



UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI
DI PADOVA



Dipartimento di Ingegneria Industriale

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria dell'energia Elettrica

TESI DI LAUREA MAGISTRALE IN
INGEGNERIA DELL'ENERGIA ELETTRICA

Applicazione del metodo PEEC per la valutazione delle perdite addizionali in avvolgimenti ad alta frequenza

RELATORE: Prof. Mauro Andriollo

LAUREANDO: Marco Fornasini

ANNO ACCADEMICO 2018-19



Università degli Studi di Padova

DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA INDUSTRIALE
Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria dell'Energia Elettrica

**Applicazione del metodo PEEC per la valutazione
delle perdite addizionali in avvolgimenti
ad alta frequenza**

Relatore:
Prof. Mauro Andriollo

Candidato:
Marco Fornasini

*A Giada che mi ha
sostenuto in questi anni.
Ai miei genitori che hanno
reso possibile tutto ciò.
Alla mia nonna che ha creduto
incondizionatamente in me.*

Sommario

L'obiettivo del presente lavoro consiste nell'andare a determinare le perdite addizionali per effetto pelle ed effetto di prossimità in diverse configurazioni di conduttori interessati da grandezze elettriche in regime sinusoidale. Ciò è stato ottenuto tramite l'applicazione del metodo PEEC (Partial Element Equivalent Circuit), metodo numerico basato su una formulazione integrale delle equazioni di Maxwell che permette di fornire un'interpretazione del sistema da risolvere in termini di parametri circuitali equivalenti.

Sono stati sviluppati dei codici numerici che implementano tale metodo per diverse tipologie di geometrie, ottenendo come risultato il coefficiente maggiorativo delle perdite. I diversi risultati così ottenuti, presentati nella seconda metà del lavoro, sono stati confrontati con quelli derivati da una analisi agli elementi finiti (FEM) effettuata sulla stessa geometria. Particolare attenzione è stata prestata all'individuazione della discretizzazione ottimale in modo che le dimensioni del sistema ad essa associato siano le minori possibili contenendo dove possibile l'onere computazionale.

In definitiva è stato determinato un metodo che permetta la valutazione delle perdite addizionali, che può essere impiegato assieme ai software di progettazione per tenere conto delle perdite addizionali ed ottenere rendimenti e prestazioni del componente più vicini a quelli reali.

Abstract

The aim of this work consist in the determination of the additional losses due to the so called "skin effect" and "proximity effect" in many conductor's configurations in a sinusoidal steady state. In order to do so the PEEC method (Partial Element Equivalent Circuit) had been used. It is based on an integral formulation of the Maxwell's equations and gives an equivalent electrical circuit interpretation of the system.

Some numerical codes had been developed which allow to implement this method in many different geometries getting the coefficient of the increasing losses. The results obtained this way, presented in the second half of the thesis, had been confronted with the ones get from a FEM (Finite Element Method) analysis of the same geometry. Particular attention had been put during the determination of the optimal discretization of the domain, in order to keep the system dimension as small as possible and a low computational weight.

In the end a method able to compute the additional losses had been obtained, which may be used in conjunction of a design software in order to have a better prediction of the component performance and efficiency.

Indice

1	Introduzione	1
2	Formulazione PEEC	5
2.1	Metodo dei residui pesati	8
2.2	Coefficienti di induttanza parziale	10
2.2.1	Interpretazione fisica dei parametri	12
3	Applicazione del metodo	17
3.1	Simmetria 2D planare	18
3.2	Calcolo stabile auto-induttanza	21
3.3	Simmetria 2D radiale	23
3.4	Metodi di risoluzione del circuito	26
3.5	Estensione alla presenza di più conduttori	30
3.6	Estensione applicazione metodo PEEC per geometria 3D	34
4	Analisi skin effect	37
4.1	Conduttore a sezione circolare	37
4.1.1	Simulazione FEM	38
4.1.2	Presentazione dei risultati	40
4.2	Conduttore a sezione rettangolare	41
4.2.1	Analisi piattina	42
4.2.2	Analisi conduttore circuito stampato	45
4.3	Skin effect simmetria assiale	48
4.3.1	Spira a sezione circolare	50
4.3.2	Effetto della distanza dall'asse	53
4.3.3	Affidabilità PEEC per raggi piccoli	54
4.4	Individuazione della discretizzazione ottimale	55
4.4.1	Spessore di penetrazione pari al lato	55
4.4.2	Spessore di penetrazione maggiore del lato	56
4.4.3	Spessore di penetrazione minore del lato	56
5	Analisi proximity effect	59
5.1	Prossimità di due conduttori	59
5.1.1	Simmetria planare	60

5.1.2	Dipendenza dalla distanza e corrente	62
5.2	Induttore per alta frequenza	65
5.3	Proximity effect sub-conduttori	67
5.4	Analisi sulla discretizzazione ottimale	69
5.4.1	Sensibilità risultato rispetto discretizzazione	70
5.4.2	Soluzione per sistemi grandi	72
6	Ulteriori applicazioni	75
6.1	Ottimizzazione perdite	75
6.2	Principio delle immagini	78
7	Conclusioni	85
A	Valutazione campi B e A	87

Capitolo 1

Introduzione

Da tempo è noto che in conduttori interessati da grandezze elettriche alterate la densità di corrente non sempre scorre uniforme sulla sua superficie ma predilige le zone più vicine alla periferia del conduttore. Tale fenomeno pur sembrando innocuo in un primo momento è causa di perdite addizionali: difatti la potenza dissipata per effetto Joule da un conduttore caratterizzato da una resistività $\rho[\Omega m]$, una sezione $S[m^2]$ è pari a

$$P_J = \int_v p dv = \int_v \rho J^2 dv \quad (1.1)$$

con J valore efficace (anche indicato con l'acronimo rms "root mean square") della densità di corrente che lo percorre. Se la sezione e la densità di corrente non variano nel verso della lunghezza del conduttore l'equazione si può riscrivere nella seguente maniera

$$P_J = l \int_S \rho J^2 ds \quad (1.2)$$

che nel caso la densità di corrente sia uniforme (come avviene in regime continuo) sostituendo la seguente relazione

$$J = \frac{I}{S}$$

l'equazione 1.2 diventa la certamente nota

$$P_J = l \rho J^2 \int_S ds = \frac{l \rho I^2 S}{S^2} = \rho \frac{l}{S} I^2 = R I^2 \quad (1.3)$$

avendo definito

$$R = \rho \frac{l}{S}$$

resistenza (con unità di misura Ω) del conduttore. Nel caso di regime alternato (a cui ci si riferirà frequentemente nel corso di questo lavoro con

l'acronimo AC) si ha che la densità di corrente non è più uniforme, pur mantenendo il valore medio costante pari a I . In questa eventualità, potendo scrivere la funzione J come somma della funzione costante $J_{avg} = I/S$ e della funzione $J^* = J - J_{avg}$ con valore medio nullo, si possono effettuare i seguenti passaggi:

$$\begin{aligned} \frac{P_J}{l} &= \int_S \rho J^2 ds = \int_S \rho (J_{avg} + J^*)^2 ds = \\ &= \rho \int_S J_{avg}^2 ds + \rho \int_S J^{*2} ds + \rho 2 \int_S J_{avg} J^* ds \end{aligned} \quad (1.4)$$

Il terzo termine è nullo, essendo J_{avg} costante ed essendo il valore medio su S della J^* pari a zero; il primo termine corrisponde alle perdite che si hanno per una densità di corrente uniforme mentre il termine in mezzo è sicuramente positivo essendo l'integrale su una area non nulla di una funzione positiva. Ne consegue che le perdite possono essere scritte come

$$P_J = R(1 + k)I^2 = R_{AC}I^2 \quad (1.5)$$

dove

$$k = \frac{l\rho \int_S J^{*2} ds}{RI^2} \quad R_{AC} = R(1 + k)$$

definendo così una resistenza in corrente alternata pari al rapporto tra le perdite per effetto Joule nel conduttore ed il quadrato del valore efficace della corrente che complessivamente interessa il conduttore.

L'entità dell'aumento delle perdite dipende dalla frequenza delle grandezze ed è un effetto indesiderato sia perché riduce il rendimento complessivo del componente di cui fanno parte i conduttori e sia perché alle perdite è legato l'aumento di temperatura secondo il bilancio termodinamico e temperature maggiori comportano generalmente prestazioni peggiori come la riduzione dell'ampacity di linee di trasmissione o il deterioramento di componenti isolanti. Risulta dunque di elevato interesse poter tenere conto del coefficiente maggiorativo da applicare alle perdite determinate dalla 1.3 in modo da tenerne conto già in sede di progetto e poterne ridurre l'entità qualora tali perdite abbiano un effetto eccessivamente penalizzante. A tale scopo nel corso degli anni sono state proposte molte equazioni analitiche ([1], [7]) e coefficienti semi-empirici ([32]) che hanno permesso di stimare l'impatto di questo fenomeno, tuttavia risultando impraticabili per geometrie articolate.

Di recente l'analisi di questi fenomeni è possibile tramite la risoluzione numerica delle formulazioni delle equazioni di Maxwell, equazioni che stanno alla base e descrivono i fenomeni elettromagnetici compresi quelli che causano l'aumento delle perdite (chiamati effetto pelle e di prossimità). Tra i più usati c'è indubbiamente il metodo degli elementi finiti (abbreviato con

FEM) che si basa su una formulazione differenziale delle equazioni di Maxwell, la cui utilità nello studio delle perdite addizionali è stato ampiamente confermato ([21], [25], [14]).

Lo scopo di questo lavoro tuttavia consiste nell'applicare un diverso metodo chiamato *Partial Element Equivalent Circuit*, indicato mediante il più comodo acronimo *PEEC*, che si basa su una formulazione integrale delle equazioni di Maxwell. Ci si porrà come sfida quella di implementare tale metodo tramite appositi script nel software MATLAB[®] e di poter ottenere i valori delle perdite addizionali in diverse configurazioni geometriche di conduttori percorsi da una corrente sinusoidale di frequenza arbitraria. I risultati ottenuti saranno quindi confrontati dove possibile con formule ricavate dalla bibliografia ed affiancati dai valori ottenuti tramite simulazioni FEM effettuate con l'ausilio del software COMSOL Multiphysics[®].

Capitolo 2

Formulazione PEEC

Le perdite addizionali sono causate da fenomeni elettromagnetici regolati dalle equazioni di Maxwell. Le versioni integrali di tali equazioni sono state scoperte nel corso del XIX secolo in via sperimentale e da esse sono state ricavate le rispettive relazioni differenziali tramite l'applicazione dei teoremi di Stokes e Gauss.

$$\begin{array}{ll} \textit{Integral form} & \textit{Differential form} \end{array} \quad (2.1a)$$

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\ell = \int_S \left(\mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{A} \quad \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (2.1b)$$

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\ell = -\frac{\partial}{\partial t} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (2.1c)$$

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} = 0 \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (2.1d)$$

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{A} = \int_v \rho_v dv \quad \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_v \quad (2.1e)$$

Ad esse sono associate le relazioni costitutive dello spazio

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} \quad (2.2a)$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \quad (2.2b)$$

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} \quad (2.2c)$$

I termini presenti nelle equazioni di Maxwell e nelle relazioni costitutive sono i seguenti:

\mathbf{E} - Intensità del campo elettrico $\left[\frac{V}{m} \right]$	\mathbf{D} - Intensità campo induzione elettrica $\left[\frac{C}{m^2} \right]$
\mathbf{H} - Intensità del campo magnetico $\left[\frac{A}{m} \right]$	\mathbf{B} - Intensità del campo induzione magnetica $\left[\frac{Wb}{m^2} \right]$
\mathbf{J} - Densità di corrente elettrica $\left[\frac{A}{m^2} \right]$	ρ_v - Densità di volume di carica $\left[\frac{C}{m^3} \right]$
ϵ - Permittività elettrica $\left[\frac{F}{m} \right]$	μ - Permeabilità magnetica $\left[\frac{H}{m} \right]$

Le tecniche numeriche sviluppate negli anni per la risoluzione di problemi elettromagnetici possono essere divise in due gruppi principali, distinti dalla tipologia di formulazione delle equazioni di Maxwell sulla quale si basano.

- I metodi più usati che si basano su una formulazione differenziale sono il metodo alle differenze finite (indicato con l'acronimo FDM) e il metodo degli elementi finiti (FEM). Tali procedure numeriche richiedono la discretizzazione dell'intero dominio definito in base alla struttura che si ha intenzione di simulare, fornendo la soluzione in termini di variabili di campo.
- I metodi che si basano su una formulazione integrale, tra i quali è compreso il metodo PEEC (Partial Equivalent Electrical Circuit), richiedono che unicamente i materiali siano discretizzati riducendo così il numero di variabili in gioco e forniscono i risultati in termini di variabili circuitali come correnti e tensioni che interessano i componenti del sistema simulato.

Per entrambe le categorie è necessario un adeguato post-processing in modo da poter ricavare i risultati d'interesse. Nei passaggi seguenti ci si riferirà sempre alla versione differenziale delle equazioni di Maxwell dalle quali si ricaverà la formulazione alla base del metodo PEEC.

Dalla 2.1d è possibile esprimere il campo induzione magnetica come il rotore di un altro campo chiamato potenziale vettore magnetico

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (2.3)$$

Grazie all'identità $\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{B} = 0$ l'esistenza di tale campo implica che il campo \mathbf{B} sia solenoidale rispettando dunque la 2.1d. Sostituendo nella 2.1c l'induzione magnetica con il potenziale vettore si ottiene

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial(\nabla \times \mathbf{A})}{\partial t} = 0 \Rightarrow \nabla \times \left(\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = 0 \quad (2.4)$$

Si può quindi definire basandosi sulla 2.4 un potenziale scalare del campo vettoriale

$$\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$$

in modo tale che si abbia

$$\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\nabla \Phi \Rightarrow \mathbf{E} = -\nabla \Phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad (2.5)$$

Nella 2.1c si sostituiscono le 2.2 e successivamente le 2.3 e 2.5 ottenendo

$$\nabla \times \frac{\mathbf{B}}{\mu} = \frac{\partial \epsilon \mathbf{E}}{\partial t} + \mathbf{J} \Rightarrow \nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \mu \epsilon \frac{\partial}{\partial t} \left(-\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla \Phi \right) - \mu \mathbf{J} \quad (2.6)$$

dalla quale sfruttando l'identità

$$\nabla \times \nabla \mathbf{A} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}$$

ed imponendo al campo potenziale vettore il seguente gauge di Lorenz (necessario essendo tale campo definito a meno del gradiente di un campo scalare)

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = -\mu\epsilon \frac{\partial \Phi}{\partial t}$$

si ricava l'equazione di Helmholtz per il potenziale vettore magnetico [2]

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu \mathbf{J} \quad (2.7)$$

In maniera analoga è possibile ricavare l'equazione per il potenziale elettrico scalare

$$\nabla^2 \Phi - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon} \quad (2.8)$$

In un dominio omogeneo l'equazione 2.7 ha una soluzione in forma chiusa per il vettore potenziale magnetico dovuto da un campo \mathbf{J} in un volume V' , [2]

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu}{4\pi} \int_{V'} \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}', t')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' \quad (2.9)$$

Allo stesso modo la soluzione della 2.8 fornisce il campo potenziale elettrico scalare $\Phi(\mathbf{r}, t)$ generato dalla distribuzione della carica $\rho(\mathbf{r}', t')$ in un volume V' :

$$\Phi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_{V'} \frac{\rho(\mathbf{r}', t')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' \quad (2.10)$$

Nelle equazioni 2.9 e 2.10 t' indica il tempo al quale le funzioni \mathbf{J} e ρ sono da considerarsi le sorgenti dei due potenziali. Esso differisce dal tempo t in base alla velocità della luce c nel dominio secondo la relazione

$$t = t' - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c}$$

Tale ritardo è trascurabile se le dimensioni fisiche massime del sistema analizzato sono molto minori della lunghezza d'onda λ alla frequenza analizzata, condizione che sarà sempre verificata per i sistemi indagati in questo lavoro.

In una regione conduttrice del dominio tra campo elettrico e densità di corrente intercorre la relazione

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{J}}{\sigma}$$

che inserita nella 2.5 assieme alla 2.9 porta a scrivere

$$\mathbf{E}_0(\mathbf{r}, t) = \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}, t)}{\sigma} + \frac{\partial}{\partial t} \int_{V'} \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}, t')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' + \nabla \Phi(\mathbf{r}, t) \quad (2.11)$$

nota come equazione integrale del campo elettrico (EFIE) valida per un punto \mathbf{r} in una regione di spazio interna ad un conduttore. Il termine $\mathbf{E}_0(\mathbf{r}, t')$ corrisponde all'eventuale presenza di un campo elettrico esterno nel punto. Si può riscrivere l'equazione 2.11 nel dominio di Laplace come

$$\mathbf{E}_0(\mathbf{r}, s) = \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}, s)}{\sigma} + \frac{s\mu}{4\pi} \int_{V'} \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}, s)e^{-s\tau}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' + \nabla\Phi(\mathbf{r}, s) \quad (2.12)$$

con $\tau = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c$ e s che indica la variabile complessa di Laplace. Nei casi presi in esame durante lo svolgimento di questo lavoro non si avranno campi elettrici esterni e gli andamenti delle grandezze sono funzioni sinusoidali di una certa pulsazione ω . L'equazione 2.12 è dunque calcolata per $s = j\omega$ e diventa

$$0 = \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}, \omega)}{\sigma} + \frac{j\omega\mu}{4\pi} \int_{V'} \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}, \omega)e^{-j\omega\tau}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' + \nabla\Phi(\mathbf{r}, \omega) \quad (2.13)$$

2.1 Metodo dei residui pesati

A questo punto la soluzione della EFIE è effettuata numericamente mediante la suddivisione del dominio in un numero N_v di elementi. Il campo incognita, in questo caso \mathbf{J} nelle varie regioni conduttrici, soluzione della EFIE viene dunque espresso tramite sommatoria di base functions

$$\mathbf{J} = \sum_{n=1}^{N_v} I_n \mathbf{b}_n$$

Il metodo dei residui pesati non permette di ottenere l'esatta soluzione del problema, ma va a determinare la serie di N_v coefficienti che comporta il minimo residuo inteso come la minima differenza tra la funzione incognita esatta e la sua approssimazione ottenuta dalla somma delle base functions. Applicando il metodo di Galerkin ([27]) alla 2.13 nella quale il campo \mathbf{J} è sostituito dalla sommatoria delle base functions che lo approssimano si ottiene il seguente sistema di N_v equazioni

$$\int_{V_i} \left[\frac{\sum_{n=1}^{N_v} \mathbf{b}_n(\mathbf{r}) I_n(\omega)}{\sigma} + \frac{j\omega\mu}{4\pi} \left(\sum_{n=1}^{N_v} \int_{V_n} \mathbf{b}_n(\mathbf{r}_n) I_n(\omega) \frac{e^{-j\omega\tau}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_n|} dV_n \right) + \nabla\Phi(\mathbf{r}, \omega) \right] \cdot \mathbf{w}_i(\mathbf{r}) dV_i = 0 \quad \text{per } i = 1 \dots N_v \quad (2.14)$$

con $\mathbf{w}_i(\mathbf{r})$ funzione peso scelta uguale alle $\mathbf{b}_n(\mathbf{r})$ funzioni base che approssimano il campo soluzione. Le regioni di materiale conduttore presenti nelle diverse configurazioni geometriche che saranno analizzate nel corso di questa tesi saranno discretizzate in genere in un numero N_v di elementi parallelepipedi (discretizzazione indicata spesso come "Manhattan-type"), ciascuno dei

quali sarà caratterizzato da dimensioni piccole rispetto la lunghezza d'onda relativa alla più alta frequenza d'interesse.

Indicate con l_n e a_n rispettivamente la lunghezza e l'area dell'elemento V_n , per le basis functions $\mathbf{b}_n(\mathbf{r})$ (e di conseguenza anche le funzioni peso) si scelgono delle funzioni a scalino che saranno definite come indicato nella 2.15

$$\mathbf{b}_n(\mathbf{r}) = \begin{cases} \frac{\hat{\mathbf{u}}_n}{a_n} & \text{se } \mathbf{r} \in V_n \\ 0 & \text{altrove} \end{cases} \quad (2.15)$$

dove $\hat{\mathbf{u}}_n$ è il versore che indica la direzione della corrente nel volume V_n . Definendo così le basis functions, i coefficienti I_n corrispondono alle correnti complessive che interessano ciascun elemento conduttore. A questo punto sostituendo nella 2.14 le basis function appena definite e ponendo le weight functions pari ad esse si ottiene il seguente sistema di equazioni:

$$\begin{aligned} \frac{l_i I_i(\omega)}{\sigma a_i} + \frac{j\omega\mu}{4\pi} \sum_{n=1}^{N_v} \frac{1}{a_i a_n} \int_{V_i} \int_{V_n} \hat{\mathbf{u}}_i \cdot \hat{\mathbf{u}}_n \frac{I_n(\omega)}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_n|} dV_n dV_i + \\ + \Phi_{2i}(\omega) - \Phi_{1i}(\omega) = 0 \quad \text{per } i = 1 \dots N_v \end{aligned} \quad (2.16)$$

dove il primo termine deriva dal fatto che il termine

$$\int_{V_i} \frac{\sum_{n=1}^{N_v} \mathbf{b}_n(\mathbf{r}) I_n(\omega)}{\sigma} \cdot \mathbf{b}_i dV_i \quad \text{per } i = 1 \dots N_v$$

della 2.14 è diverso da zero solo per $i = n$ a causa del prodotto scalare tra le due base functions. Il terzo termine invece è il risultato dei seguenti passaggi:

$$\int_{V_i} \frac{1}{a_i} \hat{\mathbf{u}}_i \cdot \nabla \Phi(\mathbf{r}, \omega) dV_i = \frac{1}{a_i} \int_{a_i} \left(\int_{l_i} \hat{\mathbf{u}}_i \cdot \nabla \Phi(\mathbf{r}, \omega) dl_i \right) da_i = \Phi_{2i}(\omega) - \Phi_{1i}(\omega)$$

con $\Phi_{2i}(\omega)$ e $\Phi_{1i}(\omega)$ che indicano il valore del potenziale elettrico ai due estremi del volume i -esimo lungo la direzione indicata dal versore $\hat{\mathbf{u}}_i$.

Ciascuna equazione della 2.16 può essere scritta nella seguente forma più compatta:

$$\Phi_{1i} - \Phi_{2i} = R_i I_i + j\omega \sum_{n=1}^{N_v} L_{p,i-n} I_n \quad (2.17)$$

con

$$R_i = \frac{l_i}{\sigma a_i}$$

termine pari alla resistenza dell'elemento i -esimo calcolato tenendo conto della direzione $\hat{\mathbf{u}}_i$ nella quale scorre la corrente, mentre i termini nella sommatoria

$$L_{p,i-n} = \frac{\mu}{4\pi} \frac{1}{a_i a_n} \int_{V_i} \int_{V_n} \frac{\hat{\mathbf{u}}_i \cdot \hat{\mathbf{u}}_n}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_n|} dV_n dV_i$$

sono chiamati induttanze parziali. Se $i = n$ il termine viene chiamato auto-induttanza parziale mentre se $i \neq n$ il termine viene indicato come mutua-induttanza parziale.

La risoluzione del sistema composto dalle N_v equazioni del tipo 2.17 porterà così ad ottenere il campo \mathbf{J} discretizzato nel dominio e rappresentato mediante le diverse base functions. Una volta ottenuto se si è interessati agli andamenti dei diversi campi presenti nelle equazioni di Maxwell sarà necessario un opportuno post-processing (Appendice A). Essendo l'obiettivo di questo lavoro la valutazione delle perdite addizionali, la determinazione della densità di corrente nei vari domini conduttori è sufficiente.

2.2 Coefficienti di induttanza parziale

I coefficienti di auto-induttanza parziale e mutua-induttanza parziale, ampiamente trattati in [22] e [27], sono concetti chiave per l'applicazione del metodo PEEC ed è dunque opportuno presentarli sia dal punto di vista matematico che fornirne una rappresentazione fisica.

L'induttanza relativa ad un percorso chiuso interessato da corrente è definita come

$$L = \frac{\Psi}{I} \quad (2.18)$$

cioè pari al rapporto tra il flusso concatenato dal percorso e la corrente che lo produce. Esso può essere definito mediante il potenziale vettore magnetico \mathbf{A} : dalla definizione di flusso applicando il teorema di Stokes e dalla definizione 2.3 si ha

$$L = \frac{\int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s}}{I} = \frac{\int_S \nabla \times \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s}}{I} = \frac{\oint_c \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}}{I} \quad (2.19)$$

con $c = \partial S$ contorno chiuso relativo alla superficie S come rappresentato nella figura 2.1. Scrivendo la definizione di induttanza in questi termini è possibile calcolarla mediante un integrale di linea integrando la componente del potenziale vettore tangente al percorso chiuso interessato dalla corrente I . Il percorso chiuso c può essere scomposto in un numero arbitrario n di segmenti c_j tali che $c = \sum_{j=1}^n c_j$ permettendo di scomporre di conseguenza l'integrale nel seguente modo

$$L = \frac{\oint_c \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}}{I} = \frac{\int_{c_1} \mathbf{A}_1 \cdot d\mathbf{l}}{I} + \frac{\int_{c_2} \mathbf{A}_2 \cdot d\mathbf{l}}{I} + \dots + \frac{\int_{c_n} \mathbf{A}_n \cdot d\mathbf{l}}{I} \quad (2.20)$$

nel quale i vari \mathbf{A}_j sono gli andamenti del potenziale vettore totali dovuti sia al segmento c_j che a tutti gli altri segmenti che formano il percorso chiuso c . L'equazione 2.20 ci permette così di definire l'induttanza totale come somma dei diversi termini

$$L_j = \int_{c_j} \mathbf{A}_j \cdot d\mathbf{l} \quad (2.21)$$

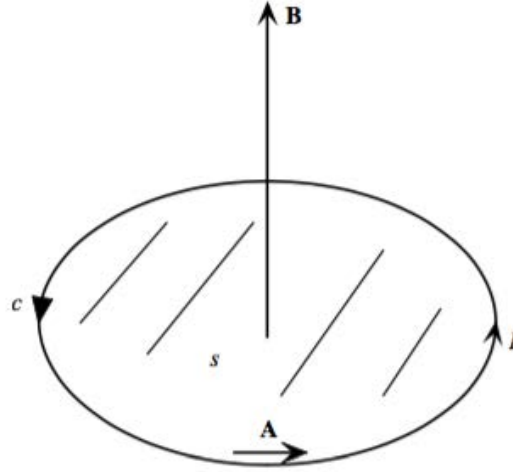


Figura 2.1: Rappresentazione grafica della relazione tra la superficie S ed il percorso $c = \partial S$, [22].

associando a ciascun segmento un contributo dell'induttanza del percorso complessivo. Si può così scrivere

$$L = \sum_{j=1}^n L_j \quad (2.22)$$

Si prenda ora a titolo di esempio una spira rettangolare percorsa da una corrente I , essa può essere intuitivamente divisa in quattro segmenti corrispondenti ai suoi quattro lati (figura 2.2).

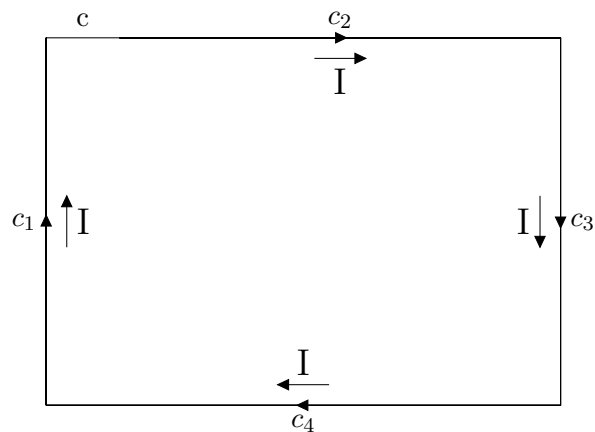


Figura 2.2: Spira rettangolare il cui contorno c è diviso in quattro segmenti.

