UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

Dipartimento di Fisica e Astronomia "Galileo Galilei"

Corso di Laurea in Fisica

Tesi di Laurea

Relazione tra l'approccio ETH alla Meccanica Quantistica e la Decoerenza

Relatore

Prof. Pieralberto Marchetti

Laureando

Tommaso Stentella

Anno Accademico 2019/2020

Indice

Capitolo 1

Il problema della misura

Tra le varie formulazioni della Meccanica Quantistica quella generalmente considerata come *standard*, nonché la prima sviluppata, è la formulazione assiomatica Hilbertiana, su cui si basa la cosiddetta interpretazione di Copenaghen proposta originariamente da Heisenberg e Bohr nella capitale danese. Fin dalle sue origini tale interpretazione è stata affetta da quello che è definito *problema della misura*. Esso nasce nel momento in cui si utilizza la teoria per descrivere la misura di un'osservabile di un sistema isolato, ovvero l'interazione del sistema con un ente esterno o "osservatore". L'origine del problema risiede nel fatto che mentre l'evoluzione temporale di un sistema isolato, così come descritta dal rispettivo postulato, è unitaria e completamente deterministica, la misura è proiettiva e provoca una perdita di informazione sullo stato precedente alla misura determinandone in modo indeterministico lo stato finale: dunque l'osservatore assume un ruolo fondamentale nella descrizione del sistema in esame. La teoria però, nei suoi postulati, non fornisce un metodo per trattare l'osservatore e la sua evoluzione temporale, sullo stato del quale in generale non si ha alcuna informazione. Questo non solo ha implicazioni ontologiche evidenti, ma anche pratiche: risulta difficile definire in quale relazione siano l'evoluzione deterministica di un sistema isolato, secondo l'interpretazione di Copenaghen descritta dall'equazione di Schrödinger, e l'evoluzione probabilistica di un sottosistema sottoposto a misura;[1] inoltre per predire il risultato di più misure successive è necessario in generale conoscere i risultati di tutte le misure intermedie. Diverse interpretazioni sono state proposte per ottenere una descrizione di un sistema fisico che fosse autoconsistente e non richiedesse l'intervento di enti esterni *dotati di volontà* (con risvolti ontologici molto diversi tra loro). Ci proponiamo di confrontare il formalismo della decoerenza, costruito in maniera "standard" a partire dall'interpretazione di Copenaghen e l'approccio "Events-Tree-History" [5].

1.1 Sistemi isolati aperti

Abbiamo osservato come il problema della misura sorga nel momento in cui un sistema smette di essere isolato, quindi concentreremo la nostra attenzione su questo aspetto. Un sistema è isolato se durante l'intervallo di tempo di interesse, ai fini pratici, non interagisce con il resto dell'universo, ovvero se gli eventuali termini di interazione possono essere trascurati nella descrizione dell'evoluzione temporale delle osservabili mediante la visuale di Heisenberg. Seguendo la terminologia di [5] diremo che un sistema isolato è aperto se può emettere modi verso l'ambiente che non possono essere misurati dal sistema stesso, ma che possono essere entangled con esso. Si pensi, per esempio, a un'emissione di radiazione, essa dopo un certo tempo avrà una Hamiltoniana di interazione con il sistema nulla ma potrà essere in generale entangled con esso.

[1] Emblematici sono i noti paradossi del *Gatto di Schrödinger* e de *L'amico di Wigner* che evidenziano tale contrasto in sistemi macroscopici oltre al ruolo ambiguo dell'osservatore

1.1.1 L'evoluzione temporale di un sistema isolato

Quando si considera un sistema isolato l'interpretazione di Copenaghen (CI) afferma che l'evoluzione degli stati puri sia determinata dall'equazione di Schrödinger. Solo nel momento in cui viene compiuta una misura di una certa osservabile X lo stato viene proiettato su un autostato di tale osservabile compatibile con l'autovalore ottenuto come risultato. Se il risultato non è noto allora lo stato finale sarà una mistura classica dei possibili autostati compatibili con la misura svolta, descritto da una matrice densità. Vorremmo mostrare, ripercorrendo l'esperimento mentale proposto in [3, 5, 6] che l'equazione di Schrödinger, in quanto deterministica, non è adatta alla descrizione di un sistema isolato aperto in presenza di "eventi" o "misure" che invece si mostra intrinsecamente stocastica. Questo evidenzierà il problema della misura e ci condurrà a sviluppare un approccio alternativo a CI per l'interpretazione della Meccanica Quantistica.

Consideriamo due sistemi, uno (A) composto da una particella di spin $1/2$ (ed eventualmente un apparato di Stern-Gerlach) ed uno (B) composto da un'altra particella di spin $1/2$ ed un filtro in grado di selezionare una direzione di spin (ad esempio un sottile strato metallico ferromagnetico magnetizzato) il quale è preparato in uno stato iniziale poco noto. Il sistema B quindi è a molti gradi di libertà. Supponiamo di porre le due particelle inizialmente spazialmente vicine in uno stato di singoletto entangled e di preparare lo stato iniziale in modo che si allontanino in versi opposti e siano con alta probabilità confinate in regioni spazio-temporali a distanza di tipo spazio. Si può mostrare ([3]) che se il termine di interazione tra le particelle è a corto raggio può essere ignorato e che i valori di aspettazione delle evolute temporali (nella visuale di Heisenberg) delle osservabili di A risultano indipendenti dai gradi di libertà di B a meno di piccole correzioni, perciò le due particelle possono essere trattate come approssimativamente libere. Basandoci su CI possiamo assumere che: 1) l'evoluzione dello stato del sistema totale sia determinata dall'equazione di Schrödinger; 2) il risultato di una misura di spin per le due particelle sia correlato come previsto dalla meccanica quantistica standard e quindi sussista una non-località alla Bell. In particolare la prima assunzione implica che lo stato iniziale determini completamente l'eventualità che la particella appartenente al sistema B superi il filtro o ne sia assorbita. Dal fatto che è possibile considerare le particelle come libere segue che con buona approssimazione lo spin della particella in A è conservato prima che sia misurato, indipendentemente dall'evoluzione di B e dallo stato iniziale del filtro, e il suo valore di aspettazione è ≈ 0 per tutti i tempi precedenti alla misura. In particolare è indipendente dal tipo di misurazione eseguita sulla particella in B ad opera del filtro. Tuttavia ciò porta ad una contraddizione se unito alle due assunzioni poste precedentemente: se lo stato iniziale del sistema complessivo fosse tale da garantire, attraverso un'evoluzione unitaria e quindi con probabilità 1, il passaggio della particella in B attraverso il filtro (analogamente per l'assorbimento), allora la seconda assunzione ci consegnerebbe un valor medio per lo spin di A pari a $1/2$ (o $-1/2$ a seconda della configurazione), dunque in contraddizione con quanto osservato sull'indipendenza tra i due sistemi. Questo porta a concludere che un'interpretazione realista della meccanica quantistica, in cui con "realista" si intende la possibilità di poter prevedere completamente quali "eventi" e "misure" accadranno mediante l'equazione di Schrödinger, fallisce necessariamente e l'utilizzo della visuale di Schrödinger può solo fornire probabilità associate a risultati di misure. Dunque se la non località alla Bell è realizzata, e ciò è sostenuto da diversi esperimenti, allora l'evoluzione di un sistema in presenza di "eventi" e "misure" non è descritta dalla visuale di Schrödinger deterministica che risulta non essere equivalente alla visuale di Heisenberg; nel senso che, come sarà chiarito successivamente, in una descrizione dell'evoluzione di un sistema la cui ontologia giace nel concetto di "evento" risulta naturale avere un meccanismo di selezione non unitario che distingua gli eventi che sono accaduti da quelli che ancora possono accadere, caratteristica che l'evoluzione di Schrödinger non ha. In altre parole ciò a cui rinunciamo è il concetto standard di sistema isolato e la conseguente evoluzione deterministica dello stato data dalla visuale di Schrödinger.

