



**Università degli Studi di Padova**

---

DIPARTIMENTO DI FISICA E ASTRONOMIA "GALILEO GALILEI"  
Corso di Laurea in Fisica

TESI DI LAUREA TRIENNALE

# **Ricostruzione delle condizioni iniziali del clustering delle galassie**

Candidato:  
**Sujata Coccato**

Relatore:  
**Prof. Sabino Matarrese**



# Indice

<b>1</b>	<b>Introduzione</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Metodo variazionale di Peebles</b>	<b>4</b>
<b>3</b>	<b>Metodo di ricostruzione MAK</b>	<b>8</b>
3.1	Ipotesi di mappa Lagrangiana potenziale . . . . .	8
3.2	Equazione di Monge-Ampère . . . . .	10
3.3	Problema del trasporto ottimo di massa . . . . .	12
3.4	Fonti di incertezza nella ricostruzione . . . . .	14
3.5	Problema di assegnazione . . . . .	15
3.6	Problema duale e algoritmo dell'asta . . . . .	17
3.7	Test del metodo MAK con simulazioni a N corpi . . . . .	20
<b>4</b>	<b>Conclusioni</b>	<b>24</b>
	<b>Bibliografia</b>	<b>25</b>



# Capitolo 1

## Introduzione

Il seguente elaborato si occupa del problema della *ricostruzione*. I metodi di ricostruzione si occupano di trovare informazioni sull'evoluzione che ha portato, a partire da una distribuzione quasi uniforme dell'Universo primordiale, all'attuale distribuzione di massa costituita da strutture ad alta densità (cluster e filamenti). Il metodo della ricostruzione è uno dei due approcci che si utilizza per affrontare quello che viene chiamato *problema inverso*: studiare le proprietà dell'Universo primordiale a partire dai dati attuali. L'altro metodo utilizzato, il *forward approach*, consiste nel risolvere un problema a valori iniziali: si parte da un modello delle fluttuazioni di densità iniziali e da determinati valori dei parametri cosmologici di cui si vuole testare la validità e, rappresentando il campo di densità iniziale con  $N$  particelle, si fa evolvere il sistema fino ai giorni d'oggi con una simulazione a  $N$  corpi. Dunque si confronta, a livello statistico, il risultato con i dati provenienti dalle osservazioni. Se l'accordo è buono il modello cosmologico sarà considerato valido, in caso contrario se ne propone un altro e si effettua nuovamente il test. Ritorniamo ora al problema della ricostruzione. In questo caso vengono richieste condizioni miste al contorno. Se si volesse infatti integrare indietro nel tempo a partire dalle posizioni e velocità attuali questo non sarebbe possibile: sono note le velocità peculiari solo di qualche migliaia dei milioni di galassie di cui si conosce il redshift. In alternativa alle velocità peculiari attuali si può imporre come seconda condizione al contorno l'omogeneità del campo di densità iniziale come indicato dalla *radiazione cosmica di fondo alle microonde* (CMB). Con questa ipotesi le velocità peculiari tenderanno a zero andando indietro nel tempo.

Sono state proposte diverse tecniche di ricostruzione: variazionali, perturbative, probabilistiche. In questo elaborato si concentrerà l'attenzione su due metodi: il metodo della minima azione come proposto da Peebles negli articoli del 1989 [1] e 1990 [2] e il metodo MAK.

Nel capitolo 2.1 verrà discusso il metodo di Peebles. Tale metodo variazionale viene applicato a un insieme discreto di galassie (rappresentate

da particelle) e consiste nel trovare i punti stazionari del funzionale d'azione relativo alla Lagrangiana di un sistema di particelle in un universo in espansione. Si vedrà che questa tecnica non garantisce una soluzione unica al problema della ricostruzione.

Il metodo MAK, acronimo che sta per Monge-Ampère-Kantorovich, verrà illustrato nel capitolo 3. Si parte dalla seguente ipotesi: la mappa Lagrangiana  $\mathbf{q} \mapsto \mathbf{x}(\mathbf{q})$  che collega le posizioni iniziali  $\mathbf{q}$  degli elementi di massa alle posizioni attuali  $\mathbf{x}$  è il gradiente di un potenziale convesso (la validità di questa ipotesi verrà discussa nella sezione 3.1). Dall'ipotesi di potenzialità della mappa Lagrangiana e di conservazione della massa si arriva all'equazione di Monge-Ampère che genera una funzione che è soluzione di un problema di ottimizzazione: il problema del trasporto ottimo di massa. Passando a una distribuzione di densità discreta ci si riconduce a un problema di assegnazione che viene risolto considerando la sua versione 'rilassata'. Tale versione corrisponde a un problema di programmazione lineare la cui soluzione viene trovata mediante un algoritmo deterministico che risolve il problema duale ad esso associato. Infine il metodo viene testato applicandolo ai risultati di una simulazione a  $N$  corpi. Nella sezione 3.4 si discute dell'unicità della soluzione. A tal proposito facciamo una distinzione preliminare fra due tipologie di problemi:

- il *displacement reconstruction* che consiste nella ricerca della mappa Lagrangiana  $\mathbf{q} \mapsto \mathbf{x}(\mathbf{q})$  e della sua inversa  $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{q}(\mathbf{x})$ ;
- il *full reconstruction problem* che ha come obiettivo, in aggiunta alla mappa Lagrangiana, i campi di velocità primordiali e finali delle velocità peculiari.

Il metodo MAK fornisce sempre una soluzione unica al *displacement reconstruction* se si possono trattare le regioni di multistreaming come regioni collassate: si sostituisce la distribuzione di materia reale con una macroscopica la cui parte singolare rappresenta queste regioni. La ricostruzione cesserà di essere unica quando si scenderà al di sotto di qualche Mpc (dimensione tipica delle regioni di multistreaming). La soluzione del *full reconstruction problem* potrebbe comunque non essere unica dal momento che per le regioni collassate l'antecedente Lagrangiano è unico ma non il campo di velocità primordiale.

Concludiamo con qualche nota storica [3, 4]. Il problema del trasporto di massa viene formulato per la prima volta dal matematico francese Gaspard Monge (1746-1818) nel 1781 nel lavoro intitolato *Théorie des déblais et des remblais* [5]. Tale problema, descritto in termini di sterro (*déblai*) e di riporto (*remblai*), consisteva nel minimizzare il costo associato al trasporto di materia, una volta fissate forme e posizioni degli ammassi di terra e delle buche prodotte dalla rimozione della terra (si veda la figura 1.1). Il costo di ciascuno spostamento di materia era legato alla distanza percorsa durante il



Figura 1.1: Monge formula il problema del trasporto di massa in termini di sterro e riporto. Il costo associato al trasporto è legato alla distanza percorsa. Figura tratta da [6].

trasporto. Bisogna aspettare il 1942 perché il problema venga risolto in più di una dimensione grazie alla versione ‘rilassata’ del problema formulata dal matematico ed economista russo Leonid Kantorovich (1912-1986), premio Nobel per l’economia nel 1975. In realtà Kantorovich si renderà conto di aver generalizzato il problema posto da Monge (che nel 1942 ancora non conosceva) solo nel 1948: in seguito alla ricorrenza nel 1946 del bicentenario dalla nascita del matematico e fisico francese a Leningrado si tennero delle lezioni pubbliche, successivamente trascritte e pubblicate nel 1947, in cui si parlò anche del problema del trasporto ottimo. Fu in questa occasione che Kantorovich entrò in contatto con il problema formulato da Monge e si accorse che era in relazione con il suo lavoro. Kantorovich risolse il problema grazie alla teoria della Programmazione Lineare da lui introdotta nel 1939 per risolvere problemi pratici di economia, il primo dei quali risale a quando era consulente come professore universitario per l’azienda pubblica di lavorazione del legname di Leningrado. La teoria della Programmazione Lineare (che si occupa di risolvere problemi di ottimizzazione dove la funzione da minimizzare o massimizzare è lineare così come lo sono i vincoli) verrà in seguito sviluppata da George Dantzig e John von Neumann.

## Capitolo 2

# Metodo variazionale di Peebles

Negli articoli [1] e [2] Peebles si occupa di tracciare indietro nel tempo le orbite di un piccolo numero di galassie del Gruppo Locale, tenendo conto dei due gruppi più vicini, ciascuno modellato come una massa singola. Si assume che le galassie traccino la massa e che il loro moto sia indotto dal campo gravitazionale delle galassie vicine. Si assume inoltre un regime non relativistico. Per la descrizione del moto le galassie vengono approssimate con punti materiali. Si potrebbe obiettare che tale ipotesi non sia corretta dal momento che nel tracciare l'evoluzione delle loro posizioni indietro nel tempo si arriva a epoche in cui ancora non potevano esistere le galassie con la struttura attuale (la distribuzione di materia era quasi omogenea). L'approssimazione risulta comunque utile perché le particelle possono essere interpretate come i centri di massa attorno al quale si è aggregata la materia che costituirà le galassie.

L'approccio al problema della ricostruzione è variazionale: si calcola la Lagrangiana  $\mathcal{L} = T - V$  per un sistema di particelle in un universo in espansione e si cercano i punti stazionari del corrispondente funzionale d'azione  $\int_0^{t_0} \mathcal{L}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t) dt$ .