La componente di induttanza del lato c_1 è

$$L_1 = \frac{\int_{c_1} \mathbf{A}_1 \cdot d\mathbf{l}}{I} \quad (2.23)$$

con \mathbf{A}_1 potenziale vettore dovuto da tutti i segmenti che compongono la spira cioè pari a

$$\mathbf{A}_1 = \mathbf{A}_{c1} + \mathbf{A}_{c2} + \mathbf{A}_{c3} + \mathbf{A}_{c4}$$

potendo così scrivere la 2.23 nel seguente modo:

$$L_1 = \frac{\int_{c_1} \mathbf{A}_{c1} \cdot d\mathbf{l}}{I} + \frac{\int_{c_1} \mathbf{A}_{c2} \cdot d\mathbf{l}}{I} + \frac{\int_{c_1} \mathbf{A}_{c3} \cdot d\mathbf{l}}{I} + \frac{\int_{c_1} \mathbf{A}_{c4} \cdot d\mathbf{l}}{I} \quad (2.24)$$

Il primo termine della somma viene chiamato *auto-induttanza parziale* del lato c_1

$$L_{p1} = \frac{\int_{c_1} \mathbf{A}_{c1} \cdot d\mathbf{l}}{I_{c1}} \quad (2.25)$$

ed è pari all'integrale lungo se stesso della componente tangente del potenziale vettore da esso prodotto. Gli altri termini sono indicati con il termine *mutua-induttanza parziale* tra il lato c_1 e gli altri tre segmenti e sono definiti come

$$M_{p1-j} = \frac{\int_{c_1} \mathbf{A}_{cj} \cdot d\mathbf{l}}{I_j} \quad \text{per } j = 2, 3, 4 \quad (2.26)$$

pari cioè al rapporto tra l'integrale lungo c_1 della componente tangente del potenziale vettore dovuto da un altro lato e la corrente di quel lato. La stessa serie di passaggi può essere ripetuta per ogni segmento permettendo così di determinare tutte le auto-induttanze parziali ed i diversi coefficienti di mutuo accoppiamento. Per completezza è opportuno notare che nell'esempio in questione la corrente che interessa i lati è costante pari a I e che, essendo la direzione del potenziale vettore \mathbf{A}_{cj} uguale alla tangente del segmento c_j che lo genera, i coefficienti di accoppiamento M_{p1-2} e M_{p1-4} in questo caso sono nulli essendo i vettori \mathbf{A}_{c2} e \mathbf{A}_{c4} perpendicolari al $d\mathbf{l}_{c1}$.

La rappresentazione in termini di parametri elettrici concentrati della spira 2.2 è presentata nel circuito 2.3

nel quale la tensione V_1 che interessa il conduttore c_1 è pari a

$$V_1 = L_1 \frac{dI}{dt} = L_{p1} \frac{dI}{dt} + M_{p1-2} \frac{dI}{dt} + M_{p1-3} \frac{dI}{dt} + M_{p1-4} \frac{dI}{dt} \quad (2.27)$$

2.2.1 Interpretazione fisica dei parametri

Oltre che alla loro derivazione e definizione matematica in [22] si fornisce una loro interpretazione fisica, utile per una loro più profonda comprensione, che si riporta brevemente in questa sezione.

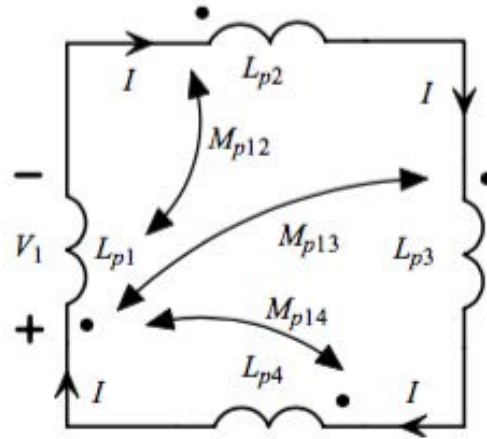


Figura 2.3: Schema circuitale equivalente alla spira rettangolare.

Auto-induttanza parziale Si parte dall'auto-induttanza parziale di un segmento c_i percorso dalla corrente I_i . Si può considerare una superficie infinita contornata da un percorso chiuso c formato dal segmento c_i , da un segmento all'infinito e da due ulteriori lati perpendicolari al lato iniziale (figura 2.4).

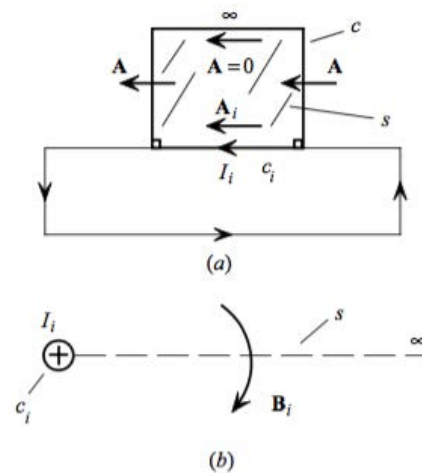


Figura 2.4: Rappresentazione della superficie infinita con $c_i \in \partial S$, [22].

Se si valuta il flusso che interessa questa superficie rispetto la corrente si

ottiene

$$\frac{\Psi_\infty}{I_i} = \frac{\oint_c \mathbf{B}_i \cdot d\mathbf{s}}{I_i} = \frac{\oint_{c_i} \mathbf{A}_i \cdot d\mathbf{l}}{I_i} + \frac{\oint_{c_{left}} \mathbf{A}_i \cdot d\mathbf{l}}{I_i} + \frac{\oint_{c_\infty} \mathbf{A}_i \cdot d\mathbf{l}}{I_i} + \frac{\oint_{c_{right}} \mathbf{A}_i \cdot d\mathbf{l}}{I_i} \quad (2.28)$$

in cui i termini relativi all'integrale nei due lati perpendicolari a c_i sono nulli essendo \mathbf{A}_i parallelo al versore direzione del segmento c_i e dunque il prodotto scalare con $d\mathbf{l}_{right}$ e $d\mathbf{l}_{left}$ è pari a zero. Anche il termine relativo al segmento ad infinito è nullo essendo il modulo del potenziale vettore generato dalla corrente I_i nullo all'infinito. Ne consegue che la 2.28 si riduce ad

$$\frac{\Psi_\infty}{I_i} = \frac{\oint_{c_i} \mathbf{A}_i \cdot d\mathbf{l}}{I_i} = L_{pi} \quad (2.29)$$

ottenendo dunque che il coefficiente di auto-induttanza parziale di un segmento è pari al flusso del campo \mathbf{B} tra esso e l'infinito diviso la corrente che scorre in quel segmento.

Mutua-induttanza parziale Considerati due segmenti c_j e c_i nello spazio, il loro coefficiente di mutua-induttanza parziale è definito nella 2.26. Se si prende in considerazione una superficie infinita delimitata dal segmento c_i , un segmento a lui parallelo a distanza infinita c_∞ e due segmenti ad essi perpendicolari (rappresentata nella figura 2.5, [22])

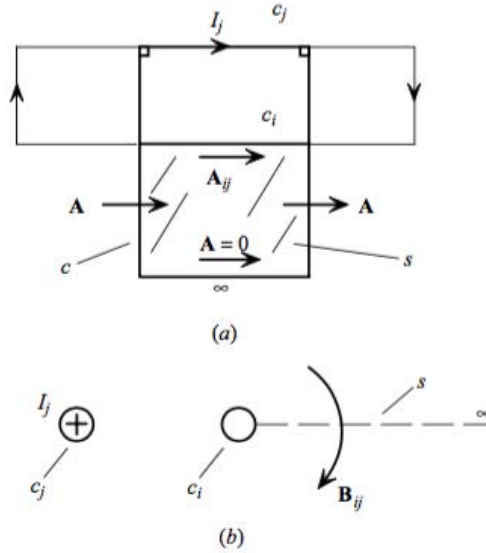


Figura 2.5: Rappresentazione della superficie infinita per l'interpretazione fisica del termine M_{i-j} .

e valutando il rapporto

$$\frac{\Phi_{j\infty}}{I_j} = \frac{\oint_{c_i} \mathbf{A}_j \cdot d\mathbf{l}}{I_j} + \frac{\oint_{c_{left}} \mathbf{A}_j \cdot d\mathbf{l}}{I_j} + \frac{\oint_{c_\infty} \mathbf{A}_j \cdot d\mathbf{l}}{I_j} + \frac{\oint_{c_{right}} \mathbf{A}_j \cdot d\mathbf{l}}{I_j}$$

da considerazioni analoghe a quelle precedentemente effettuate si ottiene il seguente risultato:

$$\frac{\Phi_{j\infty}}{I_j} = \frac{\int_{c_i} \mathbf{A}_j \cdot d\mathbf{l}}{i_j} \quad (2.30)$$

cioè che il coefficiente di mutua-induttanza parziale tra due segmenti è pari al flusso d'induzione magnetica dovuto al primo segmento concatenato dalla superficie delimitata dal secondo e l'infinito diviso la corrente che scorre nel primo segmento. Si può ricavare con analoghi passaggi che si arriva alla stessa conclusione anche se i due segmenti non sono paralleli tra loro.

Capitolo 3

Applicazione del metodo

Dopo aver introdotto la base teorica del metodo PEEC, in questo capitolo verrà presentato il modo in cui si è applicato alla stima delle perdite addizionali. Sarà evidenziata l'interpretazione tramite parametri elettrici concentrati del sistema fisico di conduttori, caratteristica che fornisce molta versatilità al metodo. Saranno prese in considerazione e trattate la simmetria 2D planare e radiale e verrà fornito anche la potenziale estensione ad una geometria 3D pur con vincoli sul tipo di discretizzazione.

Il sistema di equazioni descritte nella 2.16 può essere espresso nella seguente forma matriciale

$$\mathbf{V} = [\mathbf{Z}]\mathbf{I} \quad (3.1)$$

dove

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_{Nv} \end{bmatrix} \quad \mathbf{I} = \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \vdots \\ I_{Nv} \end{bmatrix}$$

sono i vettori contenenti la corrente e la tensione relative a ciascun elemento nel quale è stato discretizzato il conduttore mentre la matrice $[\mathbf{Z}]$ di dimensioni (Nv, Nv) è ottenuta dalla somma

$$[\mathbf{Z}] = [\mathbf{R}] + j\omega[\mathbf{L}] \quad (3.2)$$

con $[\mathbf{R}]$ e $[\mathbf{L}]$ matrici a loro volta quadrate (Nv, Nv) così definite:

$$[\mathbf{R}] = \begin{bmatrix} R_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & R_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & R_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & R_{Nv} \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

$$[\mathbf{L}] = \begin{bmatrix} L_{p1} & M_{p1-2} & M_{p1-3} & \dots & M_{p1-Nv} \\ M_{p2-1} & L_{p2} & M_{p2-3} & \dots & M_{p2-Nv} \\ M_{p3-1} & M_{p3-2} & L_{p3} & \dots & M_{p3-Nv} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ M_{pNv-1} & M_{pNv-2} & M_{pNv-3} & \dots & L_{pNv} \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

L'incognita è il vettore delle correnti $[\mathbf{I}]$ dal quale è possibile ricostruire grazie alle basis function l'andamento a gradini della densità di corrente \mathbf{J} nelle regioni conduttrici. I diversi metodi per la risoluzione del sistema saranno discussi in sezioni seguenti, mentre di seguito si riporta la costruzione della matrice $[\mathbf{Z}]$ per le diverse tipologie di geometrie dei sistemi fisici analizzati.

3.1 Simmetria 2D planare

Inizialmente si farà riferimento per semplicità alla costruzione del sistema 3.1 nel caso di un unico conduttore permettendo dunque l'analisi unicamente dell'effetto pelle. L'estensione alla co-presenza nello spazio di più conduttori e alla valutazione dell'effetto di prossimità congiunto all'effetto pelle sarà trattato nella sezione 3.5 seguente.

Con simmetria planare si intende un sistema di conduttori la cui disposizione nello spazio e caratteristiche geometriche rimangono costanti rispetto ad una variabile spaziale. Supponendo che tale variabile sia la componente z di un sistema di assi cartesiani ortogonali (x,y,z) , sarà possibile rappresentare su un piano (x,y) la geometria che si ripeterà identica lungo z . Se l'estensione dei conduttori lungo l'asse z è molto più grande rispetto alle dimensioni geometriche significative nella rappresentazione 2D nel piano (x,y) , allora gli effetti tridimensionali di bordo dei conduttori possono essere trascurati ed i campi elettrici e magnetici avranno anch'essi simmetria planare e possono essere caratterizzati univocamente dalle loro componenti lungo x e lungo y . Gli elementi nei quali il conduttore viene discretizzato (figura 3.1) sono dunque parallelepipedi di lunghezza l lungo z , area $A = \Delta h \Delta w$, versore $\hat{\mathbf{u}}$ della base function diretto lungo l'asse z .

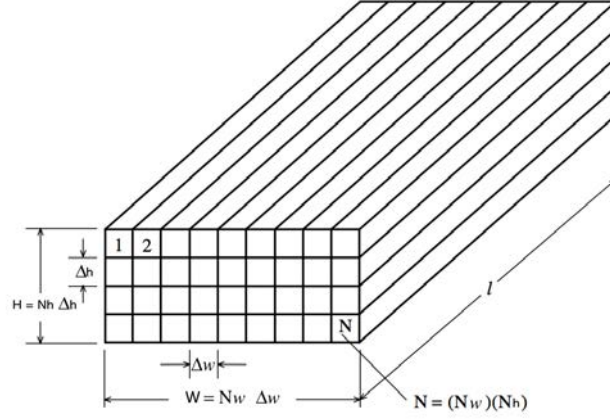


Figura 3.1: Discretizzazione in elementi per una geometria a simmetria planare.

Se si indica con N il numero di elementi, la matrice $[\mathbf{Z}]$ sarà dunque una matrice quadrata formata da numeri complessi ricavabile dalle due matrici come indicato in 3.2.

Costruzione della matrice \mathbf{R} Per prima si costruisce la matrice $[\mathbf{R}]$ i cui elementi della diagonale sono calcolati con l'equazione che valuta la resistenza in corrente continua relativa ad un conduttore della forma pari a quella dell'elemento i -esimo:

$$R(i, i) = \frac{l}{\sigma A_i} \quad (3.5)$$

che per una discretizzazione uniforme saranno tutti uguali.

Costruzione della matrice \mathbf{L} La matrice \mathbf{L} contiene nella diagonale i diversi termini di auto-induttanza parziale relativi a ciascun elemento e negli altri termini tutti i coefficienti di mutua-induttanza parziale tra due diversi elementi. Per primi si vanno a calcolare i termini nella diagonale: dalla definizione 2.25 sostituendo al potenziale vettore la sua equazione esplicita [22]

$$\mathbf{A} = \frac{\mu}{4\pi} \int_v \frac{\mathbf{J}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv \quad (3.6)$$

ed operando sotto l'ipotesi che la densità di corrente nell'elemento sia uniforme (ipotesi totalmente esatta avendo associato una base function di tipo a scalino ad ogni elemento del quale si sta ora valutando \mathbf{L}) si ottiene

$$L = \frac{\mu_0}{4\pi A^2} \int_v \int_v \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv dv' \quad (3.7)$$

Tale integrale viene risolto analiticamente in [23] e [27] per un conduttore a sezione rettangolare del tipo considerato. Si implementa dunque l'equazione

$$\begin{aligned}
L_{pi} = & \frac{2\mu l_i}{\pi} \frac{w}{24u} \left[\log\left(\frac{1+a_2}{w}\right) - a_5 \right] + \frac{1}{24uw} [\log(w+a_2) - a_6] + \\
& + \frac{w^2}{60u} [a_4 - a_3] + \frac{w^2}{24} \left[\log\left(\frac{u+a_3}{w}\right) - a_7 \right] + \\
& + \frac{w^2}{60u} (w - a_2) + \frac{1}{20u} (a_2 - a_4) + \frac{u}{4} a_5 - \frac{u^2}{6w} \arctan\left(\frac{w}{ua_4}\right) + \\
& + \frac{u}{4w} a_6 - \frac{w}{6} \arctan\left(\frac{u}{wa_4}\right) + \frac{a_7}{4} - \frac{1}{6w} \arctan\left(\frac{uw}{a_4}\right) + \\
& + \frac{1}{24w^2} [\log(u+a_1) - a_7] + \frac{u}{20w^2} (a_1 - a_4) + \\
& + \frac{1}{60w^2u} (1 - a_2) + \frac{1}{60w^2u} (a_4 - a_1) + \frac{u}{20} (a_3 - a_4) + \\
& + \frac{u^3}{24w^2} \left[\log\left(\frac{1+a_1}{u}\right) - a_5 \right] + \frac{u^3}{24w} \left[\log\left(\frac{w+a_3}{u}\right) - a_6 \right] + \\
& + \frac{u^3}{60w^2} [(a_4 - a_1) + (u - a_3)]
\end{aligned} \tag{3.8}$$

con

$$u = \frac{l_i}{W_i} \qquad w = \frac{H_i}{W_i} \tag{3.9a}$$

$$a_1 = \sqrt{1+u^2} \qquad a_2 = \sqrt{1+w^2} \tag{3.9b}$$

$$a_3 = \sqrt{w^2+u^2} \qquad a_4 = \sqrt{1+w^2+u^2} \tag{3.9c}$$

$$a_5 = \log\left(\frac{1+a_4}{a_3}\right) \qquad a_6 = \log\left(\frac{w+a_4}{a_1}\right) \tag{3.9d}$$

$$a_7 = \log\left(\frac{u+a_4}{a_2}\right) \tag{3.9e}$$

$$\tag{3.9f}$$

in una function MATLAB[®] che richiede come grandezze di input l'altezza H e la larghezza W della sezione e la lunghezza l dell'elemento.

I diversi coefficienti di mutuo accoppiamento invece sono stati computati approssimando i vari elementi percorsi da una densità di corrente uniforme a dei filamenti di corrente concentrata posizionati nello spazio nel punto centrale della sezione. Sotto questa ipotesi le mutue-induttanze parziali

possono essere calcolate con la formula ricavata in [22] per due filamenti di lunghezza uguale e paralleli

$$M_{pi-j} = \frac{\mu_0 l}{2\pi} \left[\ln \left(\frac{l}{d_{ij}} + \sqrt{\left(\frac{l}{d_{ij}} \right)^2 + 1} \right) - \sqrt{\left(\frac{d_{ij}}{l} \right)^2 + 1} + \left(\frac{d_{ij}}{l} \right) \right] \quad (3.10)$$

Tale approssimazione introduce certamente degli errori nei termini relativi ad elementi adiacenti, tuttavia il numero di elementi complessivo N è scelto (come si vedrà in seguito nella sezione 4.4) sufficientemente grande con la conseguenza che tali imprecisioni non vanno a penalizzare in maniera sensibile il risultato finale. Per completezza è opportuno precisare che in [24] viene fornita una formulazione analitica per il calcolo dei coefficienti di mutua-induttanza parziale tra due conduttori a sezione rettangolare. Tuttavia sono numerose le fonti ([28], [19], [4]) nelle quali l'impiego dell'equazione per il mutuo-accoppiamento tra filamenti di corrente non ha penalizzato i risultati e dunque si preferisce quest'ultima per la maggiore semplicità da un punto di vista implementativo.

3.2 Calcolo stabile auto-induttanza

Nella sezione 3.1 il valore di auto-induttanza parziale per un conduttore rettilineo a sezione rettangolare è stato valutato tramite la formula analitica. In [27] viene evidenziato il fatto che tali formule siano soggette a problemi di instabilità numerica quando si hanno conduttori caratterizzati da un aspect ratio critico, inteso come rapporto tra l'ordine di grandezza delle dimensioni della sezione e tra la lunghezza del conduttore. Infatti quando tra le due dimensioni si ha

$$\frac{l}{\max(H, W)} > 10^4$$

i parametri impiegati nella formula sono soggetti da errori dovuti a cancellazione numerica o errore di macchina, andando così ad influire sulla correttezza dei risultati ottenuti.

Uno dei modi possibili per ovviare a questo problema consiste nello suddividere il conduttore in un certo numero di subconduttori di lunghezza l_i connessi in serie, in modo che per ciascuno di essi si abbia

$$\frac{l_i}{\max(H, W)} \approx 10^3$$

valore per il quale l'applicazione della formula analitica fornisce ancora risultati affidabili. Quindi è possibile valutare la matrice d'induttanza $[\mathbf{L}]$ del sistema, contenente lungo la diagonale le auto-induttanze dei diversi elementi e nelle posizioni fuori diagonale tutti i coefficienti di mutua-induttanza tra i diversi subconduttori. Per la valutazione dei coefficienti M_{ij} può essere

eseguita in via computazionale o tramite le equazioni analitiche descritte in [22] relative al calcolo del coefficiente di accoppiamento tra due conduttori a sezione circolare di raggio r_w allineati. Siccome i subconduttori sono caratterizzati da un aspect ratio elevato, approssimare la loro sezione rettangolare con una circolare di pari area scegliendo

$$r_w = \sqrt{\frac{HW}{\pi}}$$

non introduce errori significativi nella valutazione dei diversi termini.

Ottenuta così la matrice

$$[\mathbf{L}] = \begin{bmatrix} L_1 & M_{1-2} & \dots & M_{1-N_{el}} \\ M_{2-1} & L_2 & \dots & M_{2-N_{el}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ M_{N_{el}-1} & M_{N_{el}-2} & \dots & L_{N_{el}} \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

è possibile ricondurci al valore di auto-induttanza complessivo dell'intero conduttore tramite la matrice d'incidenza $[\mathbf{C}]$ che racchiude le informazioni riguardanti il collegamento elettrico dei diversi subconduttori. Nel caso specifico, essendo tutti elementi connessi in serie formando un conduttore unico la matrice d'incidenza è pari ad un vettore unitario di lunghezza N_{el}

$$[\mathbf{C}] = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

Infine il parametro complessivo che descrive il comportamento dell'insieme di subconduttori nei quali è stato suddiviso il conduttore principale è ricavabile dalla seguente operazione:

$$L = [\mathbf{C}]^t [\mathbf{L}] [\mathbf{C}] \quad (3.13)$$

È stato così possibile valutare i coefficienti di auto-induttanza parziali per conduttori caratterizzati da qualsiasi aspect ratio senza incorrere in imprecisioni di instabilità numerica. Il grafico 3.2 evidenzia l'instabilità nella formula analitica e come essa sia stata risolta pur al costo di maggior onere computazionale. Il conduttore in questione è caratterizzato da una lunghezza $l = 500mm$ ed i lati della sezione quadrata hanno lunghezza dell'ordine di grandezza $10^{-6}m$. Applicando la formula analitica si nota come a variazioni estremamente ridotte del valore di uno dei due lati della sezione l'auto-induttanza ottenuta varia anche di diversi ordini di grandezza. Applicando la procedura descritta è stato possibile ricavare in maniera consistente il giusto parametro da impiegare nell'analisi PEEC.

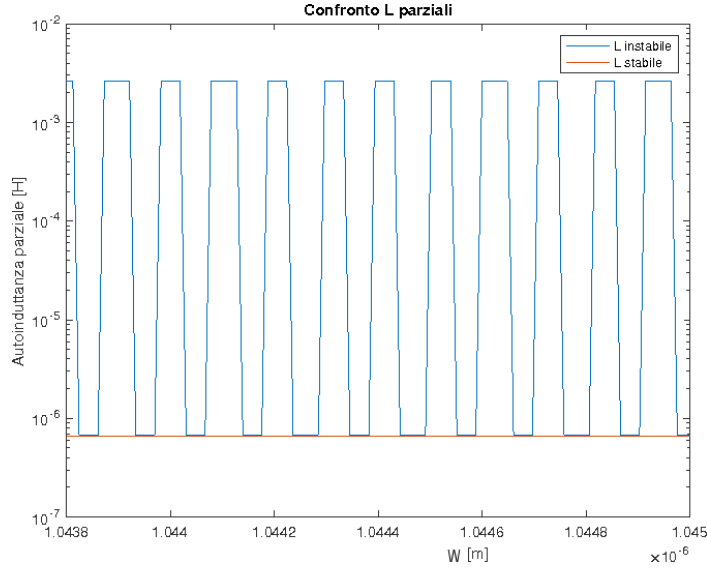


Figura 3.2: Parametro L_p valutato con i due metodi per un conduttore con aspect ratio critico.

3.3 Simmetria 2D radiale

Un sistema di conduttori caratterizzato da tale geometria implica che, definito un sistema di coordinate cilindrico (ρ, ϕ, z) centrato nell'asse di rotazione, la configurazione fisica non dipende dalla coordinata ϕ . Lo si potrà dunque rappresentare nel piano bidimensionale (ρ, z) ed in questo caso nonostante la discretizzazione su tale piano sia uguale gli elementi saranno delle spire a sezione rettangolare. Per applicare il metodo PEEC è dunque opportuno costruire la matrice $[\mathbf{Z}]$ nella maniera opportuna descritta nei paragrafi seguenti.

Costruzione \mathbf{R} La matrice \mathbf{R} è una matrice $(N \times N)$ diagonale con in ogni elemento della diagonale il valore della resistenza di ciascun elemento calcolato come

$$R_i = \frac{2\pi r_i}{\sigma A_i} \quad (3.14)$$

dove r_i è la distanza del punto centrale dell'elemento i -esimo dall'asse di simmetria. Si sottolinea il fatto che in questo caso la distanza varia tra i diversi elementi nei quali è discretizzata la sezione e dunque la resistenza dei diversi elementi dipenderà dalla loro posizione. Ciò causerà il comportamento asimmetrico nella direzione ρ della densità di corrente che verrà evidenziato più avanti nel capitolo dei risultati.

Costruzione L La matrice \mathbf{L} è una matrice (N×N) con negli elementi diagonali il valore dell'autoinduttanza di ciascun conduttore elementare mentre nei termini fuori diagonale sono presenti le varie mutue induttanze tra i diversi elementi M_{ij} . Ipotizzando di effettuare una discretizzazione sufficientemente fitta il valore di autoinduttanza di una spira a sezione rettangolare può essere approssimato a quello di una spira a sezione circolare il cui raggio può essere stimato in modo che la sezione della spira sia costante

$$a = \sqrt{\frac{A_i}{\pi}}$$

Sotto tale ipotesi la diagonale della matrice la si ottiene valutando i diversi coefficienti tramite la seguente equazione

$$L_i = \mu_0 r_i \left[\ln \left(\frac{8r_i}{a} \right) - 2 \right] \quad (3.15)$$

valida se il raggio della spira è molto maggiore del raggio della sezione $a_i \gg r_i$.

Per quanto riguarda i vari coefficienti di mutua, essi possono essere calcolati andando ad approssimare le varie spire elementari a conduttori filamentari. Sotto tale ipotesi secondo quanto scritto in [22] il potenziale vettore dovuto alla spira filamentare è dato dalla 3.16:

$$A_{spira} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint \frac{dl_\phi}{R} \quad (3.16)$$

dove R è la distanza tra ciascun punto della spira ed il punto dove si vuole valutare il campo.

Dalla legge del coseno tale distanza può essere espressa come

$$R^2 = r^2 + d^2 + 2rd \sin \theta \cos \phi$$

con r pari al raggio della spira, d pari alla distanza punto-centro della spira, ϕ e θ angoli che indicano rispettivamente l'angolo che identifica l'elemento dl_ϕ nella spira e l'angolo formato dal piano nel quale giace la spira e la retta congiungente il centro della spira con il punto d'interesse. In figura 3.3 viene rappresentata la geometria appena descritta.

