

Università degli Studi di Padova

Dipartimento di Tecnica e Gestione dei Sistemi Industriali

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria dell'Innovazione del Prodotto

Approcci locali per la previsione della  
resistenza a fatica ad alta temperatura di  
componenti intagliati

Relatore: *Ch.mo Prof.* Filippo Berto

Laureando: Luca Pasqualini

ANNO ACCADEMICO 2014/2015



# Indice

Indice vii

|          |  |          |
|----------|--|----------|
| <b>I</b> | <b>Equazioni base di meccanica dei solidi e rassegna di alcune soluzioni note per problemi lineari</b> | <b>1</b> |
| <b>1</b> | <b>Elasticità piana</b>  | <b>3</b> |
| 1.1      | Relazioni base . . . . .   | 3        |
| 1.2      | Deformazione piana . . . . .   | 4        |
| 1.3      | Tensione piana . . . . .   | 5        |
| 1.4      | Equilibrio, Airy e congruenza . . . . .  | 5        |
| 1.4.1    | Coordinate cartesiane . . . . .  | 5        |
| 1.4.2    | Coordinate polari . . . . .  | 9        |
| 1.5      | Rotazione del sistema di riferimento . . . . .   | 14       |
| 1.6      | Metodo dei potenziali complessi . . . . .  | 18       |
| 1.6.1    | Alcune definizioni . . . . .   | 18       |
| 1.6.2    | Condizioni di Cauchy-Riemann . . . . .   | 19       |
| 1.6.3    | Rappresentazione complessa delle tensioni in coordinate cartesiane . . . . .                           | 20       |
| 1.6.4    | Rappresentazione complessa delle tensioni in coordinate polari . . . . .                               | 23       |

|          |   |           |
|----------|---|-----------|
| <b>2</b> | <b>Singularità per la cricca</b>                                | <b>25</b> |
| 2.1      | La soluzione di Westergaard . . . . .                           | 25        |
| 2.2      | Uso dei potenziali complessi . . . . .                          | 31        |
| <b>3</b> | <b>Singularità per l'intaglio V</b>                             | <b>35</b> |
| 3.1      | La soluzione di Williams . . . . .                              | 35        |
| 3.2      | La soluzione di England . . . . .                               | 41        |
| <b>4</b> | <b>Singularità per l'intaglio V raccordato</b>                  | <b>49</b> |
| 4.1      | La soluzione di Lazzarin-Tovo . . . . .                         | 49        |
| 4.1.1    | Formulazione del problema . . . . .                             | 49        |
| 4.1.2    | Condizioni al contorno . . . . .                                | 51        |
| 4.1.3    | Determinazione degli esponenti e delle costanti . . . . .       | 51        |
| 4.1.4    | Formulazione generale delle componenti di tensione . . . . .    | 52        |
| 4.1.5    | Determinazione del parametro incognito $a$ . . . . .            | 53        |
| 4.1.6    | Confronto con altre soluzioni presenti in letteratura . . . . . | 54        |
| 4.2      | La soluzione di Filippi-Lazzarin . . . . .                      | 56        |
| 4.2.1    | Introduzione . . . . .  | 56        |
| 4.2.2    | Formulazione del problema . . . . .                             | 56        |
| 4.2.3    | Condizioni al contorno . . . . .                                | 57        |
| 4.2.4    | Determinazione degli esponenti e delle costanti . . . . .       | 58        |
| 4.2.5    | Formulazione generale delle componenti di tensione . . . . .    | 60        |
| 4.2.6    | Determinazione del parametro incognito $a$ . . . . .            | 61        |
| 4.2.7    | Confronto con altre soluzioni presenti in letteratura . . . . . | 62        |
| <b>5</b> | <b>SED</b>  | <b>63</b> |
| 5.1      | SED basato su Beltrami . . . . .                                | 63        |
| 5.2      | SED basato su von Mises . . . . .                               | 69        |
| <b>A</b> | <b>Raggio caratteristico del materiale</b>                      | <b>73</b> |
| A.1      | Calcolo del valore medio del SED per un provino piano . . . . . | 73        |

|           |   |           |
|-----------|---|-----------|
| A.2       | Calcolo del valore medio del SED per un provino criccato . . .                                    | 74        |
| A.3       | Determinazione di $R_c$ . . . . .   | 75        |
| <b>B</b>  | <b>Integrali delle funzioni angolari</b>  | <b>77</b> |
| <br>      |   |           |
| <b>II</b> | <b>Sintesi di alcuni dati di resistenza a fatica ad alta temperatura di componenti intagliati</b> | <b>79</b> |
| <br>      |   |           |
| <b>6</b>  | <b>Louks R. e Susmel L.</b>   | <b>81</b> |
| 6.1       | Introduzione . . . . .  | 82        |
| 6.2       | Premesse analitiche della TCD . . . . .   | 83        |
| 6.3       | Dettagli sperimentali . . . . .   | 87        |
| 6.4       | Validazione dei dati sperimentali . . . . .   | 88        |
| 6.5       | Discussioni . . . . .   | 93        |
| 6.6       | Conclusioni . . . . .   | 95        |
| <br>      |   |           |
| <b>7</b>  | <b>Valutazione del lavoro di Susmel</b>   | <b>97</b> |
| 7.1       | C45 . . . . .   | 97        |
| 7.1.1     | Blunt U-notch . . . . .   | 97        |
| 7.1.2     | Sharp U-notch . . . . .   | 98        |
| 7.1.3     | Sharp V-notch . . . . .   | 98        |
| 7.2       | Inconel 718 . . . . .   | 98        |
| 7.2.1     | C1-notch . . . . .  | 98        |
| 7.2.2     | C2-notch . . . . .  | 98        |
| 7.2.3     | C3-notch . . . . .  | 98        |
| 7.2.4     | C4-notch . . . . .  | 99        |
| 7.2.5     | C5-notch . . . . .  | 99        |
| 7.2.6     | C6-notch . . . . .  | 99        |
| 7.3       | DZ125 . . . . .   | 99        |
| 7.3.1     | U3-notch . . . . .  | 99        |

|            |   |            |
|------------|---|------------|
| 7.3.2      | U4-notch . . . . .  | 99         |
| 7.3.3      | V1-notch . . . . .  | 100        |
| 7.4        | Riassunto dei risultati . . . . .   | 100        |
| 7.5        | Conclusioni . . . . .   | 100        |
| <b>8</b>   | <b>Sintesi in energia</b>   | <b>105</b> |
| 8.1        | Notched samples of C45 tested at $T = 250^{\circ}\text{C}$ . . . . .  | 106        |
| 8.2        | Notched samples of Inconel 718 tested at $T = 500^{\circ}\text{C}$ . . . . .  | 107        |
| 8.3        | Notched samples of DZ125 tested at $T = 850^{\circ}\text{C}$ . . . . .  | 108        |
| 8.4        | Conclusioni . . . . .   | 109        |
| <b>III</b> | <b>Valutazione della sensibilità all'intaglio per componenti intagliati mediante approcci probabilistici contemplanti la dimensione dell'intaglio e la microstruttura</b> | <b>111</b> |
| <b>9</b>   | <b>Approcci probabilistici</b>  | <b>113</b> |
| 9.1        | La proposta di Deyber . . . . .   | 114        |
| 9.1.1      | Modelli su scala microscopica . . . . .   | 115        |
| 9.1.2      | Modelli su scala macroscopica . . . . .   | 117        |
| 9.1.3      | Probabilità di presenza della particella . . . . .  | 117        |
| 9.1.4      | Probabilità globale di rottura . . . . .  | 118        |
| 9.2        | La proposta di Pineau . . . . .   | 119        |
| 9.2.1      | Introduzione . . . . .  | 120        |
| 9.2.2      | Nucleazione della cricca di fatica dalle inclusioni . . . . .   | 121        |
| 9.2.3      | Stima della vita in servizio . . . . .  | 121        |
| 9.3        | La proposta di Doudard . . . . .  | 124        |
| 9.4        | La proposta di Flaceliere e Morel . . . . .   | 125        |
| 9.5        | La proposta di Delahay e Palin-Luc . . . . .  | 127        |

|   |            |
|---|------------|
| <b>10 Zone plastiche di danneggiamento</b>            | <b>129</b> |
| 10.1 La definizione di Ostash - 2000 . . . . .        | 132        |
| 10.2 La definizione di Owolabi - 2011 . . . . .       | 138        |
| 10.3 La definizione di Owolabi - 2015 . . . . .       | 140        |
| <b>11 Cenni di micromeccanica computazionale</b>      | <b>143</b> |
| 11.1 Il modello di Owolabi - 2010 . . . . .           | 143        |
| 11.1.1 Plasticità cristallina . . . . .               | 143        |
| 11.1.2 Implementazione agli elementi finiti . . . . . | 145        |
| 11.2 Il modello di Owolabi - 2011 . . . . .           | 148        |
| 11.3 Il modello di Owolabi - 2015 . . . . .           | 149        |
| 11.3.1 Plasticità cristallina . . . . .               | 149        |
| <b>12 Determinazione del <math>K_f</math></b>         | <b>153</b> |
| 12.1 La soluzione di Ostash - 2000 . . . . .          | 154        |
| 12.2 La soluzione di Owolabi - 2010 . . . . .         | 161        |
| 12.3 La soluzione di Owolabi - 2011 . . . . .         | 164        |
| 12.4 La soluzione di Owolabi - 2015 . . . . .         | 166        |





# Elenco delle figure

|     |   |    |
|-----|---|----|
| 1.1 | Elemento piano infinitesimo descritto in un sistema di riferimento a coordinate cartesiane. . . . .   | 7  |
| 1.2 | Elemento piano infinitesimo descritto in un sistema di riferimento a coordinate polari. . . . .   | 15 |
| 1.3 | Sistema di riferimento di origine $Oxy$ e di destinazione $Ox'y'$ . . . . .   | 15 |
| 2.1 | Sistema di riferimento e configurazione del problema. . . . .   | 28 |
| 3.1 | Configurazione geometrica di un intaglio a spigolo vivo e rappresentazione del sistema di riferimento polare adottato. . . . .  | 36 |
| 3.2 | Grado di singolarità delle distribuzioni di tensione di Modo I e Modo II. Queste ultime cessano di essere singolari quando l'angolo di apertura dell'intaglio è maggiore di $102.6^\circ$ . . . . . | 42 |
| 3.3 | Rappresentazione delle condizioni al contorno imposte da England. . . . .   | 45 |
| 4.1 | Configurazione geometrica di un intaglio raccordato e rappresentazione del sistema di riferimento polare adottato. . . . .  | 50 |
| 5.1 | Volume di controllo per un intaglio a spigolo vivo. . . . .   | 68 |
| 6.1 | Sistema di riferimento e formulazioni disponibili per la Teoria della Distanza Critica. . . . .   | 85 |

|      |  |     |
|------|--|-----|
| 6.2  | Determinazione della distanza critica utilizzando due curve a fatica. . . . .  | 86  |
| 6.3  | Geometria dei provini testati in C45. . . . .  | 87  |
| 6.4  | Campi di tensione dei quattro provini in C45 testati e determinazione della distanza critica. . . . .  | 89  |
| 6.5  | Riassunto dei risultati generati da [1] testando ad 250 °C, provini intagliati in C45; accuratezza della TCD applicata con i metodi PM, LM ed AM. . . . .                        | 89  |
| 6.6  | Geometria dei provini testati in Inconel 718. . . . .  | 90  |
| 6.7  | Riassunto dei risultati generati da [2] testando ad 500 °C, provini cilindrici intagliati in Inconel 718; accuratezza della TCD applicata con i metodi PM, LM ed AM. . . . .     | 90  |
| 6.8  | Geometria dei provini testati in DZ125. . . . .  | 91  |
| 6.9  | Riassunto dei risultati generati da [3] testando ad 850 °C, provini intagliati in DZ125; accuratezza della TCD applicata con i metodi PM, LM ed AM. . . . .                      | 91  |
| 6.10 | Campi di tensione dei sette provini in Inconel 718 testati e determinazione della distanza critica. . . . .  | 92  |
| 6.11 | Campi di tensione dei quattro provini in DZ125 testati e determinazione della distanza critica. . . . .  | 93  |
| 6.12 | Precisione complessiva della TCD applicata nella forma di PM, LM ed AM. . . . .  | 94  |
| 10.1 | Rappresentazione della zona di processo e distribuzione delle tensioni lungo la bisettrice dell'intaglio. . . . .  | 130 |
| 10.2 | Rappresentazione qualitativa della zona di processo ( $d^*$ ), zona plastica ciclica ( $r_{pc}$ ) e zona plastica ciclica ( $r_{pm}$ ). . . . .                                  | 131 |
| 10.3 | Dipendenza di $d^*$ da $\sigma_{YS}$ e $\sigma_U$ per leghe di alluminio, acciai e ghise per fatica a basso (marcatori vuoti) ed alto (marcatori pieni) numero di cicli. . . . . | 134 |

|  |     |
|--|-----|
| 10.4 Dipendenza di $N_i$ da $\rho$ per la dimensione $d^*$ della zona di processo. . . . .   | 135 |
| 10.5 Schizzo della zona di processo del danneggiamento di fatica $V_d$ .141  |     |
| 11.1 Cinematiche della deformazione elasto-plastica di solidi cristallini deformati dallo scorrimento cristallografico. . . . .  | 144 |
| 11.2 Decomposizione del dominio di metà piastra indebolita da un intaglio semicircolare (la piastra è divisa in tre differenti regioni che impiegano differenti modelli elastici ed elasto-plastici). Le condizioni al contorno sono di simmetria. . . . . | 147 |
| 11.3 Sistemi di scorrimento nella superlega a base niichel. . . . .  | 150 |
| 12.1 Risultati sperimentali per l'acciaio dolce 08kp, stabiliti su provini CT con raggio all'apice dell'intaglio di $\rho = 0.15$ mm ( $\blacktriangle$ ), $\rho = 0.75$ mm ( $\blacksquare$ ), $\rho = 4$ mm ( $\bullet$ ). . . . .                       | 158 |
| 12.2 Risultati sperimentali per l'acciaio dolce 08kp, stabiliti su provini CT con raggio all'apice dell'intaglio di $\rho = 0.15$ mm ( $\blacktriangle$ ), $\rho = 0.75$ mm ( $\blacksquare$ ), $\rho = 4$ mm ( $\bullet$ ). . . . .                       | 159 |
| 12.3 Risultati sperimentali per l'acciaio dolce 08kp, stabiliti su provini CT con raggio all'apice dell'intaglio di $\rho = 0.15$ mm ( $\blacktriangle$ ), $\rho = 0.75$ mm ( $\blacksquare$ ), $\rho = 4$ mm ( $\bullet$ ). . . . .                       | 160 |



# Elenco delle tabelle

|      |  |     |
|------|--|-----|
| B.1  | Valore degli integrali $I_1, I_2$ e $I_{12}$ . . . . .   | 77  |
| 7.1  | Notched samples of C45 tested at $T = 250\text{L}$ . . . . .   | 101 |
| 7.2  | Notched cylindrical samples of Inconel 718 tested at $T = 500\text{L}$                                   | 102 |
| 7.3  | Notched samples of directionally solidified superalloy DZ125<br>tested at $T = 850\text{L}$ . . . . .    | 103 |
| 12.1 | Comparazione dei valori di $K_f$ valutati per un provino avente<br>$K_t = 1.6$ in acciaio dolce. . . . . | 156 |
| 12.2 | Comparazione dei valori di $K_f$ valutati per un provino CT<br>(acciaio 08kp). . . . .                   | 157 |



## Parte I

# Equazioni base di meccanica dei solidi e rassegna di alcune soluzioni note per problemi lineari





# Capitolo 1

## Elasticità piana

### 1.1 Relazioni base

Questo paragrafo richiama brevemente le relazioni che intercorrono tra tensione e deformazione per un materiale omogeneo ed isotropo come previsto dall'elasticità lineare. In un sistema di riferimento cartesiano definito dagli assi  $x$ ,  $y$  e  $z$ , ci sono:

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)], & \gamma_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{G}, \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)], & \gamma_{yz} &= \frac{\tau_{yz}}{G}, \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)], & \gamma_{xz} &= \frac{\tau_{xz}}{G}.\end{aligned}\tag{1.1}$$

In alternativa, utilizzando la notazione tensoriale, è possibile condensare il sistema 1.1 nella seguente scrittura:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1 + \nu}{E} \sigma_{ij} - \frac{\nu}{E} \sigma_{kk} \delta_{ij}\tag{1.2}$$

dove le deformazioni tangenziali sono la metà delle corrispondenti deformazioni ingegneristiche e  $\delta_{ij}$  è definito come:

$$\delta_{ij} := \begin{cases} 1, & \text{se } i = j \\ 0, & \text{se } i \neq j. \end{cases}\tag{1.3}$$

Il comportamento elastico di un materiale è completamente descritto da due parametri. È infatti possibile dimostrare che il modulo di taglio  $G$ , il modulo di Young  $E$  ed il rapporto di Poisson  $\nu$  sono legati dalla seguente:

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)}. \quad (1.4)$$

In accordo con la teoria delle piccole deformazioni, le relazioni tra spostamenti e deformazioni sono:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x}, & \gamma_{xy} &= \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}, \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y}, & \gamma_{xz} &= \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}, \\ \varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z}, & \gamma_{yz} &= \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}, \end{aligned} \quad (1.5)$$

dove  $u$ ,  $v$  e  $w$  sono gli spostamenti lungo le direzioni  $x$ ,  $y$  e  $z$ . In notazione tensoriale si ha:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{ij} + u_{ji}). \quad (1.6)$$

Essendo la maggior parte dei problemi di elasticità tridimensionale non di facile risoluzione, è pratica comune ricorrere a delle ipotesi di comportamento le quali consentono di semplificare le formule.

## 1.2 Deformazione piana

Questa ipotesi è tipica nel caso di sezioni spesse, per i quali la deformazione lungo la direzione  $z$  è vincolata o trascurabile. Per queste condizioni è possibile scrivere:

$$\varepsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0, \quad \sigma_z = \nu(\sigma_x + \sigma_y). \quad (1.7)$$

È importante notare che questa assunzione, in molti casi generali, comporta uno stato di tensione triassiale, prova ne sia che il valore della  $\sigma_z$  è diversa da zero. Sotto queste ipotesi, le relazioni contenute nel sistema [1.1](#)

diventano:

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{1+\nu}{E}(\sigma_x - \nu\sigma_y), & \gamma_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{G}, \\ \varepsilon_y &= \frac{1+\nu}{E}(\sigma_y - \nu\sigma_x), & \gamma_{yz} &= 0, \\ \varepsilon_z &= 0, & \gamma_{xz} &= 0.\end{aligned}\quad (1.8)$$

### 1.3 Tensione piana

Questa ipotesi è tipica delle sezioni sottili, dove l'assenza di tensioni esterne applicate ai bordi liberi del materiale lungo la direzione dello spessore ( $z$ ), è estesa anche all'interno del corpo. In altre parole sono ammesse le sole tensioni nel piano  $xy$ . Matematicamente questo comporta le seguenti:

$$\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0, \quad \varepsilon_z = -\frac{\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y). \quad (1.9)$$

Sotto queste ipotesi, le relazioni contenute nel sistema 1.1 diventano:

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu\sigma_y), & \gamma_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{G}, \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu\sigma_x), & \gamma_{yz} &= 0, \\ \varepsilon_z &= -\frac{\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y), & \gamma_{xz} &= 0.\end{aligned}\quad (1.10)$$

## 1.4 Equazioni differenziali dell'equilibrio, funzioni di Airy ed equazioni di compatibilità

### 1.4.1 Coordinate cartesiane

#### Equazioni differenziali dell'equilibrio

Definite le componenti di tensione attive sull'elementino di figura 1.1, è possibile determinare le equazioni di equilibrio nel caso piano (vedi sistema 1.13), imponendo dapprima l'equilibrio lungo  $x$ :

$$\left(\sigma_x + \frac{\partial\sigma_x}{\partial x}dx\right)dy - \sigma_x dy + \left(\tau_{xy} + \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y}dy\right)dx - \tau_{xy}dx = 0$$

$$\begin{aligned} \sigma_x dy + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx dy - \sigma_x dy + \tau_{xy} dx + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} dy dx - \tau_{xy} dx &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} &= 0 \end{aligned} \quad (1.11)$$

e successivamente quello lungo  $y$ :

$$\begin{aligned} \left( \sigma_y + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} dy \right) dx - \sigma_y dx + \left( \tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} dx \right) dy - \tau_{xy} dy &= 0 \\ \sigma_y dx + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} dy dx - \sigma_y dx + \tau_{xy} dy + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} dx dy - \tau_{xy} dy &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} &= 0. \end{aligned} \quad (1.12)$$

Quindi riassumendo, l'equilibrio di un corpo descritto in un sistema di riferimento cartesiano, soddisfa le seguenti:

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0 \end{cases} \quad (1.13)$$

nell'ipotesi di trascurare le azioni d'inerzia e le forze applicate al corpo.

Il sistema 1.13 è formato da due equazioni e tre incognite il che significa non può essere risolto senza introdurre un'altra condizione: la congruenza delle deformazioni nel piano.

### Funzione di Airy

Airy definisce una *stress function*  $\phi(x, y)$ , a variabili reali espresse in coordinate cartesiane, tale per cui le due equazioni differenziali indefinite dell'equilibrio siano automaticamente soddisfatte e le componenti di tensione possono essere espresse nella forma:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}, \quad (1.14)$$

$$\sigma_y = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}, \quad (1.15)$$

$$\tau_{xy} = - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y}. \quad (1.16)$$

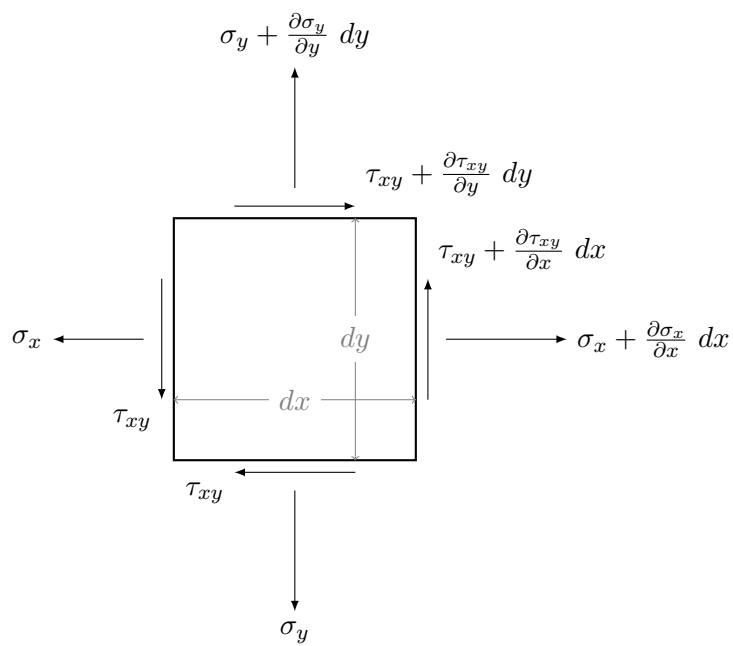


Figura 1.1: Elemento piano infinitesimo descritto in un sistema di riferimento a coordinate cartesiane.

Per semplicità di lettura, nel proseguo della trattazione, si tralascia l'indicazione delle variabili della funzione di Airy e pertanto sarà rappresentata con la sola lettera greca  $\phi$ .

Data una opportuna funzione di Airy siamo in grado, per derivazione, di ricavare lo stato delle tensioni presenti su un corpo soggetto ad un sistema di forze.

Tra le infinite soluzioni possibili per la  $\phi$ , quella vera dovrà soddisfare anche l'equazione di compatibilità.

### Equazione di compatibilità

Dalle equazioni 1.5, per il caso piano, le deformazioni sono così correlate agli spostamenti:

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x}, \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y}, \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}.\end{aligned}\tag{1.17}$$

Calcolando la derivata mista di  $\gamma_{xy}$ :

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \gamma_{xy} &= \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \\ &= \frac{\partial^2}{\partial y^2} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{\partial v}{\partial y} \\ &= \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2}\end{aligned}\tag{1.18}$$

si ottiene la cosiddetta *equazione di compatibilità* 1.18. Sostituendo ora le deformazioni con le tensioni, differenziando la prima equazione di equilibrio rispetto ad  $x$  e la seconda rispetto ad  $y$ , si ottiene:

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) (\sigma_x + \sigma_y) = 0.\tag{1.19}$$

Introducendo la notazione  $\nabla^2$  definita come:

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad (1.20)$$

è possibile scrivere:

$$\nabla^2(\sigma_x + \sigma_y) = 0. \quad (1.21)$$

Ricordandosi delle definizioni 1.14 e 1.15 è possibile scrivere l'equazione di compatibilità in funzione della funzione di Airy  $\phi$ :

$$\nabla^2(\sigma_x + \sigma_y) = \nabla^2\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}\right) \quad (1.22)$$

$$= \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} = 0, \quad (1.23)$$

che può essere scritta in forma sintetica nel modo seguente:

$$\frac{\partial^4\phi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4\phi}{\partial x^2\partial y^2} + \frac{\partial^4\phi}{\partial y^4} = 0. \quad (1.24)$$

Oppure in alternativa:

$$\nabla^2(\sigma_x + \sigma_y) = 0 \quad (1.25)$$

$$\nabla^2\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}\right) = 0 \quad (1.26)$$

$$\nabla^2\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\phi = 0 \quad (1.27)$$

$$\nabla^2\nabla^2\phi = 0 \quad (1.28)$$

da cui si deduce che la funzione di Airy  $\phi$  è biarmonica, la quale è una proprietà molto importante per l'applicazione del metodo dei potenziali complessi (vedi sottoparagrafo 1.6.3).

## 1.4.2 Coordinate polari

### Equazioni differenziali dell'equilibrio

Indicheremo con  $\sigma_r$  la componente di tensione in direzione radiale, con  $\sigma_\theta$  la componente in direzione circonferenziale e con  $\tau_{r\theta}$  la tensione tangenziale.

Imponiamo l'equilibrio in direzione radiale considerando per semplicità nulle le forze di volume in tale direzione. Si ottiene:

$$\begin{aligned} \left(\sigma_r + \frac{\partial\sigma_r}{\partial r}dr\right)(r+dr)d\theta - \sigma_r r d\theta + \left(\tau_{\theta r} + \frac{\partial\tau_{\theta r}}{\partial\theta}d\theta\right)dr \cos\frac{d\theta}{2} - \\ \tau_{\theta r} dr \cos\frac{d\theta}{2} - \left(\sigma_\theta + \frac{\partial\sigma_\theta}{\partial\theta}d\theta\right)dr \sin\frac{d\theta}{2} - \sigma_\theta dr \sin\frac{d\theta}{2} = 0 \end{aligned} \quad (1.29)$$

$$\begin{aligned} \sigma_r r d\theta + \sigma_r dr d\theta + \frac{\partial\sigma_r}{\partial r} dr r d\theta + \frac{\partial\sigma_r}{\partial r} dr dr d\theta - \sigma_r r d\theta + \tau_{\theta r} dr + \\ \frac{\partial\tau_{\theta r}}{\partial\theta} d\theta dr - \sigma_\theta dr \frac{d\theta}{2} - \frac{\partial\sigma_\theta}{\partial\theta} d\theta dr \frac{d\theta}{2} - \sigma_\theta dr \frac{d\theta}{2} = 0 \end{aligned} \quad (1.30)$$

$$\begin{aligned} \sigma_r dr d\theta + \frac{\partial\sigma_r}{\partial r} r dr d\theta + \frac{\partial\sigma_r}{\partial r} dr dr d\theta + \tau_{\theta r} dr + \frac{\partial\tau_{\theta r}}{\partial\theta} d\theta dr - \\ \frac{\partial\sigma_\theta}{\partial\theta} d\theta dr \frac{d\theta}{2} - \sigma_\theta dr \frac{d\theta}{2} = 0 \end{aligned} \quad (1.31)$$

$$\frac{\sigma_r}{r} + \frac{\partial\sigma_r}{\partial r} + \frac{\partial\tau_{\theta r}}{\partial\theta} \frac{1}{r} - \frac{\sigma_\theta}{r} = 0 \quad (1.32)$$

$$\frac{\partial\sigma_r}{\partial r} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial\tau_{\theta r}}{\partial\theta} = 0. \quad (1.33)$$

Imponendo l'equilibrio in direzione circonferenziale si ottiene invece:

$$\begin{aligned} \left(\tau_{r\theta} + \frac{\partial\tau_{r\theta}}{\partial r}dr\right)(r+dr)d\theta - \tau_{r\theta} r d\theta + \left(\sigma_\theta + \frac{\partial\sigma_\theta}{\partial\theta}d\theta\right)dr \cos\frac{d\theta}{2} - \\ \sigma_\theta dr \cos\frac{d\theta}{2} + \left(\tau_{\theta r} + \frac{\partial\tau_{\theta r}}{\partial\theta}d\theta\right)dr \sin\frac{d\theta}{2} - \tau_{\theta r} dr \sin\frac{d\theta}{2} = 0 \end{aligned} \quad (1.34)$$

$$\begin{aligned} \tau_{r\theta} r d\theta + \tau_{r\theta} dr d\theta + \frac{\partial\tau_{r\theta}}{\partial r} dr r d\theta + \frac{\partial\tau_{r\theta}}{\partial r} dr dr d\theta - \tau_{r\theta} r d\theta + \sigma_\theta dr + \\ \frac{\partial\sigma_\theta}{\partial\theta} d\theta dr - \sigma_\theta dr + \tau_{\theta r} dr \frac{d\theta}{2} + \frac{\partial\tau_{\theta r}}{\partial\theta} d\theta dr \frac{d\theta}{2} + \tau_{\theta r} dr \frac{d\theta}{2} = 0 \end{aligned} \quad (1.35)$$

$$2\tau_{r\theta} dr d\theta + \frac{\partial\tau_{r\theta}}{\partial r} r dr d\theta + \frac{\partial\sigma_\theta}{\partial\theta} dr d\theta = 0 \quad (1.36)$$



$$2 \tau_{r\theta} + \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} r + \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} = 0 \quad (1.37)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + 2 \frac{\tau_{r\theta}}{r} = 0 \quad (1.38)$$

La 1.33 e la 1.38 sono le equazioni indefinite dell'equilibrio in coordinate polari.

Quindi riassumendo, l'equilibrio di un corpo descritto in un sistema di riferimento polare, soddisfa le seguenti:

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta r}}{\partial \theta} = 0 \\ \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + 2 \frac{\tau_{r\theta}}{r} = 0 \end{cases} \quad (1.39)$$

nell'ipotesi di trascurare le azioni d'inerzia e le forze applicate al corpo.

Il sistema 1.39 è formato da due equazioni e tre incognite il che significa non può essere risolto senza introdurre un'altra condizione: la congruenza delle deformazioni nel piano.

### Funzione di Airy

Airy definisce una *stress function*  $\phi(r, \vartheta)$ , a variabili reali espresse in coordinate polari, tale per cui le due equazioni differenziali indefinite dell'equilibrio siano automaticamente soddisfatte e le componenti di tensione possono essere espresse nella forma:

$$\sigma_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \vartheta^2}, \quad (1.40)$$

$$\sigma_\vartheta = \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2}, \quad (1.41)$$

$$\tau_{r\vartheta} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial \phi}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \phi}{\partial r \partial \vartheta} = -\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \vartheta} \right). \quad (1.42)$$

Per semplicità di lettura, nel proseguo della trattazione, si tralascia l'indicazione delle variabili della funzione di Airy e pertanto sarà rappresentata con la sola lettera greca  $\phi$ .

Data una opportuna funzione di Airy siamo in grado, per derivazione, di ricavare lo stato delle tensioni presenti su un corpo soggetto ad un sistema di forze.

Tra le infinite soluzioni possibili per la  $\phi$ , quella vera dovrà soddisfare anche l'equazione di compatibilità.

### Equazione di compatibilità

Scriviamo ora l'equazione di compatibilità in coordinate polari. Partiamo da quella in coordinate cartesiane (equazione 1.18) riportata di seguito:

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2}, \quad (1.43)$$

e ricordiamo i legami presenti tra coordinate cartesiane e polari:

$$x^2 + y^2 = r^2 \quad \vartheta = \arctan \frac{y}{x}. \quad (1.44)$$

Differenziando separatamente rispetto ad  $x$  e  $y$  le equazioni 1.44 si ottiene:

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{1}{2} \frac{2x}{(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{x}{(r^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{x}{r} = \cos \vartheta, \quad (1.45)$$

$$\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{1}{2} \frac{2y}{(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{y}{(r^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{y}{r} = \sin \vartheta, \quad (1.46)$$

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial x} = \frac{-\frac{y}{x^2}}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} = \frac{-y}{x^2 + y^2} = -\frac{y}{r^2} = -\frac{\sin \vartheta}{r}, \quad (1.47)$$

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial y} = \frac{\frac{1}{x}}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} = \frac{x}{x^2 + y^2} = +\frac{x}{r^2} = +\frac{\cos \vartheta}{r}. \quad (1.48)$$

Differenziando ora la funzione di Airy, a variabili reali espresse in coordinate polari, rispetto ad  $x$  si ottiene:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \phi}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial \vartheta} \frac{\partial \vartheta}{\partial x} \quad (1.49)$$

$$= \frac{\partial \phi}{\partial r} \cos \vartheta - \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \vartheta} \sin \vartheta, \quad (1.50)$$

differenziando nuovamente invece si ha:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = \left( \frac{\partial}{\partial r} \cos \vartheta - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \sin \vartheta \right) \left( \frac{\partial \phi}{\partial r} \cos \vartheta - \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \vartheta} \sin \vartheta \right), \quad (1.51)$$

dove sviluppando si ottiene:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} \cos^2 \vartheta - 2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial r \partial \vartheta} \frac{\sin \vartheta \cos \vartheta}{r} + \frac{\partial \phi}{\partial r} \frac{\sin^2 \vartheta}{r} + \\ 2 \frac{\partial \phi}{\partial \vartheta} \frac{\sin \vartheta \cos \vartheta}{r^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial \vartheta^2} \frac{\sin^2 \vartheta}{r^2}. \end{aligned} \quad (1.52)$$

Differenziando due volte la  $\phi(r, \vartheta)$  rispetto ad  $y$  si ottiene dapprima:

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{\partial \phi}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial \phi}{\partial \vartheta} \frac{\partial \vartheta}{\partial y} \quad (1.53)$$

$$= \frac{\partial \phi}{\partial r} \sin \vartheta + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \vartheta} \cos \vartheta, \quad (1.54)$$

e poi:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = \left( \frac{\partial}{\partial r} \sin \vartheta + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \cos \vartheta \right) \left( \frac{\partial \phi}{\partial r} \sin \vartheta + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \vartheta} \cos \vartheta \right), \quad (1.55)$$

il cui prodotto sviluppa i seguenti addendi:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} \sin^2 \vartheta + 2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial r \partial \vartheta} \frac{\sin \vartheta \cos \vartheta}{r} + \frac{\partial \phi}{\partial r} \frac{\cos^2 \vartheta}{r} - \\ 2 \frac{\partial \phi}{\partial \vartheta} \frac{\sin \vartheta \cos \vartheta}{r^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial \vartheta^2} \frac{\cos^2 \vartheta}{r^2}. \end{aligned} \quad (1.56)$$

Sommando le equazioni 1.52 e 1.56 si ha:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \vartheta^2}, \quad (1.57)$$

dove sfruttando la seguente identità:

$$\frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \phi}{\partial y^4} = \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right), \quad (1.58)$$

è possibile ottenere l'equazione di compatibilità in coordinate polari espressa in funzione della funzione di Airy  $\phi(r, \vartheta)$ :

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \vartheta^2} \right) \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \vartheta^2} \right) = 0. \quad (1.59)$$

L'equazione di compatibilità espressa in funzione delle componenti delle deformazioni e degli scorrimenti risulta:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{\vartheta}}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varepsilon_r}{\partial \vartheta^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \varepsilon_{\vartheta}}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial \varepsilon_r}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \gamma_{r\vartheta}}{\partial r \partial \vartheta} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \gamma_{r\vartheta}}{\partial \vartheta}. \quad (1.60)$$

## 1.5 Rotazione del sistema di riferimento

Consideriamo il sistema di riferimento piano  $Oxyz$ , e quello  $Ox'y'z'$  ottenuto per rotazione di un angolo  $\alpha$  rispetto al primo. Si considerano positive le rotazioni antiorarie che portano il sistema di riferimento di origine su quello di destinazione. Utilizzando la proprietà di invarianza della forma quadratica, determineremo le tensioni espresse nel nuovo sistema di riferimento. Consideriamo il vettore  $(\xi, \eta, \zeta)$  nel sistema di riferimento  $Oxyz$  e definiamo  $(\xi', \eta', \zeta')$  il vettore espresso nel nuovo sistema di riferimento.

Poiché ci interessa una rotazione attorno all'asse  $z$ , il quale rimane fisso, ci si può limitare all'analisi delle sole coordinate  $x$  e  $y$ . Fra le componenti del vettore espresse nel sistema di riferimento di destinazione e quelle espresse secondo quello di origine, sussistono le seguenti relazioni:

$$\xi' = \xi \cos \alpha + \eta \sin \alpha \quad \eta' = -\xi \sin \alpha + \eta \cos \alpha. \quad (1.61)$$

dalle quali è possibile ricavare le seguenti:

$$\xi = \frac{1}{\cos \alpha} \left[ \xi' - \eta \sin \alpha \right] \quad \eta = \frac{1}{\sin \alpha} \left[ \eta \cos \alpha - \eta' \right]. \quad (1.62)$$

É dunque evidente che valgono anche le seguenti:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\cos \alpha} \left[ \xi' - \eta \sin \alpha \right] &= \frac{1}{\sin \alpha} \left[ \eta \cos \alpha - \eta' \right] \\ \frac{\xi'}{\cos \alpha} - \eta \tan \alpha &= \frac{\eta}{\tan \alpha} - \frac{\eta'}{\sin \alpha} \\ \eta \left[ \tan \alpha + \frac{1}{\tan \alpha} \right] &= \frac{\xi'}{\cos \alpha} + \frac{\eta'}{\sin \alpha} \\ \eta \frac{1}{\cos \alpha \sin \alpha} &= \frac{\xi'}{\cos \alpha} + \frac{\eta'}{\sin \alpha}, \end{aligned}$$

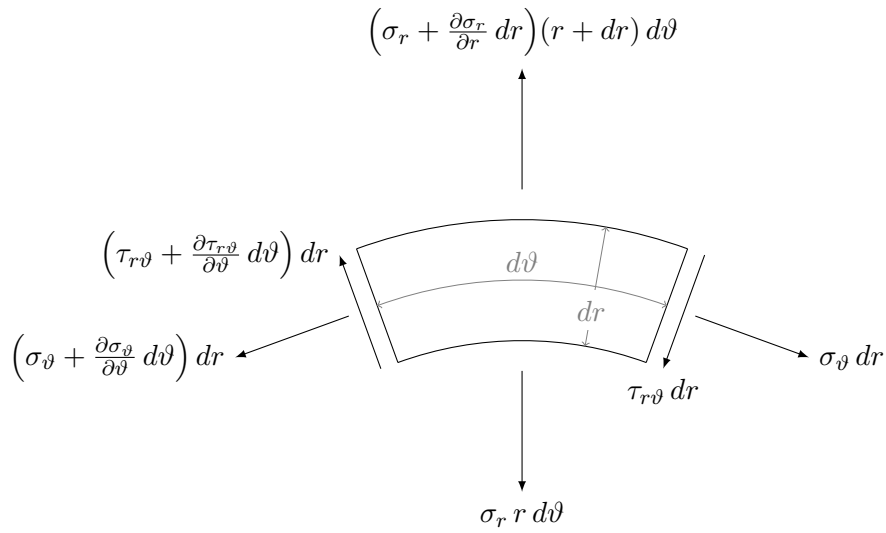


Figura 1.2: Elemento piano infinitesimo descritto in un sistema di riferimento a coordinate polari.

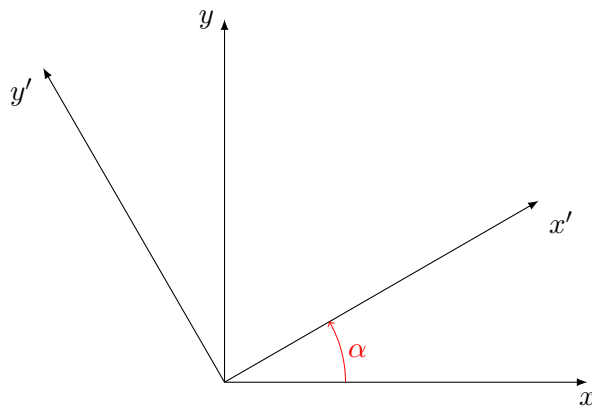


Figura 1.3: Sistema di riferimento di origine  $Oxy$  e di destinazione  $Ox'y'$ .

semplificando:

$$\eta = \xi' \sin \alpha + \eta' \cos \alpha. \quad (1.63)$$

Sostituendo ora l'equazione 1.63 all'interno della prima di quelle indicate dal riferimento 1.62 si ottiene:

$$\xi = \frac{1}{\cos \alpha} \left[ \xi' - \eta \sin \alpha \right] \quad (1.64)$$

$$= \frac{1}{\cos \alpha} \left[ \xi' - \left( \xi' \sin \alpha + \eta' \cos \alpha \right) \sin \alpha \right] \quad (1.65)$$

$$= \frac{\xi'}{\cos \alpha} - \frac{\xi' \sin^2 \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\eta' \cos \alpha \sin \alpha}{\cos \alpha} \quad (1.66)$$

$$= \xi' \frac{1 - \sin^2 \alpha}{\cos \alpha} - \eta' \sin \alpha, \quad (1.67)$$

ricordando la notazione fondamentale  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ , si ha:

$$\xi = \xi' \cos \alpha - \eta' \sin \alpha. \quad (1.68)$$

Le componenti del vettore nel piano del sistema di riferimento di origine sono dunque raccolte nel riferimento 1.69:

$$\xi = \xi' \cos \alpha - \eta' \sin \alpha \quad \eta = \xi' \sin \alpha + \eta' \cos \alpha. \quad (1.69)$$

Imponendo l'invarianza della forma quadratica vale:

$$\sigma_{x'} \xi'^2 + 2 \tau_{x'y'} \xi' \eta' + \sigma_{y'} \eta'^2 = \sigma_x \xi^2 + 2 \tau_{xy} \xi \eta + \sigma_y \eta^2, \quad (1.70)$$

e sostituendo ora le componenti raccolte nel riferimento 1.69 all'interno dell'espressione 1.70 si ottiene:

$$\begin{aligned} \sigma_{x'} \xi'^2 + 2 \tau_{x'y'} \xi' \eta' + \sigma_{y'} \eta'^2 = & \\ & \sigma_x \left( \xi' \cos \alpha - \eta' \sin \alpha \right)^2 + \\ & 2 \tau_{xy} \left( \xi' \cos \alpha - \eta' \sin \alpha \right) \left( \xi' \sin \alpha + \eta' \cos \alpha \right) + \\ & \sigma_y \left( \xi' \sin \alpha + \eta' \cos \alpha \right)^2, \quad (1.71) \end{aligned}$$

dalla quale, sviluppando i prodotti, si hanno i seguenti addendi:

$$\begin{aligned} \sigma_{x'} \xi'^2 + 2 \tau_{x'y'} \xi' \eta' + \sigma_{y'} \eta'^2 = \\ \sigma_x \xi'^2 \cos^2 \alpha + \sigma_x \eta'^2 \sin^2 \alpha - 2 \sigma_x \xi' \cos \alpha \eta' \sin \alpha + \\ 2 \tau_{xy} \left( \xi'^2 \cos \alpha \sin \alpha - \xi' \eta' \cos^2 \alpha - \xi' \eta' \sin^2 \alpha - \eta'^2 \cos \alpha \sin \alpha \right) + \\ \sigma_y \xi'^2 \sin^2 \alpha + \sigma_y \eta'^2 \cos^2 \alpha + 2 \sigma_y \xi' \sin \alpha \eta' \cos \alpha = 0. \end{aligned} \quad (1.72)$$

Imponendo ora l'uguaglianza fra i termini al primo membro e quelli al secondo che hanno per coefficienti  $\xi'^2$ ,  $\eta'^2$  ed  $\xi' \eta'$  si ottengono le seguenti espressioni:

$$\begin{aligned} \sigma_{x'} &= \sigma_x \cos^2 \alpha + \sigma_y \sin^2 \alpha + 2 \tau_{xy} \sin \alpha \cos \alpha \\ \sigma_{y'} &= \sigma_x \sin^2 \alpha + \sigma_y \cos^2 \alpha - 2 \tau_{xy} \sin \alpha \cos \alpha \\ \tau_{x'y'} &= (-\sigma_x + \sigma_y) \sin \alpha \cos \alpha + \tau_{xy} (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha), \end{aligned} \quad (1.73)$$

scrivibili anche con la seguente notazione matriciale:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{x'} \\ \sigma_{y'} \\ \tau_{x'y'} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2 \alpha & \sin^2 \alpha & 2 \cos \alpha \sin \alpha \\ \sin^2 \alpha & \cos^2 \alpha & -2 \cos \alpha \sin \alpha \\ -\cos \alpha \sin \alpha & \cos \alpha \sin \alpha & \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}. \quad (1.74)$$

Utilizzando invece le formule trigonometriche di bisezione:

$$\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2} \quad \cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}, \quad (1.75)$$

si ottiene:

$$\begin{aligned} \sigma_{x'} &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\alpha + \tau_{xy} \sin 2\alpha \\ \sigma_{y'} &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\alpha - \tau_{xy} \sin 2\alpha \\ \tau_{x'y'} &= -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha + \tau_{xy} \cos 2\alpha. \end{aligned} \quad (1.76)$$

## 1.6 Metodo dei potenziali complessi

Uno dei maggiori contributi forniti dalla teoria matematica dell'elasticità è dovuto a Kolosov e Muskhelishvili. Partendo dalla stress function di Airy, svilupparono un metodo originale e molto potente per risolvere problemi di elasticità piana attraverso l'uso dei potenziali complessi. Questo paragrafo vuole descrivere i punti salienti della loro teoria avendo [4] come principale consultazione.

### 1.6.1 Alcune definizioni

Definiamo una variabile complessa  $z$  e la sua complessa coniugata  $\bar{z}$  come:

$$z = x + iy, \quad \bar{z} = x - iy \quad (1.77)$$

dove  $x$  (parte reale) ed  $y$  (parte immaginaria) possono essere ottenute attraverso le espressioni:

$$\begin{cases} x &= \operatorname{Re} z = \frac{z + \bar{z}}{2} \\ y &= \operatorname{Im} z = \frac{z - \bar{z}}{2}. \end{cases} \quad (1.78)$$

La derivata complessa di una funzione  $f(z)$  in un punto  $z_0 \in A$  ( $A \subseteq \mathbb{C}$ ) è il limite del seguente rapporto:

$$f'(z_0) := \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}. \quad (1.79)$$

Se questo limite esiste,  $f$  è detta essere una funzione olomorfa.