La Lagrangiana di una particella di massa  $m$  in un universo in espansione è

$$\mathcal{L}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t) = \frac{1}{2} m \dot{\mathbf{r}}^2 - m \Phi(\mathbf{r}, t). \quad (2.1)$$

Passando alle coordinate comoventi  $\mathbf{x} = \mathbf{r}/a(t)$ , dove  $a(t)$  è il fattore di scala, la Lagrangiana si scrive

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t) = \frac{1}{2} m (a \dot{\mathbf{x}} + \dot{a} \mathbf{x})^2 - m \Phi(\mathbf{x}, t) \quad (2.2)$$

Si effettua poi la trasformazione canonica

$$\mathcal{L}' \rightarrow \mathcal{L} - \frac{d\psi}{dt}, \quad \psi(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} m a \dot{a} \mathbf{x}^2 \quad (2.3)$$



e si ottiene la Lagrangiana

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t) = \frac{1}{2}ma^2\dot{\mathbf{x}}^2 - \frac{1}{2}ma\ddot{\mathbf{x}}^2 - m\Phi(\mathbf{x}, t). \quad (2.4)$$

Passando a un sistema di  $N$  particelle e servendosi delle equazioni di Friedmann si arriva all'azione

$$S = \int_0^{t_0} dt \left[ \sum_i \frac{m_i a^2 \dot{\mathbf{x}}_i^2}{2} + \sum_{i \neq j} \frac{G m_i m_j}{a |\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|} + \sum_i \frac{2}{3} G \pi \rho_b a^2 m_i \mathbf{x}_i^2 \right] \quad (2.5)$$

dove  $\rho_b$  è la densità media di massa.

Per ottenere l'equazione del moto si impone:

$$\delta S = \int_0^{t_0} dt \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{x}_i} \cdot \delta \mathbf{x}_i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{x}}_i} \cdot \delta \dot{\mathbf{x}}_i \right] = 0 \quad (2.6)$$

dove  $\delta S$  è la variazione del funzionale d'azione  $S$  corrispondente a una variazione infinitesima  $\delta \mathbf{x}_i(t)$  dell'orbita  $\mathbf{x}_i(t)$ .

Dal momento che

$$\int_0^{t_0} dt \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{x}}_i} \cdot \delta \dot{\mathbf{x}}_i \right] = \int_0^{t_0} dt \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{x}}_i} \cdot \delta \mathbf{x}_i \right) - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{x}}} \cdot \delta \mathbf{x}_i \right] \quad (2.7)$$

si ottiene

$$\delta S = \int_0^{t_0} dt \delta \mathbf{x}_i \cdot \left[ -\frac{d}{dt} \left( m_i a^2 \frac{d\mathbf{x}_i}{dt} \right) + m_i a \mathbf{g}_i \right] + \left[ m_i a^2 \delta \mathbf{x}_i \cdot \frac{d\mathbf{x}_i}{dt} \right]_0^{t_0} = 0 \quad (2.8)$$

dove

$$\mathbf{g}_i = \frac{4}{3} \pi G \rho_b a \mathbf{x}_i + \frac{G}{a^2} \sum_j m_j \frac{\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i}{|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i|^3}. \quad (2.9)$$

Le condizioni miste al contorno

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{x}_i &= 0 & \text{per } t = t_0 \\ a^2 \dot{\mathbf{x}}_i &\rightarrow 0 & \text{per } t \rightarrow 0 \end{aligned} \quad (2.10)$$

rendono nullo il termine  $\left[ m_i a^2 \delta \mathbf{x}_i \cdot \frac{d\mathbf{x}_i}{dt} \right]_0^{t_0}$ . La prima delle due condizioni al contorno è dovuta al fatto che le posizioni attuali sono fissate (sono le posizioni note delle galassie). La seconda condizione è una conseguenza dell'ipotesi di omogeneità della distribuzione iniziale di materia. Nel quadro della teoria dell'instabilità gravitazionale infatti andando indietro nel tempo le velocità peculiari tendono a zero:

$$a \dot{\mathbf{x}}_i \rightarrow 0 \quad \text{per } t \rightarrow 0. \quad (2.11)$$

La condizione (2.11) è più forte della seconda delle (2.10).

Le orbite che minimizzano l'azione  $S$  vengono approssimate nel seguente modo:

$$x_i^\alpha = x_i^\alpha(t_0) + \sum_{n=0}^{s-1} C_{i,n}^\alpha f_n(t), \quad (2.12)$$

dove  $\alpha = 1, 2, 3$  indica la componente dell'orbita  $i$ -esima,  $\mathbf{x}_i(t_0)$  è la posizione attuale della galassia  $i$ -esima. Le  $s$  funzioni di prova  $f_n(t)$  devono soddisfare le condizioni al contorno (2.10). Il problema si riduce quindi a cercare per quali valori dei coefficienti  $C_{i,n}^\alpha$  si minimizza l'azione. Nel primo lavoro sono state usate le funzioni di prova

$$f_n = a^n(1 - a) \quad (2.13)$$

oppure

$$f_0 = \cos\left(\frac{\pi a}{2}\right), \quad f_n = \sin\left(\frac{n\pi a}{2}\right) \quad (2.14)$$

con  $0 \leq n < S$ .

Nel lavoro successivo sono invece state usate le funzioni

$$f_n = \left(1 - \frac{a}{a_0}\right)^{s-n} \left(\frac{a}{a_0}\right)^n \left[\frac{s!}{n!(s-n)!}\right]. \quad (2.15)$$

Si tratta dunque di trovare per quali valori dei coefficienti  $C_{i,n}^\alpha$

$$\frac{\partial S}{\partial C_{i,n}^\alpha} = 0. \quad (2.16)$$

La (2.16) equivale a

$$m_i \int_0^{t_0} dt f_n(t) \left[ -\frac{d}{dt} a^2 \frac{dx_i^\alpha}{dt} + \frac{4}{3} \pi G \rho_b a^2 x_i^\alpha(t) \right] = -\frac{Gm_i}{a} \int_0^{t_0} dt f_n(t) \left[ \sum_j m_j \frac{x_j^\alpha - x_i^\alpha}{|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i|} \right]. \quad (2.17)$$

Per trovare i valori di  $C_{i,n}^\alpha$  che minimizzano l'azione  $S$  come direzione di ricerca viene scelto l'opposto del gradiente di  $S$ , precisamente gli incrementi  $\delta C_{i,n}^\alpha$  saranno tali che

$$m_i \delta C_{i,n}^\alpha \propto -\frac{\partial S}{\partial C_{i,n}^\alpha}. \quad (2.18)$$

Nell'articolo [2] viene posto anche il problema di trovare i punti stazionari che non sono minimi dell'azione  $S$ . In questo caso per trovare l'insieme dei coefficienti  $C_{i,n}^\alpha$  viene risolta l'equazione

$$0 = \frac{\partial S}{\partial C_{i,n}^\alpha} + \sum \delta C_{j,m}^\beta \frac{\partial^2 S}{\partial C_{i,n}^\alpha \partial C_{j,m}^\beta}. \quad (2.19)$$

La decisione di cercare altri punti stazionari è dovuta al fatto che, se si tiene conto solamente del minimo dell'azione, dal confronto delle velocità peculiari ricostruite con quelle osservate emergono grosse discrepanze per alcune galassie nonostante per tutte le altre l'accordo sia buono. Se si considerano invece le traiettorie corrispondenti al punto di sella i risultati migliorano. Si veda la figura 2.1. Il confronto con le velocità osservate permette dunque di scegliere tra le orbite possibili quella corretta. Le orbite dipenderanno inoltre dai valori dei parametri cosmologici. Si ottiene dunque una stima dei parametri cosmologici: i loro valori vanno aggiustati cercando un buon accordo tra velocità peculiari ricostruite e velocità peculiari osservate.

Questa procedura non si può applicare se non si conoscono le velocità peculiari. Ciò accade se si prendono in considerazione campioni di galassie più ampi: conoscendo le velocità peculiari solo di una minima parte delle galassie del campione non è possibile scegliere l'orbita corretta fra quelle possibili. Il metodo dunque non garantisce una soluzione unica.

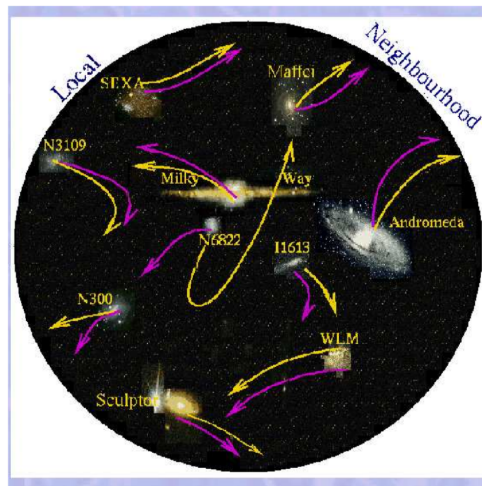


Figura 2.1: La soluzione del metodo di Peebles non è unica. Le frecce partono dalle posizioni attuali e vanno indietro nel tempo. Le frecce rosa e gialle rappresentano le orbite corrispondenti rispettivamente ai punti di minimo e di sella dell'azione. Nel primo caso la galassia N6822 si dirige per la prima volta verso di noi mentre nel secondo caso si sta avvicinando per la seconda volta. Il secondo risultato è più vicino ai dati sperimentali secondo i quali la galassia si sta allontanando. Figura tratta da [7].

## Capitolo 3

# Metodo di ricostruzione MAK

### 3.1 Ipotesi di mappa Lagrangiana potenziale

Il metodo di ricostruzione MAK assume che la mappa Lagrangiana  $\mathbf{x}(\mathbf{q})$  sia potenziale:

$$\mathbf{x} = \nabla_{\mathbf{q}}\Phi(\mathbf{q}) \quad (3.1)$$

con  $\Phi(\mathbf{q})$  potenziale convesso.