Cambiando la variabile d'integrazione nell'angolo ϕ si ottiene la seguente formula:

$$A_{spira} = 2 \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_0^\phi \frac{r \cos \phi}{\sqrt{r^2 + d^2 + 2rd \sin \theta \cos \phi}} d\phi \quad (3.17)$$

Innanzitutto applicando le relazioni $d^2 = z^2 + \rho^2$ e $\rho = d \sin \theta$ si ricava

$$A_{spira} = 2 \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_0^\phi \frac{r \cos \phi}{\sqrt{r^2 + \rho^2 + z^2 + 2r\rho \cos \phi}} d\phi$$

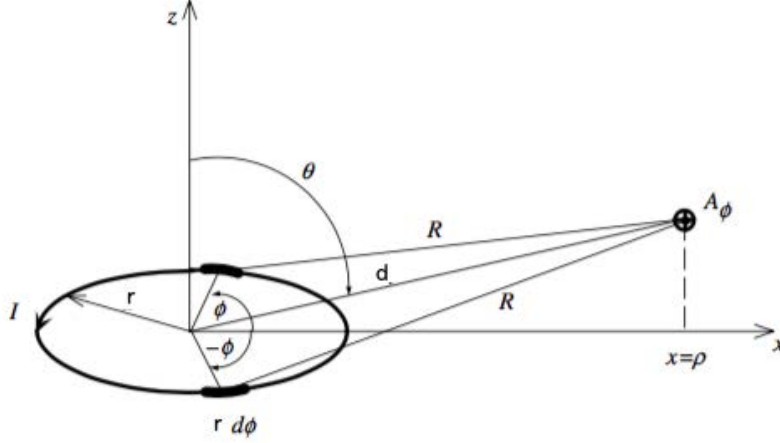


Figura 3.3: Geometria per il calcolo del potenziale vettore generato da una spira.

quindi si esegue il cambio di variabile d'integrazione $\phi = \pi - 2\xi$ e $d\phi = -2d\xi$ ottenendo

$$A_{spira} = \frac{\mu_0 I r}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2 \sin^2 \xi - 1}{\sqrt{(a + \rho)^2 + z^2 - 4a\rho \sin^2 \xi}} d\xi \quad (3.18)$$

Andando a definire

$$k^2 = \frac{4r\rho}{(r + \rho)^2 + z^2}$$

l'integrale 3.18 diventa

$$A_{spira} = \frac{\mu_0 I}{\pi k} \sqrt{\frac{r}{\rho}} \left[\left(1 - \frac{k^2}{2}\right) K - E \right] \quad (3.19)$$

con K ed E integrali completi ellittici del primo e secondo tipo così definiti:

$$K(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\xi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \xi}} \quad (3.20)$$

$$E(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \xi} d\xi \quad (3.21)$$

Questi integrali possono essere valutati sfruttando la function presente in Matlab:

$$[K, E] = \text{ellipke}(k^2)$$

che richiede come ingresso il parametro k^2 . Si è andati dunque a scrivere un function che valuta i due integrali ellittici e successivamente la 3.19 per un

numero arbitrario di punti fornito in ingresso sotto forma di matrice (N×2) dove in ogni colonna ci sono le coordinate (r,z) dei punti nei quali si vuole valutare il campo \mathbf{A} generato da una spira.

Tornando alla valutazione degli elementi di mutua induttanza, essi per definizione sono pari a

$$M_{ij} = \frac{\Phi_i}{I_j}$$

dove Φ_i è il flusso concatenato dalla spira i generato dalla spira j . Tale flusso, applicando il teorema di Stokes è pari alla circuitazione del potenziale vettore dovuto dalla spira j

$$\Phi_i = \int_{A_i} \mathbf{B}_j \cdot \mathbf{n} \, dA = \int_{A_i} (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{n} \, dA = \oint_{l_i} \mathbf{A} \cdot \mathbf{t} \, dl_i$$

Per la simmetria radiale del problema il potenziale vettore \mathbf{A} ha componente non nulla solo lungo ϕ ed il suo modulo è indipendente da ϕ . Dunque tale circuitazione diventa semplicemente

$$\Phi_i = A 2\pi r_i \quad (3.22)$$

Se si assegna corrente unitaria, i vari coefficienti di mutua che popolano la matrice \mathbf{L} si possono valutare semplicemente valutando la 3.22 nella quale il valore di A è determinato mediante 3.19 assegnando alla function le coordinate dei collocation points (punti centrali di ogni elemento n che discretizza la sezione del conduttore) in una matrice.

3.4 Metodi di risoluzione del circuito

Una volta ottenuto il sistema 3.1 relativo ad una geometria che prevede un conduttore, vi sono più procedimenti tramite i quali si può ottenere il valore della resistenza AC relativa alla frequenza d'interesse. Essi sono riportati in questa sezione, evidenziando per ciascuno di essi aspetti positivi e negativi.

Risoluzione tramite matrice di ammettenza Il primo metodo si basa nell'invertire la relazione 3.1, ottenendo il sistema

$$\mathbf{I} = [\mathbf{Y}]\mathbf{V} \quad (3.23)$$

dove \mathbf{I} e \mathbf{V} rimangono i vettori con le correnti e la tensione applicata ad ogni elemento mentre $\mathbf{Y} = \mathbf{Z}^{-1}$ è la matrice di ammettenza pari all'inversa della matrice di impedenza del sistema. A questo punto si sfrutta il fatto che gli elementi sono connessi tutti in parallelo: la tensione ai loro capi è uguale pari ad un certo valore V e la 3.23 si può scrivere come

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \vdots \\ I_N \end{bmatrix} = [\mathbf{Y}] \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} V \quad (3.24)$$

ottenendo, svolgendo il prodotto matrice-vettore unitario, per ogni corrente di elemento la relazione

$$I_i = \sum_{j=1}^N Y_{ji} V \quad (3.25)$$

La condizione di parallelo elettrico tra i vari elementi comporta inoltre la relazione

$$I_{tot} = \sum_{i=1}^N I_i$$

ottenuta dall'applicazione della KCL. Sostituendo in essa la 3.25 si ottiene in definitiva

$$Z = \frac{V}{I_{tot}} = \frac{V}{\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N Y_{ij} V} = \frac{1}{\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N Z_{ij}^{-1}} \quad (3.26)$$

dove Z è l'impedenza complessiva del conduttore alla frequenza indicata. Si derivano i valori di resistenza e induttanza come

$$R = \Re(Z) \quad L = \frac{\Im(Z)}{\omega}$$

Tale procedura risulta scomoda per due motivi:

- 1 : Si ottiene il valore dell'impedenza al variare della frequenza ma non il vettore \mathbf{I} con la distribuzione di corrente nei vari elementi.
- 2 : Il calcolo richiede la valutazione dell'inversa di una matrice piena, operazione particolarmente onerosa dal punto di vista computazionale.

Risoluzione rispetto la tensione Per ovviare ai problemi sopra descritti, è possibile prendere come riferimento una tensione $V = 1[V]$ e risolvere il sistema

$$\mathbf{V} = \mathbf{Z}\mathbf{I} \quad (3.27)$$

con il comando Matlab

$$\mathbf{I} = \mathbf{Z} \setminus \mathbf{V}$$

L'impiego del comando \setminus per risolvere un sistema non implica il calcolo della matrice inversa ma procedure ottimizzate così da risultare più veloce. Si ottiene dunque il vettore \mathbf{I} contenente le correnti di elemento dal quale è possibile ricavare la corrente complessiva complessa che scorre nel conduttore sommandone tutti i valori. L'impedenza del conduttore si va quindi a valutare come

$$Z = \frac{V}{I_{tot}} = \frac{1}{\sum_{i=1}^N I_i} \quad (3.28)$$

e da essa si ottengono resistenza e reattanza essendone la componente reale e immaginaria. È bene osservare che in questo modo è stato possibile aggirare il calcolo dell'inversa ma la distribuzione della corrente è stata ottenuta per una tensione unitaria applicata al conduttore. Solitamente si ha come vincolo la corrente complessiva che scorre nel conduttore, quindi $I_{tot} = I^*$, e si vuole andare a vedere come la frequenza elettrica delle grandezze ne influenza la distribuzione. Per ottenere ciò sono possibili due metodi: il primo sfrutta la linearità del sistema e la condizione di parallelo elettrico tra tutti gli elementi, il secondo va ad allargare il sistema esplicitando la rappresentazione del sistema fisico tramite parametri elettrici concentrati.

Risoluzione rispetto la tensione con corrente totale imposta La linearità del sistema permette di moltiplicare per una costante entrambi i membri della 3.27

$$k\mathbf{V} = k\mathbf{Z}\mathbf{I} \rightarrow k\mathbf{V} = \mathbf{Z}k\mathbf{I} \rightarrow \mathbf{V}_k = \mathbf{Z}\mathbf{I}_k$$

dove

$$\mathbf{V}_k = \begin{bmatrix} k \cdot V \\ k \cdot V \\ \vdots \\ k \cdot V \end{bmatrix} \quad \mathbf{I}_k = \begin{bmatrix} k \cdot I_1 \\ k \cdot I_2 \\ \vdots \\ k \cdot I_N \end{bmatrix}$$

Invertendo il sistema e scrivendo le relazioni 3.25 si ottiene che

$$k \cdot I_i = \sum_{j=1}^N Y_{ji} k \cdot V$$

Dalla KCL si ottiene la corrente totale sommando i vari contributi

$$I_{tot} = \sum_{i=1}^N k \cdot I_i = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N Y_{ij} k \cdot V = k \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N Y_{ij} V = k \cdot I_{V=1}$$

Scegliendo k come

$$k = \frac{I^*}{|I_{V=1}|}$$

è possibile ottenere la distribuzione di corrente la cui somma dia una corrente di valore efficace arbitrario I^* moltiplicando per il parametro k il vettore di corrente soluzione del 3.27 nel quale $V = 1[V]$.

Risoluzione corrente complessiva imposta con l'interpretazione circuitale del sistema Le equazioni che compongono il sistema 3.27 sono ottenute andando ad applicare le varie KVL al circuito 3.4, rappresentazione tramite parametri elettrici concentrati del conduttore discretizzato.

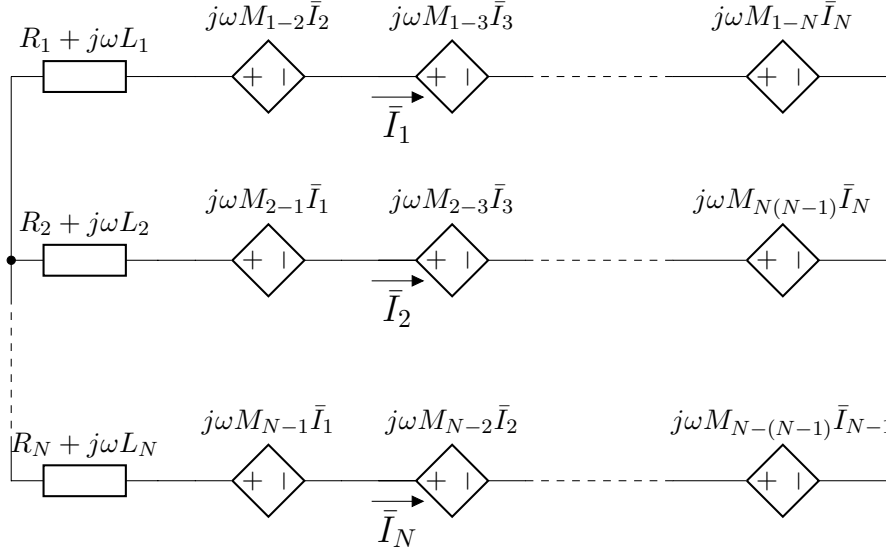


Figura 3.4: Circuito equivalente parametri concentrati

In tali equazioni è possibile considerare la tensione V applicata a ciascun ramo come una incognita andando a rielaborare il sistema di equazione come segue:

$$\begin{cases} 0 = \dot{Z}_1 \bar{I}_1 + j\omega M_{1-2} \bar{I}_2 + \dots + j\omega M_{1-N} \bar{I}_N - V \\ 0 = \dot{Z}_2 \bar{I}_2 + j\omega M_{2-1} \bar{I}_1 + \dots + j\omega M_{2-N} \bar{I}_N - V \\ \vdots \\ 0 = \dot{Z}_N \bar{I}_N + j\omega M_{N-1} \bar{I}_1 + \dots + j\omega M_{N-(N-1)} \bar{I}_{N-1} - V \end{cases} \quad (3.29)$$

In 3.38 si hanno ora N equazioni per $N+1$ incognite. Affinché sia risolvibile è necessario aggiungere un'equazione che nel nostro caso si ricava dall'imposizione della corrente complessiva che scorre nel conduttore. Il sistema diventa dunque

$$\begin{cases} 0 = \dot{Z}_1 \bar{I}_1 + j\omega M_{1-2} \bar{I}_2 + \dots + j\omega M_{1-N} \bar{I}_N - V \\ 0 = \dot{Z}_2 \bar{I}_2 + j\omega M_{2-1} \bar{I}_1 + \dots + j\omega M_{2-N} \bar{I}_N - V \\ \vdots \\ 0 = \dot{Z}_N \bar{I}_N + j\omega M_{N-1} \bar{I}_1 + \dots + j\omega M_{N-(N-1)} \bar{I}_{N-1} - V \\ \bar{I}^* = \bar{I}_1 + \bar{I}_2 + \dots + \bar{I}_N \end{cases} \quad (3.30)$$

che può essere espresso in forma matriciale nella relazione

$$\mathbf{b} = \mathbf{Z}_{\text{est}} \mathbf{I}_{\text{est}} \quad (3.31)$$

dove

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \bar{I}^* \end{bmatrix} \quad \mathbf{I}_{\text{est}} = \begin{bmatrix} \bar{I}_1 \\ \bar{I}_2 \\ \vdots \\ \bar{I}_N \\ -\bar{V} \end{bmatrix} \quad \mathbf{Z}_{\text{est}} = \left[\begin{array}{cccc|c} & & & & 1 \\ & & & & 1 \\ & & & & \vdots \\ & & & & 1 \\ & & & & 1 \\ \hline 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ & & & & 0 \end{array} \right] \quad (3.32)$$

Risolvendo 3.31 con l'apposito comando Matlab è possibile ottenere il vettore con le correnti in ogni elemento e la tensione applicata. L'impedenza del conduttore è ricavabile da essi semplicemente come

$$\bar{Z} = \frac{\bar{V}}{\bar{I}^*}$$

Nonostante questo metodo richieda la risoluzione di un sistema $(N+1 \times N+1)$, esso è il metodo di maggiore generalità e verrà dunque impiegato nella valutazione della resistenza per effetto di prossimità (Una trattazione maggiore verrà presentata in un report seguente).

Si precisa l'unica differenza tra il vettore risultato con le correnti di elemento ottenuto mediante gli ultimi due metodi illustrati: la corrente trovata con il terzo metodo è rappresentata da un numero complesso la cui fase è riferita alla tensione, mentre nell'ultimo metodo presentato è la tensione ad avere la fase definita prendendo come riferimento quella della corrente complessa \bar{I}^* imposta. Tra i due risultati cambia quindi la grandezza vettoriale rispetto alla quale sono definiti e bisogna prestare attenzione nel caso si vogliono confrontare.

3.5 Estensione alla presenza di più conduttori

Nella seguente sezione si estende la costruzione del sistema 3.1 e la sua risoluzione per sistemi caratterizzati da più conduttori. Ciò permette la valutazione sia dell'effetto pelle che interessa ciascun conduttore che dell'effetto di prossimità.

Costruzione del sistema Con la presenza di un numero N_c di conduttori disposti nello spazio in posizioni arbitrarie, caratterizzati da una delle due simmetrie prese in esame e ciascuno suddiviso in un numero di elementi $Ndiv_i$ per $i = 1 \dots N_c$ si dovrà andare a determinare non solo la matrice \mathbf{Z}_{ii} definita in 3.2 e contenente i termini relativi alle resistenze ed induttanze tra elementi dello stesso conduttore, ma anche le varie sub-matrici \mathbf{M}_{ij} di dimensione $(Ndiv_i \times Ndiv_j)$ che conterrà i vari coefficienti di mutuo accoppiamento tra ogni elemento del conduttore i -esimo e i diversi elementi del conduttore j -esimo.

Dunque la matrice totale che rappresenta il sistema di conduttori sarà una matrice a blocchi presentata in via generica in 3.33:

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} [Z_{A-A}] & [M_{A-B}] & [M_{A-C}] & \dots & [M_{A-Z}] \\ [M_{B-A}] & [Z_{B-B}] & [M_{C-B}] & \dots & [M_{B-Z}] \\ [M_{C-A}] & [M_{C-B}] & [Z_{C-C}] & \dots & [M_{C-Z}] \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ [M_{Z-A}] & [M_{Z-B}] & [M_{Z-C}] & \dots & [Z_{Z-Z}] \end{bmatrix} \quad (3.33)$$

Tale matrice permettere di scrivere il sistema

$$\mathbf{V} = \mathbf{Z}\mathbf{I} \quad (3.34)$$

dove

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_A \\ \mathbf{I}_B \\ \mathbf{I}_C \\ \vdots \\ \mathbf{I}_Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{1A} \\ I_{2A} \\ \vdots \\ I_{N_a A} \\ I_{1B} \\ I_{2B} \\ \vdots \\ I_{N_b B} \\ \vdots \\ \vdots \\ I_{1Z} \\ I_{2Z} \\ \vdots \\ I_{N_z Z} \end{bmatrix} \quad \mathbf{V} = \begin{bmatrix} \mathbf{V}_A \\ \mathbf{V}_B \\ \mathbf{V}_C \\ \vdots \\ \mathbf{V}_Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_A \\ V_A \\ \vdots \\ V_A \\ V_B \\ V_B \\ \vdots \\ V_B \\ \vdots \\ \vdots \\ V_Z \\ V_Z \\ \vdots \\ V_Z \end{bmatrix}$$

con V_i tensione ai capi di ogni elemento dei diversi conduttori e I_{j-u} per $j = 1 \dots N_{div_u}$ e $u = 1 \dots N_c$ corrente di elemento j-esimo del conduttore. I termini che compongono le varie sub-matrici $[\mathbf{M}_{i-j}]$ si calcolano con l'impiego delle stesse formule descritte in precedenza per il calcolo dei

coefficienti di mutua-induttanza parziale tra elementi appartenenti lo stesso conduttore e dipenderanno di conseguenza dalla distanza che intercorre tra i due e dunque saranno determinati in base alla configurazione geometrica dei conduttori nello spazio.

Si procede quindi ad illustrare i due metodi possibili per la risoluzione di tale sistema con conseguente individuazione delle correnti dei diversi elementi e calcolo della resistenza AC relativa a ciascun conduttore.

Metodo con inversione della matrice Per individuare l'impedenza del sistema di conduttori si può estendere il metodo che prevede il calcolo della matrice inversa presentato in uno dei report precedenti. Partendo dal 3.34 si può scrivere la relazione inversa

$$\mathbf{I} = \mathbf{YV} \quad (3.35)$$

con $\mathbf{Y} = \mathbf{Z}^{-1}$. Quindi grazie alla consapevolezza che le N_{div} barre dei diversi conduttori sono connesse in parallelo (essendo dunque soggette alla stessa tensione e con la corrente totale data dalla somma delle diverse correnti di elemento) ci si può riportare ad un sistema di dimensioni ridotte ($N_c \times N_c$) del tipo

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \vdots \\ I_{N_c} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{1-1} & Y_{1-2} & \dots & Y_{1-N_c} \\ Y_{2-1} & Y_{2-2} & \dots & Y_{2-N_c} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Y_{N_c-1} & Y_{N_c-2} & \dots & Y_{N_c-N_c} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_{N_c} \end{bmatrix} \quad (3.36)$$

dove la matrice è ottenuta da quella estesa tramite la matrice d'incidenza

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \quad (3.37)$$

di dimensioni ($N_{sist} \times N_c$) che tiene conto della connessione elettrica dei vari elementi che compongono ciascun conduttore. Si ha dunque

$$Y_{(N_c \times N_c)} = \mathbf{C}^t \mathbf{Y} \mathbf{C}$$

Una volta ricavato il sistema 3.36 da esso si possono calcolare le tensioni imponendo le correnti complessive in ogni conduttore risolvendolo con l'apposito comando \ in MATLAB[®] che lo risolve con il procedimento opportuno. Tale metodo richiede dunque la risoluzione di un sistema di dimensioni notevolmente ridotte, ricavato tuttavia mediante il calcolo di una matrice inversa piena che può avere dimensioni molto importanti quando il numero di conduttori N_c aumenta.

Metodo sistema esteso In questa sezione si estende il metodo basato sulla rappresentazione circuitale dei diversi conduttori. Partendo sempre dal sistema 3.34 si possono considerare le N_c tensioni come incognite portandole al termine del vettore con le correnti di elemento. In tal modo si ha un sistema di N_{sist} equazioni con $N_{sist} + N_c$ incognite del tipo:

$$\begin{cases} 0 = \dot{Z}_1^A \bar{I}_1^A + \sum_{i_2}^{N_{divA}} j\omega M_{1-i_1}^A \bar{I}_i^A + \sum_{j=1}^{N_{divB}} j\omega M_{1A-jB} \bar{I}_j^B + \dots + \sum_{u=1}^{N_{divZ}} j\omega M_{1A-uZ} \bar{I}_u^Z - \bar{V}_A \\ 0 = j\omega M_{2-1}^A \bar{I}_1^A + \dot{Z}_2^A \bar{I}_2^A + \sum_{j=3}^{N_{divA}} j\omega M_{2-j}^A \bar{I}_j^A + \sum_{k=1}^{N_{divB}} j\omega M_{2A-kB} \bar{I}_k^B + \dots + \sum_{u=1}^{N_{divZ}} j\omega M_{2A-uZ} \bar{I}_u^Z - \bar{V}_A \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 = \sum_{i=1}^{N_{divA}} j\omega M_{N_z-iA} \bar{I}_i^A + \sum_{j=1}^{N_{divB}} j\omega M_{N_z-jB} \bar{I}_j^B + \dots + \sum_{u=1}^{N_{divZ}-1} j\omega M_{N_z-u} + \dot{Z}_{N_z-N_z} \bar{I}_{N_z}^Z - \bar{V}_A \end{cases} \quad (3.38)$$

Affinché esso sia risolvibile è necessario aggiungere N_c equazioni tramite l'imposizione della corrente complessiva che scorre nei vari conduttori (ottenute applicando le KCL agli N_c conduttori):

$$\begin{cases} \bar{I}_{tot}^A = \bar{I}_1^A + \bar{I}_2^A + \dots + \bar{I}_{N_a}^A \\ \bar{I}_{tot}^B = \bar{I}_1^B + \bar{I}_2^B + \dots + \bar{I}_{N_b}^B \\ \vdots \\ \bar{I}_{tot}^Z = \bar{I}_1^Z + \bar{I}_2^Z + \dots + \bar{I}_{N_z}^Z \end{cases} \quad (3.39)$$

In definitiva si ottiene il sistema esteso

$$\mathbf{b} = \mathbf{Z}_{ext} \mathbf{I}_{ext} \quad (3.40)$$

dalla cui risoluzione si trovano le correnti di ciascun elemento e le tensioni

3.6. ESTENSIONE APPLICAZIONE METODO PEEC PER GEOMETRIA 3D35

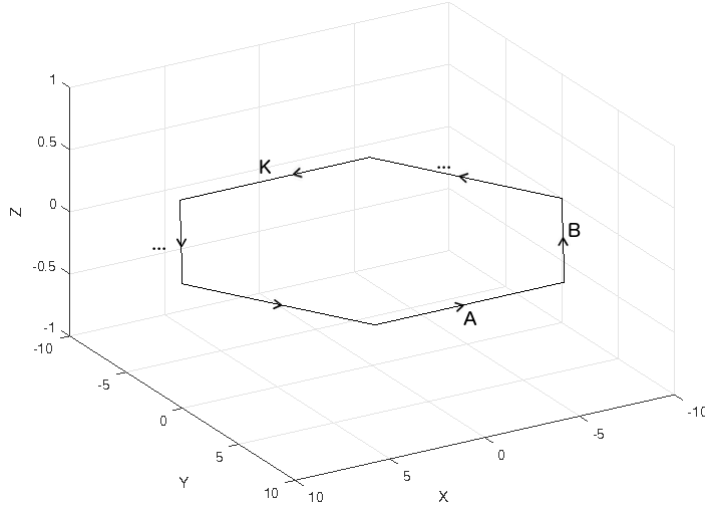


Figura 3.5: Esempio di una curva spezzata.

sub-matrici sarà necessario calcolare l'integrale

$$M_{ij}^{A-K} = \frac{\mu_0}{4\pi S_i^A S_j^K} \int_{v_i^A} \int_{v_j^K} \frac{\hat{\mathbf{u}}_i^A \cdot \hat{\mathbf{u}}_j^K}{|\mathbf{r}_i^A - \mathbf{r}_j^K|} dv_j^K dv_i^A \quad (3.42)$$

dove A, K indicano le due sezioni della spezzata e i, j indici dei diversi elementi nei quali è suddiviso ciascuno degli N_t conduttori. I vettori $\hat{\mathbf{u}}_j^K$ e $\hat{\mathbf{u}}_i^A$ sono noti dall'approssimazione della curva tramite la spezzata e sono uguali per tutti gli elementi di ciascun conduttore K -esimo, dunque il prodotto scalare tra i due è facilmente individuabile.

L'integrale 3.42 può dunque essere calcolato numericamente ed una volta ottenuta la matrice $[\mathbf{Z}]$ che avrà dimensioni $(N_t * Ndiv \times N_t * Ndiv)$ (con $Ndiv$ numero di elementi di ciascun segmento) ci si potrà ricondurre ad un sistema di dimensione $(Ndiv \times Ndiv)$ tenendo conto del collegamento elettrico in serie di ciascun elemento el_i^K con l'elemento nella medesima posizione del segmento successivo el_i^{K+1} . Dal punto di vista matriciale, ciò è effettuato definendo la matrice d'incidenza $(Ndiv * N_t \times Ndiv)$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} [\mathbf{I}_d] \\ [\mathbf{I}_d] \\ \vdots \\ [\mathbf{I}_d] \end{bmatrix} \quad (3.43)$$

con $[\mathbf{I}_d]$ matrice identità di dimensioni $(Ndiv \times Ndiv)$ ripetuta N_t volte. Quindi tramite il prodotto matriciale

$$[\mathbf{C}]^t [\mathbf{Z}] [\mathbf{C}] \quad (3.44)$$

si ottiene la matrice ridotta $[\mathbf{Z}_r]$ di dimensione $(Ndiv \times Ndiv)$ che permette di scrivere il sistema

$$\mathbf{V} = [\mathbf{Z}_r]\mathbf{I}$$

associato al conduttore 3D risolvibile tramite uno dei procedimenti trattati nella sezione 3.4.

Capitolo 4

Analisi skin effect

Nel seguente capitolo si applica numericamente il metodo PEEC a conduttori isolati di diverse sezioni andando così a determinare le perdite addizionali (esprese come resistenza AC o mediante il parametro $K_{AC} = \frac{R_{AC}}{R_{DC}}$) dovute unicamente all'effetto pelle. Si prenderanno in esame geometrie caratterizzate da una simmetria 2D sia planar-simmetrica che radial-simmetrica adattando nei due diversi casi la costruzione della matrice d'impedenza del sistema di elementi. I risultati sono quindi confrontati con quelli ottenuti mediante il metodo agli elementi finiti tramite il software COMSOL Multiphysics[®] e con eventuali valori analitici presenti nella bibliografia.