Applicando una serie di regole, è semplice determinare il primo ordine delle derivate parziali:

$$\begin{cases} \frac{\partial f(z)}{\partial x} = \frac{df(z)}{dz} = f'(z) \\ \frac{\partial f(z)}{\partial y} = i \frac{df(z)}{dz} = i f'(z). \end{cases} \quad (1.80)$$



### 1.6.2 Condizioni di Cauchy-Riemann

Immaginiamo di avere una funzione complessa nella forma:

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y). \quad (1.81)$$

Definendo  $h := z - z_0$  ( $h \in \mathbb{C}$ ), è possibile riscrivere la definizione 1.79 come:

$$f'(z_0) := \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \in \mathbb{C}}} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}. \quad (1.82)$$

Se il limite esiste, qualora lo si calcoli lungo la direzione definita dall'asse reale piuttosto che da quello immaginario, deve necessariamente restituire lo stesso risultato. Considerando l'asse  $x$  si ha:

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \in \mathbb{R}}} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} = \frac{\partial f}{\partial x}(z_0) \quad (1.83)$$

mentre lungo  $y$  vale:

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \in \mathbb{R}}} \frac{f(z_0 + ih) - f(z_0)}{ih} = \frac{1}{i} \frac{\partial f}{\partial y}(z_0). \quad (1.84)$$

Per quanto già detto, deve valere:

$$i \frac{\partial f}{\partial x}(z_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(z_0) \quad (1.85)$$

oppure, in termini di  $u$  e  $v$ :

$$-\frac{\partial v}{\partial x} + i \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} + i \frac{\partial v}{\partial y}. \quad (1.86)$$

La sola via per rendere indipendenti dalla direzione scelta per il calcolo del limite è quella di porre uguali le parti reali ed immaginarie dei due casi:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \end{cases} \quad (1.87)$$

Queste due relazioni sono chiamate condizioni di Cauchy-Riemann dopo la loro scoperta. Calcolando le derivate miste rispettivamente di  $u$  e  $v$  e sommandole, grazie al teorema di Schwarz, si trova:

$$\nabla^2 u = \nabla^2 v = 0, \quad (1.88)$$

ossia che le parti reale ed immaginaria di una funzione olomorfa sono soluzioni dell'equazione di Laplace e per questo sono dette armoniche coniugate.

### 1.6.3 Rappresentazione complessa delle tensioni in coordinate cartesiane

In un paragrafo precedente è dimostrato come una condizione di stato piano di tensione possa essere espressa in termini della funzione di Airy  $\phi$ , la quale automaticamente soddisfa le equazioni di equilibrio. In assenza di forze esterne applicate al corpo, vale la seguente equazione:

$$\nabla^2 \nabla^2 \phi = 0. \quad (1.89)$$

Ponendo  $\nabla^2 \phi = P$  l'equazione 1.89 resituisce  $\nabla^2 P = 0$ . Un'equazione in tale forma è detta *equazione di Laplace* e ogni sua soluzione è detta *funzione armonica*. Data una funzione armonica  $P$  è sempre possibile, grazie alle condizioni di Cauchy-Riemann, definire a meno di una costante una funzione armonica  $Q$  che è la coniugata armonica di  $P$ . La funzione armonica  $Q$  così definita è tale per cui:

$$\nabla^2 Q = 0 \quad (1.90)$$

Date le funzioni armoniche  $P$  e  $Q$  è possibile definire la seguente funzione analitica od olomorfa:

$$f(z) = P + i Q \quad (1.91)$$

in quanto ogni funzione complessa si può decomporre in parte reale e parte immaginaria.  $f(z)$  è dunque una funzione dotata di derivata complessa in un aperto  $A \in \mathbb{C}$ .

Se  $f(z)$  è analitica in  $\mathbb{C}$  allora esistono in  $\mathbb{C}$  tutte le derivate di ordine superiore in quanto, per il teorema di Goursat: *la derivata complessa di una funzione olomorfa è continua*.

Questo teorema è alla base del seguente corollario: *ogni funzione olomorfa è infinitamente derivabile e le sue derivate sono olomorfe*.

È così possibile affermare che anche la primitiva di  $f(z)$  è una funzione analitica e definire:

$$\int f(z) dz = 4 \psi(z) \quad (1.92)$$

Essendo  $\psi(z)$  una funzione complessa in quanto analitica, è possibile decomporla in parte reale e parte immaginaria scrivendo:

$$\psi(z) = p + i q \quad \text{dove} \quad \psi'(z) = \frac{1}{4} f(z) = \frac{1}{4} (P + i Q) \quad (1.93)$$

dove si può dimostrare che  $p$  e  $q$  sono due funzioni armoniche tra loro coniugate ed in quanto tali soddisfano le seguenti condizioni di Cauchy-Riemann:

$$\begin{cases} \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial q}{\partial y} = \frac{1}{4} P \\ \frac{\partial p}{\partial y} = -\frac{\partial q}{\partial x} = -\frac{1}{4} Q \end{cases} \quad (1.94)$$

Essendo  $p$  e  $q$  funzioni armoniche, valgono le seguenti:

$$\nabla^2 p = 0 \quad (1.95)$$

$$\nabla^2 q = 0. \quad (1.96)$$

È anche possibile dimostrare che la funzione

$$p_1 = \phi - xp - yq \quad (1.97)$$

è armonica, il che permette di affermare come data una funzione di Airy esista sempre una funzione armonica  $p_1$  sopra definita.

Ogni funzione  $\phi$  può allora essere scritta come segue:

$$\phi = xp + yq + p_1 \quad (1.98)$$

Data  $p_1$  è però sempre possibile definire  $q_1$  a mezzo delle condizioni di Cauchy-Riemann ed ottenere la seguente funzione olomorfa:

$$\chi_1 = p_1 + i q_1 \quad (1.99)$$

Scegliendo in modo opportuno le funzioni analitiche  $\psi(z)$  e  $\chi(z)$ , ogni funzione di Airy può essere rappresentata come:

$$\phi = \operatorname{Re} [\bar{z} \psi(z) + \chi(z)]. \quad (1.100)$$

Definiamo.

$$H(z) = \bar{z} \psi(z) + \chi(z) \quad \text{e} \quad \bar{H}(\bar{z}) = z \bar{\psi}(\bar{z}) + \bar{\chi}(\bar{z}) \quad (1.101)$$

quindi  $\phi = \operatorname{Re} H(z)$  e sommando le due espressioni si ottiene:

$$H(z) + \bar{H}(\bar{z}) = \bar{z} \psi(z) + \chi(z) + z \bar{\psi}(\bar{z}) + \bar{\chi}(\bar{z}) = 2 \operatorname{Re} H(z) \quad (1.102)$$

allora

$$2 \phi = \bar{z} \psi(z) + \chi(z) + z \bar{\psi}(\bar{z}) + \bar{\chi}(\bar{z}). \quad (1.103)$$

Differenziando prima in  $x$  e poi in  $y$  si ottiene:

$$2 \frac{\partial \phi}{\partial x} = \bar{z} \psi'(z) + \psi(z) + \chi'(z) + z \bar{\psi}'(\bar{z}) + \bar{\psi}(\bar{z}) + \bar{\chi}'(\bar{z}) \quad (1.104)$$

$$2 \frac{\partial \phi}{\partial y} = i \cdot [\bar{z} \psi'(z) - \psi(z) + \chi'(z) - z \bar{\psi}'(\bar{z}) + \bar{\psi}(\bar{z}) - \bar{\chi}'(\bar{z})]. \quad (1.105)$$

Moltiplicando la seconda per  $i$  e sommandola alla prima si ottiene:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} + i \frac{\partial \phi}{\partial y} = \psi(z) + z \bar{\psi}'(\bar{z}) + \bar{\chi}'(\bar{z}). \quad (1.106)$$

Differenziando lungo  $x$  e la seconda lungo  $y$  si ha:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + i \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} = \psi'(z) + z \bar{\psi}''(\bar{z}) + \bar{\psi}'(\bar{z}) + \bar{\chi}''(\bar{z}) \quad (1.107)$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} + i \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = i \psi'(z) - i z \bar{\psi}''(\bar{z}) + i \bar{\psi}'(\bar{z}) - i \bar{\chi}''(\bar{z}). \quad (1.108)$$

Moltiplicando per  $i$  ambo i membri della seconda espressione si ottiene:

$$i \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = -\psi'(z) + z \bar{\psi}''(\bar{z}) - \bar{\psi}'(\bar{z}) + \bar{\chi}''(\bar{z}). \quad (1.109)$$

Sottraendo l'equazione 1.109 a quella 1.107 quest' si ottiene l'equazione 1.110 mentre sommandole si ottiene l'equazione 1.111:

$$\sigma_x + \sigma_y = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = 2 \psi'(z) + 2 \bar{\psi}'(\bar{z}) = 4 \cdot \operatorname{Re} \psi'(z) \quad (1.110)$$

$$\sigma_y - \sigma_x - 2 i \tau_{xy} = 2 \cdot [z \bar{\psi}''(\bar{z}) + \bar{\chi}''(\bar{z})]. \quad (1.111)$$

Infine, sostituendo nella relazione 1.111  $i$  con  $-i$ , si ha:

$$\sigma_y - \sigma_x + 2 i \tau_{xy} = 2 \cdot [\bar{z} \psi''(z) + \chi''(z)]. \quad (1.112)$$

Abbiamo dunque espresso le tensioni in coordinate cartesiane in funzione dei potenziali complessi  $\psi$  e  $\chi$ :

$$\begin{cases} \sigma_x + \sigma_y & = 4 \cdot \operatorname{Re} \psi'(z) \\ \sigma_y - \sigma_x + 2 i \tau_{xy} & = 2 \cdot [\bar{z} \psi''(z) + \chi''(z)]. \end{cases} \quad (1.113)$$

#### 1.6.4 Rappresentazione complessa delle tensioni in coordinate polari

Ricordiamo la rappresentazione complessa delle coordinate cartesiane:

$$\begin{cases} \sigma_x + \sigma_y = 4 \operatorname{Re} \psi'(z) \\ \sigma_y + 2 i \tau_{xy} - \sigma_x = 2 \cdot [\bar{z} \psi''(z) + \varphi'(z)]. \end{cases} \quad (1.114)$$

Utilizzando le formule per il cambiamento del sistema di riferimento si ha:

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta \\ \sigma_\theta &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta - \tau_{xy} \sin 2\theta \\ \tau_{r\theta} &= -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta \end{aligned} \quad (1.115)$$

Per la proprietà di invarianza della somma delle tensioni vale:

$$\sigma_r + \sigma_\theta = 4 \operatorname{Re} \psi'(z). \quad (1.116)$$

Sostituendo le equazioni raccolte nel riferimento 1.115 all'interno del primo membro della seconda equazione del sistema 1.114 con opportuna sostituzione dei pedici, si ha il seguente sviluppo:

$$\begin{aligned} \sigma_\theta + 2i\tau_{r\theta} - \sigma_r &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta - \tau_{xy} \sin 2\theta + \\ & 2i\left(-\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta\right) - \\ & \left(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta\right) \end{aligned} \quad (1.117)$$

$$\begin{aligned} \sigma_\theta + 2i\tau_{r\theta} - \sigma_r &= (\sigma_y - \sigma_x) \cos 2\theta + i(\sigma_y - \sigma_x) \sin 2\theta + \\ &\quad 2i\tau_{xy} \left( \cos 2\theta - \frac{\sin 2\theta}{i} \right) \end{aligned} \quad (1.118)$$

$$\begin{aligned} \sigma_\theta + 2i\tau_{r\theta} - \sigma_r &= (\sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy})(\cos 2\theta + i \sin 2\theta) \\ &= (\sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy}) \cdot e^{2i\theta} \\ &= 2 \cdot [\bar{z} \psi''(z) + \varphi'(z)] \cdot e^{2i\theta}. \end{aligned} \quad (1.119)$$

Ricordando le relazioni 1.116 e 1.119 si sono ricavate le tensioni in coordinate polari in termini dei potenziali complessi  $\psi$  e  $\chi$ :

$$\begin{cases} \sigma_r + \sigma_\theta = 4\operatorname{Re}\psi'(z) \\ \sigma_\theta + 2i\tau_{r\theta} - \sigma_r = 2 \cdot e^{2i\cdot\vartheta} \cdot [\bar{z}\psi''(z) + \varphi'(z)] \end{cases} . \quad (1.120)$$

## Capitolo 2

# Distribuzione delle tensioni in presenza di una cricca

Nel 1939 Westergaard si occupò di determinare la distribuzione delle tensioni e deformazioni causate da uno stato di pressione agente su un corpo sopra l'altro, per casi non considerati da Hertz nei suoi studi classici della teoria del contatto. Tuttavia, per dimostrare la validità di questa sua procedura, Westergaard l'ha dapprima validata applicandola ai casi noti sviluppati da Hertz. Nel proseguo del suo lavoro mostra soluzioni per altre applicazioni di corpi in contatto ma in questa sezione sarà trattata solo quella riguardante i problemi nei quali due parti dello stesso corpo sono parzialmente separate formando una o più cricche.

### 2.1 La soluzione di Westergaard

S.D. Carothers nel 1920 espresse alcuni valori in termini di funzioni armoniche, basandosi sul fatto che una funzione armonica di variabili reali  $x$  e  $y$  può essere ottenuta come parte reale  $\text{Re}Z$  o parte immaginaria  $\text{Im}Z$  di una funzione analitica  $Z$  di una variabile complessa  $z = x + iy$  dove  $Z$  può essere

scritta nelle forme:

$$Z = Z(z) = Z(x + iy) = \operatorname{Re}Z + i\operatorname{Im}Z. \quad (2.1)$$

Le funzioni  $Z'$ ,  $\tilde{Z}$  e  $\tilde{\tilde{Z}}$  sono rispettivamente la derivata e gli integrali primo e secondo di  $Z$ , quindi:

$$Z' = \frac{dZ}{dz}, \quad Z = \frac{d\tilde{Z}}{dz} \quad \tilde{\tilde{Z}} = \frac{d\tilde{\tilde{Z}}}{dz}. \quad (2.2)$$

Westergaard propose la seguente funzione di Airy a variabile complessa:

$$\phi(z) = \operatorname{Re}\tilde{\tilde{Z}}(z) + y\operatorname{Im}\tilde{\tilde{Z}}(z). \quad (2.3)$$

Derivando questa funzione rispetto alla variabile reale  $y$  si ottiene:

$$\frac{\partial\phi(z)}{\partial y} = i\operatorname{Re}\tilde{\tilde{Z}}(z) + \operatorname{Im}\tilde{\tilde{Z}}(z) + iy\operatorname{Im}Z'(z). \quad (2.4)$$

Derivando nuovamente rispetto alla variabile reale  $y$  si ottiene:

$$\frac{\partial^2\phi(z)}{\partial y^2} = i^2\operatorname{Re}Z'(z) + i\operatorname{Im}Z'(z) + i\operatorname{Im}Z'(z) + i^2y\operatorname{Im}Z''(z), \quad (2.5)$$

dove semplici considerazioni algebriche consentono di scrivere:

$$\frac{\partial^2\phi(z)}{\partial y^2} = -\operatorname{Re}Z'(z) + 2i\operatorname{Im}Z'(z) - y\operatorname{Im}Z''(z). \quad (2.6)$$

Ricordando ora la condizione di Cauchy-Riemann (vedi sistema 1.87):

$$\frac{\partial\operatorname{Im}\tilde{\tilde{Z}}(z)}{\partial y} = \frac{\partial\operatorname{Re}\tilde{\tilde{Z}}(z)}{\partial x} \quad (2.7)$$

$$2i\operatorname{Im}(Z'(z)) = 2\operatorname{Re}(Z'(z)) \quad (2.8)$$

è possibile scrivere:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2\phi(z)}{\partial y^2} = \operatorname{Re}Z'(z) - y\operatorname{Im}Z''(z). \quad (2.9)$$

La tensione parallela al carico esterno applicato ha invece la seguente espressione:

$$\sigma_y = \frac{\partial^2\phi(z)}{\partial x^2} = \operatorname{Re}Z'(z) + y\operatorname{Im}Z''(z). \quad (2.10)$$



La derivata mista invece della funzione di Airy, rappresentante l'andamento delle tensioni tangenziali nel piano (xy) può essere espressa nella seguente forma:

$$\begin{aligned}\tau_{xy} &= -\frac{\partial^2 \phi(z)}{\partial x \partial y} = -\frac{\partial}{\partial y} [\operatorname{Re} \tilde{Z}(z) + y \operatorname{Im} Z(z)] \\ &= -i \operatorname{Re} Z(z) - \operatorname{Im} Z(z) - iy \operatorname{Im} Z'(z)\end{aligned}\quad (2.11)$$

Servendosi ancora delle condizioni di Cauchy-Riemann si ha:

$$\frac{\partial \operatorname{Re} \tilde{Z}(z)}{\partial y} = -\frac{\partial \operatorname{Im} \tilde{Z}(z)}{\partial x} \quad i \operatorname{Re} Z(z) = -\operatorname{Im} Z(z) \quad (2.12)$$

$$\frac{\partial \operatorname{Im} Z(z)}{\partial y} = \frac{\partial \operatorname{Re} Z(z)}{\partial x} \quad i \operatorname{Im} Z'(z) = \operatorname{Re} Z'(z) \quad (2.13)$$

e pertanto vale:

$$\tau_{xy} = -y \operatorname{Re} Z'(z). \quad (2.14)$$

In definitiva, il campo di tensione in funzione della variabile complessa  $z$  è il seguente:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \operatorname{Re} Z(z) - y \operatorname{Im} Z'(z), \\ \sigma_y &= \operatorname{Re} Z(z) + y \operatorname{Im} Z'(z), \\ \tau_{xy} &= -y \operatorname{Re} Z'(z).\end{aligned}\quad (2.15)$$

Scegliendo opportunamente la funzione complessa  $Z(z)$ , Westergaard nel 1939 ottenne la soluzione esatta del problema relativo ad una piastra soggetta a trazione, in presenza di una cricca centrale di lunghezza  $2a$ .

Westergaard utilizzò la seguente funzione:

$$Z(z) = \frac{\sigma \cdot z}{\sqrt{z^2 - a^2}}, \quad (2.16)$$

dove  $\sigma$  è la tensione di trazione applicata a monte e a valle della piastra, normale all'asse della cricca.

Ricordando la notazione polare dei numeri complessi e riferendosi alla figura 2.1 è possibile scrivere:

$$z - a = r_1 e^{i\vartheta_1} \quad z + a = r_2 e^{i\vartheta_2} \quad (2.17)$$

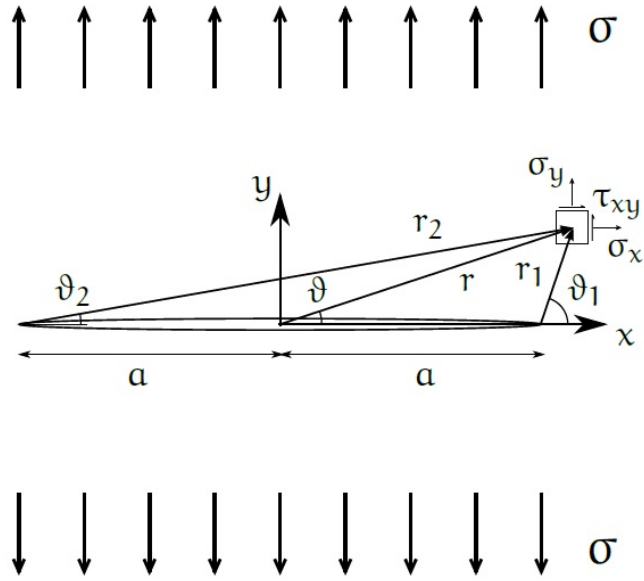


Figura 2.1: Sistema di riferimento e configurazione del problema.

dove

$$z = r e^{i\vartheta}, \quad (2.18)$$

per cui vale:

$$(z - a)(z + a) = r_1 e^{i\vartheta_1} r_2 e^{i\vartheta_2} \quad (2.19)$$

$$z^2 - a^2 = r_1 r_2 e^{i(\vartheta_1 + \vartheta_2)} \quad (2.20)$$

$$\sqrt{z^2 - a^2} = \sqrt{r_1 r_2} e^{i\frac{\vartheta_1 + \vartheta_2}{2}}. \quad (2.21)$$

Sostituendo ora la 2.21 e la 2.18 all'interno della 2.16 si ottiene:

$$Z(z) = \frac{\sigma \cdot r e^{i\vartheta}}{\sqrt{r_1 r_2} e^{i\frac{\vartheta_1 + \vartheta_2}{2}}} \quad (2.22)$$

$$= \sigma \frac{r}{\sqrt{r_1 r_2}} e^{i\left[\vartheta - \frac{\vartheta_1 + \vartheta_2}{2}\right]}. \quad (2.23)$$

La funzione di Westergaard assume dunque la seguente forma:

$$Z(z) = \sigma \frac{r}{\sqrt{r_1 r_2}} e^{i\left[\vartheta - \frac{\vartheta_1 + \vartheta_2}{2}\right]}. \quad (2.24)$$

La parte reale di  $Z(z)$  vale quindi:

$$\operatorname{Re}Z(z) = \sigma \frac{r}{\sqrt{r_1 r_2}} \cos \left[ \vartheta - \frac{\vartheta_1 + \vartheta_2}{2} \right]. \quad (2.25)$$

La derivata di  $Z(z)$  rispetto alla variabile complessa  $z$ , si può scrivere nella forma:

$$\begin{aligned} Z'(z) &= \frac{\sigma \sqrt{z^2 - a^2} - \sigma z \frac{2z}{2\sqrt{z^2 - a^2}}}{z^2 - a^2} \\ &= \frac{\sigma \sqrt{z^2 - a^2} - \frac{\sigma z^2}{\sqrt{z^2 - a^2}}}{z^2 - a^2} \\ &= \frac{\sigma(z^2 - a^2) - \sigma z^2}{(z^2 - a^2)\sqrt{z^2 - a^2}} \\ &= -\frac{\sigma a^2}{(z^2 - a^2)^{\frac{3}{2}}} \\ &= -\frac{\sigma a^2}{\left(r_1 r_2 e^{i(\vartheta_1 + \vartheta_2)}\right)^{\frac{3}{2}}} \\ &= -\sigma \frac{a^2}{(r_1 r_2)^{\frac{3}{2}}} e^{-i\frac{3}{2}(\vartheta_1 + \vartheta_2)}. \end{aligned} \quad (2.26)$$

Le espressioni per la parte reale ed immaginaria della  $Z'(z)$  sono le seguenti:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}Z'(z) &= -\sigma \frac{a^2}{(r_1 r_2)^{\frac{3}{2}}} \cos \left[ -\frac{3}{2}(\vartheta_1 + \vartheta_2) \right] \\ &= -\sigma \frac{a^2}{(r_1 r_2)^{\frac{3}{2}}} \cos \left[ \frac{3}{2}(\vartheta_1 + \vartheta_2) \right], \end{aligned} \quad (2.27)$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}Z'(z) &= -\sigma \frac{a^2}{(r_1 r_2)^{\frac{3}{2}}} \sin \left[ -\frac{3}{2}(\vartheta_1 + \vartheta_2) \right] \\ &= \sigma \frac{a^2}{(r_1 r_2)^{\frac{3}{2}}} \sin \left[ \frac{3}{2}(\vartheta_1 + \vartheta_2) \right]. \end{aligned} \quad (2.28)$$

È quindi possibile riscrivere le espressioni del campo di tensione:

$$\begin{aligned}
\sigma_x &= \frac{\partial^2 \phi(z)}{\partial y^2} = \operatorname{Re} Z(z) - y \operatorname{Im} Z'(z) \\
&= \sigma \frac{r}{(r_1 r_2)^{\frac{1}{2}}} \cos \left[ \vartheta - \frac{\vartheta_1 + \vartheta_2}{2} \right] - \sigma \frac{a^2}{(r_1 r_2)^{\frac{3}{2}}} r_1 \sin \vartheta_1 \sin \left[ \frac{3}{2} (\theta_1 + \theta_2) \right], \\
\sigma_y &= \frac{\partial^2 \phi(z)}{\partial x^2} = \operatorname{Re} Z(z) + y \operatorname{Im} Z'(z) \\
&= \sigma \frac{r}{(r_1 r_2)^{\frac{1}{2}}} \cos \left[ \vartheta - \frac{\vartheta_1 + \vartheta_2}{2} \right] + \sigma \frac{a^2}{(r_1 r_2)^{\frac{3}{2}}} r_1 \sin \vartheta_1 \sin \left[ \frac{3}{2} (\theta_1 + \theta_2) \right], \\
\tau_{xy} &= -\frac{\partial^2 \phi(z)}{\partial x \partial y} = -y \operatorname{Re} Z'(z) \\
&= \sigma \frac{a^2}{(r_1 r_2)^{\frac{3}{2}}} r_1 \sin \vartheta_1 \cos \left[ \frac{3}{2} (\theta_1 + \theta_2) \right].
\end{aligned} \tag{2.29}$$

Se la distanza fra i due apici della cricca è grande rispetto alla zona di interesse è possibile introdurre le seguenti semplificazioni:

$$r_2 \approx 2a, \quad r \approx a \quad e \quad \vartheta_2 \approx \vartheta \approx 0. \tag{2.30}$$

Considerando le approssimazioni raccolte nel riferimento 2.30, è possibile semplificare la descrizione del campo di tensione presente nel materiale posto nelle immediate vicinanze dell'apice destro della cricca:

$$\begin{aligned}
\sigma_x &= \frac{\sigma \sqrt{\pi a}}{\sqrt{2\pi r_1}} \cos \frac{\vartheta_1}{2} \left[ 1 - \sin \frac{\vartheta_1}{2} \sin \frac{3\vartheta_1}{2} \right] \\
\sigma_y &= \frac{\sigma \sqrt{\pi a}}{\sqrt{2\pi r_1}} \cos \frac{\vartheta_1}{2} \left[ 1 + \sin \frac{\vartheta_1}{2} \sin \frac{3\vartheta_1}{2} \right] \\
\tau_{xy} &= \frac{\sigma \sqrt{\pi a}}{\sqrt{2\pi r_1}} \sin \frac{\vartheta_1}{2} \cos \frac{\vartheta_1}{2} \cos \frac{3\vartheta_1}{2}.
\end{aligned} \tag{2.31}$$

Irwin le modificò poi introducendo un parametro noto come *Stress Intensity Factor* (SIF), definito come:

$$K = \sigma \sqrt{\pi a} \tag{2.32}$$

il che consente di riscriverle nella seguente forma:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{K}{\sqrt{2\pi r_1}} \cos \frac{\vartheta_1}{2} \left[ 1 - \sin \frac{\vartheta_1}{2} \sin \frac{3\vartheta_1}{2} \right] \\ \sigma_y &= \frac{K}{\sqrt{2\pi r_1}} \cos \frac{\vartheta_1}{2} \left[ 1 + \sin \frac{\vartheta_1}{2} \sin \frac{3\vartheta_1}{2} \right] \\ \tau_{xy} &= \frac{K}{\sqrt{2\pi r_1}} \sin \frac{\vartheta_1}{2} \cos \frac{\vartheta_1}{2} \cos \frac{3\vartheta_1}{2}.\end{aligned}\quad (2.33)$$

## 2.2 Uso dei potenziali complessi

La soluzione appena dimostrata è possibile ottenerla anche con il metodo dei potenziali complessi. I potenziali complessi utilizzati per risolvere questo problema sono i seguenti:

$$\psi'(z) = \frac{1}{2}Z(z), \quad \varphi'(z) = -\frac{1}{2}zZ'(z). \quad (2.34)$$

dove si definisce  $\varphi(z) := \chi'(z)$ . Sostituendo nelle equazioni del sistema 1.113 si ottiene:

$$\begin{cases} \sigma_x + \sigma_y &= Z(z) + \bar{Z}(z) = 2\operatorname{Re}Z(z) \\ \sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy} &= (\bar{z} - z)Z'(z) = 2y \cdot [\bar{Z}'(z) - i\operatorname{Re}Z'(z)]. \end{cases} \quad (2.35)$$

Con una semplice integrazione per parti, si trova che

$$\varphi(z) = \frac{1}{2}Z^*(z) - \frac{1}{2}zZ(z) \quad (2.36)$$

dove  $Z^*(z) := \int Z(z) dz$

Per determinare in modo esplicito la distribuzione delle tensioni è necessario definire la funzione  $Z(z)$ . Westergaard gli diede la seguente forma:

$$Z(z) = \frac{\sigma \cdot z}{\sqrt{z^2 - a^2}} \quad (2.37)$$

dove  $\sigma$  è la tensione di trazione applicata a monte e a valle della piastra mentre  $a$  è la semilunghezza della cricca. Conseguentemente,  $Z^*(z)$  vale:

$$Z^*(z) = \sigma \sqrt{z^2 - a^2}. \quad (2.38)$$

Osservando la figura 2.1, adottando una notazione polare per le variabili complesse, è possibile definire le seguenti relazioni:

$$z = r e^{i\vartheta}, \quad \sqrt{z^2 - a^2} = \sqrt{r_1 r_2} e^{i\bar{\vartheta}} \quad (2.39)$$

dove  $\bar{\vartheta} := \frac{1}{2}(\vartheta_1 + \vartheta_2)$ . Le tensioni sono ora date dalle seguenti:

$$\begin{cases} \sigma_x + \sigma_y &= \frac{\sigma r}{\sqrt{r_1 r_2}} \cos(\vartheta - \bar{\vartheta}) \\ \sigma_y - \sigma_x + 2 i \tau_{xy} &= 2 \frac{\sigma a^2}{(r_1 r_2)^{\frac{3}{2}}} r_1 \sin \vartheta_1 \left[ \sin 3\bar{\vartheta} + i \cos 3\bar{\vartheta} \right]. \end{cases} \quad (2.40)$$

Per determinare i campi asintotici delle tensioni, in prossimità dell'apice della cricca, vengono introdotte le seguenti approssimazioni:

$$r \approx a, \quad \vartheta \approx 0, \quad (2.41)$$

$$r_2 \approx 2a, \quad \vartheta_2 \approx 0. \quad (2.42)$$

La componente  $\tau_{xy}$  delle tensioni tangenziali è la parte immaginaria della seconda equazione del sistema 2.40:

$$\tau_{xy} \approx \frac{\sigma \sqrt{a}}{\sqrt{2r_1}} \sin \frac{\vartheta_1}{2} \cos \frac{\vartheta_1}{2} \sin \frac{3\vartheta_1}{2} \quad (2.43)$$

mentre le tensioni normali sono ottenute utilizzando le relazioni:

$$\begin{cases} \sigma_x + \sigma_y &\approx 2 \frac{\sigma \sqrt{a}}{\sqrt{2r_1}} \cos \frac{\vartheta_1}{2} \\ \sigma_y - \sigma_x &\approx \frac{\sigma \sqrt{a}}{\sqrt{2r_1}} \sin \frac{\vartheta_1}{2} \cos \frac{\vartheta_1}{2} \sin \frac{3\vartheta_1}{2}. \end{cases} \quad (2.44)$$

Concludendo, la distribuzione delle tensioni è dunque descritta dalle seguenti:

$$\begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} = \frac{\sigma \sqrt{a}}{\sqrt{2r}} \begin{pmatrix} \cos \frac{\vartheta}{2} \left[ 1 - \sin \frac{\vartheta}{2} \sin \frac{3\vartheta}{2} \right] \\ \cos \frac{\vartheta}{2} \left[ 1 + \sin \frac{\vartheta}{2} \sin \frac{3\vartheta}{2} \right] \\ \sin \frac{\vartheta}{2} \cos \frac{\vartheta}{2} \cos \frac{3\vartheta}{2} \end{pmatrix} \quad (2.45)$$

le quali, rappresentano le originali equazioni ricavate da Westergaard.

Irwin le modificò poi introducendo un parametro noto come *Stress Intensity Factor* (SIF), definito come:

$$K_I = \lim_{r \rightarrow 0^+} \sqrt{2\pi r} \cdot \sigma_y(\vartheta = 0). \quad (2.46)$$

Questo parametro, per il problema della cricca, è definito in forma chiusa semplicemente sostituendo l'espressione che definisce  $\sigma_y$ ; ottenendo:

$$K_I = \sigma \sqrt{\pi a}. \quad (2.47)$$

Questa equazione correla un parametro di campo ( $K_I$ ) alla tensione di trazione a monte e a valle ( $\sigma_y$ ) e ad una caratteristica geometrica della cricca ( $a$ ). Il campo di tensioni può dunque essere riscritto nella seguente forma:

$$\begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \begin{pmatrix} \cos \frac{\vartheta}{2} \left[ 1 - \sin \frac{\vartheta}{2} \sin \frac{3\vartheta}{2} \right] \\ \cos \frac{\vartheta}{2} \left[ 1 + \sin \frac{\vartheta}{2} \sin \frac{3\vartheta}{2} \right] \\ \sin \frac{\vartheta}{2} \cos \frac{\vartheta}{2} \cos \frac{3\vartheta}{2}. \end{pmatrix} \quad (2.48)$$





## Capitolo 3

# Distribuzione delle tensioni in presenza di un intaglio a spigolo vivo

### 3.1 La soluzione di Williams

Nel 1952 Williams considerò l'intaglio a V rappresentato in figura 3.1 e determinò le distribuzioni di tensione nell'intorno del vertice dell'intaglio usando una scrittura a variabili separate della funzione di Airy in coordinate polari e risolvendo il problema agli autovalori associato.

Williams suggerì per la funzione di Airy la seguente forma a variabili separate:

$$\phi = r^{\lambda+1} \cdot f(\vartheta). \quad (3.1)$$

Ricordando le relazioni che legano la funzione di Airy alle componenti

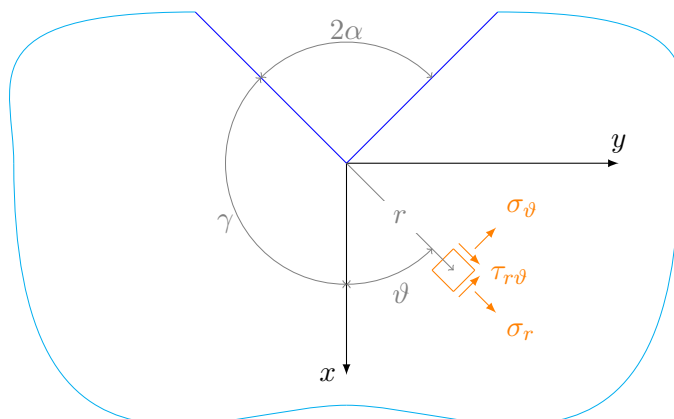


Figura 3.1: Configurazione geometrica di un intaglio a spigolo vivo e rappresentazione del sistema di riferimento polare adottato.

di tensione espresse in coordinate polari:

$$\begin{aligned}
 \sigma_r &= \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \vartheta^2}, \\
 \sigma_\vartheta &= \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2}, \\
 \tau_{r\vartheta} &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial \phi}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \phi}{\partial r \partial \vartheta} = -\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \vartheta} \right),
 \end{aligned} \tag{3.2}$$

le derivate di interesse sono:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \phi}{\partial r} &= (\lambda + 1) r^\lambda f(\vartheta), \\
 \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} &= (\lambda + 1) \lambda r^{\lambda-1} f(\vartheta), \\
 \frac{\partial \phi}{\partial \vartheta} &= r^{\lambda+1} f'(\vartheta), \\
 \frac{\partial^2 \phi}{\partial \vartheta^2} &= r^{\lambda+1} f''(\vartheta), \\
 \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \vartheta} \right) &= \lambda r^{\lambda-1} f'(\vartheta).
 \end{aligned} \tag{3.3}$$

Semplici semplificazioni algebriche portano alle seguenti:

$$\begin{aligned}\sigma_r &= r^{\lambda-1} \left[ f''(\vartheta) + (\lambda + 1) f(\vartheta) \right], \\ \sigma_\vartheta &= r^{\lambda-1} \left[ \lambda(\lambda + 1) f(\vartheta) \right], \\ \tau_{r\vartheta} &= -r^{\lambda-1} \left[ \lambda f'(\vartheta) \right].\end{aligned}\quad (3.4)$$

La funzione di Airy scelta da Williams dovrà soddisfare anche l'equazione di compatibilità in coordinate polari che riportiamo di seguito:

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \vartheta^2} \right) \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \vartheta^2} \right) = 0. \quad (3.5)$$

Il secondo fattore dell'equazione 3.5 rappresenta la somma delle componenti di tensione radiale e circonferenziale. Riscrivendo tale somma esplicitando le derivate della funzione di Airy, servendosi dunque delle equazioni raccolte nel riferimento 3.4, si ha:

$$\sigma_r + \sigma_\vartheta = r^{\lambda-1} \left[ f''(\vartheta) + (\lambda + 1)^2 f(\vartheta) \right]. \quad (3.6)$$

É ora possibile svolgere singolarmente i prodotti dell'equazione 3.5:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial r^2} (\sigma_r + \sigma_\vartheta) &= r^{\lambda-3} (\lambda - 1)(\lambda - 2) \left[ f''(\vartheta) + (\lambda + 1)^2 f(\vartheta) \right] \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (\sigma_r + \sigma_\vartheta) &= r^{\lambda-3} (\lambda - 1) \left[ f''(\vartheta) + (\lambda + 1)^2 f(\vartheta) \right] \\ \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \vartheta^2} (\sigma_r + \sigma_\vartheta) &= r^{\lambda-3} \left[ f^{IV}(\vartheta) + (\lambda + 1)^2 f''(\vartheta) \right].\end{aligned}\quad (3.7)$$

Sommando ora le equazioni raccolte nel riferimento 3.7 l'equazione di compatibilità 3.5 assume la forma:

$$\begin{aligned}\nabla^2(\sigma_r + \sigma_\vartheta) &= \\ &= r^{\lambda-3} (\lambda - 1)(\lambda - 2) \left[ f''(\vartheta) + (\lambda + 1)^2 f(\vartheta) \right] + \\ &+ r^{\lambda-3} (\lambda - 1) \left[ f''(\vartheta) + (\lambda + 1)^2 f(\vartheta) \right] + \\ &+ r^{\lambda-3} \left[ f^{IV}(\vartheta) + (\lambda + 1)^2 f''(\vartheta) \right] = 0. \quad (3.8)\end{aligned}$$

Dopo aver raccolto i termini comuni si ha:

$$f^{IV} + [(\lambda - 1)^2 + (\lambda + 1)^2] \cdot f'' + [(\lambda - 1)^2 (\lambda + 1)^2] \cdot f = 0. \quad (3.9)$$

Questa espressione differenziale ammette le seguenti soluzioni:

$$f_{12}^2 = \frac{-(\lambda - 1)^2 - (\lambda + 1)^2 \pm \sqrt{(\lambda - 1)^4 + (\lambda + 1)^4 - 2(\lambda + 1)^2(\lambda - 1)^2}}{2}$$

$$= \begin{cases} -(\lambda - 1)^2 \\ -(\lambda + 1)^2 \end{cases}, \quad (3.10)$$

quindi:

$$f_{12} = \pm(\lambda - 1) \cdot i \quad f_{12} = \pm(\lambda + 1) \cdot i. \quad (3.11)$$

L'equazione differenziale ha dunque per soluzione la seguente espressione:

$$f(\vartheta) = A \cdot \cos(\lambda + 1)\vartheta + B \cdot \cos(\lambda - 1)\vartheta + C \cdot \sin(\lambda + 1)\vartheta + D \cdot \sin(\lambda - 1)\vartheta. \quad (3.12)$$

I termini in coseno rappresentano la soluzione simmetrica (quella di Modo I), mentre i termini in seno rappresentano la soluzione asimmetrica (quella di Modo II).

Imponendo ora le condizioni al contorno sui bordi dell'intaglio è possibile calcolare i quattro parametri presenti nella soluzione dell'equazione differenziale 3.12. In particolare viene imposto l'annullamento delle tensioni circonferenziale e tangenziale lungo il bordo dell'intaglio:

$$\sigma_{\vartheta}(\pm\gamma) = 0 \quad \tau_{r\vartheta}(\pm\gamma) = 0, \quad (3.13)$$

dove  $\gamma$  è l'angolo complementare di  $\alpha$ .

Ricordando le relazioni che legano la funzione di Airy alle componenti di tensione espresse in coordinate polari (vedi riferimento 3.4), le due condizioni al contorno possono venire scritte in termini di  $f(\vartheta)$  nel seguente modo:

$$f(\pm\gamma) = 0 \quad f'(\pm\gamma) = 0. \quad (3.14)$$

Imponendo questa forma delle condizioni al contorno alla soluzione 3.12 si ottengono le seguenti quattro espressioni (due per il problema simmetrico e due per quello asimmetrico):

$$\begin{aligned} A \cdot \cos(\lambda + 1)\gamma + B \cdot \cos(\lambda - 1)\gamma &= 0 \\ A \cdot (\lambda + 1) \cdot \sin(\lambda + 1)\gamma + B \cdot (\lambda - 1) \cdot \sin(\lambda - 1)\gamma &= 0 \\ C \cdot \sin(\lambda + 1)\gamma + D \cdot \sin(\lambda - 1)\gamma &= 0 \\ C \cdot (\lambda + 1) \cdot \cos(\lambda + 1)\gamma + D \cdot (\lambda - 1) \cdot \cos(\lambda - 1)\gamma &= 0 \end{aligned}$$

le quali sono di seguito compattate:

$$\begin{aligned} A \cdot \kappa_{11} + B \cdot \kappa_{12} &= 0 \\ A \cdot \kappa_{21} + B \cdot \kappa_{22} &= 0 \\ C \cdot \kappa_{33} + D \cdot \kappa_{34} &= 0 \\ C \cdot \kappa_{43} + D \cdot \kappa_{44} &= 0 \end{aligned}$$

avendo definito:

$$\begin{aligned} \kappa_{11} &= \cos(\lambda + 1)\gamma \\ \kappa_{12} &= \cos(\lambda - 1)\gamma \\ \kappa_{21} &= (\lambda + 1) \cdot \sin(\lambda + 1)\gamma \\ \kappa_{22} &= (\lambda - 1) \cdot \sin(\lambda - 1)\gamma \\ \kappa_{33} &= \sin(\lambda + 1)\gamma \\ \kappa_{34} &= \sin(\lambda - 1)\gamma \\ \kappa_{43} &= (\lambda + 1) \cdot \cos(\lambda + 1)\gamma \\ \kappa_{44} &= (\lambda - 1) \cdot \cos(\lambda - 1)\gamma \end{aligned}$$

è possibile utilizzare la seguente scrittura in forma matriciale:

$$\begin{bmatrix} \kappa_{11} & \kappa_{12} & 0 & 0 \\ \kappa_{21} & \kappa_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \kappa_{33} & \kappa_{34} \\ 0 & 0 & \kappa_{43} & \kappa_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (3.15)$$

Il sistema è omogeneo. Per trovare le soluzioni non banali del sistema, i determinanti dei due minori della matrice  $[K]$  devono essere nulli. Impostiamo dunque questa condizione al minore relativo al problema simmetrico ed otteniamo:

$$\cos(\lambda + 1)\gamma \cdot (\lambda - 1) \cdot \sin(\lambda - 1)\gamma - \cos(\lambda - 1)\gamma \cdot (\lambda + 1) \cdot \sin(\lambda + 1)\gamma. \quad (3.16)$$

Sviluppando si ha:

$$\begin{aligned} & \lambda \cdot \sin(\lambda - 1)\gamma \cdot \cos(\lambda + 1)\gamma - \sin(\lambda - 1)\gamma \cdot \cos(\lambda + 1)\gamma - \\ & \lambda \cdot \sin(\lambda + 1)\gamma \cdot \cos(\lambda - 1)\gamma - \sin(\lambda + 1)\gamma \cdot \cos(\lambda - 1)\gamma = 0, \end{aligned} \quad (3.17)$$

mentre raccogliendo i termini in  $\lambda$ :

$$\begin{aligned} & - \left[ \sin(\lambda - 1)\gamma \cdot \cos(\lambda + 1)\gamma - \sin(\lambda + 1)\gamma \cdot \cos(\lambda - 1)\gamma \right] + \\ & \lambda \cdot \left[ \sin(\lambda - 1)\gamma \cdot \cos(\lambda + 1)\gamma - \sin(\lambda + 1)\gamma \cdot \cos(\lambda - 1)\gamma \right] = 0. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Utilizzando quindi le formule di prostaferesi:

$$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$

$$\sin(a - b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b,$$

si ottiene:

$$\sin 2\lambda_1\gamma + \lambda_1 \cdot \sin 2\gamma = 0. \quad (3.19)$$

Annullando invece il determinante del secondo minore, si ottiene la seguente condizione relativa al problema antisimmetrico:

$$\sin 2\lambda_2\gamma - \lambda_2 \cdot \sin 2\gamma = 0. \quad (3.20)$$

Si possono riassumere in un'unica espressione le equazioni agli autovalori ricavate separatamente per il modo simmetrico e per il modo antisimmetrico:

$$\sin 2\lambda\gamma \pm \lambda \cdot \sin 2\gamma = 0. \quad (3.21)$$

Dimostriamo ora che  $\lambda > 0$ .

L'energia di deformazione contenuta in un intorno di raggio  $R$  misurato dall'apice dell'intaglio può essere espressa nella seguente forma:

$$W(R) \propto \int_0^R r^{2(\lambda-1)} \cdot r \, dr = \left[ \frac{1}{2\lambda} \cdot r^{2\lambda} \right]_0^R \quad (3.22)$$

la quale rende evidente il fatto che se fosse  $\lambda \leq 0$ , allora l'energia di deformazione nel volume finito tenderebbe all'infinito. Si deve quindi necessariamente avere  $\lambda > 0$ .

In conclusione, per l'analisi delle singolarità dei campi di tensione vicini all'apice dell'intaglio, sono di interesse gli autovalori compresi nell'intervallo  $0 < \lambda < 1$ . Quando  $\lambda > 1$ , infatti, il campo di tensione risultante è compatibile con le equazioni del problema ma non è più singolare.

Gli autovalori per il problema simmetrico e asimmetrico sono rappresentati nella figura 3.2 in funzione dell'angolo di apertura dell'intaglio  $2\alpha$ .

L'obiettivo del lavoro di Williams era quello di dimostrare matematicamente il carattere asintotico della soluzione lineare elastica e cioè che le componenti di tensione vanno all'infinito con un grado di singolarità che dipende dall'angolo di apertura  $2\alpha$  dell'intaglio.

### 3.2 La soluzione di England

Nel 1971 England, partendo dalle equazioni di Kolosov-Muskhelishvili in coordinate polari:

$$\begin{cases} \sigma_\theta = 4 \operatorname{Re} \psi'(z) - \sigma_r \\ \sigma_r - i \tau_{r\theta} = 2 \operatorname{Re} \psi'(z) - e^{2 \cdot i \cdot \vartheta} \cdot [\bar{z} \psi''(z) + \varphi'(z)] \end{cases}, \quad (3.23)$$

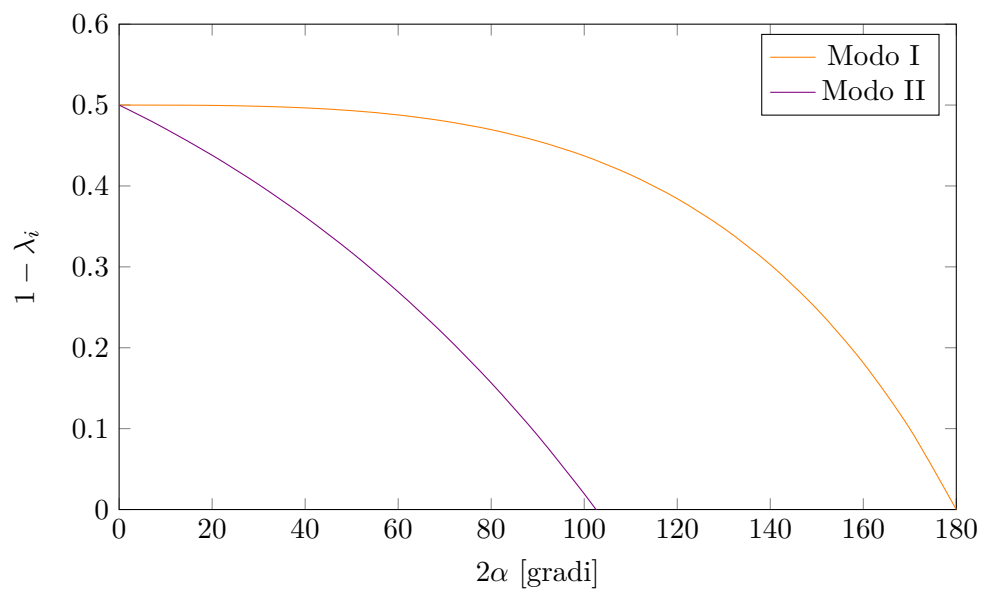


Figura 3.2: Grado di singolarità delle distribuzioni di tensione di Modo I e Modo II. Queste ultime cessano di essere singolari quando l'angolo di apertura dell'intaglio è maggiore di  $102.6^\circ$ .



determinò la distribuzione delle tensioni vicino all'apice di un intaglio a spigolo vivo servendosi dei seguenti potenziali complessi:

$$\psi(z) = a \cdot z^\lambda \quad \varphi(z) = b \cdot z^\lambda, \quad (3.24)$$

dove  $a$  e  $b$  sono numeri complessi:

$$a = a_1 + i a_2 \quad b = b_1 + i b_2, \quad (3.25)$$

mentre l'esponente  $\lambda$  è un numero reale.