In questa sezione discutiamo la validità di tali assunzioni.

L'ipotesi (3.1) è giustificata dall'approssimazione di Zel'dovich. Per arrivare a questa approssimazione si parte dalla descrizione Newtoniana di un fluido di materia oscura fredda autogravitante. Le equazioni, nelle coordinate fisiche  $\mathbf{r}$ , per la densità  $\rho(\mathbf{r}, t)$ , la velocità  $\mathbf{w}(\mathbf{r}, t) = \dot{\mathbf{r}}$  e il potenziale gravitazionale  $\Phi(\mathbf{r}, t)$  sono:

$$\left. \frac{\partial \rho}{\partial t} \right|_{\mathbf{r}} + \nabla_{\mathbf{r}} \cdot (\rho \mathbf{w}) = 0 \quad (3.2a)$$

$$\left. \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} \right|_{\mathbf{r}} + (\mathbf{w} \cdot \nabla_{\mathbf{r}}) \mathbf{w} = -\frac{1}{\rho} \nabla_{\mathbf{r}} p - \nabla_{\mathbf{r}} \Phi \quad (3.2b)$$

$$\nabla_{\mathbf{r}}^2 \Phi = 4\pi G \rho \quad (3.2c)$$

dove

- (3.2a) è l'equazione di continuità (rappresenta la conservazione della massa);
- (3.2b) l'equazione di Eulero (descrive la conservazione della quantità di moto);
- (3.2c) l'equazione di Poisson.

Ponendo  $\rho = \rho_b + \delta\rho$  ( $\rho_b$  è la densità di *background* e  $\delta\rho$  una piccola perturbazione), prendendo  $\Phi = \Phi_b + \phi$  in modo tale che  $\nabla_r^2 \Phi_b = 4\pi G \rho_b(t)$  e  $\nabla_r^2 \phi = 4\pi G \delta\rho$  (dalle quali si ottengono rispettivamente  $\Phi_b = \frac{2\pi G}{3} \rho_b(t) r^2$  e  $\nabla_x^2 \phi = 4\pi G a^2 \delta\rho$ ) e riscrivendo in funzione delle coordinate comoventi  $\mathbf{x}$  si arriva alle equazioni:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + 3H\rho + \frac{1}{a} \nabla_x \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (3.3a)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + H\mathbf{v} + \frac{1}{a} (\mathbf{v} \cdot \nabla_x) \mathbf{v} = -\frac{1}{a} \nabla_x \phi \quad (3.3b)$$

$$\nabla_x^2 \phi = 4\pi G a^2 \delta\rho \quad (3.3c)$$

dove  $\mathbf{v} = a\dot{\mathbf{x}}$  è la velocità peculiare.

Si considera la nuova variabile temporale  $a(t) \propto t^{2/3}$  e si esegue il cambio di coordinate:

$$\rho \rightarrow \eta \equiv \frac{\rho}{\rho_b} = 1 + \delta \quad (3.4a)$$

$$\mathbf{v} \rightarrow \mathbf{u} \equiv \frac{d\mathbf{x}}{da} = \frac{\mathbf{v}}{a\dot{a}} \quad (3.4b)$$

$$\phi \rightarrow \varphi \equiv \frac{3t_*^2}{2a_*^3} \phi, \quad a(t) = a_* \left( \frac{t}{t_*} \right)^{2/3} \quad (3.4c)$$

Le equazioni del fluido assumono la nuova forma esatta:

$$\frac{D\mathbf{u}}{Da} + \frac{3}{2a} \mathbf{u} = -\frac{3}{2a} \nabla \varphi \quad (3.5a)$$

$$\frac{D\eta}{Da} + \eta \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (3.5b)$$

$$\nabla^2 \varphi = \frac{\delta}{a} \quad (3.5c)$$

dove  $\frac{D}{Da} \equiv \frac{\partial}{\partial a} + \mathbf{u} \cdot \nabla$  è la *derivata convettiva*.

In approssimazione lineare, se si considera il modo crescente,  $\delta \propto t^{2/3}$  e  $v \propto t^{1/3}$ , e dunque  $u = \text{cost}$ . Questo implica che  $\frac{Du}{Da} \approx \frac{\partial u}{\partial a} = 0$ . Dunque si ha la soluzione lineare  $\mathbf{u} = -\nabla \varphi$ .

L'approssimazione di Zel'dovich consiste nel considerare  $\frac{Du}{Da} = 0$  anche successivamente alla fase lineare. Pertanto il set di equazioni diventa (si traslascia l'equazione di Poisson (3.5c) dal momento che serve unicamente a trovare le condizioni iniziali):

$$\frac{Du}{Da} = 0 \quad (3.6a)$$

$$\frac{D\eta}{Da} + \eta \nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \quad (3.6b)$$

Dalla prima equazione si ottiene

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, a) = \mathbf{u}_0(\mathbf{q}) \quad (3.7)$$

dove  $\mathbf{u}_0(\mathbf{q})$  è la velocità iniziale nella posizione Lagrangiana  $\mathbf{q}$  della particella che si trova nella posizione Euleriana  $\mathbf{x}$  al tempo  $a(t)$ .

Le particelle si muovono dunque sulle traiettorie lineari

$$\mathbf{x}(\mathbf{q}, a) = \mathbf{q} + a\mathbf{u}_0(\mathbf{q}). \quad (3.8)$$

Dal momento che per le condizioni iniziali vale la teoria lineare l'equazione diventa

$$\mathbf{x}(\mathbf{q}, a) = \mathbf{q} - a\nabla_{\mathbf{q}}\varphi_0(\mathbf{q}). \quad (3.9)$$

Dunque la mappa Lagrangiana  $\mathbf{x}(\mathbf{q}, a)$  è potenziale:

$$\mathbf{x}(\mathbf{q}, a) = \nabla_{\mathbf{q}}\Phi(\mathbf{q}, a) \quad (3.10)$$

con

$$\Phi(\mathbf{q}, a) \equiv \frac{|\mathbf{q}|^2}{2} - a\varphi_0(\mathbf{q}) \quad (3.11)$$

potenziale convesso per  $a$  sufficientemente piccoli.

Tuttavia il potenziale non è più convesso, e dunque la mappa Lagrangiana (3.10) non è più invertibile, dopo la formazione di regioni di *multistreaming* delimitate dalle *caustiche* (chiamate anche regioni di *shell-crossing*). Le caustiche sono regioni con densità divergente che si originano quando due o più particelle partite da differenti posizioni Lagrangiane  $\mathbf{q}$  finiscono nella stessa posizione Euleriana  $\mathbf{x}$ . Una volta che le particelle si sono incrociate nella posizione  $\mathbf{x}$  non sarà più possibile determinare in modo unico i loro antecedenti Lagrangiani. In base all'approssimazione di Zel'dovich le particelle escono dalle zone di shell-crossing continuando lungo la stessa direzione con cui erano entrate (situazione irrealistica dal momento che le particelle, risentendo dell'interazione gravitazionale con le loro vicine, difficilmente si allontanerebbero da queste zone, o quantomeno le loro traiettorie verrebbero modificate). Questo problema viene superato con il *modello dell'adesione*. Tale modello consiste nel modificare l'approssimazione di Zel'dovich introducendo un termine che renda conto dell'attrazione gravitazionale tra particelle vicine nelle caustiche. Al di fuori di queste regioni continua a valere l'approssimazione di Zel'dovich. La convessità del potenziale che con questa approssimazione veniva persa dopo la formazione delle caustiche viene recuperata con il modello dell'adesione.

## 3.2 Equazione di Monge-Ampère

In questa sezione si mostra come l'ipotesi (3.1) e la conservazione della massa portino all'equazione differenziale di Monge-Ampère.

Inizialmente si assume che la distribuzione di massa non abbia parti singolari. Successivamente questa ipotesi verrà rilassata dal momento che l'Universo è costituito da strutture cosmiche ad alta densità. Si parte dal vincolo della conservazione della massa  $\rho_0(\mathbf{x})d^3\mathbf{x} = \rho_{in}(\mathbf{q})d^3\mathbf{q}$  che può essere

riscritto in funzione della matrice Jacobiana  $\nabla_{\mathbf{q}}\mathbf{x}$  nella forma

$$\det\nabla_{\mathbf{q}}\mathbf{x} = \frac{\rho_{in}(\mathbf{q})}{\rho_0(\mathbf{x}(\mathbf{q}))}. \quad (3.12)$$

La parte a destra dell'equazione è data dalle condizioni al contorno: la posizione finale delle particelle è nota e la distribuzione iniziale di densità  $\rho_{in}(\mathbf{q}) = \rho_{in} = cost$  è omogenea. Per risolvere l'equazione si utilizza l'ipotesi (3.1): la mappa Lagrangiana  $\mathbf{x}(\mathbf{q}) = \nabla_{\mathbf{q}}\Phi(\mathbf{q})$  è il gradiente di un potenziale  $\Phi(\mathbf{q})$  convesso. Con questa assunzione l'equazione (3.12) diventa

$$\det(\nabla_{q_i}\nabla_{q_j}\Phi(\mathbf{q})) = \frac{\rho_{in}}{\rho_0(\nabla_{\mathbf{q}}\Phi(\mathbf{q}))}. \quad (3.13)$$

Ci si riconduce a un'equazione più semplice di (3.13) considerando l'inversa della mappa Lagrangiana  $\mathbf{q}(\mathbf{x})$ . Dal momento che  $\mathbf{q}(\mathbf{x})$  è l'inversa di una mappa con un potenziale convesso avrà anch'essa un potenziale convesso <sup>1</sup>:

$$\mathbf{q}(\mathbf{x}) = \nabla_{\mathbf{x}}\Theta(\mathbf{x}) \quad (3.14)$$

dove  $\Theta(\mathbf{x})$  è legato al potenziale convesso  $\Phi(\mathbf{q})$  dalla trasformata di Legendre-Fenchel

$$\begin{aligned} \Theta(\mathbf{x}) &= \max_{\mathbf{q}}[\mathbf{x} \cdot \mathbf{q} - \Phi(\mathbf{q})], \\ \Phi(\mathbf{q}) &= \max_{\mathbf{x}}[\mathbf{x} \cdot \mathbf{q} - \Theta(\mathbf{x})]. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Si può allora riscrivere la conservazione della massa in funzione del potenziale  $\Theta(\mathbf{x})$ :

$$\det(\nabla_{x_i}\nabla_{x_j}\Theta(\mathbf{x})) = \frac{\rho_0(\mathbf{x})}{\rho_{in}} \quad (3.16)$$

A differenza della (3.13) in questa equazione differenziale l'incognita appare solo a sinistra.