4.1 Conduttore a sezione circolare

Come primo esempio applicativo si prende in esame un conduttore a sezione circolare di lunghezza infinita caratterizzato da una simmetria planare 2D. Per tale geometria grazie alla simmetria vi sono presenti equazioni analitiche [25], [1], [31] che vanno a determinare la resistenza in funzione dello spessore di penetrazione (e dunque al variare della frequenza delle grandezze elettriche). I risultati ottenuti dal metodo PEEC vengono dunque confrontati con i valori ottenuti dal metodo FEM mediante il software COMSOL Multiphysics[®] e con i risultati delle due equazioni analitiche successivamente descritte.

Il conduttore preso in esame è un conduttore in rame di raggio $R = 10\text{mm}$ la cui conducibilità $\sigma = 5.8 \times 10^7 \text{S m}^{-1}$ è presa alla temperatura $t \approx 25^\circ\text{C}$. La lunghezza del conduttore nel modello PEEC è stata posta unitaria $l = 1\text{m}$. La resistenza DC per unità di lunghezza di tale conduttore è dunque

$$r_{DC} = \frac{1}{\sigma \pi R^2} = 5.488 \times 10^{-5} \Omega \text{m}^{-1}$$

4.1.1 Simulazione FEM

Per poter indagare l'effetto pelle in un conduttore tramite il codice FEM è stato impiegato il modulo AC/DC che permette la risoluzione della formulazione differenziale magneto-quasistatica delle equazioni di Maxwell. Il dominio è stato reso sufficientemente grande in modo che le condizioni al contorno non vadano ad influenzare i risultati sulla sezione del conduttore. La condizione al contorno applicata al boundary esterno è quella di Dirichlet, imponendo il valore del potenziale vettore $\mathbf{A} = 0$ e confinando così il campo d'induzione magnetica all'interno del dominio. Al conduttore viene applicata una corrente efficace complessiva $I = 1\text{A}$ e ci si accerta che si assegni la condizione di "solid conductor" in modo tale che la densità di corrente non sia forzata ad essere uniforme. Infine, affinché i risultati siano validi si deve prestare attenzione alla mesh: nelle diverse simulazioni (figura 4.1) è stata raffinata nella zona all'interno del conduttore in modo che la dimensione di ciascun elemento sia al massimo pari ad un terzo dello spessore di penetrazione in modo che la densità di corrente e la potenza dissipata siano adeguatamente calcolate.

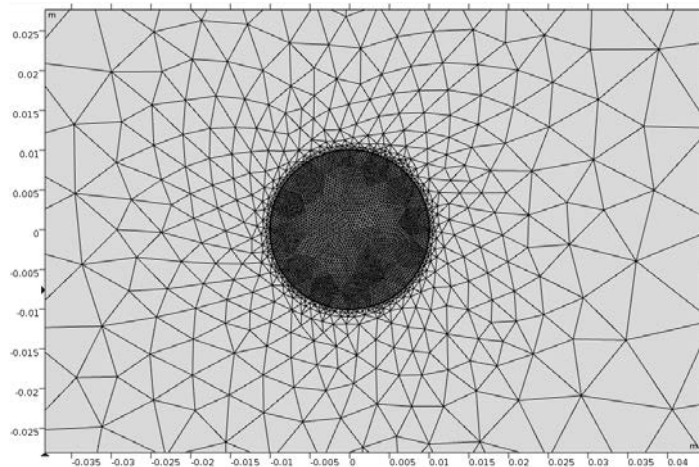


Figura 4.1: Rappresentazione della mesh impiegata.

Equivalent Annulus Approach La prima equazione analitica si basa sull'equivalent annulus approach [1] che va a determinare le perdite addizionali ipotizzando che la corrente scorra non più su tutta la superficie del conduttore ma solo su un anello esterno della sezione come illustrato in 4.2. L'ampiezza di tale anello è determinata uguagliando l'integrazione della funzione densità di corrente lungo la sezione nella quale è presente

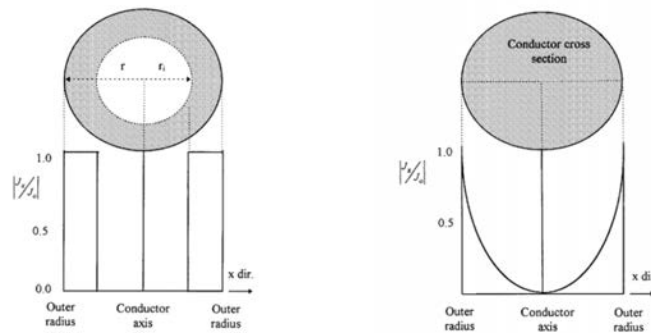
$$\int_0^r J(r)dr = \int_{r'}^r J_{annulus}(r)dr \quad (4.1)$$

garantendo che la corrente complessiva nel conduttore sia costante. Dalla 4.1 si trova che il valore del raggio interno è

$$r' = r - \delta(1 - e^{-r/\delta})$$

e dunque l'area equivalente interessata dalla corrente è pari a

$$A' = \pi\delta(1 - e^{-r/\delta})[2r - \delta(1 - e^{-r/\delta})]$$



(a) Andamento J costante nell'anello esterno. (b) Andamento J esponenziale.

Figura 4.2: Rappresentazione del metodo [1].

La resistenza del conduttore AC con tale metodo sarà dunque descritta dall'equazione:

$$r_{AC} = \frac{1}{\sigma A'} \Omega \text{ m}^{-1} \quad (4.2)$$

Fattore IEC 60287-1-1 La seconda stima per la resistenza AC di un conduttore si basa sul calcolo di un coefficiente addizionale secondo [31] che incrementa opportunamente il valore DC della resistenza. Si ha dunque

$$r_{AC} = r_{DC}(1 + y_s) \Omega \text{ m}^{-1} \quad (4.3)$$

dove

$$y_s = \frac{x_s^4}{192 + 0.8x_s^4} \quad x_s^4 = \frac{8\pi f}{r_{DC}10^7}$$

Tuttavia è opportuno sottolineare che in [31] viene garantita l'affidabilità di tale formula solo se $x_s < 2.8$, dunque il risultato oltre una certa frequenza

pari a

$$f = \frac{x_s^2 R_{DC} 10^7}{8\pi} \approx 180\text{Hz} \quad (4.4)$$

non è più da prendere in considerazione.

4.1.2 Presentazione dei risultati

Si eseguono i codici che implementano la procedura PEEC per la geometria indicata a inizio sezione e si rappresentano in figura 4.3 gli andamenti della resistenza in funzione della frequenza ottenuti con i diversi metodi. Da tale grafico si può innanzitutto notare come la curva ottenuta con il metodo PEEC ben si avvicina ad i valori ottenuti mediante il codice FEM considerati i più vicini a quelli esatti. La curva ricavata dall'equazione 4.2 invece sovrastima in via cautelativa le perdite, tendenza riscontrata anche in [25] nel quale viene considerata una diversa dimensione del conduttore. Infine come predetto la curva prevista dalla 4.3 ben approssima l'andamento della resistenza fino alla frequenza indicata in 4.4 per poi allontanarsi dai valori corretti.

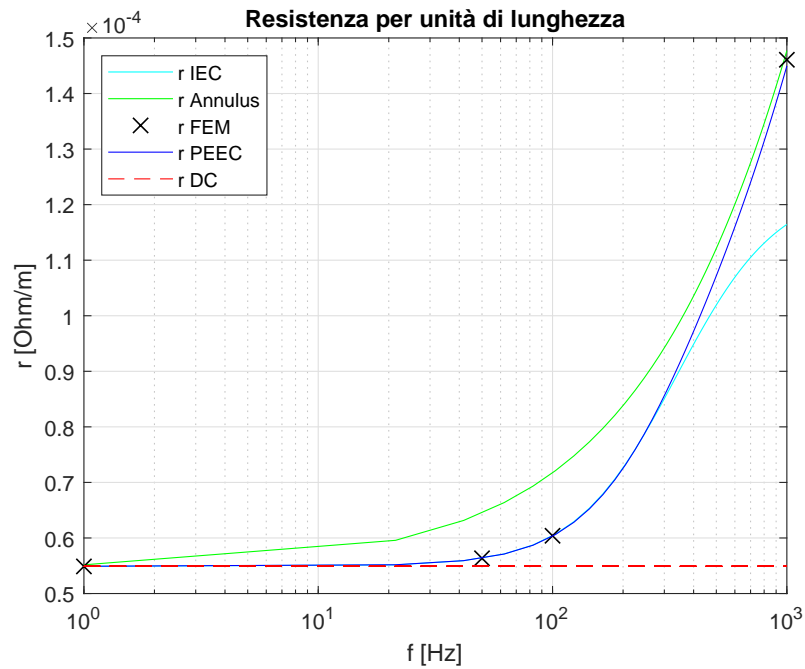


Figura 4.3: Resistenza AC in funzione della frequenza.

In tabella 4.4, nella quale sono presentati i valori numerici della resistenza e degli errori in percentuale rispetto ai valori ottenuti dal FEM per quattro frequenze, si può meglio apprezzare il confronto ed avere una sensibilità maggiore riguardo le considerazioni appena tratte. Si pone l'attenzione

f Hz	FEM	PEEC	$\delta_{PEEC}\%$	IEC	$\delta_{IEC}\%$	Annulus	δ_{Ann}
1	5.488×10^{-5}	5.490×10^{-5}	0.58	5.488×10^{-5}	ϵ	5.516×10^{-5}	0.5
50	5.634×10^{-5}	5.600×10^{-5}	0.61	5.634×10^{-5}	0.001	6.448×10^{-5}	14.45
100	6.039×10^{-5}	6.032×10^{-5}	0.67	6.039×10^{-5}	0.007	7.173×10^{-5}	18.76
1000	1.460×10^{-4}	1.449×10^{-4}	0.88	1.164×10^{-4}	20.29	1.477×10^{-4}	1.13

Figura 4.4: Resistenze in Ω/m ed errori rispetto ai risultati FEM.

sui valori crescenti del δ_{PEEC} : il numero di elementi nei quali la sezione è discretizzata rimane costante pari a $N_{div} = 316$ con la dimensione di ciascun elemento pari a $\frac{r}{20}$ (nel paragrafo 4.4 sarà presa in esame la questione del numero di elementi ottimale che giustificherà tale scelta), dunque con l'aumento della frequenza diminuisce il rapporto $\frac{\delta}{h_{elemento}}$ tra lo spessore di penetrazione

$$\delta = \frac{1}{\sqrt{\pi f \mu_0 \sigma}}$$

e la dimensione del lato di un elemento. Ciò comporta che l'andamento della densità di corrente valutato tramite la procedura PEEC risulti più grossolano man mano che la frequenza aumenta e giustifica l'aumento del δ_{PEEC} presente nella 4.4.

Accertato che i risultati così prodotti ben approssimano il fenomeno effetto pelle per un conduttore isolato a sezione circolare, si riportano in seguito gli andamenti della densità di corrente normalizzata rispetto al suo valore di massimo (quello cioè in prossimità della superficie esterna) in funzione della distanza dal centro della sezione.

I grafici 4.5 evidenziano come l'andamento della distribuzione della densità di corrente cambi rispetto alla frequenza (in accordo con i risultati analitici in [29] e quelli numerici in [25], [11]) passando dall'essere quasi costante per la frequenza bassa di 1 Hz ad accumularsi maggiormente in corrispondenza della superficie esterna. In figura 4.6, dove viene rappresentata la distribuzione 2D sulla superficie del conduttore del valore efficace di densità di corrente ad 1 kHz avendo imposto un valore di corrente complessiva di $1A_{rms}$, emerge ulteriormente tale andamento assieme alla simmetria che giustifica la descrizione del fenomeno analizzando l'andamento della J in funzione del raggio nei grafici 4.5.

4.2 Conduttore a sezione rettangolare

In questa sezione si andrà ad analizzare l'effetto pelle in conduttori di sezione rettangolare con dimensioni di altezza H e larghezza W arbitrarie. Tale geometria a differenza di quella circolare non è caratterizzata da una simmetria di tipo cilindrico e dunque il calcolo analitico risulta più complesso ed è

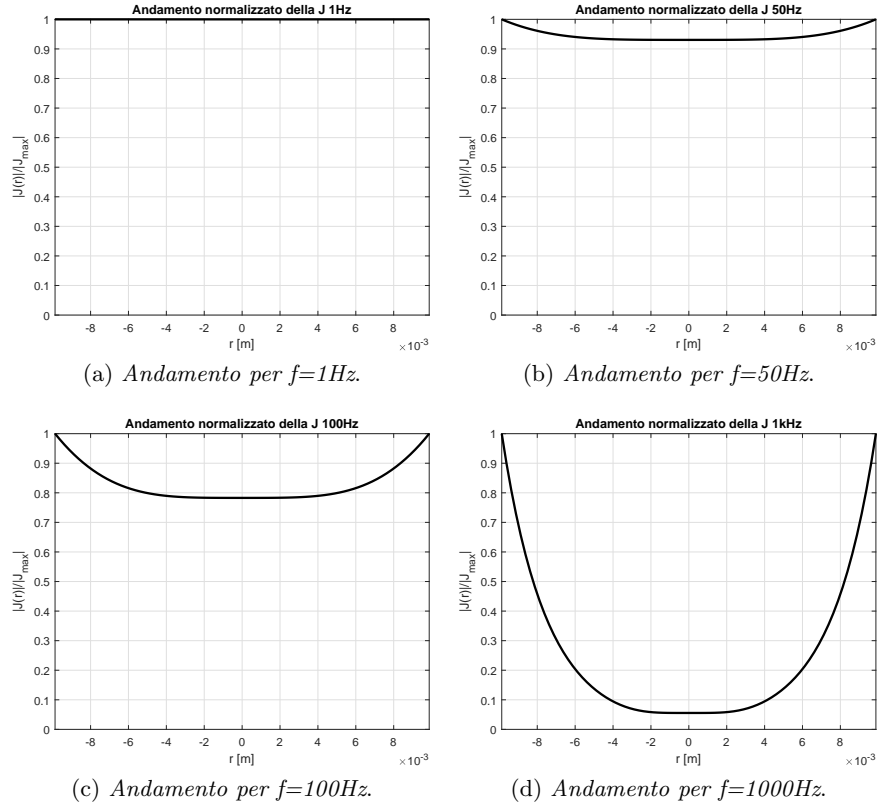


Figura 4.5: Andamenti J normalizzata in funzione del raggio.

meno prevedibile il comportamento della densità di corrente in funzione della frequenza. Si prenderanno come esempi geometrie di ordine di grandezza diverse:

- Una piattina di altezza $H = 3\text{mm}$, larghezza $W = 10\text{mm}$, lunghezza $l = 500\text{mm}$;
- Il conduttore di un circuito stampato analizzato in [3], di altezza $H = 0.381\text{mm}$, larghezza $W = 0.0355\text{mm}$, lunghezza $l = 254\text{mm}$.

Per entrambi il materiale considerato è rame con una conduttività $\sigma = 5.8 \times 10^7 \text{S m}^{-1}$. I risultati vengono confrontati con quelli ottenuti mediante l'applicazione del metodo FEM prestando attenzione alle impostazioni già descritte in 4.1.1 e per la prima geometria con i valori ottenuti dalla formula presentata in [8].

4.2.1 Analisi piattina

Per valutare l'effetto pelle in una piattina di dimensioni $(3 \times 10)\text{mm}$ si decide di spazzare un range di frequenza $[10 - 10000]\text{Hz}$ poiché per $f = 1000\text{Hz}$ lo

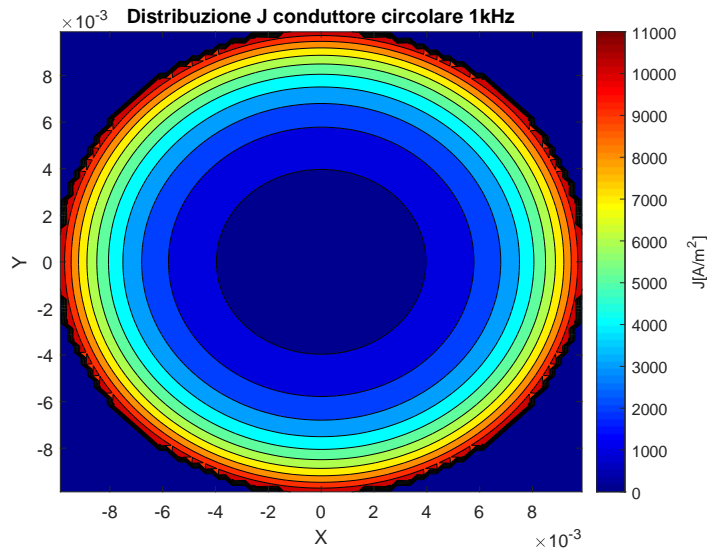


Figura 4.6: Rappresentazione 2D del modulo rms della J.

spessore di penetrazione è pari a

$$\delta = \frac{1}{\sqrt{\pi f \mu_0 \sigma}} \approx 2.1 \text{mm}$$

ed essendo sufficientemente minore rispetto alla larghezza del conduttore ci si aspetta che vi sia una iniziale tendenza della densità di corrente a scorrere verso la zona più esterna nel verso della larghezza mentre essendo l'altezza del conduttore dello stesso ordine non ci si aspetta molta disuniformità lungo tale dimensione. Per $f = 10\text{kHz}$ invece si ha $\delta \approx 0.66\text{mm}$ molto minore rispetto ad entrambe le dimensioni della sezione del conduttore ed in questo caso le perdite addizionali saranno decisamente importanti.

Il grafico 4.7 si riporta l'andamento del valore di resistenza al variare della frequenza ottenuto sia con la procedura PEEC che mediante il software COMSOL Multiphysics[®]. Si evince chiaramente come ci sia una buona corrispondenza tra i risultati proposti dai due metodi, con un errore massimo non superiore al 2%. Il numero di elementi nei quali è stata discretizzata la sezione è stato tenuto costante pari a 400 tranne che per l'ultimo range di frequenza [5000 – 10000]Hz, per il quale è stata impostata una suddivisione lungo la larghezza pari a 30 elementi, per un totale $N_{el} = 600$, per poter descrivere adeguatamente la distribuzione della J in tale verso.

Ad ulteriore sostegno della validità dei risultati in figura 4.8 si mettono a confronto gli andamenti della densità di corrente per una frequenza di $f = 1000\text{Hz}$ ottenuti con i due metodi proposti. La limitata differenza evidenzia come la discretizzazione impiegata sia sufficiente per descrivere il fenomeno nella condizione di $\frac{W}{\delta} \approx 5$.

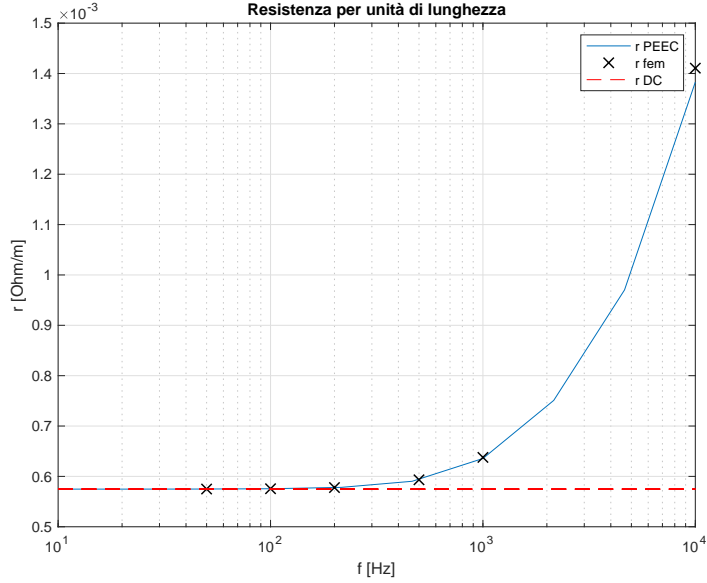


Figura 4.7: Andamento resistenza AC rispetto la frequenza.

Si vuole infine confrontare il coefficiente maggiorativo delle perdite

$$k_{AC} = \frac{R_{AC}}{R_{DC}}$$

ottenuto tramite i codici che implementano il metodo PEEC con i valori dati dalla equazione analitica presentata in [8]. In esso infatti viene presentata la possibilità di calcolare la resistenza AC di un conduttore applicando la seguente formula approssimativa:

$$R_{AC} = \sqrt{R_{DC}^2 + (1.2R_{HF})^2} \quad (4.5)$$

con

$$R_{HF} = \frac{1}{\sigma 2\delta(H+W)}$$

resistenza ottenuta ipotizzando che la corrente scorra unicamente in un layer superficiale di spessore pari a δ .

Nella figura 4.9 sono graficati gli andamenti del parametro k_{AC} rispetto alla frequenza normalizzata P introdotta in [8] definita come

$$P = \sqrt{2\mu_0\sigma f A_c}$$

per due diversi aspect-ratio della sezione del conduttore. Dal confronto emerge come l'equazione analitica si avvicini con una sufficiente precisione (scarti compresi tra il 2-5%) per valori di frequenza non troppo elevati fornendo valori cautelativi. Osservando invece le due curve relative ai due aspect-ratio,

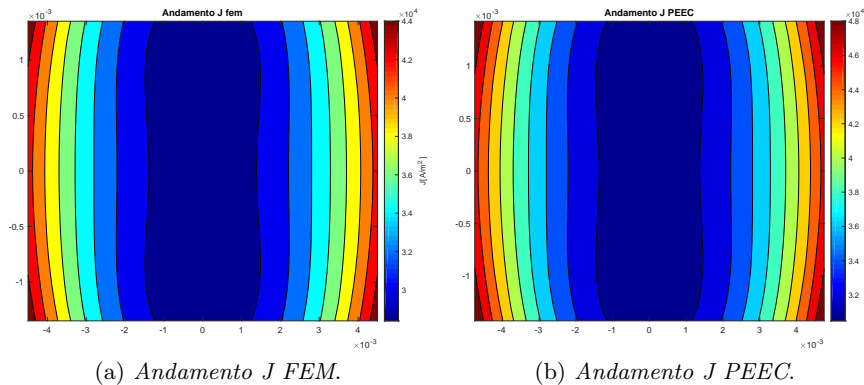


Figura 4.8: Plot 2D della J per $f=1000$ Hz e $I_{picco}=1$ A.

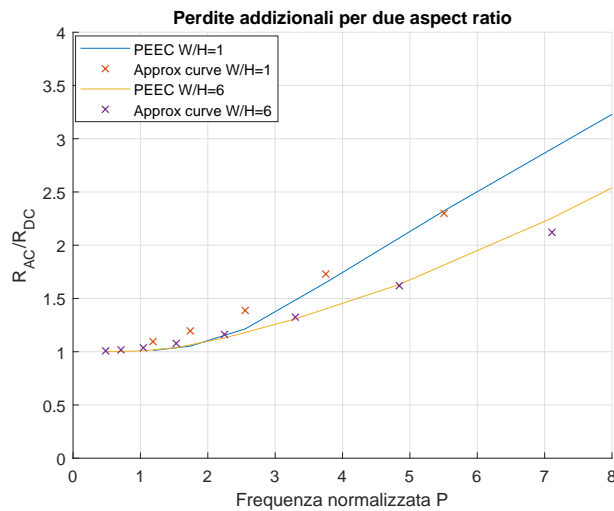


Figura 4.9: Confronto PEEC e risultati analitici.

appare evidente come la curva relativa alla sezione quadrata salga più rapidamente: per essa infatti si avrà un rapporto $\frac{L_{lato}}{\delta}$ elevato per entrambi i lati alla stessa frequenza comportando maggior disuniformità nella distribuzione della J mentre con sezioni caratterizzate da aspect-ratio maggiori l'effetto si manifesta prima solo lungo una dimensione e solo per frequenze maggiori anche nel verso dell'altra dimensione (tale fenomeno verrà evidenziato nella seguente sezione).

4.2.2 Analisi conduttore circuito stampato

In questa sezione si prosegue con l'analisi delle perdite addizionali in un conduttore presente nei circuiti stampati: tale geometria analizzata in [3] e [22] è caratterizzata da due aspect-ratio rilevanti dal punto di vista dell'ap-

plicazione del metodo e dell'analisi dei risultati ottenuti. Il rapporto

$$\frac{l}{\max(H, W)} = \frac{254}{0.381} \approx 10^4$$

comporta la nascita di instabilità nell'equazione analitica [23] impiegata per il calcolo dell'auto-induttanza parziale di conduttori rettilinei a sezione rettangolare a causa di problemi di cancellazione numerica e precisione di macchina. Siccome il valore L_{auto} deve essere calcolato per ciascun elemento nei quali la sezione è discretizzata, tale rapporto durante l'applicazione della formula può raggiungere anche ordini di grandezza pari a 10^{5-6} . Come già descritto nel capitolo precedente, per ovviare a tale problema sarà necessario ricorrere alla function "L stable", descritta nella sezione 3.2, che calcola il valore discretizzando lungo la lunghezza ogni elemento e permette così di calcolare il valore corretto al costo di un maggior onere computazionale. Il secondo rapporto invece

$$\frac{H}{W} \approx 10$$

permetterà di notare meglio le considerazioni effettuate nella sezione precedente: la corrente tenderà inizialmente a scorrere nelle regioni adiacenti ai lati orizzontali di lunghezza minore e solo per frequenze ancora maggiori quando lo spessore di penetrazione δ sarà minore anche rispetto a W essa tenderà a concentrarsi sui quattro angoli comportando un ulteriore aumento delle perdite.

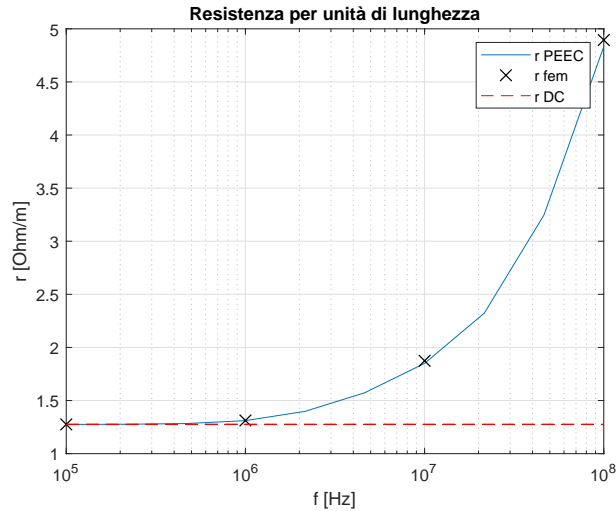


Figura 4.10: Andamento resistenza AC rispetto la frequenza.

Innanzitutto nella 4.10 si riporta l'andamento della resistenza in funzione con la frequenza, confrontandolo con i valori di riferimento ottenuti tramite il metodo FEM. Grazie al calcolo stabile degli elementi diagonali della matrice

[L] si ha un ottimo riscontro ed i valori rispettano gli andamenti esposti per lo stesso conduttore in [22] e [3]. Quindi si procede presentando nelle figure 4.11 a-d le distribuzioni della densità di corrente per diverse frequenze:

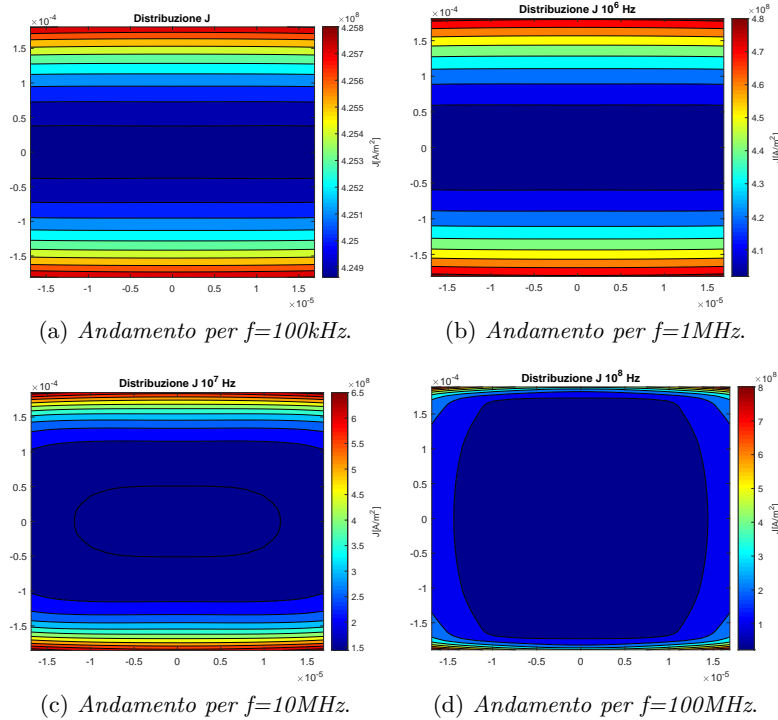


Figura 4.11: Plot 2D della J per diverse frequenze.

