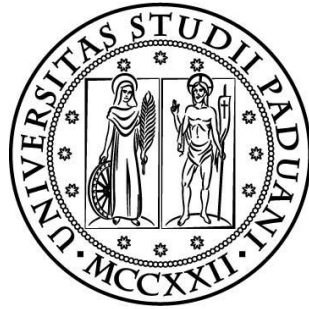


UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA  
DIPARTIMENTO DI FISICA E ASTRONOMIA "GALILEO GALILEI"  
CORSO DI LAUREA IN FISICA



TESI di LAUREA

# Contrazione di $SU(2)$ sul Gruppo di Heisenberg

Relatore: prof. KURT LECHNER  
Correlatore: prof. PAOLO CIATTI

Laureando: ENRICO ANDRIOLO  
Matricola 1075062

ANNO ACCADEMICO 2015/2016



# Indice

<b>Introduzione</b>	<b>1</b>
<b>1 SU(2) e due famiglie di sue rappresentazioni</b>	<b>3</b>
1.1 SU(2) e $\mathfrak{su}(2)$	3
1.2 Due famiglie di rappresentazioni di SU(2)	3
1.3 Rappresentazioni di $\mathfrak{su}(2)$	4
<b>2 Il gruppo di Heisenberg e due famiglie di sue rappresentazioni</b>	<b>12</b>
2.1 H e $\mathfrak{h}$	12
2.2 La rappresentazione di <i>Schrödinger</i>	13
2.3 Dalla rappresentazione di <i>Schrödinger</i> a quella di <i>Bargmann</i>	20
<b>3 Contrazione di gruppi</b>	<b>25</b>
3.1 Contrazione di $SU(2)$ sul gruppo di Heisenberg	26
3.2 Dalle rappresentazioni di $SU(2)$ a quelle del gruppo di Heisenberg	31
<b>Appendice A</b>	<b>38</b>
<b>Bibliografia</b>	<b>40</b>

## Introduzione

Con la presente trattazione si vuole prendere dimestichezza con alcuni aspetti caratterizzanti il calcolo differenziale svolto su particolari Gruppi di Lie e con la teoria delle rappresentazioni. In particolare, verranno analizzati due gruppi di Lie ( $SU(2)$  e il Gruppo di Heisenberg) e una tecnica matematica che permette di ottenere l'uno a partire dall'altro (la contrazione tra gruppi).

Come è ben noto, si possono sfruttare le simmetrie che caratterizzano un sistema fisico per semplificarne lo studio<sup>1</sup> e per comprendere i tratti essenziali definenti la sua dinamica (si pensi al Teorema di Nöther che esplicita il legame esistente tra simmetrie e quantità conservate). Ciò detto, non è difficile intuire la rilevanza di  $SU(2)$  in fisica, dato che questo gruppo è praticamente<sup>2</sup> costituito dalle rotazioni nello spazio tridimensionale.

Il gruppo di Heisenberg  $H$ , a differenza di  $SU(2)$ , non è associato a delle trasformazioni dall'immediato senso fisico. La sua importanza risiede nell'avere l'algebra di Lie isomorfa a quella generata dagli usuali operatori quantistici di posizione e di impulso e dal loro commutatore (equazione<sup>3</sup> (0.3)); equivalentemente, si può affermare che nell'algebra di Lie del Gruppo di Heisenberg è celato il principio di indeterminazione di Heisenberg relativo ad una particella quantistica libera di muoversi in una dimensione.

Sia  $H$  che  $SU(2)$  sono dei gruppi continui a 3 parametri reali, connessi e semplicemente connessi; risulta spontaneo chiedersi se queste analogie possano essere sfruttate per costruire una particolare trasformazione (la contrazione, vedi sotto) in grado di stabilire una certa corrispondenza tra le loro strutture di gruppo e le loro rappresentazioni.

Considereremo soltanto rappresentazioni unitarie irriducibili, poichè sono quelle che svolgono un ruolo importante in fisica e si mostrerà utile capire come la loro classificazione sia determinata dalle proprietà (non solo strutturali, anche topologiche) del gruppo. Scopriremo che:

- per compattezza,  $SU(2)$  ammette una rappresentazione  $n+1$ -dimensionale per ogni intero  $n \geq 0$  e che non può essere invece realizzato su uno spazio infinito-dimensionale (Capitolo 1);
- il gruppo di Heisenberg si può realizzare solo su spazi uno-dimensionali o infinito-dimensionali (Capitolo 2).