Dal momento che nella distribuzione attuale di materia sono presenti concentrazioni di massa consideriamo il caso in cui  $\rho_0$  abbia componenti singolari. In questo caso verrà usata la conservazione della massa nella sua forma integrale

$$\int_{\mathcal{D}_E} \rho_0(\mathbf{x})d^3\mathbf{x} = \int_{\nabla_{\mathbf{x}}\Theta(\mathcal{D}_E)} \rho_{in}(\mathbf{q})d^3\mathbf{q} \quad (3.17)$$

che è conosciuta come *formulazione debole* dell'equazione di Monge-Ampère. Nei punti dove il potenziale  $\Theta(\mathbf{x})$  non è più differenziabile (ossia nei punti

<sup>1</sup>la matrice Jacobiana  $\nabla_{\mathbf{q}}\mathbf{x}$  è simmetrica, dunque è simmetrica anche la sua matrice inversa  $\nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{q}$  e questo equivale a dire che anche la mappa Lagrangiana inversa è potenziale; il potenziale è convesso perché la Jacobiana  $\nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{q}$ , essendo la matrice inversa di una matrice definita positiva, è anch'essa definita positiva.

corrispondenti alle parti singolari di  $\rho_0$ ) al gradiente  $\nabla_{\mathbf{x}}\Theta(\mathbf{x})$  verranno associati più valori, precisamente a ciascun di questi punti  $\mathbf{x}$  verranno associate le pendenze dei piani tangenti al grafico di  $\Theta$  nel punto  $(\mathbf{x}, \Theta(\mathbf{x}))$ .

Si può provare che la soluzione dell'equazione di Monge-Ampère nella sua formulazione debole ha un'unica soluzione se i domini  $\mathcal{D}_{in}$  e  $\mathcal{D}_0$  sono limitati e convessi.

### 3.3 Problema del trasporto ottimo di massa

Verrà ora dimostrato che risolvere l'equazione di Monge-Ampère (3.16) è equivalente a trovare la soluzione unica di un problema di ottimizzazione: il *problema del trasporto ottimo di massa*.

Siano date due distribuzioni  $\rho_{in}(\mathbf{q})$  e  $\rho_0(\mathbf{x})$  della stessa quantità di materia in due domini convessi e finiti  $\mathcal{D}_{in}$  e  $\mathcal{D}_0$ , con  $\mathbf{q} \in \mathcal{D}_{in}$  e  $\mathbf{x} \in \mathcal{D}_0$ . Il problema del trasporto ottimo di massa consiste nel trovare la mappa  $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{q}$  che minimizzi la funzione costo

$$I \equiv \int_{\mathcal{D}_{in}} c(\mathbf{q}, \mathbf{x}(\mathbf{q})) \rho_{in}(\mathbf{q}) d^3\mathbf{q} = \int_{\mathcal{D}_0} c(\mathbf{q}(\mathbf{x}), \mathbf{x}) \rho_0(\mathbf{x}) d^3\mathbf{x}. \quad (3.18)$$

con i vincoli costituiti dalle due densità  $\rho_{in}(\mathbf{q})$  e  $\rho_0(\mathbf{x})$  e dalla conservazione della massa  $\rho_{in}(\mathbf{q})d^3\mathbf{q} = \rho_0(\mathbf{x})d^3\mathbf{x}$ .

Se  $c(\mathbf{q}, \mathbf{x}) = \frac{|\mathbf{x}(\mathbf{q}) - \mathbf{q}|^2}{2}$ , ossia è una funzione quadratica della distanza, la soluzione che minimizza la funzione costo

$$I = \int_{\mathcal{D}_{in}} \frac{|\mathbf{x}(\mathbf{q}) - \mathbf{q}|^2}{2} \rho_{in}(\mathbf{q}) d^3\mathbf{q} = \int_{\mathcal{D}_0} \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{q}(\mathbf{x})|^2}{2} \rho_0(\mathbf{x}) d^3\mathbf{x} \quad (3.19)$$

risulta essere il gradiente di una funzione convessa e quindi soddisfa l'equazione di Monge-Ampère (3.16).

In altre parole il problema di trovare la mappa lagrangiana una volta assegnati i campi di densità iniziale e finale è equivalente a un problema di trasporto di massa con costo quadratico.

Diamo una dimostrazione nel caso in cui la densità di materia non presenti parti singolari. Si considera la variazione del costo (3.19) dovuta a una variazione della mappa Lagrangiana  $\mathbf{x}(\mathbf{q})$ . Tale variazione viene causata dallo spostamento di un elemento dalla posizione  $\mathbf{x}(\mathbf{q})$  alla posizione  $\mathbf{x}(\mathbf{q}) + \delta\mathbf{x}(\mathbf{q})$ . Per esprimere tutto in coordinate Euleriane al posto di  $\delta\mathbf{x}(\mathbf{q})$  si scrive  $\delta\mathbf{x}_E(\mathbf{x}) \equiv \delta\mathbf{x}(\mathbf{q}(\mathbf{x}))$ . Questa variazione non deve cambiare il campo di densità  $\rho_0(\mathbf{x})$ . Il fatto che l'elemento nella posizione  $\mathbf{x}$  venga spostato nella posizione  $\mathbf{x} + \delta\mathbf{x}$  implica che  $\rho_0(\mathbf{x})d^3\mathbf{x} = \rho_0(\mathbf{y})d^3\mathbf{y}$ , posto  $\mathbf{y} = \mathbf{x} + \delta\mathbf{x}$ . Equivalentemente:

$$\rho_0 = \rho_0[\mathbf{x} + \delta\mathbf{x}_E(\mathbf{x})] \det(\nabla_{\mathbf{x}}[\mathbf{x} + \delta\mathbf{x}_E(\mathbf{x})]) \quad (3.20)$$



Troncando lo sviluppo di questa equazione al primo ordine si ottiene:

$$\nabla_{\mathbf{x}} \cdot [\rho_0(\mathbf{x})\delta\mathbf{x}_E(\mathbf{x})] = 0. \quad (3.21)$$

Si calcola la variazione del costo (3.19):

$$\begin{aligned} \delta I &= \int_{\mathcal{D}_{in}} [\mathbf{x}(\mathbf{q}) - \mathbf{q}] \cdot \delta\mathbf{x}(\mathbf{q})\rho_{in}(\mathbf{q})d^3\mathbf{q} = \\ &= \int_{\mathcal{D}_0} [\mathbf{x} - \mathbf{q}(\mathbf{x})] \cdot [\rho_0(\mathbf{x})\delta\mathbf{x}_E(\mathbf{x})]d^3\mathbf{x} = 0 \end{aligned} \quad (3.22)$$

Dal momento che vale il vincolo (3.21), l'equazione implica che  $\mathbf{x} - \mathbf{q}(\mathbf{x})$  sia ortogonale a tutti i campi vettoriali a divergenza nulla. Pertanto  $\mathbf{x} - \mathbf{q}(\mathbf{x})$  deve essere un gradiente. In particolare, essendo  $\mathbf{x}$  un gradiente, deve essere  $\mathbf{q}(\mathbf{x}) = \nabla_{\mathbf{x}}\Theta(\mathbf{x})$ .

Bisogna ora dimostrare che il potenziale  $\Theta(\mathbf{x})$  è convesso. Per farlo ci si serve della monotonicità della mappa <sup>2</sup>  $\mathbf{q}(\mathbf{x}) = \nabla_{\mathbf{x}}\Theta(\mathbf{x})$ :

$$(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1) \cdot [\mathbf{q}(\mathbf{x}_2) - \mathbf{q}(\mathbf{x}_1)] \geq 0 \quad (3.23)$$

per ogni  $\mathbf{x}_1$  e  $\mathbf{x}_2$ . Se infatti nella (3.23) si pone  $\mathbf{q}(\mathbf{x}) = \nabla_{\mathbf{x}}\Theta(\mathbf{x})$  con un'espansione di Taylor si ottiene:

$$(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1) \cdot [\nabla_{x_i}\nabla_{x_j}\Theta(\mathbf{x}_1)(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)] \geq 0. \quad (3.24)$$

La (3.24) prova che la matrice Hessiana di  $\Theta(\mathbf{x})$  è definita positiva. Dunque il potenziale  $\Theta(\mathbf{x})$  è convesso.

