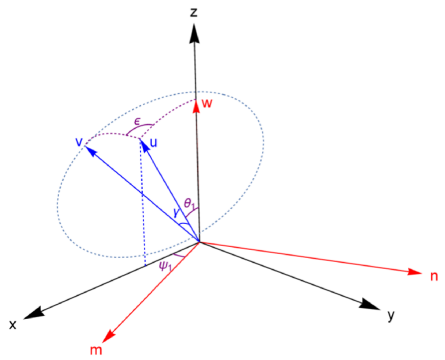

Figura 2.4: Rappresentazione del sistema di riferimento dell'onda [13]

Si ottengono dunque le seguenti espressioni:

$$\hat{m} = (\cos\psi_1, \sin\psi_1, 0), \tag{2.18}$$

$$\hat{n} = (-\sin\psi_1, \cos\psi_1, 0), \tag{2.19}$$

$$\hat{w} = (0, 0, 1), \tag{2.20}$$

mentre per quanto riguarda i bracci del detector:

$$\hat{u} = (\sin\theta_1, 0, \cos\theta_1)\,, \tag{2.21}$$

$$\hat{v} = (\cos\gamma\sin\theta_1 - \sin\gamma\cos\theta_1\cos\epsilon, -\sin\gamma\sin\epsilon, \cos\gamma\cos\theta_1 + \sin\gamma\sin\theta_1\cos\epsilon)\,. \tag{2.22}$$

È ora possibile procedere al calcolo della funzione di risposta angolare, che in questo sistema prende la seguente forma:

$$F^A = \frac{1}{2}\left[\hat{u}^i_w\hat{u}^j_w T\left(f, \hat{u}\cdot\hat{w}\right) - \hat{v}^i_w\hat{v}^j_w T\left(f, \hat{v}\cdot\hat{w}\right)\right] e^A_{ij}\left(\psi_1\right), \tag{2.23}$$

che, svolgendo i prodotti scalari nelle funzioni di trasferimento, diventa:

$$F^A = \frac{1}{2}\left[\hat{u}^i_w\hat{u}^j_w T\left(f, \cos\theta_1\right) - \hat{v}^i_w\hat{v}^j_w T\left(f, \cos\theta_2\right)\right] e^A_{ij}\left(\psi_1\right), \tag{2.24}$$

con $\cos\theta_2 = \cos\gamma\cos\theta_1 + \sin\gamma\sin\theta_1\cos\epsilon$.

È ora necessario calcolare i tensori di polarizzazione, per poi sommare sugli indici. Inserendo le equazioni (2.18) e (2.19) in (2.1) si ottiene:

$$e_{ij}^{+} = \begin{pmatrix} \cos 2\psi_1 & \sin 2\psi_1 \\ \sin 2\psi_1 & -\cos 2\psi_1 \end{pmatrix}, \tag{2.25}$$

$$e_{ij}^{\times} = \begin{pmatrix} -\sin 2\psi_1 & \cos 2\psi_1 \\ \cos 2\psi_1 & \sin 2\psi_1 \end{pmatrix}. \tag{2.26}$$

Allora, considerando anche le equazioni (2.21) e (2.22) e sommando, si trova:

$$F^{+} = \frac{1}{2}\cos 2\psi_1 \sin^2\theta_1 T(f, \cos\theta_1) - \frac{1}{2}[\cos 2\psi_1(\cos^2\theta_3 - \sin^2\gamma \sin^2\epsilon) + 2\sin 2\psi_1 \sin\gamma \sin\epsilon \cos\theta_3]T(f, \cos\theta_2), \tag{2.27}$$

$$F^{\times} = -\frac{1}{2}\sin 2\psi_1 \sin^2\theta_1 T(f, \cos\theta_1) + \frac{1}{2}[\sin 2\psi_1(\cos^2\theta_3 - \sin^2\gamma \sin^2\epsilon) - 2\cos 2\psi_1 \sin\gamma \sin\epsilon \cos\theta_3]T(f, \cos\theta_2), \tag{2.28}$$

con $\cos\theta_3 = \sin\gamma \cos\theta_1 \cos\epsilon - \cos\gamma \sin\theta_1$.

È ora possibile procedere al calcolo della funzione di risposta mediata, definita, per il sistema di riferimento dell'onda, dal seguente integrale:

$$R_A(f) = \frac{1}{8\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \left|F^A\right|^2 \sin\theta_1 d\theta_1 d\epsilon d\psi_1, \tag{2.29}$$

con $A = +, \times$. In figura 2.5 è mostrato il risultato dell'integrale numerico.

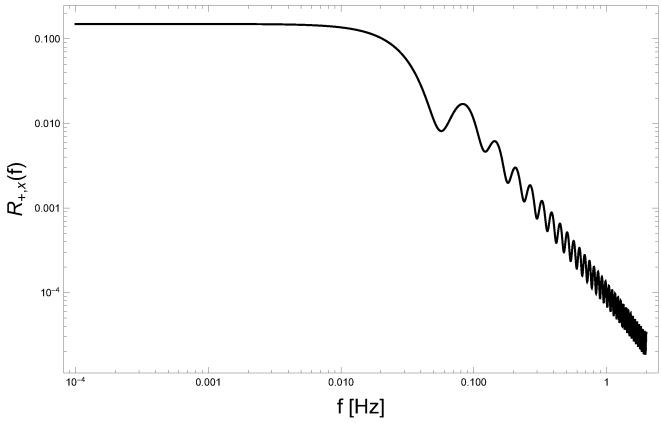

Figura 2.5: Funzione di risposta mediata nel sistema di riferimento dell'onda

La funzione di risposta risulta dunque costante per frequenze inferiori alla frequenza caratteristica f^*. Dalla frequenza caratteristica in poi, invece, la funzione di risposta inizia a decrescere, seguendo l'andamento di f^{-2} [13].

2.5 Sistema di riferimento del detector

In questo caso il sistema di riferimento si costruisce [13] considerando un sistema di assi cartesiani $\{x_d, y_d, z_d\}$ in cui i due bracci del detector giacciono sul piano x - y. In particolare:

$$\hat{u}_d = (\cos(\gamma/2), -\sin(\gamma/2), 0), \quad \hat{v}_d = (\cos(\gamma/2), \sin(\gamma/2), 0), \tag{2.30}$$

che rappresentano le direzioni dei due bracci del detector, e γ l'angolo tra i due bracci. Per quanto riguarda la direzione della sorgente che emette l'onda, invece, si considerano i due angoli (θ_d, ϕ_d), rispettivamente polare e azimutale. Di conseguenza, in questo sistema di riferimento, il versore $\hat{w}$, orientato lungo la direzione di propagazione dell'onda, prende la seguente forma (vedi fig. 2.6):

$$\hat{w} = (-\sin\theta_d \cos\phi_d, -\sin\theta_d \sin\phi_d, -\cos\theta_d). \tag{2.31}$$

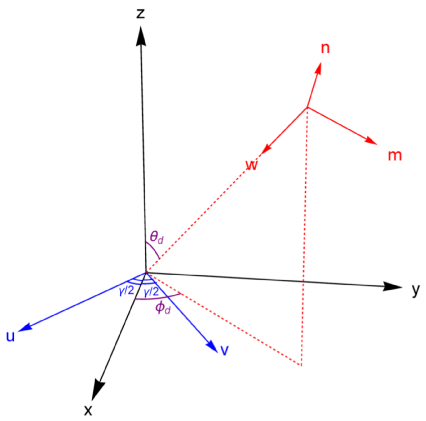

Figura 2.6: Rappresentazione del sistema di riferimento del detector e della posizione della sorgente in tale sistema [13]