Le derivate di interesse dei potenziali complessi sono:

$$\psi'(z) = a \cdot \lambda \cdot z^{\lambda-1} \quad (3.26)$$

$$\psi''(z) = a \cdot \lambda \cdot (\lambda - 1) \cdot z^{\lambda-2} \quad (3.27)$$

$$\varphi'(z) = b \cdot \lambda \cdot z^{\lambda-1}. \quad (3.28)$$

Altri termini di interesse sono i seguenti:

$$\begin{aligned} 2 \operatorname{Re} \psi'(z) &= 2 \operatorname{Re} \left\{ a \cdot \lambda \cdot z^{\lambda-1} \right\} \\ &= 2 \operatorname{Re} \left\{ a \cdot \lambda \cdot r^{\lambda-1} \cdot e^{i(\lambda-1)\vartheta} \right\} \\ &= 2 \operatorname{Re} \left\{ (a_1 + i a_2) \cdot \lambda \cdot r^{\lambda-1} \cdot [\cos(\lambda-1)\vartheta + i \sin(\lambda-1)\vartheta] \right\} \\ &= 2 \cdot \lambda \cdot r^{\lambda-1} \cdot [a_1 \cdot \cos(\lambda-1)\vartheta - a_2 \cdot \sin(\lambda-1)\vartheta] \end{aligned} \quad (3.29)$$

$$\begin{aligned} e^{2i\vartheta} \cdot \bar{z} \psi''(z) &= e^{2i\vartheta} \cdot \bar{z} [a \cdot \lambda \cdot (\lambda - 1) \cdot z^{\lambda-2}] \\ &= e^{2i\vartheta} \cdot z \cdot \bar{z} [a \cdot \lambda \cdot (\lambda - 1) \cdot z^{\lambda-3}] \\ &= e^{2i\vartheta} \cdot r^2 [a \cdot \lambda \cdot (\lambda - 1) \cdot r^{\lambda-3} \cdot e^{i(\lambda-3)\vartheta}] \\ &= a \cdot \lambda \cdot (\lambda - 1) \cdot r^{\lambda-1} \cdot e^{i \cdot (\lambda-1) \cdot \vartheta} \end{aligned} \quad (3.30)$$

$$\begin{aligned}
e^{2i\vartheta} \cdot \varphi'(z) &= e^{2i\vartheta} \cdot [b \cdot \lambda \cdot z^{\lambda-1}] \\
&= e^{2i\vartheta} \cdot [b \cdot \lambda \cdot z^{\lambda-1}] \\
&= e^{2i\vartheta} \cdot [b \cdot \lambda \cdot r^{\lambda-1} \cdot e^{i(\lambda-1)\vartheta}] \\
&= b \cdot \lambda \cdot r^{\lambda-1} \cdot e^{i(\lambda+1)\vartheta}
\end{aligned} \tag{3.31}$$

Sottraendo ora le equazioni 3.31 e 3.30 all'equazione 3.29, ed attribuendo i termini reali alla tensione radiale si ha:

$$\begin{aligned}
\sigma_r = \lambda r^{\lambda-1} \left[ a_1(3-\lambda) \cos(\lambda-1)\vartheta + a_2(\lambda-3) \sin(\lambda-1)\vartheta - \right. \\
\left. b_1 \cos(\lambda+1)\vartheta + b_2 \sin(\lambda+1)\vartheta \right]
\end{aligned} \tag{3.32}$$

mentre quelli immaginari a quella tangenziale si ha:

$$\begin{aligned}
\tau_{r\vartheta} = \lambda r^{\lambda-1} \left[ a_1(\lambda-1) \sin(\lambda-1)\vartheta - a_2(\lambda-1) \cos(\lambda-1)\vartheta + \right. \\
\left. b_1 \sin(\lambda+1)\vartheta + b_2 \cos(\lambda+1)\vartheta \right].
\end{aligned} \tag{3.33}$$

Sottraendo invece la 3.32 al doppio della 3.29 si ottiene l'espressione che descrive l'andamento della tensione circonferenziale:

$$\begin{aligned}
\sigma_\vartheta = \lambda r^{\lambda-1} \left[ a_1(1+\lambda) \cos(1-\lambda)\vartheta + a_2(1+\lambda) \sin(1-\lambda)\vartheta + \right. \\
\left. b_1 \cos(1+\lambda)\vartheta - b_2 \sin(1+\lambda)\vartheta \right].
\end{aligned} \tag{3.34}$$

Le seguenti scritte matriciali separano il contributo di Modo I da quello di Modo II:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_\vartheta \\ \sigma_r \\ \tau_{r\vartheta} \end{Bmatrix}_1 = \lambda_1 r^{\lambda_1-1} \begin{Bmatrix} a_1(1+\lambda_1) \cos(1-\lambda_1)\vartheta + b_1 \cos(1+\lambda_1)\vartheta \\ a_1(3-\lambda_1) \cos(1-\lambda_1)\vartheta - b_1 \cos(1+\lambda_1)\vartheta \\ a_1(1-\lambda_1) \sin(1-\lambda_1)\vartheta + b_1 \sin(1+\lambda_1)\vartheta \end{Bmatrix}, \tag{3.35}$$

evidenziandi come lungo la bisettrice, in presenza di puro Modo I, non vi siano componenti tangenziali di tensione mentre invece, in presenza di puro

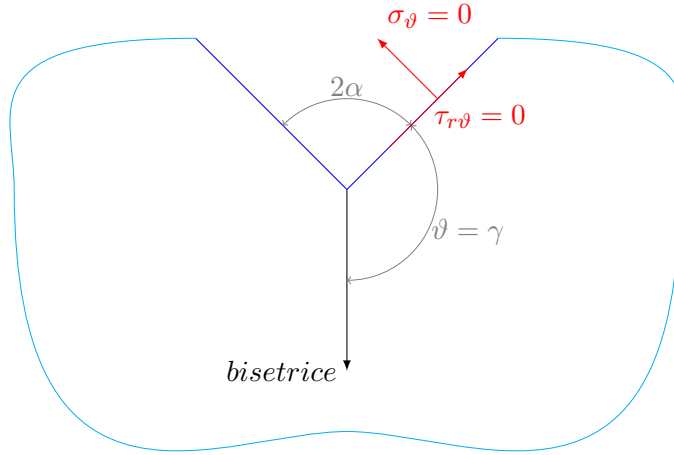


Figura 3.3: Rappresentazione delle condizioni al contorno imposte da England.

Modo II, non vi siano tensioni normali:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{\theta} \\ \sigma_r \\ \tau_{r\theta} \end{Bmatrix}_2 = \lambda_2 r^{\lambda_2-1} \begin{Bmatrix} a_2 (1 + \lambda_2) \sin(1 - \lambda_2)\vartheta - b_2 \sin(1 + \lambda_2)\vartheta \\ a_2 (3 - \lambda_2) \sin(1 - \lambda_2)\vartheta + b_2 \sin(1 + \lambda_2)\vartheta \\ a_2 (1 - \lambda_2) \cos(1 - \lambda_2)\vartheta + b_2 \cos(1 + \lambda_2)\vartheta \end{Bmatrix}. \quad (3.36)$$

Globalmente si deve determinare il valore di sei parametri liberi: tre per il Modo I ( $a_1, b_1$  e  $\lambda_1$ ) e tre per il Modo II ( $a_2, b_2$  e  $\lambda_2$ ); i cui significati saranno evidenti una volta applicate le condizioni al contorno.

### Determinazione dei parametri liberi

Il bordo dell'intaglio è *stress-free*. Questo comporta l'annullamento della tensione circonferenziale  $\sigma_{\vartheta}$  e di quella tangenziale  $\tau_{r\vartheta}$  quando l'anomalia  $\vartheta$  vale  $\pm\gamma$ . Il risultato è così il medesimo di quello ottenuto da Williams, il che dimostra come questo strumento abbia una valenza generale.

Determinati gli autovalori possiamo tornare al sistema omogeneo gene-

rale:

$$\begin{bmatrix} \kappa_{11} & \kappa_{12} & 0 & 0 \\ \kappa_{21} & \kappa_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \kappa_{33} & \kappa_{34} \\ 0 & 0 & \kappa_{43} & \kappa_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.37)$$

ed utilizzare due delle quattro equazioni per esprimere il parametro  $b$  in funzione di  $a$  e  $\lambda$  per entrambi i modi di propagazione:

$$b_1 = (a_1, \lambda_1) \quad b_2 = (a_2, \lambda_2). \quad (3.38)$$

Così facendo, il problema sarà perfettamente definito a meno di un parametro di Modo I ( $a_1$ ) e uno di Modo II ( $a_2$ ). Sono infatti rese dipendenti la prima e seconda equazione e la terza e quarta. Rimangono invece libere le costanti  $a_1$  e  $a_2$  che legheremo ai fattori di intensificazione delle tensioni  $K_1$  e  $K_2$ .

La seconda equazione ad esempio:

$$(1 - \lambda_1) \sin(1 - \lambda_1)\gamma \cdot a_1 + \sin(1 + \lambda_1)\gamma \cdot b_1 = 0 \quad (3.39)$$

permette di scrivere:

$$\begin{aligned} b_1 &= (1 - \lambda_1) \left[ -\frac{\sin(1 - \lambda_1)\gamma}{\sin(1 + \lambda_1)\gamma} \right] \cdot a_1 \\ &= (1 - \lambda_1) \cdot \chi_1 \cdot a_1. \end{aligned} \quad (3.40)$$

La terza equazione invece:

$$(1 + \lambda_2) \sin(1 - \lambda_2)\gamma \cdot a_2 - \sin(1 + \lambda_2)\gamma \cdot b_2 = 0 \quad (3.41)$$

permette di scrivere:

$$\begin{aligned} b_2 &= (1 + \lambda_2) \left[ +\frac{\sin(1 - \lambda_2)\gamma}{\sin(1 + \lambda_2)\gamma} \right] \cdot a_2 \\ &= - (1 + \lambda_2) \cdot \chi_2 \cdot a_2. \end{aligned} \quad (3.42)$$

Il valore dei parametri ausiliari  $\chi_1$  e  $\chi_2$  è raccolto nell'appendice.

Dal set di equazioni generali scrivo:

$$\begin{aligned}
\sigma_\theta^{(1)} &= \lambda_1 r^{\lambda_1-1} \cdot \left[ a_1 (1 + \lambda_1) \cos(1 - \lambda_1)\vartheta + b_1 \cos(1 + \lambda_1)\vartheta \right] \\
&= \lambda_1 r^{\lambda_1-1} \cdot \left[ a_1 (1 + \lambda_1) \cos(1 - \lambda_1)\vartheta + (1 - \lambda_1) \cdot \chi_1 \cdot a_1 \cos(1 + \lambda_1)\vartheta \right] \\
&= \lambda_1 r^{\lambda_1-1} \cdot a_1 \cdot \left[ (1 + \lambda_1) \cos(1 - \lambda_1)\vartheta + (1 - \lambda_1) \cdot \chi_1 \cdot \cos(1 + \lambda_1)\vartheta \right]
\end{aligned} \tag{3.43}$$

e ponendosi lungo la bisettrice, luogo geometrico definito da  $\vartheta = 0$  si ha:

$$\begin{aligned}
a_1 &= \frac{\sigma_\theta r^{1-\lambda_1}}{\lambda_1 \left[ 1 + \lambda_1 + \chi_1(1 - \lambda_1) \right]} \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{2\pi}} \\
&= \frac{K_1}{\sqrt{2\pi} \lambda_1 \left[ 1 + \lambda_1 + \chi_1(1 - \lambda_1) \right]}
\end{aligned} \tag{3.44}$$

avendo definito:

$$K_1 = \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2\pi} \sigma_\theta r^{1-\lambda_1}. \tag{3.45}$$

Con analoga procedura otteniamo:

$$\begin{aligned}
\tau_{r\theta}^{(2)} &= \lambda_2 r^{\lambda_2-1} \cdot \left[ -a_2 (1 - \lambda_2) \cos(1 - \lambda_2)\vartheta + b_2 \cos(1 + \lambda_2)\vartheta \right] \\
&= \lambda_2 r^{\lambda_2-1} \cdot \left[ -a_2 (1 - \lambda_2) \cos(1 - \lambda_2)\vartheta - (1 + \lambda_2) \cdot \chi_2 \cdot a_2 \cos(1 + \lambda_2)\vartheta \right] \\
&= \lambda_2 r^{\lambda_2-1} \cdot a_2 \cdot \left[ -(1 - \lambda_2) \cos(1 - \lambda_2)\vartheta - (1 + \lambda_2) \cdot \chi_2 \cdot \cos(1 + \lambda_2)\vartheta \right]
\end{aligned} \tag{3.46}$$

e ponendosi lungo la bisettrice, luogo geometrico definito da  $\vartheta = 0$  si ha:

$$\begin{aligned}
a_2 &= \frac{-\tau_{r\theta} r^{1-\lambda_2}}{\lambda_2 \left[ 1 - \lambda_2 + \chi_2(1 + \lambda_2) \right]} \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{2\pi}} \\
&= \frac{-K_2}{\sqrt{2\pi} \lambda_2 \left[ 1 - \lambda_2 + \chi_2(1 + \lambda_2) \right]}
\end{aligned} \tag{3.47}$$

avendo definito:

$$K_2 = \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2\pi} \tau_{r\theta} r^{1-\lambda_2}. \quad (3.48)$$

Noto il valore dello *Notch Stress Intensity Factor* di interesse, determino quello relativo a tensioni (e deformazioni tramite Lamè) presenti nella zona vicina all'apice dell'intaglio governata dalla singolarità. Una qualche limitazione bisogna comunque imporla per far capire che, pur essendo un parametro di campo, è comunque un parametro locale e questa la misero Gross e Mendelson nel 1972:

$$K_1 = \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2\pi} \cdot \sigma_{\vartheta} \cdot r^{1-\lambda_1}, \quad (3.49)$$

$$K_2 = \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2\pi} \cdot \tau_{r\vartheta} \cdot r^{1-\lambda_2}. \quad (3.50)$$

Questi parametri quantificano l'intensità dei campi di tensione e moltiplicano funzioni angolari note:

$$\sigma_{ij} = K_1 \cdot r^{\lambda_1-1} \cdot \tilde{\sigma}_{ij}^{(1)} + K_2 \cdot r^{\lambda_2-1} \cdot \tilde{\sigma}_{ij}^{(2)}. \quad (3.51)$$

## Capitolo 4

# Distribuzione delle tensioni in presenza di un intaglio raccordato

### 4.1 La soluzione di Lazzarin-Tovo

#### 4.1.1 Formulazione del problema

Nel 1996 è stato pubblicato un articolo scritto da Lazzarin e Tovo il quale aveva come scopo quello di determinare il valore delle componenti di tensione in prossimità di un intaglio a V raccordato al fondo soggetto a condizioni di tensione-deformazione piana, utilizzando il metodo sviluppato da Kolosoff-Muskhelishvili basato sulle seguenti funzioni a potenziale complesso:

$$\psi(z) = a \cdot z^\lambda \quad \varphi(z) = b \cdot z^\lambda + c \cdot z^\mu, \quad (4.1)$$

dove i coefficienti  $a, b$  e  $c$  sono numeri complessi:

$$a = a_1 + i a_2 \quad b = b_1 + i b_2 \quad c = c_1 + i c_2, \quad (4.2)$$

mente gli esponenti  $\lambda$  e  $\mu$  sono numeri reali e si ipotizza essere  $\lambda > \mu$ . Questa soluzione aggiunge un grado di libertà al problema riuscendo così a

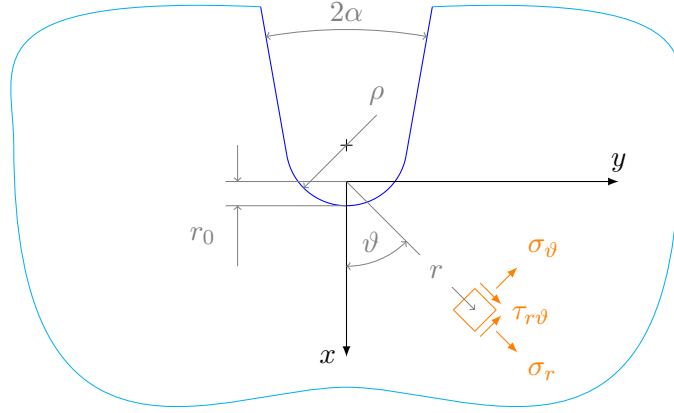


Figura 4.1: Configurazione geometrica di un intaglio raccordato e rappresentazione del sistema di riferimento polare adottato.

contemplare il raccordo a fondo intaglio. La soluzione di Williams si ottiene trascurando il termine in  $c$ .

Le componenti di tensione, espresse in un sistema di riferimento polare risultano essere le seguenti:

$$\begin{aligned} \sigma_r = \lambda r^{\lambda-1} & \left[ a_1 (3 - \lambda) \cos(\lambda - 1)\vartheta + a_2 (\lambda - 3) \sin(\lambda - 1)\vartheta - \right. \\ & \left. b_1 \cos(\lambda + 1)\vartheta + b_2 \sin(\lambda + 1)\vartheta \right] + \\ & \mu r^{\mu-1} \left[ -c_1 \cos(\mu + 1)\vartheta + c_2 \sin(\mu + 1)\vartheta \right], \quad (4.3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tau_{r\vartheta} = \lambda r^{\lambda-1} & \left[ a_1 (\lambda - 1) \sin(\lambda - 1)\vartheta - a_2 (\lambda - 1) \cos(\lambda - 1)\vartheta + \right. \\ & \left. b_1 \sin(\lambda + 1)\vartheta + b_2 \cos(\lambda + 1)\vartheta \right] + \\ & \mu r^{\mu-1} \left[ c_1 \sin(\mu + 1)\vartheta + c_2 \cos(\mu + 1)\vartheta \right], \quad (4.4) \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \sigma_{\vartheta} = \lambda r^{\lambda-1} & \left[ a_1 (1 + \lambda) \cos(1 - \lambda)\vartheta + a_2 (1 + \lambda) \sin(1 - \lambda)\vartheta + \right. \\ & \left. b_1 \cos(1 + \lambda)\vartheta - b_2 \sin(1 + \lambda)\vartheta \right] + \\ & \mu r^{\mu-1} \left[ c_1 \cos(1 + \mu)\vartheta - c_2 \sin(1 + \mu)\vartheta \right]. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Il valore dei parametri incogniti deve essere determinato imponendo appropriate condizioni al contorno.

#### 4.1.2 Condizioni al contorno

In aggiunta alle due poste all'infinito lungo il bordo dell'intaglio, già viste per lo spigolo vivo nella trattazione di England, gli autori ne impongono altre quattro sull'apice dell'intaglio; due per il modo simmetrico:

$$\sigma_r \Big|_{\substack{r=r_0 \\ \vartheta=0}} = 0, \quad (4.6)$$

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial \vartheta} - \frac{2}{q} \tau_{r\vartheta} \Big|_{\substack{r=r_0 \\ \vartheta=0}} = 0, \quad (4.7)$$

e due per il modo antisimmetrico:

$$\tau_{r\vartheta} \Big|_{\substack{r=r_0 \\ \vartheta=0}} = 0, \quad (4.8)$$

$$\frac{\partial \tau_{r\vartheta}}{\partial \vartheta} - \frac{1}{q} \sigma_{\vartheta} \Big|_{\substack{r=r_0 \\ \vartheta=0}} = 0. \quad (4.9)$$

#### 4.1.3 Determinazione degli esponenti e delle costanti

Le condizioni relative al Modo I e quelle relative al Modo II possono essere separate in due sistemi, la cui soluzione consente di esprimere  $c_1$  e  $c_2$  in funzione rispettivamente di  $a_1$  e  $a_2$ :

$$c_1 = \frac{\lambda_1}{\mu_1} a_1 r_0^{\lambda_1 - \mu_1} \left[ (3 - \lambda_1) - \chi_1 (1 - \lambda_1) \right], \quad (4.10)$$

$$c_2 = \frac{\lambda_2}{\mu_2} a_2 r_0^{\lambda_2 - \mu_2} \left[ (1 - \lambda_2) + \chi_2 (1 + \lambda_2) \right]. \quad (4.11)$$

Per esprimere invece i due esponenti  $\mu_1$  e  $\mu_2$  in funzione ancora di  $a_1$  e  $a_2$  basta imporre l'annullamento del determinante dei due sistemi sopra citati ottenendo, rispettivamente per il sistema relativo al problema simmetrico e quello relativo al problema antisimmetrico, le seguenti espressioni:

$$\mu_1 = \frac{1}{q} - \frac{(1 - \lambda_1)^2 - \frac{1}{q}(1 + \lambda_1) + \chi_1(1 - \lambda_1) \left[ (1 + \lambda_1) - \frac{1}{q} \right]}{\left[ (3 - \lambda_1) - \chi_1(1 - \lambda_1) \right]} - 1, \quad (4.12)$$

$$\mu_2 = -1 - \frac{(3 - \lambda_2)(1 - \lambda_2) - \chi_2(1 + \lambda_2)^2}{(1 - \lambda_2) + \chi_2(1 + \lambda_2)}. \quad (4.13)$$

#### 4.1.4 Formulazione generale delle componenti di tensione

Nota la geometria globale dell'intaglio è possibile scrivere la distribuzione delle tensioni relative al contributo di Modo I in funzione dell'unico parametro incognito  $a_1$ :

$$\sigma_r^{(1)} = \lambda_1 r^{\lambda_1 - 1} a_1 \left\{ \left[ (3 - \lambda_1) \cos(1 - \lambda_1)\vartheta - (1 - \lambda_1) \chi_1 \cos(1 + \lambda_1)\vartheta \right] - \left( \frac{r}{r_0} \right)^{\mu_1 - \lambda_1} \left[ (3 - \lambda_1) - \chi_1(1 - \lambda_1) \right] \cos(1 + \mu_1)\vartheta \right\}, \quad (4.14)$$

$$\tau_{r\vartheta}^{(1)} = \lambda_1 r^{\lambda_1 - 1} a_1 \left\{ \left[ (1 - \lambda_1) \sin(1 - \lambda_1)\vartheta + (1 - \lambda_1) \chi_1 \sin(1 + \lambda_1)\vartheta \right] + \left( \frac{r}{r_0} \right)^{\mu_1 - \lambda_1} \left[ (3 - \lambda_1) - \chi_1(1 - \lambda_1) \right] \sin(1 + \mu_1)\vartheta \right\}, \quad (4.15)$$

$$\sigma_\vartheta^{(1)} = \lambda_1 r^{\lambda_1 - 1} a_1 \left\{ \left[ (1 + \lambda_1) \cos(1 - \lambda_1)\vartheta + (1 - \lambda_1) \chi_1 \cos(1 + \lambda_1)\vartheta \right] + \left( \frac{r}{r_0} \right)^{\mu_1 - \lambda_1} \left[ (3 - \lambda_1) - \chi_1(1 - \lambda_1) \right] \cos(1 + \mu_1)\vartheta \right\}, \quad (4.16)$$

mentre quelle relative al contributo di Modo II in funzione dell'unico parametro incognito  $a_2$ :

$$\sigma_r^{(2)} = \lambda_2 r^{\lambda_2-1} a_2 \left\{ \left[ (3 - \lambda_2) \sin(1 - \lambda_2)\vartheta - (1 + \lambda_2) \chi_2 \sin(1 + \lambda_2)\vartheta \right] + \left( \frac{r}{r_0} \right)^{\mu_2 - \lambda_2} \left[ (1 - \lambda_2) + \chi_2 (1 + \lambda_2) \right] \sin(1 + \mu_2)\vartheta \right\}, \quad (4.17)$$

$$\tau_{r\vartheta}^{(2)} = \lambda_2 r^{\lambda_2-1} a_2 \left\{ \left[ -(1 - \lambda_2) \cos(1 - \lambda_2)\vartheta - (1 + \lambda_2) \chi_2 \cos(1 + \lambda_2)\vartheta \right] + \left( \frac{r}{r_0} \right)^{\mu_2 - \lambda_2} \left[ (1 - \lambda_2) + \chi_2 (1 + \lambda_2) \right] \cos(1 + \mu_2)\vartheta \right\}, \quad (4.18)$$

$$\sigma_\vartheta^{(2)} = \lambda_2 r^{\lambda_2-1} a_2 \left\{ \left[ (1 + \lambda_2) \sin(1 - \lambda_2)\vartheta + (1 + \lambda_2) \chi_2 \sin(1 + \lambda_2)\vartheta \right] - \left( \frac{r}{r_0} \right)^{\mu_2 - \lambda_2} \left[ (1 - \lambda_2) + \chi_2 (1 + \lambda_2) \right] \sin(1 + \mu_2)\vartheta \right\}. \quad (4.19)$$

#### 4.1.5 Determinazione del parametro incognito $a$

##### in funzione della tensione massima

Il parametro incognito  $a_1$  può essere legato alla tensione massima nel caso di trazione applicata a monte e a valle dell'intaglio in direzione  $y$ , essendo:

$$\sigma_\vartheta \Big|_{\substack{r=r_0 \\ \vartheta=0}} = 4 \lambda_1 r_0^{\lambda_1-1} a_1, \quad (4.20)$$

da cui:

$$a_1 = \frac{\sigma_{\text{trazione}}^{\max}}{4 \lambda_1 r_0^{\lambda_1-1}}. \quad (4.21)$$

Contrariamente a quanto osservato per le distribuzioni di Modo I, non è possibile utilizzare un criterio di picco per tarare la soluzione di Modo II in quanto all'apice tutte le tensioni sono nulle. Si utilizzerà quindi un criterio di campo, basandosi sull'andamento delle  $\sigma_{r\vartheta}$  lungo la bisettrice.

**ovvero in funzione di un parametro di campo**

In alternativa si possono esprimere le tensioni in funzione di due parametri di campo,  $K_1$  e  $K_2$ , detti *Notch Stress Intensity Factor* e definiti in accordo con Gross e Mendelson del 1972 ottenendo:

$$a_1 = \frac{K_1}{\sqrt{2\pi} \lambda_1 \left[ (1 + \lambda_1) + \chi_1 (1 - \lambda_1) \right]} \quad (4.22)$$

e

$$a_2 = \frac{K_2}{\sqrt{2\pi} \lambda_2 \left[ (1 - \lambda_2) + \chi_2 (1 + \lambda_2) \right]}. \quad (4.23)$$

**4.1.6 Confronto con altre soluzioni presenti in letteratura**

Servendosi della formulazione generale delle componenti di tensione ricavate da Lazzarin-Tovo,1996 è possibile ricavare come casi particolari altre soluzioni molto note della letteratura.

**Williams,1952**

Quando il raggio di curvatura è nullo (sharp V-notch:  $\rho = 0$ ), la distanza  $r_0$  si annulla e scompaiono i termini proporzionali ad  $r^\mu$ . Queste condizioni semplificano le equazioni generalizzate di Lazzari-Tovo facendole degenerare in quelle particolari ottenute da Williams e definite a meno della costante moltiplicativa  $a_1$ :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{\vartheta\vartheta} \\ \sigma_{rr} \\ \sigma_{r\vartheta} \end{Bmatrix} = \lambda_1 r^{\lambda_1-1} a_1 \left[ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} (1 + \lambda_1) \cos(1 - \lambda_1)\vartheta \\ (3 - \lambda_1) \cos(1 - \lambda_1)\vartheta \\ (1 - \lambda_1) \sin(1 - \lambda_1)\vartheta \end{array} \right\} + (1 - \lambda_1) \chi_1 \cdots \\ \cdots \left\{ \begin{array}{l} \cos 1 + \lambda_1\vartheta \\ -\cos 1 + \lambda_1\vartheta \\ \sin 1 + \lambda_1\vartheta \end{array} \right\} \end{array} \right]. \quad (4.24)$$

**Westergaard,1939 ed Irwin,1957**

Considerando invece una cricca, caratterizzata da  $\rho = 0$  e angolo di apertura  $2\alpha = 0$  si ha che anche la distanza  $r_0$  è nulla, l'autovalore vale  $\lambda = 0.5$  ed il parametro  $q$  è pari a 2. Le espressioni di Lazzarin Tovo degenerano nelle seguenti:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{\vartheta\vartheta} \\ \sigma_{rr} \\ \sigma_{r\vartheta} \end{Bmatrix} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \frac{1}{4} \begin{Bmatrix} 3 \cos \frac{\vartheta}{2} + \cos \frac{3\vartheta}{2} \\ 5 \cos \frac{\vartheta}{2} - \cos \frac{3\vartheta}{2} \\ \sin \frac{\vartheta}{2} + \sin \frac{3\vartheta}{2} \end{Bmatrix}. \quad (4.25)$$

**Creager-Paris,1967 e Glinka,1985**

Mantenendo nullo l'angolo di apertura  $2\alpha$  ma raccordando l'apice dell'intaglio  $\rho \neq 0$ , il che si traduce nell'assegnare i seguenti valori ai parametri  $q = 2$ ,  $r_0 = q/2$ ,  $\lambda = 0.5$  e  $\mu = -0.5$ , si ottengono le equazioni di Creager-Paris e Glinka:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{\vartheta\vartheta} \\ \sigma_{rr} \\ \sigma_{r\vartheta} \end{Bmatrix} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \left[ \frac{1}{4} \begin{Bmatrix} 3 \cos \frac{\vartheta}{2} + \cos \frac{3\vartheta}{2} \\ 5 \cos \frac{\vartheta}{2} - \cos \frac{3\vartheta}{2} \\ \sin \frac{\vartheta}{2} + \sin \frac{3\vartheta}{2} \end{Bmatrix} + \frac{\rho}{2r} \begin{Bmatrix} \cos \frac{\vartheta}{2} \\ -\cos \frac{\vartheta}{2} \\ \sin \frac{\vartheta}{2} \end{Bmatrix} \right]. \quad (4.26)$$

**Neuber**

Il caso ricavato da Neuber, valido lungo la bisettrice di un intaglio iperbolico, possono essere ricavate come caso particolare delle equazioni generalizzate definite da Lazzarin Tovo:

$$\sigma_{\vartheta\vartheta} = \frac{\sigma_{max}}{4} \begin{Bmatrix} \left(\frac{r}{r_0}\right)^{\lambda_1-1} \left[ (1 + \lambda_1) + (1 - \lambda_1) \chi_1 \right] + \dots \\ \dots \left(\frac{r}{r_0}\right)^{\mu_1-1} \left[ (3 - \lambda_1) - (1 - \lambda_1) \chi_1 \right] \end{Bmatrix}, \quad (4.27)$$

e

$$\sigma_{rr} = \frac{\sigma_{max}}{4} \begin{Bmatrix} \left(\frac{r}{r_0}\right)^{\lambda_1-1} \left[ (3 - \lambda_1) - (1 - \lambda_1) \chi_1 \right] - \dots \\ \dots \left(\frac{r}{r_0}\right)^{\mu_1-1} \left[ (3 - \lambda_1) - (1 - \lambda_1) \chi_1 \right] \end{Bmatrix}, \quad (4.28)$$

mentre la tensione tangenziale  $\sigma_{r\vartheta}$  è nulla.

## 4.2 La soluzione di Filippi-Lazzarin

### 4.2.1 Introduzione

Gli autori di questo contributo aggiungono un termine alle funzioni a potenziali complessi suggerite dalla precedente trattazione, con l'obiettivo di rendere più accurata la descrizione dello stato tensionale nella zona critica e di fornire, in presenza di raggi di raccordo  $\rho$  sufficientemente ampi, un preciso legame tra tensioni elastiche di picco e tensioni valutate ad una distanza dall'apice compresa tra  $2\rho$  e  $5\rho$ . Le relazioni che verranno riportate potrebbero per tanto anche consentire una stima accurata del fattore di concentrazione delle tensioni usando dati numerici ed estensimetrici ottenuti ad una conveniente distanza dall'apice dell'intaglio.

### 4.2.2 Formulazione del problema

Viene dunque proposta una nuova espressione della funzione a potenziale complesso, che vede l'aggiunta del termine in  $d$  rispetto alle funzioni già riportate da Lazzarin-Tovo, 1996 per migliorare l'accuratezza della soluzione analitica:

$$\psi(z) = a \cdot z^\lambda + d \cdot z^\mu \quad \varphi(z) = b \cdot z^\lambda + c \cdot z^\mu, \quad (4.29)$$

dalle quali derivano le seguenti espressioni delle componenti di tensione:

$$\begin{aligned} \sigma_r = \lambda r^{\lambda-1} & \left[ a_1 (3 - \lambda) \cos(\lambda - 1)\vartheta + a_2 (\lambda - 3) \sin(\lambda - 1)\vartheta - \right. \\ & \left. b_1 \cos(\lambda + 1)\vartheta + b_2 \sin(\lambda + 1)\vartheta \right] + \\ & \mu r^{\mu-1} \left[ -c_1 \cos(\mu + 1)\vartheta + c_2 \sin(\mu + 1)\vartheta + \right. \\ & \left. d_1 (3 - \mu) \cos(1 - \mu)\vartheta + d_2 (3 - \mu) \sin(1 - \mu)\vartheta \right], \quad (4.30) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tau_{r\vartheta} = \lambda r^{\lambda-1} & \left[ a_1 (\lambda - 1) \sin(\lambda - 1)\vartheta - a_2 (\lambda - 1) \cos(\lambda - 1)\vartheta + \right. \\
& \left. b_1 \sin(\lambda + 1)\vartheta + b_2 \cos(\lambda + 1)\vartheta \right] + \\
\mu r^{\mu-1} & \left[ c_1 \sin(\mu + 1)\vartheta + c_2 \cos(\mu + 1)\vartheta + \right. \\
& \left. d_1 (1 - \mu) \sin(1 - \mu)\vartheta - d_2 (3 - \mu) \cos(1 - \mu)\vartheta \right], \quad (4.31)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_\vartheta = \lambda r^{\lambda-1} & \left[ a_1 (1 + \lambda) \cos(1 - \lambda)\vartheta + a_2 (1 + \lambda) \sin(1 - \lambda)\vartheta + \right. \\
& \left. b_1 \cos(1 + \lambda)\vartheta - b_2 \sin(1 + \lambda)\vartheta \right] + \\
\mu r^{\mu-1} & \left[ c_1 \cos(1 + \mu)\vartheta - c_2 \sin(1 + \mu)\vartheta + \right. \\
& \left. d_1 (1 + \mu) \cos(1 - \mu)\vartheta + d_2 (1 + \mu) \sin(1 - \mu)\vartheta \right]. \quad (4.32)
\end{aligned}$$

### 4.2.3 Condizioni al contorno

Il nuovo addendo con esponente  $\mu$  dà un contributo significativo solo nella zona vicino all'apice dell'intaglio, garantendo così una maggiore flessibilità rispetto alla soluzione approssimata di partenza (Lazzarin-Tovo,1996). Introducendo un nuovo coefficiente complesso si hanno due nuovi parametri liberi reali  $d_1$  e  $d_2$ . Per determinare tali parametri è necessario imporre due nuove condizioni al contorno all'infinito per annullare prima la parte simmetrica della tensione normale e poi quella asimmetrica della tensione tangenziale.

Le nuove condizioni al contorno, espresse in un sistema di riferimento

curvilineo  $(u, v)$ , sono:

$$\sigma_{uu} \Big|_{\substack{u=u_0 \\ v < < -v_0}} + \sigma_{uu} \Big|_{\substack{u=u_0 \\ v > > +v_0}} = 0, \quad (4.33)$$

$$\sigma_{uv} \Big|_{\substack{u=u_0 \\ v > > +v_0}} + \sigma_{uv} \Big|_{\substack{u=u_0 \\ v < < -v_0}} = 0, \quad (4.34)$$

mentre in uno polare  $(r, \vartheta)$  diventano:

$$\lim_{\substack{r \rightarrow \infty \\ \vartheta \rightarrow -q \frac{\pi}{2}}} \left( r^{1-\mu} \sigma_{\vartheta\vartheta} \right) + \lim_{\substack{r \rightarrow \infty \\ \vartheta \rightarrow +q \frac{\pi}{2}}} \left( r^{1-\mu} \sigma_{\vartheta\vartheta} \right) = 0, \quad (4.35)$$

$$\lim_{\substack{r \rightarrow \infty \\ \vartheta \rightarrow +q \frac{\pi}{2}}} \left( r^{1-\mu} \sigma_{r\vartheta} \right) - \lim_{\substack{r \rightarrow \infty \\ \vartheta \rightarrow -q \frac{\pi}{2}}} \left( r^{1-\mu} \sigma_{r\vartheta} \right) = 0. \quad (4.36)$$

#### 4.2.4 Determinazione degli esponenti e delle costanti

##### Modo I

Imponendo nuovamente le seguenti due condizioni al contorno valide per il modo simmetrico:

$$\sigma_r \Big|_{\substack{r=r_0 \\ \vartheta=0}} = 0, \quad (4.37)$$

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial \vartheta} - \frac{2}{q} \tau_{r\vartheta} \Big|_{\substack{r=r_0 \\ \vartheta=0}} = 0, \quad (4.38)$$

si ottiene:

$$c_1 = \frac{q \lambda_1 r_0^{\lambda_1 - \mu_1}}{4 \mu_1 (q - 1)} \cdot \chi_{c1} \cdot a_1 \quad (4.39)$$

$$d_1 = \frac{q \lambda_1 r_0^{\lambda_1 - \mu_1}}{4 \mu_1 (q - 1)} \cdot \chi_{c1} \cdot a_1 \quad (4.40)$$

dove i parametri ausiliari hanno la seguente forma.

$$\chi_{c1} = \left[ (1 - \mu_1)^2 - \frac{1}{q} (1 + \mu_1) \right] \left[ (3 - \lambda_1) - \chi_{b1} (1 - \lambda_1) \right] - (3 - \mu_1) \varepsilon_1 \quad (4.41)$$

$$\chi_{d1} = \left[ \frac{1 - q(1 + \mu_1)}{q} \right] \left[ (3 - \lambda_1) - \chi_{b1} (1 - \lambda_1) \right] - \varepsilon_1 \quad (4.42)$$



mentre:

$$\varepsilon_1 = (1 - \lambda_1)^2 + \chi_{b1} (1 - \lambda_1^2) - \frac{1}{q} \chi_{b1} (1 - \lambda_1). \quad (4.43)$$

L'esponente  $\mu_1$  può venire calcolato risolvendo la seguente equazione:

$$\left\{ \left[ \frac{1 - q(1 + \mu_1)}{q} \right] \left[ (3 - \lambda_1) - \chi_{b1} (1 - \lambda_1) \right] - \varepsilon_1 \right\} \cdot \\ (1 + \mu_1) \cos \left[ (1 - \mu_1) q \frac{\pi}{2} \right] + \\ \left\{ \left[ (1 - \mu_1)^2 - \frac{1}{q} (1 + \mu_1) \right] \left[ (3 - \lambda_1) - \chi_{b1} (1 - \lambda_1) \right] - (3 - \mu_1) \varepsilon_1 \right\} \cdot \\ \cos \left[ (1 + \mu_1) q \frac{\pi}{2} \right] = 0. \quad (4.44)$$

## Modo II

Imponendo nuovamente le seguenti due condizioni al contorno valide per il modo antisimmetrico:

$$\tau_{r\vartheta} \Big|_{\substack{r=r_0 \\ \vartheta=0}} = 0, \quad (4.45)$$

$$\frac{\partial \tau_{r\vartheta}}{\partial \vartheta} - \frac{1}{q} \sigma_{\vartheta} \Big|_{\substack{r=r_0 \\ \vartheta=0}} = 0. \quad (4.46)$$

si ottiene:

$$c_2 = \frac{\lambda_2 r_0^{\lambda_2 - \mu_2}}{4 \mu_2 (\mu_2 - 1)} \cdot \chi_{c2} \cdot a_2 \quad (4.47)$$

$$d_2 = \frac{\lambda_2 r_0^{\lambda_2 - \mu_2}}{4 \mu_2 (\mu_2 - 1)} \cdot \chi_{d2} \cdot a_2 \quad (4.48)$$

dove i parametri ausiliari hanno la seguente forma:

$$\chi_{c2} = (\mu_2 - 1) \left[ \frac{q(\mu_2 - 3) - 2}{q} \right] \left[ (\lambda_2 - 1) - \chi_{b2} (1 + \lambda_2) \right] + (1 - \mu_2) \varepsilon_2 \quad (4.49)$$

$$\chi_{d2} = - \left[ \frac{q(1 + \mu_2) - 2}{q} \right] \left[ (\lambda_2 - 1) - \chi_{b2} (1 + \lambda_2) \right] + \varepsilon_2 \quad (4.50)$$

mentre:

$$\varepsilon_2 = (1 - \lambda_2)(3 - \lambda_2) - \chi_{b2} (1 + \lambda_2)^2 + \frac{2}{q} (1 - \lambda_2) + \frac{2}{q} \chi_{b2} (1 + \lambda_2). \quad (4.51)$$

L'esponente  $\mu_2$  può venire calcolato risolvendo la seguente equazione:

$$\left\{ \left[ \frac{1 - q(1 + \mu_1)}{q} \right] \left[ (3 - \lambda_1) - \chi_{b1} (1 - \lambda_1) \right] - \varepsilon_1 \right\} \cdot \\ (1 + \mu_1) \cos \left[ (1 - \mu_1) q \frac{\pi}{2} \right] + \\ \left\{ \left[ (1 - \mu_1)^2 - \frac{1}{q} (1 + \mu_1) \right] \left[ (3 - \lambda_1) - \chi_{b1} (1 - \lambda_1) \right] - (3 - \mu_1) \varepsilon_1 \right\} \cdot \\ \cos \left[ (1 + \mu_1) q \frac{\pi}{2} \right] = 0. \quad (4.52)$$

#### 4.2.5 Formulazione generale delle componenti di tensione

É possibile esprimere la distribuzione delle tensioni in funzione di soli due parametri ancora incogniti,  $a_1$  e  $a_2$ , separando ancora una volta il contributo di Modo I da quello di Modo II si hanno le seguenti:

$$\sigma_r^{(1)} = \lambda_1 r^{\lambda_1 - 1} a_1 \left\{ \left[ (3 - \lambda_1) \cos(1 - \lambda_1)\vartheta - (1 - \lambda_1) \chi_{b1} \cos(1 + \lambda_1)\vartheta \right] + \right. \\ \left. \frac{q}{4(q - 1)} \left( \frac{r}{r_0} \right)^{\mu_1 - \lambda_1} \left[ \chi_{d1} (3 - \mu_1) \cos(1 - \mu_1)\vartheta - \chi_{c1} \cos(1 + \mu_1)\vartheta \right] \right\}, \quad (4.53)$$

$$\tau_{r\vartheta}^{(1)} = \lambda_1 r^{\lambda_1 - 1} a_1 \left\{ \left[ (1 - \lambda_1) \sin(1 - \lambda_1)\vartheta + (1 - \lambda_1) \chi_{b1} \sin(1 + \lambda_1)\vartheta \right] + \right. \\ \left. \frac{q}{4(q - 1)} \left( \frac{r}{r_0} \right)^{\mu_1 - \lambda_1} \left[ \chi_{d1} (1 - \mu_1) \sin(1 - \mu_1)\vartheta + \chi_{c1} \sin(1 + \mu_1)\vartheta \right] \right\}, \quad (4.54)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\vartheta}^{(1)} = & \lambda_1 r^{\lambda_1-1} a_1 \left\{ \left[ (1 + \lambda_1) \cos(1 - \lambda_1)\vartheta + (1 - \lambda_1) \chi_{b_1} \cos(1 + \lambda_1)\vartheta \right] + \right. \\ & \left. \frac{q}{4(q-1)} \left( \frac{r}{r_0} \right)^{\mu_1-\lambda_1} \left[ \chi_{d_1} (1 + \mu_1) \cos(1 - \mu_1)\vartheta - \chi_{c_1} \cos(1 + \mu_1)\vartheta \right] \right\}, \end{aligned} \quad (4.55)$$

$$\begin{aligned} \sigma_r^{(2)} = & \lambda_2 r^{\lambda_2-1} a_2 \left\{ \left[ (3 - \lambda_2) \sin(1 - \lambda_2)\vartheta - (1 + \lambda_2) \chi_{b_2} \sin(1 + \lambda_2)\vartheta \right] + \right. \\ & \left. \frac{1}{4(\mu_2-1)} \left( \frac{r}{r_0} \right)^{\mu_2-\lambda_2} \left[ \chi_{d_2} (3 - \mu_2) \sin(1 - \mu_2)\vartheta + \chi_{c_2} \sin(1 + \mu_2)\vartheta \right] \right\}, \end{aligned} \quad (4.56)$$

$$\begin{aligned} \tau_{r\vartheta}^{(2)} = & \lambda_2 r^{\lambda_2-1} a_2 \left\{ \left[ (1 - \lambda_2) \cos(1 - \lambda_2)\vartheta + (1 + \lambda_2) \chi_{b_2} \cos(1 + \lambda_2)\vartheta \right] + \right. \\ & \left. \frac{1}{4(\mu_2-1)} \left( \frac{r}{r_0} \right)^{\mu_2-\lambda_2} \left[ \chi_{d_2} (1 - \mu_2) \cos(1 - \mu_2)\vartheta - \chi_{c_2} \cos(1 + \mu_2)\vartheta \right] \right\}, \end{aligned} \quad (4.57)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\vartheta}^{(2)} = & \lambda_2 r^{\lambda_2-1} a_2 \left\{ \left[ (1 + \lambda_2) \sin(1 - \lambda_2)\vartheta + (1 + \lambda_2) \chi_{b_2} \sin(1 + \lambda_2)\vartheta \right] + \right. \\ & \left. \frac{1}{4(\mu_2-1)} \left( \frac{r}{r_0} \right)^{\mu_2-\lambda_2} \left[ \chi_{d_2} (1 + \mu_2) \sin(1 - \mu_2)\vartheta - \chi_{c_2} \sin(1 + \mu_2)\vartheta \right] \right\}. \end{aligned} \quad (4.58)$$

È tutto noto a meno di  $a_1$  e  $a_2$  in quanto tutti gli altri parametri in gioco sono funzione della geometria globale dell'intaglio la quale è nota a priori.

#### 4.2.6 Determinazione del parametro incognito $a$

Richiamiamo per completezza le formulazioni già viste nell'omonimo paragrafo del capitolo precedente:

$$a_1 = \frac{\sigma_{\text{trazione}}^{\max}}{4 \lambda_1 r_0^{\lambda_1-1}}, \quad (4.59)$$

$$a_1 = \frac{K_1}{\sqrt{2\pi} \lambda_1 \left[ (1 + \lambda_1) + \chi_1 (1 - \lambda_1) \right]}, \quad (4.60)$$

$$a_2 = \frac{K_2}{\sqrt{2\pi} \lambda_2 \left[ (1 - \lambda_2) + \chi_2 (1 + \lambda_2) \right]}. \quad (4.61)$$

#### 4.2.7 Confronto con altre soluzioni presenti in letteratura

Usando per comodità un sistema di riferimento locale cartesiano  $(x, y)$ , posizionato in corrispondenza dell'apice dell'intaglio e con asse  $x$  parallelo alla bisettrice, le equazioni generali determinate da Filippi e Lazzarin assumono la seguente forma particolare nel caso di blunt crack ( $2\alpha = 0$  e  $\rho \neq 0$ ):

$$\sigma_y = \frac{\sigma_{\max}}{2\sqrt{2}} \rho^{0.5} \left[ (x + 0.5\rho)^{-0.5} + 0.5\rho (x + 0.5\rho)^{-1.5} \right] \quad (4.62)$$

la quale coincide con le equazioni di Creager-Paris, 1967.