Questo è il punto di partenza sulla base del quale viene costruito l'approccio ETH che come vedremo mostra una struttura dell'evoluzione temporale squisitamente stocastica. Il formalismo decoerente invece non rinuncia alla descrizione unitaria di un sistema isolato, come sostenuto da CI, ma si focalizza sull'interazione tra il sottosistema misurato e quello che compie la misura e dunque sull'evoluzione non unitaria di un sottosistema aperto che in generale lo conduce da uno stato localmente puro ad uno localmente misto.

1.1.2 La decoerenza di un sistema aperto

Introduciamo ora il formalismo della decoerenza che si propone di trattare l'evoluzione temporale di un sottosistema aperto, e la sua interazione con la parte restante di un sistema isolato, sfruttando in particolare i concetti di misura generalizzata ed evoluzione non unitaria. Infatti l'idea alla base di questo approccio è quella di considerare la misura proiettiva su un sistema come l'interazione con un sistema molto più grande: il sistema complessivo si evolverà in maniera unitaria, ma in generale i due sottosistemi, inizialmente isolati e separabili, diverranno entangled con il risultato che la restrizione al sottosistema di interesse (quello misurato) sarà nel caso più generale anche una mistura incoerente di stati puri. Esprimiamo ora questi concetti in maniera più precisa. Notiamo che implicito nell'approccio è un numero finito, anche se arbitrariamente grande, di gradi di libertà.

Innanzitutto risulta utile descrivere gli stati, in generale sia puri che misti, in termini di matrici densità, il che è possibile per sistemi con gradi di libertà finiti. Una matrice densità ρ è una matrice hermitiana, a traccia unitaria e descrive un operatore non negativo. Consideriamo due sottosistemi aperti A e B interagenti tra loro e isolati dal resto dell'universo in modo che il sistema totale AB sia isolato. Siamo interessati all'evoluzione di A: per restringerci ad esso utilizziamo la traccia parziale su B e, se accettiamo CI, il sistema AB si evolve con un operatore unitario $U(t)$ secondo

$$\rho_A(t) = \mathrm{Tr}_B\, \rho_{AB}(t) = \mathrm{Tr}_B[U(t)\rho_{AB}U^\dagger(t)]$$

Facciamo alcune assunzioni:

- I sistemi A e B sono inizialmente in uno stato separabile, ovvero $\rho_{AB} = \rho_{AB}(0) = \rho_A \otimes \rho_B$.
- Il sistema B si può preparare in uno stato puro, quindi $\rho_B = \sum_i p_i \left|i\right\rangle \left\langle i\right|$ contiene un solo termine con probabilità 1 per un'opportuna scelta della base. Questo formalmente si può giustificare con il fatto che è sempre possibile trovare un sistema C contenente B tale che la traccia parziale su $C \setminus B$ di ρ_C dia ρ_B e lo stato di C sia puro.

$$\Rightarrow \rho_A(t) = \sum_{ij}^{\dim(\mathcal{H}_B)} \left\langle j\right| [U(t)(\rho_A \otimes p_i \left|i\right\rangle \left\langle i\right|)U^\dagger(t)] \left|j\right\rangle = \sum_{ij} p_i \left\langle j\right| U(t) \left|i\right\rangle \rho_A \left\langle i\right| U^\dagger(t) \left|j\right\rangle =$$
$$\overset{(a)}{=} \sum_j E_j(t)\rho_A E_j^\dagger(t)$$

Dove in (a) si è utilizzata la seconda assunzione che permette di passare alla somma sul solo indice j e si è rinominato $\left\langle j\right| U(t) \left|i\right\rangle = E_j(t)$ con i lo stato puro di B. Notiamo che l'evoluzione ottenuta è una somma di diverse singole "evoluzioni" e che queste in generale non sono unitarie, infatti vale

$$\sum_j E_j^\dagger E_j = \left\langle i\right| U^\dagger \Big(\sum_j \left|j\right\rangle \left\langle j\right|\Big) U \left|i\right\rangle = \mathbb{1}_A$$

Operatori che soddisfano questa relazione sono detti operatori di Kraus e l'evoluzione descritta in termini di tali operatori è detta rappresentazione di Kraus. Un'evoluzione non unitaria modifica la matrice densità ridotta in modo che per l'evoluta temporale in generale non valga $\rho^2 = \rho$: lo stato diventa misto. Nelle prossime sezioni ci occuperemo di mettere in relazione l'evoluzione di un sistema aperto con il concetto di misura generalizzata e con lo spostamento dell'informazione.

Capitolo 2

Eventi e Misure

Definiamo ora il concetto di evento e il ruolo che esso ha nella descrizione quantistica dei fenomeni fisici in un'ottica compatibile con l'approccio ETH ripercorrendo il ragionamento proposto in [7]. La teoria ci permette di predire la probabilità di trovare un certo risultato compiendo una misura. Tale predizione è fatta sulla base dell'informazione a disposizione di chi svolge la misura riguardo allo stato del sistema in esame, ovvero la conoscenza del passato di esso. Un evento è un punto nello spazio-tempo cui è associato un fenomeno fisico, ma la teoria, secondo CI, non dà informazioni sulla realtà dell'evento. Allorché si compia una misura, e dunque si instauri un fenomeno fisico di interazione tra il sistema studiato e il sistema di misura, essa fornisce informazioni, contenute nello stato, riguardo alla possibilità che un evento (l'interazione tra i due sistemi) si realizzi. In particolare una misura implica sempre un'interazione la quale identifica, approssimativamente, un punto dello spazio-tempo. Perché un evento passi dall'essere potenziale ad essere un fatto occorre che vi sia un'irreversibilità a livello fondamentale. O, alternativamente, possiamo assumere il concetto di evento come fondamentale e, una volta unito all'indeterminismo, otteniamo uno scenario in cui gli eventi passati e i loro nessi causali costituiscono lo stato del sistema da cui si dipanano tutti gli eventi potenziali successivi (pittoricamente come una sorta di albero), e l'evoluzione, ovvero il passaggio di un evento da potenziale a fattuale, avviene in maniera spontanea e stocastica. Consideriamo per esempio una lastra fotografica con cui misuriamo la posizione di una particella in un determinato istante: la probabilità che l'evento di interazione della particella con la lastra non si verifichi non è trascurabile, quindi l'evento si realizza a partire da un certo numero di possibilità e ciò accade in modo spontaneo e irreversibile. Tale irreversibilità è fondamentale e dipende dalla natura stocastica del processo di selezione degli eventi. Evidenziamo come il tempo, seguendo un approccio di questo tipo, sia associabile all'evolversi degli eventi e quindi possa essere misurato registrando questi ultimi.