Dato che  $SU(2)$  si può rappresentare su uno spazio finito-dimensionale con dimensione grande a piacere, si intuisce che, forse, si potrebbe definire un opportu-

<sup>1</sup>Ad esempio, una volta riconosciute le trasformazioni che lasciano invariate le equazioni del moto, si può risalire ad alcune proprietà che devono essere soddisfatte dalle loro soluzioni.

<sup>2</sup>Consigliamo la lettura del capitolo 2 di [JF1], in cui viene mostrato che  $SO(3) \cong SU(2)/\mathbb{Z}_2$ .

<sup>3</sup>Da (0.3) è immediato verificare che l'algebra di Heisenberg è isomorfa all'algebra di Lie (reale) generata dagli operatori quantistici di posizione  $\hat{X}$ , di impulso  $\hat{P}$  e dal loro commutatore  $\hat{T} = [\hat{X}, \hat{P}]$ . Infatti, questi soddisfano

$$[\hat{X}, \hat{P}] = \hat{T}, \quad [\hat{P}, \hat{T}] = 0, \quad [\hat{T}, \hat{X}] = 0$$

e c'è quindi la corrispondenza

$$\tilde{X} \leftrightarrow \hat{X} \quad \tilde{Y} \leftrightarrow \hat{P} \quad -2\tilde{Z} \leftrightarrow \hat{T}.$$

no limite di rappresentazioni tale per cui una particolare successione di rappresentazioni di  $SU(2)$  possa convergere ad una realizzazione infinito-dimensionale del gruppo di Heisenberg; nel Capitolo 3, si mostrerà che questo limite deve essere inteso come convergenza degli elementi di matrice delle rappresentazioni coinvolte.

Per definirlo, risulterà necessario studiare prima la *contrazione di  $SU(2)$  sul gruppo di Heisenberg  $H$* , procedura matematica che permette di ricavare *localmente* la struttura del gruppo di Heisenberg a partire da quella di  $SU(2)$ . Inoltre, nel Capitolo 3, vedremo che la contrazione di  $SU(2)$  su  $H$  indurrà automaticamente la contrazione delle rispettive algebre di Lie, ovvero la *contrazione di  $\mathfrak{su}(2)$  su  $\mathfrak{h}$* ; questa, in buona sostanza, consiste nell'introdurre un parametro regolatore  $\epsilon \in \mathbb{R}$  nelle costanti di struttura di  $\mathfrak{su}(2)$  in maniera tale che, nel limite in cui  $\epsilon \rightarrow 0$ , l'algebra  $\mathfrak{su}(2)$  si possa confondere con  $\mathfrak{h}$ , come ora mostriamo in maniera intuitiva, affinché si possa fin da subito apprezzare la semplicità e l'eleganza dell'argomento.

Come vedremo più avanti, a meno di isomorfismi di algebre di Lie, si può assumere che lo spazio vettoriale (reale)  $T$  soggiacente a  $\mathfrak{su}(2)$  e a  $\mathfrak{h}$  sia lo stesso. Sia  $\{X, Y, Z\}$  una sua base, tale che le costanti di struttura di  $\mathfrak{su}(2)$  rispetto a questa siano date da

$$[X, Y] = -2Z, \quad [Y, Z] = -2X, \quad [Z, X] = -2Y. \quad (0.1)$$

Si consideri allora, per ciascun  $\epsilon \in ]0, 1]$ , il riscaldamento  $C^\epsilon$  in  $\mathfrak{su}(2)$  della forma  $C^\epsilon : \mathfrak{su}(2) \rightarrow \mathfrak{su}(2)$  con

$$X \mapsto \tilde{X} := \epsilon^{\frac{1}{2}} X, \quad Y \mapsto \tilde{Y} := \epsilon^{\frac{1}{2}} Y, \quad Z \mapsto \tilde{Z} := \epsilon Z;$$

in questo modo, le (0.1) diventano

$$[\tilde{X}, \tilde{Y}] = -2\tilde{Z}, \quad [\tilde{Y}, \tilde{Z}] = -2\epsilon\tilde{X}, \quad [\tilde{Z}, \tilde{X}] = -2\epsilon\tilde{Y}, \quad (0.2)$$

che, nel limite in cui  $\epsilon \rightarrow 0$ , si identificano con le relazioni di commutazione dell'algebra di Heisenberg, costituite da

$$[\tilde{X}, \tilde{Y}] = -2\tilde{Z}, \quad [\tilde{Y}, \tilde{Z}] = 0, \quad [\tilde{Z}, \tilde{X}] = 0. \quad (0.3)$$

La famiglia di funzioni  $\{C^\epsilon\}_{\epsilon \in ]0, 1]}$  permette quindi di trattare l'algebra di Heisenberg  $\mathfrak{h}$  come se fosse un "caso limite" dell'algebra  $\mathfrak{su}(2)$ .