## Capitolo 5

# Valore medio della densità di energia in un volume finito

### 5.1 Criterio di volume basato sulla densità di energia di deformazione totale

La densità di energia di deformazione totale, per un materiale isotropo e lineare elastico, vale:

$$W(r, \vartheta) = \frac{1}{2E} \left[ \sigma_{rr}^2 + \sigma_{\vartheta\vartheta}^2 + \sigma_{zz}^2 - 2\nu (\sigma_{rr} \sigma_{\vartheta\vartheta} + \sigma_{rr} \sigma_{zz} + \sigma_{\vartheta\vartheta} \sigma_{zz}) + 2(1+\nu) \sigma_{r\vartheta}^2 \right] \quad (5.1)$$

con riferimento alle componenti di tensione espresse in un sistema di riferimento polare. Utilizzando il principio di sovrapposizione degli effetti, le distribuzioni delle tensioni nelle immediate adiacenze dell'apice possono essere scritte come la somma del contributo di Modo I e del Modo II; in maniera sintetica:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{rr} \\ \sigma_{\vartheta\vartheta} \\ \tau_{r\vartheta} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sigma_{rr} \\ \sigma_{\vartheta\vartheta} \\ \sigma_{r\vartheta} \end{Bmatrix}_{(1)} + \begin{Bmatrix} \sigma_{rr} \\ \sigma_{\vartheta\vartheta} \\ \sigma_{r\vartheta} \end{Bmatrix}_{(2)} . \quad (5.2)$$

La componente di tensione lungo lo spessore, nelle condizione di deformazione piana o tensione piana, è espressa rispettivamente dalle seguenti:

$$\sigma_{zz(1)} = \nu \left( \sigma_{rr(1)} + \sigma_{\vartheta\vartheta(1)} \right) \quad \sigma_{zz(1)} = 0 \quad (5.3)$$

per il Modo I, mentre:

$$\sigma_{zz(2)} = \nu \left( \sigma_{rr(2)} + \sigma_{\vartheta\vartheta(2)} \right) \quad \sigma_{zz(2)} = 0 \quad (5.4)$$

per il Modo II.

Considerando la notazione sintetica 5.2, l'espressione 5.1 può essere riscritta evidenziando gli effetti dei diversi contributi:

$$W(r, \vartheta) = W_1(r, \vartheta) + W_2(r, \vartheta) + W_{12}(r, \vartheta) \quad (5.5)$$

dove:

$$\begin{aligned} W_1(r, \vartheta) = \frac{1}{2E} \frac{K_1^2}{r^{2(1-\lambda_1)}} & \left[ \tilde{\sigma}_{rr(1)}^2 + \tilde{\sigma}_{\vartheta\vartheta(1)}^2 + \tilde{\sigma}_{zz(1)}^2 - \right. \\ & 2\nu \left( \tilde{\sigma}_{rr(1)} \tilde{\sigma}_{\vartheta\vartheta(1)} + \tilde{\sigma}_{rr(1)} \tilde{\sigma}_{zz(1)} + \tilde{\sigma}_{\vartheta\vartheta(1)} \tilde{\sigma}_{zz(1)} \right) + \\ & \left. 2(1+\nu) \tilde{\sigma}_{r\vartheta(1)}^2 \right], \quad (5.6) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W_2(r, \vartheta) = \frac{1}{2E} \frac{K_2^2}{r^{2(1-\lambda_2)}} & \left[ \tilde{\sigma}_{rr(2)}^2 + \tilde{\sigma}_{\vartheta\vartheta(2)}^2 + \tilde{\sigma}_{zz(2)}^2 - \right. \\ & 2\nu \left( \tilde{\sigma}_{rr(2)} \tilde{\sigma}_{\vartheta\vartheta(2)} + \tilde{\sigma}_{rr(2)} \tilde{\sigma}_{zz(2)} + \tilde{\sigma}_{\vartheta\vartheta(2)} \tilde{\sigma}_{zz(2)} \right) + \\ & \left. 2(1+\nu) \tilde{\sigma}_{r\vartheta(2)}^2 \right], \quad (5.7) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W_{12}(r, \vartheta) = \frac{1}{2E} \frac{K_1^2 K_2^2}{r^{2-\lambda_1-\lambda_2}} & \left[ \tilde{\sigma}_{rr(1)} \tilde{\sigma}_{rr(2)} + \tilde{\sigma}_{\vartheta\vartheta(1)} \tilde{\sigma}_{\vartheta\vartheta(2)} + \tilde{\sigma}_{zz(1)} \tilde{\sigma}_{zz(2)} - \right. \\ & \nu \left( \tilde{\sigma}_{rr(1)} \tilde{\sigma}_{\vartheta\vartheta(2)} + \tilde{\sigma}_{rr(2)} \tilde{\sigma}_{\vartheta\vartheta(1)} + \tilde{\sigma}_{rr(1)} \tilde{\sigma}_{zz(2)} + \tilde{\sigma}_{rr(2)} \tilde{\sigma}_{zz(1)} + \right. \\ & \left. \left. \tilde{\sigma}_{\vartheta\vartheta(1)} \tilde{\sigma}_{zz(2)} + \tilde{\sigma}_{\vartheta\vartheta(2)} \tilde{\sigma}_{zz(1)} \right) + \right. \\ & \left. 2(1+\nu) \tilde{\sigma}_{r\vartheta(1)} \tilde{\sigma}_{r\vartheta(2)} \right]. \quad (5.8) \end{aligned}$$

Le funzioni angolari possono essere immediatamente determinate dalle espressioni delle componenti di tensione viste nei paragrafi dei capitoli precedenti e sempre riassunte alla fine con una notazione compatta del tipo:

$$\sigma_{ij} = a r^{\lambda-1} \left[ f_{ij}(\theta, \alpha) + \left(\frac{r}{r_0}\right)^{\mu-\lambda} g_{ij}(\theta, \alpha) \right], \quad (5.9)$$

dove il generico parametro  $a$  può essere espresso a mezzo del fattore di intensificazione delle tensioni  $K$  nel caso di intaglio a spigolo vivo oppure a mezzo della massima tensione elastica quando il fondo dell'intaglio è raccordato. Le autofunzioni angolari per la configurazione più generale possibile di indebolimento, soggetto a sollecitazioni di Modo I, sono date da:

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} f_{\theta\theta(1)} \\ f_{rr(1)} \\ f_{r\theta(1)} \end{Bmatrix} &= \frac{1}{1 + \lambda_1 + \chi_{b1}(1 - \lambda_1)} \\ &\left[ \begin{Bmatrix} (1 + \lambda_1) \cos(1 - \lambda_1)\vartheta \\ (3 - \lambda_1) \cos(1 - \lambda_1)\vartheta \\ (1 - \lambda_1) \sin(1 - \lambda_1)\vartheta \end{Bmatrix} + \chi_{b1}(1 - \lambda_1) \begin{Bmatrix} \cos(1 + \lambda_1)\vartheta \\ -\cos(1 + \lambda_1)\vartheta \\ \sin(1 + \lambda_1)\vartheta \end{Bmatrix} \right] \end{aligned} \quad (5.10)$$

e

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} g_{\theta\theta(1)} \\ g_{rr(1)} \\ g_{r\theta(1)} \end{Bmatrix} &= \frac{q}{4(q-1)[1 + \lambda_1 + \chi_{b1}(1 - \lambda_1)]} \\ &\left[ \chi_{d1} \begin{Bmatrix} (1 + \mu_1) \cos(1 - \mu_1)\vartheta \\ (3 - \mu_1) \cos(1 - \mu_1)\vartheta \\ (1 - \mu_1) \sin(1 - \mu_1)\vartheta \end{Bmatrix} + \chi_{c1} \begin{Bmatrix} \cos(1 + \mu_1)\vartheta \\ -\cos(1 + \mu_1)\vartheta \\ \sin(1 + \mu_1)\vartheta \end{Bmatrix} \right]. \end{aligned} \quad (5.11)$$

mentre quando soggetto a sollecitazioni di Modo II, sono date da:

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} f_{\theta\theta(2)} \\ f_{rr(2)} \\ f_{r\theta(2)} \end{Bmatrix} &= \frac{1}{1 + \lambda_2 + \chi_{b2}(1 - \lambda_2)} \\ &\left[ \begin{Bmatrix} (1 + \lambda_2) \sin(1 - \lambda_2)\vartheta \\ (3 - \lambda_2) \sin(1 - \lambda_2)\vartheta \\ (1 - \lambda_2) \cos(1 - \lambda_2)\vartheta \end{Bmatrix} + \chi_{b2}(1 - \lambda_2) \begin{Bmatrix} \sin(1 + \lambda_2)\vartheta \\ -\sin(1 + \lambda_2)\vartheta \\ \cos(1 + \lambda_2)\vartheta \end{Bmatrix} \right] \end{aligned} \quad (5.12)$$

e

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} g_{\theta\theta(2)} \\ g_{rr(2)} \\ g_{r\theta(2)} \end{Bmatrix} &= \frac{q}{4(q-1)[1+\lambda_2+\chi_{b2}(1-\lambda_2)]} \\ &\left[ \chi_{d2} \begin{Bmatrix} (1+\mu_2) \sin(1-\mu_2)\vartheta \\ (3-\mu_2) \sin(1-\mu_2)\vartheta \\ (1-\mu_2) \cos(1-\mu_2)\vartheta \end{Bmatrix} + \chi_{c2} \begin{Bmatrix} \sin(1+\mu_2)\vartheta \\ \sin(1+\mu_2)\vartheta \\ -\cos(1+\mu_2)\vartheta \end{Bmatrix} \right]. \end{aligned} \quad (5.13)$$

Noto il legame tra tensioni e deformazioni, è possibile valutare l'energia di deformazione elastica totale contenuta in un settore circolare di raggio  $R$ , centrato sull'apice dell'intaglio a spigolo vivo:

$$\begin{aligned} E(R) &= \int_A W dA \\ &= \int_0^R \int_{-\gamma}^{+\gamma} [W_1(r, \theta) + W_2(r, \theta) + W_{12}(r, \theta)] r dr d\theta. \end{aligned}$$

Dato che il campo di integrazione è simmetrico rispetto alla bisettrice dell'intaglio il contributo mutuo  $W_{12}(r, \theta)$  è nullo in quanto risultato della somma di prodotti nei quali un fattore è sempre nullo e quindi l'espressione finale è:

$$\begin{aligned} E(R) &= E_1(R) + E_2(R) \\ &= \frac{1}{E} \left[ \frac{I_1(\gamma)}{4\lambda_1} K_1^2 R^{2\lambda_1} + \frac{I_2(\gamma)}{4\lambda_2} K_2^2 R^{2\lambda_2} \right] \end{aligned} \quad (5.14)$$

dove gli integrali  $I_1$  e  $I_2$  dipendono da  $\gamma$  e dal rapporto di Poisson  $\nu$ :

$$\begin{aligned} I_1(\gamma) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\gamma}^{+\gamma} [f_{\theta\theta(1)}^2 + f_{rr(1)}^2 + f_{zz(1)}^2 - \\ &\quad 2\nu(f_{\theta\theta(1)}f_{rr(1)} + f_{\theta\theta(1)}f_{zz(1)} + f_{rr(1)}f_{zz(1)}) + \\ &\quad 2(1+\nu)f_{r\theta(1)}^2] d\theta, \end{aligned} \quad (5.15)$$

$$\begin{aligned} I_2(\gamma) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\gamma}^{+\gamma} [f_{\theta\theta(2)}^2 + f_{rr(2)}^2 + f_{zz(2)}^2 - \\ &\quad 2\nu(f_{\theta\theta(2)}f_{rr(2)} + f_{\theta\theta(2)}f_{zz(2)} + f_{rr(2)}f_{zz(2)}) + \\ &\quad 2(1+\nu)f_{r\theta(2)}^2] d\theta, \end{aligned} \quad (5.16)$$



dove ovviamente, in condizioni di deformazione piana, le autofunzioni  $f_{ij}$  e  $g_{ij}$  soddisfano le seguenti espressioni:

$$f_{zz} = \nu \left( f_{\vartheta\vartheta}(\vartheta) + f_{rr}(\vartheta) \right), \quad (5.17)$$

$$g_{zz} = \nu \left( g_{\vartheta\vartheta}(\vartheta) + g_{rr}(\vartheta) \right). \quad (5.18)$$

Il valore degli integrali  $I_1$  e  $I_2$  sono raccolti in appendice per diversi angoli di apertura.

L'area del settore circolare di raggio  $R$  sul quale viene effettuata l'integrazione vale:

$$A(R) = \int_0^R \int_{-\gamma}^{+\gamma} r \, dr \, d\theta = R^2 \gamma. \quad (5.19)$$

Quindi l'energia di deformazione elastica mediata sull'area risulta essere:

$$\begin{aligned} \bar{W} &= \frac{E(R)}{A(R)} \\ &= \frac{1}{E} \left[ \frac{I_1(\gamma)}{4 \lambda_1 \gamma} \frac{K_1^2}{R^{2(1-\lambda_1)}} + \frac{I_2(\gamma)}{4 \lambda_2 \gamma} \frac{K_2^2}{R^{2(1-\lambda_2)}} \right]. \end{aligned} \quad (5.20)$$

Operando un'estensione non convenzionale del criterio di Beltrami, ipotizzando quindi che il cedimento di un componente avvenga quando il valore medio dell'energia di deformazione totale raggiunge un valore limite caratteristico del materiale, possiamo scrivere la condizione di incipiente cedimento come:

$$\bar{W} = W_c \quad (5.21)$$

essendo  $W_c$  il valore critico della densità di energia di deformazione.

Se il materiale manifesta un comportamento fragile, questo valore può essere valutato semplicemente utilizzando un conveniente dato limite di resistenza  $\sigma_t$ , ottenendo:

$$W_c = \frac{\sigma_t^2}{2E}. \quad (5.22)$$

Spesso i provini lisci manifestano un comportamento non lineare mentre per quelli intagliati rimane lineare. Ciò detto la tensione  $\sigma_t$  dovrebbe essere sostituita con quella massima presente al bordo dell'intaglio nel momento

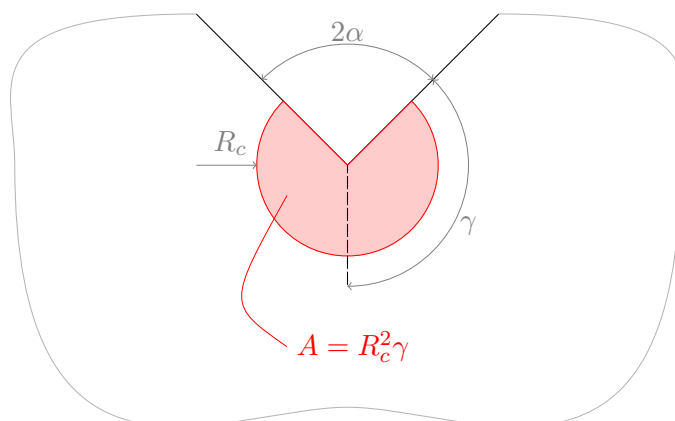


Figura 5.1: Volume di controllo per un intaglio a spigolo vivo.

che precede la frattura [5], il quale raccomanda inoltre di utilizzare campioni indeboliti da intagli semicircolari [6].

L'equazione 5.21 consente di determinare il valore critico del raggio una volta noti quelli sperimentali relativi a  $W_c$  e  $K_{IC}^V$  che provocano la rottura a trazione del provino. Se il valore critico dell'NSIF è determinato servendosi di provini intagliati aventi  $\alpha \neq 0$  e  $\rho = 0$ , il raggio critico si valuta con la seguente [7]:

$$R_c = \left[ \frac{I_1 (K_{IC}^V)^2}{4 \lambda_1 \gamma E W_c} \right]^{\frac{1}{2(1-\lambda_1)}}, \quad (5.23)$$

dove l'integrale  $I_1$  dell'equazione 5.23 è dato in [8] per il caso di deformazione piana e dipende dall'angolo di apertura dell'intaglio e dal rapporto di Poisson. Una soluzione analitica è invece riportata nell'appendice di [7] solo per il caso di tensione piana.

Essendo  $R_c$  un parametro caratteristico del materiale, non dipende dalla geometria dell'intaglio e per tanto l'equazione 5.23 può essere utilizzata anche nel caso della cricca dove il valore critico dell'NSIF coincide con quello

critivo dello SIF. Per questa ultima configurazione geometrica, vi è una più elegante espressione ottenuta da [9]:

$$R_c = \frac{(1 + \nu)(5 - 8\nu)}{4\pi} \left( \frac{K_{IC}}{\sigma_t} \right)^2, \quad (5.24)$$

la cui dimostrazione è riportata in appendice A.

In condizioni di carichi variabili nel tempo, introducendo la variazione del valore di soglia del fattore di intensificazione delle tensioni  $\Delta K_{th}$ , sempre in condizioni di sollecitazione di Modo I, ed il limite di fatica del provino piano  $\Delta\sigma_0$ , si ottiene:

$$R_c = \frac{(1 + \nu)(5 - 8\nu)}{4\pi} \left( \frac{\Delta K_{th}}{\Delta\sigma_0} \right)^2, \quad (5.25)$$

dove  $\nu$  è il rapporto di Poisson.

Quando  $\nu = 0.3$ , l'equazione 5.25 restituisce:

$$R_c = 0.845 a_0, \quad (5.26)$$

dove

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \left( \frac{\Delta K_{th}}{\Delta\sigma_0} \right)^2 \quad (5.27)$$

è il parametro di El Haddad-Smith-Topper [10].

L'equazione 5.26 sarà utilizzata successivamente per stimare tale valore per ciascuno dei tre materiali investigati.

## 5.2 Criterio di volume basato sulla densità di energia deviatorica

La componente deviatorica della densità di energia di deformazione nelle vicinanze dell'apice dell'intaglio è pari a:

$$W_d(r, \vartheta) = \frac{1 + \nu}{3E} \left[ \sigma_{rr}^2 + \sigma_{\vartheta\vartheta}^2 + \sigma_{zz}^2 - (\sigma_{rr} \sigma_{\vartheta\vartheta} + \sigma_{rr} \sigma_{zz} + \sigma_{\vartheta\vartheta} \sigma_{zz}) + 3\sigma_{r\vartheta}^2 \right]. \quad (5.28)$$

Applicando il principio di sovrapposizione degli effetti e ricordando il sistema 5.2 è possibile scrivere:

$$W_d(r, \vartheta) = W_{d1}(r, \vartheta) + W_{d2}(r, \vartheta) + W_{d12}(r, \vartheta) \quad (5.29)$$

con ovvio significato di notazione.

In particolare valgono le seguenti relazioni:

$$W_{d1}(r, \vartheta) = \frac{1 + \nu}{3E} \frac{K_1^2}{r^{2(1-\lambda_1)}} \left[ \tilde{\sigma}_{rr(1)}^2 + \tilde{\sigma}_{\vartheta\vartheta(1)}^2 + \tilde{\sigma}_{zz(1)}^2 - \right. \\ \left. \left( \tilde{\sigma}_{rr(1)} \tilde{\sigma}_{\vartheta\vartheta(1)} + \tilde{\sigma}_{rr(1)} \tilde{\sigma}_{zz(1)} + \tilde{\sigma}_{\vartheta\vartheta(1)} \tilde{\sigma}_{zz(1)} \right) + \right. \\ \left. 3 \tilde{\sigma}_{r\vartheta(1)}^2 \right], \quad (5.30)$$

$$W_{d2}(r, \vartheta) = \frac{1 + \nu}{3E} \frac{K_2^2}{r^{2(1-\lambda_2)}} \left[ \tilde{\sigma}_{rr(2)}^2 + \tilde{\sigma}_{\vartheta\vartheta(2)}^2 + \tilde{\sigma}_{zz(2)}^2 - \right. \\ \left. \left( \tilde{\sigma}_{rr(2)} \tilde{\sigma}_{\vartheta\vartheta(2)} + \tilde{\sigma}_{rr(2)} \tilde{\sigma}_{zz(2)} + \tilde{\sigma}_{\vartheta\vartheta(2)} \tilde{\sigma}_{zz(2)} \right) + \right. \\ \left. 3 \tilde{\sigma}_{r\vartheta(2)}^2 \right], \quad (5.31)$$

$$W_{d12}(r, \vartheta) = 2 \frac{1 + \nu}{3E} \frac{K_1^2 K_2^2}{r^{2-\lambda_1-\lambda_2}} \left[ \tilde{\sigma}_{rr(1)} \tilde{\sigma}_{rr(2)} + \tilde{\sigma}_{\vartheta\vartheta(1)} \tilde{\sigma}_{\vartheta\vartheta(2)} + \tilde{\sigma}_{zz(1)} \tilde{\sigma}_{zz(2)} - \right. \\ \left( \tilde{\sigma}_{rr(1)} \tilde{\sigma}_{\vartheta\vartheta(2)} + \tilde{\sigma}_{rr(2)} \tilde{\sigma}_{\vartheta\vartheta(1)} + \tilde{\sigma}_{rr(1)} \tilde{\sigma}_{zz(2)} + \tilde{\sigma}_{rr(2)} \tilde{\sigma}_{zz(1)} + \right. \\ \left. \tilde{\sigma}_{\vartheta\vartheta(1)} \tilde{\sigma}_{zz(2)} + \tilde{\sigma}_{\vartheta\vartheta(2)} \tilde{\sigma}_{zz(1)} \right) + \\ \left. 3 \tilde{\sigma}_{r\vartheta(1)} \tilde{\sigma}_{r\vartheta(2)} \right]. \quad (5.32)$$

L'energia totale di distorsione in un settore circolare di raggio R centrato sull'apice di un intaglio a spigolo vivo è pari a:

$$E(R) = \int_A W_d dA \\ = \int_0^R \int_{-\gamma}^{+\gamma} \left[ W_{d1}(r, \theta) + W_{d2}(r, \theta) + W_{d12}(r, \theta) \right] r dr d\theta.$$

Dato che il campo di integrazione è simmetrico rispetto alla bisettrice dell'intaglio il contributo mutuo  $W_{d12}(r, \theta)$  è nullo in quanto risultato della somma di prodotti nei quali un fattore è sempre nullo e quindi l'espressione finale è:

$$\begin{aligned} E_d(R) &= E_{d1}(R) + E_{d2}(R) \\ &= \frac{1 + \nu}{3E} \left[ \frac{I_{d1}(\gamma)}{2\lambda_1} K_1^2 R^{2\lambda_1} + \frac{I_{d2}(\gamma)}{2\lambda_2} K_2^2 R^{2\lambda_2} \right] \end{aligned} \quad (5.33)$$

dove gli integrali  $I_{d1}$  e  $I_{d2}$  dipendono da  $\gamma$  e dal rapporto di Poisson  $\nu$ :

$$\begin{aligned} I_{d1}(\gamma) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\gamma}^{+\gamma} \left[ f_{\theta\theta(1)}^2 + f_{rr(1)}^2 + f_{zz(1)}^2 - \right. \\ &\quad \left. (f_{\theta\theta(1)}f_{rr(1)} + f_{\theta\theta(1)}f_{zz(1)} + f_{rr(1)}f_{zz(1)}) + \right. \\ &\quad \left. 3 f_{r\theta(1)}^2 \right] d\theta, \end{aligned} \quad (5.34)$$

$$\begin{aligned} I_{d2}(\gamma) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\gamma}^{+\gamma} \left[ f_{\theta\theta(2)}^2 + f_{rr(2)}^2 + f_{zz(2)}^2 - \right. \\ &\quad \left. (f_{\theta\theta(2)}f_{rr(2)} + f_{\theta\theta(2)}f_{zz(2)} + f_{rr(2)}f_{zz(2)}) + \right. \\ &\quad \left. 3 f_{r\theta(2)}^2 \right] d\theta. \end{aligned} \quad (5.35)$$

Il valore degli integrali  $I_{d1}$  e  $I_{d2}$  sono raccolti in appendice per diversi angoli di apertura.

Ricordando che l'area di integrazione vale:

$$A(R) = \gamma R^2, \quad (5.36)$$

l'energia di deformazione elastica deviatorica mediata sull'area  $A$  diventa:

$$\begin{aligned} \bar{W}_d &= \frac{E_d(R)}{A(R)} \\ &= \frac{1 + \nu}{6E} \left[ \frac{I_{d1}(\gamma)}{\lambda_1 \gamma} \frac{K_1^2}{R^{2(1-\lambda_1)}} + \frac{I_{d2}(\gamma)}{\lambda_2 \gamma} \frac{K_2^2}{R^{2(1-\lambda_2)}} \right]. \end{aligned} \quad (5.37)$$

In condizioni di carico monoassiale e supponendo un comportamento fragile per il materiale, il valore critico dell'energia deviatorica può essere espresso come:

$$W_{dc} = \frac{1 + \nu}{3E} \sigma_R^2. \quad (5.38)$$

## Appendice A

# Raggio di integrazione caratteristico del materiale

I due valori limite del SED sono dati da due casi critici: il componente piano ( $2\alpha = 180^\circ\text{C}$ ) e criccato ( $2\alpha = 0^\circ\text{C}$ ). Inizialmente sarà determinato il valore medio del SED per un materiale isotropo, sollecitato a Modo I, e successivamente utilizzeremo queste equazioni per determinare quello che Yosibash definisce come *raggio di integrazione critico del materiale* denotato da lui stesso come  $R_{\text{mat}}$  ma che, per coerenza con i capitoli precedenti, in questa sezione lo denotiamo con il simbolo  $R_c$ .

### A.1 Calcolo del valore medio del SED per un provino piano

Per un provino esente da effetto d'intaglio, la rottura avviene nell'istante in cui il valore della tensione nominale è uguale ad un opportuno limite critico  $\sigma_c$ . In questo, lo stato di tensione in ogni punto sarà completamente descritto dal valore della sola tensione monoassiale ( $= \sigma_c$ ) in quanto è nullo quello di tutte le altre componenti. Definendo con  $b$  lo spessore del provino,

l'energia di deformazione può dunque essere espressa come:

$$\begin{aligned}
 W_{c_{\text{piano}}} &= \frac{1}{2} b \int_0^\pi \int_0^R \sigma_{jk} \varepsilon_{jk} r \, d\theta \, dr \\
 &= \frac{1}{2} b \int_0^\pi \int_0^R \sigma_c \frac{\sigma_c}{E} r \, d\theta \, dr \\
 &= \frac{b}{4E} \pi R^2 \sigma_c^2,
 \end{aligned} \tag{A.1}$$

dividendo ora per il volume si ottiene la densità di energia di deformazione mediata sul volume di controllo:

$$\overline{W}_{c_{\text{piano}}} = \frac{W_{c_{\text{piano}}}}{V_{\text{piano}}} = \frac{\frac{b}{4E} \pi R^2 \sigma_c^2}{\frac{\pi}{2} R^2 b}, \tag{A.2}$$

da cui, semplificando:

$$\overline{W}_{c_{\text{piano}}} = \frac{\sigma_c^2}{2E}. \tag{A.3}$$

## A.2 Calcolo del valore medio del SED per un provino criccato

Per un provino criccato, sollecitato a Modo I, la distribuzione delle tensioni al momento della rottura e nelle immediate vicinanze dell'apice della cricca, è stata formalizzata da [11] servendosi di un frame analitico ottenuto da un altro autore [12]:

$$\begin{aligned}
 \sigma_{ii} &= \frac{K_{\text{IC}}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left( 1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) \\
 \sigma_{jj} &= \frac{K_{\text{IC}}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left( 1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) \\
 \tau_{ij} &= \frac{K_{\text{IC}}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2}
 \end{aligned}$$

L'elemento infinitesimo, al quale le equazioni sono riferite, è posizionato in un intorno del materiale vicino all'apice della cricca e descritto in un sistema di riferimento polare in cui la coordinata radiale è indicata con la lettera  $r$  e, prolungando l'asse della cricca, si individua l'anomalia  $\vartheta$  che posiziona il generico elemento. Il parametro  $K_{\text{IC}}$  è la tenacità a frattura, valore



ottenibile solo per via sperimentale. Esprimendo ora le deformazioni in termini di tensioni, considerando uno stato piano di deformazione, l'energia di deformazione accumulata vale:

$$W_{\text{criccato}} = \frac{1}{2} \frac{(1+\nu)b}{E} \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^R \left\{ (1+\nu) [\sigma_{ii}^2 + \sigma_{jj}^2] - 2\nu \sigma_{ii} \sigma_{jj} + 2\sigma_{ij} \right\} r \, dr \, d\theta. \quad (\text{A.4})$$

Introducendo la definizione delle tensioni nell'equazione A.5:

$$W_{\text{criccato}} = \frac{b(1+\nu)(5-8\nu)}{8E} K_{\text{IC}}^2 R, \quad (\text{A.5})$$

dividendo per il volume si ha:

$$\bar{W}_{\text{criccato}} = \frac{W_{\text{criccato}}}{V_{\text{criccato}}} = \frac{b(1+\nu)(5-8\nu)}{8E} \frac{K_{\text{IC}}^2 R}{\pi R^2 b}, \quad (\text{A.6})$$

da cui, semplificando:

$$\bar{W}_{\text{criccato}} = \frac{(1+\nu)(5-8\nu)}{8\pi R E} K_{\text{IC}}^2. \quad (\text{A.7})$$

### A.3 Determinazione del raggio di integrazione caratteristico del materiale

Seguendo quanto detto in [7], ossia che il valore critico  $W_c$  è indipendente dall'angolo di apertura dell'intaglio  $2\alpha$ , si ottiene lo stesso valore sia con  $2\alpha = 0$  che  $2\alpha = \pi$ . La seguente uguaglianza vale dunque per definizione:

$$\begin{aligned} \bar{W}_{\text{cpiano}} &= \bar{W}_{\text{criccato}} \\ \frac{\sigma_c^2}{2E} &= \frac{(1+\nu)(5-8\nu)}{8\pi R E} K_{\text{IC}}^2, \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

dalla quale:

$$R_c = \frac{(1+\nu)(5-8\nu)}{4\pi} \left( \frac{K_{\text{IC}}}{\sigma_c} \right)^2. \quad (\text{A.9})$$



## Appendice B

# Valore degli integrali delle funzioni angolari

Tabella B.1: Valore degli integrali  $I_1, I_2$  e  $I_{12}$ .

| Parametri generali |             |             | Beltrami $\nu = 0.3$ |        |          |                |        |          |
|--------------------|-------------|-------------|----------------------|--------|----------|----------------|--------|----------|
|                    |             |             | Deformazione piana   |        |          | Tensione piana |        |          |
| $2\alpha$          | $\lambda_1$ | $\lambda_2$ | $I_1$                | $I_2$  | $I_{12}$ | $I_1$          | $I_2$  | $I_{12}$ |
| 0                  | 0.5000      | 0.5000      | 0.8450               | 2.1450 | 0.1655   | 1.0250         | 2.3250 | 0.2228   |
| 5                  | 0.5000      | 0.5143      | 0.8448               | 2.0986 | 0.1656   | 1.0246         | 2.2688 | 0.2217   |
| 10                 | 0.5001      | 0.5294      | 0.8442               | 2.0531 | 0.1655   | 1.0235         | 2.2141 | 0.2204   |
| 15                 | 0.5002      | 0.5453      | 0.8431               | 2.0087 | 0.1653   | 1.0216         | 2.1608 | 0.2190   |
| 20                 | 0.5004      | 0.5620      | 0.8415               | 1.9652 | 0.1651   | 1.0189         | 2.1089 | 0.2174   |
| 25                 | 0.5008      | 0.5796      | 0.8393               | 1.9226 | 0.1648   | 1.0153         | 2.0583 | 0.2159   |
| 30                 | 0.5015      | 0.5982      | 0.8366               | 1.8810 | 0.1645   | 1.0108         | 2.0091 | 0.2144   |
| 35                 | 0.5023      | 0.6177      | 0.8333               | 1.8402 | 0.1643   | 1.0054         | 1.9166 | 0.2129   |
| 40                 | 0.5035      | 0.6382      | 0.8293               | 1.8002 | 0.1641   | 0.9991         | 1.9144 | 0.2114   |
| 45                 | 0.5050      | 0.6597      | 0.8247               | 1.7610 | 0.1640   | 0.9918         | 1.8688 | 0.2101   |
| 50                 | 0.5069      | 0.6823      | 0.8194               | 1.7226 | 0.1640   | 0.9836         | 1.8143 | 0.2088   |
| 55                 | 0.5093      | 0.7060      | 0.8134               | 1.6849 | 0.1640   | 0.9744         | 1.7809 | 0.2076   |
| 60                 | 0.5122      | 0.7309      | 0.8066               | 1.6479 | 0.1641   | 0.9642         | 1.7385 | 0.2065   |

*Tabella B.1: continua nella prossima pagina*

Tabella B.1: continua dalla pagina precedente

| Parametri generali |             |             | Beltrami $\nu = 0.3$ |        |          |                |        |          |
|--------------------|-------------|-------------|----------------------|--------|----------|----------------|--------|----------|
|                    |             |             | Deformazione piana   |        |          | Tensione piana |        |          |
| $2\alpha$          | $\lambda_1$ | $\lambda_1$ | $I_1$                | $I_2$  | $I_{12}$ | $I_1$          | $I_2$  | $I_{12}$ |
| 65                 | 0.5157      | 0.7570      | 0.7991               | 1.6115 | 0.1643   | 0.9531         | 1.6970 | 0.2054   |
| 70                 | 0.5199      | 0.7844      | 0.7909               | 1.5757 | 0.1646   | 0.9409         | 1.6564 | 0.2044   |
| 75                 | 0.5247      | 0.8132      | 0.7819               | 1.5405 | 0.1649   | 0.9278         | 1.6166 | 0.2035   |
| 80                 | 0.5304      | 0.8434      | 0.7722               | 1.5058 | 0.1653   | 0.9137         | 1.5776 | 0.2026   |
| 85                 | 0.5370      | 0.8752      | 0.7617               | 1.4717 | 0.1653   | 0.8986         | 1.5394 | 0.2018   |
| 90                 | 0.5445      | 0.9085      | 0.7504               | 1.4379 | 0.1660   | 0.8826         | 1.5018 | 0.2009   |
| 95                 | 0.5531      | 0.9436      | 0.7384               | 1.4046 | 0.1663   | 0.8658         | 1.4649 | 0.2000   |
| 100                | 0.5628      | 0.9805      | 0.7258               | 1.3717 | 0.1666   | 0.8481         | 1.4286 | 0.1990   |
| 105                | 0.5739      | 1.0193      | 0.7124               | 1.3392 | 0.1668   | 0.8296         | 1.3929 | 0.1979   |
| 110                | 0.5863      | 1.0602      | 0.6984               | 1.3071 | 0.1668   | 0.8104         | 1.3577 | 0.1968   |
| 115                | 0.6002      | 1.1034      | 0.6838               | 1.2752 | 0.1667   | 0.7905         | 1.3229 | 0.1954   |
| 120                | 0.6157      | 1.1489      | 0.6887               | 1.2437 | 0.1665   | 0.7701         | 1.2887 | 0.1940   |
| 125                | 0.6330      | 1.1971      | 0.6530               | 1.2124 | 0.1661   | 0.7491         | 1.2548 | 0.1923   |
| 130                | 0.6523      | 1.2480      | 0.6368               | 1.1813 | 0.1654   | 0.7277         | 1.2214 | 0.1905   |
| 135                | 0.6736      | 1.3021      | 0.6201               | 1.1505 | 0.1646   | 0.7059         | 1.1883 | 0.1885   |
| 140                | 0.6972      | 1.3595      | 0.6031               | 1.1198 | 0.1635   | 0.6837         | 1.1555 | 0.1862   |
| 145                | 0.7232      | 1.4206      | 0.5857               | 1.0894 | 0.1621   | 0.6613         | 1.1230 | 0.1837   |
| 150                | 0.7520      | 1.4858      | 0.5680               | 1.0590 | 0.1605   | 0.6387         | 1.0908 | 0.1809   |
| 155                | 0.7837      | 1.5556      | 0.5499               | 1.0288 | 0.1586   | 0.6159         | 1.0587 | 0.1779   |
| 160                | 0.8187      | 1.6305      | 0.5316               | 0.9986 | 0.1564   | 0.5930         | 1.0269 | 0.1747   |
| 165                | 0.8573      | 1.7113      | 0.5129               | 0.9685 | 0.1539   | 0.5700         | 0.9952 | 0.1711   |
| 170                | 0.9000      | 1.7989      | 0.4939               | 0.9383 | 0.1512   | 0.5468         | 0.9635 | 0.1674   |
| 175                | 0.9474      | 1.8946      | 0.4747               | 0.9080 | 0.1481   | 0.5235         | 0.9318 | 0.1634   |

Tabella B.1: si conclude dalla pagina precedente

## Parte II

# Sintesi di alcuni dati di resistenza a fatica ad alta temperatura di componenti intagliati



## Capitolo 6

# Teoria della Distanza Critica lineare elastica per stimare la resistenza a fatica, ad alto numero di cicli, di provini in materiale metallico alle alte temperature

Questo articolo nasce dal fatto che un'osservazione dello stato dell'arte, da parte degli autori, relativo alla resistenza a fatica ad alta temperatura suggerisce come questo comportamento sia stato ben studiato principalmente considerando leghe ad alte prestazioni. Questa è una conseguenza del fatto che materiali con proprietà meccaniche superiori, sono ovviamente usati in quelle condizioni estreme che conglobano carichi variabili nel tempo e temperature elevate (come ad esempio le palette dei motori a reazione). Tuttavia va detto che ci sono anche situazioni di interesse pratico dove un acciaio strut-

turale convenzionale è utilizzato in condizioni di medio-alta temperatura (come ad esempio parti strutturali dei motori per veicoli e loro basamenti).

## 6.1 Introduzione

L'importanza di essere in grado ad eseguire correttamente la verifica a fatica di componenti che lavorano in condizioni di temperatura estrema è evidenziata dal fatto che questo problema di progettazione gioca un ruolo importante nei settori industriali quali quello dei trasporti (per esempio le pale dei motori a reazione), dell'energia (per esempio le centrali nucleari) e delle lavorazioni dei metalli (rulli caldi di laminazione).

Un recente articolo [13] ha come principale oggetto il problema della resistenza a fatica, a medio-basso numero di cicli, di componenti intagliati in acciaio legato 40CrMoV13.9 sollecitati ad elevate temperature utilizzando il SED. Alcuni lavori giapponesi, in particolare [2] e [14], relativi a provini intagliati in Inconel 718, dimostrano come la resistenza a fatica ad alto numero di cicli, sempre ad elevata temperatura, possa essere ben stimata secondo una teoria dal nome *Linear Notch Mechanics*.

Effettuando un'accurata indagine sperimentale, alcuni ricercatori in Cina [3], hanno osservato che la resistenza a fatica della superlega con solidificazione direzionale DZ125 alla temperatura di 850 °C, diminuisce all'aumentare del fattore teorico di concentrazione delle tensioni  $K_t$ .

Testando provini piani ed intagliati in 40CrMoV13.9 come anche in lega Cu-Be, [13] e [15] hanno provato che, dato un materiale, il parametro che quantifica la densità di energia di deformazione è in grado di sintetizzare, nella stessa banda di dispersione, risultati sperimentali ottenuti a differenti temperature.

Altri studi [16] sono stati effettuati per valutare l'accuratezza della TCD nella stima del danneggiamento a fatica di provini indeboliti in superlega DZ125 soggetti, a 850 °C, a carico monoassiale variabile nel tempo. In questo



lavoro la TCD è stata applicata considerando sia la formalizzazione lineare elastica [17][18] che quella elasto-plastica [19]. Analizzando poi i risultati, gli stessi autori giunsero alla conclusione che, per la specifica superlega in questione, il valore della distanza critica è in qualche modo influenzato dall'acutezza dell'intaglio. Recentemente [20] ha mostrato che il metodo del piano critico applicato insieme al concetto della distanza critica possa con successo essere utilizzato per stimare la vita a fatica di componenti intagliati in superlega MD2 soggetta, a 500 °C, a carichi unidirezionali variabili nel tempo.

In questo scenario, lo scopo dell'articolo di Louks e Susmel è quello di investigare se la teoria lineare elastica della distanza critica è in grado di stimare con successo la resistenza a fatica ad alto numero di cicli per provini intagliati in materiale metallico ad elevata temperatura. La lunghezza critica viene assunta come proprietà del materiale, il cui valore è indipendente dall'acutezza dell'intaglio.

## 6.2 Premesse analitiche della TCD

In accordo con la procedura standard della TCD, la resistenza a fatica ad alto numero di cicli di componenti intagliati è direttamente stimata analizzando l'intero campo di tensioni che si distribuisce nel materiale nelle immediate vicinanze della zona causa della concentrazione di tensione già valutata [18]. Una peculiarità che più delle altre caratterizza questa teoria è quella di essere in grado di adattare all'interno di una trattazione lineare, quelle non linearità proprie del comportamento duttile dei materiali metallici come dimostrato sia in [21] per l'alto numero di cicli che in [22] per il medio numero di cicli. Pertanto, l'analisi tensionale può direttamente essere effettuata assumendo che il materiale segua una semplice legge costitutiva lineare elastica. Questo ovviamente comporta un'enorme semplificazione

del problema della valutazione a fatica, permettendo una riduzione considerevole dei tempo e dei costi legati al processo di progettazione [23]. Per eseguire la valutazione a fatica ad alto numero di cicli di componenti intagliati, la TCD si serve della variazione di una tensione effettiva  $\Delta\sigma_{eff}$ , la quale è calcolata considerando un appropriato parametro dimensionale del materiale. In questo contensto, tale distanza critica è assunta essere una proprietà del materiale il cui valore può essere direttamente determinato per via sperimentale servendosi di attrezzature di prova standardizzate [24]. La TCD può essere formalizzata in diversi modi tra cui: il metodo di punto (PM) [25]; il metodo di linea (LM) [26] ed infine il metodo di area (AM) [27]. In particolare, quando TCD è applicata nella forma PM,  $\Delta\sigma_{eff}$  è stimata ad una certa distanza dall'apice dell'intaglio (vedi figura PM); come media integrale quando nella forma LM (vedi figura LM) ed infine come campo di distribuzione della tensione massima principale mediato sull'area di figura AM. In accordo con i simboli adottati in figura 6.1, per le diverse formulazioni si hanno le seguenti scritte matematiche:

$$\Delta\sigma_{eff} = \Delta\sigma_y (\theta = 0, r = L/2) \quad (6.1)$$

$$\Delta\sigma_{eff} = \frac{1}{2L} \int_0^{2L} \Delta\sigma_y (\theta = 0, r) dr \quad (6.2)$$

$$\Delta\sigma_{eff} = \frac{4}{\pi L^2} \int_0^{\pi/2} \int_0^L \Delta\sigma_1 (\theta, r) r dr d\theta \quad (6.3)$$

Nelle equazioni 6.1-6.3, il parametro caratteristico del materiale  $L$  dipende dalla variazione del valore di soglia del fattore di intensificazione delle tensioni  $\Delta K_{th}$  e dal limite di fatica del provino piano  $\Delta\sigma_0$  secondo la seguente funzione:

$$L = \frac{1}{\pi} \left( \frac{\Delta K_{th}}{\Delta\sigma_0} \right)^2. \quad (6.4)$$

É importante evidenziare che, per prendere correttamente in considerazione l'effetto della tensione media nella resistenza a fatica, i valori sia di

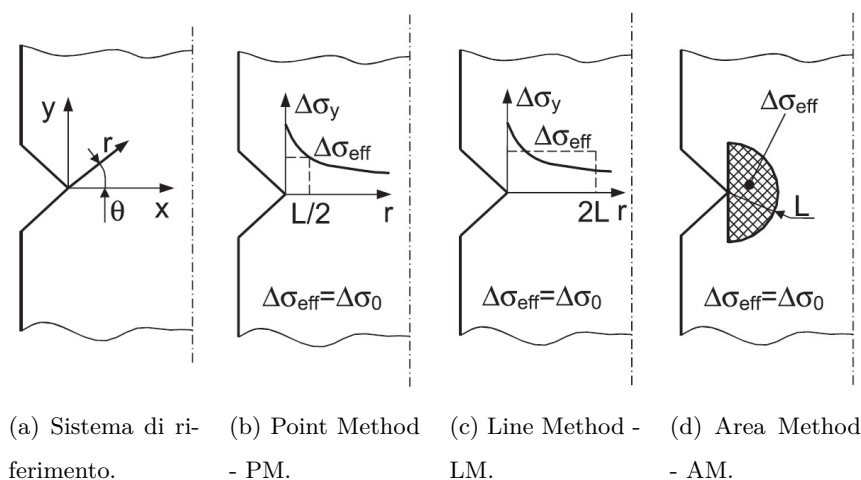


Figura 6.1: Sistema di riferimento e formulazioni disponibili per la Teoria della Distanza Critica.

$\Delta K_{th}$  che della  $\Delta\sigma_0$  utilizzati nella stima di  $L$  sono stati determinati sulla base di risultati sperimentali effettuati con il medesimo valore del rapporto nominale di ciclo  $R$  che compete al danneggiamento del componente in questione. La definizione 6.4 dovrebbe rendere evidente che, essendo il valore della distanza critica dipendente da due proprietà del materiale,  $L$  è quindi una proprietà del materiale che cambia da materiale a materiale e dipende dal particolare rapporto nominale di ciclo.

Nel caso in cui non si abbia a disposizione il valore del  $\Delta K_{th}$  o il materiale in questione non esibisca un limite di fatica  $\Delta\sigma_0$ , il valore della distanza critica può essere accuratamente determinato utilizzando due limiti di resistenza ottenuti testando provini lisci ed indeboliti da configurazioni geometriche note [22]. La figura 6.2 mostra due curve di fatica in un diagramma a scale logaritmiche: quella superiore si assume essere generata da test su provini lisci (Plain Fatigue Curve) mentre quella inferiore testando provini indeboliti (Notch Fatigue Curve).