2.1 Approccio ETH

Presentiamo ora i concetti fondanti di questo approccio seguendo quanto enunciato in [2,5]. Consideriamo un sistema isolato aperto S con $\mathcal{H}$ lo spazio di Hilbert dei vettori di stato puri di S. Se consideriamo un istante t_0 vorremo esprimere il concetto di evento potenziale rispetto ad un istante $t > t_0$, ovvero un evento che possa verificarsi all'istante t o successivamente ad esso. Lo definiamo nel modo seguente: un evento potenziale è descritto da una famiglia di proiettori ortogonali $\{\pi_\xi, \xi \in \mathcal{X}\}$ che rispettano le proprietà

$$\pi_\xi \cdot \pi_\eta = \delta_{\xi\eta}\pi_\xi \quad \forall \eta, \xi \in \mathcal{X}$$

$$\sum_{\xi \in \mathcal{X}} \pi_\xi = \mathbb{1}.$$

dove $\mathcal{X}$ è l'insieme degli autovalori dell'osservabile la cui misura è descritta dai proiettori che costituiscono l'evento (per semplicità consideriamo spettri discreti). Abbiamo notato nel precedente capitolo che l'evoluzione temporale è descritta dalla visuale di Heisenberg, per cui i proiettori di uno specifico evento potenziale sono dipendenti dal tempo t a cui iniziano a potersi verificare. Se il sistema è autonomo, dato uno specifico evento potenziale, i proiettori che rappresentano tale evento al tempo t e quelli che rappresentano lo stesso evento ad un tempo t' sono coniugati dalla usuale evoluzione unitaria. Tutti i proiettori che rappresentano eventi potenziali che possono avvenire da un tempo t generano una $*$-algebra che denotiamo con $\mathcal{E}_{\geq t}$, ne segue che $\mathcal{E}_{\geq t'} \subseteq \mathcal{E}_{\geq t} \quad \forall t' > t$. Notiamo come già in questa espressione sia contenuto il concetto di perdita di informazione legata agli eventi; per essere più precisi ciò che viene perso è l'accesso all'informazione. Per semplicità assumiamo che tutti gli stati di S fisicamente rilevanti siano rappresentabili con una matrice densità (ricordiamo che nella definizione di sistema isolato aperto abbiamo ammesso l'esistenza di modi emessi verso l'esterno ed eventualmente entangled con S, ma in alcun modo non rilevabili da apparati di misura posti all'interno del sistema stesso).[1] Definiamo poi un algebra che comprenda tutti gli eventi che possano potenzialmente avvenire nel corso di tutta la storia:

$$\mathcal{B}(\mathcal{H}) \supseteq \mathcal{E} := \overline{\bigvee_{t\in\mathbb{R}} \mathcal{E}_{\geq t}}$$

Osserviamo che per fare in modo che una teoria basata su questo concetto di evento porti ad una descrizione del sistema in esame che non richieda l'intervento esterno di un altro ente di qualsiasi tipo è necessario richiedere che il sistema abbia infiniti gradi di libertà di massa nulla. Se così non fosse allora le algebre $\mathcal{E}_{\geq t}$ sarebbero indipendenti dal tempo e, generalmente, coinciderebbero con $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ come nell'approccio usuale: per costruire una teoria della misura si sarebbe dunque costretti ad inserire un sistema esterno ad infiniti gradi di libertà (la teoria della decoerenza per esempio si muove in questa direzione, pur mantenendo, come precisato precedentemente un formalismo adatto a finiti gradi di libertà) o un oggetto classico alla maniera di CI. Allora richiediamo che lo spettro dell'Hamiltoniana non abbia autovalori isolati e sia superiormente illimitato. Questo equivale, in meccanica quantistica relativistica, a richiedere che ci siano modi di massa nulla come per esempio fotoni, i quali hanno uno spettro energetico semi-limitato da 0 a $+\infty$. Possiamo ora esprimere il principio fondamentale di questo approccio, che permette di descrivere un sistema isolato aperto in presenza di eventi e delle relative misure proiettive senza ricorrere ad un intervento esterno, ovvero il "Principio delle Potenzialità Decrescenti" (PDP):

$$\mathcal{E}_{\geq t} \subset \mathcal{E}_{\geq t'} \subset \mathcal{E} \quad \forall t > t'$$

Vorremmo costruire la relazione tra questo concetto astratto di evento, la misura e di conseguenza i valori di aspettazione ed evidenziare la natura fondamentale del concetto di evento rispetto a quello usuale di misura. Definiamo il valore di aspettazione per un operatore $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ in uno stato ω definito dalla matrice di densità Ω su $\mathcal{H}$:

$$\omega(A) := \mathrm{Tr}(\Omega A)$$

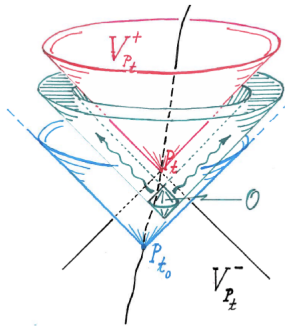
e definiamo la restrizione $\omega_t(\cdot)$ di $\omega(\cdot)$ all'algebra $\mathcal{E}_{\geq t}$. È interessante notare che oltre a PDP c'è un altro meccanismo, analogo a quello visto per il formalismo della decoerenza, grazie al quale lo stato ristretto è in generale misto: infatti, per come abbiamo definito un sistema isolato aperto, la possibilità di avere entanglement con gradi di libertà non accessibili rende possibile un'evoluzione non unitaria. Diciamo che l'evento potenziale descritto da $\{\pi_\xi, \xi \in \mathcal{X}\} \subset \mathcal{E}_{\geq t}$ comincia realmente ad accadere al tempo t se e solo se

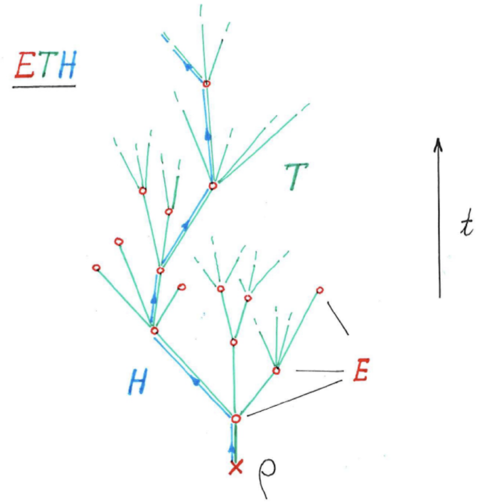
$$\omega_t(A) = \sum_{\xi\in\mathcal{X}} \omega_t(\pi_\xi A \pi_\xi) \quad \forall A \in \mathcal{E}_{\geq t} \tag{2.1}$$

con $\{\pi_\xi, \xi \in \mathcal{X}\}$ non contenuto in $\mathcal{E}_{\geq t'}$ per qualche $t' > t$. Possiamo rendere più esplicita questa espressione nel modo seguente:

$$\sum_{\xi\in\mathcal{X}} \omega_t(\pi_\xi A \pi_\xi) = \sum_{\xi\in\mathcal{X}} \mathrm{Tr}(\Omega \pi_\xi A \pi_\xi) = \sum_{\xi\in\mathcal{X}} \sum_{i\in\mathcal{X}} \langle i| \Big(\sum_{j\in\mathcal{X}} p_j \,|j\rangle \langle j|\xi\rangle \langle\xi| A |\xi\rangle \langle\xi| \Big) |i\rangle = \sum_{\xi\in\mathcal{X}} p_\xi \langle\xi|A|\xi\rangle$$

[1] Assumiamo inoltre che le algebre $\mathcal{E}_{\geq t}$ siano chiuse rispetto alla topologia debole dell'algebra degli operatori limitati su $\mathcal{H}$, $\mathcal{B}(\mathcal{H})$.