Lo stesso risultato si può ottenere considerando una generica rotazione, descritta dagli angoli di Eulero $(\theta_d, \phi_d, \psi_d)$, che leghi il sistema di coordinate dell'onda $\{\hat{m}, \hat{n}, \hat{w}\}$ a quello del detector $\{x_d, y_d, z_d\}$. L'angolo ψ_d è l'angolo di polarizzazione. La matrice di rotazione di Eulero prende dunque la seguente forma [13]:

$$R^{od}_{ij} = \begin{pmatrix} \cos\theta_d \cos\phi_d \cos\psi + \sin\phi_d \sin\psi_d & -\cos\theta_d \cos\phi_d \sin\psi_d + \sin\phi_d \cos\psi_d & -\sin\theta_d \cos\phi_d \\ \cos\theta_d \sin\phi_d \cos\psi_d - \cos\phi_d \sin\psi_d & -\cos\theta_d \sin\phi_d \sin\psi_d - \cos\phi_d \cos\psi_d & -\sin\theta_d \sin\phi_d \\ -\sin\theta_d \cos\psi_d & \sin\theta_d \sin\psi_d & -\cos\theta_d \end{pmatrix}. \tag{2.32}$$

Applicando questa matrice possiamo esprimere i versori che descrivono il sistema dell'onda in coordinate eclittiche, ovvero a partire dalla direzione della sorgente e dall'angolo di polarizzazione:

$$\begin{aligned} \hat{m} &= R^{od} \cdot (1, 0, 0) = \\ &= (\cos\theta_d \cos\phi_d \cos\psi_d + \sin\phi_d \sin\psi_d, \cos\theta_d \sin\phi_d \cos\psi_d - \cos\phi_d \sin\psi_d, -\sin\theta_d \cos\psi_d)\,, \end{aligned} \tag{2.33}$$

$$\hat{n} = R^{od} \cdot (0,1,0) = \\ = (-\cos\theta_d \cos\phi_d \sin\psi_d + \sin\phi_d \cos\psi_d, -\cos\theta_d \sin\phi_d \sin\psi_d - \cos\phi_d \cos\psi_d, \sin\theta_d \sin\psi_d)\,, \tag{2.34}$$

mentre per $\hat{w}$ si ottiene il risultato in (2.31).

È ora possibile procedere al calcolo della funzione di risposta angolare. L'equazione (2.7) in coordinate eclittiche prende la seguente forma:

$$F^A = \frac{1}{2}\left[\hat{u}_d^i \hat{u}_d^j T\left(f, \hat{u}_d \cdot \hat{w}\right) - \hat{v}_d^i \hat{v}_d^j T\left(f, \hat{v}_d \cdot \hat{w}\right)\right] e_{ij}^A\left(\theta_d, \phi_d, \psi_d\right), \tag{2.35}$$

che, svolgendo i prodotti scalari nelle funzioni di trasferimento e semplificando, diventa:

$$F^A = \frac{1}{2}\left[\hat{u}_d^i \hat{u}_d^j T\left(f, -\sin\theta_d \cos\left(\phi_d + \gamma/2\right)\right) - \hat{v}_d^i \hat{v}_d^j T\left(f, -\sin\theta_d \cos\left(\phi_d - \gamma/2\right)\right)\right] e_{ij}^A\left(\theta_d, \phi_d, \psi_d\right). \tag{2.36}$$

Per alleggerire la notazione è possibile rinominare le funzioni di trasferimento come segue:

$$F^A = \frac{1}{2}\left[\hat{u}_d^i \hat{u}_d^j T_u - \hat{v}_d^i \hat{v}_d^j T_v\right] e_{ij}^A\left(\theta_d, \phi_d, \psi_d\right). \tag{2.37}$$

Per procedere alla somma su i, j è necessario calcolare i tensori di polarizzazione nelle coordinate eclittiche. Inserendo (2.33) e (2.34) in (2.1) si ottiene:

$$e_{11}^+ = \left(\cos^2\theta_d \cos^2\phi_d - \sin^2\phi_d\right)\cos 2\psi_d - \cos\theta_d \sin 2\phi_d \sin 2\psi_d, \tag{2.38}$$

$$e_{12}^+ = e_{21}^+ = \frac{1}{4}\left(3 + \cos 2\theta_d\right)\sin 2\phi_d \cos 2\psi_d + \cos\theta_d \cos 2\phi_d \sin 2\psi_d, \tag{2.39}$$

$$e_{22}^+ = \left(\cos^2\theta_d \sin^2\phi_d - \cos^2\phi_d\right)\cos 2\psi_d + \cos\theta_d \sin 2\phi_d \sin 2\psi_d, \tag{2.40}$$

mentre

$$e_{11}^\times = -\left(\cos^2\theta_d \cos^2\phi_d - \sin^2\phi_d\right)\sin 2\psi_d - \cos\theta_d \sin 2\phi_d \cos 2\psi_d, \tag{2.41}$$

$$e_{12}^\times = e_{21}^\times = -\frac{1}{4}\left(3 + \cos 2\theta_d\right)\sin 2\phi_d \sin 2\psi_d + \cos\theta_d \cos 2\phi_d \cos 2\psi_d, \tag{2.42}$$

$$e_{22}^\times = -\left(\cos^2\theta_d \sin^2\phi_d - \cos^2\phi_d\right)\sin 2\psi_d + \cos\theta_d \sin 2\phi_d \cos 2\psi_d. \tag{2.43}$$

Allora, considerando anche l'eq. (2.30), si trova:

$$F^+ = \frac{\cos^2(\gamma/2)}{2}(T_u - T_v)e_{11}^+ + \frac{\sin^2(\gamma/2)}{2}(T_u - T_v)e_{22}^+ - \frac{\sin\gamma}{2}(T_u + T_v)e_{12}^+, \tag{2.44}$$

$$F^\times = \frac{\cos^2(\gamma/2)}{2}(T_u - T_v)e_{11}^\times + \frac{\sin^2(\gamma/2)}{2}(T_u - T_v)e_{22}^\times - \frac{\sin\gamma}{2}(T_u + T_v)e_{12}^\times. \tag{2.45}$$

Come si è osservato in 2.16, nel limite di bassa frequenza $T \to 1$, e l'espressione per le funzioni di risposta si semplifica notevolmente:

$$F^+ = -\sin\gamma\, e_{12}^+, \quad F^\times = -\sin\gamma\, e_{12}^\times, \tag{2.46}$$

che considerando $\gamma = \frac{\pi}{3}$, ovvero l'apertura dei bracci nel caso di LISA, vengono espresse in forma estesa:

$$F^+ = -\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{1}{4}\left(3 + \cos 2\theta_d\right)\sin 2\phi_d \cos 2\psi_d + \cos\theta_d \cos 2\phi_d \sin 2\psi_d\right), \tag{2.47}$$

$$F^{\times} = -\frac{\sqrt{3}}{2}\left(-\frac{1}{4}\left(3+\cos 2\theta_d\right)\sin 2\phi_d \sin 2\psi_d + \cos\theta_d \cos 2\phi_d \cos 2\psi_d\right), \tag{2.48}$$

ritrovando le espressioni riportate in [1, 13].