In accordo con il metodo di punto, dato un particolare numero di ci-

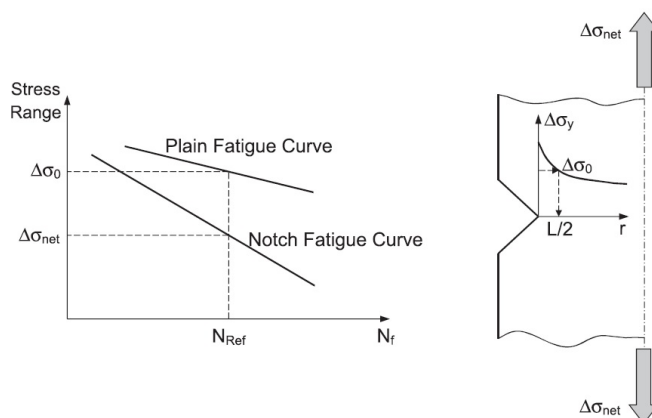


Figura 6.2: Determinazione della distanza critica utilizzando due curve a fatica.

cli a rottura di riferimento  $N_{ref}$ ,  $L/2$  è la distanza dall'apice dell'intaglio alla quale la variazione della tensione locale  $\Delta\sigma_y$ , valutata in campo lineare elastico, uguaglia quella indicata con  $\Delta\sigma_0$  rappresentante la rottura del campione esente da concentrazione delle tensioni in corrispondenza di un numero di cicli a rottura pari a  $N_{ref}$  rappresentante un convenzionale cedimento del componente. Il campo di tensione lineare elastico, nelle immediate vicinanze della concentrazione delle tensioni, richiesto per portare a rottura il componente intagliato, sollecitato a monte e a valle dalla sollecitazione di trazione pari a  $\Delta\sigma_{net}$  in corrispondenza di  $N_{ref}$ , può essere determinato sia numericamente (utilizzando un codice di calcolo agli elementi finiti) che attraverso soluzioni analitiche richiamate brevemente nella prima parte di questo elaborato. Nel prossimo paragrafo questa strategia sarà adottata per determinare il valore della distanza critica per i materiali che saranno utilizzati per valutare l'accuratezza della TCD nella stima del limite di fatica di componenti intagliati ad elevate temperature. A valle di questo richiamo teorico è bene concludere osservando che un componente intagliato è assunto essere in condizioni di sicurezza tanto quanto la seguente condizione è soddisfatta:

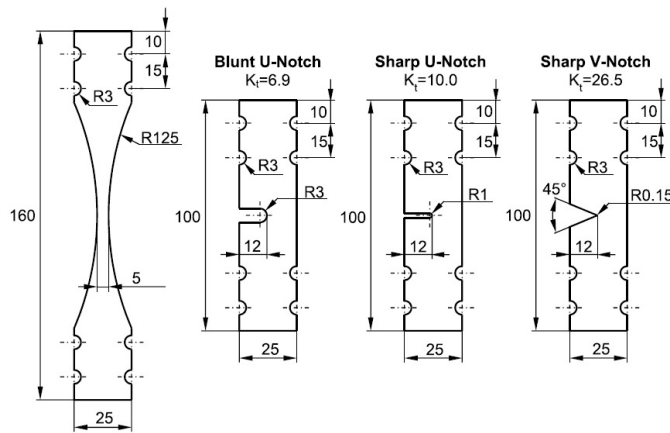


Figura 6.3: Geometria dei provini testati in C45.

$$\Delta\sigma_{eff} \leq \Delta\sigma_0, \quad (6.5)$$

dove il range della tensione efficace può essere calcolato in accordo con PM (eq. 6.1) piuttosto che LM (eq. 6.2) oppure AM (eq. 6.3).

### 6.3 Dettagli sperimentali

Con lo scopo di verificare l'accuratezza della TCD nella previsione della resistenza a fatica ad alto numero di cicli ed ad elevate temperature, gli autori hanno testato provini lisci ed intagliati in C45 sollecitandoli con carico assiale variabile nel tempo ad una temperatura di 250 °C e rapporto nominale di ciclo pari a 0.1 ed una frequenza di 15 Hz. La scelta della temperatura è dettata dal fatto che [?] hanno osservato che il danneggiamento a fatica di un provino in SAE 1045 (simile al C45) manifesta il massimo danneggiamento, note l'ampiezza ed il valore medio della tensione variabile nel tempo, in un intervallo di temperatura tra i 200 °C ed i 250 °C. La figura 6.3 mostra le geometrie dei provini testati dagli autori del presente articolo.

Il criterio di cedimento è inteso come completa rottura del provino. Come suggerito da [28] per gli acciai strutturali, il valore del numero di cicli a

rottura di riferimento  $N_{ref}$  si è preso uguale a  $5 \cdot 10^5$  cicli a rottura. Il valore della  $\Delta\sigma_0$  è riferito alla sezione nominale netta.

## 6.4 Validazione dei dati sperimentali

I campi di tensione lineari elastici in prossimità dell'apice dell'intaglio sono stimati utilizzando il codice di calcolo commerciale ANSYS®. Il provino è stato modellato adottando elementi bidimensionali quali il PLANE183. Questo elemento piano è l'ordine superiore ad otto nodi ed è caratterizzato da un comportamento quadratico dello spostamento. Ogni nodo ha due gradi di libertà: la traslazione in X e Y. Può inoltre essere utilizzato per analisi assialsimmetriche prestando attenzione al fatto di modellare nel primo quadrante del sistema di riferimento globale e che sia Y l'asse di assialsimmetria. Avvicinandosi all'apice dell'inaglio si è provveduto di aumentare la densità degli elementi fino ad ottenere la saturazione della griglia di calcolo (livello di densità di elementi oltre il quale non si apprezzano sensibili variazioni dell'intero campo di tensione nella zona di interesse). Questo risultato si ottiene con elementi aventi dimensioni non superiori agli 0.005 mm.

Per il materiale in esame, la figura 6.4 evidenzia più precisamente la procedura adottata per determinare il valore della distanza critica.

In particolare, per l'acciaio strutturale di interesse, il valore della distanza critica di 0.252 mm è stato determinato confrontando il campo di tensione che si registra lungo la bisettrice dell'intaglio a V sharp e osservando a quale distanza si verifica  $\Delta\sigma_y = \Delta\sigma_0$ . La stessa figura verifica inoltre come sia accurato il metodo di punto nella previsione della resistenza a fatica ad alta temperatura anche per gli intagli ad U e a V blunt. La figura 6.5 conferma che la TCD usata nella forma di PM, LM e AM è in grado di stimare entro un intervallo d'errore del  $\pm 15\%$ , indipendentemente dall'acutezza dell'intaglio, la resistenza a fatica del C45 a 250°C.

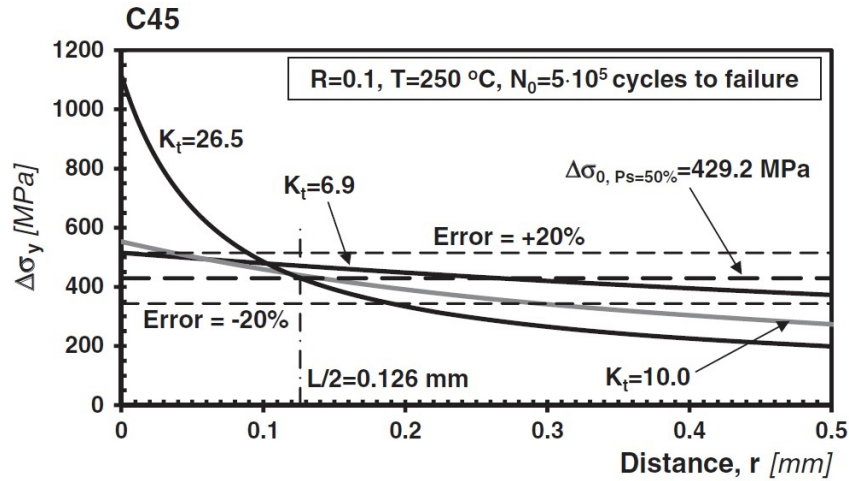


Figura 6.4: Campi di tensione dei quattro provini in C45 testati e determinazione della distanza critica.

| Notch type    | $K_t$ | No. of samples | $R$ | $k$ | $\Delta\sigma_0^a$ [MPa] | $N_{Ref}^b$ [Cycles] | $T_\sigma$ | $\Delta\sigma_{eff}$ |          |          | Error  |        |        |   |   |
|---------------|-------|----------------|-----|-----|--------------------------|----------------------|------------|----------------------|----------|----------|--------|--------|--------|---|---|
|               |       |                |     |     |                          |                      |            | PM [MPa]             | LM [MPa] | AM [MPa] | PM [%] | LM [%] | AM [%] |   |   |
| Plain         | 1.0   | 10             | 0.1 | 7.8 | 429.2                    | $5 \times 10^5$      | 1.222      | —                    | —        | —        | —      | —      | —      | — | — |
| Blunt U-notch | 6.9   | 9              |     | 3.5 | 75.0                     |                      | 1.300      | 471.0                | 436.4    | 476.6    | 9.7    | 1.7    | 11.1   |   |   |
| Sharp U-notch | 10.0  | 9              |     | 3.4 | 55.2                     |                      | 1.496      | 439.8                | 380.0    | 449.1    | 2.5    | -11.5  | 4.6    |   |   |
| Sharp V-notch | 26.5  | 8              |     | 3.1 | 42.2                     |                      | 1.891      | 429.2                | 369.9    | 439.5    | 0.0    | -13.8  | 2.4    |   |   |

<sup>a</sup>Range of the nominal stress referred to the net area.  
<sup>b</sup> $N_{Ref}$  taken equal to  $5 \times 10^5$  cycles to failure according to Sonsino.<sup>46</sup>

Figura 6.5: Riassunto dei risultati generati da [1] testando ad 250 °C, provini intagliati in C45; accuratezza della TCD applicata con i metodi PM, LM ed AM.

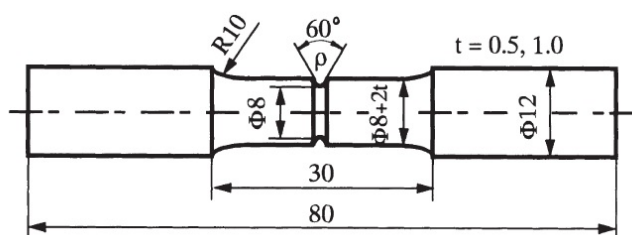


Figura 6.6: Geometria dei provini testati in Inconel 718.

| $w_g$<br>[mm] | $w_n$<br>[mm] | $r_n$<br>[mm] | $K_t$ | $\Delta\sigma_0^a$<br>[MPa] | $\Delta\sigma_{eff}$ |             |             | Error     |           |           |
|---------------|---------------|---------------|-------|-----------------------------|----------------------|-------------|-------------|-----------|-----------|-----------|
|               |               |               |       |                             | PM<br>[MPa]          | LM<br>[MPa] | AM<br>[MPa] | PM<br>[%] | LM<br>[%] | AM<br>[%] |
| 9             | 8             | 1.00          | 2.0   | 460                         | 787.3                | 709.5       | 800.0       | 10.9      | -0.1      | 12.7      |
| 9             | 8             | 0.10          | 4.8   | 370                         | 743.1                | 657.8       | 762.1       | 4.7       | -7.4      | 7.3       |
| 9             | 8             | 0.05          | 6.7   | 370                         | 718.1                | 668.0       | 748.7       | 1.1       | -5.9      | 5.5       |
| 10            | 8             | 1.00          | 2.2   | 450                         | 846.8                | 761.8       | 858.5       | 19.3      | 7.3       | 20.9      |
| 10            | 8             | 0.10          | 5.8   | 310                         | 737.0                | 641.0       | 752.1       | 3.8       | -9.7      | 5.9       |
| 10            | 8             | 0.05          | 8.0   | 310                         | 710.0                | 650.2       | 747.6       | 0.0       | -8.4      | 5.3       |

<sup>a</sup>Range of the nominal stress referred to the net area.

Figura 6.7: Riassunto dei risultati generati da [2] testando ad 500 °C, provini cilindrici intagliati in Inconel 718; accuratezza della TCD applicata con i metodi PM, LM ed AM.

Per assicurarsi dell'affidabilità e dell'accuratezza di questo metodo di progettazione, gli stessi autori lo hanno verificato prendendo in considerazione dati ricavati dalla letteratura per altri due materiali diversi.

Uno di questi due lavori è [2] i cui autori investigarono il comportamento a fatica ad alto numero di cicli di barre intagliate cilindriche in Inconel 718 testate a flessione rotante a 500 °C. In figura 6.6 è mostrata la configurazione globale dell'intaglio i cui valori sono riportati in figura 6.7 dove  $r_n$  rappresenta il raggio di fondo intaglio  $\rho$ .

L'altro lavoro è [3] nel quale vengono testati ad 850 °C provini piani, in superlega con solidificazione direzionale, aventi un singolo intaglio laterale. La forza assiale ciclica è applicata lungo la direzione parallela a quella di



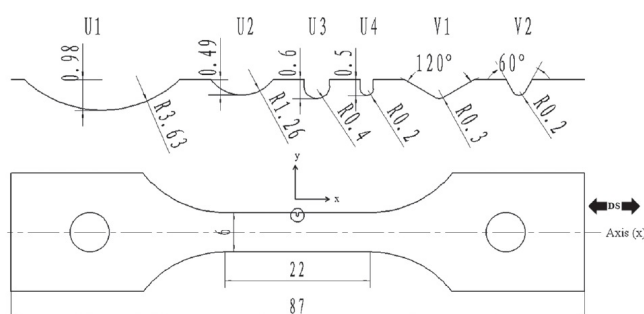


Figura 6.8: Geometria dei provini testati in DZ125.

| Ref.          | $w_g$<br>[mm] | $w_n$<br>[mm] | $r_n$<br>[mm] | $K_t$ | N. of<br>samples | $T$<br>[°C] | $R$      | $k$  | $\Delta\sigma_0^{(a,b)}$<br>[MPa] | $T_\sigma$ | $\Delta\sigma_{eff}$ |             |             | Error     |           |           |
|---------------|---------------|---------------|---------------|-------|------------------|-------------|----------|------|-----------------------------------|------------|----------------------|-------------|-------------|-----------|-----------|-----------|
|               |               |               |               |       |                  |             |          |      |                                   |            | PM<br>[MPa]          | LM<br>[MPa] | AM<br>[MPa] | PM<br>[%] | LM<br>[%] | AM<br>[%] |
| <sup>50</sup> | 10            | 10            | —             | 1.0   | 11               | 850         | 0.05±0.1 | 7.5  | 1210                              | 1.147      | —                    | —           | —           | —         | —         | —         |
| <sup>19</sup> | 6             | 5.4           | 0.4           | 3.4   | 9                |             | 0.1      | 13.1 | 823                               | 1.460      | 1360.7               | 1227.3      | 1372.5      | 12.5      | 1.4       | 13.4      |
| <sup>19</sup> | 6             | 5.5           | 0.2           | 4.2   | 7                |             | 0.1      | 12.4 | 711                               | 1.356      | 1058.4               | 1010.9      | 1092.3      | -12.5     | -16.5     | -9.7      |
| <sup>19</sup> | 6             | 5.4           | 0.3           | 3.7   | 19               |             | 0.1      | 15.1 | 849                               | 1.280      | 1372.3               | 1262.3      | 1398.3      | 13.4      | 4.3       | 15.6      |

<sup>a</sup>Range of the nominal stress referred to the net area.

<sup>b</sup>Endurance limit extrapolated at  $N_0 = 10^6$  cycles to failure.

Figura 6.9: Riassunto dei risultati generati da [3] testando ad 850 °C, provini intagliati in DZ125; accuratezza della TCD applicata con i metodi PM, LM ed AM.

solidificazione. Il rapporto nominale di ciclo è mantenuto costante al valore di 0.1. I provini considerati per la validazione della TCD sono i seguenti: U3, U4 e V1 mostrati in figura 6.8. La figura 6.9 riassume i risultati ottenuti.

Un aspetto evidenziato dalla figura 6.9 è che, mentre la presenza di un'intaglio abbassa chiaramente la resistenza a fatica, la curva a fatica del provino liscio è meno ripida ( $k = 7.5$ ) rispetto a quelle ottenute con provini intagliati ( $k > 12.4$ ).

La figura 6.10 mostra il valore della distanza critica determinato in accordo con la procedura riassunta nella figura 6.2 utilizzando il valore del limite di fatica del provino liscio ( $\Delta\sigma_0 = 750\text{MPa}$ ) e quello determinato sperimentalmente testando il provino intagliato caratterizzato da un  $K_t = 8.0$ . Il diagramma in figura 6.10 prova chiaramente che il metodo di punto è

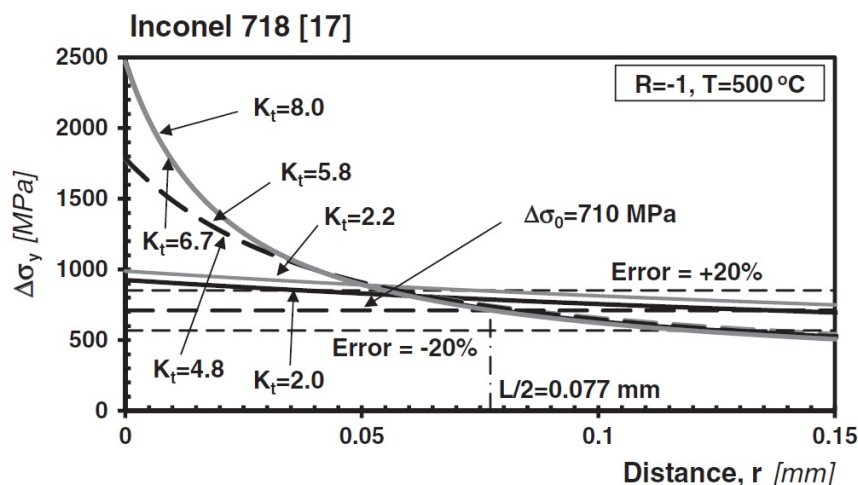


Figura 6.10: Campi di tensione dei sette provini in Inconel 718 testati e determinazione della distanza critica.

uno strumento molto accurato nella stima della resistenza a fatica ad alto numero di cicli di provini, aventi differenti configurazioni di indebolimento, con errori compresi in un intervallo del  $\pm 20\%$ . La figura 6.7 indica che un simile livello di accuratezza è ottenuto anche quando la TCD è applicata con il metodo di linea e di area.

Grazie alle numerose assunzioni che si sono fatte per determinare le curve a fatica riassunte nella figura 6.9, per la superlega DZ125, il parametro dimensionale è stato calcolato servendosi delle tre curve riportate in figura 6.11. Un valore di 0.452 mm è ottenuto per la distanza critica  $L$  semplicemente adottando una procedura di best fit il che comporta un errore della previsione compreso nell'intervallo del  $\pm 20\%$ .

Per concludere, la figura 6.12 riassume il livello complessivo di accuratezza che si raggiunge utilizzando la TCD per stimare la resistenza a fatica ad alto numero di cicli, ad elevate temperature, per provini intagliati. Questo diagramma sembra supportare fortemente l'idea che, in presenza di componenti intagliati che lavorano ad elevate temperature, una valutazione accurata della resistenza a fatica ad alto numero di cicli può essere effet-

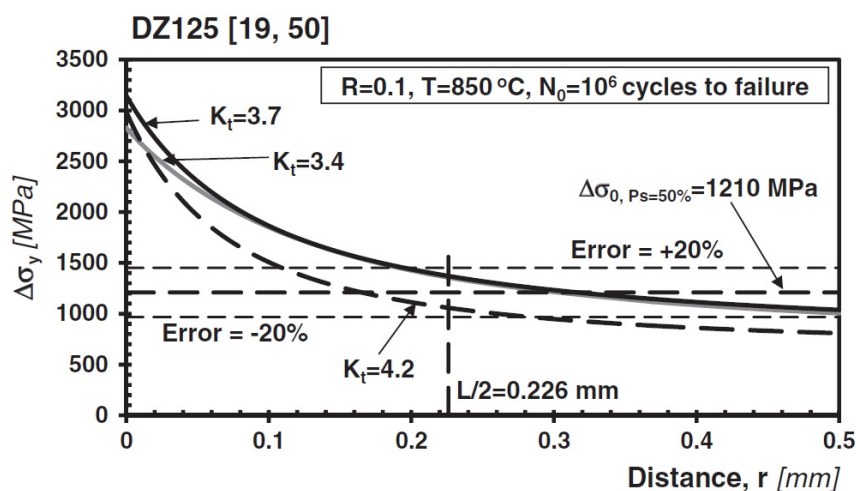


Figura 6.11: Campi di tensione dei quattro provini in DZ125 testati e determinazione della distanza critica.

tuata non solo continuando ad adottare una legge costitutiva del materiale lineare elastica per modellare il comportamento del materiale da progettare ma inoltre continuando a trattare il parametro della distanza critica  $L$  come una proprietà del materiale.

## 6.5 Discussioni

La TCD presuppone che la valutazione a fatica debba essere eseguita elaborando l'intero campo di tensione nella regione del danneggiamento, anche detta zona di processo (porzione di materiale in grado di controllare la complessiva resistenza a fatica) [24] [29]. La dimensione di tale regione dipende principalmente da (i) caratteristiche microstrutturali del materiale, (ii) proprietà micro meccaniche locali e (iii) dalla natura dei meccanismi fisici che si verificano nella fasi di iniziazione delle cricche a fatica [30]. In condizioni di carico ciclico, il danneggiamento è localizzato in una piccola regione posta nelle vicinanze dell'apice dell'intaglio. La formazione di una tale zona altamente danneggiata è stata evidenziata da un chiaro cambiamento della

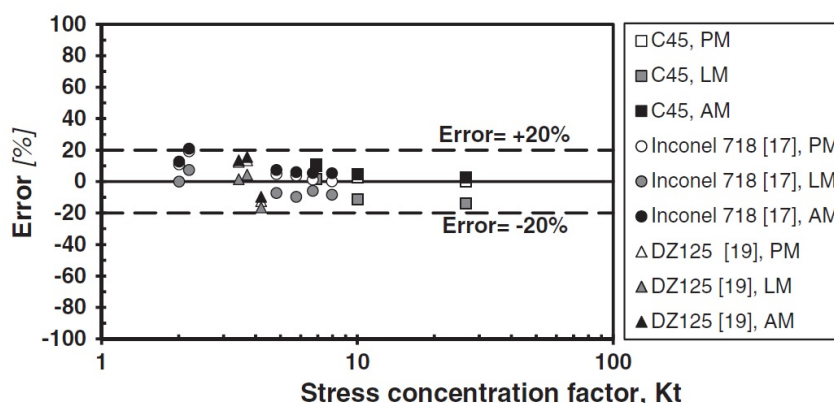


Figura 6.12: Precisione complessiva della TCD applicata nella forma di PM, LM ed AM.

morfologia locale del materiale investigato in [31]. Questo sembra supportare fortemente l'idea che, anche ad elevate temperature, la TCD è in grado di stimare la resistenza a fatica ad alto numero di cicli di provini intagliati in perché la zona di processo fornisce tutte le informazioni ingegneristiche richieste per quantificare accuratamente l'effetto di questi meccanismi di danneggiamento che alterano localmente la morfologia del materiale. Un altro aspetto interessante è che la TCD stima la resistenza HCF direttamente elaborando il campo di tensione lineare elastico lungo la presunta direzione di iniziazione della cricca, sebbene, nella zona di processo, il comportamento meccanico locale dei materiali metallici alle elevate temperature sia non lineare. Una motivazione, dimostrata da [32], è che il valore dell'energia lineare elastica uguaglia quello di quella elasto-plastica, quando sono mediate sull'intera zona di processo. Anche se la considerazione appena riportata offre una spiegazione del perché la TCD lineare elastica stima con successo la resistenza HCF ad elevate temperature per componenti intagliati, è evidente che molti lavori devono essere fatti in questo campo per collegare più rigorosamente la procedura TCD ai processi fisici che si svolgono all'interno della zona di processo e che comportano l'iniziazione delle cricche di fatica.

## 6.6 Conclusioni

- La TCD applicata nella forma di PM, LM ed AM è adatta a stimare la resistenza a fatica ad alto numero di cicli di componenti intagliati in materiale metallico alle elevate temperature.
- Tale stima si basa direttamente sull'elaborazione dei campi di tensione determinati attraverso convenzionali modelli lineari elastici agli elementi finiti. Questo implica che un'accurata valutazione della vita a fatica ad alto numero di cicli può essere effettuata senza la necessità di modellare il comportamento meccanico fortemente non lineare caratteristico dei materiali metallici quando esposti ad elevate temperature.
- Anche ad alta temperatura, la TCD può essere usata per progettare componenti intagliati, sollecitati a carichi variabili nel tempo, trattando la distanza critica richiesta come una proprietà del materiale il cui valore non dipende dalla geometria globale dell'indebolimento.
- Altri lavori sono richiesti in questo settore per estendere coerentemente l'uso della TCD al regime MCF.



## Capitolo 7

# Valutazione del lavoro di Susmel

In questo capitolo si sono valutati i modelli creati rispetto a quelli di Susmel a mezzo di una verifica sul valore della tensione efficace calcolata con la teoria della distanza critica intesa come metodo di punto e di linea. Per interpolare il campo di tensione della componente lungo  $y$  si sono scelte di volta in volta dei polinomi aventi un grado tale da correlare al meglio i valori registrati lungo l'asse dell'intaglio per un percorso avente lunghezza totale  $2L$ . I risultati ottenuti sono raccolti nelle tabelle del paragrafo 7.4 divise per materiale costituente i provini. Come si può osservare c'è un'ottima corrispondenza geometrica valutata dal coefficiente teorico di concentrazione delle tensioni  $K_t$  e di conseguenza anche della tensione efficace registrata e calcolata ad una distanza rispettivamente di  $L/2$  e  $2L$  dall'apice dell'intaglio raccordato.

### 7.1 Provini intagliati in C45 testati a $T = 250^\circ\text{C}$

#### 7.1.1 Blunt U-notch

$$\Delta\sigma_y(r) = 165.28 \cdot r^2 - 370.72 \cdot r + 524.96$$

$$\Delta\sigma_{eff} = \frac{1}{2 \cdot 0.252} \cdot 224.5 = 445.4 \text{ MPa}$$

### 7.1.2 Sharp U-notch

$$\Delta\sigma_y(r) = 797.07 \cdot r^2 - 975.7 \cdot r + 594.42$$

$$\Delta\sigma_{eff} = \frac{1}{2 \cdot 0.252} \cdot 209.7 = 416.1 \text{ MPa}$$

### 7.1.3 Sharp V-notch

$$\Delta\sigma_y(r) = -262748 \cdot r^5 + 401600 \cdot r^4 - 237459 \cdot r^3 + 69305 \cdot r^2 - 10843 \cdot r + 1087.6$$

$$\Delta\sigma_{eff} = \frac{1}{2 \cdot 0.252} \cdot 192.4 = 381.7 \text{ MPa}$$

## 7.2 Provini cilindrici intagliati in Inconel 718 testati a $T = 500^\circ\text{C}$

### 7.2.1 C1-notch

$$\Delta\sigma_y(r) = -4773.3 \cdot r^3 + 4798.4 \cdot r^2 - 2253 \cdot r + 984.12$$

$$\Delta\sigma_{eff} = \frac{1}{2 \cdot 0.154} \cdot 232.2 = 753.9 \text{ MPa}$$

### 7.2.2 C2-notch

$$\Delta\sigma_y(r) = 32796494 \cdot r^6 - 35740525 \cdot r^5 + 15650672 \cdot r^4 - 3553558 \cdot r^3 +$$

$$455119 \cdot r^2 - 34348 \cdot r + 1903.1$$

$$\Delta\sigma_{eff} = \frac{1}{2 \cdot 0.154} \cdot 217.3 = 705.5 \text{ MPa}$$

### 7.2.3 C3-notch

$$\Delta\sigma_y(r) = 115283279 \cdot r^6 - 121243596 \cdot r^5 + 50391099 \cdot r^4 - 10545238 \cdot r^3 +$$

$$1178249 \cdot r^2 - 69963 \cdot r + 2512.7$$

$$\Delta\sigma_{eff} = \frac{1}{2 \cdot 0.154} \cdot 219.9 = 714.0 \text{ MPa}$$



**7.2.4 C4-notch**

$$\Delta\sigma_y(r) = -4317.2 \cdot r^3 + 4600.4 \cdot r^2 - 2382.7 \cdot r + 1092.2$$

$$\Delta\sigma_{eff} = \frac{1}{2 \cdot 0.154} \cdot 258.5 = 839.3 \text{ MPa}$$

**7.2.5 C5-notch**

$$\Delta\sigma_y(r) = 31871346 \cdot r^6 - 34797426 \cdot r^5 + 15280886 \cdot r^4 - 3485578 \cdot r^3 + 450112 \cdot r^2 - 34603 \cdot r + 1952.4$$

$$\Delta\sigma_{eff} = \frac{1}{2 \cdot 0.154} \cdot 219.1 = 711.4 \text{ MPa}$$

**7.2.6 C6-notch**

$$\Delta\sigma_y(r) = 116912699 \cdot r^6 - 123042594 \cdot r^5 + 51191349 \cdot r^4 - 10730416 \cdot r^3 + 1202606 \cdot r^2 - 71981 \cdot r + 2606.5$$

$$\Delta\sigma_{eff} = \frac{1}{2 \cdot 0.154} \cdot 222.6 = 722.7 \text{ MPa}$$

**7.3 Provini intagliati in DZ125 testati a  $T = 850^\circ\text{C}$** **7.3.1 U3-notch**

$$\Delta\sigma_y(r) = -25891 \cdot r^5 + 72367 \cdot r^4 - 79077 \cdot r^3 + 43351 \cdot r^2 - 12886 \cdot r + 2786.1$$

$$\Delta\sigma_{eff} = \frac{1}{2 \cdot 0.452} \cdot 688.5 = 1108.9 \text{ MPa}$$

**7.3.2 U4-notch**

$$\Delta\sigma_y(r) = 145953 \cdot r^6 - 456738 \cdot r^5 + 568649 \cdot r^4 - 360338 \cdot r^3 + 124068 \cdot r^2 - 23242 \cdot r + 2894.9$$

$$\Delta\sigma_{eff} = \frac{1}{2 \cdot 0.452} \cdot 913.6 = 1010.6 \text{ MPa}$$

### 7.3.3 V1-notch

$$\Delta\sigma_y(r) = 104107 \cdot r^6 - 327317 \cdot r^5 + 411756 \cdot r^4 - 266363 \cdot r^3 + 95619 \cdot r^2 - 19618 \cdot r + 3097.9$$

$$\Delta\sigma_{eff} = \frac{1}{2 \cdot 0.452} \cdot 1141.1 = 1262.3 \text{ MPa}$$

## 7.4 Riassunto dei risultati

Questo paragrafo mostra in maniera sintetica il confronto dei due lavori. Si vedano le tabelle [7.1](#) per i provini in C45, [7.2](#) per quelli in Inconel 718 ed infine [7.3](#) per quelli in DZ125.

## 7.5 Conclusioni

I risultati ottenuti da Susmel sono molto simili, in certi casi coincidenti, con quelli ottenuti nel presente lavoro. Questo significa che i modelli agli elementi finiti realizzati per la valutazione sono corretti. É dunque possibile procedere con la sintesi dei dati a fatica secondo un criterio di volume basato sulla densità di energia di deformazione totale.

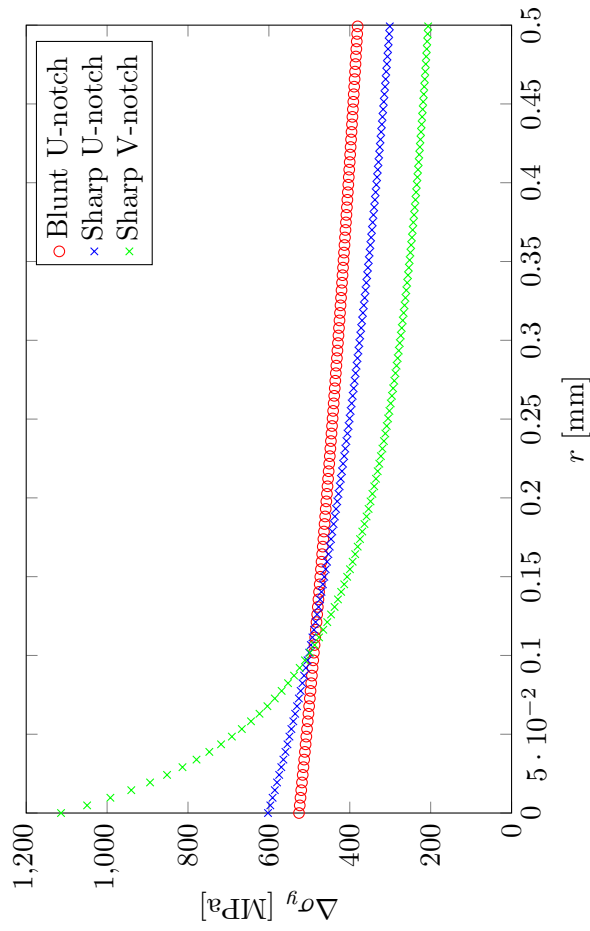
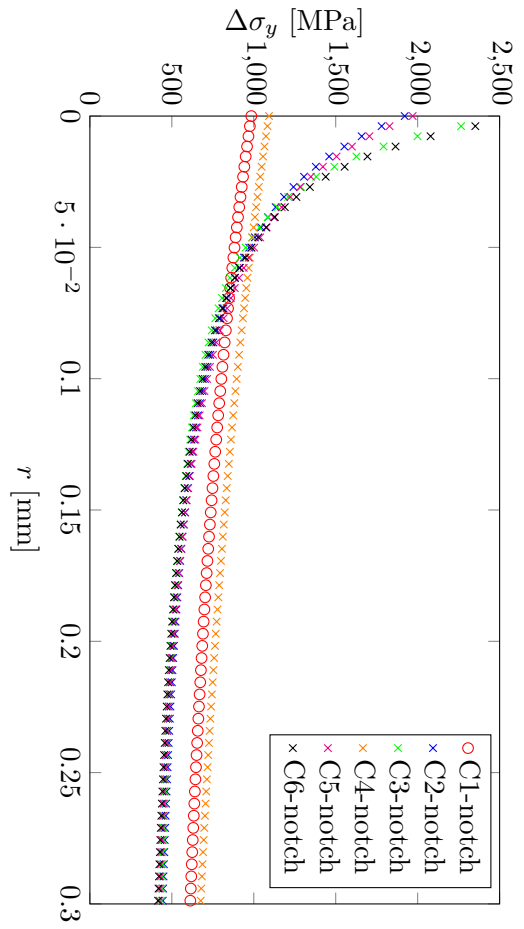


Tabella 7.1: Notched samples of C45 tested at  $T = 250\text{L}$

| Notch type    | $\Delta\sigma_{nom}$ |      | $\sigma_{max}$ |      | $K_t$  |            |        | $\Delta\sigma_{eff}$ |        |            |       |
|---------------|----------------------|------|----------------|------|--------|------------|--------|----------------------|--------|------------|-------|
|               | gross                | net  | net            | net  | Susmel | Pasqualini | Susmel | Error                | Susmel | Pasqualini | Error |
| Blunt U-notch | 39.0                 | 75.0 | 526            | 526  | 6.9    | 7.0        | 471.0  | 480.6                | 436.4  | 445.4      |       |
| Sharp U-notch | 28.7                 | 55.2 | 602            | 602  | 10.0   | 10.9       | 439.8  | 480.8                | 380.0  | 416.1      |       |
| Sharp V-notch | 21.9                 | 42.2 | 1114           | 1114 | 26.5   | 26.4       | 429.2  | 446.0                | 369.9  | 381.7      |       |

Tabella 7.2: Notched cylindrical samples of Inconel 718 tested at  $T = 500$  L

| Notch type | $\Delta\sigma_{nom}$ |       | $\sigma_{max}$ | $K_t$ | PM     |            | LM    |        |            |
|------------|----------------------|-------|----------------|-------|--------|------------|-------|--------|------------|
|            | gross                | net   |                |       | Susmel | Pasqualini | Error | Susmel | Pasqualini |
| C1-notch   | 408.9                | 460.0 | 985            | 2.0   | 2.1    | 787.3      | 836.8 | 709.5  | 753.9      |
| C2-notch   | 328.9                | 370.0 | 1921           | 4.8   | 5.2    | 743.1      | 795.6 | 657.8  | 705.5      |
| C3-notch   | 328.9                | 370.0 | 2615           | 6.7   | 7.1    | 718.1      | 765.2 | 668.0  | 714.0      |
| C4-notch   | 360.0                | 450.0 | 1093           | 2.2   | 2.4    | 846.8      | 933.8 | 761.8  | 839.3      |
| C5-notch   | 248.0                | 310.0 | 1969           | 5.8   | 6.4    | 737.0      | 816.1 | 641.0  | 711.4      |
| C6-notch   | 248.0                | 310.0 | 2709           | 8.0   | 8.7    | 710.0      | 787.2 | 650.2  | 722.7      |

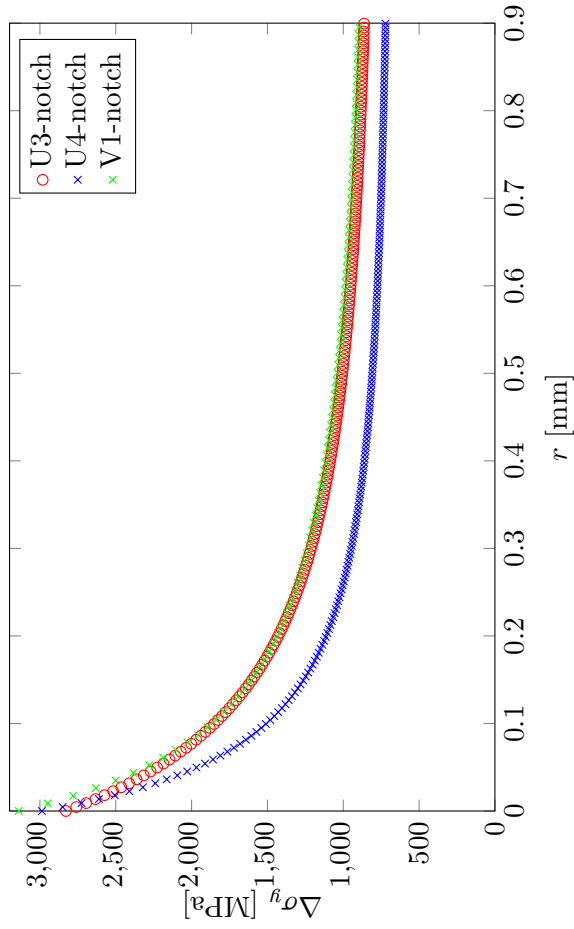


Tabella 7.3: Notched samples of directionally solidified superalloy DZ125 tested at  $T = 850\text{L}$

| Notch type | $\Delta\sigma_{nom}$ |     | $\sigma_{max}$ |      | $K_t$  |            | $\Delta\sigma_{eff}$ |            | LM     |            |
|------------|----------------------|-----|----------------|------|--------|------------|----------------------|------------|--------|------------|
|            | gross                | net | Susmel         | net  | Susmel | Pasqualini | Susmel               | Pasqualini | Error  | Pasqualini |
| U3-notch   | 741                  | 823 | 3.4            | 2829 | 3.4    | 3.4        | 1360.7               | 1359.5     | 1227.3 | 1226.7     |
| U4-notch   | 652                  | 711 | 4.2            | 2987 | 4.2    | 4.2        | 1058.4               | 1057.4     | 1010.9 | 1010.6     |
| V1-notch   | 764                  | 849 | 3.7            | 3140 | 3.7    | 3.7        | 1372.3               | 1371.3     | 1262.3 | 1262.3     |

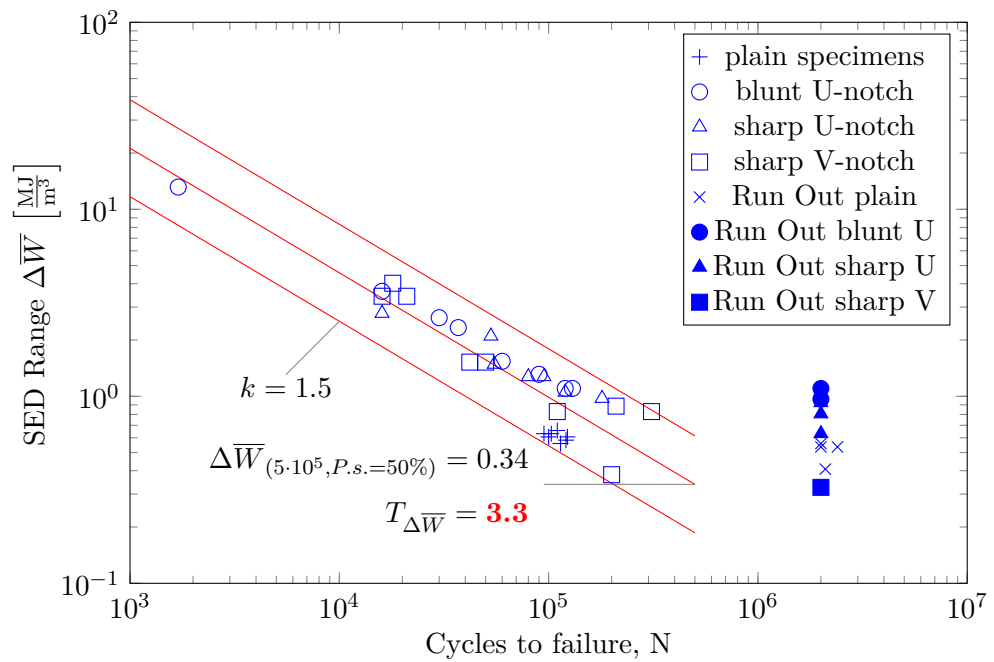
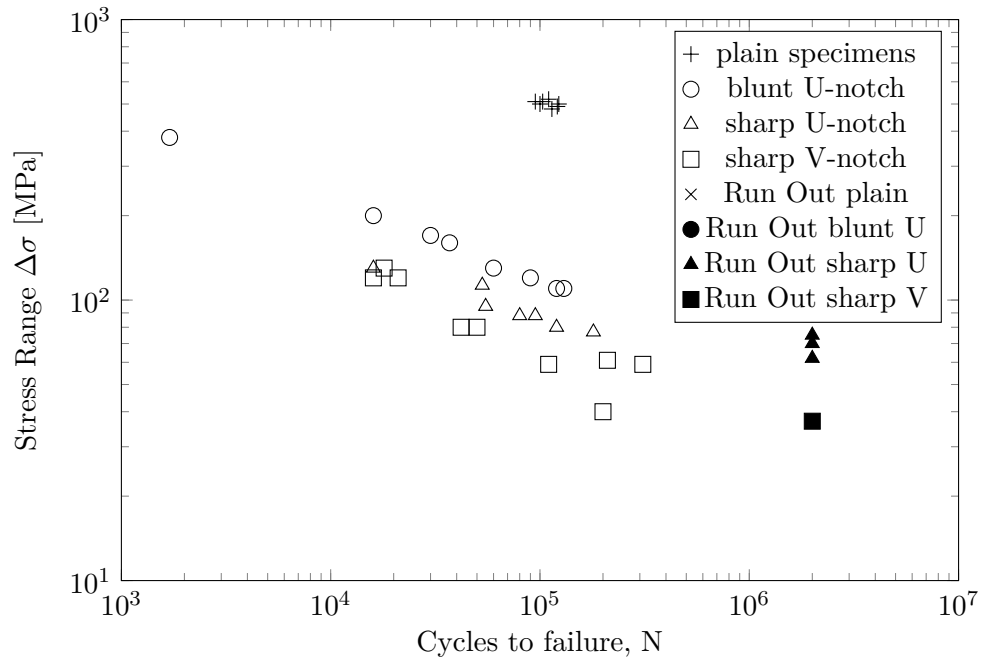


## Capitolo 8

# Sintesi in energia

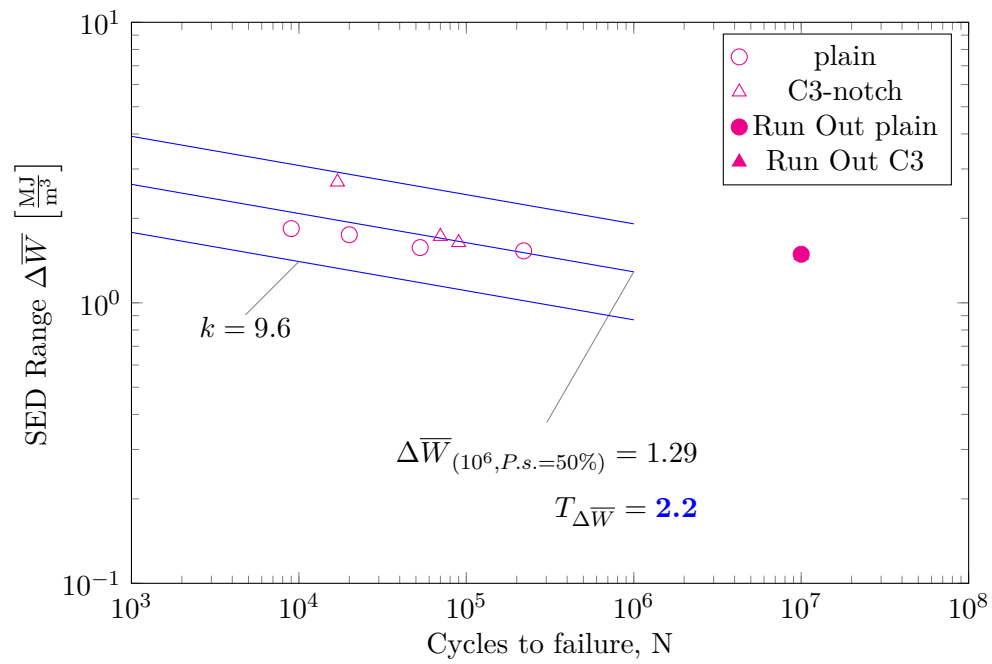
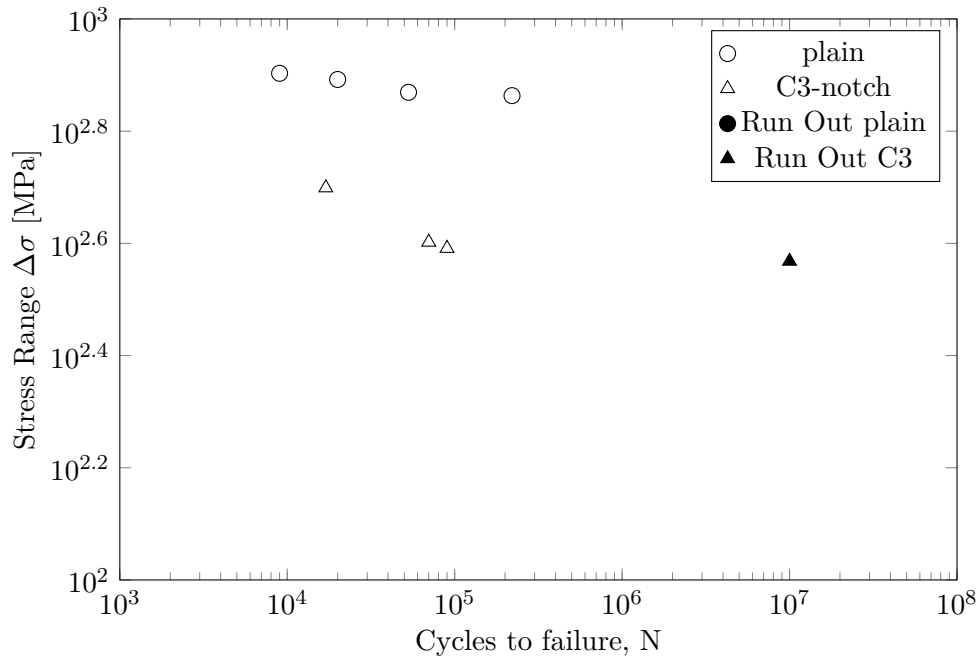
Nel presente capitolo sono state considerate tre serie di dati sperimentali, ricavati dal capitolo precedente, di resistenza a fatica ad alta temperatura relativi a provini aventi geometrie simili fra loro. Per tali serie, nei lavori originali, risultavano precisati tutti i parametri che consentono di descrivere con precisione la geometria locale dell'intaglio, le proprietà elastiche del materiale, le condizioni di carico e di vincolo.

La densità di energia di deformazione è stata ottenuta per mezzo di analisi agli elementi finiti bidimensionali eseguite con il software Ansys 14.5®, modellando il volume di controllo come un settore circolare bidimensionale di raggio  $R_c$ , che abbraccia l'apice dell'intaglio, rispettivamente pari a 0.213 mm per il C45, 0.130 mm per l'Inconel 718 e 0.382 mm per la DZ125.