Lo spessore di penetrazione a $f = 100\text{kHz}$ è pari circa alla metà della lunghezza maggiore tra i due lati e dunque si ha una prima disuniformità evidente. Per quanto riguarda la larghezza, solo per frequenze pari a circa $f = 3.5\text{MHz}$ lo spessore di penetrazione diventa simile valore W , quindi la tendenza della J ad allontanarsi dal centro anche nel verso della larghezza emerge per le frequenze maggiori di 10MHz .

Per completezza si accompagnano ai grafici precedenti i rispettivi plot tridimensionali in figura 4.12 spesso presenti negli articoli che trattano le perdite addizionali. Essi offrono una visione più qualitativa, permettendo di notare a colpo d'occhio per le alte frequenze la distribuzione solitamente chiamata "bedpost pattern".

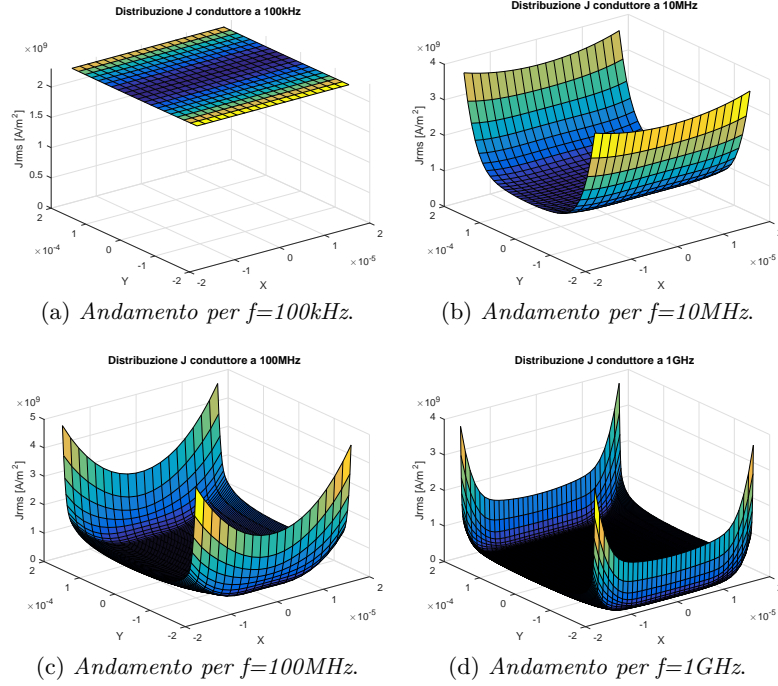


Figura 4.12: Plot 2D della J per diverse frequenze.

4.3 Skin effect simmetria assiale

In questa sezione si andranno a presentare i risultati ottenuti dalla valutazione dell'effetto pelle per conduttori caratterizzati da una simmetria assiale. La differenza nel metodo consiste prevalentemente nella costruzione della matrice $[\mathbf{Z}]$ già illustrato nel capitolo 3. Vi è tuttavia una sostanziale differenza rispetto ai casi precedentemente analizzati per quanto riguarda l'induttanza: nel caso della simmetria planare sono stati simulati conduttori isolati di lunghezza finita per i quali si sono determinati i valori di resistenza ed auto-induttanza parziale. Per poter valutare unicamente l'effetto pelle ed escludere quello di prossimità non è stato previsto un percorso di ritorno per la corrente avendo così un campo di densità di corrente \mathbf{J} non solenoidale. Tale condizione va contro le leggi della fisica e dunque il sistema preso in considerazione ha valenza unicamente teorica: nei capitoli seguenti saranno prese in considerazione geometrie realistiche con più conduttori.

Nonostante il concetto di auto-induttanza parziale sia ben definito dal punto matematico

$$L_p = \frac{\int_c \mathbf{A} dl}{I} \quad (4.6)$$

e caratterizzato anche da una interpretazione fisica [22], i software che implementano il metodo FEM non possono ammettere sistemi non fisici ed

impongono per il campo densità di corrente

$$\int_{S_{close}} \mathbf{J} dA = 0$$

Quando si esegue una simulazione con una geometria 2D planare in presenza di un solo conduttore con corrente imposta non nulla, viene automaticamente imposta lungo il boundary b del dominio una distribuzione pellicolare di corrente con densità lineare $\sigma[\text{A m}^{-1}]$ tale che

$$\int_b \sigma dl = I_{tot}$$

con I_{tot} corrente totale che percorre il conduttore (od i conduttori) [9].

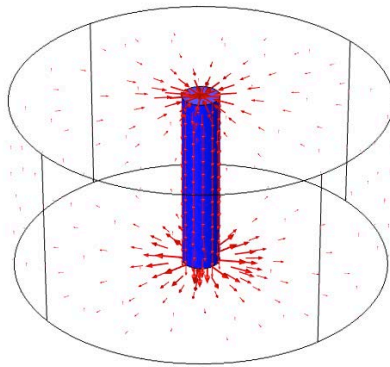


Figura 4.13: Esempio di corrente pellicolare $\sigma[\text{A m}^{-1}]$ che viene imposta nel caso di un conduttore rettilineo di lunghezza finita [9].

Così facendo la condizione di divergenza nulla del campo \mathbf{J} viene garantita ma i valori di induttanza calcolati dal software sono quelli relativi ad una coppia coassiale di conduttori

$$L_{FEM} = L_c + L_b - 2M_{c-b}$$

con L_b auto-induttanza del ritorno della corrente tramite il boundary e M_{c-b} mutua-induttanza tra il conduttore ed il boundary, e non corrispondono più

all'auto-induttanza parziale del conduttore presente nel dominio. Per tale motivo i valori ottenuti dal metodo PEEC e quelli dal codice FEM non sono confrontabili trattandosi di valori che si riferiscono ad entità matematico-fisiche differenti.

La questione cambia per la simmetria assiale: in questo caso infatti il conduttore rappresentato attraverso la sola sezione forma una spira chiusa e dunque anche imponendo una corrente la divergenza del campo \mathbf{J} rimane nulla e COMSOL Multiphysics® non applica alcuna corrente di richiusura. Conseguentemente i valori di induttanza restituiti dal software fanno riferimento all'induttanza della spira chiusa in questione.

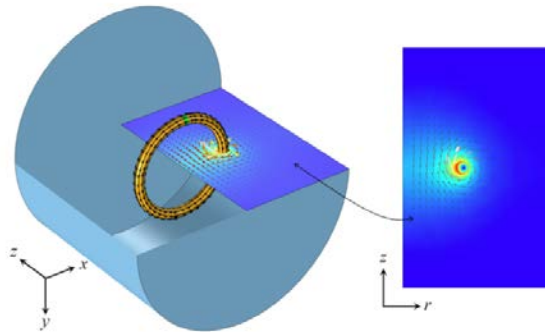


Figura 4.14: Esempio di modello di una spira caratterizzata da simmetria assiale[10].

Per quanto riguarda il metodo PEEC, per tale simmetria nel capitolo 3.3 viene descritto il procedimento adottato per costruire la matrice $[\mathbf{Z}]$. In particolare i valori di auto-induttanza relativi a ciascun elemento nei quali il conduttore è discretizzato sono calcolati sfruttando l'equazione analitica di auto-induttanza di una spira chiusa filamentare; i vari coefficienti di mutuo accoppiamento sono invece valutati per mezzo della computazione numerica di integrali ellittici e fanno riferimento anch'essi ai coefficienti di mutua-induttanza tra spire chiuse filamentari. Di conseguenza il valore di auto-induttanza ottenuto con i codici che applicano il metodo PEEC corrisponde a quello della spira chiusa rappresentata mediante la sezione in un piano r-z e poiché in questo caso la grandezza elettrica valutata è la stessa di quella valutata dal FEM i due risultati possono essere confrontati.

4.3.1 Spira a sezione circolare

La geometria presa in esame consiste in una spira a sezione rettangolare, con altezza $H = 5\text{mm}$, larghezza $W = 10\text{mm}$ e distanza dall'asse del centro della sezione $r = 500\text{mm}$. La conduttività è posta a $\sigma = 5.8 \times 10^7 \text{S m}^{-1}$ come nei casi precedenti e il range di frequenza indagato, scelto sempre in

funzione al rapporto tra spessore di penetrazione e lunghezze dei lati della sezione, corrisponde a $[10 - 1000]$ Hz.

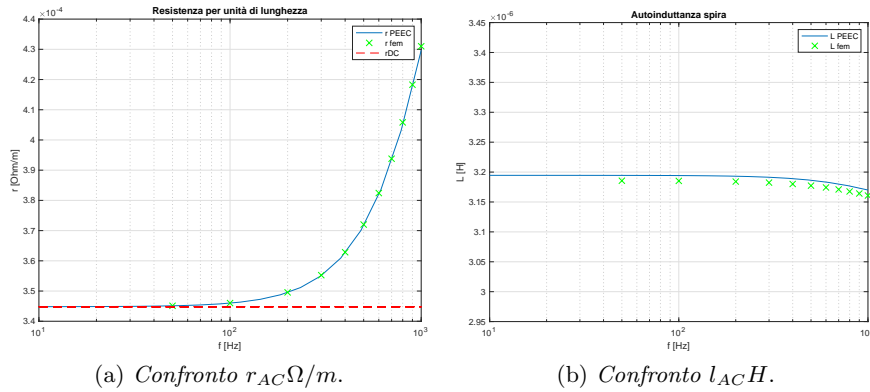


Figura 4.15: Valori di resistenza AC ed induttanza L di una spira a sezione rettangolare..

Dai grafici 4.15 emerge il riscontro tra i valori ottenuti tra i due metodi, in particolare i valori di induttanza della spira ottenuti con la procedura PEEC differiscono da quelli ottenuti tramite FEM di uno scarto massimo pari al 0.3%, scarto dovuto principalmente all'impiego di formule per spire filamentari. Nonostante questa semplificazione grazie ad una discretizzazione sufficientemente fine i risultati si avvicinano molto a quelli considerati "esatti" forniti dal metodo FEM. Si accompagnano i risultati precedenti con il confronto tra i plot delle linee isodensità di corrente forniti da entrambi i metodi:

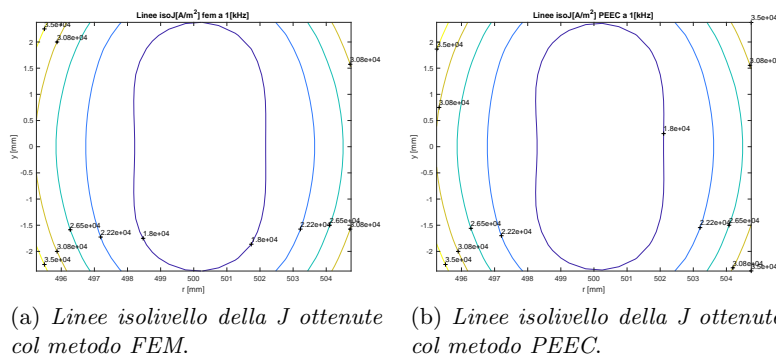


Figura 4.16: Distribuzione J per la frequenza $f = 1000$ Hz.

Una ulteriore considerazione da effettuare consiste nel giustificare l'andamento del valore di induttanza della spira in funzione della frequenza. Difatti la tendenza della corrente a scorrere lungo i bordi del conduttore non ha effetto solo sul valore delle perdite per effetto Joule (e dunque sulla resistenza

AC del conduttore) ma influisce anche la sua induttanza. L'induttanza di una spira può essere pensata come somma di due induttanze:

$$L_{loop} = L_{external} + L_{internal}$$

dove $L_{external}$ è l'induttanza associata ad il flusso di \mathbf{B} esterno alla sezione della spira mentre la $L_{internal}$ è associata al flusso che interessa la sezione interna del conduttore. Nell'ipotesi di avere una densità di corrente J costante lungo la sezione, in [22] viene ricavata l'equazione analitica

$$L_{internal} = \frac{\mu_0}{8\pi} * wirelength \quad (4.7)$$

che calcola tale valore per una sezione circolare. L'ordine di grandezza è solitamente molto inferiore rispetto alla componente esterna e dunque trascurare questo termine non introduce alcun errore significativo nelle varie applicazioni. Per le alte frequenze, man mano che la corrente tende a scorrere unicamente sulla superficie del conduttore, si avrà una densità di corrente pressoché nulla all'interno del conduttore; se ci si pone alla condizione limite per $f \rightarrow \infty$ si avrà una corrente superficiale

$$\sigma = \frac{I_{tot}}{A_c} \text{ A m}^{-1}$$

e densità di corrente nulla all'interno del conduttore. Applicando la legge di Ampère all'interno del conduttore si otterrà

$$\oint_c \mathbf{H} dl = I_{chain} = 0 \rightarrow \mathbf{H} = 0 \rightarrow \mathbf{B} = 0$$

con I_{chain} corrente concatenata dal percorso chiuso. Dunque non essendoci densità di induzione all'interno il flusso ad esse associato sarà nullo e sarà nulla l'induttanza interna. In definitiva l'induttanza diminuisce all'aumentare della frequenza perché il termine $L_{internal}$ tende a zero non avendo più induzione e flusso concatenato sulla superficie del conduttore.

Nel grafico 4.17 viene illustrato proprio tale andamento: definito il valore di auto-induttanza per unità di lunghezza di una spira

$$l = \frac{L}{2\pi r} \text{ H m}^{-1}$$

esso diminuisce con l'aumentare della frequenza tendendo ad un asintoto orizzontale il cui valore è minore rispetto a quello DC della quantità

$$L_{internal} = \frac{\mu_0}{8\pi} = 5 \times 10^{-8} \text{ H m}^{-1}$$

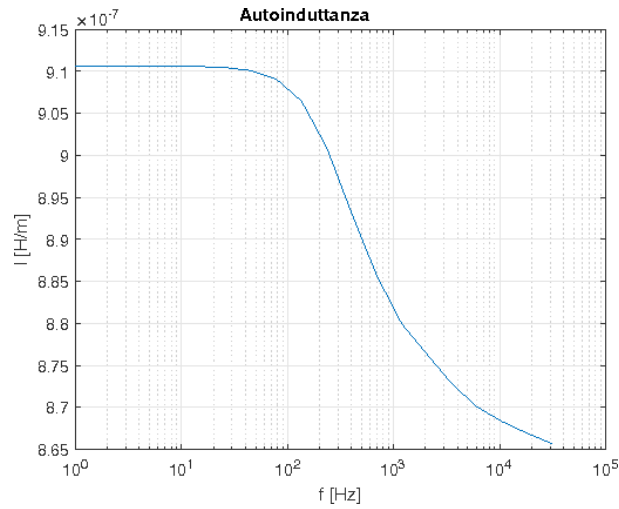


Figura 4.17: Andamento auto-induttanza parziale di un conduttore circolare

4.3.2 Effetto della distanza dall'asse

In questa sezione si vuole valutare quanto il raggio della spira influisca sull'aumento delle perdite, cioè quanta ulteriore dissimmetria introduca nella distribuzione della J . Si eseguono dunque diverse valutazioni sull'effetto pelle della spira a sezione rettangolare precedente a frequenza fissata $f = 1\text{kHz}$ facendo variare il raggio e se ne rappresenta nel grafico 4.18 la dipendenza.

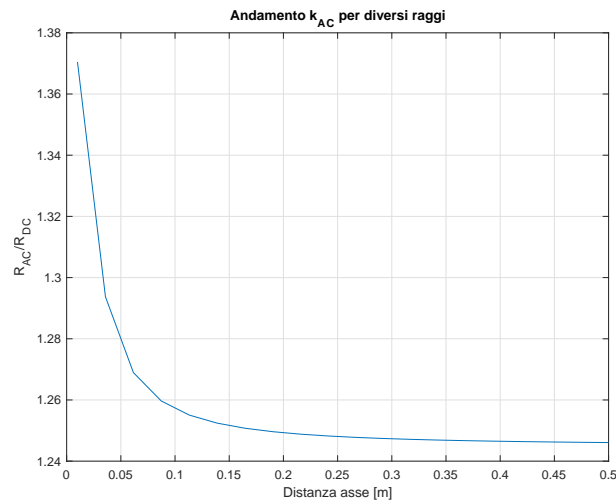


Figura 4.18: Andamento del k_{AC} rispetto il raggio della spira.

Com'era da aspettarsi per spire con un raggio di un ordine di grandezza maggiore rispetto le dimensioni della sezione si ha che la distribuzione di

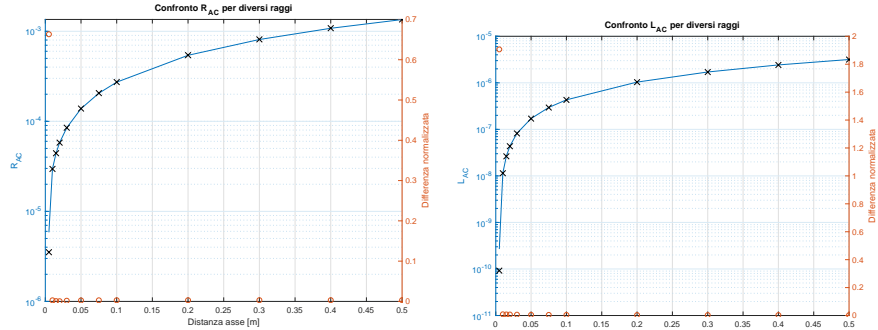
densità di corrente non presenta più importanti dissimmetrie lungo l'asse ρ ed il valore del coefficiente non dipende più fortemente dal raggio. Quando invece si hanno spire di raggio piccolo, la densità di corrente tende a distribuirsi in maniera asimmetrica rispetto all'asse verticale passante nel centro del conduttore comportando perdite addizionali e l'aumento del coefficiente k_{AC} .

4.3.3 Affidabilità PEEC per raggi piccoli

Nell'applicazione del metodo PEEC alla simmetria assiale, nella costruzione della matrice $[\mathbf{Z}]$ sono state impiegate formule analitiche di conduttori filamentari per la valutazione dei termini di auto-induttanza e mutua-induttanza dei vari elementi. Tali equazioni introducono un errore trascurabile se il raggio della spira r_i è molto maggiore del raggio della sezione a_i . Ci si chiede in questa sezione fino a che rapporto

$$\frac{a_i}{r_i}$$

l'approssimazione impiegata nella costruzione della matrice rimane valida. Anche in questo caso i valori di riferimento sono stati ottenuti da COMSOL Multiphysics[®], eseguendo uno sweep parametrico rispetto al raggio per una spira a sezione rettangolare.



(a) Andamento R_{AC} e differenza rispetto al FEM.

(b) Andamento L_{AC} e differenza rispetto al FEM.

Figura 4.19: Confronto risultati PEEC e FEM per diversi raggi.

I grafici 4.19 riportano i valori di resistenza ed induttanza ed i valori

$$\frac{|\Delta R|}{R_{FEM}} \quad \frac{|\Delta L|}{L_{FEM}}$$

pari alla differenza normalizzata tra i risultati ottenuti dal metodo PEEC e quelli di riferimento. Da essi si nota come i valori siano molto vicini anche per spire con raggi molto piccoli. Difatti pur essendo il valore del

raggio dello stesso ordine di grandezza di quello della sezione, le formule si applicano ai diversi elementi nei quali la spira è discretizzata. Siccome la discretizzazione minima solitamente impiegata prevede 20 elementi per lato (come si vedrà nella sezione seguente) l'approssimazione $r_i \gg a_{elemento}$ rimane valida e l'errore introdotto resta trascurabile. Lo stesso principio che peggiorava la situazione riguardo la nascita di instabilità nella formula analitica dell'auto-induttanza parziale per conduttori a sezione rettangolare in questo caso invece risulta a favore e aumenta il range dei valori del raggio per i quali i risultati sono affidabili. Nell'esempio difatti si hanno errori importanti solo per spire a raggio praticamente nullo, per il quale si ha a che fare non più con una spira ma quasi con un disco conduttore.

4.4 Individuazione della discretizzazione ottimale

Un aspetto di fondamentale importanza da studiare riguarda l'individuare un compromesso migliore possibile tra la discretizzazione della sezione del conduttore e l'accuratezza del risultato ottenuto. Risulta intuitivo il fatto che maggiore è il numero di elementi nei quali si discretizza il conduttore maggiore si avvicinerà il valore del risultato a quello reale, tuttavia aumentare le dimensioni del sistema comporta un aumento dell'onere computazionale (e dunque dal punto di vista pratico del tempo di calcolo) più che lineare. Di conseguenza ci si pone come utile obiettivo l'andare a determinare un numero di elementi ottimali tenendo conto di entrambi gli aspetti basandosi sui risultati di un esempio applicativo. Si considera un conduttore rettilineo a sezione quadrata (così si potrà fare riferimento al numero di elementi per lato N_{side}) di lato $W = H = 3\text{mm}$ e lunghezza $l = 500\text{mm}$. Si applicano ad esso grandezze elettriche di frequenza fissata facendo variare il numero di elementi per lato e calcolando per ciascuna discretizzazione il valore della resistenza e lo scarto relativo

$$s_i = \frac{\Delta R_i}{R_{end}} = \frac{R_i - R_{i-1}}{R_{end}}$$

definito come il rapporto tra la variazione del valore di resistenza R_{cond} valutato e la resistenza valutata con il massimo del numero di elementi per lato computato (assunto dunque il valore "vero", più vicino a quello reale a disposizione). Nelle sezioni seguenti sono presentati i risultati di tale analisi per tre range di frequenze.

4.4.1 Spessore di penetrazione pari al lato

Come prima frequenza si imposta quella alla quale corrisponde un $\delta = H = W$. Tale valore è

$$\delta = \frac{1}{\sqrt{\pi f \mu_0 \sigma}} \rightarrow f = \frac{1}{\pi \delta^2 \mu_0 \sigma} \approx 480\text{Hz}$$

calcolato per il conduttore precedentemente descritto con $\sigma_{Cu} = 5.8 \times 10^7 \text{ S m}^{-1}$. Viene dunque calcolato il valore della resistenza con il metodo PEEC per $N_{side} = 2 \dots 40$ e si rappresenta in un unico grafico 4.20 l'andamento di R e s_i .

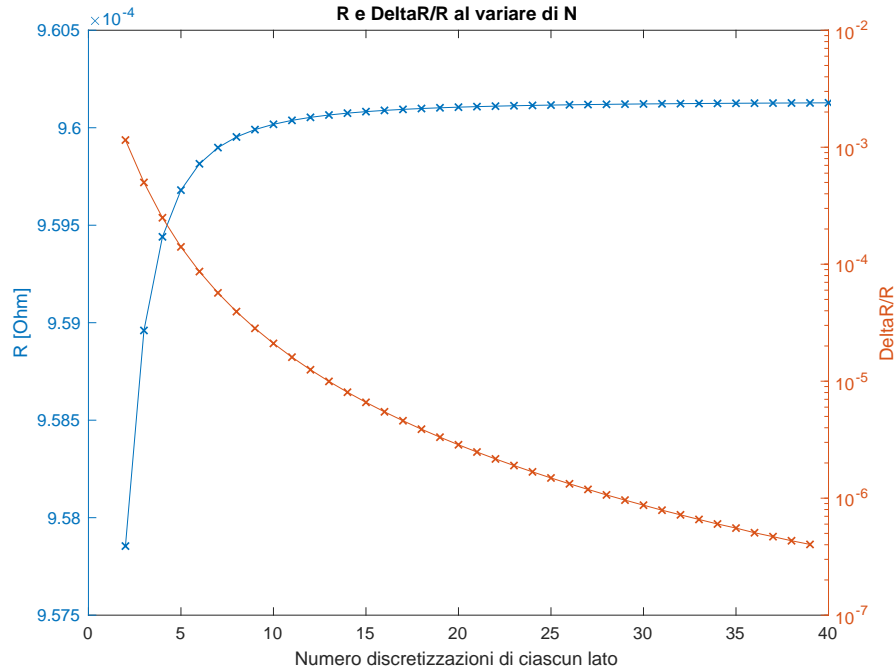


Figura 4.20: Resistenza e scarto al variare del numero di elementi per lato.

Il valore di resistenza tende al valore "vero" mentre l'ordine di grandezza dello scarto diminuisce. Dai valori presentati nel grafico emerge che già per $N_{side} = 20$ si ha un valore di resistenza molto vicino a quello asintotico senza presentare tempi computazionali troppo impegnativi.

4.4.2 Spessore di penetrazione maggiore del lato

In questo caso si può mantenere un $N_{side} = 20$ stimato per lo spessore di penetrazione precedente siccome l'onere computazionale non è eccessivo e si ha solo che un miglioramento rispetto al caso precedente del valore di resistenza così calcolato.

4.4.3 Spessore di penetrazione minore del lato

Per frequenze maggiori la soluzione più logica che viene in mente consiste nel mantenere il rapporto

$$\frac{\delta}{\left(\frac{H}{N_{side}}\right)} = 20$$

Tuttavia tale decisione rischia di comportare un numero di elementi totali decisamente elevato soprattutto se si vuole indagare frequenze che comportano spessori di penetrazione molto piccoli rispetto alle dimensioni dei lati del conduttore (come potrebbe avvenire se si volessero valutare i coefficienti maggiorativi delle perdite per correnti armoniche in macchine elettriche). In [22] si suggerisce di tenere un rapporto $\frac{\delta}{H/N_{side}} = 2$, cioè di fare in modo che il lato di ciascun elemento sia almeno pari alla metà dello spessore di penetrazione. In tal modo l'approssimazione che la corrente nell'elemento sia costante è ancora accettabile e si va a ridurre notevolmente il numero di elementi. Tale decisione viene verificata andando a valutare la resistenza del conduttore preso in esame precedentemente per una frequenza

$$f = \frac{1}{\pi \delta^2 \mu_0 \sigma} \approx 4.8 \cdot 10^4 \text{ Hz}$$

al quale corrisponde uno spessore di penetrazione $\delta \approx \frac{H}{10}$.

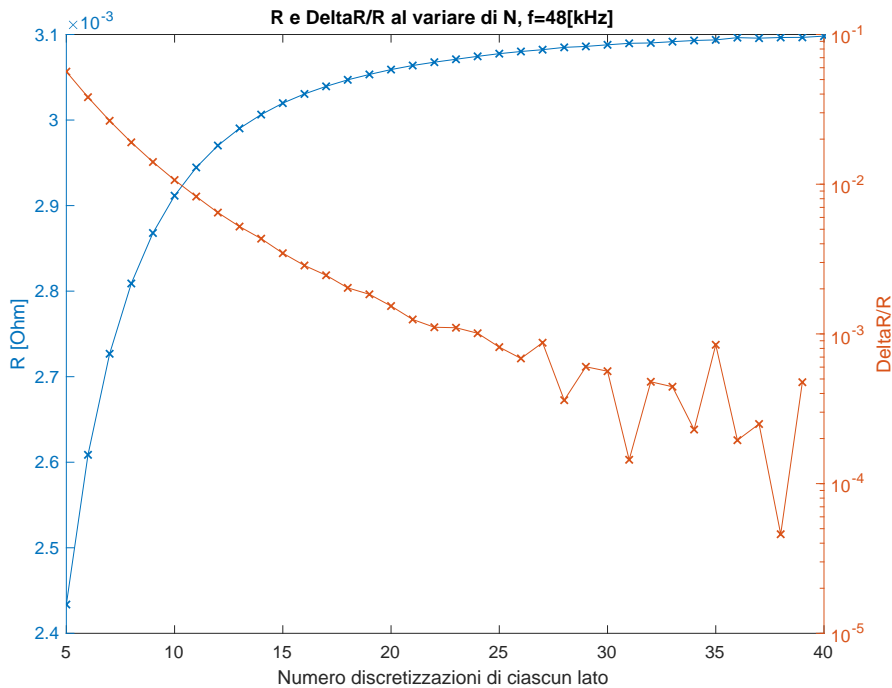


Figura 4.21: Resistenza e scarto al variare del numero di elementi per lato.