Per procedere con il calcolo delle funzioni di risposta mediate è utile definire una nuova funzione di risposta F^t, che combina le polarizzazioni + e ×:

$$F^t = \sqrt{|F^+|^2 + |F^{\times}|^2}. \tag{2.49}$$

Considerando le equazioni (2.2), (2.7) e il fatto che il *detector tensor* è simmetrico, svolgendo i conti si trova:

$$\left|F^t\right|^2 = \left|\hat{p}_i\hat{p}_j D^{ij} - \hat{q}_i\hat{q}_j D^{ij}\right|^2 + 4\left|\hat{p}_i\hat{q}_j D^{ij}\right|^2, \tag{2.50}$$

che evidenzia come questa funzione di risposta sia indipendente dall'angolo di polarizzazione ψ [13]. Infine, seguendo quanto fatto in [13], è utile mediare F^+, $F^{\times}$, F^t sull'angolo di polarizzazione ψ:

$$\langle\left|F^A\right|^2\rangle_\psi \equiv \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|F^A\right|^2 d\psi, \tag{2.51}$$

e risolvendo l'integrale si trovano le seguenti relazioni:

$$\langle\left|F^+\right|^2\rangle_\psi = \langle\left|F^{\times}\right|^2\rangle_\psi = \frac{1}{2}\langle\left|F^t\right|^2\rangle_\psi = \frac{1}{2}\left|F^t\right|^2. \tag{2.52}$$

È ora possibile calcolare la funzione di risposta mediata, definita da:

$$R_t(f) = \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\left|F^t\right|^2 \sin\theta_d d\theta_d d\phi_d, \tag{2.53}$$

riconducendosi poi a $R_+(f)$, $R_{\times}(f)$ sapendo che $R_+(f) = R_{\times}(f) = \frac{1}{2}R_t(f)$ [13].

Nel grafico in figura 2.7 è mostrato l'andamento della funzione di risposta mediata in funzione della frequenza per le polarizzazioni + e ×.

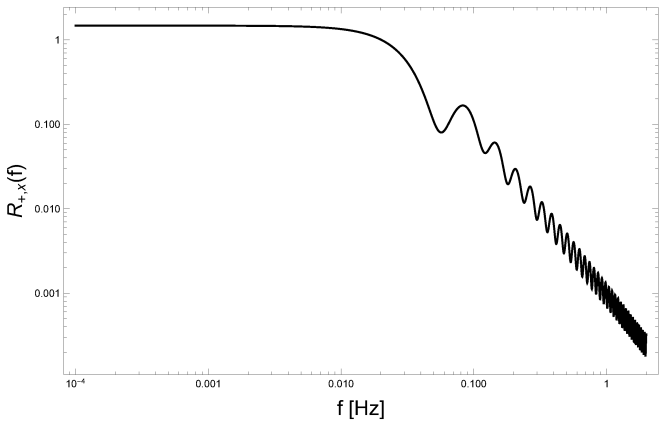

Figura 2.7: Funzione di risposta mediata nel sistema di riferimento del detector

Osservando l'equazione in 2.7 si nota come la funzione di risposta angolare sia definita in modo indipendente dal sistema di riferimento. Ci si aspetta, dunque, che i grafici in figura 2.5 e 2.7 riproducano lo stesso andamento, come infatti avviene.

Capitolo 3

Funzione di risposta di LISA nei canali X,Y,Z e A,E,T

3.1 Correlazione tra due canali

In questo capitolo vengono calcolate le funzioni di risposta di LISA nel caso di correlazione tra due canali, sia nella base X, Y, Z che in quella A, E, T. La ragione per cui viene utilizzata la correlazione è legata al fatto che il fondo stocastico di onde gravitazionali è correlato tra diversi detecotors o canali, mentre il rumore di fondo dovuto allo strumento solitamente non lo è [8]. Questo può essere visto nel seguente esempio, che rappresenta il caso più semplice, in cui si considerano due detector identici, posti nello stesso luogo e allineati. I segnali prodotti da questi posso essere espressi nel seguente modo:

$$s_1 = h + n_1, \quad s_2 = h + n_2, \tag{3.1}$$

con n_i che rappresenta il rumore relativo ai due strumenti e h il contributo legato al passaggio dell'onda gravitazionale. La correlazione tra questi due detectors si esprime come il valore di aspettazione del prodotto tra i i due segnali:

$$\langle C_{12} \rangle \equiv \langle s_1 s_2 \rangle = \langle h^2 \rangle + \langle n_1 n_2 \rangle + \langle h n_2 \rangle + \langle n_1 h \rangle. \tag{3.2}$$

Gli ultimi due termini di 3.2 sono nulli poiché il contributo dell'onda gravitazionale e quello del rumore non sono correlati. Inoltre, assumendo nulla anche la correlazione tra il rumore dei due rivelatori, l'unico termine che rimane è quello di interesse dal punto di vista fisico.

Per comprendere quale sia il vantaggio di utilizzare il canale A,E,T rispetto al canale X,Y,Z è necessario generalizzare quanto detto sopra al caso di LISA. In particolare, assumendo che i tre interferometri abbiano le stesse proprietà, il termine di correlazione prende la seguente forma [6, 14]:

$$\langle s_O(t) s_{O'}(t') \rangle = \begin{pmatrix} C_1 & C_2 & C_2 \\ C_2 & C_1 & C_2 \\ C_2 & C_2 & C_1 \end{pmatrix}, \tag{3.3}$$

con $O = X, Y, Z$, $C_1 = C_{XX} = C_{YY} = C_{ZZ}$ e $C_2 = C_{XY} = C_{XZ} = C_{YZ}$.

I canali A,E,T, la cui definizione è presentata nella sezione 3.3, sono costruiti in modo da diagonalizzare la precedente matrice, permettendo dunque si ottenere dei canali ortogonali, ovvero statisticamente indipendenti.

3.2 Definizione dei canali X,Y,Z e correlazione tra due canali

Considerando un singolo braccio dell'interferometro, il segnale prodotto dal percorso di andata e ritorno del fotone può essere descritto da [9]:

$$s_{12}(t) = \Delta T_{12}(t - 2L/c) + \Delta T_{21}(t - L/c) + n_1(t), \tag{3.4}$$

dove $n_1(t)$ rappresenta il *noise* misurato al vertice 1.

Considerando invece due dei tre bracci che compongono LISA e combinandoli con uno dei satelliti ai vertici è possibile costruire un interferometro di Michelson. In questo caso l'interferometro viene posto sul piano x-z, con i vertici del triangolo in:

$$\vec{x}_1 = (0,0,0), \quad \vec{x}_2 = (0,0,L), \quad \vec{x}_3 = (L\cos(\gamma/2), 0, L\sin(\gamma/2)) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}L, 0, \frac{L}{2}\right), \tag{3.5}$$

sempre con $\gamma = \frac{\pi}{3}$. Inoltre i versori che rappresentano le direzioni dei bracci sono definiti da:

$$\hat{U}_1 \equiv \frac{(\vec{x}_2 - \vec{x}_1)}{L}, \quad \hat{U}_2 \equiv \frac{(\vec{x}_3 - \vec{x}_2)}{L}, \quad \hat{U}_3 \equiv \frac{(\vec{x}_1 - \vec{x}_3)}{L}. \tag{3.6}$$

Per l'interferometro con vertice in $\vec{x}_1$ si può definire:

$$\begin{aligned}\sigma_X(t, \vec{x}_1) &\equiv s_X(t, \vec{x}_1) - n_X(t, \vec{x}_1) \\ &= \Delta T_{12}(t - 2L) + \Delta T_{21}(t - L) - \Delta T_{13}(t - 2L) - \Delta T_{31}(t - L).\end{aligned} \tag{3.7}$$