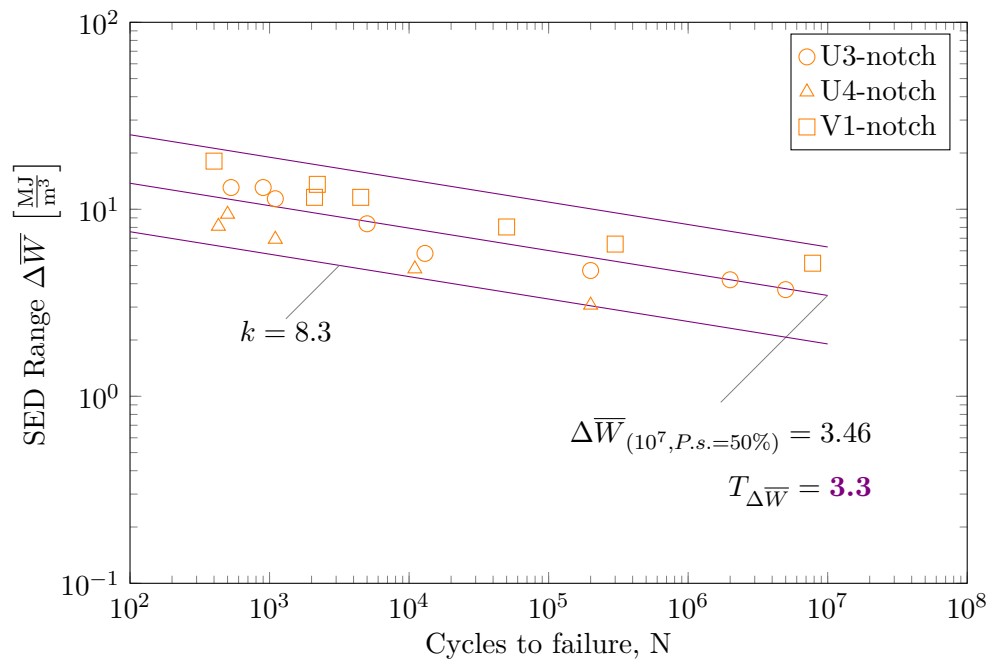
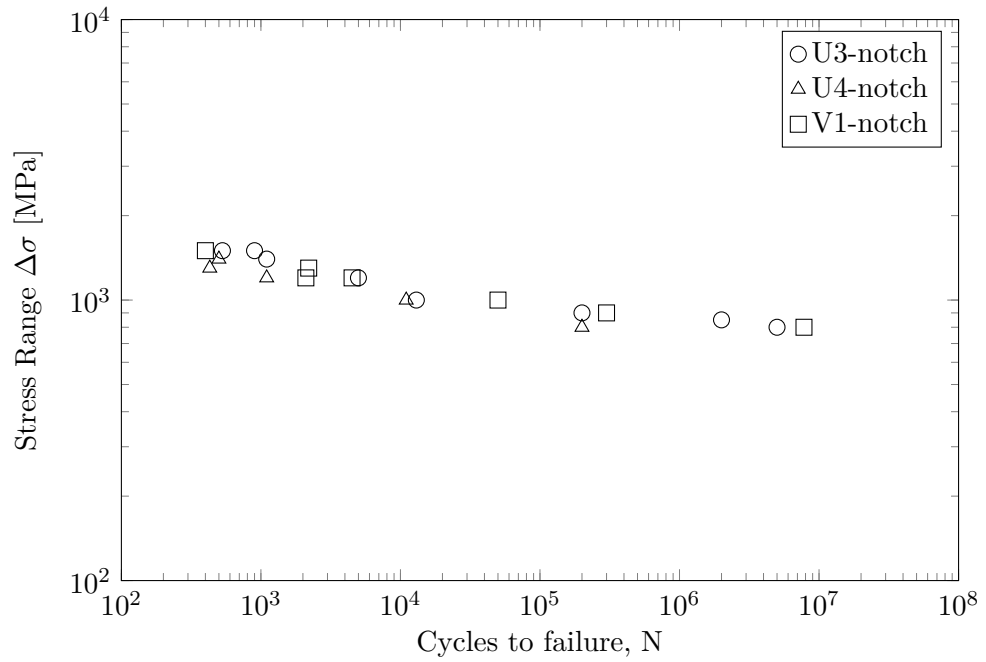
8.1 Notched samples of C45 tested at  $T = 250^\circ\text{C}$ 



## 8.2 Notched samples of Inconel 718 tested at $T = 500^\circ\text{C}$



### 8.3 Notched samples of DZ125 tested at $T = 850^\circ\text{C}$



## 8.4 Conclusioni

I dati sperimentati sono stati rianalizzati utilizzando un criterio locale basato sul valore medio della densità di energia di deformazione totale. Il metodo energetico consente di sintetizzare dati di resistenza a fatica indipendentemente dal punto di innesco delle cricche e dall'angolo di apertura dell'intaglio.

I dati sperimentali sono stati dunque presentati in termini di  $\Delta W - N$  chiarendo la posizione e la pendenza della Banda di dispersione associata.

Come evidenziato in alcuni contributi recenti riportati in letteratura, uno dei maggiori vantaggi del criterio basato sulla densità di energia di deformazione è legato al possibile utilizzo di mesh a maglia larga attorno al volume di controllo posizionato nelle zone di possibile innesco delle cricche di fatica, superando così il problema dei metodi basati sulla valutazione diretta dei campi di tensione locali i quali richiedono invece mesh con elevato grado di infittimento.

I dati di resistenza a fatica, riconvertiti in termini di densità di energia locale, sono stati confrontati con le bande ottenute dagli autori delle serie di dati di riferimento. L'accordo con le bande di sintesi è risultato soddisfacente. L'indice di dispersione, se riconvertito in termini di tensione media locale, piuttosto che in termini di densità media di energia locale, appare in linea con le indicazioni fornite dalle bande degli autori.



## Parte III

Valutazione della sensibilità  
all'intaglio per componenti  
intagliati mediante approcci  
probabilistici contemplanti la  
dimensione dell'intaglio e la  
microstruttura



## Capitolo 9

# Approcci probabilistici alla valutazione della vita a fatica

La superlega a base nichel è un materiale alto performante soggetto a severe condizioni operative. È largamente usato per componenti di motori aerei ed impianti di potenza a causa della sua elevata resistenza meccanica, al creep ed alla resistenza a fatica e alla corrosione alle elevate temperature [33, 34]. La rottura a fatica è di grande importanza per questi componenti per le catastrofiche conseguenze causate dai cicli di tensioni e deformazioni. La rottura a fatica di queste superleghe è proprio il fattore che limita il loro impiego affidabile in diverse applicazioni ingegneristiche. La maggior parte dei primi studi di ricerca sul comportamento a fatica delle superleghe a base nichel erano focalizzati su fenomeni a larga scala e sulla diretta osservazione sperimentale del processo di danneggiamento a fatica [35]. Nella fatica ad alto numero di cicli, la nucleazione di cricche e la propagazione di cricche microstrutturali è altamente eterogenea a livello di grano cristallino e l'influenza della microstruttura sulla formazione e propagazione di piccole cricche gioca un ruolo molto importante [36].

Caratteristiche microstrutturali quali inclusioni, porosità, distribuzione delle dimensioni del grano cristallino, bordi grano, distribuzione delle di-

mensioni dei precipitati e loro frazione volumetrica, spesso hanno principali influenze nella determinazione della formazione di cricche (e loro propagazione) sia a basso che ad alto numero di cicli nelle superleghe a base nichel [37]. Siccome la lega policristallina IN 100 è ottenuta con tecniche di metallurgia delle polveri, inclusioni e porosità (sempre presenti nella microstruttura) costituiscono i principali siti di nucleazione delle cricche. La presenza di inclusioni all'interno del grano o nelle vicinanze del suo bordo e le porosità in un materiale policristallino possono significativamente ridurre il numero di cicli necessario alla formazione di cricche di fatica a causa dell'incompatibilità delle deformazioni tra inclusioni e materiale circostante il che porta a fenomeni plastici locali [38]. Hyzak e Bernstein [39] e Deyber [40] hanno stabilito un'importante regola giocata dalle inclusioni nella formazione e propagazione di cricche di fatica nelle superleghe a base nichel considerandone due ottenute con la tecnologia della metallurgia delle polveri.

Il maggior problema relativo alle ricerche nell'ambito del comportamento a fatica che accomuna questi materiali caratterizzati da una complessa microstruttura, è la dispersione dei dati relativi alla vita a fatica o il limite di fatica per esperimenti simili condotti seguendo le medesime condizioni operative. I primi studi hanno mostrato l'esistenza di una grande dispersione dei valori che competono alle prime fasi di propagazione delle cricche a causa della variabilità microstrutturale e di una relativamente modesta dispersione per quelli della seconda fase [41]. A causa di questa dispersione intrinseca, numerosi approcci probabilistici sono stati sviluppati per stimare la probabilità di sopravvivenza o meno di componenti soggetti a sollecitazioni variabili nel tempo ad alto numero di cicli.

## 9.1 La proposta di Deyber

Il comportamento microscopico della lega DA 718, inteso come meccanismi di nucleazione e propagazione di cricche a livello microstrutturale, è già stato



modellato è descritto nei due seguenti lavori ai quali si consiglia di riferirsi per maggiori dettagli [42, 43]. Per contemplare inoltre la dispersione causata dalla presenza di particelle in un dato volume e la proporzione di particelle criccate come funzione del carico applicato, Deyber [40] propose una nuova formulazione probabilistica. Lo scopo di questo paragrafo è quello di descrivere le formulazioni adottate e precisare come vengono identificati i principali parametri dei modelli a livello mesoscopico e microscopico.

### 9.1.1 Modelli su scala microscopica

- Prima fase di nucleazione ( $d > D_0$ ): il modello proposto è basato sulla formulazione definita da Tanaka-Mura ma con una lieve modifica per contemplare l'effetto della dimensione del grano cristallino:

$$N_i = \frac{1}{d} \frac{A_{\text{stage I}}}{\Delta \varepsilon_p^2} \quad (9.1)$$

dove  $N_i$  è il numero di cicli di iniziazione,  $d$  la dimensione del grano cristallino (in questo caso  $10 \mu\text{m}$ ),  $\Delta \varepsilon_p$  è la variazione della deformazione plastica nel grano cristallino (nel nostro caso deformazione plastica macroscopica calcolata utilizzando una legge di compartamento viscoplastico) e  $A_{\text{stage I}}$  è una costante dipendente dalla temperatura.

- È la particella ad indurre la nucleazione ( $d < D_0$ ): i dati sperimentali possono essere ben rappresentati dalla distribuzione di probabilità di Weibull, dove la probabilità di rottura  $P_f$  dipende dalla tensione applicata e dalla resistenza allo snervamento del materiale, come mostrato dai risultati sperimentali:

$$P_f(\sigma_d) = 1 - e^{-\left[\frac{\sigma_1 + \lambda(\sigma_{eq} - \sigma_y)}{\sigma_0}\right]^m} \quad (9.2)$$

dove  $\sigma_1$  è la tensione principale massima,  $\sigma_{eq}$  è la tensione equivalente di von Mises mentre  $\lambda$  è un fattore di forma della particella. La legge

di Beremin [44]:

$$\sigma_d = \sigma_1 + \lambda(\sigma_{eq} - \sigma_y) \quad (9.3)$$

dove  $\sigma_d$  rappresenta la tensione critica locale di decoesione all'interno dell'inclusione, indipendente dalla temperatura, è qui adattata ad un problema tridimensionale servendosi delle seguenti condizioni:

$$\begin{cases} \langle \sigma_{eq} - \sigma_y \rangle = \sigma_{eq} - \sigma_y & se \quad \sigma_{eq} - \sigma_y > 0 \\ \langle \sigma_{eq} - \sigma_y \rangle = 0 & se \quad \sigma_{eq} - \sigma_y < 0 \end{cases} . \quad (9.4)$$

- Propagazione di microcricche: dati sperimentali dimostrano come la velocità di propagazione della cricca possa essere considerata proporzionale alla sua lunghezza, per un determinato intervallo di lunghezze e particolari condizioni operative riportate dettagliatamente in [40]. Appare dunque giustificato l'uso del modello di Tomkins [45] dato da:

$$\frac{da}{dN} = \alpha \cdot a \quad (9.5)$$

dove l'espressione del coefficiente  $\alpha$  è dato da:

$$\alpha = \beta \cdot \Delta\varepsilon_p \cdot [1 + \beta] \quad (9.6)$$

mentre il parametro ausiliario  $\beta$  è stato definito semplicemente per compattare la notazione e vale:

$$\beta = \frac{1}{2^5} \left[ \pi \cdot \frac{\Delta\sigma_1}{T} \right]^2 \quad (9.7)$$

dove  $T$  è un parametro associato alla tensione di rottura che compete al danneggiamento nella zona plastica della cricca,  $\Delta\varepsilon_p$  è la variazione della deformazione plastica,  $\Delta\sigma_1$  è invece l'ampiezza della tensione principale massima. Oltre al comportamento meccanico, l'unico parametro da identificare per questo modello è  $T$ .

### 9.1.2 Modelli su scala macroscopica

Il modello macroscopico proposto prende in considerazione i tre precedenti modelli microscopici per calcolare il numero di cicli a rottura  $N_f$ , associati a due possibili siti di nucleazione: i grani cristallini e le particelle. Il valore di  $N_f$  è la somma del numero di cicli di micro-iniziazione di una cricca avente lunghezza  $d$  (prima fase di nucleazione) o  $D_0$  (è la particella ad indurre la nucleazione), e il numero di cicli di propagazione per portare questa micro-cricca al completo attraversamento dello spessore e quindi alla rottura della struttura (raggiungendo  $K_{Ic}$ ).

I dati sperimentali indicano che la nucleazione della cricca sulla particella si presta ad essere trattata servendosi di un approccio probabilistico per le seguenti due ragioni:

- solo una frazione delle particelle presenti è fratturata per un dato carico (vedi modelli del sottoparagrafo precedente);
- il numero di particelle ed il valore della loro probabilità di presenza varierà in funzione delle superfici e volume deformati.

### 9.1.3 Probabilità di presenza della particella

Conoscendo la distribuzione della dimensione delle particelle ed idealizzandole come sfere di uguale superficie (o cerchi nel caso piano) avente diametro generico  $D$ , è possibile determinare il numero di particelle aventi diametro  $D$  maggiore di un dato diametro  $D_0$  ( $N(D_0 \leq D)$ ) e la probabilità associata:

$$P(D \leq D_0) = \frac{N(D_0 \leq D)}{N(D_0 \leq D_{\min_i})} = \frac{\sum_{D_j=D_0}^{D_{\max_i}} N(D_0 = D_j)}{\sum_{D_j=D_{\min_i}}^{D_{\max_i}} N(D_0 = D_j)}. \quad (9.8)$$

Si assume inoltre, dalla legge di Poisson, che sia:

$$P(D \geq D_0) = 1 - e^{-N(D \geq D_0)}. \quad (9.9)$$

### 9.1.4 Probabilità globale di rottura

Lo scopo del modello ora proposto è determinare una probabilità di rottura del disco (presenza di una cricca macroscopica nella struttura) prima del raggiungimento di un dato numero di cicli. I correnti metodi certificati per coprire tale rischio,  $P(N_f \leq N) < 1/1000$ , dove  $N_f$  è il numero di cicli calcolato ed  $N$  il dato numero di cicli in corrispondenza del quale si calcola il rischio.

Per determinare tale probabilità, deve essere presa in considerazione la dispersione statistica: questo è fatto nel presente approccio proposto grazie alla probabilità di presenza delle particelle, dipendente dalla superficie o dal volume deformati, e dalla probabilità di rottura dalla particella  $P_f(\sigma_d)$ .

Se si considera solo una particella, si raggiunge la rottura quando sono verificati due effetti indipendenti: nucleazione di una microcricca ai primi giri (data da  $P_f(\sigma_d)$ ), e particelle aventi diametro  $D_0$  grande abbastanza per permettere alla cricca di raggiungere la dimensione critica finale in corrispondenza di  $N$  cicli. Questa seconda condizione è valutata integrando il modello di Tomkins tra  $D_0$  e  $D_f$ :

$$P(N_{\text{prop part}} \geq N)_{1 \text{ part}} = P\left[\frac{1}{\alpha} \ln\left(\frac{D_f}{D_0}\right) \geq \frac{1}{\alpha} \ln\left(\frac{D_f}{D}\right)\right] = P(D_0 \leq D). \quad (9.10)$$

La probabilità di essere calcolata quindi corrisponde alla presenza di una particella di dimensione superiore a una determinata  $D_0$ . Questa probabilità varia con la posizione della particella (in superficie, sottosuperficie o interna al componente) ed il volume associato.

Concludendo, la probabilità globale di rottura è ottenuta considerando tutte le particelle presenti nel volume simulato, e per tutte le possibili posizioni di tali particelle. In questo caso, in accordo con la weakest-link theory, la probabilità di sopravvivenza è il complementare a 1 di quella di rottura:

$$P_s = 1 - P_f. \quad (9.11)$$

Questa probabilità globale può essere calcolata con una procedura di elaborazione dei dati ottenuti da un'analisi strutturale di un modello agli elementi finiti, dove:

- $N_{p, \text{sup}}$  è il numero di particelle che affiorano sugli  $N_{\text{el}, \text{sup}}$  elementi che rappresentano la superficie libera della struttura;
- $N_{p, \text{subsup}}$  è il numero di particelle contenute all'interno degli  $N_{\text{el}, \text{subsup}}$  elementi che rappresentano il volume subsuperficiale della struttura;
- $N_{p, \text{int}}$  è il numero di particelle contenute all'interno degli  $N_{\text{el}, \text{int}}$  elementi che rappresentano il volume interno della struttura.

La probabilità globale di rottura risulta quindi:

$$P_f = 1 - \prod_{n=1}^{N_{\text{el}, \text{sup}}} \left[ \left( 1 - P_f(\sigma_d) \cdot P(D_0 \leq D) \right)^{N_{p, \text{sup}}} \right] \cdot \prod_{n=1}^{N_{\text{el}, \text{subsup}}} \left[ \left( 1 - P_f(\sigma_d) \cdot P(D_0 \leq D) \right)^{N_{p, \text{subsup}}} \right] \cdot \prod_{n=1}^{N_{\text{el}, \text{int}}} \left[ \left( 1 - P_f(\sigma_d) \cdot P(D_0 \leq D) \right)^{N_{p, \text{int}}} \right] \quad (9.12)$$

## 9.2 La proposta di Pineau

L'articolo di riferimento è la referenza [46] la quale è composta da due parti principali. Nella prima parte è sviluppato un modello probabilistico per la propagazione di una cricca. Questo modello include due parametri microstrutturali: (i) la distribuzione statistica delle inclusioni e (ii) la legge di propagazione delle cricche di fatica, la quale è sviluppata per quantificare gli effetti delle dimensioni. È mostrato che la probabilità di rottura corrispondente alla propagazione di una cricca di fatica inizializzata da un'inclusione è una funzione crescente della dimensione dei componenti. La seconda parte si occupa del comportamento in propagazione di una cricca di fatica osservato ad elevata temperatura (circa 650 °C) in differenti superleghe a base nichel

e molto dettagliatamente nella lega 718. In questi materiali la transizione a modalità di frattura intergranulare, quando si diminuisce la frequenza con la quale vengono applicati i carichi per effettuare i test, è principalmente attribuita ai severi effetti ambientali. I meccanismi di rafforzamento per assistenza dell'ossido alla propagazione della cricca sono brevemente descritti per la lega 718. È mostrato che in questo materiale i carichi non dovrebbero contribuire al danneggiamento meccanico ma producono un significativo aumento della velocità di propagazione della cricca quando le condizioni sono soddisfatte per attivare la barriera di ossido di fronte all'apice della cricca. Questi risultati illustrano le difficoltà che si possono incontrare nella determinazione di appropriate leggi di propagazione della cricca in un approccio di tolleranza al danneggiamento.

### 9.2.1 Introduzione

Fatica a basso numero di cicli e conseguente propagazione ciclica della cricca ad elevate temperature (550 – 650 °C) sono i meccanismi di danneggiamento che dominano nei rotori delle turbine. I risultati dei test, ottenuti da provini di piccole dimensioni da laboratorio, su materiali derivati dalla tecnologia delle polveri mostrano essenzialmente due andamenti: (i) la nucleazione dalle inclusioni superficiali è molto più dannosa rispetto a quella dovuta alle inclusioni interne; (ii) si osserva un'ampia dispersione dei valori relativi al numero di cicli a rottura.

La dispersione dei risultati è relativa alla probabilità di iniziazione e propagazione di una cricca da un'inclusione. Questa probabilità dipende dalla dimensione dell'inclusione, dalla sua forma e dimensione del provino che viene testato dato che i materiali per test hanno una bassa densità di difetti, un effetto delle sue dimensioni è aspettato. Le distribuzioni di probabilità di rottura e vita a fatica di componenti contenenti difetti microstrutturali sono controllate non solo dalla probabilità di nucleazione e successiva pro-

pagazione da un difetto ma anche dalle proprietà del materiale relative alla propagazione della cricca.

### 9.2.2 Nucleazione della cricca di fatica dalle inclusioni

Si assume che l'iniziazione della cricca dalle inclusioni sia immediata. L'intera vita a fatica è quindi spesa per la propagazione della cricca. Questa assunzione permette di essere molto conservativi in un certo numero di circostanze sebbene sia stato mostrato che cricche da inclusioni ceramiche nei primissimi cicli, dipendano dalle tensioni residue locali causate dalla differenza delle proprietà elastiche e del coefficiente di dilatazione termica e dalla resistenza dell'interfaccia matrice-inclusione relativa a quella di frattura dell'inclusione.

Le inclusioni più dannose sono quelle localizzate alla superficie libera, in particolare quelle localizzate nella subsuperficie. Molte ragioni possono essere richiamate per dare una spiegazione a questo fenomeno: (i) le condizioni al contorno per un'inclusione superficiale può comportare un aumento della concentrazione delle tensioni più dannosa rispetto a quella indotta dalle non omogeneità interne; (ii) ad elevata temperatura, a causa degli effetti ambientali, la velocità di propagazione di una cricca connessa con la superficie è maggiore di quella di una cricca interna non affiorante in superficie; (iii) grandi concentrazioni di tensione hanno luogo quando il difetto planare nuclea da un'inclusione alla quale non corrisponde alla forma di equilibrio.

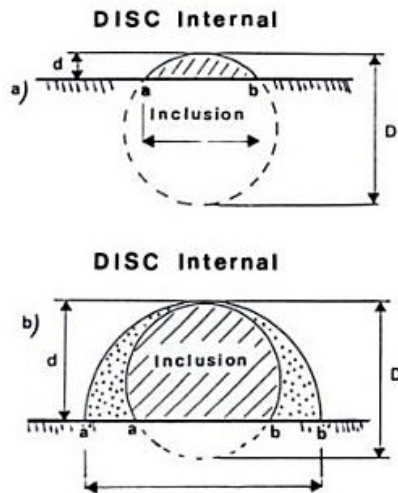
### 9.2.3 Stima della vita in servizio

Si consideri un volume  $V$  di materiale avente superficie  $S$ , sollecitato da una tensione ciclica  $\Delta\sigma$  con un rapporto di ciclo  $R = 0$ . Immaginiamo inclusioni sferiche di diametro  $D$  le quali sono presenti con una distribuzione volumetrica  $n_v$ . La probabilità di ogni singola inclusione, evitando la dipendenza della superficie dal rapporto  $S/V$ , per una prima approssimazione, è data dalla quantità  $1 - \frac{D \cdot S}{V}$ , se trascuriamo gli effetti stereologici associati con

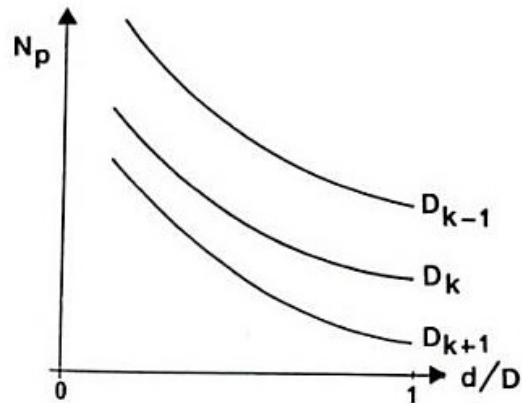
l'intersezione di particelle con la superficie libera. Le inclusioni totalmente presenti sono date dal rapporto  $n_v V$ . Segue dunque che la probabilità  $p_1$  di ogni singola inclusione di intersecare la superficie libera è data da:

$$p_1(D) = 1 - \left(1 - \frac{D \cdot S}{V}\right)^{n_v V}. \quad (9.13)$$

È necessario inoltre riconoscere il modo secondo il quale una data inclusione interseca la superficie libera; ad esempio, un'inclusione solo parzialmente incorporata nella superficie libera è molto più danneggiante di una pienamente incorporata come mostrato in figura ??.



**Fig.3** - Definition of an equivalent crack shape from the section of inclusions close to a free surface.



**Fig.4** - Number of cycles to failure as a function of the position of the inclusion  $d/D$  and for different size classes.  $D_k$ .

Se la dimensione  $d$  del difetto definisce il limite di fatica  $N_0$ , in coerenza con l'approccio di tolleranza al danneggiamento descritto sopra, la probabilità  $p_2$  che l'attuale numero di cicli  $N_p$  sia minore di  $N_0$  è:

$$p_2\{N_p < N_0\} = \left[1 - \left(1 - \frac{D \cdot S}{V}\right)^{n_v V}\right] \frac{D - d}{D}. \quad (9.14)$$



Il termine  $\frac{D-d}{D}$  potrebbe essere considerato come criterio di dannosità, il quale richiama che, quando  $d=D$ , l'inclusione è alla sua massima potenza, e quindi  $N_p = N_0$  e  $p_2 = 0$ . L'estremo opposto è invece quando l'inclusione intercetta solo appena la superficie libera  $d = 0$ , e tuttavia non è danneggiante; dunque  $p_2 = p_1$ . In questo limite, il numero di cicli  $N_p$  tende all'infinito. La figura ?? illustra la dipendenza di  $N_p$  dal rapporto  $d/D$  per vari valori

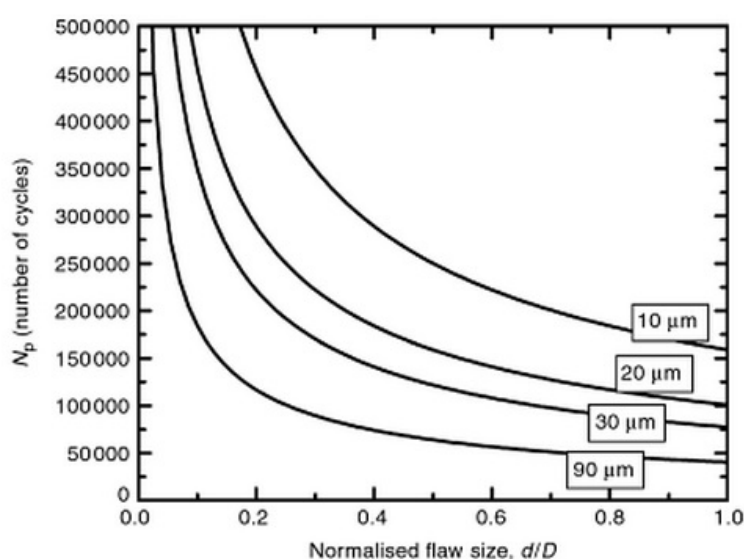


Fig. 4.46. Variation of the predicted life with the flaw size,  $d$ , normalised against the inclusion diameter,  $D$ , for various values of  $D$ .

della dimensione  $D$  dell'inclusione. Vale la pena notare che al tendere a zero del rapporto  $d/D$  ci si aspetta un limite di fatica infinito in quanto significa fisicamente l'assenza dei difetti.

Altro aspetto da considerare è la distribuzione di dimensione delle inclusioni. Immaginando che tale distribuzione sia discretizzata raggruppando in  $K$  classi le generiche dimensioni  $D_j$  delle inclusioni, la classe  $\kappa$  sarà composta da un elenco di  $D_{\kappa_j}$  dimensioni relative ad inclusioni aventi una distribuzione volumetrica  $n_{v\kappa}$ . In questo caso, la probabilità  $p_3$  che il numero

di cicli  $N_p$  sia minore del limite di fatica  $N_0$  è data da:

$$p_3\{N_p < N_0\} = 1 - \prod_{\kappa=1}^K \left[ 1 - p_4\{N_p - N_0\} \right] \quad (9.15)$$

dove, appellandosi all'espressione per  $p_2$ , si ottiene:

$$p_4\{N_p - N_0\} = \left[ 1 - \left( 1 - \frac{D_{\kappa_j} \cdot S}{V} \right)^{n_{v_\kappa} V} \right] \frac{D_{\kappa_j} - d}{D_{\kappa_j}}, \quad (9.16)$$

la quale rappresenta la probabilità di trovare inclusioni di classe  $\kappa$  in gradom di portare a rottura il componente in un numero di cicli  $N_p < N_0$ . La probabilità per un'inclusione di classe  $\kappa$  di essere intercettata dalla superficie critica S vale invece:

$$p_5(D_{\kappa_j}) = \left[ 1 - \left( 1 - \frac{D_{\kappa_j} \cdot S}{V} \right)^{n_{v_\kappa} V} \right]. \quad (9.17)$$

Nell'equazione 9.16 è possibile vedere come adottando valori reali per  $D_{\kappa_j}$  (ad esempio,  $D_{\kappa_j} = 50 \cdot 10^6$  m) e  $n_{v_\kappa}$  (ad esempio,  $n_{v_\kappa} = 50 \frac{1}{\text{m}^3}$ ), il prodotto  $\frac{D_{\kappa_j} \cdot S}{V}$  è sufficientemente piccolo quindi  $p_5(D_{\kappa_j})$  è spesso indipendente dal volume  $V$ .

Pineau utilizzò questo modello per stimare la probabilità di rottura per tre differenti dimensioni del componente realizzati in Rene 95 e stabilì che la probabilità di rottura è fortemente dipendente dalla dimensione.

### 9.3 La proposta di Doudard

Doudard [47] partì da un modello probabilistico che prendeva in considerazione l'effetto dell'eterogeneità sulla tensione utilizzando il concetto del volume effettivo e lo estese contemplando storie di carico multiassiali in HCF introducendo un fattore per rappresentare la distribuzione delle direzioni attive di scorrimento e per catturare la variabilità del livello di attivazione. In questo approccio si assume che le direzioni di scorrimento divengano attive quando l'ampiezza della tensione tangenziale di taglio  $T_a$  eccede la

resistenza critica allo snervamento. Doudard utilizzò il processo di punto di Poisson [48, 49] per descrivere l'attivazione e la densità media dei siti attivi  $\lambda$  è data come:

$$\lambda = \frac{1}{V_0 \cdot S_0^m} \int (2T_a)^m d\theta \quad (9.18)$$

dove  $m$ ,  $V_0$  è il volume di riferimento e  $V_0 \cdot S_0^m$  sono parametri dipendenti dal materiale. L'equazione 9.18 viene integrata lungo tutti i possibili angoli per considerare tutte le direzioni spaziali definite dall'angolo solido  $\theta$ . Doudard definì la probabilità  $P_\kappa$  (all'interno di un dominio  $\Omega$  del volume  $V$ ) di trovare  $\kappa$  siti attivi come:

$$P_\kappa = \frac{N(\Omega)^\kappa}{\kappa!} e^{-N(\Omega)} \quad (9.19)$$

dove  $N(\Omega)$  è il numero medio di siti attivi dato da:

$$N(\Omega) = \lambda \cdot V. \quad (9.20)$$

La risultante probabilità di rottura  $P_f$  vale:

$$P_f = 1 - \exp \left[ -\frac{1}{V_0} \int \left( \frac{2T_a}{S_0} \right)^m \cos \xi d\theta dV \right]. \quad (9.21)$$

Questo modello probabilistico può essere utilizzato sia per carichi non proporzionali che multiassiali. È anche in grado di contemplare la dispersione dei dati in HCF attraverso la distribuzione dei sistemi di scorrimento e della variabilità del loro livello di attivazione.

## 9.4 La proposta di Flaceliere e Morel

Flaceliere e Morel [50] svilupparono un modello probabilistico basato sul criterio di resistenza proposto da Papadopoulos [51], il quale definì una tensione equivalente come funzione del valore medio quadratico dell'ampiezza della tensione tangenziale di taglio risolta su tutte le direzioni di tutti i piani nell'intorno del punto materiale  $T_a$  e la pressione massima idrostatica

$\sigma_{H_{\max}}$  ottenuta mediando su tutti i piani nell'intorno del punto materiale, la tensione normale agente sul punto:

$$\sigma_{eq_V} = M_\sigma + p \cdot \sigma_{H_{\max}} \quad (9.22)$$

dove  $M_\sigma$  è il valore medio quadratico dell'ampiezza della tensione tangenziale di taglio risolta ( $\sqrt{T_a^2}$ ),  $p$  un coefficiente riflettente la sensibilità alla pressione idrostatica mentre  $\sigma_{H_{\max}}$  è il massimo valore della pressione idrostatica sotto un carico periodico. Questa tensione equivalente è applicabile a qualsiasi stato complesso di tensione (carichi in fase e fuori fase). La probabilità di rottura è data da:

$$P_f(\sigma_{eq_V}) = 1 - \exp \left[ -\frac{1}{V_0} \int_v \frac{\sigma_{eq_V}}{\sigma_0} dV \right] \quad (9.23)$$

dove  $V_0$  è il volume di riferimento e  $\sigma_0$  il valore di soglia al danneggiamento della tensione. Flaceliere e Morel studiarono inoltre gli effetti del gradiente di tensione e della superficie nella probabilità di rottura a fatica. Basandosi sulla proposta di Papadopoulos, utilizzarono per la tensione equivalente una funzione dipendente dal gradiente normalizzato della massima pressione idrostatica, ottenendo:

$$\sigma_{eq_S} = M_\sigma + p \cdot \left[ 1 - \beta \left\langle \frac{G}{\sigma_{H_{\max}}} \right\rangle^n \right] \sigma_{H_{\max}} \quad (9.24)$$

con

$$G = \sqrt{\left( \frac{\partial \sigma_{H_{\max}}}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \sigma_{H_{\max}}}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial \sigma_{H_{\max}}}{\partial z} \right)^2} \quad (9.25)$$

dove  $n = 1$  mentre  $\beta$  è il fattore di intensificazione delle tensioni idrostatiche normalizzato. La funzione di Weibull per le tensioni superficiali è poi definita come:

$$P_f(\sigma_{eq_S}) = 1 - \exp \left[ -\frac{1}{S_0} \int_s \frac{\sigma_{eq_S}}{\sigma_0} dS \right]. \quad (9.26)$$

I risultati dimostrano una buona correlazione tra l'approccio col modello superficiale e quelli sperimentali determinanti la probabilità di rottura per

ghisa sferoidale GS52 e acciaio C36. Tuttavia si nota una larga discrepanza tra l'approccio di volume e quello di superficie qualora applicati alla ghisa sferoidale a causa della presenza di porosità aventi dimensioni da 50 a 1000  $\mu\text{m}$ .

## 9.5 La proposta di Delahay e Palin-Luc

Delahay e Palin-Luc [52] hanno sviluppato un approccio probabilistico per la fatica multiassiale ad elevato numero di cicli combinando tre parametri propri della distribuzione di Weibull con la deterministic energy-based ed un criterio volumetrico proposto da Banville [53]. Per considerare la multiassialità dello stato di tensione, la tensione di Weibull viene sostituita con la densità del lavoro di deformazione per ciclo di carico. La probabilità di rottura che ne risulta è la seguente:

$$P_f(V, \sigma) = 1 - \exp \left[ -\frac{1}{V_0} \int_v \frac{W_g - W_g^{*m}}{W_u} dV \right] \quad (9.27)$$

dove  $W_g$  è la densità del lavoro di deformazione conferito al materiale per un periodo di carico,  $W_g^*$  è il valore di soglia di  $W_g$ ,  $W_u$  è un parametro di scala mentre  $m$  è la pendenza di Weibull. Questo modello è in buon accordo con la distribuzione di probabilità ottenuta con dati sperimentali quando questi provengono dai cinque materiali indagati: gli acciai legati 30NiCrMo16 e 35CrMo4 bonificati, l'acciaio a basso tenore di carbonio C20 ricotto, la ghisa sferoidale EN-GJS800-2 e la lega di titanio Ti-6Al-4V.

Delahay e Palin-Luc studiarono inoltre l'effetto delle dimensioni il quale è solitamente collegato al gradiente di tensione-deformazione nella HCF come mostrato da Papadopoulos e forniscono la probabilità di rottura in funzione della tensione completamente invertita per un provino piano:

$$P_f(V, \sigma_a) = 1 - \exp \left[ -\frac{V}{\varphi_u} \frac{\sigma_a^2}{E} - W_g^{*m} \right] \quad (9.28)$$

dove  $V$  è il volume del componente,  $\sigma_a$  è l'ampiezza della tensione normale,  $E$  il modulo elastico di Young ed infine  $\varphi_u = V_0 \cdot W_u^m$ .

## Capitolo 10

# Zona di processo del danneggiamento a fatica

Il primo problema che si incontra nella previsione della vita a fatica di un componente intagliato è l'appropriata definizione della zona di processo del danneggiamento (ad esempio semplicemente intesa come volume del materiale influenzante la nucleazione di cricche di fatica). Nel tempo sono state proposte differenti definizioni basate su analisi agli elementi finiti per valutare la distribuzione delle tensioni in campo plastico piuttosto che elasto-plastico. La zona di processo a fatica è concepita come parte del volume di materiale all'interno del quale hanno luogo deformazioni cicliche micro o macro-plastiche, le quali originano nel materiale a livello microstrutturale un principio di danneggiamento inteso come difetti multipli. È necessario notare che questa assunzione è valida nel caso in cui la variazione della tensione nominale applicata a monte e a valle della zona indebolita sia inferiore della tensione di snervamento del materiale ( $\Delta S < \sigma_y$ ). La zona di processo è contenuta all'interno della zona plastica (vedi figura 10.2).

La sua dimensione caratteristica  $d^*$  è determinata dalle proprietà del materiale e dalle condizioni in cui vengono effettuati i test. Il valore di  $d^*$  è minore di quello della dimensione monotona ( $r_{pm}$ ) e ciclica ( $r_{pc}$ ), si prenda

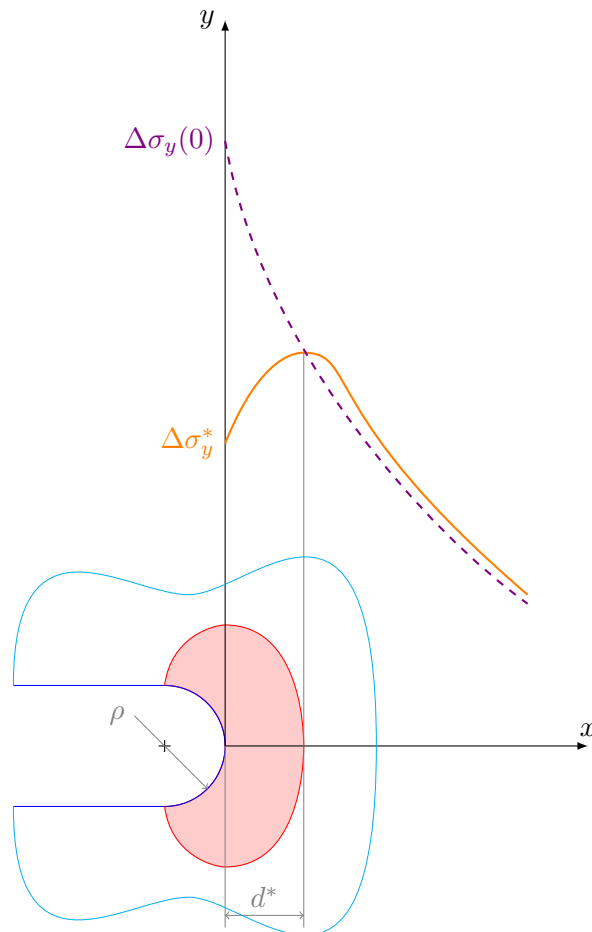


Figura 10.1: Rappresentazione della zona di processo e distribuzione delle tensioni lungo la bisettrice dell'intaglio.



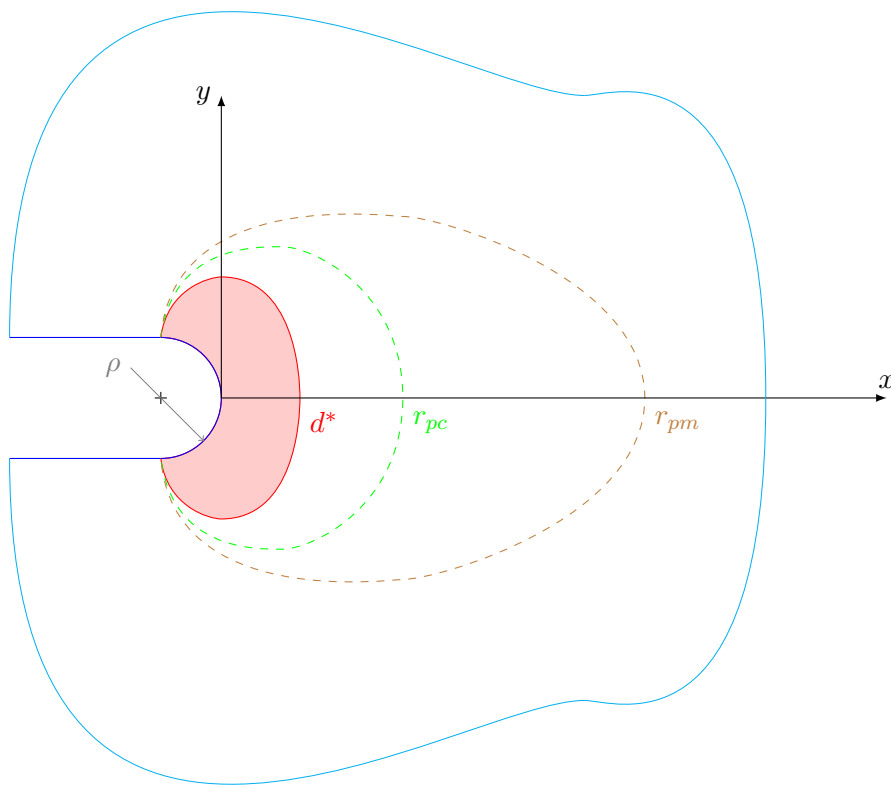


Figura 10.2: Rappresentazione qualitativa della zona di processo ( $d^*$ ), zona plastica ciclica ( $r_{pc}$ ) e zona plastica ciclica ( $r_{pm}$ ).

in considerazione che  $r_{pc} = \frac{1}{4} r_{pm}$ . Come conseguenza, a causa della zona di processo, avviene una localizzazione della deformazione; il massimo valore della variazione della tensione all'apice dell'intaglio  $\Delta\sigma_y(0)$ , calcolato con la teoria dell'elasticità, collassa in quello che compete alla variazione della tensione locale  $\Delta\sigma_y^*$ . Sulla base di analisi ai raggi X [54] sugli strati sottosuperficiali di materiali deformati ciclicamente, si afferma che il massimo valore della tensione  $\Delta\sigma_y^*$  è localizzato ad una caratteristica distanza  $d^*$  dall'apice dell'intaglio. Questa zona dà luogo alla principale barriera fisica per le cricche corte. Quando una di queste diviene dominante ed oltrepassa questa zona di confine alla caratteristica distanza  $d^*$ , nelle vicinanze del suo apice si forma la classica regione della deformazione elasto-plastica, ad esempio una piccola cricca diviene una macrocricca iniziale di lunghezza  $a_i = d^*$ . L'iniziazione di una macrocricca di fatica dipende da due parametri di processo i quali sono determinati dalla variazione della tensione o deformazione locale e dal parametro lineare del materiale.

La formazione della zona di processo è connessa con le proprietà del materiale degli strati sottosuperficiali mentre lo sviluppo della zona plastica è condizionato dal comportamento del materiale. Pertanto, sorge la necessità di trovare una speciale sperimentazione e metodi di calcolo per stimare il parametro  $d^*$ .

## 10.1 La definizione di Ostash - 2000

Tra i metodi indiretti per valutare il parametro  $d^*$  vi è l'approccio universale che impiega la dipendenza di  $\Delta\sigma_y(0)$  da  $N_i$  dove  $N_i$  è il numero di cicli per inizializzare una macrocricca [54]. Le tre assunzioni base di questo metodo sono di seguito elencate:

1. Il parametro  $d^*$  è indipendente dal raggio di raccordo  $\rho$ . Questa affermazione è in accordo con i dati di analisi ai raggi X degli strati

sottosuperficiali del provino in lega di alluminio D16chT indebolito da intagli aventi diversi valori del raggio di raccordo.

2. La variazione della tensione locale  $\Delta\sigma_y^*$  è determinata dalla dimensione  $d^*$  della zona di processo. Al di là di questa zona, la distribuzione della tensione è uguale a quella calcolata con la teoria dell'elasticità. È per questo motivo che in [55] hanno proposto  $\Delta\sigma_y^* = \Delta\sigma_y(x) = \Delta\sigma(0) \cdot f(x/\rho)|_{x=d^*}$ . Analisi agli elementi finiti [56] confermano questa ipotesi, quindi le soluzioni elastica ed elasto-plastica coincidono per  $x = x_{eff}$  dove  $x_{eff}$  è analoga a  $d^*$ .
3. Il valore della variazione della tensione locale causata da un intaglio di raggio  $\rho_1$  è uguale a quella causata da un intaglio di raggio  $\rho_2$  quando il numero di cicli per inizializzare una macrocricca  $N_i$  avente lunghezza  $a_i = d^*$  è costante. In simboli, quando  $(N_i)_{\rho_1} = (N_i)_{\rho_2}$  si ha che  $(\Delta\sigma_y^*)_{\rho_1} = (\Delta\sigma_y^*)_{\rho_2}$ . Da questa equazione, utilizzando quella al punto precedente, è possibile determinare il valore del parametro  $d^*$ .

Il valore del parametro  $d^*$ , stabilito con questo metodo per differenti materiali (leghe di alluminio, acciai e ghisa), è stato determinato utilizzando provini CT (compact tension). Gli autori, comparando analisi di accuratezza e semplicità di impiego, consigliano di utilizzare come funzione  $f(x/\rho)$  per descrivere la distribuzione delle tensioni nelle vicinanze dell'apice dell'intaglio (specialmente per quelli ad U), la seguente espressione:

$$\Delta\sigma_y(x) = \Delta\sigma(0) \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + 4.5 \frac{x}{\rho}}}. \quad (10.1)$$

Quando invece questo metodo è utilizzato per provini con intagli severi ( $\rho < d^*$ ) la funzione  $f(x/\rho)$  dovrebbe essere la seguente:

$$\Delta\sigma_y(x) = \Delta\sigma(0) \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + 4.5 \frac{x}{\rho_{eff}}}} \quad (10.2)$$

dove il raggio di raccordo effettivo vale  $\rho_{eff} = \rho + d^*$ .