Time evolution of a state of S with initial condition $\omega := \rho$
E: “Events”, T: “Tree” of possible future states, H: “History” of actual events/states.

Figura 2.1: Una rappresentazione grafica dei concetti astratti enunciati: a sinistra l'origine fisica della PDP, a destra l'albero ETH degli eventi. Le figure sono state prese da [2] (a sinistra) e [5] (a destra)

Questo mostra che la condizione implica che lo stato sia una sovrapposizione incoerente di stati puri, caratteristica che è un ulteriore indizio del fatto che l'evento segna un punto di diramazione tra le possibili evoluzioni. Commentiamo brevemente il significato di questa espressione. Lo stato ω, quindi non ristretto ad una particolare algebra $\mathcal{E}_{\geq t}$, ma definito su $\mathcal{E}$ è puro e dunque mantiene la sua purezza evolvendo unitariamente. Il fatto che un evento sia legato all'emissione di modi di massa nulla i quali sfuggono all'osservazione porta la restrizione di tale stato a ciò che è effettivamente osservabile da un osservatore da un tempo t, descritto da $\mathcal{E}_{\geq t}$, ad essere mista dalla prospettiva di tale osservatore.

Notiamo che la definizione data di "evento potenziale che comincia realmente" può essere riformulata in maniera equivalente, ma matematicamente più utile alla successiva descrizione del "collasso della funzione d'onda", nel modo seguente.

Data una $*$-algebra $\mathcal{M}$ e uno stato ω su di essa (inteso come l'operatore dato dalla matrice densità) il *centralizer* di ω, $\mathcal{C}_\omega(\mathcal{M})$, è definito come la sotto-algebra di $\mathcal{M}$ generata dagli operatori $Y \in \mathcal{M}$ che rispettano $\omega([X, Y]) = 0 \; \forall X \in \mathcal{M}$. Il *centro* del *centralizer*, $\mathcal{Z}_\omega(\mathcal{M})$, è definito come la sotto-algebra abeliana di $\mathcal{C}_\omega(\mathcal{M})$ composta da tutti gli operatori che commutano con tutti gli operatori di $\mathcal{C}_\omega(\mathcal{M})$. Osserviamo che se $A, B \in \mathcal{C}_\omega(\mathcal{M})$ allora $\forall X \in \mathcal{M}$

$$\omega(ABX) = \omega((BX)A) = \omega(B(XA)) = \omega(XAB)$$

ovvero anche il prodotto $AB \in \mathcal{C}_\omega(\mathcal{M})$. Mostriamo ora che la condizione espressa in (2.1) è equivalente a richiedere che i proiettori π_ξ appartengano al *centralizer* di ω_t. Si ha che $\forall X \in \mathcal{E}_{\geq t}$

$$\omega_t(X) = \sum_{\xi_i, \xi_j \in \mathcal{X}} \omega_t(\pi_{\xi_i} X \pi_{\xi_j}) = \sum_{\xi_i, \xi_j \in \mathcal{X}} \omega_t(X \pi_{\xi_j} \pi_{\xi_i}) = \sum_{\xi_i, \xi_j \in \mathcal{X}} \omega_t(X \pi_{\xi_j} \delta_{ij}) = \sum_{\xi_j \in \mathcal{X}} \omega_t(\pi_{\xi_j} X \pi_{\xi_j})$$

in cui si è fatto uso delle proprietà dei proiettori e delle proprietà di commutazione che si hanno se e solo se i proiettori $\pi_\xi \in \mathcal{C}_{\omega_t}(\mathcal{E}_{\geq t})$.

Dunque ridefiniamo un evento potenziale che comincia realmente ad avvenire al tempo t come un evento potenziale $\{\pi_\xi, \xi \in \mathcal{X}\} \subseteq \mathcal{E}_{\geq t}$ con $\{\pi_\xi, \xi \in \mathcal{X}\}$ non contenuto in $\mathcal{E}_{\geq t'}$ $(t' > t)$ che soddisfa le seguenti condizioni:

- $\mathcal{Z}_{\omega_t}(\mathcal{E}_{\geq t})$ è non banale
- $\{\pi_\xi, \xi \in \mathcal{X}\}$ genera $\mathcal{Z}_{\omega_t}(\mathcal{E}_{\geq t})$

- $\omega_t(\pi_{\xi_j})$ è strettamente positivo con $\xi_j \in \mathcal{X}$, $j = 1, 2, \ldots, n$ per qualche $n \geq 2$

Commentiamo brevemente il significato delle prime due richieste: le osservabili nel "centro" commutano, quindi possono essere misurate nello stesso istante e avranno una decomposizione spettrale comune da cui la richiesta che i proiettori generino il centro. Arriviamo ora al cuore della questione: l'evoluzione temporale degli stati. Sia ω_t lo stato del sistema appena prima dell'istante t. Supponiamo che un evento potenziale $\{\pi_\xi, \xi \in \mathcal{X}\}$ cominci ad accadere al tempo t come definito in precedenza. Formuliamo il seguente postulato:

Lo stato effettivo del sistema immediatamente dopo l'istante t è dato da uno dei seguenti stati:

$$\omega_{t,\xi_*}(\cdot) := [\omega_t(\pi_{\xi_*})]^{-1}\omega(\pi_{\xi_*}(\cdot)\pi_{\xi_*})$$

per qualche $\xi_* \in \mathcal{X}$ e $\omega_t(\pi_{\xi_*}) > 0$. La probabilità di trovare il sistema nello stato ξ_* immediatamente dopo l'istante t è data dalla regola delle probabilità di Born:

$$\text{prob}\{\xi_*, t\} = \omega_t(\pi_{\xi_*})$$

(La proiezione π_{ξ_*} che proietta il sistema sullo stato effettivo è detto evento effettivo).

Emerge quindi un'evoluzione degli stati in cui gli eventi sono punti di diramazione di diverse possibili evoluzioni e le probabilità per i diversi rami sono date dalla regola di Born. Ciò che è possibile prevedere utilizzando questo postulato, ovvero applicandolo allo stato iniziale noto, sono la famiglia di eventi cui appartiene l'evento che accadrà effettivamente e l'intervallo di tempo nel quale tale evento accadrà. Non è possibile prevedere con certezza quale tra gli eventi appartenenti alla famiglia determinata accadrà, ma solo esprimere delle probabilità. Questo accade per osservabili che sono dipendenti dal tempo, ma nel caso in cui non vi sia tale dipendenza l'algebra degli eventi potenziali associati alle osservabili è costante, la chiameremo $\mathcal{E}_\infty$. Dunque per ogni tempo t lo stato può essere espresso come composizione degli autostati relativi allo spettro di $\mathcal{E}_\infty$ e punti di questo spettro sono valori oggettivi delle quantità fisiche rappresentate dalle osservabili in $\mathcal{E}_\infty$. Di nuovo notiamo che questa descrizione è fondamentale e basata sul concetto di evento nel quale risiede l'ontologia e dunque si colloca ad un livello più basso rispetto allo stato, il cui ruolo è quello di dare informazioni sui possibili eventi futuri. Inoltre in questo approccio la misura e registrazione dei conseguenti risultati occupano un ruolo secondario in quanto sono necessari per poter fare previsioni e descrivere i fenomeni fisici, ma non determinano l'attuarsi degli eventi che invece accadono spontaneamente. Come vedremo nella sezione successiva il concetto di evento in un approccio puramente decoerente è invece subordinato a quello di misura.