Facciamo notare che, a differenza di altri tipi di contrazioni<sup>4</sup>, quella appena descritta non si presta ad una chiara interpretazione in ambito fisico e bisogna ancora comprendere che significato attribuirle.

---

<sup>4</sup>Stiamo facendo riferimento alle contrazioni di *Inönü-Wigner*, per mezzo delle quali si riesce, ad esempio, ad ottenere l'algebra Galileiana a partire dall'algebra di Poincaré nel caso limite di basse velocità (si manda all'infinito la velocità della luce, per cui il parametro  $\epsilon$  è ora rappresentato dal rapporto fra la velocità relativa del sistema di riferimento e quella della luce).

# 1 SU(2) e due famiglie di sue rappresentazioni

In questa sezione vogliamo classificare le realizzazioni irriducibili e unitarie di  $SU(2)$ . Per raggiungere lo scopo, verranno analizzate in particolare due famiglie di rappresentazioni del gruppo, una delle quali ( $\pi^n$ ) si riprenderà poi, nel Capitolo 3.

## 1.1 SU(2) e $\mathfrak{su}(2)$

$U(2)$  è il gruppo delle trasformazioni unitarie di  $\mathbb{C}^2$ , ovvero delle  $T$  matrici  $2 \times 2$  complesse tali che  $TT^\dagger = \mathbb{I}$  o, equivalentemente, di quelle matrici  $2 \times 2$  complesse le cui righe formano una base ortonormale di  $\mathbb{C}^2$ ; quindi, dati  $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{C}$ :

$$\begin{aligned} T = \begin{pmatrix} \gamma & \alpha \\ \delta & \beta \end{pmatrix} \in U(2) &\iff (\gamma \ \alpha), (\delta \ \beta) \text{ ortonormali in } \mathbb{C}^2 \\ &\iff \begin{cases} \begin{pmatrix} \delta & \beta \end{pmatrix} = e^{i\theta} \begin{pmatrix} -\bar{\alpha} & \bar{\gamma} \end{pmatrix} \\ |\alpha|^2 + |\gamma|^2 = 1, \\ \theta \in \mathbb{R} \end{cases} \end{aligned} \quad (1.1)$$

$SU(2)$  è il sottogruppo di  $U(2)$  costituito dalle matrici aventi determinante pari ad 1. Deve cioè verificarsi l'uguaglianza  $e^{i\theta} = 1$  e risulta allora possibile mettere  $SU(2)$  in biiezione con la sfera unitaria  $\Omega$  in  $\mathbb{C}^2$  tramite la mappa  $\mathcal{I} : \Omega \rightarrow SU(2)$ , tale che  $\mathcal{I}(\alpha, \beta) = \begin{pmatrix} \beta & \alpha \\ -\bar{\alpha} & \beta \end{pmatrix}$ .

$SU(2)$  è un gruppo di Lie dalle importanti proprietà topologiche: è compatto, connesso e semplicemente connesso (si veda [BH], cap. 4). Grazie ad alcune di queste, svolgerà, nel seguito, un ruolo fondamentale l'algebra di Lie  $\mathfrak{su}(2)$  associata, che è lo spazio vettoriale reale 3-dimensionale delle matrici  $2 \times 2$  complesse, antihermitiane e aventi traccia nulla, munito delle parentesi di Lie date dall'usuale commutatore tra matrici. Si vede rapidamente che<sup>5</sup>

$$\mathfrak{su}(2) = \text{Span}_{\mathbb{R}}(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$$

ove  $\sigma_1 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$ ,  $\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$  e  $\sigma_3 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$  son le cosiddette matrici di Pauli.