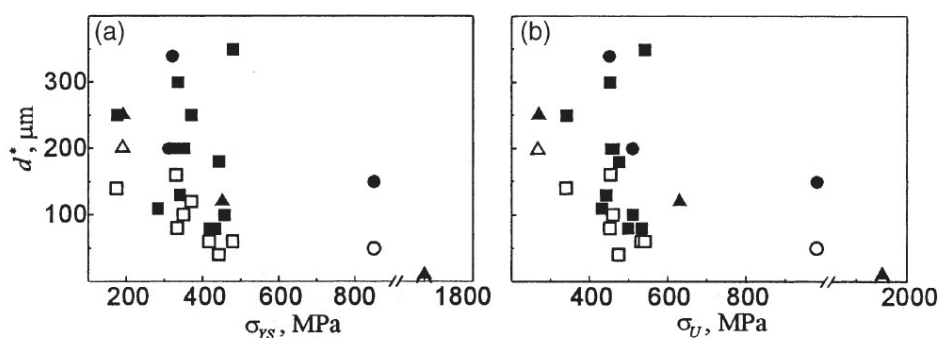


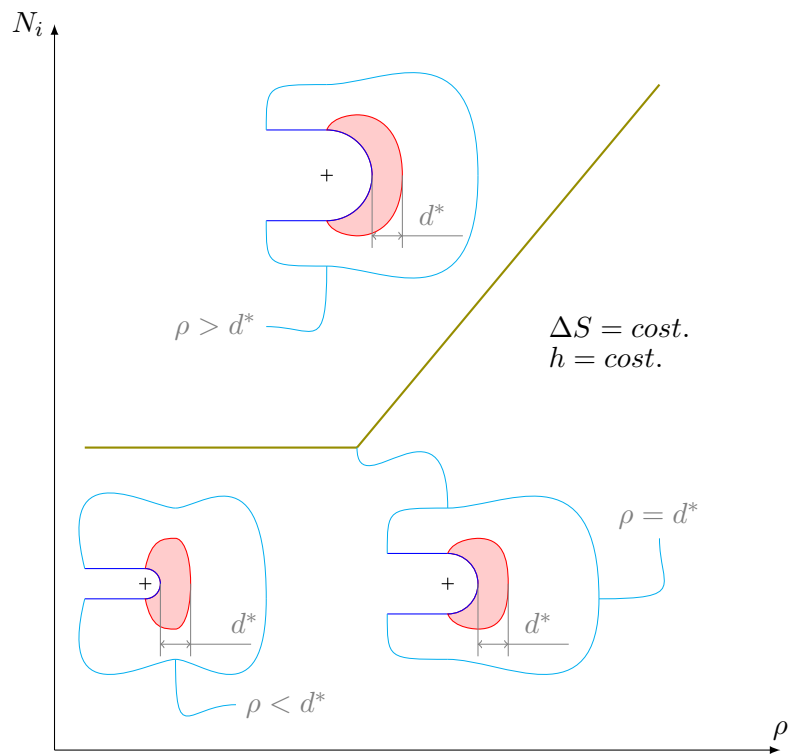
Figura 10.3: Dipendenza di  $d^*$  da  $\sigma_{YS}$  e  $\sigma_U$  per leghe di alluminio, acciai e ghise per fatica a basso (marcatori vuoti) ed alto (marcatori pieni) numero di cicli.

I risultati delle analisi (vedi figura 10.3) dimostrano che esiste una certa tendenza del parametro  $d^*$  a diminuire all'aumentare della resistenza del materiale allo snervamento piuttosto che alla rottura. Questo fenomeno è molto pronunciato per acciai e ghise sia bassi che alti valori delle ampiezze del carico ciclico. È anche mostrato che il valore di  $d^*$  spesso diminuisce o rimane costante quando si passa dall'alto al basso numero di cicli. Vari materiali, con simili valori di resistenza possiedono differenze sostanziali (2 o 3 volte) del valore del parametro  $d^*$ , in particolare a basse ampiezze di carico.

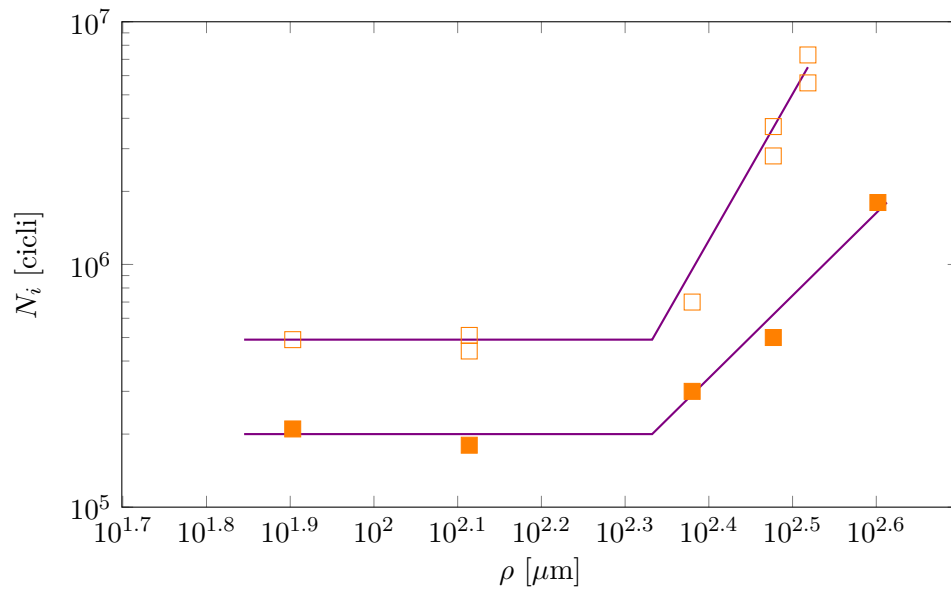
Un semplice metodo per stimare il parametro  $d^*$  è quello di visualizzare la dipendenza di  $N_i$  da  $\rho$  quando  $N_i$  è determinato mantenendo costante la variazione della tensione nominale di trazione applicata a monte e a valle della sezione indebolita  $\Delta S$ , la profondità dell'intaglio  $h$  ma facendo quindi variare il valore del raggio all'apice dell'intaglio  $\rho$ .

Consideriamo ora alcuni metodi di calcolo per stimare il valore del parametro  $d^*$ . Sulla base della correlazione stabilita per le fasi di iniziazione e propagazione di macrocricche di fatica, la relazione tra il parametro  $d^*$  e la resistenza alla frattura caratteristica del materiale è la seguente:

$$d^* = 1.25 \beta^2 \left( \frac{\Delta K_{th \text{ eff}}}{\Delta \sigma_W} \right)^2 \quad (10.3)$$



(a) Dipendenza qualitativa.



(b) Dipendenza quantitativa (□ in aria e ■ in soluzione).

Figura 10.4: Dipendenza di  $N_i$  da  $\rho$  per la dimensione  $d^*$  della zona di processo.

dove  $\Delta K_{\text{th eff}}$  è la variazione della soglia efficace del fattore di intensificazione delle tensioni del provino con una macrocricca,  $\Delta\sigma_W$  è il limite di fatica del provino liscio mentre il coefficiente  $\beta$  assume valore unitario per le leghe di alluminio e 0.7 per gli acciai. L'equazione 10.3 va bene per fatica ad alto numero di cicli.

Il parametro strutturale di Neubre per gli intagli  $\rho^*$  è funzione della tensione di rottura del materiale:

$$\rho^* = 624.8 e^{0.0034\sigma_U}, \quad (10.4)$$

dove  $\rho^*$  e  $\sigma_U$  sono espressi rispettivamente in  $\mu\text{m}$  e MPa.

Una simile dipendenza è stata proposta da Peterson per le leghe ferrose:

$$a_p = \left( \frac{270}{\sigma_U} \right)^{1.8} \quad (10.5)$$

e nel manuale di progettazione come:

$$a' = 0.0254 \left( \frac{2709}{\sigma_U} \right)^{1.8}, \quad (10.6)$$

dove  $a'$  e  $a_p$  sono dati espressi in mm.

Quando Saanouni e Bathias studiarono l'iniziazione delle cricche nelle vicinanze dell'intaglio, nel 1982 misero a diagramma la dipendenza di  $N_i$  da  $\rho$ , l'intersezione tra le due curve è relazionata ad un certo parametro del materiale e fu stimata essere data da:

$$\rho' = 0.02 e^{1.87\sqrt{r_y}}, \quad (10.7)$$

dove  $r_y = \frac{\Delta K^2}{6\pi(2\sigma_{YS})^2}$ , quando  $\Delta S < \sigma_{YS}$ .

Alcuni parametri strutturali del materiale furono inoltre considerati nello studio della frattura locale in intagli acuti ottenendo:

$$\rho_0 = \frac{4 K_{1c}^2}{\pi E \sigma_{YS} \varepsilon_c}, \quad (10.8)$$

dove  $K_{1c}$  è la tenacità a frattura di un carico monotono,  $E$  il modulo di Young,  $\varepsilon_c$  la deformazione di rottura a trazione.

L'equazione 10.4 è in accordo con i dati sperimentali non solo per le leghe ferrose ma anche per quelle di alluminio. I valori ottenuti con l'equazione 10.7 in molti casi, specialmente per acciai e ghise, eccedono significativamente quelli sperimentali; solo per alcune leghe di alluminio è stata osservata un'intesa.

Per cricche, utilizzando un approccio di Meccanica della Frattura, Glinka propose nel 1985 la seguente relazione:

$$\Delta\varepsilon_{\text{th}} = \frac{\Delta K_{\text{th eff}} x_i}{E \sqrt{2\pi} \rho^*}, \quad (10.9)$$

dalla quale ponendosi a  $x_i = 1.633$  si ha:

$$\Delta\varepsilon_{\text{th}} = 0.42 \left( \frac{\Delta K_{\text{th eff}}}{E \Delta\varepsilon_{\text{th}}} \right)^2, \quad (10.10)$$

dove  $\Delta\varepsilon_{\text{th}}$  è la variazione della deformazione all'apice dell'intaglio alle condizioni di soglia.

Usando un simile approccio, Topper nel 1991 collaborò nel determinare la seguente:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \left( \frac{\Delta K_{\text{th}}}{C E \Delta\varepsilon_{\text{th}}} \right)^2, \quad (10.11)$$

dove  $C = 0.71$ . Queste ultime due equazioni (la 10.10 e la 10.11), forniscono risultati notevolmente inferiori o superiori a quelli sperimentali di  $d^*$ ; solo per un tipo di ghisa (VCh90) sono soddisfacenti.

In conclusione quindi, per una stima ingegneristica della dimensione della zona di processo, le quazioni 10.3, 10.4 e 10.10 sono le migliori perché il rapporto  $\frac{B_i - B_0}{B_0}$  tende a zero più che in rispetto agli altri casi dove  $B_i$  e  $B_0$  sono rispettivamente i dati calcolati con la formula  $i$ -esima e quelli ricavati sperimentalmente. Le equazioni 10.3 e 10.10 hanno un aspetto più promettente in quanto includono le complesse caratteristiche sensitive della struttura del materiale. L'equazione 10.4 contiene il limite di resistenza del materiale e questo è un inconveniente perché vari tipi di materiale aventi lo stesso valore di  $\sigma_{YS}$  o  $\sigma_U$  possiedono diversi valori di  $d^*$  (rivedi figura 10.3).

Ciò che vale la pena evidenziare è come la dimensione della zona di processo  $d^*$  sia un parametro lineare della frattura a fatica e si vedrà successivamente come questo valore influenzerà il calcolo del coefficiente di riduzione della resistenza a fatica.

## 10.2 La definizione di Owolabi - 2011

In questo studio si sono utilizzate delle elaborazioni micromeccaniche per chiarire e distinguere la zona di processo del danneggiamento di fatica, per la formazione di cricche relative alla scala del raggio di raccordo all'apice dell'intaglio, dall'estensione spaziale della concentrazione delle tensioni all'intaglio. Si propone un nuovo criterio non locale per stimare la zona di processo del danneggiamento a fatica basato sulla distribuzione di un parametro indicatore della fatica dipendente dalla tensione tangenziale.

Considerando che la nucleazione delle cricche di fatica in materiali policristallini solitamente è predetta dal piano critico contenente un maggior numero di grani cristallini orientati favorevolmente, un appropriato approccio per definire la zona di processo del danneggiamento a fatica è quello di considerare le distribuzioni statistiche di un parametro non locale indicatore della fatica  $\Delta\Gamma$  attorno all'apice dell'intaglio. Partendo da queste distribuzioni statistiche, la zona di processo del danneggiamento a fatica può essere intesa come consistente di un numero di grani cristallini aventi un valore di  $\Delta\Gamma$  non locale uguale o maggiore a quello microscopico specificato come valore di soglia  $\Delta\Gamma_{th}$ . Questo  $\Delta\Gamma_{th}$  può essere associato con la soglia della tensione tangenziale risolta dello snervamento microscopico  $\tau_y$ . Questa  $\tau_y$  può essere stimata dallo snervamento macroscopico a mezzo della relazione di Taylor  $\frac{\sigma_y}{M}$  dove  $M$  è il fattore di Taylor. Per stimare  $\Delta\Gamma_{th}$  e  $\tau_y$  è utilizzata la legge modificata di propagazione di una cricca microstrutturale data da:

$$\frac{da}{dN} = A_{FS} \cdot \tau_y \cdot \Delta\Gamma \cdot a - \eta \cdot b \approx \Delta CTD - \Delta CTD_{th} \quad (10.12)$$



per la nucleazione e propagazione di cricche microstrutturali dell'ordine 3-10 volte la dimensione del grano cristallino.  $A_{FS}$  e  $\eta$  sono costanti,  $a$  è la lunghezza della cricca e  $b$  il vettore di Burgers. La variazione dello spostamento ciclico dell'apice della cricca è dato da  $CTD$  ed il suo valore di soglia  $\Delta CTD_{th}$  è direttamente relazionato con  $\eta \cdot b$ . Assumendo che le cricche nucleano se esiste in un dato grano cristallino una microplasticità ciclica (ad esempio  $\Delta\Gamma > 0$ ), il valore di soglia  $\Delta\Gamma_{th}$  è dato ponendo  $\frac{da}{dN} = 0$ , il che comporta:

$$\Delta\Gamma_{th} = \frac{\eta \cdot b}{A_{FS} \cdot \tau_y \cdot a}. \quad (10.13)$$

Rimane la caratterizzazione del fattore  $A_{FS}$  e  $\eta$  per quantificare questa soglia per qualsiasi materiale di interesse. Quindi, per un provino intagliato, la zona di processo è definita come il volume attorno all'apice dell'intaglio costituito da un numero di grani cristallini aventi parametro non locale indicatore della fatica  $\Delta\Gamma_i$  maggiore di quello di soglia  $\Delta\Gamma_{th}$  (vedi figura 10.5 nella quale i quadratini rossi rappresentano i grani cristallini che soddisfano questa condizione).

La zona di processo del danneggiamento può essere definita come volume circondato dai grani  $G(\vec{r})$  all'apice dell'intaglio  $N_r$  (Notch root) soddisfacente la condizione  $\Delta\Gamma_i > \Delta\Gamma_{th}$ , dove  $\Delta\Gamma_i$  è il parametro non locale indicatore della fatica del grano cristallino  $i$ -esimo.

Si noti che qualsiasi parametro come densità del lavoro di isteresi non locale può essere usato come parametro guida nelle equazioni appena viste ma parametri che ben riflettono il cambio nello spostamento dell'apice della cricca  $\Delta CTD$ , per la prima fase di propagazione sono preferiti. Il parametro di Fatemi Socie dato da:

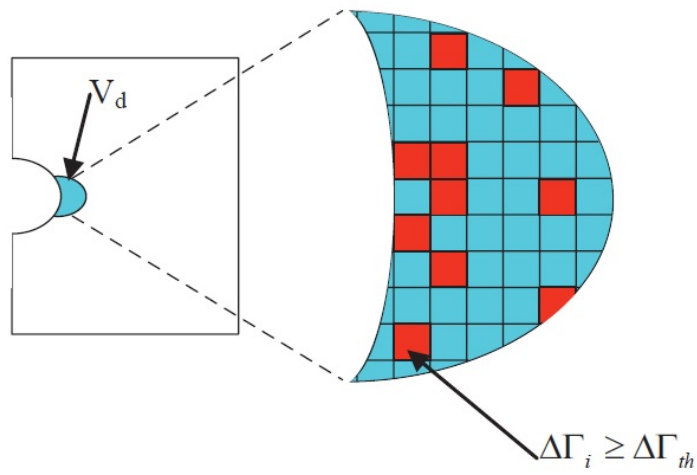
$$\Delta\Gamma = \frac{\Delta\gamma_{max}^{p*}}{2} \left( 1 + \kappa \frac{\sigma_n^{max*}}{\sigma_y} \right) \quad (10.14)$$

è utilizzato in questo studio in quanto può essere utilizzato per approssimare il carattere del modo misto dello  $\Delta CTD$ .  $\kappa$  è un coefficiente che attenua

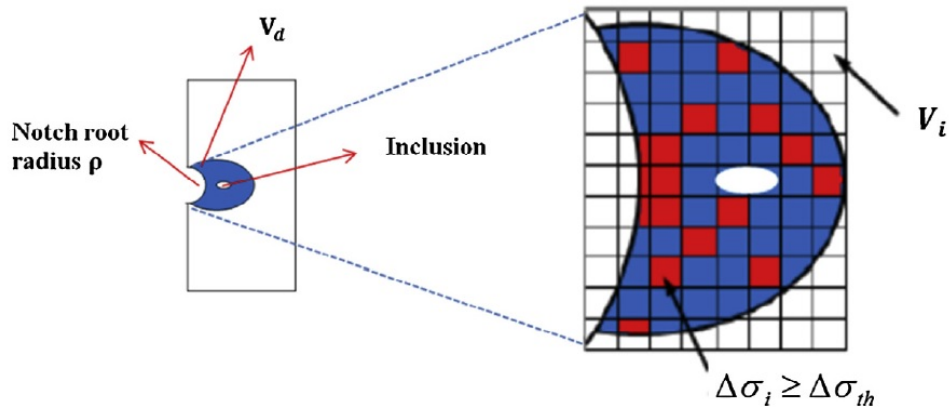
gli effetti della tensione normale al piano della variazione massima della tensione tangenziale di taglio plastica. Il picco della tensione non locale  $\sigma_n^{\max*}$  normale al piano di massima ampiezza della deformazione di taglio è normalizzata rispetto alla resistenza ciclica allo snervamento del materiale policristallino  $\sigma_y$ .

### **10.3 La definizione di Owolabi - 2015**

In questo lavoro Owolabi definisce la zona di processo del danneggiamento, estendendo un concetto da lui stesso già riproposto nel 2011, basandosi questa volta sulla distribuzione delle tensioni all'interno del materiale. La distribuzione statistica della tensione intorno all'apice dell'intaglio e delle inclusioni è utilizzata come nuovo criterio per definire la zona di processo del danneggiamento a fatica. Questo criterio è basato sull'ipotesi che tale zona sia una regione attorno all'apice dell'intaglio e all'inclusione avente grani cristallini con valori di tensione uguali o maggiori ad uno specifico valore di soglia su scala microscopica (in questo caso la tensione di snervamento del materiale), come mostrato in figura [10.5](#).



(a) Owolabi 2011.



(b) Owolabi 2015.

Figura 10.5: Schizzo della zona di processo del danneggiamento di fatica  $V_d$ .



# Capitolo 11

## Cenni di micromeccanica computazionale

### 11.1 Il modello di Owolabi - 2010

#### 11.1.1 Plasticità cristallina

Dato che i modelli di plasticità cristallina relazionano la tensione su scala cristallina alla risposta cristallografica di scorrimento, sono idonei per studiare l'eterogeneità e le interazioni attraverso i grani all'apice dell'intaglio. L'uso della plasticità cristallina è rilevante per un'accurata determinazione della variazione dei campi di tensione e deformazione plastica all'apice dell'intaglio all'interno della microstruttura per stimare la soglia di plasticità critica all'interno dei grani per la formazione di cricche nella fatica ad alto numero di cicli. Gli algoritmi di plasticità cristallina qui utilizzati sono stati precedentemente sviluppati [57, 58, 59]. Le cinematiche [60] di scorrimento della dislocazione sono impiegate utilizzando la decomposizione moltiplicativa:

$$F = F^e \cdot F^p \quad (11.1)$$

dove  $F$  è il gradiente totale della deformazione,  $F^e$  è il gradiente della deformazione elastica rappresentante allungamento e rotazione elastiche (inclu-

dendo le rotazioni rigide del reticolo), e  $F^p$  è il gradiente della deformazione plastica che descrive l'effetto collettivo dello scorrimento della dislocazione lungo i piani cristallografici relativi al reticolo fisso nella configurazione di riferimento. In figura 11.1 la griglia rappresenta il reticolo cristallino;  $s_0^\alpha$  e  $n_0^\alpha$  sono rispettivamente il versore nella direzione dello scorrimento e la normale al piano di scorrimento per l' $\alpha$ -esimo sistema di scorrimento nella configurazione indeformata di riferimento mentre  $s^\alpha$  e  $n^\alpha$  sono relativi alla configurazione deformata corrente.

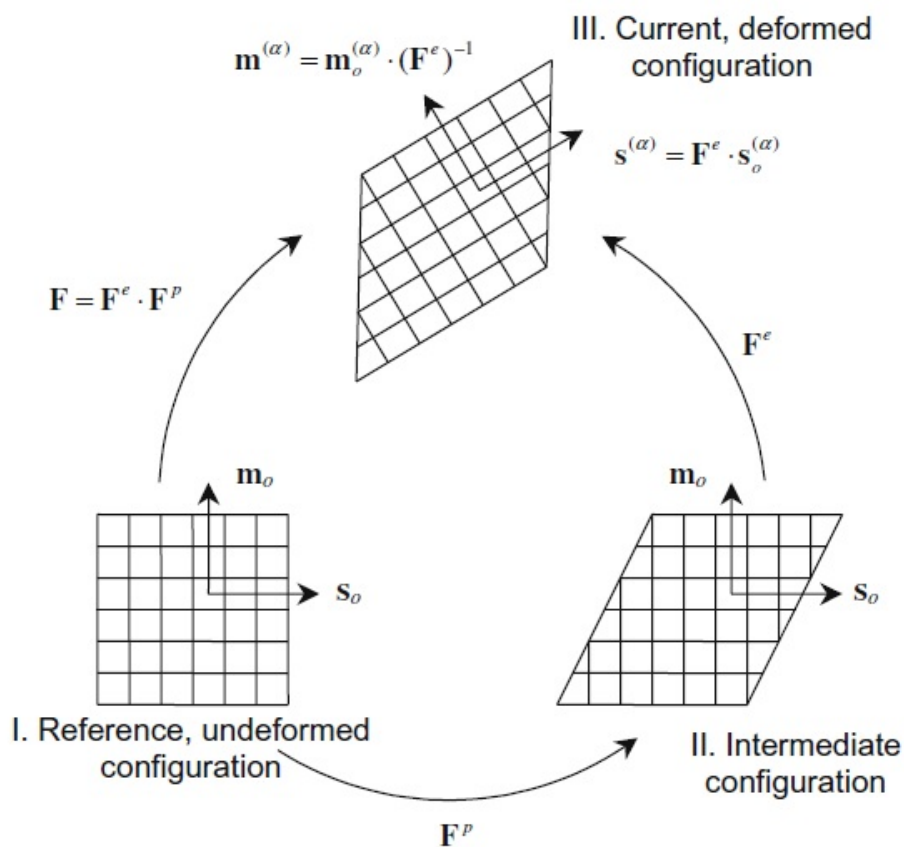


Figura 11.1: Cinematiche della deformazione elasto-plastica di solidi cristallini deformati dallo scorrimento cristallografico.

Le cinematiche dello scorrimento della dislocazione sono formulate dalle relazioni tra la tensione tangenziale di taglio risolta e la velocità di taglio

lungo i sistemi di scorrimento. La velocità di taglio  $\dot{\gamma}^\alpha$  dell' $\alpha$ -esimo sistema di scorrimento è descritta dalla legge di potenza:

$$\dot{\gamma}^\alpha = \dot{\gamma}_0 \left| \frac{\tau^\alpha - \chi^\alpha}{g^\alpha} \right|^m \operatorname{sgn}(\tau^\alpha - \chi^\alpha), \quad (11.2)$$

dove  $\dot{\gamma}_0$  è la velocità di taglio di riferimento,  $m$  è l'inverso dell'esponente di sensibilità alla velocità di deformazione,  $g^\alpha$  è la resistenza isotropa al trascinamento,  $\chi^\alpha$  è la back stress dell' $\alpha$ -esimo sistema di scorrimento e  $\tau^\alpha$  è la tensione tangenziale di taglio risolta data da:

$$\tau^\alpha = \sigma : (\mathbf{s}^\alpha \otimes \mathbf{n}^\alpha). \quad (11.3)$$

Nell'equazione 11.3,  $\sigma$  è il tensore delle tensioni di Cauchy. Un formato della relazione per un recupero del rafforzamento dinamico è impiegato per evoluzione di  $g^\alpha$  [57]:

$$\dot{g}^\alpha = H \sum_{\beta=1}^N q^{\alpha\beta} |\dot{\gamma}^\beta| - R g^\alpha \sum_{\beta=1}^N |\dot{\gamma}^\beta|, \quad (11.4)$$

dove  $q^{\alpha\beta}$  sono componenti della matrice di rafforzamento e  $H$  e  $R$  sono rispettivamente i coefficienti di indurimento diretto e di recupero dinamico per la relazione di rafforzamento isotropo. Nel presente lavoro,  $q^{\alpha\beta} = 1$  il che significa considerare il rafforzamento isotropo su tutti i sistemi di scorrimento. La back stress su ogni sistema di scorrimento evolve in accordo ad una regola cinematica di indurimento non lineare del proprio tipo di indurimento, ad esempio  $\dot{\chi}^\alpha = h \dot{\gamma}^\alpha - h_D \chi^\alpha |\dot{\gamma}^\alpha|$ , dove  $h$  e  $h_D$  sono rispettivamente i coefficienti di indurimento diretto e del recupero dinamico. Va osservato che molte forme alternative sono state proposte e sviluppate per le relazioni di indurimento isotropo e cinematico.

### 11.1.2 Implementazione agli elementi finiti

Utilizzando i modelli costitutivi mostrati nel paragrafo precedente, si sono condotti calcoli tridimensionali agli elementi finiti per rappresentare le

microstrutture come funzione della dimensione dell'intaglio ed acutezza del suo apice per un range di ampiezze di tensione inferiori alla deformazione di snervamento macroscopico (fatica ad alto numero di cicli). Questa deformazione di snervamento  $\varepsilon_y$  è definita sulla base del limite proporzionale macroscopico. Il materiale utilizzato in questo studio è il rame policristallino OFHC costituito da grani aventi una distribuzione dell'orientazione cristallografica casuale. Lo stesso materiale ricotto ha una dimensione principale dei grani di  $62 \mu\text{m}$ , le costanti nella regola di flusso a temperatura ambiente sono  $\dot{\gamma}_0 = 0.001 \text{ s}^{-1}$ ,  $m = 50$ ,  $H = 225 \text{ MPa}$ ,  $R = 2.05$  senza indurimento cinematico ( $h = h_D = 0$ ) e valori iniziali  $g^\alpha(0) = 13 \text{ MPa}$  e  $\chi^\alpha(0) = 0 \text{ MPa}$ . Le costanti elastiche di un singolo cristallo cubico in rame alla temperatura ambiente sono  $C_{11} = 150 \text{ GPa}$ ,  $C_{12} = 75 \text{ GPa}$  e  $C_{44} = 37,5 \text{ GPa}$ . Per questo materiale in queste condizioni si ha  $\varepsilon_y = 0.0123\%$ . In questo lavoro sarà posta attenzione sugli effetti della dimensione dell'intaglio, della sua acutezza e della distribuzione dell'orientazione dei grani. Per ogni condizione di carico, un insieme di 40 differenti realizzazioni di grani all'interno della regione all'apice dell'intaglio sono stati implementati con assegnazione casuale della distribuzione dell'orientazione per ottenere inizialmente un effetto medio isotropo mentre altre informazioni riguardanti la variabilità sono state raccolte. Per ridurre il tempo di computazione, le geometrie del provino intagliato sono state decomposte in tre regioni: un regione estrema, lontana dall'apice dell'intaglio (dove si utilizza un approccio lineare elastico isotropo per distribuzione casuale dell'orientazione dei grani), una regione intermedia di transizione impiegante la teoria della plasticità ciclica macroscopica  $J_2$  assieme ad una lineare elastica isotropa per minimizzare gli effetti di discontinuità tra il campo esterno ed il dominio dell'apice dell'intaglio che impiega simulazioni tridimensionali di plasticità cristallina, ogni grano ha un comportamento elastico anisotropo.

La decomposizione del dominio è mostrata in figura 11.2 per una piastra



indebolita da un intaglio circolare di raggio  $\rho$  pari ad 1 mm.

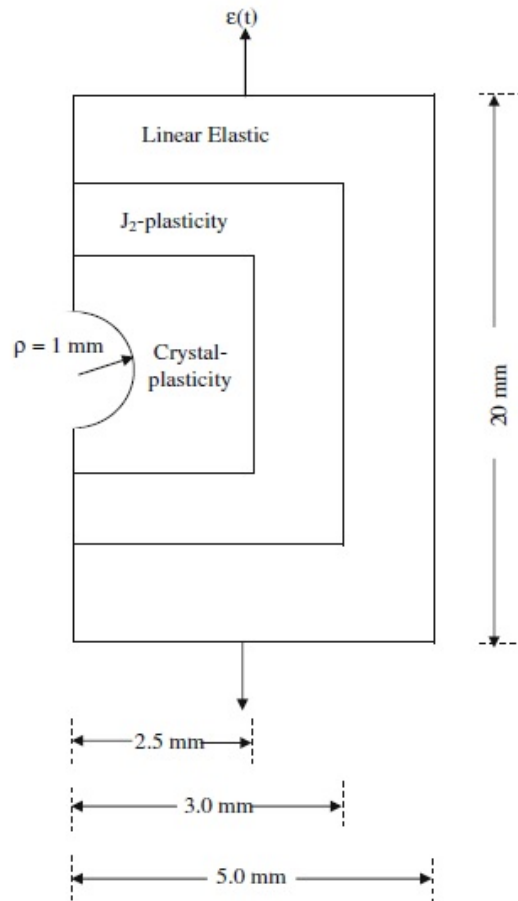


Figura 11.2: Decomposizione del dominio di metà piastra indebolita da un intaglio semicircolare (la piastra è divisa in tre differenti regioni che impiegano differenti modelli elastici ed elasto-plastici). Le condizioni al contorno sono di simmetria.

Le dimensioni attuali della regione di plasticità cristallina sono scelte in modo tale da assicurare che la distribuzione dei microscorrimenti nella regione dell'intaglio siano pienamente colti. In questo caso la plasticità alla radice dell'intaglio è di bassa scala. La deformazione variabile nel tempo ed applicata alla piastra a monte e a valle della sezione indebolita  $\varepsilon(t)$  è impostata a mezzo di condizioni al contorno di spostamento sulla superficie superiore e quella inferiore con superfici laterali libere. La discretizzazione

delle regione avviene servendosi di elementi tetraedrici a quattro nodi con una risoluzione di quattro elementi per grano.

Vale la pena notare che questi elementi soffrono il blocco volumetrico nella simulazione della plasticità  $J_2$  soggetta ad ampie deformazioni, plasticità pienamente sviluppata. Tuttavia ciò non costituisce un problema nel presente lavoro in quanto la deformazione plastica locale è molto contenuta. Le costanti per le relazioni elastiche ed elasto-plastiche utilizzate nelle regioni esterna lineare elastica ed intermedia con plasticità  $J_2$  sono estrappolate da cicli di isteresi per trazione e compressione unidirezionali ottenuti utilizzando modelli di plasticità cristallina 3D su volume cubico con un'appropriata aggregazione dei grani soggetti a condizioni al contorno periodiche.

L'algoritmo di plasticità cristallina richiamato nel sottoparagrafo precedente è stato codificato all'interno di ABAQUS nel sottoprogramma *User MATerial - UMAT*. Per una data storia di deformazione, l'UMAT è denominato per ogni incremento di carico ed offre un aggiornamento delle componenti di tensione e variabili di stato alla fine di ogni time step, dato l'incremento del gradiente della deformazione. Le ampiezze di un imposto rapporto nominale di cicli per le deformazioni ( $R_\epsilon = -1$ ) sono selezionate per garantire che la deformazione macroscopica alla radice dell'intaglio sia prossima o inferiore alla deformazione di snervamento dei materiali policristallini. In altre parole, solo un relativamente piccolo numero della densità di grani snerva nella regione all'apice dell'intaglio dopo il ciclo iniziale di carico. Tre cicli di carico sono applicati al provino in direzione assiale. Una velocità di deformazione di  $10^{-4} \text{ s}^{-1}$  in condizioni di temperatura ambiente è stata utilizzata per tutte le simulazioni.

## 11.2 Il modello di Owolabi - 2011

Rispetto al lavoro dell'anno precedente, per ottenere il parametro non locale indicatore della fatica, gli autori considerano un insieme di piani ad ogni

punto di integrazione all'interno della regione media non locale. Ad ogni punto di integrazione all'interno di questo volume medio, la deformazione plastica di taglio  $\gamma_\theta^p$  è stata calcolata sul massimo piano. La variazione della deformazione plastica di taglio ciclica non locale per ogni piano, mediata sul volume è stata calcolata. La massima variazione di  $\gamma_\theta^{p*}$  tra tutti i piani è presa essere la variazione della deformazione plastica di taglio non locale utilizzata nell'equazione 10.14:

$$\Delta\gamma_{\max}^{p*} = \max[\Delta\gamma_\theta^{p*}] \quad (11.5)$$

### 11.3 Il modello di Owolabi - 2015

#### 11.3.1 Plasticità cristallina

Il modello costitutivo di plasticità cristallina utilizzato in questo lavoro è quello sviluppato da Shenoy [61] nella sua tesi di dottorato svolta all'Università della Georgia. Il metodo dipendente dalla velocità è sviluppato per il modello in quanto all'aumentare della temperatura, gli effetti della velocità di deformazione divengono sempre più importanti. Basandosi sulle interazioni tra precipitato e dislocazione, sono stati sviluppati dei modelli fisicamente basati sul rafforzamento. La velocità di taglio su ogni sistema di scorrimento è espressa in [61] come:

$$\dot{\gamma}^\alpha = \dot{\gamma}_1 \left\langle \frac{|\tau^\alpha - \chi^\alpha| - \kappa^\alpha}{D^\alpha} \right\rangle^{n_1} + \dot{\gamma}_2 \left\langle \frac{|\tau^\alpha - \chi^\alpha|}{D^\alpha} \right\rangle^{n_2} \text{sgn}(\tau^\alpha - \chi^\alpha) \quad (11.6)$$

dove  $\dot{\gamma}_1$  e  $\dot{\gamma}_2$  sono costanti, gli esponenti di flusso sono rappresentati come  $n_1$  e  $n_2$ ,  $\kappa^\alpha$  è la resistenza allo scorrimento di ogni sistema di scorrimento ed è chiamata la soglia meccanica,  $D^\alpha$  è la resistenza media allo trasciamento mentre  $\chi^\alpha$  è la back stress di ogni sistema di scorrimento. La back stress, a differenza del singolo cristallo puro, è una componente molto importante per materiali bifasici come le superleghe a base nichel e non può quindi essere trascurata. È anche importante notare che la back stress è

sottratta dalla tensione di taglio applicata per riflettere la forza netta responsabile per la guida della dislocazione. La tensione di soglia contempla, per il comportamento anomalo di snervamento della superlega a base nichel  $\gamma - \gamma'$ , l'incremento della tensione di snervamento risultante dall'aumento della temperatura nel suo intervallo intermedio.

La prima parte dell'equazione 11.6 considera dominante il comportamento ciclico e la tensione di soglia gioca il ruolo di tensione di snervamento. Al contrario, la seconda parte dell'equazione 11.6 considera l'effetto del creep attivato dalla temperatura a bassi valori di tensione. Complesse storie cicliche di tensione-deformazione, come quelle che si verificano nelle superleghe a base nichel, sono ben modellate dai due termini presentati nell'equazione 11.6. Un totale di 18 sistemi di scorrimento sono utilizzati per modellare il movimento delle dislocazioni all'interno della matrice della superlega a base nichel: 12 sistemi di scorrimento ottaedrici e 6 cubici. Una lista dei sistemi di scorrimento è mostrata nella tabella 11.3.

| Slip system $\alpha$ | Octahedral slip       |                             | Cube slip  |                             |
|----------------------|-----------------------|-----------------------------|------------|-----------------------------|
|                      | Slip plane            | Slip direction              | Slip plane | Slip direction              |
| 1                    | {111}                 | $\langle 01\bar{1} \rangle$ | {100}      | $\langle 011 \rangle$       |
| 2                    | {111}                 | $\langle 10\bar{1} \rangle$ | {100}      | $\langle 01\bar{1} \rangle$ |
| 3                    | {111}                 | $\langle 1\bar{1}0 \rangle$ | {010}      | $\langle 101 \rangle$       |
| 4                    | { $\bar{1}\bar{1}1$ } | $\langle 011 \rangle$       | {010}      | $\langle 10\bar{1} \rangle$ |
| 5                    | { $\bar{1}\bar{1}1$ } | $\langle 10\bar{1} \rangle$ | {001}      | $\langle 110 \rangle$       |
| 6                    | { $\bar{1}\bar{1}1$ } | $\langle 110 \rangle$       | {001}      | $\langle \bar{1}10 \rangle$ |
| 7                    | { $\bar{1}\bar{1}1$ } | $\langle 011 \rangle$       |            |                             |
| 8                    | { $\bar{1}\bar{1}1$ } | $\langle 10\bar{1} \rangle$ |            |                             |
| 9                    | { $\bar{1}\bar{1}1$ } | $\langle \bar{1}10 \rangle$ |            |                             |
| 10                   | { $\bar{1}\bar{1}1$ } | $\langle 01\bar{1} \rangle$ |            |                             |
| 11                   | { $\bar{1}\bar{1}1$ } | $\langle 101 \rangle$       |            |                             |
| 12                   | { $\bar{1}\bar{1}1$ } | $\langle \bar{1}10 \rangle$ |            |                             |

Figura 11.3: Sistemi di scorrimento nella superlega a base nichel.

I 12 sistemi di scorrimento ottaedrici sono attivati alle basse temperature all'interno della matrice  $\gamma$ , la quale ha tipicamente una struttura cristallina CFC. Tuttavia, alle alte temperature ed alti valori della tensione di taglio risulta, i 6 sistemi di scorrimento cubici sono attivati nella fase  $\gamma'$  anche se il loro ruolo non è ancora ben studiato e caratterizzato. La relazione di Taylor è assunta per il rafforzamento della tensione di soglia per ogni sistema di

scorrimento ed è espressa come [62]:

$$\kappa^\alpha = \kappa_0^\alpha + \alpha_t \tilde{\mu} \tilde{b} \sqrt{\rho^\alpha} \quad (11.7)$$

dove la densità di dislocazioni di ogni sistema di scorrimento è rappresentata come  $\rho^\alpha$  (sia per i sistemi di scorrimento cubici che ottaedrici),  $\tilde{\mu}$  è il modulo di taglio,  $b$  è il vettore di Burgers effettivo mentre  $\alpha$  è un coefficiente che tiene conto della disposizione statistica della popolazione di dislocazioni.

Il modulo di taglio nell'equazione 11.7 è governato dalla regola delle miscele espressa come:

$$\tilde{\mu} = (f_{p1} + f_{p2} + f_{p3}) \mu_{\gamma'} + f_m \mu_m \quad (11.8)$$

dove  $f_{p1}$ ,  $f_{p2}$  e  $f_{p3}$  sono le frazioni volumetriche delle tre fasi  $\gamma'$  nella matrice (primaria, secondaria e terziaria ad esempio) mentre  $f_m$  è la frazione in volume della matrice. Inoltre l'effettivo vettore di Burgers è espresso come:

$$\tilde{b} = (f_{p1} + f_{p2} + f_{p3}) b_{\gamma'} + f_m b_m \quad (11.9)$$

dove  $b_{\gamma'}$  è il vettore di Burgers dei precipitati  $\gamma'$  e  $b_m$  è il vettore di Burgers della matrice.

L'iniziale tensione critica di taglio risolta  $K_{0,\lambda}^\alpha$  data da Heilmaier e Reppich vale:

$$K_{0,\text{ott}}^\alpha = \left[ \left( \tau_{0,\text{ott}}^\alpha \right)^{n_k} + \Psi_{\text{ott}} \left( f_{p1}, d_2, f_{p2}, d_3, f_{p3} \right)^{n_k} \right]^{\frac{1}{n_k}} + (f_{p1} + f_{p2}) \tau_{ns}^\alpha \quad (11.10)$$

$$K_{0,\text{cub}}^\alpha = \left[ \left( \tau_{0,\text{cub}}^\alpha \right)^{n_k} + \Psi_{\text{cub}} \left( f_{p1}, d_2, f_{p2}, d_3, f_{p3} \right)^{n_k} \right]^{\frac{1}{n_k}} \quad (11.11)$$

dove

$$\Psi_{\text{ott}} = \Psi_{\text{cub}} = c_{p1} \sqrt{\zeta \frac{f'_{p1}}{d_1}} + c_{p2} \sqrt{\zeta \frac{f'_{p2}}{d_2}} + c_{p3} \sqrt{\zeta f'_{p3} d_3} + \frac{c_{gr}}{\sqrt{d_{gr}}} \quad (11.12)$$

Nell'equazione 11.12,  $\zeta = \frac{\Gamma_{APB}}{\Gamma_{APB,ref}}$  dove  $\Gamma_{APB}$  è l'energia di contorno dell'anti fase. Le dimensioni dei precipitati della fase  $\gamma'$  primaria, secondaria

e terziaria sono indicate con le lettere  $d_1$ ,  $d_2$  e  $d_3$  mentre quella del grano è denotata con  $d_{gr}$ . Le frazioni in volume dei precipitati normalizzate sono  $f_{p1}$ ,  $f_{p2}$  e  $f_{p3}$ . Il valore dell'esponente  $n_k$  varia all'interno dell'intervallo che va da 1 a 1.2 e i valori di  $c_{p1}$ ,  $c_{p2}$ ,  $c_{p3}$  e  $c_{gr}$  sono determinati dalla curva che interpola la resistenza iniziale allo snervamento per valori determinati sperimentalmente.

## Capitolo 12

# Determinazione del $K_f$

La dimensione della zona di processo  $d^*$  determina la variazione della tensione locale  $\Delta\sigma_y^*$ . Ne consegue che la reale concentrazione delle tensioni causata da un intaglio, non può essere stimata dal valore del fattore teorico di concentrazione delle tensioni  $K_t = \frac{\Delta\sigma_y(0)}{\Delta S}$  perché questo maggiore del valore del fattore di riduzione per la resistenza a fatica  $K_f = \frac{\Delta\sigma_y^*}{\Delta S}$ .

La meccanica classica assume che il valore del fattore  $K_f$  deve essere calcolato come rapporto tra il limite di fatica del provino liscio e quello del provino intagliato. Questo significa che è determinato sperimentalmente per ogni materiale, provino e configurazione geometrica dell'indebolimento. In molti casi si utilizzano le formule di Neuber e Peterson ma in diverse situazioni queste equazioni forniscono valori di  $K_f$  che differiscono da quelli sperimentali. È evidente che questo potrebbe essere raggiunto qualora sia nota la relazione  $\Delta\sigma_y^* = f(d^*)$ .

Per raggiungere questo obiettivo, è necessario comparare i diversi metodi possibili per valutare il fattore di riduzione della resistenza a fatica.

## 12.1 La soluzione di Ostash - 2000

Le concentrazioni di tensione diminuiscono significativamente la restenza del materiale al carico ciclico (vedi figura 12.1). Tuttavia questa diminuzione è minore di quella indicata dal fattore teorico di concentrazione delle tensioni  $K_t$  in quanto trascura deformazioni plastiche locali, multiassialità dello stato di tensione ed il loro gradiente. Quindi si considera il fattore di riduzione della resistenza a fatica  $K_f$  il quale è relazionato al coefficiente  $K_t$  e ad alcune caratteristiche del materiale. Due ben note equazioni presenti in letteratura sono l'equazione di Neuber:

$$K_f = 1 + \frac{K_t - 1}{1 + \sqrt{\frac{\rho^*}{\rho}}} \quad (12.1)$$

dove il parametro di materiale  $\rho^*$  è dato dalla equazione 10.4 che ripetiamo per comodità:  $\rho^* = 624.8 \cdot e^{-0.0034\sigma_U}$ ; e l'equazione di Peterson:

$$K_f = 1 + \frac{K_t - 1}{1 + \frac{a_p}{\rho}} \quad (12.2)$$

dove il parametro di materiale  $a_p$  è dato dalla equazione 10.5 che ripetiamo per comodità:  $a_p = \left(\frac{270}{\sigma_U}\right)^{1.8}$ .

Tuttavia, il valore di  $K_f$  calcolato con la formula di Neuber e Peterson, in diversi casi differisce dai dati determinati sperimentalmente. Valutazioni dell'accuratezza del coefficiente  $K_f$  si basano sulla reale distribuzione elasto-plastica del gradiente di tensione all'intaglio. In questo caso, l'attendibile dimensione della zona di processo ( $d^*$  o  $x_{eff}$ ) gioca un ruolo decisivo. Il valore di  $K_f$  può essere calcolato dalle seguenti:

$$K_f = \frac{\Delta\sigma_y^*}{\Delta S}, \quad (12.3)$$

$$\Delta\sigma_y^* = \Delta\sigma_y(0) \cdot f\left(\frac{x}{\rho}\right)\Big|_{x=d^*}, \quad (12.4)$$

e

$$f\left(\frac{x}{\rho_{eff}}\right) = \left(1 + 4.5 \frac{x}{\rho_{eff}}\right)^{-\frac{1}{2}} \quad (12.5)$$



oppure ottenuto dai metodi agli elementi finiti:

$$K_f = \frac{\Delta\sigma_{eff}}{\Delta S} = \frac{1}{x_{eff} \cdot \Delta S} \int_0^{x_{eff}} \Delta\sigma_y \cdot (1 - \varphi x) dx, \quad (12.6)$$

dove  $\Delta\sigma_{eff}$  è la variazione della tensione effettiva nelle vicinanze dell'intaglio;  $\Delta\sigma_y(x)$  è la distribuzione della tensione di trazione lungo l'asse X;  $\varphi = \frac{1}{\Delta\sigma_y(x)} \frac{d\Delta\sigma_y(x)}{dx}$  è il gradiente relativo della tensione mentre  $x_{eff}$  è la distanza alla quale corrisponde il minimo valore di  $\varphi$ . Il primo di questi approcci è molto semplice in quanto si serve delle soluzioni elastiche. In questo caso la variazione  $\Delta\sigma_y(0)$  può essere ricavata dalla definizione di  $K_t$  nota la sua dipendenza in funzione della geometria dell'intaglio. Per un provino CT, ad esempio, si ha:

$$\Delta\sigma_y(0) = \frac{\Delta K}{\sqrt{\rho}} \cdot f\left(\frac{\rho}{W}\right), \quad (12.7)$$

dove  $\Delta K$  è la variazione del fattore di intensificazione delle tensioni relativo ad una cricca equivalente. Tuttavia, per distanze dall'apice dell'intaglio  $x > d^*$  e  $x > x_{eff}$  le soluzioni elastica ed elasto-plastica coincidono, dunque questi due approcci forniscono risultati simili.

Questo è provato dai dati nella [12.1](#)

La realtà del coefficiente  $K_f$  sembra essere condizionata dall'accuratezza della dimensione della zona di processo definita come un parametro lineare dei materiali. Tale conclusione è provata dai risultati delle analisi che corrispondono a provini CT, questo è provato dai dati nella [tabella 12.2](#), dove i valori di  $\Delta\sigma_y(0)$  e  $K_t$  sono valutati rispettivamente con l'equazione [12.7](#) e la definizione propria del fattore teorico di concentrazione delle tensioni. I parametri del materiale  $d^*$ ,  $\rho^*$  e  $a_p$  per il calcolo del  $K_f$  sono già stati affrontati. Il vantaggio del metodo di calcolo del  $K_f$  è reso evidente quando si diagrammano i risultati sperimentali del prodotto  $K_f \Delta S$  rispetto  $N_i$  basato sulla dipendenza di  $\Delta S$  da  $N_i$  per provini CT variando il valore  $\rho$  del raggio di raccordo all'apice dell'intaglio ([figura 12.2](#)).