I risultati presentati nel grafico 4.21 mostrano che per $N_{side} = 20$, caso per il quale si ha $\frac{\delta}{H/N_{side}} = 2$, lo scarto relativo è dell'ordine di 10^{-3} e dunque la resistenza così valutata gode di buona validità. Si nota inoltre che per un numero di elementi maggiore inizia a manifestarsi il fenomeno di instabilità numerica del calcolo dell'auto-induttanza parziale già discusso in 3.2.

Tale discretizzazione per frequenze il cui spessore di penetrazione risulta minore del lato del conduttore è comunque una linea guida; il numero di elementi può essere aumentato ad esempio per conduttori con rapporto tra i due lati elevato: in questo caso infatti lo spessore di penetrazione per una data frequenza può essere minore rispetto ad un lato ma maggiore rispetto all'altro (che sarà dunque diviso in un numero costante di elementi). L'aumento del numero di elementi totali del sistema sarà quindi lineare e non quadratico andando a raffinare la discretizzazione lungo il lato di dimensione maggiore e l'aumento di onere computazionale risulta comunque accettabile.

In conclusione l'approccio generico che è stato applicato a tutti i risultati precedenti e che verrà applicato anche ad i risultati futuri consiste nel determinare individualmente il numero di elementi presenti lungo i due lati del conduttore N_h e N_w ; se la frequenza presa in esame comporta uno spessore di penetrazione di lunghezza pari ad un decimo della dimensione del lato allora si impone $N_{lato} = 20$ garantendo che la lunghezza di ciascun elemento sia almeno pari alla metà dello spessore di penetrazione. Per spessori di penetrazione più piccoli si fissa il rapporto

$$\frac{\delta}{l_{el}} \approx 2$$

ed il numero di elementi del lato viene determinato con l'approssimazione all'intero più vicino del rapporto

$$\frac{2L_{lato}}{\delta}$$

Capitolo 5

Analisi proximity effect

Nel capitolo precedente è stato analizzato l'effetto pelle prendendo in considerazione conduttori singoli. Nella realtà tale condizione non si verifica mai poiché nei circuiti avviene spesso che vi siano molteplici conduttori. Difatti per la simmetria planare 2D il caso preso in esame non è fisicamente accettabile poiché la divergenza del campo \mathbf{J} non è nulla non avendo previsto alcun percorso di ritorno per la corrente. Andando dunque a rappresentare più conduttori nello spazio all'effetto pelle si aggiunge una ulteriore disuniformità della densità di corrente dovuta all'interazione tra il campo d'induzione magnetica dei diversi conduttori. Tale effetto viene indicato con il nome di "effetto prossimità" (proximity effect) e dal punto di vista dei parametri concentrati può essere considerato, come visto nel capitolo 3.4, mediante generatori di tensione comandati in corrente di valore pari al coefficiente di mutua-induttanza tra due conduttori. In questo capitolo sono presentati i risultati ottenuti analizzando diverse geometrie e sistemi di conduttori nello spazio applicando il metodo PEEC descritto nel capitolo 3 tramite codici in MATLAB[®] opportunamente adattati per trattare la presenza di un numero arbitrario di conduttori e per diverse simmetrie 2D.

5.1 Prossimità di due conduttori

Come primi casi si indagano le perdite addizionali in configurazioni geometriche composte da due conduttori per diverse tipologie di simmetrie. Con l'aumento dei conduttori in gioco aumentano le variabili che influenzano le perdite addizionali, come la distanza tra essi e le entità delle correnti complessive che li interessano. Difatti a differenza dei casi precedente per i quali il coefficiente maggiorativo k_{AC} non dipende dalla corrente nel conduttore, per sistemi con diversi conduttori il rapporto tra le diverse correnti può influire sulle perdite.

5.1.1 Simmetria planare

Quando si vuole analizzare una spira dalla forma allungata che si estende prevalentemente nel verso di una direzione risulta particolarmente efficiente adottare una rappresentazione 2D a simmetria planare potendo trascurare l'effetto delle testate.

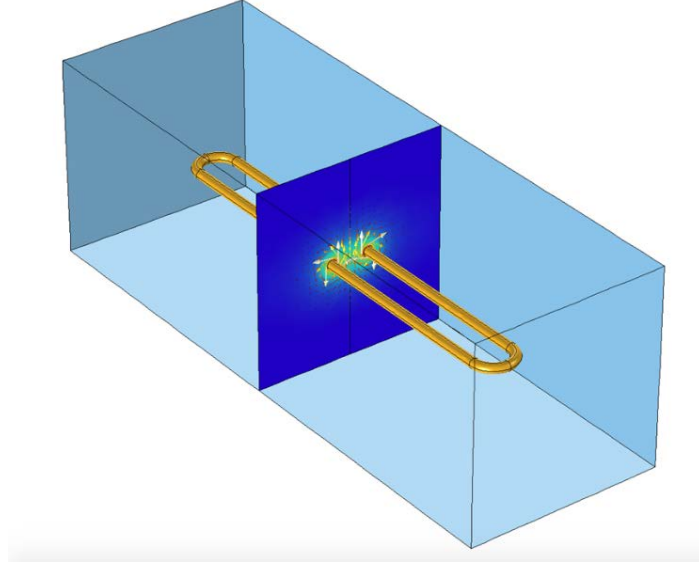


Figura 5.1: Visualizzazione simmetria planare per rappresentare una spira allungata.

Tale configurazione fisica è dunque descritta da due sezioni dei conduttori allineati, distanziati da una certa distanza d e percorsi dalla stessa corrente complessiva entrante nel piano per una sezione ed uscente per l'altra (dunque le correnti complessive assegnate ai due conduttori avranno segni opposti). Si sceglie di rappresentare la geometria simile a quella analizzata in [22] e [3] che prende in considerazione due conduttori a sezione quadrata di lato $W = H = 5\text{mm}$ i cui centri delle sezioni distano $d = 10\text{mm}$. La lunghezza dei conduttori è posta pari a $l = 250\text{mm}$ e si assegnano correnti complessive unitarie di segno opposto. Applicando la procedura PEEC descritta nella sezione 3.5 si otterranno i valori di resistenza equivalente AC ed induttanza dei conduttori. L'induttanza così ricavata associata ad un conduttore e dunque ad un lato della spira è intesa come

$$\frac{\int_{c1} \mathbf{A} d\mathbf{l}}{I} = \frac{\int_{c1} \sum_{j=1}^{N_c} \mathbf{A}_j d\mathbf{l}}{I} = L_{p1_{auto}} + \sum_{j=1}^{N_c} M_{p1-j} \quad (5.1)$$

ed è chiamata induttanza parziale netta ("net partial inductance", [22]) pari alla somma dell'auto-induttanza parziale ed i coefficienti di mutua-

induttanza parziale tra tutti gli altri conduttori presenti e quello preso in esame. Nel caso in esame dove $N_c = 2$ in essa vi sarà già tenuto conto dell'accoppiamento con il conduttore mentre i termini relativi ai tratti di conduttore in testata sono trascurati (approssimazione lecita se si suppone che la spira sia rettangolare implicando che il prodotto scalare $\mathbf{A}_{testata} \cdot d\mathbf{l}_{c1} = 0$). Per quanto riguarda la risoluzione della stessa geometria tramite metodo FEM in COMSOL Multiphysics[®], essendo previsto il ritorno nella corrente tramite il secondo conduttore e garantita la divergenza nulla del campo \mathbf{J} , non viene impostata alcuna corrente di richiusura superficiale al boundary ed il valore di induttanza ricavato è lo stesso appena descritto; ne consegue che per questa geometria risulta lecito il confronto sia del coefficiente k_{AC} che dell'induttanza parziale ottenuti con i due metodi.

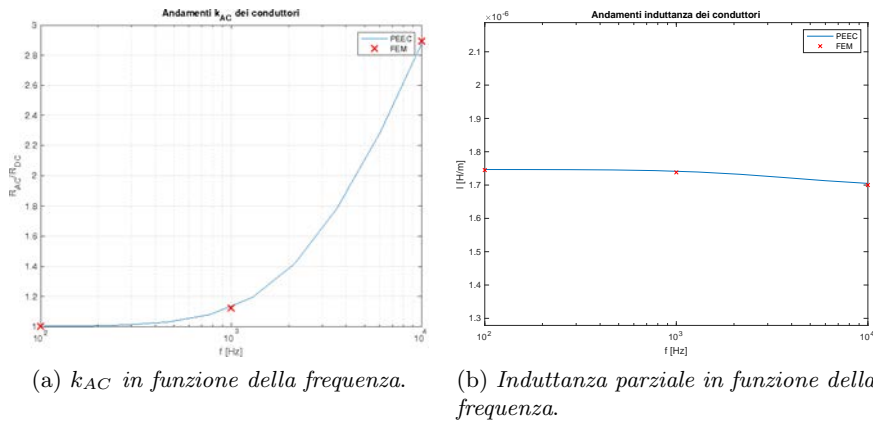


Figura 5.2: Confronto risultati PEEC e FEM.

Nei grafici 5.2 si presentano i risultati ottenuti dai quali emerge un'ottimo accordo tra i valori ricavati dai due metodi sia per quanto riguarda il coefficiente addizionale che l'induttanza parziale dei due conduttori. Si riportano i valori relativi ad un solo dei due conduttori poiché essi coincidono, come ci si poteva aspettare, per via della disposizione simmetrica nello spazio e della corrente. A supporto di ciò si riporta l'andamento della densità di corrente sui due conduttori in 5.3 dal quale appare evidente il comportamento perfettamente simmetrico.

Da essa si nota inoltre come in tale configurazione la densità di corrente tenda ad accentrarsi non solo verso gli angoli (a causa dell'effetto pelle visto nel precedente capitolo) ma anche verso la superficie nella direzione del conduttore percorso da corrente opposta. Ci si sofferma brevemente su tale osservazione per esporre un ragionamento qualitativo che giustifica tale disuniformità ulteriore e permette così di avere un certo feedback riguardo la presunta correttezza dei risultati ottenuti evitando di affidarsi ciecamente agli output dei codici e dei software impiegati. L'andamento della densità di corrente 5.3 è difatti dovuto alla legge di Faraday: si ipotizzi il conduttore di

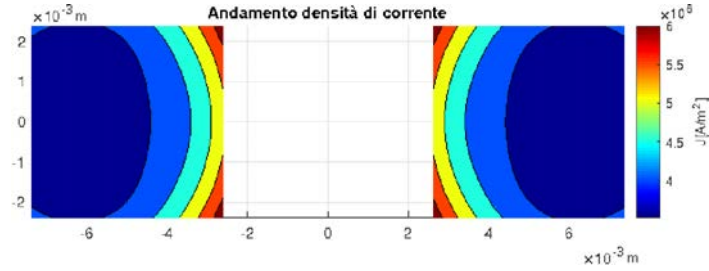


Figura 5.3: Andamento J A/m^2 per $f = 1 \times 10^4$ Hz.

destra come conduttore sorgente percorso da una corrente uscente dal piano uniformemente distribuita. Per la legge di Biot-Savart si può assumere che esso generi un campo d'induzione magnetica $\mathbf{B}(t)$

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{A_{dx}} \frac{\mathbf{J}(t) \times \mathbf{a}_R}{R^2} da \quad (5.2)$$

che in corrispondenza del centro del conduttore di sinistra ha componente unicamente verticale (figura 5.4). Essendo in regime sinusoidale, per la legge di Faraday un campo d'induzione variabile induce un campo elettrico \mathbf{E} che nella regione di materiale conduttore di sinistra si traduce in una corrente che tende ad opporsi alla causa che la genera. La conseguenza di tutto ciò, ipotizzando che la corrente stia aumentando nel conduttore di destra, è la nascita della distribuzione di densità di corrente \mathbf{J} nel conduttore di sinistra già percorso per ipotesi da una densità di corrente uniforme entrante nel conduttore. La \mathbf{J} totale è la somma della densità di corrente uniforme e quella indotta dal conduttore vicino che comporterà un aumento del modulo nella regione di destra ed una diminuzione in quella di sinistra essendo in questo caso i segni delle due distribuzioni di \mathbf{J} diversi. Ripercorrendo un ragionamento analogo si ottiene lo stesso risultato speculare per il conduttore di destra.

Il comportamento della densità di corrente che ci si aspetta da tale ragionamento è così in accordo con quello ottenuto nella immagine 5.3, pur essendo esso unicamente qualitativo poiché molte ipotesi non consistono nel caso in esame: in particolare sappiamo già che la \mathbf{J} nei conduttori non è uniforme ed il campo d'induzione magnetica generato da conduttori rettangolari interessati da densità di corrente non uniformemente distribuita non è detto che abbia l'andamento raffigurato.

5.1.2 Dipendenza dalla distanza e corrente

Risulta ora rilevante confrontare l'aumento delle perdite addizionali in concomitanza sia dell'effetto pelle che dell'effetto di prossimità con il caso di un conduttore di pari dimensioni isolato. Come prevedibile l'ulteriore disuniformità del campo \mathbf{J} introduce ulteriori perdite e dunque come appare

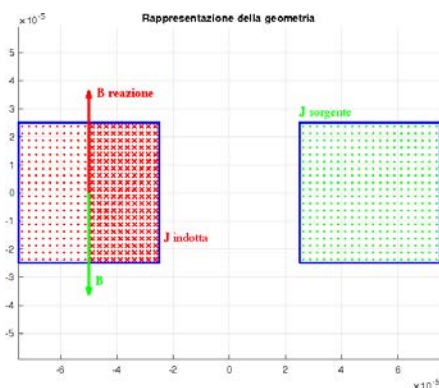


Figura 5.4: Rappresentazione qualitativa della corrente indotta per effetto di prossimità.

nel grafico 5.5 il coefficiente k_{AC} è superiore per ogni valore di frequenza rispetto al caso precedente.

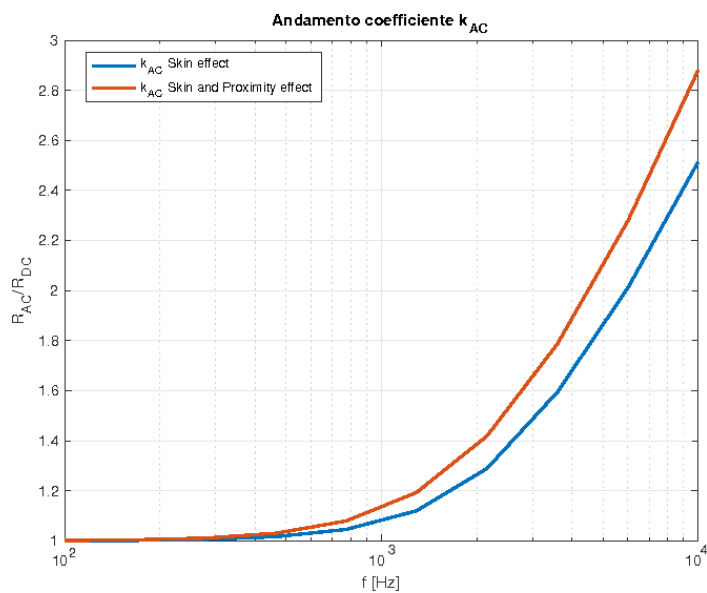


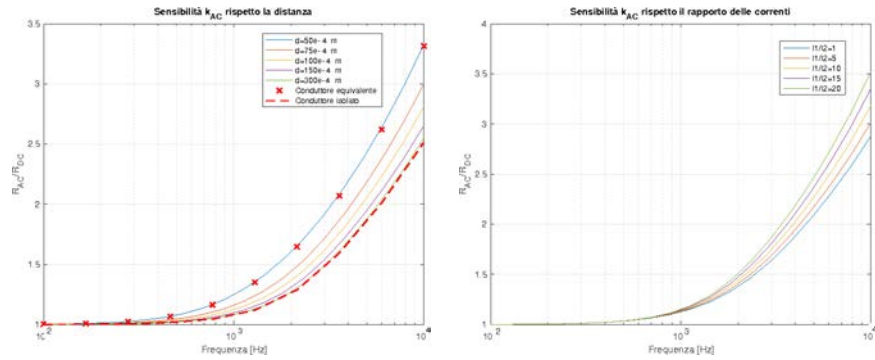
Figura 5.5: Coefficiente maggiorativo in caso di conduttore isolato o in presenza di un altro conduttore.

Ciò che maggiormente penalizza tale coefficiente è indubbiamente la distanza tra i due conduttori ma anche il rapporto tra i valori efficaci delle correnti che li interessano. Per indagare quanto questi due parametri influiscano sulla resistenza AC dei conduttori in gioco si considera dunque un sistema composto da due conduttori non più intesi come lati di una stessa spira allungata che possono essere interessati così da correnti arbitrarie. Si

eseguono due analisi parametriche così impostate:

- correnti nei due conduttori uguali in modulo, calcolo del coefficiente maggiorativo per diversi valori della distanza tra i centri dei due conduttori;
- distanza tra i due conduttori fissata, si va ad assegnare un rapporto diverso tra i moduli delle due correnti nei due conduttori.

Dall'analisi rispetto la distanza ci si aspetta che all'aumentare della distanza tra i due conduttori l'effetto di prossimità diminuisca tendendo così al caso per distanza infinita di conduttore isolato soggetto unicamente all'effetto pelle. Viceversa se i due conduttori sono posti affiancati ci si aspetterà che le perdite siano le stesse di un conduttore unico di larghezza $2W$. Ciò è vero in questa geometria a causa della simmetria rispetto alla direzione orizzontale della densità di corrente dovuta all'effetto pelle che implica un'equa suddivisione della corrente lungo i due conduttori isolati tra loro e connessi in parallelo tramite le condizioni elettriche, per una simmetria assiale ad esempio questa considerazione non è valida lungo l'asse x ma solo lungo quello verticale y . Nel grafico di sinistra 5.6 sono riportate le curve per diverse distanze; emerge che già se la distanza tra i conduttori è pari a circa sei volte la dimensione di uno dei due l'effetto di prossimità è quasi nullo ed è lecito considerare solo l'effetto pelle come causa delle perdite addizionali.



(a) k_{AC} in funzione della frequenza per diverse distanze.

(b) k_{AC} in funzione della frequenza per diversi rapporti tra le correnti.

Figura 5.6: Sensibilità nell'aumento delle perdite addizionali rispetto distanza tra i conduttori e rapporto delle correnti.

Dalla valutazione al variare del rapporto del modulo delle due correnti ci si aspetta invece che le distribuzioni di \mathbf{J} non saranno più speculari nei due conduttori con quella del conduttore interessato dalla corrente complessiva minore più penalizzata. Ciò è dovuto al fatto che anche se l'entità dei coefficienti di mutuo-acoppiamento parziale dipende esclusivamente da considerazioni geometriche (rimaste invariate nelle varie simulazioni) la tensione

indotta da un conduttore sull'altro dipende dal prodotto $j\omega M\bar{I}$ e dunque il conduttore con maggiore corrente influisce maggiormente sull'altro.

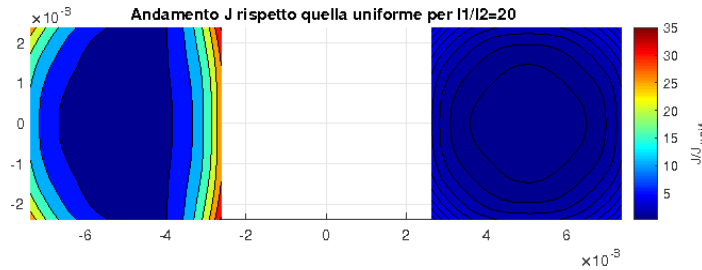


Figura 5.7: Densità di corrente rispetto quella uniforme per $f=1 \times 10^4$ Hz e $d=10$ mm.

Ad una disuniformità nella distribuzione della \mathbf{J} ulteriormente accentuata corrispondono maggiori perdite addizionali nel conduttore a corrente minore e di conseguenza un aumento progressivo del coefficiente k_{AC} riportato nel grafico di destra 5.6. Nella figura 5.7 vengono riportati sulla stessa scala di colori gli andamenti delle densità di correnti rispetto i valori uniformemente distribuiti, evidenziando con chiarezza come nel conduttore a corrente minore vi sia una disuniformità molto più marcata che in quello a corrente maggiore che risente di una influenza molto minore.

5.2 Induttore per alta frequenza

Si passa ora ad analizzare un induttore per applicazioni ad alta frequenza coreless, cioè senza nucleo ferromagnetico. Tale oggetto è caratterizzato da una simmetria assiale dunque sarà necessario ricorrere alla costruzione della matrice $[\mathbf{Z}]$ come descritto nella sezione 3.3. Lo studio della dipendenza delle perdite dalla frequenza ha anche un'alta rilevanza essendo un componente pensato per lavorare in condizioni nominali a tali frequenze e dunque accertarsi che esse non aumentino eccessivamente rispetto alla condizione DC risulta essenziale per avere una efficienza buona e ridurre l'aumento di temperatura a regime.

Si prende in esame un'induttore piano (le cui spire si sviluppano lungo la direzione radiale) in figura 5.8 caratterizzato dalla seguente geometria:

H [m]	W[m]	R_{int} [m]	s [m]	N_{turns}
70×10^{-6}	600×10^{-6}	20×10^{-3}	400×10^{-6}	10

dove

- H = altezza del conduttore;
- W = larghezza del conduttore;

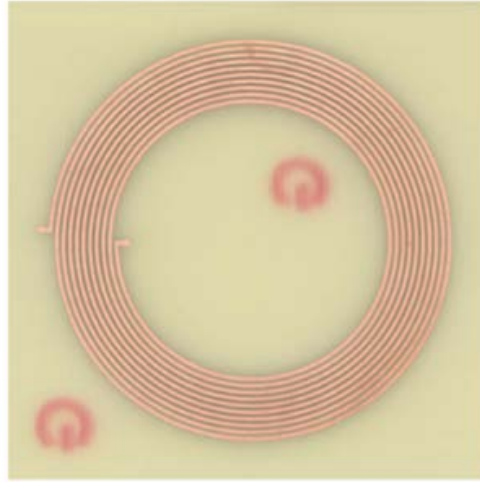


Figura 5.8: Foto dell'induttore piano del quale sono state compiute misurazioni sperimentali in [30].

- R_{int} = distanza dal centro della prima spira;
- s = distanza tra due spire;
- N_{turns} = numero di spire.

Si descrive la disposizione delle dieci spire su un piano (r-z) tramite la loro sezione rettangolare e si applica la procedura PEEC per il calcolo delle perdite addizionali per effetto pelle e prossimità come se fossero conduttori distinti; si terrà conto nella matrice d'incidenza del loro collegamento elettrico che in questo caso li vede connessi in serie imponendo lo scorrimento della stessa corrente complessiva in ogni conduttore.

Nel grafico 5.9 si riporta la dipendenza del valore di resistenza dell'induttore rispetto la frequenza, risultati in accordo con i valori presenti in [30] ottenuti sia mediante una valutazione al calcolatore che tramite diretta misurazione sul componente. Dalla distribuzione della densità di corrente per tale geometria, raffigurata in 5.10 per $f = 1\text{MHz}$, evidenzia che la causa delle perdite addizionali non sia solo l'effetto pelle ma ci sia una componente importante di effetto di prossimità essendo i conduttori più interni e più esterni maggiormente deviati dalla condizione uniformemente distribuita. Nota la frequenza nominale di funzionamento si può dunque eseguire un'ottimizzazione dell'induttore agendo sui parametri geometrici per trovare la soluzione a minor sezione di rame mantenendo costanti le perdite.

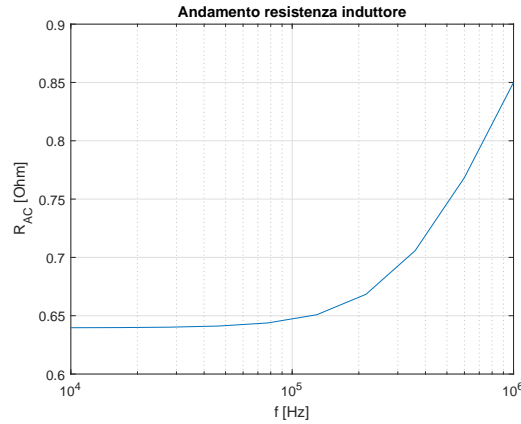


Figura 5.9: Andamento resistenza dell'induttore rispetto la frequenza.

5.3 Proximity effect sub-conduttori

Si supponga ora di avere un singolo conduttore a sezione intera interessato da grandezze elettriche ad alta frequenza e soggetto ad un effetto pelle importante. Per ridurre l'entità è possibile suddividere il conduttore in diversi sub-conduttori connessi in parallelo ed isolati elettricamente tra loro di sezione scelta in modo che la sezione complessiva sia uguale a quella del conduttore iniziale così da mantenere la stessa resistenza DC. A titolo di esempio si sceglie un conduttore a sezione circolare rettilineo di raggio $r = 2.2\text{mm}$: come si evince dall'andamento del coefficiente k_{AC} nel grafico 5.11 per una frequenza $f = 10\text{kHz}$ le perdite per effetto pelle sono il doppio di quelle DC mentre per $f = 100\text{kHz}$ le perdite aumentano più di cinque volte.

Per ridurre tali perdite si può suddividere il conduttore in più sub-conduttori di sezione minore in modo tale che per loro il rapporto

$$\frac{\text{radius}}{\delta}$$

sia molto minore aspettandosi dunque che la corrente nei diversi sub-conduttori non subisca una importante dissimmetria per effetto pelle con conseguente diminuzione delle perdite. Si prendono dunque sulla base di questa assunzione due configurazioni geometriche:

- Una suddivisione in un numero di sub-conduttori $N_{sub} = 9$ di raggio

$$r_{sub} = \sqrt{\frac{r^2}{N_{sub}}} \approx 0.62\text{mm}$$

disposti nello spazio sui vertici e sui punti medi dei lati di un quadrato, distanziati tra loro di 0.2mm per la presenza di materiale isolante;

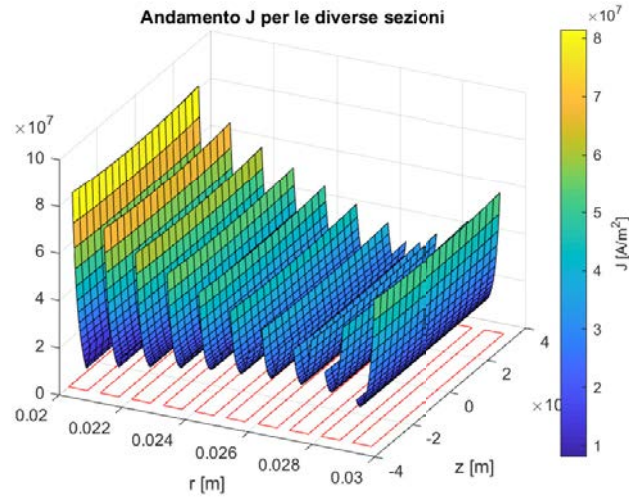


Figura 5.10: Andamento J per le diverse spire del conduttore.