## 1.2 Due famiglie di rappresentazioni di SU(2)

Sia  $\mathcal{P}^n$  lo spazio vettoriale complesso  $n+1$  dimensionale dei polinomi omogenei di grado  $n$  ( $n \geq 0$ ) in due variabili complesse. Ponendo:

$$\begin{aligned} \Pi^n : SU(2) \times \mathcal{P}^n &\rightarrow \mathcal{P}^n \\ (g, f) &\mapsto [\Pi^n(g)f](z_1, z_2) := f\left(\left(g^{-1} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}\right)^T\right) \end{aligned}$$

---

<sup>5</sup>Dato lo spazio vettoriale  $V$ , nel corso della trattazione si indicherà con  $\text{Span}_K(a_1, a_2, \dots, a_n) \subset V$  il sottospazio vettoriale sul campo  $K$  generato dagli  $n$  vettori  $a_1, a_2, \dots, a_n$  appartenenti a  $V$ .

si ottiene una rappresentazione<sup>6</sup> complessa finito-dimensionale di  $SU(2)$ , come è facile verificare.

Si può costruire un'altra rappresentazione di  $SU(2)$ , considerando la seguente azione su  $\tilde{\mathcal{P}}^n$ , spazio vettoriale di  $\dim_{\mathbb{C}} = n + 1$  dato dai polinomi in una variabile complessa di grado al massimo  $n$ :

$$\begin{aligned} \pi^n : SU(2) \times \tilde{\mathcal{P}}^n &\rightarrow \tilde{\mathcal{P}}^n \\ (g, P) &\mapsto [\pi^n(g)P](w) := (-i\bar{\alpha}w + \bar{\beta})^n P\left(\frac{\beta w - i\alpha}{-i\bar{\alpha}w + \bar{\beta}}\right). \end{aligned} \quad (1.2)$$

La relazione intercorrente tra le due rappresentazioni si esplicita attraverso il seguente isomorfismo di spazi vettoriali

$$\begin{aligned} \Gamma^n : \tilde{\mathcal{P}}^n &\rightarrow \mathcal{P}^n \\ P &\mapsto [\Gamma^n P](z_1, z_2) := z_2^n P\left(\frac{iz_1}{z_2}\right) \end{aligned}$$

che si verifica essere un morfismo di rappresentazioni, in quanto

$$\Gamma^n[\pi^n(g)P] = \Pi^n(g)\Gamma^n P \quad \forall P \in \tilde{\mathcal{P}}^n.$$

In altri termini:  $\pi^n(g)P = (\Gamma^n)^{-1}\Pi^n(g)\Gamma^n P$ , ove

$$\begin{aligned} (\Gamma^n)^{-1} : \mathcal{P}^n &\rightarrow \tilde{\mathcal{P}}^n \\ f &\mapsto [(\Gamma^n)^{-1}f](w) := f(-iw, 1). \end{aligned}$$

Essendo un isomorfismo di rappresentazioni,  $\Gamma^n$  rende  $\pi^n$  e  $\Pi^n$  equivalenti; quindi, nel resto del capitolo, analizzeremo, nel dettaglio, solo una delle due,  $\Pi^n$ .

### 1.3 Rappresentazioni di $\mathfrak{su}(2)$

Per quanto riguarda l'irriducibilità di  $\Pi^n$ , dimostreremo prima l'irriducibilità della corrispondente rappresentazione dell'algebra di Lie, che chiamiamo  $d\Pi^n$ :

$$\begin{aligned} d\Pi^n : \mathfrak{su}(2) \times \mathcal{P}^n &\rightarrow \mathcal{P}^n \\ (S, f) &\mapsto [d\Pi^n(S)f](z_1, z_2) := \left[ \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \Pi^n(\exp(tS))f \right](z_1, z_2) \end{aligned}$$

Più esplicitamente, indicata con  $S$  la matrice  $S = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{pmatrix}$  e utilizzando la regola della catena, si ottiene:

$$[d\Pi^n(S)f](z_1, z_2) = -\frac{\partial f}{\partial z_1}(s_{11}z_1 + s_{12}z_2) - \frac{\partial f}{\partial z_2}(s_{21}z_1 + s_{22}z_2). \quad (1.3)$$

Per motivi che saranno più chiari poi<sup>7</sup>, d'ora in avanti studieremo l'irriducibilità delle rappresentazioni della complessificazione di  $\mathfrak{su}(2)$ .

<sup>6</sup>Si consulti l'Appendice A, ove -per comodità- si sono riportate le definizioni di rappresentazioni di algebra e di gruppo di Lie.

<sup>7</sup>Si veda la Proposizione 2.