Tabella 12.1: Comparazione dei valori di  $K_f$  valutati per un provino avente  $K_t = 1.6$  in acciaio dolce.

| Calcolo in accordo con Panasyuk |                   |                               |  | Approccio proposto dagli autori                   |               |                             |  |
|---------------------------------|-------------------|-------------------------------|--|---|---------------|-----------------------------|--|
| $\Delta S$<br>[MPa]             | $x_{eff}$<br>[mm] | $\Delta\sigma_{eff}$<br>[MPa] | $K_f = \frac{\Delta\sigma_{eff}}{\Delta S}$<br>[-] | $\Delta\sigma_y(0) = K_t \cdot \Delta S$<br>[MPa] | $d^*$<br>[mm] | $\Delta\sigma_y^*$<br>[MPa] | $K_f = \frac{\Delta\sigma_y^*}{\Delta S}$<br>[-] |
| 100                             | 0.125             | 158                           | 1.58   | 160   | 0.15          | 150                         | 1.50   |
| 120                             | 0.130             | 190                           | 1.52   | 192   | 0.15          | 181                         | 1.51   |
| 160                             | 0.160             | 253                           | 1.58   | 256   | 0.15          | 241                         | 1.51   |
| 180                             | 0.160             | 283                           | 1.57   | 288   | 0.15          | 271                         | 1.51   |
| 200                             | 0.160             | 308                           | 1.54   | 320   | 0.15          | 301                         | 1.51   |

Tabella 12.2: Comparazione dei valori di  $K_f$  valutati per un provino CT (acciaio 08kp).

| $\rho$<br>[mm] | $\frac{h}{w}$<br>[-] | $\Delta S$<br>[MPa] | $N_i$<br>[cicli] | $\Delta\sigma_y(0)$<br>[MPa] | $K_t$<br>[-] | Valori di $K_f$ calcolati con le equazioni<br>[-] |      |      |      |      |
|----------------|----------------------|---------------------|------------------|------------------------------|--------------|---|------|------|------|------|
|                |                      |                     |                  |                              |              | 2,3 e 5   | 15   | 16   | 19   | 20   |
| 0.15           | 0.26                 | 56                  | 160000           | 780                          | 13.80        | 7.30  | 6.59 | 2.67 | 8.29 | 9.15 |
| 0.15           | 0.25                 | 95                  | 30000            | 1318                         | 13.84        | 7.32  | 6.61 | 2.67 | 8.31 | 9.17 |
| 0.15           | 0.28                 | 132                 | 7000             | 1820                         | 13.78        | 7.29  | 6.58 | 2.67 | 8.28 | 9.13 |
| 0.15           | 0.31                 | 228                 | 1200             | 3115                         | 13.65        | 7.22  | 6.52 | 2.65 | 8.20 | 9.05 |
| 0.75           | 0.23                 | 77                  | 330000           | 500                          | 6.53         | 4.68  | 4.51 | 3.37 | 4.79 | 5.57 |
| 0.75           | 0.23                 | 153                 | 40000            | 1000                         | 6.53         | 4.68  | 4.51 | 3.37 | 4.79 | 5.57 |
| 0.75           | 0.26                 | 170                 | 20000            | 1090                         | 6.42         | 4.60  | 4.44 | 3.32 | 4.72 | 5.48 |
| 0.75           | 0.27                 | 239                 | 4500             | 1500                         | 6.28         | 4.50  | 4.35 | 3.26 | 4.62 | 5.56 |
| 4.00           | 0.58                 | 205                 | 180000           | 427                          | 2.08         | 1.89  | 1.86 | 1.86 | 1.89 | 2.03 |
| 4.00           | 0.50                 | 261                 | 75000            | 597                          | 2.29         | 2.08  | 2.03 | 2.03 | 2.06 | 2.23 |
| 4.00           | 0.60                 | 397                 | 50000            | 750                          | 1.89         | 1.72  | 1.71 | 1.71 | 1.73 | 1.75 |
| 4.00           | 0.59                 | 579                 | 9000             | 1100                         | 1.90         | 1.72  | 1.72 | 1.72 | 1.74 | 1.86 |

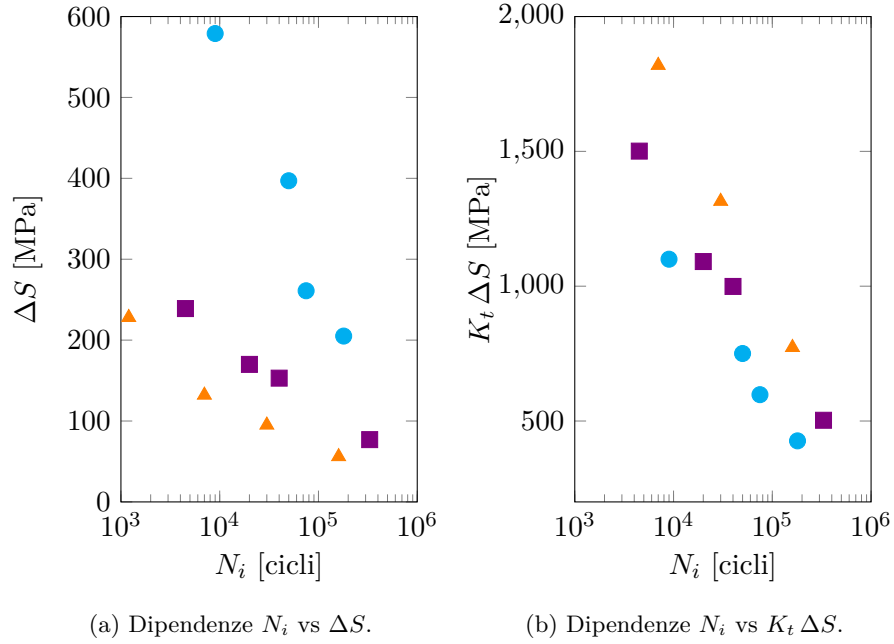


Figura 12.1: Risultati sperimentali per l'acciaio dolce 08kp, stabiliti su provini CT con raggio all'apice dell'intaglio di  $\rho = 0.15$  mm ( $\blacktriangle$ ),  $\rho = 0.75$  mm ( $\blacksquare$ ),  $\rho = 4$  mm ( $\bullet$ ).

Nella figura 12.2 si vede che con l'equazione 12.8 si ha comunque una curva invariante mentre la 12.9 sovrastima i risultati.

Nella figura 12.3 è mostrato che l'approccio degli autori ha un certo vantaggio in quanto fornisce una curva invariante rispetto a  $\rho$ . I coefficienti  $K_f$  sono diversi quando l'intaglio è acuto ( $\rho < d^*$ ). I valori di  $K_f$  ottenuti dall'equazione 12.1 sono talvolta bassi, dall'equazione 12.2 sono molto minori rispetto a quelli calcolati con  $K_f = \frac{\Delta\sigma_y^*}{\Delta S}$  dove  $\Delta\sigma_y^* = \Delta\sigma_y(0) \cdot f\left(\frac{x}{\rho}\right)$  e  $f\left(\frac{x}{\rho_{eff}}\right) = \left[1 + 4.5 \frac{x}{\rho_{eff}}\right]^{-\frac{1}{2}}$ . Per intagli blandi ( $\rho = 4$  mm) tutti gli approcci forniscono gli stessi risultati. Quando però nelle equazioni 12.1 e 12.2 si considerano come parametri del materiale  $d^*$  e raggio di raccordo quello effettivo  $\rho_{eff}$ :

$$K_f = 1 + \frac{K_t - 1}{1 + \sqrt{\frac{d^*}{\rho_{eff}}}} \quad (12.8)$$

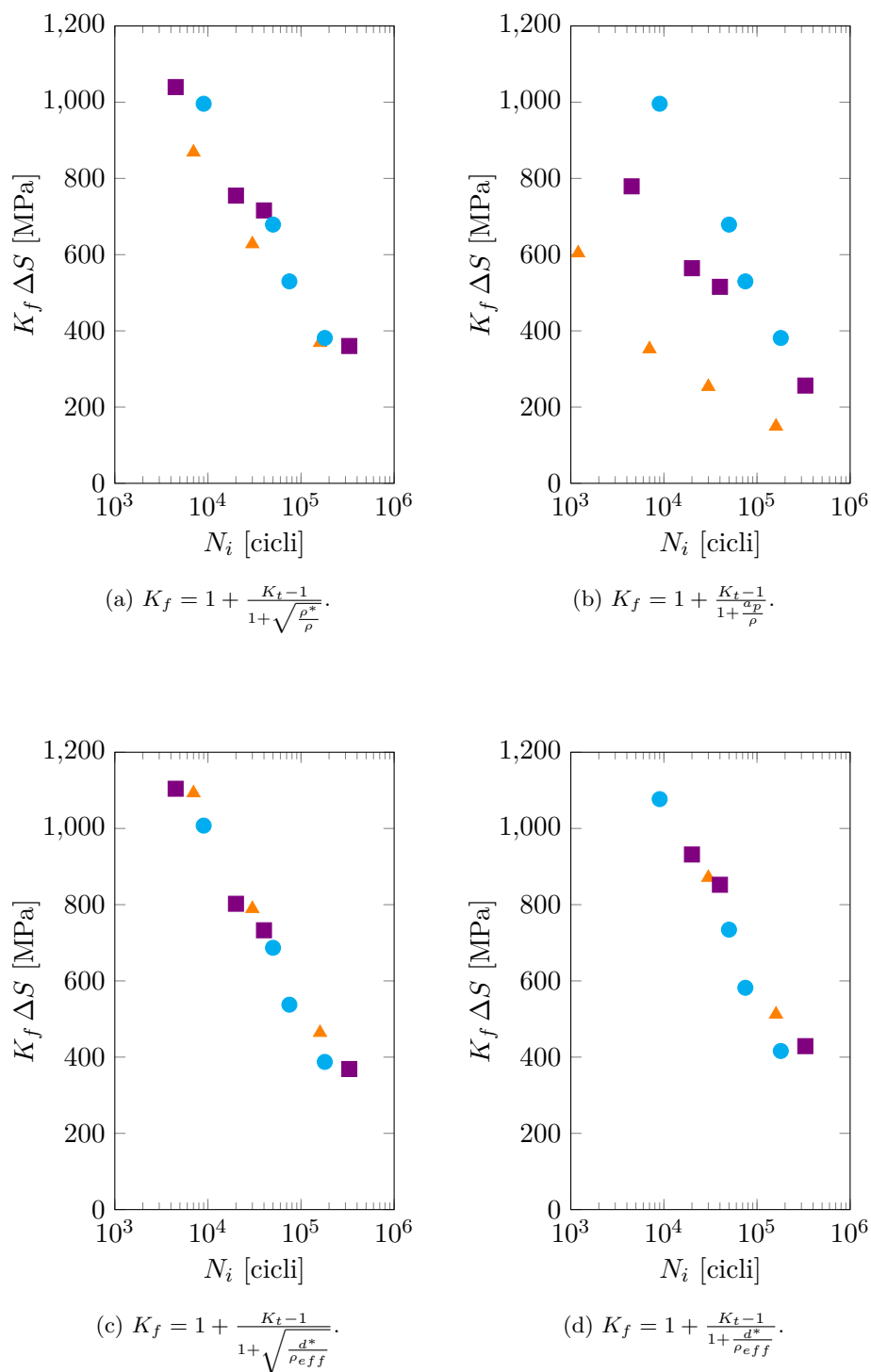


Figura 12.2: Risultati sperimentali per l'acciaio dolce 08kp, stabiliti su provini CT con raggio all'apice dell'intaglio di  $\rho = 0.15$  mm ( $\blacktriangle$ ),  $\rho = 0.75$  mm ( $\blacksquare$ ),  $\rho = 4$  mm ( $\bullet$ ).

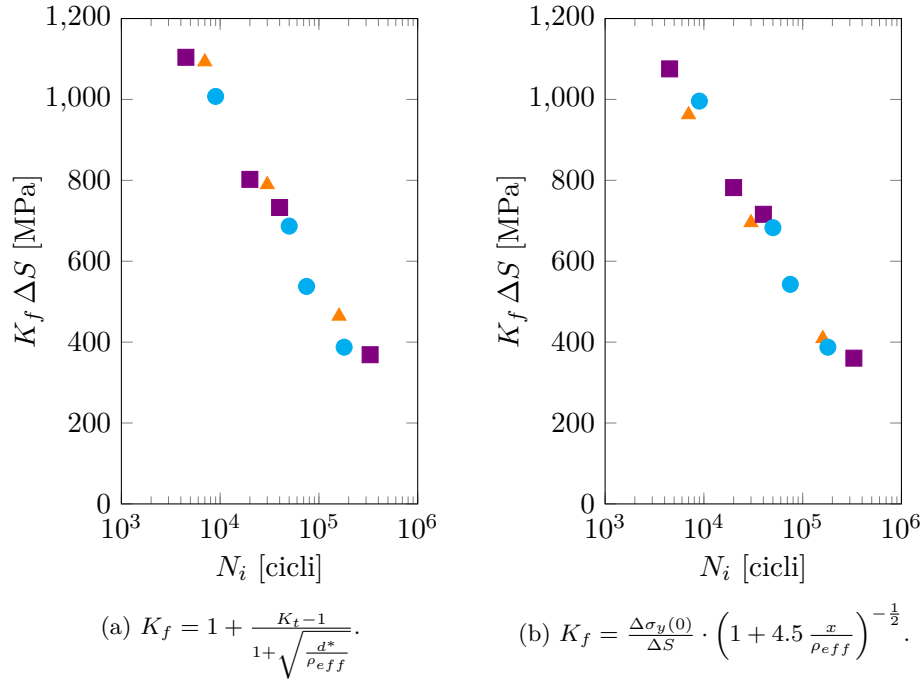


Figura 12.3: Risultati sperimentali per l'acciaio dolce 08kp, stabiliti su provini CT con raggio all'apice dell'intaglio di  $\rho = 0.15$  mm ( $\blacktriangle$ ),  $\rho = 0.75$  mm ( $\blacksquare$ ),  $\rho = 4$  mm ( $\bullet$ ).

e

$$K_f = 1 + \frac{K_t - 1}{1 + \frac{d^*}{\rho_{eff}}} \quad (12.9)$$

le situazioni cambiano. Quando si utilizza l'equazione 12.8 si ottiene comunque una curva di resistenza a fatica invariante rispetto al raggio di raccordo  $\rho$  mentre l'equazione 12.9 sovrastima i risultati.

Nella figura 12.3 è inoltre mostrato come l'approccio proposto da Ostash per il calcolo di  $K_f$  relativo ad intagli sia severi che blandi è in buon accordo con quello noto di Neuber nel caso in cui si facciano le seguenti due sostituzioni:  $\rho^* = d^*$  e  $\rho = \rho_{eff}$ .

## 12.2 La soluzione di Owolabi - 2010

Partendo dal calcolo della probabilità di sopravvivenza del componente intagliato proposta da Owolabi nel 2010, e qui riportata per semplicità:

$$P_s = \exp \left\{ - \left[ \frac{\Delta \bar{\Gamma}_{\text{net}}}{\Delta \Gamma_0} \right]^{b_\Gamma} \frac{V_d}{V_0} \frac{1}{V_d} \cdot \int_V \left[ \frac{\Delta \Gamma - \Delta \Gamma_{\text{th}}}{\Delta \bar{\Gamma}_{\text{net}}} \right]^{b_\Gamma} dV \right\}. \quad (12.10)$$

Nell'equazione 12.10 il termine  $\Delta \bar{\Gamma}_{\text{net}}$  rappresenta il valore medio del parametro non locale indicatore della fatica relativo alla sezione netta del componente intagliato, calcolato sia come: (i) media di  $\Delta \Gamma$  nella sezione netta fuori dalla zona di processo del danneggiamento  $V_d$  avente valori non nulli di  $\Delta \Gamma$  che (ii) media di  $\Delta \Gamma$  sull'intera sezione netta.

Introduciamo ora un nuovo fattore di concentrazione microstrutturale definito dalla seguente:

$$K_\Gamma^\mu = \left\{ \frac{1}{V_d} \int_{V_d} \left[ \frac{\Delta \Gamma - \Delta \Gamma_{\text{th}}}{\Delta \bar{\Gamma}_{\text{net}}} \right]^{b_\Gamma} dV \right\}^{\frac{1}{b_\Gamma}}. \quad (12.11)$$

Il valore del parametro  $\Delta \bar{\Gamma}_{\text{net}}$  basato sulla definizione (i) è utilizzato per determinare il fattore di concentrazione microscopico nell'equazione 12.11. È da notare che il valore di  $\Delta \Gamma$  mediato su  $V_d$  potrebbe essere alternativamente usato come parametro di scala nel definire il  $K_\Gamma^\mu$  nell'equazione 12.11 sostituendo  $\Delta \bar{\Gamma}_{\text{net}}$  in entrambi i posti dell'equazione 12.10. Solo la scala viene modificata. Sostituendo l'equazione 12.11 nella 12.10 si ottiene:

$$P_s = \exp \left\{ \left[ -K_\Gamma^\mu \frac{\Delta \bar{\Gamma}_{\text{net}}}{\Delta \Gamma_0} \right]^{b_\Gamma} \frac{V_d}{V_0} \right\}. \quad (12.12)$$

Utilizzando l'equazione 12.12, il FIP non locale mediato sulla sezione netta  $\Delta \bar{\Gamma}_{\text{net}}$  per un provino intagliato (ad esempio  $\Delta \bar{\Gamma}_{\text{notch}_{\text{net}}}$ ) con una zona di processo del danneggiamento  $V_d$  allo stesso numero di cicli della formazione della cricca  $N_i$  e probabilità di sopravvivenza come quella del provino piano di riferimento di volume  $V_0$  con diametro o larghezza corrispondente alla larghezza della sezione netta del provino intagliato ed avente un FIP

non locale medio  $\Delta\bar{\Gamma}_{\text{reference}}$  è dato da:

$$\Delta\bar{\Gamma}_{\text{notchnet}} \Big|_{N_i} = \frac{\Delta\bar{\Gamma}_{\text{reference}} \Big|_{N_i}}{K_{\Gamma}^{\mu} \cdot \left[ \frac{V_d}{V_0} \right]^{\frac{1}{b_{\Gamma}}}}. \quad (12.13)$$

Da notare che nell'equazione 12.12, per un provino piano  $K_{\Gamma}^{\mu} = 1$  e  $V_d = V_0$ .

Inoltre, per un provino piano, l'intero volume è considerato come avente sotto volumi con  $\Delta\Gamma$  pari o superiore al valore di soglia  $\Delta\Gamma_{\text{th}}$ . L'equazione 12.13 è ottenuta dalla 12.12 utilizzando  $P_{s_{\text{notch}}} = P_{s_{\text{reference}}}$ , il che significa che la probabilità di sopravvivenza è la stessa per il provino intagliato con zona di processo del danneggiamento  $V_d$  ad  $N_i$  e per quello piano di volume  $V_0$  con diametro o larghezza corrispondente alla larghezza della sezione netta del provino intagliato. Dunque, una nuova definizione quantitativa del fattore di riduzione della resistenza a fatica per la formazione e propagazione di cricche dell'ordine della dimensione del grano cristallino in HCF è ottenuta dall'equazione 12.13 come:

$$K_f^{\mu} = \frac{\Delta\bar{\Gamma}_{\text{reference}} \Big|_{N_i}}{\Delta\bar{\Gamma}_{\text{notchnet}} \Big|_{N_i}}, \quad (12.14)$$

da cui:

$$K_f^{\mu} = K_{\Gamma}^{\mu} \cdot \left[ \frac{V_d}{V_0} \right]^{\frac{1}{b_{\Gamma}}}. \quad (12.15)$$

In principio, il fattore  $K_f^{\mu}$  seguiva lo spirito delle definizioni tradizionali per  $K_f$  come ad esempio il rapporto tra valori di parametri ritenuti opportuni relativi al provino liscio ed a quello indebolito mentre ora si segue un approccio probabilistico sulla base della distribuzione di  $\Delta\Gamma$ . É interessante notare che  $\Delta\bar{\Gamma}_{\text{reference}}$  non è richiesto per il calcolo di  $K_f^{\mu}$  dato che non appare al membro di destra dell'espressione 12.15. Solo il volume del provino piano di riferimento  $V_0$  è richiesto assieme alla distribuzione di  $\Delta\Gamma$  all'in-



terno di  $V_d$  come il valore di  $\Delta\Gamma$  mediato sull'intero volume della sezione netta.

In aggiunta,  $K_\Gamma^\mu$  non è una costante ma dipende dalla microstruttura. Questo approccio considera la naturale multiassialità dello stato di tensione attorno all'intaglio, dato che qualsiasi FIP multiassiale può essere usato, nonché la dimensione dell'intaglio ed il gradiente dei campi di tensione. È adatto ad intagli con geometrie semplici ed arbitrarie.

Con questo approccio, è possibile discernere il regime di comportamento con sensibilità all'intaglio da quello di non sensibilità all'intaglio in termini di misure quantitative basate sulle distribuzioni dei FIP non locali, offrendo così un approccio sensibile alla microstruttura come alternativa al convenzionale  $K_f$ . Il pregio di questo concetto è che può essere usato per stimare l'influenza della microstruttura sulla sensibilità all'intaglio per condizioni microstrutturali che normalmente non sono elaborabili. Il compromesso è che le simulazioni numeriche richiedono un adeguato trattamento della distribuzione dello snervamento eterogeneo tra i grani all'interno della regione all'apice dell'intaglio. Un'altra importante restrizione del presente lavoro è che si riferisce alla formazione di cricche dell'ordine del grano cristallino, un criterio quindi che non può generalmente essere comparato in modo diretto al  $K_f$  misurato sperimentalmente definendo come cedimento la completa rottura del provino. Tuttavia, in HCF la frazione di vita totale spesa in formazione di cricche dell'ordine dei grani cristallini è elevata e pertanto una comparazione qualitativa è possibile.

L'indice di sensibilità all'intaglio è quindi dato da:

$$q = \frac{K_f^\mu - 1}{K_\Gamma^\mu - 1} \quad (12.16)$$

### 12.3 La soluzione di Owolabi - 2011

Basandosi sul nuovo approccio statistico proposto da Owolabi 2011, il quale considera la porzione di valori estremi della distribuzione di  $\Delta\Gamma$  nella zona di processo del danneggiamento a fatica piuttosto che la distribuzione di Weibull utilizzata in Owolabi 2010, lo stesso autore ha sviluppato una nuova relazione per il fattore microstrutturale di riduzione della resistenza a fatica. Basandosi sulla distribuzione statistica di  $\Delta\Gamma$ , le differenze tra i valori estremi nelle sezioni di coda della distribuzione statistica di  $\Delta\Gamma$  e la soglia  $\Delta\Gamma_{th}$  sono rappresentate da un'appropriata funzione di distribuzione statistica. Adattando una distribuzione parametrica a dei dati porta talvolta ad un modello che aderisce bene alla realtà nella regione più densa di dati e meno in quella più povera. Nelle applicazioni in HCF nelle quali alcuni grani hanno valori non locali del parametro  $\Delta\Gamma$  maggiori della soglia, adattare i dati nella coda ad un'appropriata funzione di distribuzione statistica è associata a sostanziali sfide. Quindi, la distribuzione generalizzata di Pareto, la quale è un buon modello per gestire le code di un'ampia distribuzione statistica, si rivela essere quella idonea. La distribuzione dei valori estremi del parametro non locale  $\Delta\Gamma$  che eccedono quello di soglia può essere ragionevolmente modellato utilizzando la distribuzione generalizzata di Pareto con una funzione di distribuzione  $\lambda$  nella forma:

$$\lambda = \frac{1}{V_0} \left[ 1 + \xi \frac{\Delta\Gamma_e - \Delta\Gamma_{th}}{\Delta\Gamma_0} \right]^{\frac{1}{\xi}}, \quad (12.17)$$

dove  $\xi$  è l'equivalente del parametro di forma  $b_\Gamma$  (il quale è adimensionale e dipende dalla microstruttura del materiale),  $\Delta\Gamma_0$  è un parametro di scala e  $\Delta\Gamma_e$  è il valore estremo di  $\Delta\Gamma$  nella coda finale della funzione di distribuzione. La funzione di distribuzione generalizzata di Pareto nella 12.17 è più appropriata rispetto alla funzione di distribuzione di Weibull utilizzata in Owolabi 2010 dato che la fatica in molti materiali ingegneristici e com-

ponenti è manifestata a mezzo di diversi attributi microstrutturali a varie lunghezze di scala che promuovono l'intensificazione dei piani di scorrimento.

Utilizzando 12.17 e seguendo lo sviluppo probabilistico proposto da Owolabi 2010, si ottiene una nuova relazione per il fattore di riduzione della resistenza a fatica dipendente dalla microstruttura ed assume la forma:

$$K_f^\mu = K_t^\mu \left[ \frac{V_d}{V_0} \right]^\xi \quad (12.18)$$

dove  $K_t^\mu$  è il fattore teorico di concentrazione delle tensioni microscopico dato da:

$$K_t^\mu = \int_{V_d} \left[ \frac{\Delta\Gamma_0 + \xi(\Delta\Gamma_e - \Delta\Gamma_{th})}{\Delta\bar{\Gamma}_{net}} \right]^{\frac{1}{\xi}} dV. \quad (12.19)$$

L'associato indice di sensibilità all'intaglio  $q$  diventa:

$$q = \frac{K_f^\mu - 1}{K_t^\mu - 1}. \quad (12.20)$$

Il  $K_f^\mu$  segue lo spirito del tradizionale  $K_f$  come rapporto del valore guida in HCF alla medesima  $P_s$  tra quello che compete al materiale base e quello al componente intagliato. Il nuovo modello probabilistico per il calcolo del fattore di riduzione della resistenza a fatica dipendente dalla microstruttura incorpora la resistenza al gradiente del campo di tensione all'apice dell'intaglio e le distribuzioni di microslip relativi per sottolineare la microstruttura all'interno della zona di processo del danneggiamento a fatica. Le equazioni 12.18 e 12.19 mostrano che il grado di accuratezza dipende fortemente dall'affidabilità della previsione della distribuzione statistica dei valori estremi del parametro indicatore della fatica basato sulla tensione tangenziale di taglio  $\Delta\Gamma$ . Dunque, la zona di processo del danneggiamento a fatica  $V_d$  gioca il ruolo principale nella determinazione del fattore di riduzione della resistenza a fatica dipendente dalla microstruttura.

## 12.4 La soluzione di Owolabi - 2015

Questo studio combina il lavoro di [55] con altre formulazioni probabilistiche esistenti che considerano la distribuzione della dimensione e posizione dei difetti oltre che differenti meccanismi di danneggiamento per la lega IN 100.

Per un provino liscio con difetti, una zona di processo del danneggiamento di volume  $V$ , il quale sia diviso in piccoli elementi volumetrici  $dV$  con probabilità di rottura di un sufficientemente piccolo elementino è data da:

$$dP = \lambda dV \quad (12.21)$$

dove  $\lambda$  è la densità critica dei difetti definita come numero atteso di difetti per unità di volume del provino piano. Utilizzando la weakest link theory, la probabilità di sopravvivenza dell'intero volume è ottenuta dalla probabilità di sopravvivenza di tutti i  $j$  elementini del volume:

$$P_s = \prod_{i=1}^j (1 - dP_i) = \prod_{i=1}^j (1 - \lambda dV_i). \quad (12.22)$$

Questa equazione assume che i difetti siano distribuiti casualmente all'interno del volume e dunque non interagiscono, il che è plausibile solo quando si considera la formazione di una o più cricche di fatica in HCF e VHCF. Qualora il volume di ogni elementino tenda a zero, l'equazione 12.22 può essere trasformata nella seguente:

$$P_s = \exp \left[ - \int_{V_d} \lambda dV \right]. \quad (12.23)$$

Utilizzando la funzione generalizzata della distribuzione dei valori estremi, la distribuzione dei difetti  $a$  che sono sopra la soglia  $a_{th}$  è modellata da una legge di potenza dalla forma:

$$\lambda = \frac{1}{V_0} \left[ 1 + \xi \frac{a - a_{th}}{a_0} \right]^{-\frac{1}{\xi}} \quad (12.24)$$

dove  $a_0$  e  $\xi$  sono rispettivamente i parametri di scala e di forma. Sostituendo l'equazione 12.24 all'interno della 12.23 si ottiene:

$$P_s = \exp \left[ -\frac{1}{V_0} \int_{V_d} \left[ 1 + \xi \frac{a - a_{th}}{a_0} \right]^{-\frac{1}{\xi}} dV \right]. \quad (12.25)$$

Se  $a_{th} = a_0^* \cdot \xi$ , aggiornando l'equazione 12.25 si ottiene:

$$P_s = \exp \left[ -\frac{1}{V_0} \int_{V_d} \left[ \frac{a}{a_0^*} \right]^{-\frac{1}{\xi}} dV \right], \quad (12.26)$$

dove  $a_0^*$  è considerato come la dimensione media del difetto. L'equazione 12.26 è valida solo se  $\xi \neq 0$ . La dimensione critica del difetto è collegata alla tensione microstrutturale (considerata qui come una variabile casuale) attraverso una legge di potenza espressa nella forma:

$$\sigma_a = \frac{A}{\sqrt[z]{a}}, \quad (12.27)$$

dove  $A$  e  $z$  sono rispettivamente delle costanti del materiale. Similmente, l'ampiezza della tensione  $\sigma_0$  corrisponde alla dimensione media del difetto  $a_0^*$  può essere presa come limite di fatica del volume di riferimento  $V_0$  per una probabilità di rottura del 50%. I due parametri possono inoltre essere relazionati alla legge di potenza nella forma:

$$\sigma_0 = \frac{A}{\sqrt[z]{a_0^*}}. \quad (12.28)$$

Combinando l'equazione 12.27 con l'equazione 12.28 si ha:

$$\frac{a}{a_0^*} = \left[ \frac{\sigma_0}{\sigma_a} \right]^z. \quad (12.29)$$

Sostituendo l'equazione 12.29 nell'equazione 12.26 si ottiene:

$$P_s = \exp \left[ -\frac{1}{V_0} \int_{V_d} \left[ \frac{\sigma_a}{\sigma_0} \right]^b dV \right], \quad (12.30)$$

dove  $b = \frac{z}{\xi}$ . Se  $\sigma_a = \sigma - \sigma_{th}$ , allora l'equazione 12.30 diventa:

$$P_s = \exp \left[ -\frac{1}{V_0} \int_{V_d} \left[ \frac{\sigma - \sigma_{th}}{\sigma_0} \right]^b dV \right]. \quad (12.31)$$

Per  $\xi > 0$ , i tre parametri di Weibull sono rappresentati dalla forma  $b$ , dalla posizione  $\sigma_{th}$  e dalla scala  $\sigma_0$ . La probabilità cumulata di rottura del componente in HCF definita specificatamente può essere ottenuta dall'equazione 12.31 come: dove  $b = \frac{\xi}{\xi}$ . Se  $\sigma_a = \sigma - \sigma_{th}$ , allora l'equazione 12.30 diventa:

$$P_f = 1 - \exp\left[-\frac{1}{V_0} \int_{V_d} \left[\frac{\sigma - \sigma_{th}}{\sigma_0}\right]^b dV\right]. \quad (12.32)$$

Per facilitare lo sviluppo dell'espressione per il fattore di riduzione della resistenza a fatica, l'equazione 12.32 può essere riscritta utilizzando il concetto dei fattori di omogeneità delle tensioni:

$$P_f = 1 - \exp\left[-\frac{k \cdot V_d}{V_0} \left[\frac{\sigma_{max}}{\sigma_0}\right]^b\right], \quad (12.33)$$

dove

$$k = \frac{1}{V_d} \int_{V_d} \left[\frac{\sigma - \sigma_{th}}{\sigma_{max}}\right]^b dV, \quad (12.34)$$

è considerato il fattore di omogeneità delle tensioni. Convenzionalmente, il  $K_f$  è il rapporto tra la resistenza a fatica del materiale base e quella del componente intagliato alla medesima probabilità di sopravvivenza  $P_s$  (solitamente 50%). Utilizzando l'equazione 12.33, la probabilità di rottura del provino piano e di un provino intagliato saranno le stesse quando:

$$\exp\left[-\frac{k_s \cdot V_{d_s}}{V_0} \left[\frac{\sigma_{max_s}}{\sigma_0}\right]^b\right] = \exp\left[-\frac{k_n \cdot V_{d_n}}{V_0} \left[\frac{\sigma_{max_n}}{\sigma_0}\right]^b\right], \quad (12.35)$$

dove i pedici  $s$  ed  $n$  rappresentano i valori rispettivi al componente piano (smooth) e a quello intagliato (notched). Il rapporto tra i parametri ritenuti di guida per la resistenza a fatica del componente esente da effetto d'intaglio e quello indebolito (come ad esempio l'ampiezza della tensione), è utilizzato per definire un nuovo fattore di riduzione della resistenza a fatica dato da:

$$k_f = \frac{\sigma_{max_s}}{\sigma_{max_n}} = \left[\frac{k_n}{k_s} \frac{V_{d_n}}{V_{d_s}}\right]^{\frac{1}{b}}. \quad (12.36)$$

Per provini lisci che sono caricati con bassi valori dell'ampiezza di tensione o deformazione in HCF, il numero di grani (o elementi) tensionati

criticamente è molto piccolo. Dunque per il caso di vita limite nel quale un solo grano od elemento sia tensionato criticamente sopra la soglia  $V_{d_s} = V_{et}$  (ad esempio volume di elemento o grano) e  $k_s = 1$ ; l'equazione 12.36 diventa:

$$k_f = \frac{\sigma_{\max_s}}{\sigma_{\max_n}} = \left[ k_n \frac{V_{d_n}}{V_{et}} \right]^{\frac{1}{b}}. \quad (12.37)$$

ossia:

$$k_f = \left[ \frac{1}{V_d} \int_{V_d} \left[ \frac{\sigma - \sigma_{th}}{\sigma_{\max_n}} \right]^b dV \cdot \frac{V_{d_n}}{V_{et}} \right]^{\frac{1}{b}}. \quad (12.38)$$

É importante affermare che se il materiale contiene alcune porosità o inclusioni come il caso delle superleghe a base nichel, deve essere utilizzata l'equazione 12.36.

Nell'equazione 12.33 ci sono tre parametri incogniti denominati come parametro di forma, di posizione e di scala. Il parametro di posizione, anche detto tensione di soglia, è assunto come resistenza allo snervamento del materiale partendo da due parametri incogniti. I due rimanenti parametri incogniti sono determinati utilizzando la tecnica della stima del momento modificato (Modified Moment Estimation - MME). In questo lavoro, i primi due semplici momenti utilizzati sono la media  $\sigma_m$  e la varianza  $\sigma^2$  della distribuzione della tensione  $\sigma$ . Modificando l'espressione ottenuta da [63] per contemplare l'effetto delle dimensioni dell'intaglio, il valore medio e la varianza sono date da:

$$\sigma_m = \sigma_{th} + \sigma_0 \left[ \frac{V_0}{V_d} \right]^b \zeta_1 \quad (12.39)$$

e

$$\sigma_m^2 = \sigma_0^2 \left[ \frac{V_0}{V_d} \right]^{2b} (\zeta_2 - \zeta_1^2). \quad (12.40)$$

Nelle equazioni 12.39 e 12.40

$$\zeta_1 = \zeta (1 + b) \quad \zeta_2 = \zeta (1 + 2b) \quad (12.41)$$

dove  $\zeta$  è la funzione gamma definita dall'integrale:

$$\zeta(s) = \int_0^{\infty} t^{s-1} e^{-t} dt. \quad (12.42)$$

Risolvendo simultaneamente le equazioni 12.39 e 12.40 si determinano i due parametri incogniti  $k$  e  $b$ . La tensione di snervamento della superlega a base nichel è di 1045 MPa dunque segue che il parametro  $b$  vale 15.6 mentre il parametro di scala  $\sigma_0$  è 2826.07 MPa. Dalla geometria del provino, il volume  $V_0$  di riferimento è stato calcolato essere 11.152 mm<sup>3</sup>.



# Bibliografia

- [1] Louks R and Susmel L. The linear-elastic theory of critical distances to estimate high-cycle fatigue strength of notched metallic materials at elevated temperatures. *Fatigue and Fracture of Engineering Materials and Structures*, 00:1–12, 2014. [x](#), [89](#)
- [2] Chen Q., Kawagoishi N., and Nisitani H. Evaluation of notched fatigue strength at elevated temperature by linear notch mechanics. *International Journal of Fatigue*, 21:925–931, 1999. [x](#), [82](#), [90](#)
- [3] Shi D.Q., Hu X.A., Wang J.K., Yu H.C., Yang X.G., and Huang J. Effect of notch on fatigue behaviour of a directionally solidified superalloy at high temperature. *Fatigue and Fracture of Engineering Materials and Structures*, 23:209–216, 2000. [x](#), [82](#), [90](#), [91](#)
- [4] Muskhelishvili N.I. *Some basic problems of the mathematical theory of elasticity*. Noordhoof Leyden, 1953. [18](#)
- [5] Seweryn A. Brittle fracture criterion for structures with sharp notches. *Engineering Fracture Mechanics*, 47:673–681, 1994. [68](#)
- [6] Seweryn A. and Lukaszewicz. Verification of brittle fracture criteria for elements with v-shaped notches. *Engineering Fracture Mechanics*, 69:1487–1510, 2002. [68](#)

- [7] Lazzarin P. and Zambardi R. A finite-volume-energy based approach to predict the static and fatigue behaviour of components with sharp v-shaped notches. *International Journal of Fracture*, 112:275–298, 2001. [68](#), [75](#)
- [8] Lazzarin P. and Berto F. Some expressions for the strain energy in a finite volume surrounding the root of blunt v-notches. *International Journal of Fracture*, 135:161–185, 2005. [68](#)
- [9] Yosibash Z., Bussiba A.R., and Gilad I. Failure criteria for brittle elastic materials. *International Journal of Fracture*, 125:307–333, 2004. [69](#)
- [10] El Haddad M.H., Topper T.H., and Smith K.N. Prediction of non-propagating cracks. *Engineering Fracture Mechanics*, 11:573–584, 1979. [69](#)
- [11] Irwin G.R. Analysis of stresses and strains near the end of a crack traversing a plate. *Journal of Applied Mechanics*, 24:361–364, 1957. [74](#)
- [12] Westergaard H.M. Bearing pressure and cracks. *Journal of Applied Mechanics*, 6:A49–A53, 1939. [74](#)
- [13] Berto F., Gallo P., and Lazzarin P. High temperature fatigue tests of un-notched and notched specimens made of 40crmov13.9 steel. *Material Design*, 63:609–619, 2014. [82](#)
- [14] Kawagoishi N., Chen Q., and Nisitani H. Fatigue strength of inconel 718 at elevated temperatures. *Fatigue and Fracture of Engineering Materials and Structures*, 00:1–10, 2013. [82](#)
- [15] Berto F., Gallo P., and Lazzarin P. High-temperature fatigue strength of a copper-cobalt-beryllium alloy. *Journal of Strain Analysis*, 49:244–526, 2014. [82](#)

- [16] Yang X., Wang J., and Liu J. High temperature lcf life prediction of notched ds ni-based superalloy using critical distance concept. *International Journal of Fatigue*, 33:1470–1476, 2011. [82](#)
- [17] Tanaka K. Engineering formulae for fatigue strength reduction due to crack-like notches. *International Journal of Fracture*, 22:R39–R46, 1983. [83](#)
- [18] Taylor D. Geometrical effects in fatigue: a unifying theoretical model. *International Journal of Fatigue*, 21:413–420, 1999. [83](#)
- [19] Susmel L. and Taylor D. An elasto-plastic reformulation of the theory of critical distances to estimate lifetime of notched components failing in the low/medium-cycle fatigue regime. *Fatigue and Fracture of Engineering Materials and Structures*, 132:021002–1/8, 2010. [83](#)
- [20] Leidermark D., Moverare J., Simonsson K., and Sjöström S. A combined critical plane and critical distance approach for predicting fatigue crack initiation in notched single-crystal superalloy components. *International Journal of Fatigue*, 33:1351–1359, 2011. [83](#)
- [21] Susmel L. and Taylor D. Fatigue design in the presence of stress concentrations. *Journal of Strain Analysis*, 38:443–452, 2003. [83](#)
- [22] Susmel L. and Taylor D. A novel formulation of the theory of critical distances to estimate lifetime of notched components in the medium-cycle fatigue regime. *Fatigue and Fracture of Engineering Materials and Structures*, 30:567–581, 2007. [83](#), [85](#)
- [23] Susmel L. The theory of critical distances: a review of its applications in fatigue. *Engineering Fracture Mechanics*, 75:1706–1724, 2008. [84](#)
- [24] Taylor D. *The Theory of Critical Distances: A new perspective in fracture mechanics*. Elsevier, Oxford-UK, 2007. [84](#), [93](#)

- [25] Peterson R.E. *Notch Sensitivity*. McGraw Hill, New York, 1959. 84
- [26] Neuber H. *Theory of notch stresses: principles for exact calculation of strength with reference to structural form and material*. Springer, Berlin, 2nd edition, 1958. 84
- [27] Sheppard S.D. Field effects in fatigue crack initiation: long life fatigue strength. *ASME Transaction - Journal of Mechanical Design*, 113:188–194, 1991. 84
- [28] Sonsino C.M. Course of sn-curves especially in the high-cycle fatigue regime with regard to component design and safety. *International Journal of Fatigue*, 29:2246–2258, 2007. 87
- [29] Susmel L. *Multiaxial Notch Fatigue: from nominal to local stress-strain quantities*. Woodhead CRC, Cambridge, UK, 2009. 93
- [30] Susmel L. A unifying approach to estimate the high-cycle fatigue strength of notched components subjected to both uniaxial and multiaxial cyclic loadings. *Fatigue and Fracture of Engineering Materials and Structures*, 27:391–411, 2004. 93
- [31] Yokobori A.T., Kaji Y., and Kuriyama T. Damage progression behavior under high temperature creep and fatigue conditions. *ICF10*, 2001. 94
- [32] Lazzarin P. and Zambardi R. The equivalent strain energy density approach re-formulated and applied to sharp v-shaped notches under localized and generalized plasticity. *Fatigue and Fracture of Engineering Materials and Structures*, 25:917–928, 2002. 94
- [33] Tancret F. *Quantitative modeling tools for design of Ni-base superalloys*. Sterling, London, 2000. 113

- [34] Padula SA, Shyam A., Ritchie RO, and Milligan WW. High frequency fatigue crack propagation behavior of a nickel-base turbine disk alloy. *International Journal of Fatigue*, 21:725–731, 1999. [113](#)
- [35] Przybyla CP., Prasannavenkatesan R., Salajegheh N., and McDowell DL. Microstructure-sensitive modeling of high cycle fatigue. *International Journal of Fatigue*, 32:512–525, 2010. [113](#)
- [36] Przybyla CP. and McDowell DL. Simulation-based extreme value marked correlations in fatigue of advanced engineering alloys. *Procedia Engineering*, 2:1045–1052, 2010. [113](#)
- [37] Shenoy M., Zhang J., and McDowell DL. Estimating fatigue sensitivity to polycrystalline ni-base superalloy microstructures using a computational approach. *Fatigue and Fracture of Engineering Materials and Structures*, 30, 2007. [114](#)
- [38] Raabe D., Roters F., Barlat F., and Chen LQ. *Continuum scale simulation of engineering materials: fundamentals-microstructures-process applications*. Wiley-VCH, 2004. [114](#)
- [39] Hyzak J. and Bernstein I. The effect of defects on the fatigue crack initiation process in two p/m superalloys: part ii. surface-subsurface transition. *Metallurgical Transactions A*, 13, 1982. [114](#)
- [40] Deyber S., Alexandre F., Vaissaud J., and Pineau A. *Probabilistic life of DA718 for aircraft engine disks*. Superalloys 718, 625, 706 and Derivatives, Warrendale, 2006. [114](#), [115](#), [116](#)
- [41] Efstratios N., Dan MG., and Suren S. *Engineering design reliability handbook*. RC Press, 2004. [114](#)
- [42] Fournier D. and Pineau A. Low cycle fatigue behavior of inconel 718 at 298k and 823k. *Metallurgical Transactions A*, 8:1095–1105, 1977. [115](#)

- [43] Alexandre F. *Probabilistic and microstructural aspects of fatigue crack initiation in IN718*. Ecole des Mines de Paris PhD Thesis, 2004. [115](#)
- [44] Beremin F.M. Cavity formation from inclusions in ductile fracture of a508 steel. *Metallurgical Transactions A*, 12, 1981. [116](#)
- [45] Tomkins B. Fatigue crack propagation - an analysis. *Philosophical Magazine*, 18:1041–1066, 1968. [116](#)
- [46] Pineau A. *Superalloy discs durability and damage tolerance in relation to inclusions*. Proceedings of a conference on high temperature materials for power engineering, 1990. [119](#)
- [47] Doudard C., Hild F., and Calloch S. A probabilistic model for multiaxial high cycle fatigue. *Fatigue and Fracture of Engineering Materials and Structures*, 30:107–114, 2007. [124](#)
- [48] Gulino R. and Phoenix SL. Weibull strength statistics for graphite fibres measured from the break progression in a model graphite/glass/epoxy microcomposite. *J Mater Sci*, 26:3107–3118, 1991. [125](#)
- [49] Denoual C. and Hild F. Dynamic fragmentation of brittle solids: a multi-scale model. *Eur J Mech A/Solids*, 21:105–120, 2002. [125](#)
- [50] Flaceliere L. and Morel F. Probabilistic approach in high-cycle multiaxial fatigue: volume and surface effects. *Fatigue and Fracture of Engineering Materials and Structures*, 27:1123–1135, 2004. [125](#)
- [51] Papadopoulos I.V. A high-cycle fatigue criterion applied in biaxial and triaxial out-of-phase stress conditions. *Fatigue and Fracture of Engineering Materials and Structures*, 18:79–91, 1995. [125](#)
- [52] Delahay T. and Palin-Luc T. Estimation of the fatigue strength distribution in high-cycle multiaxial fatigue taking into account

- the stress–strain gradient effect. *International Journal of Fatigue*, 28:474–484, 2006. [127](#)
- [53] Banvillet A., Palin-Luc T., Lasserre S., and Vittori J.F. *Energy based high cycle multiaxial fatigue criterion depending on stress–strain distribution*. Eighth international fatigue congress, Fatigue., Stockholm. [127](#)
- [54] Ostash O.P., Panasyuk V.V., and Kostyk E.M. A phenomenological model of fatigue macrocrack initiation near stress concentrators. *Fatigue and Fracture of Engineering Materials and Structures*, 22, 1999. [132](#)
- [55] Panasyuk V.V., Ivanytska G.S., and Ostash O.P. A new approach to the determination of the macrocrack nucleation period near a stress concentrator. *Fatigue and Fracture of Engineering Materials and Structures*, 16:453–464, 1993. [133](#)
- [56] Panasyuk V.V., Dmytrakh I.D., Pluinage G., and Qylafku G. *On corrosion fatigue emanating from notches: stress field and electrochemistry*. Proceedings of the ESIS TC-10 Workshop, Ukraine. [133](#)
- [57] McGinty R.D. *Multiscale representation of polycrystalline inelasticity*. Ph.D. Thesis, Georgia Institute of Technology. [143](#), [145](#)
- [58] McGinty R.D. and McDowell D.L. Multiscale polycrystal plasticity. *ASME J Eng Mat Technol*, 121:203–209, 2003. [143](#)
- [59] Cutino A.M. and Ortiz M. Computational modeling of single crystals. *Model Simulat Mat Sci Eng*, 1, 1992. [143](#)
- [60] Asaro R.J. Micromechanics of crystals and polycrystals. *Adv Appl Mech*, 23:1–115, 1983. [143](#)

- [61] Shenoy M.M. *Constitutive modeling and life prediction in nikel-base superalloy*. Ph.D. Thesis, Georgia Institute of Technology. 149
- [62] Kocks U., Argon A., and Ashby M. *Thermodynamics and kinetics of slip*. Progress in material science, London. 151
- [63] Cohen A.C. and Whitten B.J. *Parameter estimation in reliability and life spam models*. Marcel Dekker, New York. 169