2.2 Decoerenza

La teoria della decoerenza, come introdotto nel primo capitolo, non aggiunge richieste o assunzioni all'approccio standard (CI), ma introduce una diversa prospettiva riguardo all'osservatore: in CI esso è considerato in maniera classica e la teoria si esime dal descriverlo, il formalismo della decoerenza si propone di descriverne le caratteristiche che lo rendono effettivamente un oggetto classico a partire da una descrizione quantistica. Concentriamo la nostra attenzione su questo aspetto, che ci permetterà di descrivere il processo di misura in questo contesto e di lì giungere al concetto di evento.

L'osservatore è un sistema aperto perciò in generale non evolve in maniera unitaria. In particolare ciò lo rende soggetto al cosiddetto fenomeno di decoerenza per cui lo stato del sistema passa da essere una sovrapposizione coerente di stati puri ad essere una mistura classica (apparentemente, come preciseremo). Un processo di questo tipo presenta una dipendenza dalla scelta della base dunque ci aspettiamo che la decoerenza selezioni una base privilegiata i cui stati siano stabili rispetto al fenomeno della decoerenza stessa. Questo permetterebbe di spiegare l'emergere delle caratteristiche classiche di sistemi macroscopici in generale ed in particolare dell'osservatore (tali stati sono detti *pointer states* per il fatto che "indicano" i possibili valori ottenibili dalla misura di un'osservabile). Evidenziamo il fatto che un sistema che svolge il ruolo di osservatore deve necessariamente essere macroscopico in quanto l'informazione che esso acquisisce nel processo di misura deve poter essere conservata, eventualmente recuperata ed elaborata in maniera stabile e l'unico modo di farlo è che gli stati che codificano l'informazione acquisita siano stabili rispetto alle interazioni con l'ambiente esterno, ovvero alla decoerenza, ed allo stesso tempo possano essere ridondanti, ovvero clonati, fatto proibito dal teorema di "No Cloning" per sovrapposizioni coerenti arbitrarie (questo concetto sarà chiarito successivamente, stiamo di fatto ponendo come richiesta che un osservatore possa essere "consapevole" dell'informazione acquisita, ovvero possa registrarla in maniera "irreversibile" e accedervi nuovamente [12]). Inoltre un sistema macroscopico immerso in un ambiente esterno è inevitabilmente aperto. Presentiamo ora sulle orme di [12] un modello di decoerenza che ci permetta di mostrare il realizzarsi del processo sopra descritto. Notiamo che, considerando un sistema isolato composto dal sistema di interesse S e un apparato di misura A, l'entanglement prodotto dall'evoluzione unitaria determinata dall'Hamiltoniana di interazione tra i due sottosistemi non elimina le sovrapposizioni coerenti, ma le delocalizza di modo che prendendo la traccia parziale della matrice densità che rappresenta lo stato del sistema complessivo si ottenga la matrice densità di uno stato misto. In questo senso quindi lo stato di un sistema aperto appare misto nel momento in cui si trascura la parte rimanente dell'ambiente in cui esso è collocato. Consideriamo il più semplice sistema in cui si può realizzare il fenomeno della decoerenza e della selezione di una base privilegiata stabile rispetto ad esso: tre sistemi su due livelli ciascuno (ovvero, nell'ambito della teoria quantistica dell'informazione, tre q-bit), rispettivamente il sistema S, l'apparato A e l'ambiente E. Supponiamo ora che ci sia una semplice interazione tra S ed A che correla perfettamente gli stati dei due sistemi, ovvero produce il seguente effetto:[2]

$$|S_0\rangle |A_0\rangle \to |S_0\rangle |A_0\rangle \quad |S_1\rangle |A_0\rangle \to |S_1\rangle |A_1\rangle \qquad \text{con } \langle A_0|A_1\rangle = 0$$

dunque l'azione di questa interazione agisce su uno stato generico di S secondo:

$$(\alpha |S_0\rangle + \beta |S_1\rangle) |A_0\rangle \to \alpha |S_0\rangle |A_0\rangle + \beta |S_1\rangle |A_1\rangle = |\Psi\rangle .$$

Tale stato è ancora soggetto ad ambiguità della base scelta che vorremmo riuscire ad eliminare. Infatti vi è la possibilità di cambiare la base di S ed ottenere, raccogliendo gli opportuni termini, ancora uno stato complessivo che sia la somma di due prodotti tensori di stati puri di S e A. Ovvero per ogni stato generico di S nella base $\{|S_0\rangle, |S_1\rangle\}$, $\alpha |S_0\rangle + \beta |S_1\rangle$, possiamo scegliere una nuova base qualsiasi, in linea di principio, nel modo seguente

$$|0\rangle = \alpha |S_0\rangle + \beta |S_1\rangle \quad |1\rangle = \alpha |S_0\rangle - \beta |S_1\rangle \to |\Psi\rangle = \frac{1}{2} |0\rangle (|A_0\rangle + |A_1\rangle) + \frac{1}{2} |1\rangle (|A_0\rangle - |A_1\rangle).$$

Ciò non è più possibile se il terzo sistema, E, interagisce con A "misurandolo". Se consideriamo una interazione uguale alla precedente otteniamo uno stato finale

$$(\alpha |S_0\rangle |A_0\rangle + \beta |S_1\rangle |A_1\rangle) |E_0\rangle \to \alpha |S_0\rangle |A_0\rangle |E_0\rangle + \beta |S_1\rangle |A_1\rangle |E_1\rangle = |\Phi\rangle$$

per cui scegliendo una base, per esempio per S, diversa da quella in cui abbiamo definito l'interazione non è possibile scrivere lo stato come somma di due prodotti tensori di tre termini ciascuno. Ciò che succede è che cambiando base non siamo più in grado di esprimere lo stato in modo che allo stato puro di S corrispondano due stati puri per A ed E rispettivamente. Se in particolare gli stati di base dell'ambiente sono ortogonali si ottiene una matrice ridotta per il sistema composto da S e A che è una mistura classica:

$$\mathrm{Tr}_E(|\Phi\rangle \langle\Phi|) = \alpha^2(|S_0\rangle |A_0\rangle)(\langle S_0| \langle A_0|) + \beta^2(|S_1\rangle |A_1\rangle)(\langle S_1| \langle A_1|).$$

Se gli stati di base di E non fossero ortogonali e quindi correlati a quelli di A nella stessa base in cui è definita l'interazione la matrice densità ridotta potrebbe contenere ulteriori termini non diagonali. Notiamo inoltre che la traccia rispetto all'ambiente ha proprio il ruolo di eliminare i termini non diagonali dalla matrice densità dello stato Ψ che avevamo inizialmente considerato. In questo caso semplice diviene evidente che per lasciare inalterati i *pointer states* di A l'interazione tra A ed E deve essere funzione di $|A_0\rangle \langle A_0|$ e $|A_1\rangle \langle A_1|$, ovvero l'osservabile che ha per autostati $|A_0\rangle$ e $|A_1\rangle$

[2] Utilizziamo la notazione abbreviata $|\rangle |\rangle$ in cui è sottinteso il prodotto tensore

deve commutare con l'Hamiltoniana di interazione. A partire dal ragionamento mostrato nel primo capitolo per l'evoluzione non unitaria con operatori di Kraus e utilizzando l'idea illustrata nel precedente semplice modello è possibile ricavare una descrizione più generale della dinamica dei sistemi aperti ([8]). Dunque la decoerenza e la selezione di *pointer states* stabili rispetto all'interazione con l'ambiente permettono l'emergere di misture statistiche di stati "classici" stabili. Ne segue che misture di questo tipo sono stabili anche rispetto a misure ripetute, nelle quali la possibilità di ottenere solo alcuni stati con probabilità data dalla regola di Born viene spiegata in termini del medesimo meccanismo.