La dimostrazione nel caso generale si serve della versione 'rilassata' del problema del trasporto di massa formulata da Kantorovich nel 1942. In questa riformulazione il costo da minimizzare è

$$\tilde{I} \equiv \int_{\mathcal{D}_{in}} \int_{\mathcal{D}_0} c(\mathbf{q}, \mathbf{x})\rho(\mathbf{q}, \mathbf{x})d^3\mathbf{q}d^3\mathbf{x} \quad (3.25)$$

dove  $\rho(\mathbf{q}, \mathbf{x})$  è positiva e devono valere:

$$\int_{\mathcal{D}_0} \rho(\mathbf{q}, \mathbf{x})d^3\mathbf{x} = \rho_{in}(\mathbf{q}), \quad \int_{\mathcal{D}_{in}} \rho(\mathbf{q}, \mathbf{x})d^3\mathbf{q} = \rho_0(\mathbf{x}). \quad (3.26)$$

Il costo  $\tilde{I}$  si riduce al costo  $I$  definito in (3.18) se  $\rho(\mathbf{q}, \mathbf{x})$  assume una delle seguenti forme:

$$\begin{aligned} \rho(\mathbf{q}, \mathbf{x}) &= \rho_0(\mathbf{x})\delta(\mathbf{q} - \mathbf{q}(\mathbf{x})) \\ \rho(\mathbf{q}, \mathbf{x}) &= \rho_{in}(\mathbf{q})\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}(\mathbf{q})). \end{aligned} \quad (3.27)$$

<sup>2</sup>la monotonicità di  $\mathbf{q}(\mathbf{x})$  si dimostra facilmente: se non vale la proprietà di monotonicità per una coppia  $\bar{\mathbf{x}}_1, \bar{\mathbf{x}}_2$  allora per la continuità di  $\mathbf{q}(\mathbf{x})$  esisterà tutto un intorno di  $(\bar{\mathbf{x}}_1, \bar{\mathbf{x}}_2)$  in cui

$$|(\mathbf{q}(\mathbf{x}_1) - \mathbf{x}_1)|^2 + |(\mathbf{q}(\mathbf{x}_2) - \mathbf{x}_2)|^2 > |(\mathbf{q}(\mathbf{x}_2) - \mathbf{x}_1)|^2 + |(\mathbf{q}(\mathbf{x}_1) - \mathbf{x}_2)|^2.$$

Questo significa che il funzionale  $I$  non è minimo dal momento che le coppie  $(\mathbf{x}_1, \mathbf{q}(\mathbf{x}_2))$  e  $(\mathbf{x}_2, \mathbf{q}(\mathbf{x}_1))$  danno un contributo minore delle coppie  $(\mathbf{x}_1, \mathbf{q}(\mathbf{x}_1))$  e  $(\mathbf{x}_2, \mathbf{q}(\mathbf{x}_2))$ .

### 3.4 Fonti di incertezza nella ricostruzione

Analizziamo qui di seguito tre cause che possono portare a una soluzione non unica nella ricostruzione MAK.

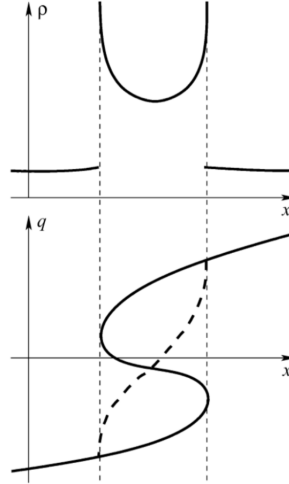


Figura 3.1: esempio unidimensionale di non unicità della ricostruzione in presenza di una regione di multistreaming di dimensione non trascurabile. La stessa distribuzione di densità in alto può essere prodotta sia dalla mappa  $q(x)$  a più valori (linea continua nella figura in basso) sia dalla mappa rappresentata dalla linea tratteggiata. Figura tratta da [6].

1. La presenza di regioni di multistreaming di dimensioni non trascurabili sono causa di non unicità nella ricostruzione delle posizioni. Un esempio unidimensionale è mostrato nella figura 3.1.
2. Altra fonte di incertezza sono le regioni collassate: domini di volume finito nello spazio Lagrangiano a cui corrispondono nello spazio Euleriano concentrazioni di massa di volume infinitesimo. L'antecedente Lagrangiano della concentrazione di massa nello spazio Euleriano è unicamente definito. Non è invece possibile dare una ricostruzione unica del campo di velocità primordiale di queste regioni collassate. Nella figura 3.2 viene mostrato un esempio unidimensionale di regione collassata.
3. Si è detto che l'unicità è garantita se i domini  $\mathcal{D}_{in}$  e  $\mathcal{D}_0$  sono convessi e limitati. Si pone allora il problema di conoscere il dominio Lagrangiano  $\mathcal{D}_{in}$  corrispondente al dominio Euleriano finito  $\mathcal{D}_0$  di cui è nota la distribuzione di densità  $\rho_0$ . Il volume di  $\mathcal{D}_{in}$  è noto ( $\rho_{in}$  è costante), mentre per conoscere la sua posizione e forma bisogna tenere conto

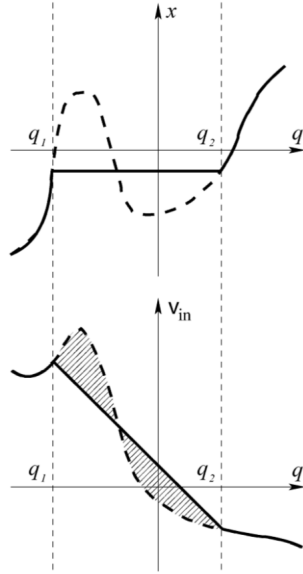


Figura 3.2: un esempio unidimensionale di regione collassata. L'intervallo  $[q_1, q_2]$  collassa in un singolo punto dell'asse  $x$ . La posizione dell'intervallo è unicamente definita. La ricostruzione delle velocità primordiali invece non è unica: le linee tratteggiate e continue del grafico  $v_{in}(q)$  danno luogo, se si ritiene valido il modello dell'adesione, alla stessa mappa Lagrangiana rappresentata dalla linea continua del grafico  $x(q)$ . L'approssimazione di Zel'dovich darebbe invece origine a una regione di multistreaming rappresentata dalla linea tratteggiate del grafico  $x(q)$ . Figura tratta da [6].

di ulteriori informazioni. Ad esempio lo spostamento medio degli elementi dal momento di disaccoppiamento può ridurre l'incertezza sulla forma del dominio.

### 3.5 Problema di assegnazione

Dal momento che le informazioni sulla distribuzione di massa vengono fornite nella forma di  $N$  particelle discrete sia nelle simulazioni che nei dati provenienti dalle osservazioni riformuliamo il problema di ottimizzazione considerando densità discrete:

$$\rho_0(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^N \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i), \quad \rho_{in}(\mathbf{q}) = \sum_{j=1}^N \delta(\mathbf{q} - \mathbf{q}_j). \quad (3.28)$$

Si è ipotizzato che sia nello spazio Lagrangiano che in quello Euleriano ci

siano  $N$  masse unitarie. La funzione costo diventa:

$$I = \sum_{i=1}^N \frac{|\mathbf{x}_i - \mathbf{q}_{j(i)}|^2}{2}. \quad (3.29)$$

La minimizzazione del costo (3.29) si riconduce a quello che in teoria dell'ottimizzazione è conosciuto come *problema di assegnazione*: data una matrice costo  $c_{ij}$ , bisogna trovare una permutazione  $j(i)$  che minimizzi la funzione costo

$$I = \sum_{i=1}^N c_{ij(i)}. \quad (3.30)$$

Nel nostro caso  $c_{ij} = \frac{|\mathbf{x}_i - \mathbf{q}_{j(i)}|^2}{2}$ .

Una proprietà della soluzione del problema di assegnazione è la monotonicità:

$$(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) \cdot (\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2) \geq 0. \quad (3.31)$$

A differenza del caso monodimensionale dove la monotonicità implica la minimizzazione del costo, in più di una dimensione questa proprietà non è sufficiente: per minimizzare il costo è necessaria la monotonicità ciclica. Questa proprietà richiede che per ogni sottoinsieme di  $k$  coppie di posizioni iniziali e finali, con  $2 \leq k \leq N$ , il costo non debba diminuire nel caso di una permutazione arbitraria delle posizioni iniziali.

Per un insieme di  $N$  particelle il problema di assegnazione ha un'unica soluzione che si può trovare analizzando tutte le  $N!$  permutazioni possibili. Esistono tuttavia algoritmi che riescono a ridurre la complessità del problema da fattoriale a polinomiale (vicina a  $N^3$  se la funzione costo è arbitraria, mentre può essere ulteriormente ridotta nel caso di un costo quadratico).