Analogamente, permutando i vertici, si possono ottenere altri due interferometri di Michelson:

$$\begin{aligned}\sigma_Y(t, \vec{x}_2) &\equiv s_Y(t, \vec{x}_2) - n_Y(t, \vec{x}_2) \\ &= \Delta T_{23}(t - 2L) + \Delta T_{32}(t - L) - \Delta T_{21}(t - 2L) - \Delta T_{12}(t - L),\end{aligned} \tag{3.8}$$

$$\begin{aligned}\sigma_Z(t, \vec{x}_3) &\equiv s_Z(t, \vec{x}_3) - n_Y(t, \vec{x}_3) \\ &= \Delta T_{31}(t - 2L) + \Delta T_{13}(t - L) - \Delta T_{32}(t - 2L) - \Delta T_{23}(t - L).\end{aligned} \tag{3.9}$$

Usando l'eq. (2.12) e le definizioni in (3.6) è possibile ricavare la forma analitica compatta di (3.7),(3.8),(3.9):

$$\sigma_j(t, \vec{x}_j) = \frac{1}{2}\sum_A \int_{-\infty}^{+\infty} df\, e^A_{ab}\, \tilde{h}_A(t - L, f)\, Q^j_{ab}(\vec{r}_j; \vec{U}_i; f), \tag{3.10}$$

con

$$Q^1_{ab}\left(\vec{x}_1; \hat{U}_i; f\right) = Q^X \equiv \left[T\left(f, \hat{w}\cdot\hat{U}_1\right)\hat{U}^a_1\hat{U}^b_1 - T\left(f, -\hat{w}\cdot\hat{U}_3\right)\hat{U}^a_3\hat{U}^b_3\right],$$

$$Q^2_{ab}\left(\vec{x}_2;\hat{U}_i;f\right) = Q^Y \equiv \left[T\left(f,\hat{w}\cdot\hat{U}_2\right)\hat{U}^a_2\hat{U}^b_2 - T\left(f,-\hat{w}\cdot\hat{U}_1\right)\hat{U}^a_1\hat{U}^b_1\right],$$
$$Q^3_{ab}\left(\vec{x}_3;\hat{U}_i;f\right) = Q^Z \equiv \left[T\left(f,\hat{w}\cdot\hat{U}_3\right)\hat{U}^a_3\hat{U}^b_3 - T\left(f,-\hat{w}\cdot\hat{U}_2\right)\hat{U}^a_2\hat{U}^b_2\right]. \tag{3.11}$$

È dunque possibile calcolare le funzioni di risposta angolari nel caso di correlazione tra due canali, che per la base XYZ prendono la seguente forma [9]:

$$F^{OO}_A(f,\theta,\phi) = \left|\frac{1}{2}Q^O_{ab}\left(\vec{x}_i;\hat{U}_j;f\right)\mathrm{e}_{ab,A}(f)\right|^2, \tag{3.12}$$

con $O = X,Y,Z$ e $A = +,\times,R,L$. Queste sono state calcolate in forma analitica nel limite di bassa frequenza, quando dunque la funzione di trasferimento assume il valore costante pari a 1, e ponendo l'angolo di polarizzazione ψ pari a $\frac{\pi}{2}$, ottenendo i seguenti risultati:

$$F^{XX}_+(\theta,\phi) = \frac{1}{64}\left|3\cos^2\theta\cos^2\phi - \sqrt{3}\cos\phi\sin 2\theta - 3\left(\sin^2\theta+\sin^2\phi\right)\right|^2, \tag{3.13}$$

$$F^{YY}_+(\theta,\phi) = \frac{1}{64}\left|3\cos^2\theta\cos^2\phi + \sqrt{3}\cos\phi\sin 2\theta - 3\left(\sin^2\theta+\sin^2\phi\right)\right|^2, \tag{3.14}$$

$$F^{ZZ}_+(\theta,\phi) = \frac{3}{4}\left|\cos\theta\cos\phi\sin\theta\right|^2, \tag{3.15}$$

$$F^{XX}_\times(\theta,\phi) = \frac{1}{16}\left|(-3\cos\theta\cos\phi + \sqrt{3}\sin\theta)\sin\phi\right|^2, \tag{3.16}$$

$$F^{YY}_\times(\theta,\phi) = \frac{1}{16}\left|(3\cos\theta\cos\phi + \sqrt{3}\sin\theta)\sin\phi\right|^2, \tag{3.17}$$

$$F^{ZZ}_\times(\theta,\phi) = \frac{3}{4}\left|\sin\theta\sin\phi\right|^2, \tag{3.18}$$

$$F^{XX}_{R,L}(\theta,\phi) = \frac{1}{128}\left|3\sin^2\theta + 2\sqrt{3}\sin\theta(\cos\theta\cos\phi - i\sin\phi) - 3(\cos\theta\cos\phi - i\sin\phi)^2\right|^2, \tag{3.19}$$

$$F^{YY}_{R,L}(\theta,\phi) = \frac{1}{128}\left|3\sin^2\theta - 2\sqrt{3}\sin\theta(\cos\theta\cos\phi - i\sin\phi) - 3(\cos\theta\cos\phi - i\sin\phi)^2\right|^2, \tag{3.20}$$

$$F^{ZZ}_{R,L}(\theta,\phi) = \frac{3}{8}\left|\sin\theta(\cos\theta\cos\phi - i\sin\phi)\right|^2. \tag{3.21}$$

Queste funzioni di risposta angolari sono state rappresentate nei grafici in figura da 3.1 a 3.9, al fine di evidenziarne la dipendenza dagli angoli polare θ e azimutale ϕ. In questi grafici le regioni più chiare corrispondono a quelle di maggior sensibilità. A esempio, osservando i grafici con i tensori di polarizzazione nella base R,L, figure 3.7, 3.8, 3.9, si nota come queste regioni corrispondano ad onde gravitazionali provenienti dalla direzione perpendicolare al detector, caratterizzate dagli angoli $\theta = \frac{\pi}{2}$ e $\phi = \frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi$. Poiché il rivelatore è stato posto sul piano $x - z$, questa direzione corrisponde all'asse y.

La funzione di risposta integrata è definita integrando la funzione di risposta angolare su θ e ϕ, rispettivamente angolo polare e azimutale [9]:

$$R^{OO}_A(f) \equiv \frac{1}{4\pi}\int_0^\pi d\theta\sin\theta\int_0^{2\pi} d\phi\, F^{OO}_A(f,\theta,\phi), \tag{3.22}$$

ancora con $O = X, Y, Z$ e $A = +, \times, R, L$. Eseguendo l'integrale numerico è possibile disegnare il grafico delle funzioni di risposta in funzione della frequenza, il cui risultato è presentato nelle figure da 3.10 a 3.14. Come si nota da questi grafici, le funzioni di risposta nei canali X,Y,Z assumono un valore costante per $f << f^*$, mentre per $f > f^*$ decadono velocemente. Questi grafici, inoltre, evidenziano come la regione di frequenze in cui LISA è maggiormente sensibile sia quella del milli-Hertz.