- Una suddivisione in un numero di sub-conduttori $N_{sub} = 13$ di raggio $r_{sub} \approx 0.74\text{mm}$ distanziati tra loro dello stesso valore precedente e disposti nello spazio in maniera simile alla precedente con i quattro conduttori aggiuntivi collocati a fianco nei versi cardinali per limitare l'ingombro complessivo.

A queste geometrie si applicano le procedure PEEC assegnando un'opportuna matrice d'incidenza che tenga conto della loro connessione elettrica in parallelo, permettendo così di ottenere la resistenza AC del sistema di conduttori. Nelle figure 5.12 si presentano i risultati ottenuti: gli andamenti dei coefficienti addizionali sono estremamente simili a quello in figura 5.11 relativo al conduttore singolo.

La causa di ciò può essere dedotta dagli andamenti della densità di corrente: aumentando il numero di conduttori l'effetto pelle è stato ridotto ma è aumentato l'effetto di prossimità che ha ugualmente modificato l'andamento del modulo della densità di corrente rispetto la condizione uniformemente distribuita. Gli andamenti della J ottenuti per conduttori non intrecciati lungo lo sviluppo longitudinale (caratterizzati da una disposizione costante nel piano x,y) sono confrontati da quelli ottenuti in [18], nel quale viene analizzato l'effetto di prossimità per una spira composta da 13 conduttori con analoga disposizione rispetto quella impiegata. Da questa analisi appare evidente la necessità di intrecciare i diversi sub-conduttori affinché le perdite addizionali siano realmente ridotte; aumentare semplicemente il numero di conduttori in parallelo non è sufficiente. Si comprendo dunque maggiormente il motivo per cui i diversi conduttori che compongono un cavo Litz sono intrecciati tra loro: cambiando la posizione lungo lo sviluppo del cavo si ha

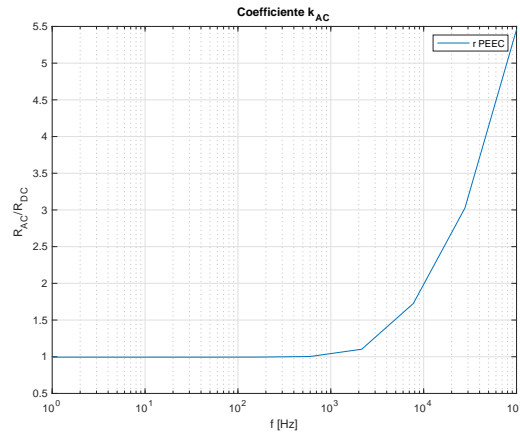


Figura 5.11: Perdite addizionali rispetto la frequenza per un conduttore a sezione intera.

che ogni conduttore sarà soggetto da coefficienti di mutuo-accoppiamento di diversa entità in base alla posizione che si medieranno nella lunghezza del cavo facendo in modo che l'impedenza presentata da ogni filamento sia uguale e garantendo un'equa distribuzione della corrente nei diversi sub-conduttori riducendo l'effetto di prossimità. Allo stesso tempo la piccolissima sezione implica che l'effetto pelle sia trascurabile nei singoli conduttori ottenendo così una distribuzione uniforme della densità di corrente in essi.

5.4 Analisi sulla discretizzazione ottimale

L'applicazione del metodo PEEC per la valutazione dell'effetto pelle e prossimità richiede la costruzione della matrice $[\mathbf{Z}_{\text{tot}}]$ come descritto nella sezione 3.5. Tale matrice quadrata ha un numero di elementi pari a

$$\sum_{j=1}^{N_c} N_{div_j}$$

e per ottenere i risultati si dovrà risolvere un sistema caratterizzato da una matrice piena le cui dimensioni dipendono sia dal numero di conduttori presenti che dalla loro discretizzazione. Può dunque facilmente incorrere il rischio per per sistemi composti da un elevato numero di conduttori che le dimensioni della matrice siano troppo grandi e non possano essere gestite dalla memoria del calcolatore impiegato o che l'onere computazionale richiesto per la risoluzione del problema comporti tempi di attesa estremamente lunghi. Di conseguenza scegliere la discretizzazione dei diversi conduttori come suggerito nella sezione 4.4 non è sempre ammissibile e nella seguente sezione ci si pone il problema di come poter ridurre la dimensione del sistema senza penalizzare l'attendibilità dei risultati ottenuti.

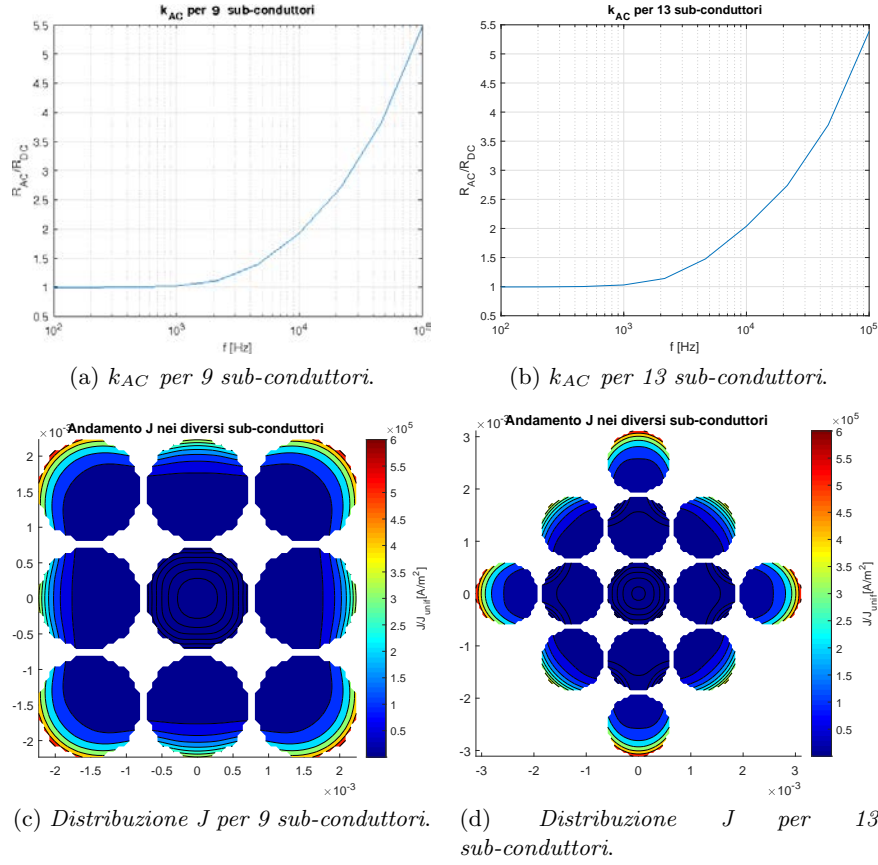


Figura 5.12: Perdite addizionali e distribuzione J nelle due disposizioni di sub-conduttori.

5.4.1 Sensibilità risultato rispetto discretizzazione

Si supponga di avere un sistema composto da due conduttori a sezione quadrata e di essere interessati a calcolare le perdite in uno solo di essi dovute sia all'effetto di prossimità che all'effetto pelle ad una frequenza fissata. Si sceglie una sezione caratterizzata da $H = W = 25\text{mm}$, conducibilità $\sigma = 5.8 \times 10^7$ e se ne vuole calcolare il valore del parametro k_{AC} per la frequenza $f = 500\text{Hz}$ alla quale corrisponde uno spessore di penetrazione $\delta = 3\text{mm}$ indicando quindi un aumento significativo delle perdite. Per quanto discusso nella sezione 4.4 il conduttore preso in esame dovrà essere suddiviso in almeno $N_{div} = 400$ elementi in modo da garantire che la distribuzione della densità di corrente causata dall'effetto pelle sia adeguatamente rappresentata. Tuttavia non essendo interessati alla resistenza del secondo conduttore, ma essendo la sua presenza richiesta nel sistema per la valutazione dell'effetto di prossimità causato sul primo conduttore, il numero di

elementi nei quali dev'essere diviso non è più vincolato dalla valutazione del suo effetto pelle ma in questo caso dall'effetto che provoca sulla distribuzione di corrente del primo. Presa considerazione di ciò è lecito scegliere un numero di elementi nei quali dividerlo minore se tale scelta non va ad influire pesantemente sul calcolo del parametro k_{AC} del primo conduttore. Come visto nella sezione 5.1.2 la distanza tra due conduttori è certamente un fattore dal quale dipende l'accoppiamento mutuo tra essi e dunque dalla quale dipende l'effetto di prossimità. Si va così a calcolare il valore del coefficiente maggiorativo per la frequenza fissata tenendo costante il numero di discretizzazioni del primo conduttore e variando quelle del secondo in un range $Nh_{c2} = Nw_{c2} = [5 - 20]$ per diversi valori della distanza che intercorre tra i due conduttori.

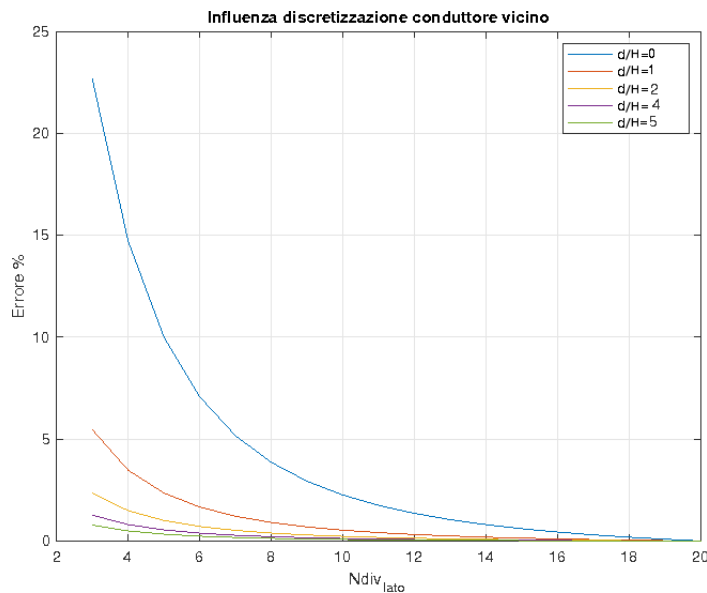


Figura 5.13: Errore percentuale per diverse distanze al variare il numero di elementi del conduttore sorgente.

Nel grafico 5.13 si riporta l'errore in percentuale rispetto al valore ottenuto con il codice FEM calcolato come

$$\delta_{\%} = 100 \frac{|k_{AC_{FEM}} - k_{AC_{Ndiv}}|}{k_{AC_{FEM}}} \quad (5.3)$$

in funzione del numero di discretizzazioni di ciascun lato e per diverse distanze. Come prevedibile per due conduttori vicini una discretizzazione grossolana comporta un errore importante mentre per conduttori lontani essendo l'effetto di prossimità molto basso anche se la sua valutazione è compromessa l'effetto sul risultato complessivo viene mitigato dall'aumento

dovuto dall'effetto pelle. Da un punto di vista quantitativo emerso dalla geometria presa in esame si possono seguire le seguenti linee guida:

- Se tra due conduttori intercorre una distanza maggiore di circa cinque volte la dimensione maggiore della sezione $d > 5 * \max(H, W)$, allora i conduttori possono esser discretizzati con $N_{div} \approx 25$;
- Se la distanza è compreso nell'intervallo $\max(H, W) < d < 5 * \max(H, W)$, allora scegliere $N_{div} = 100$ comporta comunque risultati affidabili;
- Se la distanza è minore delle dimensioni della sezione allora è necessario stare alle indicazioni già discusse nella sezione 4.4 poiché ridurre il numero di elementi può penalizzare in maniera importante il risultato.

Tali osservazioni non sono rigorose poiché la scelta dipenderà fortemente dall'aspect-ratio delle sezioni dei conduttori in gioco.

5.4.2 Soluzione per sistemi grandi

Nella sezione precedente si è discusso come sia possibile ridurre le dimensioni del sistema se si è interessati alla valutazione delle perdite in un unico conduttore. Nella maggior parte dei casi tuttavia si è interessati alla valutazione delle perdite in tutti gli elementi che costituiscono il sistema di conduttori analizzato richiedendo dunque che per ogni conduttore venga effettuata la discretizzazione fine per valutarne adeguatamente sia l'effetto pelle che di prossimità. Qualora l'onere computazionale risulti insostenibile, è possibile ridurlo notevolmente sfruttando le considerazioni precedenti: si possono eseguire difatti un numero di simulazioni pari al numero di conduttori N_c presenti nel sistema con l'intenzione di calcolare in maniera precisa le perdite addizionali in un solo conduttore per ogni simulazione. Così facendo nelle singole simulazioni è possibile adottare le riduzioni del numero di elementi viste nella sezione precedente diminuendo notevolmente le dimensioni del sistema ed i tempi di calcolo pur ottenendo dei risultati caratterizzati da un'ottima validità. La convenienza di compiere N_c simulazioni con matrici $[\mathbf{Z}_{tot}]$ ridotte rispetto ad un'unica simulazione con un numero di elementi elevato è garantita dal fatto che il tempo impiegato dal calcolatore per risolvere un sistema di una certa grandezza aumenta più che linearmente con le dimensioni del sistema.

A sostegno di ciò è stata eseguita l'analisi delle perdite addizionali di un sistema composto da un numero di conduttori variabile sia mediante un'unica applicazione della procedura PEEC (discretizzando dunque ogni conduttore in una volta sola in un numero di elementi tale da poterne valutare sia l'effetto pelle che quello di prossimità) che ripetendo più volte la procedura riducendo il numero di discretizzazioni per tutti i conduttori tranne uno. Il tempo medio impiegato per ottenere risultati caratterizzati da un errore minore del 4% al variare del numero di conduttori nel sistema

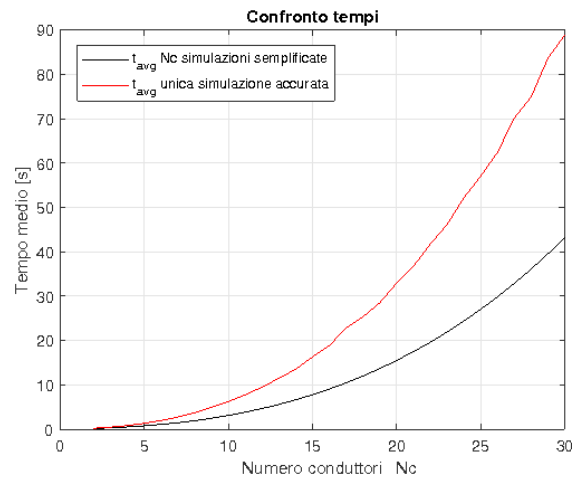


Figura 5.14: Tempo medio su 200 cicli impiegato per ottenere i valori k_{AC} di un numero N_c di conduttori.

è raffigurato nel grafico 5.14 dal quale si evince chiaramente come l'onere computazionale nel risolvere il sistema con un'unica analisi non solo sia sempre maggiore ma aumenti molto più rapidamente. È opportuno ricordare che il tempo indicato nel grafico 5.14 dipende fortemente dalle prestazioni del calcolatore impiegato e che tale confronto ha come scopo quello di manifestare la differenza di tempo di calcolo a parità di prestazioni.

Oltre che per questioni di tempo di calcolo, questa accortezza permette l'analisi di sistemi che se analizzati tramite una discretizzazione descritta in 4.4 per tutti i conduttori comporterebbero una matrice $[Z]$ troppo grande per essere gestita dalla memoria del calcolatore.

Capitolo 6

Ulteriori applicazioni

Nei capitoli precedenti sono state applicate e verificate le procedure PEEC per la valutazione dell'effetto pelle e di prossimità in sistemi composti da un arbitrario numero di conduttori caratterizzati da una simmetria 2D sia planare che radiale in un dominio omogeneo. Inoltre sono stati discussi tramite l'analisi di diverse configurazioni geometriche di conduttori vari casi ognuno dei quali ha fatto emergere particolari aspetti di tali fenomeni. Nel capitolo seguente si impiegheranno i codici per la valutazione delle perdite addizionali in vari casi applicativi di più pratico interesse con lo scopo di evidenziare l'utilità e la versatilità delle procedure sviluppate nel corso di questo lavoro.

6.1 Ottimizzazione perdite

Come prima applicazione si vuole determinare la sezione di un induttore per alte frequenze coreless (quindi senza nucleo ferromagnetico) in modo che ad una frequenza specifica esso sia soggetto a minor perdite possibili. Tale obiettivo è di notevole interesse sia da un punto di vista di efficienza del dispositivo che da un punto di vista termico; tali dispositivi sono ampiamente impiegati in circuiti di elettronica di potenza ed in presenza di componenti la cui performance è fortemente limitata dalla loro temperatura. Diminuire le perdite in gioco permette dunque di avere un miglioramento complessivo nelle prestazioni del dispositivo nel quale questo componente è sfruttato. Si prenda un induttore caratterizzato dalla seguente geometria:

R [m]	H [m]	W [m]	f_n [Hz]	e [m]	Nc
10×10^{-3}	10×10^{-3}	1×10^{-4}	112	50×10^{-6}	4

il cui significato dei diversi parametri è illustrato nell'immagine 6.1.

Si vuole dunque fare in modo che la resistenza AC di tale elemento sia la minore possibile mantenendo costante il raggio interno (affinché il valore di induttanza rimanga praticamente invariato). Se si stesse ragionando in

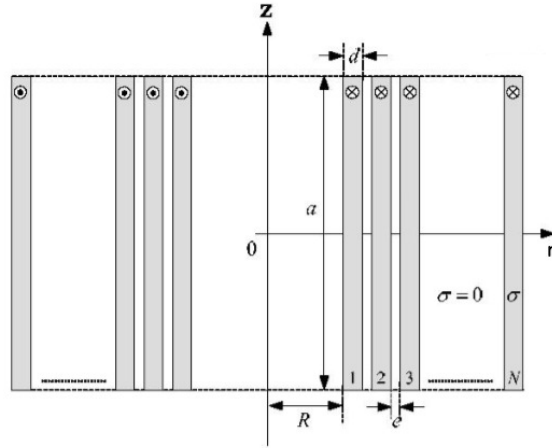


Figura 6.1: Geometria induttore per alte frequenze [30].

termini di grandezze elettriche costanti la soluzione a tale problema è banale: dalla formula della resistenza di un conduttore

$$R = \rho \frac{l}{\sigma HW}$$

è evidente che basta aumentare la sezione del conduttore per diminuirne la resistenza. Tale considerazione è veritiera solo in corrente continua o finché è ammissibile trascurare le perdite addizionali. Se si opera ad alte frequenze in condizioni nominali come in questo caso ciò non risulta più vero: come visto nei precedenti capitoli difatti maggiore è la sezione di un conduttore maggiore sarà la disuniformità della densità di corrente rispetto la condizione uniformemente distribuita e dunque maggiore sarà l'incremento delle perdite. Ad esso si aggiunge l'effetto di prossimità: volendo mantenere costante il valore di induttanza del componente è necessario tenere costanti il raggio interno dell'induttore ed il numero di giri [30]. Tenendo costante dunque le coordinate dei centri delle sezioni dei diversi conduttori che in un piano (r, z) rappresentano le spire dell'induttore, variando il valore dello spessore W si va a variare la distanza tra i conduttori e dunque si va ad influire sull'effetto di prossimità. La questione si può affrontare dunque come un problema di ottimizzazione nel quale si vuole trovare la sezione del conduttore alla quale corrispondono le minori perdite. Per risolvere tale problema si impiega l'ottimizzatore *fmincon* presente nel software MATLAB[®] al quale viene fornita una function che va a determinare l'entità della resistenza AC tramite la procedura PEEC descritta nel capitolo 3 e verificata nei due capitoli precedenti. Si eseguono due ottimizzazioni per poter intuitivamente valutare la dipendenza della resistenza dalle due dimensioni della sezione. Per prime si effettuano alcune ottimizzazioni fissando il valore della larghez-

za $W = 2 \times 10^{-4}$ mm e permettendo di variare l'altezza entro opportuni valori limite. Il risultato che si è sempre ottenuto è stato un valore di altezza pari al massimo consentito dai valori limite: ciò è dovuto dal fatto che variando il parametro altezza non implica importanti variazioni nell'effetto di prossimità e dunque diminuire le perdite per effetto pelle corrisponde ad aumentare la sezione del conduttore. La tendenza della corrente a scorrere prevalentemente nella regione adiacente ai bordi implica che la diminuzione della resistenza rispetto al valore della altezza non è una relazione del tipo

$$R_{AC} \propto \frac{1}{H}$$

come sarebbe per grandezze DC ma anzi oltre un certo valore di H tale diminuzione è estremamente ridotta e non più vantaggiosa. Si decide per tale motivo di fissare l'altezza del conduttore al valore iniziale $H = 10 \times 10^{-3}$ mm al quale corrispondono perdite sufficientemente basse ed una modulo della derivata molto piccolo.

In secondo luogo si effettua un'ottimizzazione utilizzando come variabile l'ampiezza delle sezioni W . In questo caso da essa dipende l'effetto di prossimità è dunque oltre un certo valore la diminuzione della resistenza viene più che compensata da un aumento per tale effetto. Di conseguenza è presente un valore ottimale che è stato individuato pari a

$$W_{opt} = 1.976 \times 10^{-4} \text{ m}$$

al quale corrisponde una resistenza

$$R_{ACmin} = 5.782 \text{ m}\Omega$$

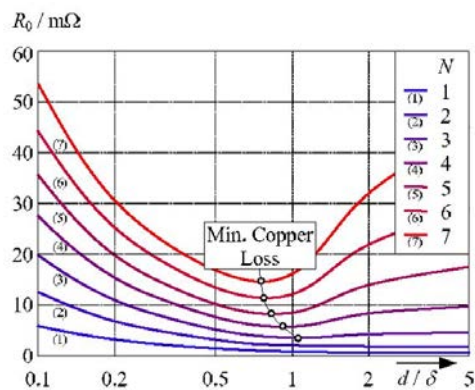


Figura 6.2: Andamenti della resistenza specifica per un numero di spire diverso, [30].

La conferma di questo risultato si evince dal grafico 6.2 in [30] nel quale si può sia avere il riscontro sul valore di resistenza ottenuto che notare la presenza del minimo prima discusso nell'andamento del valore R_{AC} .

6.2 Principio delle immagini

La formulazione del metodo PEEC applicato richiede che il dominio sia omogeneo e dunque caratterizzato da valori σ_0 e μ_0 che non variano nella regione esterna ai conduttori. Risulta tuttavia possibile analizzare sistemi con la presenza di una regione ferromagnetica caratterizzata da una permeabilità magnetica $\mu = \mu_r \mu_0$ sfruttando il principio delle immagini. La prima applicazione di tale principio è stata impiegata nell'analisi elettrostatica del campo elettrico \mathbf{E} prodotto da una carica in presenza di un piano semi-infinito di materiale conduttore. L'idea consiste nel sostituire la condizione di perpendicolarità del campo elettrico al piano con un certo numero di cariche immagine adeguatamente disposte nello spazio. Si ottiene un sistema di cariche in una regione omogenea la cui sovrapposizione degli effetti implica un campo elettrico che rispetta la condizione sulla superficie precedentemente descritta. Per il caso di una carica posta ad una altezza h dal terreno (considerata regione a $\sigma = 0$) l'immagine che sostituisce le condizioni al boundary sarà una carica di segno opposto posizionata in maniera speculare rispetto il piano, figura 6.3

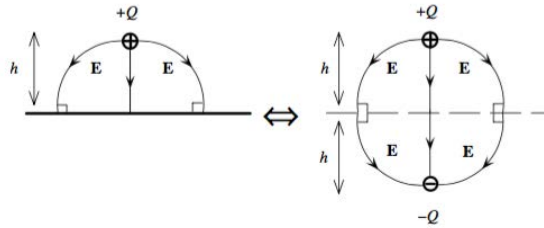


Figura 6.3: Rappresentazione del principio delle immagini in elettrostatica.

Si consideri ora di avere una corrente al posto della carica ed una regione semi-infinita di un materiale ferromagnetico lineare caratterizzato da una permeabilità infinita al posto della regione conduttrice. In maniera analoga è possibile sostituire la condizione di perpendicolarità del campo magnetico \mathbf{H} sul boundary della regione con la presenza di opportune immagini delle correnti. La posizione delle immagini è speculare rispetto al piano ma il segno (e dunque la direzione della corrente) deve essere analogo a quella della corrente reale. Tale affermazione trova giustificazione in [12]. Il valore della corrente immagine dipende invece dalla permeabilità della regione che l'immagine va a sostituire: come descritto in [15] e [12] imponendo la continuità del campo magnetico \mathbf{H} si ottiene una corrente immagine pari a

$$I' = \frac{\mu_r - 1}{\mu_r + 1} I$$

Per una permeabilità magnetica relativa infinita o molto elevata la corrente immagine ha lo stesso valore di quella presente mentre se la regione ha

permeabilità unitaria la corrente è nulla: in questo caso difatti il dominio è omogeneo e dunque la presenza delle immagini non è necessaria non essendoci condizioni al contorno da rappresentare.

A conferma di ciò è stata eseguita un'analisi FEM tramite il software COMSOL Multiphysics[®]: è stata calcolata la distribuzione del campo magnetico nello spazio dovuto ad un conduttore a sezione rettangolare in presenza di un piano ferromagnetico di lunghezza molto maggiore rispetto le dimensioni della sezione. La distanza tra il piano ed il conduttore è stata scelta pari all'altezza H della sezione del conduttore stesso, mentre la permeabilità magnetica del materiale è stata scelta pari a $\mu_r = 4000$. Successivamente è stata compiuta l'analisi di una configurazione nella quale la lastra è stata sostituita con l'immagine del conduttore speculare rispetto la superficie che precedentemente separava i due domini.

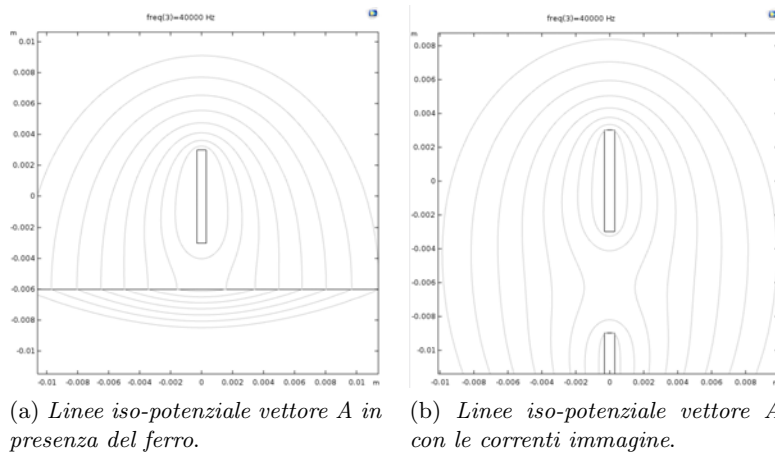


Figura 6.4: Confronto linee di flusso con ferro ed immagini.