Prima di analizzare questi metodi che fanno uso della cosiddetta formulazione duale del problema consideriamo il metodo PIZA [9] ("path interchange Zel'dovich approximation"), un algoritmo stocastico che non garantisce unicità. Il passo iniziale di questo metodo consiste nello scegliere una corrispondenza arbitraria tra posizioni Lagrangiane ed Euleriane in modo casuale. Questa assegnazione iniziale viene migliorata con il seguente procedimento. Si prende, sempre in maniera casuale, una coppia di posizioni (ad esempio  $\mathbf{x}_1$  e  $\mathbf{x}_2$ ) a cui corrispondo, secondo l'assegnazione iniziale, le posizioni Lagrangiane  $\mathbf{q}_1$  e  $\mathbf{q}_2$ . Se non è soddisfatta la relazione (3.31) che esprime la monotonicità le posizioni vengono scambiate, ossia a  $\mathbf{x}_1$  viene associata la posizione iniziale  $\mathbf{q}_2$  e a  $\mathbf{x}_2$  la posizione  $\mathbf{q}_1$ . In sostanza non si fa altro che minimizzare il costo dal momento che la violazione di (3.31) implica  $[(\mathbf{x}_1 - \mathbf{q}_1)^2 + (\mathbf{x}_2 - \mathbf{q}_2)^2 > (\mathbf{x}_1 - \mathbf{q}_2)^2 + (\mathbf{x}_2 - \mathbf{q}_1)^2]$ . Il processo continua fino a quando il costo (3.29) cessa di decrescere. Si può vedere come oltre alla mancanza di unicità (il risultato dipende dall'assegnazione iniziale

e dalla selezione delle coppie) non sia nemmeno assicurato il raggiungimento del risultato ottimale: per raggiungere un costo inferiore potrebbe essere necessario uno scambio simultaneo di tre o più particelle, cosa che non è prevista nell'algoritmo PIZA.

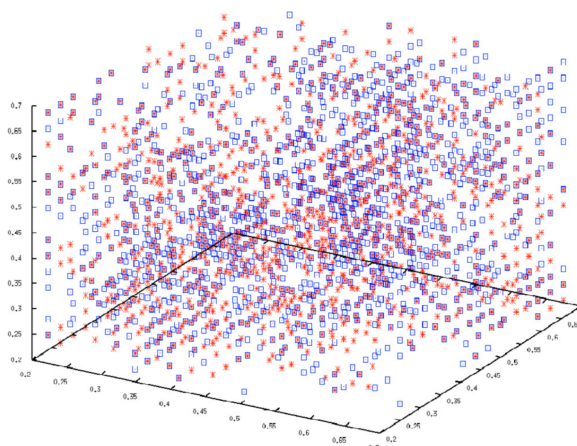


Figura 3.3: Il risultato dell'algoritmo PIZA dipende dall'assegnazione iniziale. Le stelle rosse e i quadrati blu rappresentano i punti ricostruiti esattamente per due differenti assegnazioni iniziali. I risultati non coincidono. Figura tratta da [7].

### 3.6 Problema duale e algoritmo dell'asta

Torniamo ora a considerare gli algoritmi deterministici che garantiscono che venga raggiunta l'assegnazione ottimale. Sostituiamo il problema della minimizzazione del costo (3.29) con un problema rilassato di programmazione lineare consistente nel minimizzare la funzione

$$\tilde{I} = \sum_{i,j=1}^N c_{ij} f_{ij} \quad (3.32)$$

dove le variabili  $f_{ij}$  soddisfano

$$f_{ij} \geq 0, \quad \sum_{k=1}^N f_{kj} = \sum_{k=1}^N f_{ik} = 1 \quad (3.33)$$

per ogni  $i, j$  (si tratta della versione discreta di (3.25)-(3.26)).

Per risolvere questo problema ci si può servire di un dispositivo che funge da computer analogico: le equazioni vengono sostituite da leggi fisiche e i numeri sono rappresentati da quantità fisiche. La configurazione di equilibrio raggiunta in un tempo finito dal dispositivo rappresenta la soluzione

del problema che verrà espressa in termini dei valori assunti dalle grandezze fisiche in quella particolare configurazione. Si può arrivare all'equilibrio seguendo procedure diverse, a ciascuna delle quali corrisponde uno specifico algoritmo. La soluzione raggiunta è la medesima, ma il tempo computazionale impiegato per arrivarvi può differire di diversi ordini di grandezza a seconda dell'algoritmo utilizzato. Nel nostro caso verrà utilizzato l'*algoritmo dell'asta* [10]. La soluzione del problema rilassato sarà anche soluzione del problema originario: trovare una permutazione  $j(i)$  che minimizzi il costo  $I = \sum_{i=1}^N c_{ij(i)}$ . Questo equivale a dire che per ogni  $i$  o  $j$  fissata le  $f_{ij}$  saranno tutte nulle eccetto una che assumerà valore unitario.

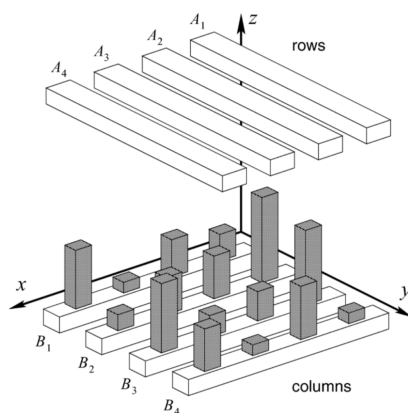


Figura 3.4: Il dispositivo meccanico che serve a risolvere il problema di assegnazione. In questo esempio  $N = 4$ . Figura tratta da [6].

Passiamo alla descrizione del dispositivo. Si fa riferimento alla figura 3.4. Si distinguono due gruppi di aste orizzontali, cioè parallele al piano  $xy$ , ciascuno formato da  $N$  componenti. Vengono chiamate *righe* le aste  $A_i$  parallele all'asse  $y$  (ad esse vengono associate le posizioni Euleriane delle particelle), *colonne* le aste  $B_j$  parallele all'asse  $x$  (ad esse sono associate le posizioni Lagrangiane). I nomi sono un riferimento alle righe e alle colonne della matrice costo. Ad ogni riga  $A_i$  viene associata l'altezza  $\alpha_i$  corrispondente alla coordinata  $z$  della faccia inferiore. Analogamente alla colonna  $B_j$  si associa l'altezza  $\beta_j$  corrispondente alla coordinata  $z$  della faccia superiore. Sulle colonne sono presenti  $N^2$  sbarrette: se ne trovano  $N$  su ogni colonna  $B_j$ , posizionate in corrispondenza delle  $N$  righe. L'altezza di queste sbarrette è variabile in quanto dipendono dal costo  $c_{ij}$  associato alla coppia  $(\mathbf{x}_i, \mathbf{q}_j)$ . L'altezza della sbarretta che si trova sulla colonna  $B_j$  in corrispondenza della riga  $A_i$  vale infatti  $C - c_{ij}$ , con  $C$  costante positiva sufficientemente grande. Alle righe è associato peso unitario positivo, alle colonne peso unitario negativo. Il peso delle sbarrette è invece trascurabile. Le righe e le colonne possono muoversi verticalmente. Le righe si muoveranno verso il basso, le

colonne verso l'alto. Dovrà valere il vincolo

$$\alpha_i - \beta_j \geq C - c_{ij}. \quad (3.34)$$

Questo equivale a dire che le righe si trovano sempre al di sopra delle colonne e che la distanza minima  $C - c_{ij}$  tra la riga  $A_i$  e la colonna  $B_j$  viene raggiunta quando la riga entra in contatto con la sbarretta sulla colonna. L'energia potenziale del sistema è

$$U = \sum_{i=1}^N \alpha_i - \sum_{j=1}^N \beta_j. \quad (3.35)$$

Dal momento che le righe scendono e le colonne salgono a un certo punto si formeranno dei contatti che verranno eventualmente modificati seguendo apposite procedure. A un certo punto dell'evoluzione il sistema raggiunge l'equilibrio, precisamente quando l'energia potenziale è minima. La soluzione del problema (3.32)-(3.33) viene espressa in termini delle forze esercitate tra le righe e le colonne nella configurazione di equilibrio. Queste forze sono i valori  $f_{ij}$  che minimizzano il costo (3.32).

Passiamo ora alla descrizione dell'*algoritmo dell'asta*. Inizialmente le colonne vengono mantenute ferme nel piano  $xy$  mentre le righe cominciano a scendere (e dunque l'energia potenziale diminuisce) partendo tutte dalla stessa altezza  $\alpha_i$  tale che  $\alpha_i - \beta_j > C - c_{ij}$ . La riga  $A_i$  si ferma quando entra in contatto con la colonna a cui corrisponde la sbarretta con altezza  $C - c_{ij}$  maggiore (quindi quella a cui corrisponde il costo  $c_{ij}$  minore). Se ciascuna colonna è entrata in contatto con una sola riga (e ciascuna riga con una sola colonna) allora si è raggiunta la soluzione del problema di assegnazione. In particolare a ogni coordinata euleriana  $\mathbf{x}_i$  (riga  $A_i$ ) corrisponde la coordinata Lagrangiana  $\mathbf{q}_j$  (colonna  $B_j$ ) meno distante. Si era detto infatti che ciascuna riga entra in contatto con la colonna a cui corrisponde il costo  $c_{ij} = \frac{|\mathbf{x}_i - \mathbf{q}_j|^2}{2}$  minore. Può però accadere che a una colonna  $B_j$  corrisponda più di una riga. In questo caso si fa scendere la colonna  $B_j$  assieme alle righe con essa in contatto, tenendo ferme tutte le altre, fino a quando solo una di queste righe mantiene il contatto (le altre si staccano dalla colonna quando incontrano la sbarretta di un'altra colonna). Se nella nuova configurazione ci sono altre colonne in contatto con più di una riga si procede allo stesso modo.