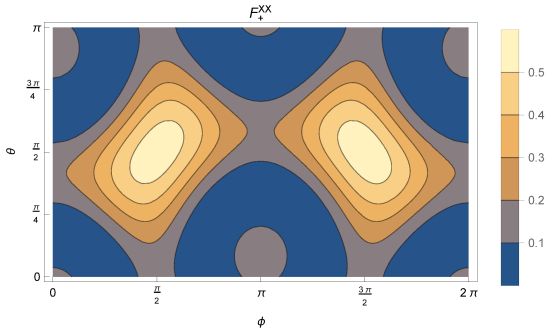

Figura 3.1: Dipendenza direzionale di F_+^{XX}

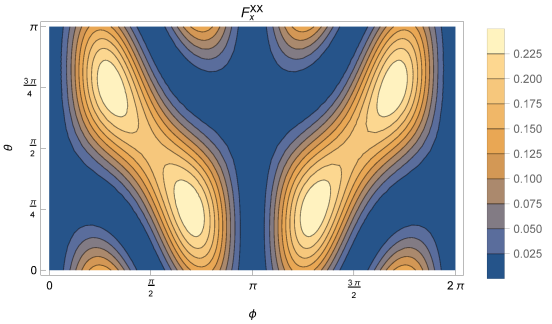

Figura 3.2: Dipendenza direzionale di $F_\times^{XX}$

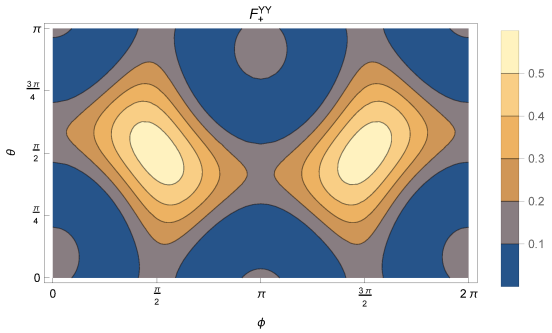

Figura 3.3: Dipendenza direzionale di F_+^{YY}

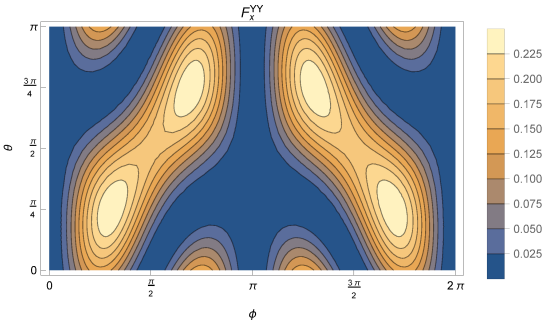

Figura 3.4: Dipendenza direzionale di $F_\times^{YY}$

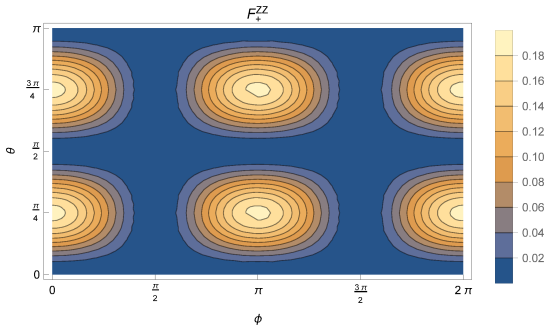

Figura 3.5: Dipendenza direzionale di F_+^{ZZ}

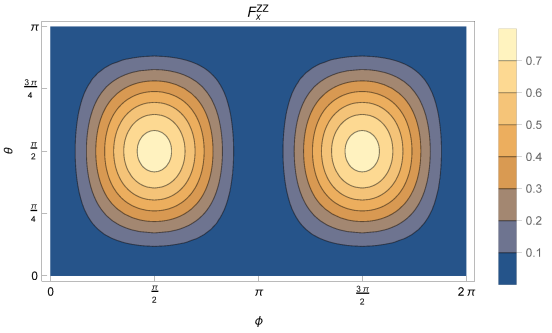

Figura 3.6: Dipendenza direzionale di $F_\times^{ZZ}$

3.3 Definizione dei canali A,E,T e correlazione tra due canali

A partire da quanto definito sopra è possibile costruire gli *Standard LISA output channels* A, E e T:

$$\Sigma_1 \equiv \Sigma_A = \frac{1}{3}\left(2\sigma_X - \sigma_Y - \sigma_Z\right),$$