Nelle figure 6.4 vengono messe a confronto le linee di flusso ottenute nei due casi. Pare evidente come la corrente immagine permetta di replicare la distribuzione del campo magnetico nella regione a conducibilità μ_0 dovuta dalla presenza della regione ferromagnetica. Si vuole evidenziare come ciò sia valido sotto due importanti ipotesi: la prima consiste nell' avere una caratteristica del materiale ferromagnetico lineare; la seconda che non vi siano correnti indotte in tale regione ponendo cioè la conducibilità σ della regione ferromagnetica nulla. Da un punto di vista pratico queste la seconda ipotesi non costituisce un importante limite: difatti nella maggioranza dei casi si vuole evitare la presenza di correnti indotte nei materiali ferromagnetici presenti nei dispositivi per ridurre le perdite ed aumentarne l'efficienza. Di conseguenza si adottano soluzioni come la laminazione di tali materiali che rendono trascurabili le correnti indotte e ammettono la rappresentazione delle regioni di spazio da essi interessate con conducibilità nulla e permeabilità

relativa del materiale in gioco. La prima invece risulta una condizione più vincolante: i materiali ferromagnetici sono soggetti a saturazione e dunque la loro caratteristica B-H non è lineare. In ogni caso per le condizioni descritte la validità di tale metodo è stata confermata tramite codice FEM anche per sistemi più complessi [6], ottenendo riscontri validi nella valutazione del campo magnetico nei due casi.

Implicazioni sul metodo PEEC La possibilità di poter replicare il campo magnetico in presenza di una regione ferromagnetica mediante immagini delle correnti nello spazio omogeneo permette l'analisi di tali sistemi mediante la procedura PEEC. Per la sovrapposizione degli effetti, la distribuzione del potenziale vettore \mathbf{A}_{fe} in presenza della regione ferromagnetica può essere pensato come la somma di due termini $\mathbf{A}_i + \mathbf{A}_{i'}$ [5]. I coefficienti di auto-induttanza parziale sono definiti come

$$L_{auto_{fe}} = \frac{\int_l \mathbf{A}_{fe} dl}{I} = \frac{\int_l \mathbf{A}_i + \mathbf{A}_{i'} dl}{I} = \frac{\int_l \mathbf{A}_i dl}{I} + \frac{\int_l \mathbf{A}_{i'} dl}{I} = L_{auto_p} + M_{I-I'} \quad (6.1)$$

ed in presenza di un dominio non omogeneo opportunamente rappresentato tramite le correnti immagini si avrà che i coefficienti da impiegare non corrispondono più a quelli ricavati precedentemente nel capitolo 3 ma saranno dati dalla somma tra il coefficiente precedente ed un nuovo termine che è pari al coefficiente di mutua-induttanza parziale tra la corrente e la sua immagine. Ripetendo gli stessi passaggi si ottiene lo stesso risultato anche per il calcolo dei coefficienti di mutua-induttanza parziale tra correnti non immagine. Separando i diversi termini il sistema che si ottiene applicando il principio delle immagini ad un dominio con una regione ferromagnetica è dunque uguale a quello che si otterrebbe analizzando una configurazione con dominio omogeneo in presenza dei conduttori immagine. Non è necessario fare altro che inserire alle routine per la valutazione dell'effetto di prossimità i conduttori immagine come ulteriori input e valutare l'effetto complessivo.

Risultati ottenuti Viene così effettuata l'analisi delle perdite addizionali di un conduttore a sezione rettangolare altezza $H = 6\text{mm}$, larghezza $W = 0.6\text{mm}$ e distanza dalla regione a $\mu_r = 4000$ pari a $d = 6\text{mm}$. Si analizzano le frequenze $f = [20 - 40]\text{kHz}$ per le quali l'effetto pelle inizia ad essere sufficientemente marcato. I valori della resistenza AC ottenuti con entrambi i metodi sono presentati nella tabella sottostante

f [kHz]	r_{AC-FEM} [$\text{m}\Omega \text{m}^{-1}$]	$r_{AC-PEEC}$ [$\text{m}\Omega \text{m}^{-1}$]	Δ_r/r %
10	5.553	5.552	0.57
20	6.28	6.22	0.95
40	7.34	7.26	1.12

assieme al loro scarto la cui entità è paragonabile a quella presente nella tabella 4.4. L'aumento dello scarto dai valori di riferimento con la frequenza

è causato dalla discretizzazione meno fine, come già discusso nella sezione 4.1. Come ulteriore conferma si riportano nei grafici 6.5 le distribuzioni del valore efficace della corrente ottenute con i due metodi dalle quali si può notare come la presenza della regione ferromagnetica tenda a far scorrere la corrente nei pressi della superficie opposta a quella che si affaccia ad essa.

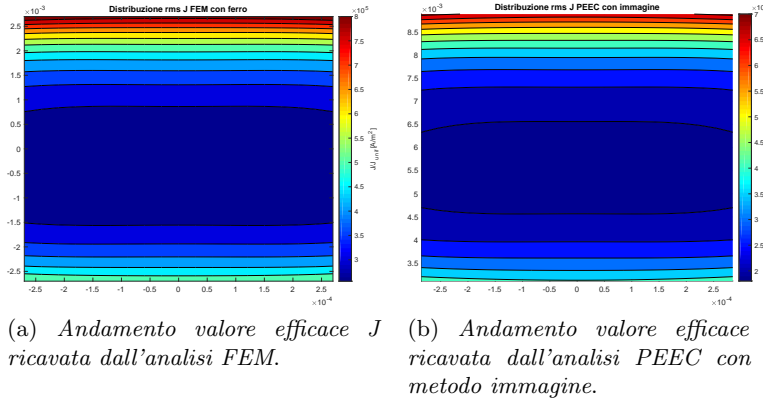


Figura 6.5: Confronto distribuzione J con ferro ed immagini.

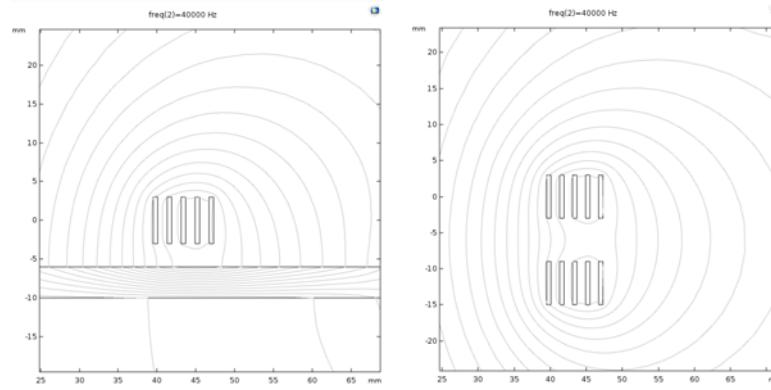
Prima di procedere con l'analisi di una geometria più complessa è opportuno notare che le immagini sono dei conduttori fittizi introdotte per tenere conto delle condizioni al contorno del problema ma per quali non si è interessati a valutare le perdite addizionali poiché non presenti fisicamente. Inoltre la loro distanza dai conduttori reali è almeno pari a due volte la distanza tra i conduttori e la superficie che delimita la regione a permeabilità magnetica diversa. Dunque per essi valgono tutte le premesse effettuate nella sezione 5.4 ed è possibile adottare un numero di elementi per lato ridotto in base ad opportune considerazioni sulla geometria riducendo così le dimensioni del sistema e conseguentemente l'onere computazionale dell'analisi.

Bobina per piano ad induzione Si procede ora alla stima delle perdite addizionali di un avvolgimento in lastra in presenza di un disco in ferrite. Tale geometria è caratterizzata dunque da una simmetria radiale ed è descritta dalla tabella seguente

H [mm]	W [mm]	N_{spire}	$R_{interno}$ [mm]	d_{fe} [mm]	e [mm]	R_{disk} [mm]
6	0.6	5	39.8	3	1.2	110

nella quale d_{fe} è la distanza tra i conduttori ed il disco mentre e è la distanza tra due conduttori. Il disco in ferrite rispetto all'avvolgimento è di raggio sufficientemente grande da poter essere visto dall'avvolgimento come un semipiano infinito e rappresentato mediante il metodo delle immagini. Conferma di ciò si può evincere dagli andamenti delle linee iso-potenziale vettore calcolate in presenza della regione ferromagnetica ed in presenza

delle immagini tramite il software COMSOL Multiphysics[®] presentati nelle immagini 6.6.



(a) *Linee di flusso in presenza del disco.* (b) *Linee di flusso ottenute sostituendo il disco con le immagini.*

Figura 6.6: Confronto linee iso-A in presenza di ferro ed immagini.

Per valutare la robustezza dell'impiego del principio delle immagini si effettuano tre analisi parametriche:

- Una prima valutazione della resistenza rispetto alla frequenza delle grandezze elettriche;
- Una seconda valutazione rispetto alla distanza che intercorre tra i conduttori ed il disco ferromagnetico alla frequenza $f = 40\text{kHz}$;
- Una terza valutazione alla medesima frequenza rispetto alla larghezza dei conduttori mantenendo costante l'ingombro complessivo dell'avvolgimento e dunque mantenendo fisse le posizioni dei centri delle diverse spire.

I risultati della prima analisi vengono riportati nei grafici 6.7 nei quali i valori ottenuti dall'analisi FEM sono indicati tramite crocette rosse mentre le curve fanno riferimento ai valori ottenuti dai codici PEEC per la valutazione dell'effetto di prossimità dove sono stati considerati sia i cinque conduttori reali che le cinque immagini.

Nel grafico di sinistra sono presentati gli andamenti della resistenza dei cinque conduttori; le cinque curve risultano diverse sia perché varia l'effetto di prossimità ma anche la lunghezza delle spire. Nel grafico di destra si riporta l'andamento della resistenza serie equivalente delle cinque spire: esso è crescente con la frequenza a causa dell'inasprirsi dell'effetto pelle e di prossimità.

Nei grafici 6.9 si riportano le coppie di grafici per le altre due indagini parametriche. Gli andamenti rispetto alla distanza che intercorre tra i conduttori e la regione ferromagnetica sono decrescenti: difatti, come risulta

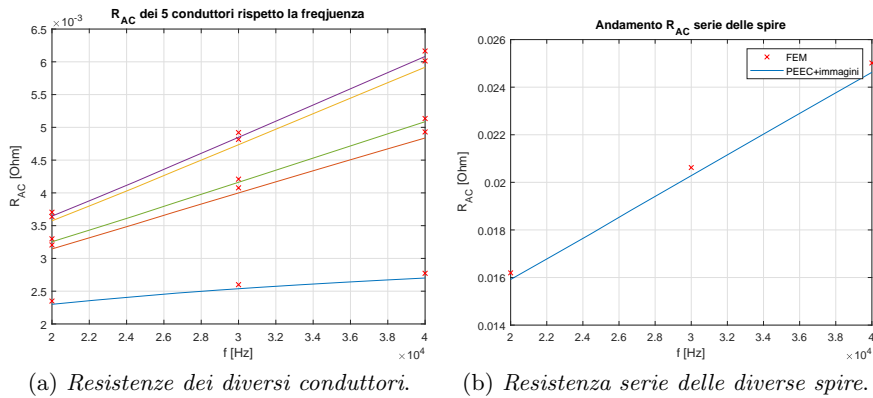


Figura 6.7: Confronto resistenza AC ottenuta tramite PEEC e FEM.

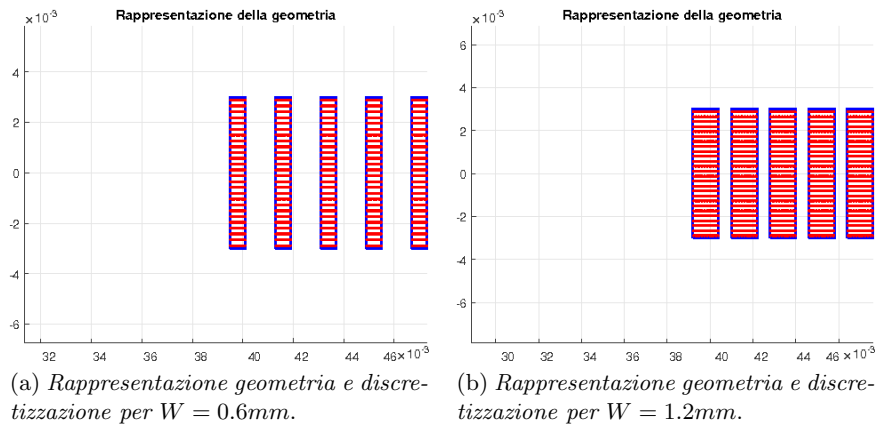


Figura 6.8

intuitivo maggiore è tale distanza meno è rilevante l'influenza della regione non omogenea. Meno intuitivi sono gli andamenti delle perdite al variare della larghezza. Essi riportano un aumento della resistenza R_{AC} all'aumentare della sezione dei conduttori che può essere spiegata in maniera analoga a quanto fatto nella sezione 6.1. Per la frequenza alla quale sono eseguite le simulazioni l'effetto pelle e l'effetto di prossimità si presentano in maniera importante.

Dunque l'aumentare la larghezza tenendo fissate le posizioni dei centri delle sezioni implica una diminuzione della distanza tra i diversi conduttori (figura 6.8) alla quale segue un aumento delle perdite per effetto prossimità maggiore rispetto alla diminuzione della resistenza per l'aumento della sezione risultando così in un aumento complessivo della resistenza serie del componente.

Gli scarti tra i risultati derivati dall'impiego delle procedure PEEC e quelli di riferimento ottenuti dall'applicazione del metodo FEM sono conte-

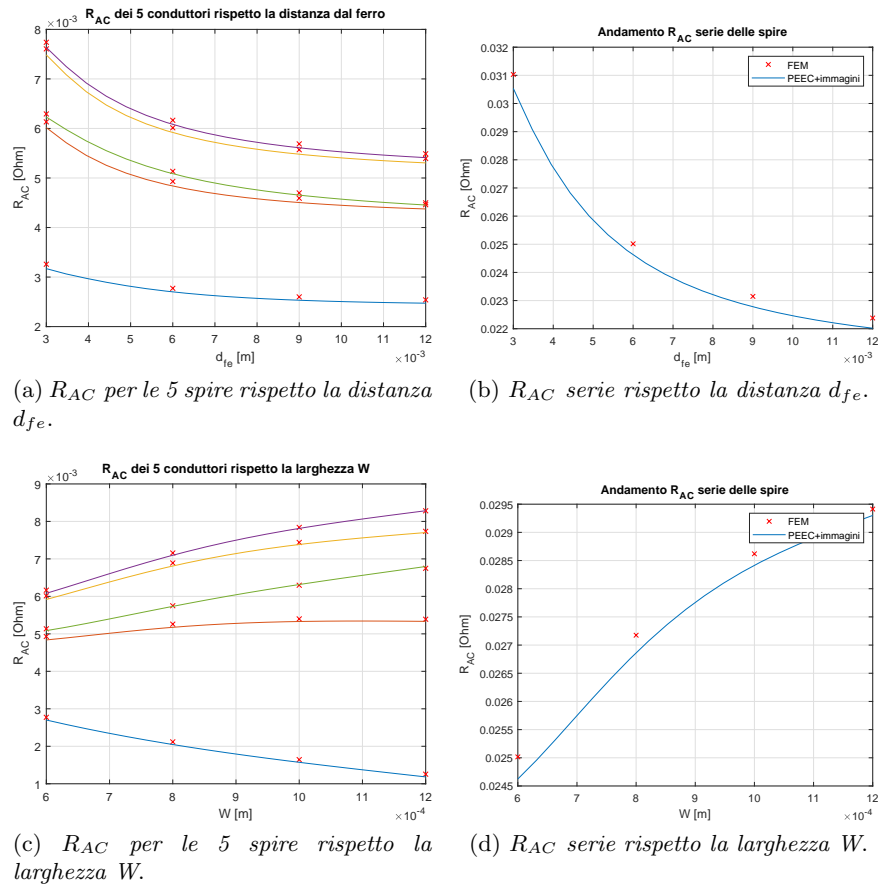


Figura 6.9: Risultati delle analisi precedentemente elencate.

nuti confrontando i valori delle perdite per i singoli conduttori mentre nella valutazione delle resistenze serie equivalenti essi risultano maggiori anche se mai oltre il 2–3% del valore di riferimento. Le cause principali della leggera perdita di affidabilità sono due: la discretizzazione ridotta delle immagini discussa nella sezione 5.4 e l'aver approssimato un disco di raggio e spessore finito con un semipiano infinito.

Capitolo 7

Conclusioni

Come emerso dai risultati presentati negli ultimi capitoli, il metodo PEEC si è rivelato una valida alternativa per l'indagine dell'entità delle perdite addizionali per sistemi di conduttori caratterizzati da diverse geometrie e simmetrie. Sono stati scritti i codici che applicano le procedure descritte nel capitolo 3, ottenendo così i valori delle perdite e di conseguenza i coefficienti maggiorativi da applicare ai conduttori per tenerne conto. Particolare attenzione è stata data alla discretizzazione, indagando nei diversi casi quale fosse il numero di elementi ottimale inteso come miglior compromesso tra onere computazionale e affidabilità dei risultati. Difatti nonostante il metodo PEEC richieda di dover discretizzare unicamente le regioni conduttrici del dominio, a differenza di quanto avviene per metodi numerici basati su formulazioni differenziali delle equazioni di Maxwell, le matrici che caratterizzano il sistema così ottenuto sono prevalentemente matrici piene. Ciò rappresenta un importante vincolo sia dal punto di vista del tempo di calcolo che da quello di memoria del calcolatore, dunque essere in grado di scegliere il numero e la disposizione di elementi che comportano il minor numero di elementi ha fondamentale rilevanza.

In definitiva lo scopo dei codici prodotti nel corso di questo lavoro non è quello di sostituirsi al metodo FEM di certo più largamente diffuso, ma di affiancarsi ad esso per poter ottenere risultati delle simulazioni di dispositivi complessivamente più accurate. Risulta possibile analizzare l'effetto pelle e prossimità direttamente tramite codice FEM, ma ad un costo computazionale elevato dovendo imporre dimensioni molto ridotte agli elementi della mesh all'interno di tutti i conduttori. Calcolando il coefficiente maggiorativo tramite il metodo PEEC e applicandolo alla resistività del materiale sarà così possibile tenere conto delle perdite addizionali senza dover aumentare il numero di punti della mesh, traendone un vantaggio nel tempo di calcolo.

Nonostante non sia stato sottolineato adeguatamente nel corso di questo lavoro, è opportuno ricordare che uno dei vantaggi del metodo PEEC consiste nella rappresentazione del sistema fisico tramite parametri concentrati.

È possibile difatti interfacciare un circuito esterno anche articolato al circuito equivalente al sistema, risolvendolo con metodologie di analisi circuitale opportune come la MNA (modified nodal analysis) ed ottenendo le grandezze elettriche che interessano i diversi componenti del circuito tenendo conto degli effetti pelle e prossimità nel sistema fisico.

Si mettono in evidenza infine alcuni articoli ([17], [20], [26], [16]) nei quali sono trattate diverse estensioni del metodo PEEC che vanno oltre alle ipotesi ed ai casi considerati nel corso di questo lavoro. La numerosa presenza di studi anche recenti su tale metodo è dovuta alla sua versatilità e ne garantisce l'utilità in diverse applicazioni come quella presente in questa tesi.

Appendice A

Valutazione campi \mathbf{B} e \mathbf{A}

La risoluzione della equazione EFIE tramite il metodo PEEC permette, tramite i passaggi illustrati nel capitolo 3, di ottenere il campo densità di corrente nei conduttori. Da esso se si è interessati a conoscere il campo potenziale vettore magnetico \mathbf{A} o il campo induzione magnetica \mathbf{B} nello spazio è necessario un post processing adeguato che viene descritto in questo capitolo d'appendice.

Se la discretizzazione è sufficientemente fine, condizione che deve verificarsi già per questioni di accuratezza, ogni elemento conduttore può essere approssimato ad un filamento di corrente

$$I_i = A_i J_i \quad \text{per } i = 1 \dots N_{el}$$

essendo ipotizzata costante la densità di corrente in esso, identificato dal luogo dei centri delle sezioni del conduttore perpendicolari al suo versore $\hat{\mathbf{u}}_i$. Sotto questa ipotesi, il potenziale vettore ed il campo d'induzione magnetica dovuti ad un filamento di lunghezza finita sono calcolabili in un punto nello spazio dalle seguenti equazioni [13]:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu I}{4\pi} \ln \left(\frac{R_i + R_f + l}{R_i + R_f - l} \right) \cdot \hat{\mathbf{u}} \quad (\text{A.1})$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu I}{4\pi} \frac{2\epsilon}{1 - \epsilon} \frac{\hat{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{R}_i}{R_i R_f} \quad (\text{A.2})$$

nelle quali

$$\epsilon = \frac{L}{R_i + R_f}$$

L è pari alla lunghezza del segmento, R_i e R_f sono le distanze tra il punto \mathbf{r} ed i de punti iniziali e finali del segmento, $\mathbf{R}_i = \mathbf{r} - \mathbf{r}_i$ è il raggio-vettore che collega il punto iniziale del segmento con il punto nel quale si vuole valutare il campo.

Il campo complessivo è ottenuto mediante la sovrapposizione degli effetti dei diversi segmenti, sommandone il contributo vettoriale. A tale scopo è stata scritta un function i cui ingressi sono:

- Una matrice ($3 \times N_{el}$) con le coordinate dei vertici iniziali che definiscono il filamento di corrente relativo a ciascun elemento;
- Una matrice ($3 \times N_{el}$) con le coordinate dei vertici finali dei filamenti;
- Una matrice ($3 \times N_{pt}$) con le coordinate dei punti nei quali si vuole valutare il campo d'interesse;
- Un vettore di lunghezza N_{el} con le correnti associate a ciascun elemento.

che valuta il campo d'interesse in ciascun punto. Il vettore delle correnti da assegnare è il risultato del sistema descritto nel capitolo 3.

Bibliografia

- [1] MM Al-Asadi et al. “A simple formula for calculating the frequency-dependent resistance of a round wire”. In: *Microwave and Optical Technology Letters* 19.2 (1998), pp. 84–87.
- [2] Giulio Antonini. “The partial element equivalent circuit method for EMI, EMC and SI analysis”. In: *ACES Newsletter* 21.1 (2006), pp. 8–32.
- [3] Giulio Antonini, Antonio Orlandi e Clayton R Paul. “Internal impedance of conductors of rectangular cross section”. In: *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques* 47.7 (1999), pp. 979–985.
- [4] Alexander W Barr. “Calculation of frequency-dependent impedance for conductors of rectangular cross section”. In: *AMP Journal of Technology* 1 (1991), pp. 91–100.
- [5] Ernst Billig. “The calculation of the magnetic field of rectangular conductors in a closed slot, and its application to the reactance of transformer windings”. In: *Proceedings of the IEE-Part IV: Institution Monographs* 98.1 (1951), pp. 55–64.
- [6] Wei Chen, Xiaosheng Huang e Juanjuan Zheng. “Improved winding loss theoretical calculation of magnetic component with air-gap”. In: *Proceedings of The 7th International Power Electronics and Motion Control Conference*. Vol. 1. IEEE. 2012, pp. 471–475.
- [7] Herbert B Dwight. “Skin effect in tubular and flat conductors”. In: *Transactions of the American Institute of Electrical Engineers* 37.2 (1918), pp. 1379–1403.
- [8] R Faraji-Dana e Y Chow. “Edge condition of the field and ac resistance of a rectangular strip conductor”. In: *IEE Proceedings H (Microwaves, Antennas and Propagation)*. Vol. 137. 2. IET. 1990, pp. 133–140.
- [9] Walter Frei. *Computing the Inductance of a Straight Wire*. 2013. URL: <https://www.comsol.com/blogs/computing-the-inductance-of-a-wire/> (visitato il 02/10/2018).

- [10] Walter Frei. *Modeling Coils in the AC/DC Module*. 2016. URL: <https://www.comsol.com/blogs/modeling-coils-in-the-acdc-module/> (visitato il 02/10/2018).
- [11] Marian Greconici, Gheorghe Madescu e Martian Mot. “Skin effect analysis in a free space conductor”. In: *Facta universitatis-series: Electronics and Energetics* 23.2 (2010), pp. 207–215.
- [12] P Hammond. “Electric and magnetic images”. In: *Proceedings of the IEE-Part C: Monographs* 107.12 (1960), pp. 306–313.
- [13] James D Hanson e Steven P Hirshman. “Compact expressions for the Biot–Savart fields of a filamentary segment”. In: *Physics of Plasmas* 9.10 (2002), pp. 4410–4412.
- [14] Karolina Kasaš-Lažetic, Miroslav Prša e Nikola uric. “Proximity effect against skin effect in two coupled u-shaped busbars”. In: *Simpozijum INFOTEH Jahorina* (), pp. 18–20.
- [15] Mathieu Lambert et al. “Analytical calculation of leakage inductance for low-frequency transformer modeling”. In: *IEEE Transactions on Power Delivery* 28.1 (2013), pp. 507–515.
- [16] L Lombardi, D Romano e G Antonini. “Analytical Formula for the Magnetic-to-Electric Field Coupling of Magnetization in the Partial Element Equivalent Circuit Method”. In: *IEEE Transactions on Magnetics* 99 (2018), pp. 1–12.
- [17] HAIBO Long et al. “A new modeling technique for simulating 3-D arbitrary conductor-magnet structures for RFIC applications”. In: *IEEE Transactions on Electron Devices* 52.7 (2005), pp. 1354–1363.
- [18] Ashraf W Lotfi, Pawel M Gradzki e Fred C Lee. “Proximity effects in coils for high frequency power applications”. In: *IEEE transactions on Magnetics* 28.5 (1992), pp. 2169–2171.
- [19] Shizhong Mei e Yehea I Ismail. “Modeling skin and proximity effects with reduced realizable RL circuits”. In: *IEEE Transactions on very large scale integration (VLSI) systems* 12.4 (2004), pp. 437–447.
- [20] A Musing e Johann W Kolar. “Efficient partial element calculation and the extension to cylindrical elements for the PEEC method”. In: *2008 11th Workshop on Control and Modeling for Power Electronics*. IEEE. 2008, pp. 1–6.
- [21] Juan C Olivares-Galván et al. “Calculation of the magnetic field intensity in a rectangular conductor carrying current in electromagnetism introductory courses”. In: *COMSOL Conference, Boston, USA*. 2009.
- [22] Clayton R Paul. *Inductance: loop and partial*. John Wiley & Sons, 2011.

- [23] Zygmunt Piatek e Bernard Baron. “Exact closed form formula for self inductance of conductor of rectangular cross section”. In: *Progress In Electromagnetics Research* 26 (2012), pp. 225–236.
- [24] Zygmunt Piatek et al. “Mutual inductance of long rectangular conductors”. In: *Przegląd Elektrotechniczny (Electrical Review)* 88.9a (2012), pp. 175–177.
- [25] Jordi-Roger Riba. “Analysis of formulas to calculate the AC resistance of different conductors? configurations”. In: *Electric Power Systems Research* 127 (2015), pp. 93–100.
- [26] Daniele Romano e Giulio Antonini. “Quasi-static partial element equivalent circuit models of linear magnetic materials”. In: *IEEE Transactions on Magnetics* 51.7 (2015), pp. 1–15.
- [27] Albert Ruehli, Giulio Antonini e Lijun Jiang. *Circuit oriented electromagnetic modeling using the PEEC techniques*. John Wiley & Sons, 2017.
- [28] Albert Ruehli, Clayton Paul e Jan Garrett. “Inductance calculations using partial inductances and macromodels”. In: *Proceedings of International Symposium on Electromagnetic Compatibility*. IEEE. 1995, pp. 23–28.
- [29] Glenn S Smith. “A simple derivation for the skin effect in a round wire”. In: *European Journal of Physics* 35.2 (2014), p. 025002.
- [30] A Stadler, M Albach e F Macary. “The minimization of copper losses in core-less inductors: application to foil-and PCB-based planar windings”. In: *2005 European Conference on Power Electronics and Applications*. IEEE. 2005, 7–pp.
- [31] IEC Standard. *Electric Cables—Calculation of Current Rating—Part 1: Current rating equations (100% load factor) and calculation of losses, Section 1: General*. Rapp. tecn. Publication IEC-60287-1-1, 1994.
- [32] Harold A Wheeler. “Formulas for the skin effect”. In: *Proceedings of the IRE* 30.9 (1942), pp. 412–424.