Concludiamo spiegando perché alla configurazione di equilibrio del computer analogico corrisponda la soluzione del problema di assegnazione. Dimostriamo innanzitutto che le forze  $f_{ij}$  devono assumere valori interi. Consideriamo la riga  $A_i$  e la colonna  $B_j$ . Il valore di  $f_{ij}$  corrisponde alla forza esercitata sulla sbarretta dalla riga  $A_i$  o dalla colonna  $B_j$ . Se la riga e la colonna non sono in contatto  $f_{ij}$  sarà nulla. Consideriamo il caso non nullo e calcoliamo la forza esercitata dalla riga  $A_i$ . Va sommato il contributo +1 dato dal suo peso e il contributo negativo dato dalle altre colonne con

cui la riga è eventualmente in contatto (per ciascuna colonna sarà  $-1$  a cui va sommato il contributo delle altre righe con cui la colonna è in contatto). Il risultato è un numero intero perché somma di contributi unitari (positivi o negativi).

Dimostriamo ora che a ogni riga  $A_i$  è associata una sola colonna  $B_j$  e viceversa. Dal momento che siamo nella configurazione di equilibrio la spinta fornita dalle colonne con cui  $A_i$  è in contatto dovrà equilibrare il peso unitario di  $A_i$ . Poiché le forze esercitate dalle colonne hanno lo stesso segno, per equilibrare il peso unitario della riga è necessario che siano tutte nulle eccetto una. Analogo discorso vale se consideriamo una colonna.

Rimane da dimostrare che i valori  $f_{ij}$  trovati nella configurazione di equilibrio minimizzano il costo (3.32). Si parte dalla seguente osservazione: se si sposta verso il basso una colonna di una quantità  $\Delta$  e vengono contemporaneamente aumentate della stessa quantità le lunghezze delle  $N$  sbarrette su di essa la nuova configurazione è equivalente alla precedente. Questo perché i contatti tra le righe e le colonne rimangono gli stessi e il cambiamento dei coefficienti  $c_{ij}$  non crea problemi dal momento che alla funzione costo (3.32) viene solo sottratta una costante. Ma allora tutte le colonne possono essere sistemate sul piano  $z = 0$  spostando ciascuna di una quantità opportuna  $\Delta_j$  e aggiustando di conseguenza i costi  $c_{ij}$ . Il fatto che tutte le colonne si trovino alla stessa altezza implica che ciascuna riga è in contatto con la sbarretta più alta. Ciò equivale a dire che ciascuna riga è associata alla colonna a cui corrisponde il minor costo  $c_{ij}$  (dal momento che l'altezza delle sbarrette è  $C - c_{ij}$ , fissata  $i$  il valore massimo di  $C - c_{ij}$  corrisponde al costo minimo  $c_{ij}$ ).

L'algoritmo di Bertsekas è particolarmente veloce nel caso in cui la riga  $A_i$  può essere associata alla colonna  $B_j$  solo se la coppia  $(A_i, B_j)$  appartiene a un dato sottinsieme dell'insieme delle  $N^2$  possibili coppie. Questa procedura è adatta al problema della ricostruzione dal momento che si può assumere che la distanza tra  $\mathbf{x}_i$  e la corrispondente posizione Lagrangiana  $\mathbf{q}_j$  sia limitata: lo spostamento delle galassie è in media pari al 5% di un lato della griglia cubica della simulazione. La coppia  $(\mathbf{x}_i, \mathbf{q}_j)$  viene allora considerata valida solo se la loro distanza è minore di un determinato valore  $d_{crit}$  (distanza critica).

### 3.7 Test del metodo MAK con simulazioni a N corpi

Per testare il metodo MAK si approssima la materia oscura con  $N$  particelle di massa identica e si procede con una simulazione a  $N$  corpi che prevede una situazione iniziale dove le particelle sono distribuite uniformemente su una griglia cubica. La simulazione calcola, utilizzando la dinamica Newtoniana, le traiettorie delle particelle fino al tempo attuale in un sistema comovente.



Si impongono condizioni periodiche al contorno. Si può allora applicare il metodo MAK per trovare le posizioni iniziali delle particelle a partire dalle loro posizioni attuali fornite dalla simulazione. Si tratterà poi di confrontare le coppie  $(\mathbf{x}_i, \mathbf{q}_j)$  ottenute dalla ricostruzione con quelle della simulazione. Qui di seguito sono esposti i risultati presenti negli articoli [6], [7] e [8]. Per la simulazione vengono usate  $128^3$  particelle distribuite inizialmente in modo uniforme su una griglia cubica di lato  $200 h^{-1}\text{Mpc}$ , dove  $h$  è il parametro di Hubble nelle unità di misura  $100 \text{ km s}^{-1}\text{Mpc}^{-1}$ . Per la simulazione è stato utilizzato il codice HYDRA [11]. I parametri del modello cosmologico  $\Lambda\text{CDM}$  sono  $\Omega_m = 0.3$ ,  $\Omega_\lambda = 0.7$ ,  $h = 0.65$  e  $\sigma_8 = 0.9$ . Il metodo di ricostruzione viene applicato a tre diversi campioni: si considerano le particelle della griglia cubica iniziale e si selezionano le particelle che si trovano sulle griglie i cui punti distano rispettivamente  $\Delta x = 6.25 h^{-1}\text{Mpc}$ ,  $\frac{\Delta x}{2}$  e  $\frac{\Delta x}{4}$ .

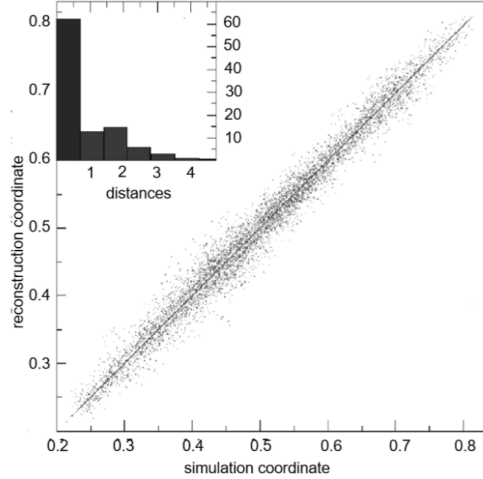


Figura 3.5: Test del metodo di ricostruzione MAK. I punti vicino alla linea diagonale rappresentano le coordinate Lagrangiane ricostruite in funzione di quelle della simulazione. Sia il grafico che l'istogramma sono relativi al campione della griglia con passo  $\Delta x = 6.25 h^{-1}\text{Mpc}$ . Per il grafico è stata introdotta la proiezione quasi periodica  $\tilde{q} = (\mathbf{q}_1 + \sqrt{2}\mathbf{q}_2 + \sqrt{3}\mathbf{q}_3)/(1 + \sqrt{2} + \sqrt{3})$  che assicura una corrispondenza biunivoca tra i valori  $\tilde{q}$  e i punti Lagrangiani  $\mathbf{q}$ . L'istogramma riporta in percentuale le distanze tra i punti ricostruiti e quelli della simulazione. Il 62% dei punti è ricostruito esattamente. Figura tratta da [6].

Nel caso in cui le posizioni Euleriane si trovino vicino a un confine della griglia cubica le condizioni periodiche al contorno fanno sì che gli antecedenti Lagrangiani vengano posizionati dall'altra parte della scatola, presentando così l'inconveniente di produrre coppie  $(\mathbf{x}_i, \mathbf{q}_j)$  la cui distanza è dell'ordine di un lato della griglia cubica. I contributi spuri  $c_{ij} = \frac{|\mathbf{x}_i - \mathbf{q}_j|^2}{2}$  di tali coppie

incidono infatti in maniera eccessiva sul costo (3.29): se l'1% delle particelle presenta una distanza tra la posizione Euleriana e l'antecedente Lagrangiano pari a un lato della griglia cubica, il loro contributo alla funzione costo è pari al quadruplo di quello fornito dal restante 99% che presenta la distanza tipica di 1/20 di lato. Per porre rimedio al problema è sufficiente sottrarre o sommare la lunghezza di un lato alle posizioni Lagrangiane che si trovano dalla parte opposta della griglia cubica rispetto alle corrispondenti posizioni Euleriane. Tale operazione viene chiamata *correzione periodica*. In aggiunta a questa correzione vengono scartate le particelle le cui posizioni finali non si trovano nella sfera di raggio  $16\Delta x$  centrata nella griglia cubica.

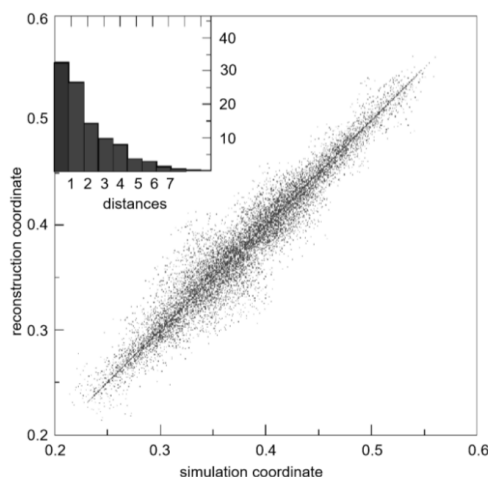


Figura 3.6: Vale ciò che è stato detto per la figura 3.5. In questo caso però ci si riferisce al campione della griglia con passo  $\frac{\Delta x}{2} = 3.125 h^{-1}\text{Mpc}$ . Figura tratta da [6].