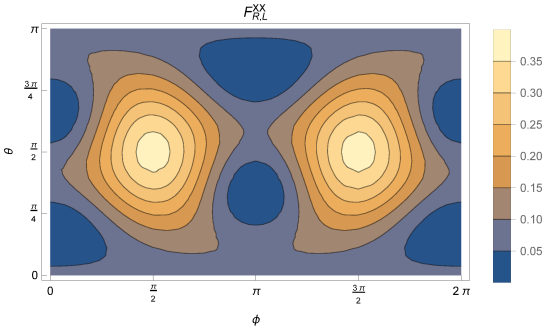

Figura 3.7: Dipendenza direzionale di $F^{XX}_{R,L}$

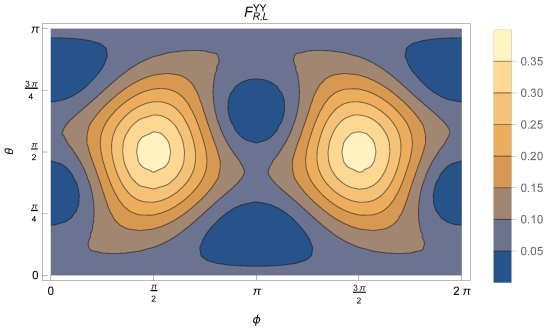

Figura 3.8: Dipendenza direzionale di $F^{YY}_{R,L}$

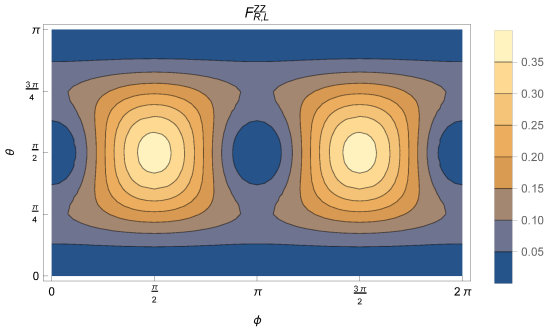

Figura 3.9: Dipendenza direzionale di $F^{ZZ}_{R,L}$

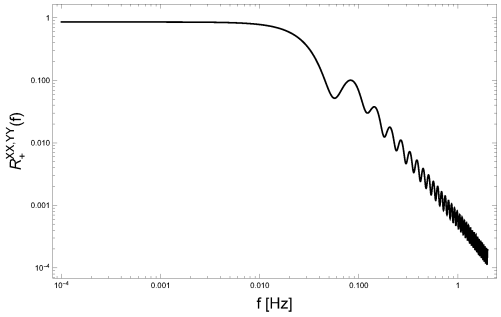

Figura 3.10: Funzione di risposta integrata per O=X,Y e A=+

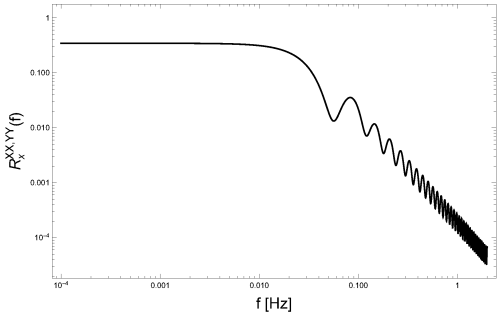

Figura 3.11: Funzione di risposta integrata per O=X,Y e A=×

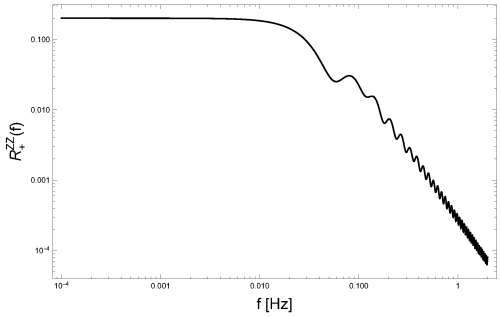

Figura 3.12: Funzione di risposta integrata per O=Z e A=+

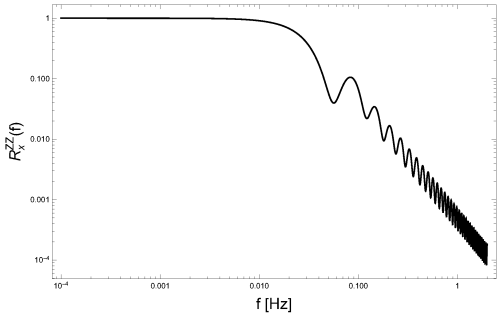

Figura 3.13: Funzione di risposta integrata per O=Z e A=×

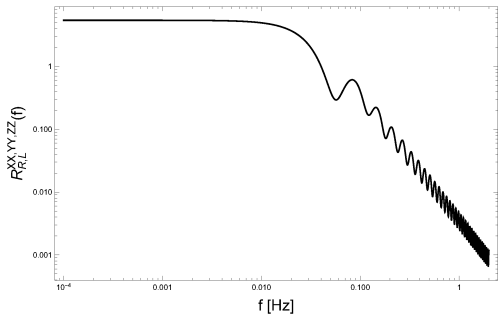

Figura 3.14: Funzione di risposta integrata per O=X,Y,Z e A=R,L

$$\Sigma_2 \equiv \Sigma_E = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\sigma_Z - \sigma_Y\right),$$
$$\Sigma_3 \equiv \Sigma_T = \frac{1}{3}\left(\sigma_X + \sigma_Y + \sigma_Z\right), \tag{3.23}$$

che equivalgono ad una rotazione della base XYZ e, come detto nella sezione 3.1 permettono di diagonalizzare la matrice 3.24, rendendo i canali statisticamente indipendenti.

In particolare la matrice 3.24 in questo caso prende la seguente forma:

$$\langle s_O(t) s_{O'}(t')\rangle = \frac{2}{3}\begin{pmatrix} C_1 - C_2 & 0 & 0 \\ 0 & C_1 - C_2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{C_1}{2} + C_2 \end{pmatrix}, \tag{3.24}$$

con $O = \{A, E, T\}$.

Anche questi canali possono essere espressi in notazione compatta:

$$\Sigma_O(t, \vec{x}_j) = \frac{1}{2}\sum_A \int_{-\infty}^{+\infty} df\, e^A_{ab}\, \tilde{h}_A(t - L, f)\, c^O_i\, Q^i_{ab}(\vec{x}_j; \vec{U}_i; f), \tag{3.25}$$

dove $O = \{A, E, T\}$ denomina i canali e la matrice c ha la seguente forma:

$$c = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}. \tag{3.26}$$

Per il canale AET le funzioni di risposta angolari per la correlazione tra due canali prendono la seguente forma [9]:

$$F^{OO}_A(f, \theta, \phi) = \left|\frac{c^O_i}{2} Q^i_{ab}\left(\vec{x}_i; \hat{U}_j; f\right) \mathrm{e}_{ab,A}(f)\right|^2, \tag{3.27}$$

con $O = A, E, T$ e $A = +, \times, R, L$.

Anche in questo caso le funzioni di risposta angolari sono state calcolate in forma analitica nel limite di bassa frequenza e ponendo $\psi = \frac{\pi}{2}$, ottenendo i seguenti risultati:

$$F^{AA}_+(f, \theta, \phi) = \frac{1}{64}\left|3\cos^2\theta\cos^2\phi - \sqrt{3}\cos\phi\sin 2\theta - 3\left(\sin^2\theta + \sin^2\phi\right)\right|^2, \tag{3.28}$$

$$F^{EE}_+(f, \theta, \phi) = \frac{1}{64}\left|\sqrt{3}\cos^2\theta\cos^2\phi + 6\cos\theta\cos\phi\sin\theta - \sqrt{3}\left(\sin^2\theta + \sin^2\phi\right)\right|^2, \tag{3.29}$$

$$F_{\times}^{AA}(f,\theta,\phi) = \frac{1}{16}\left|(-3\cos\theta\cos\phi + \sqrt{3}\sin\theta)\sin\phi\right|^2, \tag{3.30}$$

$$F_{\times}^{EE}(f,\theta,\phi) = \frac{1}{16}\left|(\sqrt{3}\cos\theta\cos\phi + 3\sin\theta)\sin\phi\right|^2, \tag{3.31}$$

$$F_{R,L}^{AA}(f,\theta,\phi) = \frac{1}{128}\left|3\sin^2\theta + 2\sqrt{3}\sin\theta(\cos\theta\cos\phi - i\sin\phi) - 3(\cos\theta\cos\phi - i\sin\phi)^2\right|^2, \tag{3.32}$$

$$F_{R,L}^{EE}(f,\theta,\phi) = \frac{1}{128}\left|\frac{1}{4}\sqrt{3}(3+\cos 2\theta)\cos 2\phi - \frac{3}{2}\sqrt{3}\sin^2\theta + 6i\sin\theta\sin\phi + 2\cos\theta\cos^{\phi}\Big(3\sin\theta + i\sqrt{3}\sin\phi\Big)\right|^2, \tag{3.33}$$

$$F_{+,\times,R,L}^{TT}(f,\theta,\phi) = 0. \tag{3.34}$$

Anche in questo caso vengono mostrati i grafici delle funzioni di risposta, da figura 3.15 a 3.20, per evidenziarne la dipendenza angolare. In questo caso è possibile fare delle considerazioni simili a quelle presenti nella sezione 3.2. In particolare, dalle figure 3.19 e 3.20, si nota come il contributo maggiore venga ancora dato da onde gravitazionali che viaggiano in direzione ortogonale al piano dell'interferometro [9].

La funzione di risposta integrata è ancora definita integrando la funzione di risposta angolare su θ e ϕ, rispettivamente angolo polare e azimutale [9]:

$$R_A^{OO}(f) \equiv \frac{1}{4\pi}\int_0^{\pi} d\theta \sin\theta \int_0^{2\pi} d\phi\, F_A^{OO}(f,\theta,\phi), \tag{3.35}$$

di nuovo con $O = A, E, T$ e $A = +, \times, R, L$.

Eseguendo l'integrale numerico è possibile disegnare il grafico della funzione di risposta in funzione della frequenza per la correlazione tra coppie diverse di canali, ottenendo quanto presentato nelle figure da 3.21 a 3.28.

Osservando le figure 3.25, 3.26 e 3.28 si può notare come il canale T sia notevolmente meno sensibile di rispetto ai canali A e E [14]. La sensibilità degli altri canali alle varie polarizzazioni, invece, risulta paragonabile (figure 3.21, 3.23, 3.22, 3.24, 3.27). Si può inoltre notare come le funzioni di risposta (escluso il canale T, che a bassa frequenza tende a zero come f^{-6} [14]) siano costanti nel limite di $f << f^*$, mentre decadano come f^{-2} per $f > f^*$ [14]. Questo evidenzia ancora una volta come la regione di maggior sensibilità di LISA sia quella del milli-Hertz.