In parziale analogia con quanto osservato per l'approccio ETH notiamo che anche in questo caso il concetto di "centro" ha un significato particolare [9]. Abbiamo visto infatti che la misura di una osservabile è di fatto praticabile solo se gli stati della base di misura sono resistenti alla decoerenza. Potremmo chiamare le osservabili definite in una base di questo tipo "realizzabili", esse costituiscono un sottoinsieme delle generiche osservabili. Si potrebbero chiamare "classiche" le osservabili che formano il centro di esso, nel senso che sono resistenti alla decoerenza e commutano con tutte le altre come accade in meccanica classica.

Alla luce di questi fenomeni è meglio comprensibile anche il motivo che ci spingeva in precedenza a richiedere che l'osservatore fosse un sistema macroscopico e potesse memorizzare informazione in maniera ridondante: esso è costantemente in contatto con l'ambiente e di conseguenza costantemente sottoposto a decoerenza ed a interazioni che in generale potrebbero modificare lo stato delle informazioni registrate se esse non fossero clonate. Clonare stati sconosciuti in maniera esatta è però impossibile, mentre quelli selezionati nel processo di decoerenza sono "classici" ai fini pratici e dunque possono clonati con precisione arbitraria. Questo meccanismo si applica anche all'ambiente il quale essendo costantemente in contatto con i sistemi macroscopici che vi sono immersi li "misura" continuamente e di conseguenza ne memorizza gli stati e quindi la storia. Diversi osservatori allora possono confrontare ciò che hanno registrato osservando una determinata porzione di interesse dell'ambiente trovando risultati simili. Un evento diventa *"relativamente oggettivo"* [12] nel momento in cui viene registrato dall'ambiente e molti osservatori possono trovare evidenze compatibili del suo avvenimento. Quindi una serie ordinata di eventi forma la storia e il modo in cui ci appare è determinato da quanto le osservabili cui abbiamo accesso sono resistenti ai processi di decoerenza e selezione.

Capitolo 3

Perdita di Informazione ed Entropia

L'interpretazione di Copenaghen della meccanica quantistica, attraverso il postulato di proiezione, introduce nell'atto di misura un peculiare aumento di informazione se intesa in modo classico, l'unica ottenibile da una misura. Lo stato prima della misura proiettiva infatti può essere una sovrapposizione (eventualmente infinita) degli stati della base dell'osservabile di cui si compie la misura, ciascuno di essi "pesato" da un numero complesso contenuto nel cerchio unitario. Notiamo che anche nel caso minimale di un sistema a due livelli (un semplice q-bit) l'informazione classica potenzialmente contenuta in una sovrapposizione arbitraria dei due stati di base è infinita in quanto ciascuno dei coefficienti complessi può avere un numero di cifre significative infinito. Ciò che comunque è interessante considerare, piuttosto che la quantità di informazione classica contenuta in uno stato puro, che è dipendente dalla base scelta, è il fatto che la misura proiettiva aumenta l'informazione relativa all'osservabile misurata contenuta nello stato del sistema osservato rendendola accessibile all'osservatore in forma "classica" ovvero come uno degli stati di base o una mistura classica di essi. Tuttavia ciò rappresenta un problema poiché l'evoluzione di un sistema isolato secondo CI è descritta in maniera unitaria dall'equazione di Schrödinger, anche se all'interno del sistema isolato considerato vi è un apparato di misura. Ma se l'evoluzione è unitaria lo stato mantiene la sua purezza e dunque la condizione di informazione massimale (in questo caso quantistica) ad esso associata. Allora da un lato l'informazione quantistica deve essere conservata nel processo di misura e trasferita dal sistema all'apparato di misura e all'ambiente (o viceversa, dall'ambiente al sistema, a seconda dell'interazione che li accoppia), dall'altro in questo processo ci si aspetta un'irreversibilità di tipo statistico, e quindi classica, dovuta all'impossibilità ai fini pratici di accedere all'informazione quantistica dispersa attraverso misure. Quest'ultimo aspetto dovrebbe giustificare l'apparente guadagno d'informazione classica presente nella misura proiettiva. L'informazione classica infatti può essere registrata e distrutta, ma questi processi sono necessariamente legati a operazioni su sistemi fisici e sono soggetti alle leggi della termodinamica (si tratta di un'ignoranza non fondamentale, ma di tipo entropico), come affermato dal principio di Landauer [1]:

Ogni volta che un bit di informazione viene cancellato, la quantità di energia dissipata nell'ambiente è almeno $k_B T \ln 2$ dove k_B è la costante di Boltzmann e T è la temperatura dell'ambiente circostante. Equivalentemente potremmo dire che l'entropia dell'ambiente aumenta di almeno $k_B \ln 2$.

Va notato che cancellare un bit significa porlo in uno stato fondamentale (scelto arbitrariamente) a partire da uno stato ignoto. Se lo stato precedente del bit cancellato fosse noto allora l'operazione non avrebbe in linea di principio nessun costo energetico ([4]).

3.1 Approccio ETH

Abbiamo visto nel precedente capitolo come seguendo l'approccio ETH il concetto di evento sia considerato fondamentale e sia inscindibilmente legato alla dipendenza dell'algebra degli operatori (nella quale sono rappresentate le osservabili) dal tempo e all'assunzione $\mathcal{E}_{\geq t'} \subseteq \mathcal{E}_{\geq t} \quad \forall t' > t$. Questa assunzione sembra essere valida solo all'interno di teorie che prevedano infiniti gradi di libertà a massa nulla [2, 5] e contiene il concetto di perdita di informazione legata agli eventi, ovvero un'irreversibilità fondamentale dovuta al fatto che gli eventi sono famiglie di proiettori. La relazione infatti prevede che l'algebra formata dagli eventi potenziali con il passare tempo si riduca sempre più. Fisicamente questo corrisponde a richiedere che "l'albero" formato dagli eventi potenziali e i loro nessi causali venga ridotto ad ogni evento selezionando un solo effetto, dunque che un solo proiettore della famiglia costituente l'evento agisca effettivamente. Siccome in corrispondenza di ogni evento lo stato contiene informazione sulla base della quale è possibile determinare quali eventi possono accadere in un determinato intervallo di tempo successivo e la relativa probabilità, la selezione di uno di essi implica la perdita della capacità di accedere alle informazioni di tutti gli altri e delle relative storie conseguenti. Spieghiamo quantitativamente quest'ultima affermazione: la previsione degli eventi che possono accadere ad un certo tempo $t' > t$ conoscendo uno degli stati $\omega_{t,\xi}$ (con $\mathcal{Z}_{\omega_{t,\xi}}(\mathcal{E}_{\geq t})$ generato da $\{\pi_\xi, \xi \in \mathcal{X}\}$, ovvero quest'ultimo è l'evento che comincia al tempo t e π_ξ è l'evento effettivo) è differente da quella che si otterrebbe restringendo ω_t a $\mathcal{E}_{\geq t'}$ ovvero la previsione prodotta senza conoscere l'evento effettivo. In generale le proiezioni che costituiscono queste due famiglie di eventi non commutano. La selezione di un ramo piuttosto che un altro quindi dà origine a storie differenti. Questo può avvenire se tale informazione viene dispersa in infiniti gradi di libertà con cui non è possibile instaurare un'interazione in modo da misurarli e ricavarne informazione: viene introdotta in questo modo una differenza a livello fondamentale tra ciò che è passato e ciò che è futuro. Per capire più in dettaglio da dove deriva la perdita di informazione associata a questo processo stocastico di attualizzazione degli eventi ci affidiamo ad un esempio: supponiamo di avere una Hamiltoniana che fa evolvere il sistema lasciandolo "quasi costante", ovvero che soddisfa $\|e^{iH} - \mathbf{1}\| \ll 1$; vogliamo trovare in che modo l'evoluzione data dalla visuale di Heisenberg (in cui lo stato rimarrebbe costante e non ci sarebbe perdita d'informazione) differisce da quella proposta in questo approccio. Supponiamo di conoscere lo stato all'istante immediatamente precedente a t, ω_t, e che $\{\pi_{\xi,t}, \xi \in \mathcal{X}_t\}$ sia l'evento che comincia al tempo t. Il postulato enunciato nel secondo capitolo ci permette di dire che lo stato immediatamente dopo t sarà dato dà