Il grafico nella figura 3.5 riporta le posizioni Lagrangiane ricostruite con il metodo MAK in funzione di quelle vere della simulazione. la figura 3.5 è relativa alla griglia  $\Delta x = 6.25 h^{-1}\text{Mpc}$  con 17 178 punti. La figura 3.6 è invece relativa alla griglia  $\frac{\Delta x}{2}$  con 19 187 punti. La *proiezione quasi periodica*  $\tilde{q} = (\mathbf{q}_1 + \sqrt{2}\mathbf{q}_2 + \sqrt{3}\mathbf{q}_3)/(1 + \sqrt{2} + \sqrt{3})$  che è stata utilizzata garantisce una corrispondenza biunivoca tra i valori  $\tilde{q}$  e i punti  $\mathbf{q}$  sulla griglia cubica. Gli istogrammi riportano le percentuali delle distanze tra le posizioni Lagrangiane ricostruite e quelle originali. Nel caso dell'istogramma della prima figura l'unità di misura per le distanze è  $\Delta x$ . Il primo bin è costituito dai punti perfettamente ricostruiti, il secondo da quelli che distano non più di  $\Delta x$ . Per l'istogramma relativo alla griglia con passo  $\frac{\Delta x}{2} = 3.125 h^{-1}\text{Mpc}$  l'unità di misura delle distanze è  $\frac{\Delta x}{2}$ . Per la griglia  $\Delta x$  le posizioni Lagrangiane ricostruite esattamente sono il 62% e circa il 75% non dista più di  $\Delta x$ ,

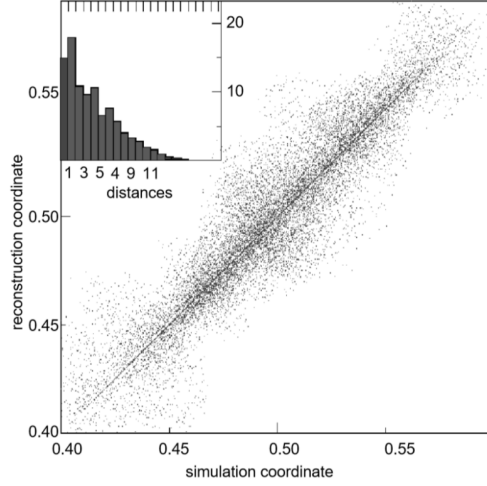


Figura 3.7: Vale ciò che è stato detto per le due figure precedenti. Questa volta ci si riferisce al campione della griglia con passo  $\frac{\Delta x}{4} = 1.56 h^{-1} \text{Mpc}$ . I punti ricostruiti esattamente sono scesi al 14%. Figura tratta da [6].

mentre per la griglia  $\frac{\Delta x}{2}$  le posizioni ricostruite esattamente sono il 35%. Nel caso della griglia  $\frac{\Delta x}{4} = 1.56 h^{-1} \text{Mpc}$  con 23 111 punti (figura 3.7) viene ricostruito esattamente solo il 14%. Per quanto riguarda il campione  $\Delta x$  se non fosse stata applicata la correzione periodica i punti ricostruiti esattamente sarebbero passati dal 62% al 45% e il costo sarebbe stato lontano dal vero minimo.

Il metodo stocastico PIZA di cui si era discusso in precedenza, applicato a una griglia  $\Delta x$  comporta il 30 – 40% di posizioni ricostruite esattamente. Tuttavia per due diverse assegnazioni iniziali solamente metà dei punti ricostruiti esattamente coincidono. Anche considerando scambi di tre punti al posto che di sole coppie non ci sono miglioramenti significativi.

Bisogna tenere presente che nei dati ottenuti dalle osservazioni le posizioni delle galassie sono spostate radialmente di una quantità proporzionale alla componente radiale della velocità peculiare. Per testare l'efficacia del metodo MAK in presenza di questi errori sistematici è stata considerata la posizione redshift  $\mathbf{s} = \mathbf{x} + \hat{\mathbf{s}}(\frac{\mathbf{x}}{H} \cdot \hat{\mathbf{s}})$  al posto della coordinata  $\mathbf{x}$  e modificata di conseguenza la funzione costo. Il test eseguito sul campione relativo alla griglia  $\Delta x$  ha portato al 43% di punti ricostruiti esattamente (e il 60% distanti non più di  $\Delta x$  dalla posizione corretta). Dal confronto di questi risultati nello spazio redshift con quelli ottenuti nello spazio fisico emerge che il 50% dei punti ricostruiti esattamente coincidono.

Per concludere si è visto come il metodo della ricostruzione sia efficace per scale al di sopra di  $6 h^{-1} \text{Mpc}$ . In regioni più dense che richiedono scale inferiori la ricostruzione diventa meno accurata.

## Capitolo 4

# Conclusioni

Nell'elaborato sono state esaminate due tecniche di ricostruzione: il metodo variazionale di Peebles e il metodo MAK. In entrambi i casi sono imposte condizioni miste al contorno: si conosce la distribuzione attuale delle galassie e il campo di densità iniziale è considerato quasi uniforme. La tecnica di Peebles conduce a più soluzioni che corrispondono ai punti stazionari dell'azione. L'unicità è invece garantita dal metodo MAK che assicura una soluzione unica fino a quando gli effetti del multistreaming non sono importanti: se si rimane al di sopra di  $6 h^{-1}\text{Mpc}$  l'ipotesi di mappa Lagrangiana con potenziale convesso risulta essere fedele e il metodo MAK funziona molto bene. I test effettuati sull'output di una simulazione a N corpi hanno infatti portato al 60% di punti ricostruiti esattamente. Se si passa invece a scale di  $3.125 h^{-1}\text{Mpc}$  e  $1.56 h^{-1}\text{Mpc}$  i punti ricostruiti esattamente scendono rispettivamente al 35% e al 14%. La complessità degli algoritmi che permettono di risolvere il problema di assegnazione è polinomiale, non maggiore di  $O(N^3)$ . Il metodo MAK coinvolge diverse aree della matematica e della fisica: dalla fluidodinamica si arriva a un problema di assegnazione, passando per l'equazione di Monge-Ampère, il problema del trasporto di massa e la dualità in programmazione lineare.

Concludiamo con un cenno agli sviluppi successivi. Un'implementazione più veloce a livello computazionale del metodo della minima azione è il metodo FAM [12] (“fast action minimization”). Per quanto riguarda invece l'applicazione del metodo MAK a cataloghi reali di galassie, ulteriori test del metodo e sue applicazioni si veda [13], [14], [15] e [16].

# Bibliografia

- [1] P.J.E. Peebles, “Tracing galaxy orbits back in time”, *The Astrophysical Journal*, 344, L53-L56 (1989).
- [2] P.J.E. Peebles, “The gravitational instability picture and the formation of the Local Group”, *The Astrophysical Journal*, 362, 1-13 (1990).
- [3] F. Cardin, “Trasporto ottimo, sistemi viventi” (2006).
- [4] A. M. Vershik, “Long history of the Monge-Kantorovich transportation problem”, *The Mathematical Intelligencer*, 35(4), 1-9 (2013).
- [5] G. Monge, “Mémoire sur la théorie des déblais et des remblais”, *Histoire de l'Académie Royale des Sciences*, 666-704 (1781).
- [6] Y. Brenier, U. Frisch, M. Hénon, G. Loeper, S. Matarrese, R. Mohayaee and A. Sobolevskii, “Reconstruction of the early Universe as a convex optimization problem”, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 346, 501-524 (2003).
- [7] R. Mohayaee, U. Frisch, S. Matarrese and A. Sobolevskii, “Back to the primordial Universe by a Monge-Ampère-Kantorovich optimization scheme”, *Astronomy & Astrophysics*, 406, 393-401 (2003).
- [8] U. Frisch, S. Matarrese, R. Mohayaee and A. Sobolevskii, “A reconstruction of the initial conditions of the Universe by optimal mass transportation”, *Nature*, 417, 260-262 (2002).
- [9] R.A.C Croft, E. Gaztañaga, “Reconstruction of cosmological density and velocity fields in the Lagrangian Zel’dovich approximation”, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 285, 793-805 (1997).
- [10] D.P. Bertsekas, “Auction Algorithms for Network Flow Problems: A Tutorial Introduction”, *Computational Optimization and Applications*, 1, 7-66 (1992).
- [11] H.M.P. Couchman, P.A. Thomas, F.R. Pearce, “Hydra: an Adaptive-Mesh Implementation of P 3M-SPH”, *The Astrophysical Journal*, 452, 797-813 (1995).

- 
- [12] A. Nusser, E. Branchini, “On the least action principle in cosmology ”, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 313, 587-595 (2000).
- [13] R. Mohayaee, R.B. Tully, “The Cosmological Mean Density and its Local Variations Probed by Peculiar Velocities”, *The Astrophysical Journal*, 635, L113-L116 (2005).
- [14] R. Mohayaee, H. Mathis, S. Colombi, J. Silk, “Reconstruction of primordial density fields”, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 365, 939-959 (2006).
- [15] G. Lavaux, R. Mohayaee, S. Colombi, R. B. Tully, F. Bernardeau, J. Silk, “Observational biases in Lagrangian reconstructions of cosmic velocity fields”, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 383, 1292-1318 (2008).
- [16] G. Lavaux, R.B. Tully, R. Mohayaee, S. Colombi, “Cosmic Flow From Two Micron All-Sky Redshift Survey: the Origin of Cosmic Microwave Background Dipole and Implications for  $\Lambda$ CDM Cosmology”, *The Astrophysical Journal*, 709, 483-498 (2010).