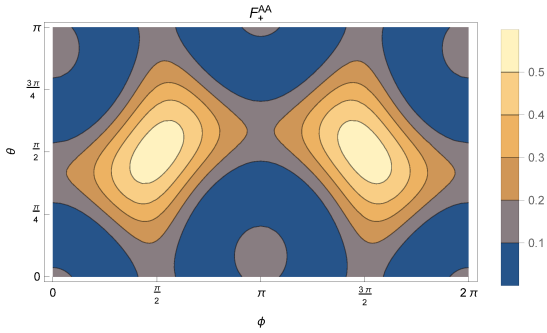

Figura 3.15: Dipendenza direzionale di F_+^{AA}

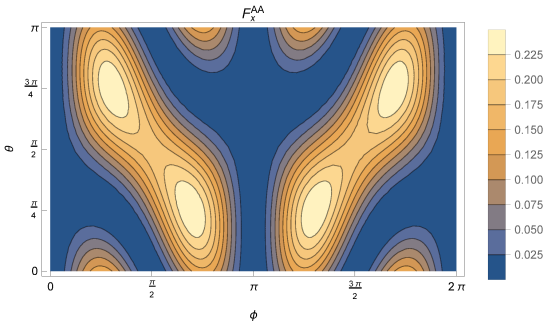

Figura 3.16: Dipendenza direzionale di $F_\times^{AA}$

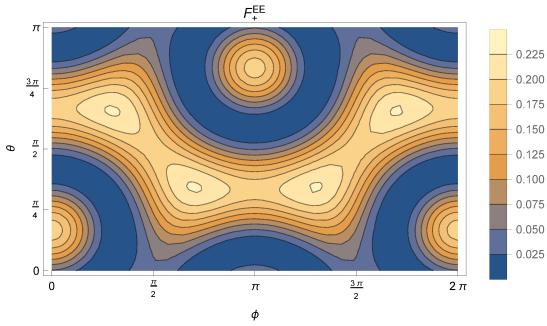

Figura 3.17: Dipendenza direzionale di F_+^{EE}

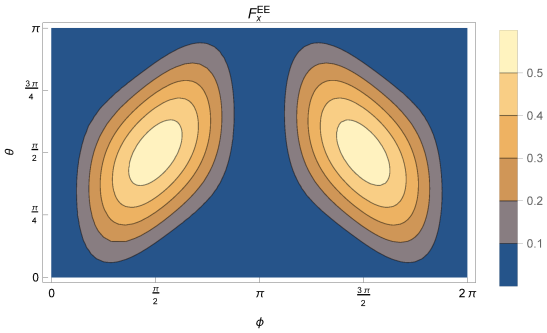

Figura 3.18: Dipendenza direzionale di $F_\times^{EE}$

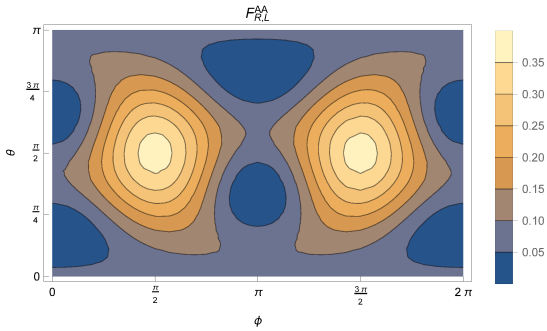

Figura 3.19: Dipendenza direzionale di $F_{R,L}^{AA}$

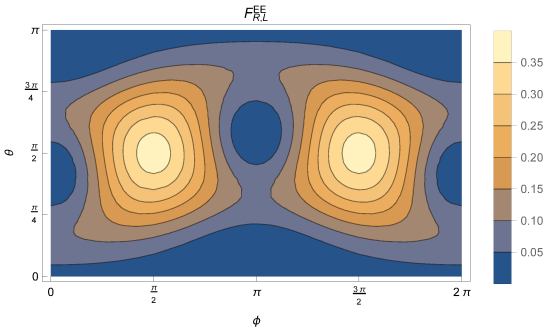

Figura 3.20: Dipendenza direzionale di $F_{R,L}^{EE}$

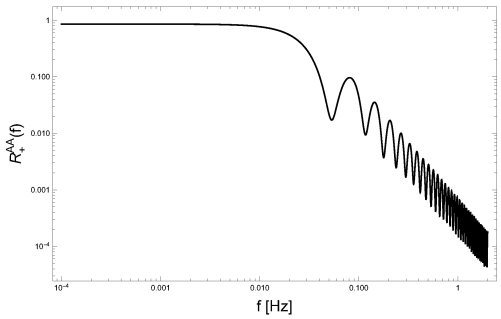

Figura 3.21: Funzione di risposta integrata per O=A e A=+

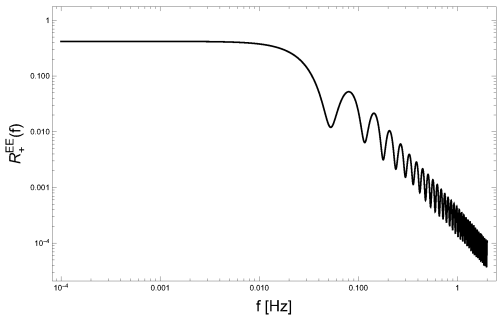

Figura 3.22: Funzione di risposta integrata per O=E e A=+

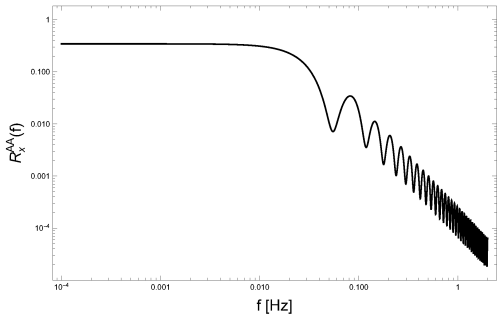

Figura 3.23: Funzione di risposta integrata per O=A e A=×

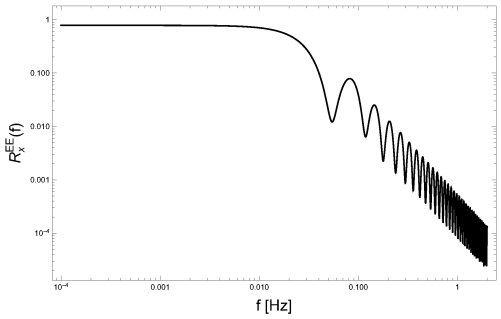

Figura 3.24: Funzione di risposta integrata per O=E e A=×

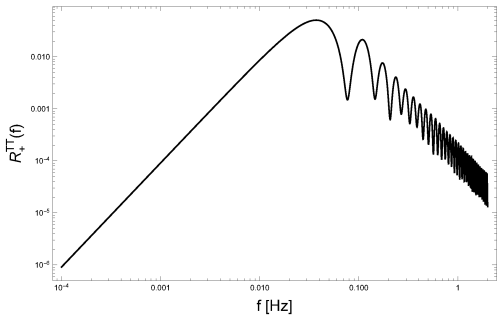

Figura 3.25: Funzione di risposta integrata per O=T e A=+

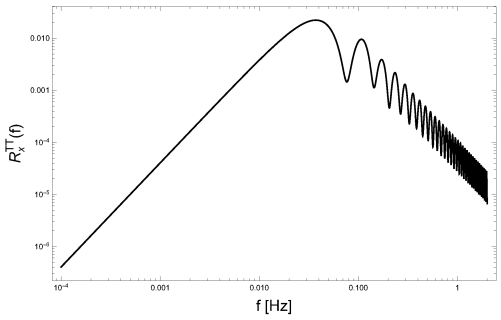

Figura 3.26: Funzione di risposta integrata per O=T e A=×

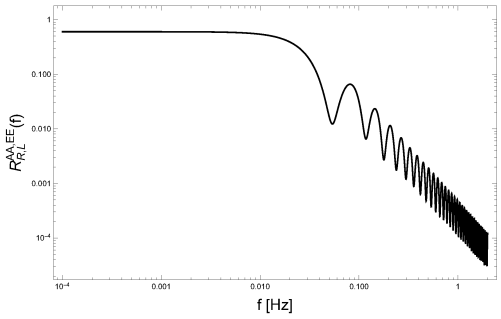

Figura 3.27: Funzione di risposta integrata per O=A,E e A=R,L

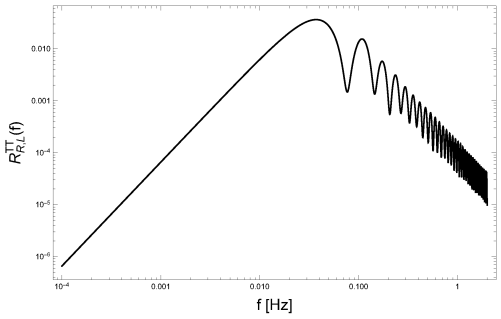

Figura 3.28: Funzione di risposta integrata per O=T e A=R,L

Capitolo 4

Conclusioni

In questa tesi si sono calcolate in primo luogo le funzioni di risposta dell'interferometro LISA per il singolo canale TDI nelle polarizzazioni + e $\times$ in due sistemi di riferimento: quello dell'onda e quello del detector. Queste funzioni sono state espresse sia in forma analitica che numerica, verificando che seguono in entrambi i casi lo stesso andamento, come ci si attende considerando la definizione invariante della funzione di risposta. Si sono poi calcolate, sia analiticamente che numericamente, le funzioni di risposta nel caso di correlazione tra due canali, sia nella base X, Y, Z, che in quella A, E, T, per le polarizzazioni $+, \times, R, L$. Queste sono state anche rappresentate in funzione degli angoli θ e ϕ, rispettivamente polare e azimutale, per evidenziare le regioni di maggiore sensibilità per le diverse combinazioni di canali e polarizzazioni, trovando che in generale LISA è sensibile soprattutto ad onde che viaggiano perpendicolarmente al piano dell'interferometro. Infine, a partire dall'andamento delle funzioni di risposta integrate, si è osservato come la sensibilità del canale T sia inferiore a quella dei canali A e E.

Bibliografia

[1] Neil J. Cornish e Louis J. Rubbo. "Publisher's Note: LISA response function [Phys. Rev. D 67, 022001 (2003)]". In: 67.2, 029905 (gen. 2003), p. 029905. DOI: 10.1103/PhysRevD.67.029905. arXiv: gr-qc/0209011 [gr-qc].

[2] Alberto Sesana et al. "Low-Frequency Gravitational Radiation from Coalescing Massive Black Hole Binaries in Hierarchical Cosmologies". In: 611.2 (ago. 2004), pp. 623–632. DOI: 10.1086/422185. arXiv: astro-ph/0401543 [astro-ph].