$$\omega_{t,\xi_*}(\cdot) := [\omega_t(\pi_{t,\xi_*})]^{-1}\omega(\pi_{t,\xi_*}(\cdot)\pi_{t,\xi_*})$$

con probabilità da $\omega_t(\pi_{\xi_*})$ e con π_{ξ_*} l'evento effettivo. Poniamoci ora all'istante $t' = t + 1$ e sia $\{\pi_{\xi,t'}, \xi \in \mathcal{X}\}$ l'evento che comincia a t' sapendo però che a questo istante lo stato è quello trovato in precedenza, ovvero ω_{t,ξ_*}. La scelta fatta per l'Hamiltoniana suggerisce che ci sia un proiettore che lascia lo stato quasi invariato con alta probabilità, ovvero che esista un $\xi_{**} \in \mathcal{X}_{t'}$ tale che

$$\omega_{\xi_*,t}(\pi_{\xi_{**},t'}) \approx 1 \quad \wedge \quad \omega_{\xi_*,t}(\pi_{\xi,t'}) \ll 1 \quad \forall \xi \neq \xi_{**}.$$

La regola di Born quindi ci permette di ricavare lo stato all'istante immediatamente successivo a questo secondo evento:

$$\omega_{t,\xi_*,t',\xi_{**}}(\cdot) := [\omega_{t,\xi_*}(\pi_{t',\xi_{**}})]^{-1}\omega(\pi_{t',\xi_{**}}(\cdot)\pi_{t',\xi_{**}}) \approx \omega_{t,\xi_*}$$

che è molto vicino allo stato che si otterrebbe nella visuale di Heisenberg in assenza di eventi successivi al tempo t. Gli eventi sono descritti da proiettori che, per la loro natura non unitaria e quindi irreversibile, producono una perdita di accesso all'informazione. La differenza risiede perciò nell'adottare una descrizione stocastica a livello fondamentale che però tenderà, con probabilità alta, a riprodurre risultati simili a quelli standard per cui la perdita di informazione sarà difficile da evidenziare. In questo caso assumere che lo stato utilizzato nella visuale di Heisenberg sia costante è una buona approssimazione. Tuttavia di rado capiterà, per ragioni stocastiche, che un evento modifichi molto lo stato ed allora la perdita di informazione sarà evidente e si otterrà quella che secondo CI è una misura.

3.2 Decoerenza

Abbiamo già notato nel corso delle sezioni precedenti che la teoria della decoerenza non rinunci ad una descrizione unitaria dei sistemi isolati. Dunque non introduce un irreversibilità di tipo fondamentale quale quella presente nell'approccio ETH. Tuttavia si propone di spiegare l'evoluzione di sistemi aperti, che in generale possono essere inizialmente puri, in stati "localmente misti" sfruttando la dislocazione della funzione d'onda (in cui è contenuta l'informazione) dovuta all'entanglement. Questo ha due conseguenze su cui vorremmo concentrare l'attenzione: la prima è la possibilità di avere registri classici in cui registrare le informazioni ricavate dalle misure in maniera stabile; la seconda è la produzione di entropia legata alle misture statistiche classiche, essa perdura nel sistema "osservato" dall'apparato finché non avviene la misura (che seleziona un solo stato della mistura classica) e la conseguente registrazione in un oggetto classico, la quale comporta dispendio di energia perché il registro in generale deve prima essere azzerato a partire da uno stato ignoto.

Introduciamo ora alcuni concetti utili a quantificare l'informazione classica. Una informazione classica è codificata in un sistema fisico associando ad uno stato (misto) di esso un "carattere" di un "alfabeto" ed è dipendente dalla scelta di quest'ultimo. Se per esempio consideriamo una scatola al cui interno è posta una particella un possibile modo per utilizzare il sistema come memoria è quello di scegliere un alfabeto di due caratteri e associarne uno allo stato "la particella si trova nella metà sinistra" e viceversa per l'altro. È possibile allora sfruttare molti di questi sistemi per comporre messaggi di lunghezza arbitraria. Ciascun carattere dell'alfabeto comparirà all'interno del messaggio con una probabilità. Si può quindi considerare il messaggio come uno stato misto determinato da una distribuzione di probabilità discreta sui caratteri dell'alfabeto. L'entropia di Shannon allora è definita nel modo seguente:

$$H(p_1, \cdot, p_k) = -\sum_{i=1}^{k} p_i \log p_i$$

dove $\{p_1, \cdot, p_k\}$ sono le probabilità relative a ciascuna delle k lettere dell'alfabeto. Questa quantità può essere intesa come una misura dell'ignoranza a priori riguardo ad un determinato messaggio. Per esempio se consideriamo un messaggio composto da due caratteri allora l'entropia di Shannon sarà minima in corrispondenza dei messaggi costanti (per cui una probabilità è massima e l'altra è nulla) e massima per i messaggi in cui entrambi i caratteri si trovano con probabilità $1/2$: si potrebbe dire che nel primo caso ogni carattere non aggiunge alcuna informazione a ciò che già si sa del messaggio, quindi l'entropia è nulla; nel secondo caso invece ogni carattere fornisce nuova informazione e infatti l'ignoranza a priori è massima.

È possibile generalizzare il concetto appena enunciato agli stati misti in meccanica quantistica, ciò è stato fatto da Von Neumann adattando quanto fatto da Shannon. Da tale estensione risulta quindi l'entropia di Von Neumann:

$$S(\rho) = -\operatorname{Tr}(\rho \log \rho)$$

che di fatto è l'entropia di Shannon che ha per argomenti gli autovalori di ρ. La traccia è indipendente dalla base scelta quindi possiamo (essendo ρ hermitiana) scegliere la base in cui ρ è diagonale e si ottiene quanto affermato. Più in generale l'entropia di Von Neumann è invariante per trasformazioni unitarie. Notiamo poi che vale $S \geq 0$, in accordo con la definizione della meccanica statistica, perché $0 \leq \lambda_i \leq 1$ con λ_i gli autovalori di ρ. Se inoltre lo spazio di Hilbert $\mathcal{H}$ del sistema è finito-dimensionale risulta anche limitata: in questo caso possiamo sfruttare il fatto che l'entropia di Shannon è massima quanto tutti i caratteri di un alfabeto N-dimensionale compaiono con probabilità $1/N$ e quindi, per analogia, l'entropia di Von Neumann è massima quando tutti gli autovalori sono pari a $1/N$ con $\dim \mathcal{H} = N$ ovvero quando si valuta l'entropia di uno stato massimamente misto. In ultimo osserviamo che se lo stato è puro l'entropia è nulla. Applichiamo ora tutto ciò al fenomeno della decoerenza considerando un sistema S che viene misurato da un apparato A (monitorato a sua volta dall'ambiente) ad un certo istante t assumendo che prima di questo istante S sia isolato e lo stato complessivo sia separabile. Per effetto dell'entanglement la matrice densità ridotta del sistema aperto S sarà mista e, come osservato nel capitolo precedente, sarà diagonale rispetto alla base di misura dell'osservabile in esame (si assume che il tempo di decoerenza sia molto breve e che quindi i termini non diagonali scompaiano rapidamente). Essa si troverà ad essere in uno stato misto per cui si avrà un aumento di entropia. In seguito alla misura lo stato del sistema torna ad essere puro e la sua entropia nulla, ma la registrazione del risultato in una memoria classica porta inevitabilmente ad un aumento di entropia secondo il principio di Landauer. Il fatto che questo processo sia irreversibile a causa dell'enorme dimensione dell'ambiente conclude il ragionamento, per cui abbiamo spiegato in che modo l'informazione classica fluisca dal sistema verso l'apparato e l'ambiente.

È interessante notare che, seguendo questo approccio, da un punto di vista quantistico l'entropia globale dell'universo è costante e nulla e attraverso il fenomeno della decoerenza, e perciò osservando l'universo dall'interno, emerga la descrizione classica che include l'aumento dell'entropia per effetto dell'acquisizione dell'informazione e la conseguente distinzione tra passato e futuro in maniera *relativamente oggettiva* sulla base degli eventi, come discusso nel capitolo precedente.

3.3 Conclusioni

Il confronto proposto evidenzia diversi aspetti dei due approcci ai fondamenti della meccanica quantistica, alcuni contrapposti, altri simili. La prima differenza è data dal fatto che la teoria della decoerenza, pur spiegando l'emergere del mondo classico a partire dai fenomeni quantistici soggiacenti, in ultima analisi non è in grado di risolvere il problema della misura. Mentre CI, attraverso la misura proiettiva, introduce una demarcazione tra il mondo quantistico e il mondo classico e un irriducibile indeterminismo nella previsione dei risultati delle misure, la decoerenza produce una descrizione consistente di come emergano i diversi possibili risultati di una misura, con le rispettive probabilità, senza invocare oggetti classici. Tuttavia non spiega in che modo venga selezionato un unico risultato tra tutti i possibili. L'approccio ETH invece risolve il problema della misura e si libera della necessità di un intervento esterno in tale processo fondando sulla spontaneità del processo di attualizzazione degli eventi e sulla natura probabilistica di quest'ultimo.

A questo si lega la seconda differenza, ovvero la diversa ontologia nei due approcci. L'approccio decoerente, per l'appunto, pone l'ontologia ancora nello stato e ne considera l'evoluzione unitaria. Sebbene la restrizione mediante la traccia parziale introduca una fenomenologia apparentemente probabilistica la teoria è in linea di principio globalmente deterministica. Il fatto che l'ambiente sia molto più grande di qualsiasi altro sistema e che monitori costantemente i sistemi macroscopici che vi sono immersi fa sì che diversi osservatori condividano stati resistenti alla decoerenza verso l'ambiente. Un ulteriore effetto del continuo contatto con l'ambiente è la registrazione ridondante di informazione in esso. Emerge così una realtà classica macroscopica composta da eventi *relativamente oggettivi* i quali sono quindi necessariamente dipendenti dalla resistenza alla decoerenza degli stati di base delle osservabili che li caratterizzano. Nell'approccio ETH, invece, l'ontologia è posta nel concetto di evento i cui effetti sono squisitamente stocastici. Lo stato diventa quindi uno strumento che porta informazione sui possibili eventi successivi a un dato momento, e la sua evoluzione, dettata dal realizzarsi degli eventi, rimane stocastica. Come conseguenza le osservabili assumono un valore "oggettivo" solo in corrispondenza di un evento.

Un'ultima differenza tra i due approcci, che discende dalle precedenti, risiede nel diversa trattazione dell'irreversibilità e di conseguenza della direzione del tempo. Da quanto detto è evidente che nel caso della decoerenza non vi è una direzione preferenziale nel tempo a livello fondamentale, e la percezione dell'esistenza di una tale differenza è ancora una volta un fenomeno emergente dovuto all'entropia; mentre nel caso di ETH viene introdotta una irreversibilità a livello fondamentale che distingue chiaramente ciò che è passato, ovvero gli eventi che sono accaduti, da ciò che è futuro, ovvero eventi che possono potenzialmente accadere.

Nel considerare queste differenze notiamo che alla base di esse ci sono il concetto di sistema isolato aperto e l'esistenza di infiniti modi di massa nulla.

Infine ciò che accomuna le due teorie è il fatto che l'approccio ETH contiene i meccanismi della decoerenza, in parte nella loro versione originale, in cui il concetto fondamentale è la diffusione della funzione d'onda per mezzo dell'entanglement, e in parte in un modo con risultati simili, ma radici differenti: PDP, enunciato nel secondo capitolo, implica che la restrizione di uno stato ad un algebra relativa a un tempo successivo possa essere (genuinamente) misto.

Bibliografia

[1] G. Benenti, G. Casati, G. Strini, *Principles of Computation and Information*, World Scientific, 2005

[2] P. Blanchard, J. Fröhlich, B. Schubnel, *A "Garden of Forking Paths" - the Quantum Mechanics of Histories of Events*, arXiv:1603.09664v2, 2016

[3] J.Faupin, J. Fröhlich, B. Schubnel, *On the probabilistic nature of quantum mechanics and the notion of closed systems*, Ann. Henri Poincaré 17, 689–731, 2016
arXiv:1407.2965v2

[4] R.P.Feynman, *Feynman Lectures on Computation*, Addison-Wesley, 137-150, 1996

[5] J. Fröhlich, *A Brief Review of the "ETH-Approach to Quantum Mechanics"*, arXiv:1905.06603v2, 2019
to appear in "Frontiers in Analysis and Probability", Springer-Verlag, 2020

[6] J. Fröhlich, B. Schubnel, *Do We Understand Quantum Mechanics - Finally?*, arXiv:1203.3678, 2012

[7] R. Haag, *Fundamental Irreversibility and the Concept of Event*, Commun. Math. Phys. 132, 245-251 (1990)

[8] E. Turetta, *La Decoerenza in Meccanica Quantistica*, tesi.cab.unipd.it/63380

[9] H.D. Zeh, *Roots and Fruits in Decoherence*, Progress in Mathematical Physics, vol 48. Birkhäuser Basel, 151-175, 2006
arXiv:quant-ph/0512078

[10] H.D. Zeh, *The Meaning of Decoherence*, Lect.Notes Phys. 538, 19-42, 2000
arXiv:quant-ph/9905004

[11] W.H. Zurek, *Decoherence, chaos, quantum-classical correspondence, and the algorithmic arrow of time*, Physica Scripta, T76, 1998
arXiv:quant-ph/9802054

[12] W.H. Zurek, *Decoherence, einselection, and the quantum origins of the classical*, Rev. Mod. Phys. 75, 715, 2003
arXiv:quant-ph/0105127