[3] M. P. Hobson, G. P. Efstathiou, A. N. Lasenby. *General Relativity, an Introduction for Physicists*. Cambridge University Press, 2006.

[4] Michele Maggiore. *Gravitational Waves, Theory and Experiments*. Oxford University Press, 2008.

[5] Alberto Sesana. "Prospects for Multiband Gravitational-Wave Astronomy after GW150914". In: 116.23, 231102 (giu. 2016), p. 231102. DOI: 10.1103/PhysRevLett.116.231102. arXiv: 1602.06951 [gr-qc].

[6] Pau Amaro-Seoane et al. "Laser Interferometer Space Antenna". In: *arXiv e-prints*, arXiv:1702.00786 (feb. 2017), arXiv:1702.00786. arXiv: 1702.00786 [astro-ph.IM].

[7] Stanislav Babak et al. "Science with the space-based interferometer LISA. V. Extreme mass-ratio inspirals". In: 95.10, 103012 (mag. 2017), p. 103012. DOI: 10.1103/PhysRevD.95.103012. arXiv: 1703.09722 [gr-qc].

[8] Joseph D. Romano e Neil. J. Cornish. "Detection methods for stochastic gravitational-wave backgrounds: a unified treatment". In: *Living Reviews in Relativity* 20.1, 2 (apr. 2017), p. 2. DOI: 10.1007/s41114-017-0004-1. arXiv: 1608.06889 [gr-qc].

[9] Nicola Bartolo et al. "Probing non-Gaussian stochastic gravitational wave backgrounds with LISA". In: 2018.11, 034 (nov. 2018), p. 034. DOI: 10.1088/1475-7516/2018/11/034. arXiv: 1806.02819 [astro-ph.CO].

[10] B. P. Abbott et al. "Search for the isotropic stochastic background using data from Advanced LIGO's second observing run". In: 100.6, 061101 (set. 2019), p. 061101. DOI: 10.1103/PhysRevD.100.061101. arXiv: 1903.02886 [gr-qc].

[11] Chiara Caprini et al. "Reconstructing the spectral shape of a stochastic gravitational wave background with LISA". In: *JCAP* 11 (2019), p. 017. DOI: 10.1088/1475-7516/2019/11/017. arXiv: 1906.09244 [astro-ph.CO].

[12] Valeriya Korol, Elena M. Rossi e Enrico Barausse. "A multimessenger study of the Milky Way's stellar disc and bulge with LISA, Gaia, and LSST". In: 483.4 (mar. 2019), pp. 5518–5533. DOI: 10.1093/mnras/sty3440. arXiv: 1806.03306 [astro-ph.GA].

[13] Dicong Liang et al. "Frequency response of space-based interferometric gravitational-wave detectors". In: 99.10, 104027 (mag. 2019), p. 104027. DOI: 10.1103/PhysRevD.99.104027. arXiv: 1901.09624 [gr-qc].

[14] Tristan L. Smith e Robert Caldwell. "LISA for Cosmologists: Calculating the Signal-to-Noise Ratio for Stochastic and Deterministic Sources". In: *Phys. Rev. D* 100.10 (2019), p. 104055. DOI: 10.1103/PhysRevD.100.104055. arXiv: 1908.00546 [astro-ph.CO].

[15] Valerie Domcke et al. "Measuring the net circular polarization of the stochastic gravitational wave background with interferometers". In: 2020.5, 028 (mag. 2020), p. 028. DOI: 10.1088/1475-7516/2020/05/028. arXiv: 1910.08052 [astro-ph.CO].

[16] Lorenzo Valbusa Dall'Armi et al. "The Imprint of Relativistic Particles on the Anisotropies of the Stochastic Gravitational-Wave Background". In: *arXiv e-prints*, arXiv:2007.01215 (lug. 2020), arXiv:2007.01215. arXiv: 2007.01215 [astro-ph.CO].