**Definizione 1.** : Dato uno spazio vettoriale reale  $V$  ( $\dim_{\mathbb{R}}V = n < \infty$ ), si definisce *complessificazione di  $V$*  quell'unico<sup>8</sup> spazio vettoriale dato da  $V_{\mathbb{C}} := V \otimes \mathbb{C}$ .

Essendo il prodotto tensore di due spazi vettoriali reali,  $V_{\mathbb{C}}$  è ancora uno spazio vettoriale reale e la sua dimensione è ovviamente  $\dim_{\mathbb{R}}V_{\mathbb{C}} = \dim_{\mathbb{R}}V \dim_{\mathbb{R}}\mathbb{C} = 2\dim_{\mathbb{R}}V$ . Un generico elemento  $u \in V_{\mathbb{C}}$  si può scrivere come

$$u = \sum_{j=1}^r u_j \otimes \lambda_j$$

con  $r \in [0, n] \cap \mathbb{N}$ ,  $u_j \in V$  e  $\lambda_j \in \mathbb{C}$  per ogni  $j \in \{1, \dots, r\}$ . Una base di  $V_{\mathbb{C}}$  è data da  $\{v_1 \otimes 1, \dots, v_n \otimes 1, v_1 \otimes i, \dots, v_n \otimes i\}$ , ove  $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$  è una base di  $V$ , per cui  $u$  ammette anche una decomposizione del tipo

$$\begin{aligned} u &= \sum_{j=1}^n a_j(v_j \otimes 1) + \sum_{j=1}^n b_j(v_j \otimes i), \quad a_j, b_j \in \mathbb{R} \quad \forall j \in \{1, \dots, n\} \\ &= v \otimes 1 + w \otimes i \quad V \ni v = \sum_{j=1}^n a_j v_j \quad V \ni w = \sum_{j=1}^n b_j v_j. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Ciò che interessa è che  $V_{\mathbb{C}}$  è pure dotato di una *naturale* struttura di spazio vettoriale complesso di dimensione  $\dim_{\mathbb{C}}V_{\mathbb{C}} = \dim_{\mathbb{R}}V$ ; infatti, grazie alla multilinearità di  $\otimes$ , si può così definire il prodotto scalare di un vettore  $u \in V_{\mathbb{C}}$  per un numero  $\lambda \in \mathbb{C}$  :

$$\lambda \cdot u = \lambda \cdot \sum_{j=1}^r u_j \otimes \lambda_j := \sum_{j=1}^r u_j \otimes (\lambda \lambda_j)$$

ovvero:

$$\lambda \cdot u = \lambda(v \otimes 1 + w \otimes i) := v \otimes \lambda + w \otimes (i\lambda).$$

Una base per  $V_{\mathbb{C}}$  inteso come spazio complesso è allora costituita da  $\{v_1 \otimes 1, \dots, v_n \otimes 1\}$  e, per quanto riguarda  $\mathfrak{su}(2)$ , abbiamo che

$$\mathfrak{su}(2)_{\mathbb{C}} = \text{Span}_{\mathbb{C}}(\sigma_1 \otimes 1, \sigma_2 \otimes 1, \sigma_3 \otimes 1).$$

Possiamo ricorrere alla più agile notazione  $v \otimes 1 \equiv v$ ,  $v \otimes i \equiv iv$  (secondo la quale  $u \equiv v + iw$ ), a patto di interpretare il prodotto per uno scalare complesso appena definito nella seguente maniera<sup>9</sup>:

$$i(v + iw) \equiv i(v \otimes 1 + w \otimes i) = v \otimes i + w \otimes (-1) \equiv -w + iv \quad \forall v, w \in V$$

Queste convenzioni permettono di confondere  $V_{\mathbb{C}}$  con l'insieme delle combinazioni lineari a coefficienti complessi della base  $\mathcal{B}$ , cioè<sup>10</sup>:

$$V_{\mathbb{C}} \equiv \text{Span}_{\mathbb{C}}(\mathcal{B}).$$

<sup>8</sup>Ci si ricordi che il prodotto tensore è essenzialmente unico.

<sup>9</sup>Per assegnare ad uno spazio vettoriale reale un prodotto scalare per un numero  $\lambda$  complesso, è necessario e sufficiente definire questa operazione nel caso  $\lambda = i$ .

<sup>10</sup>Si noti che l'espressione  $V_{\mathbb{C}} \equiv \text{Span}_{\mathbb{C}}(\mathcal{B})$  suggerisce che, nel caso in cui si riuscisse a decomporre un generico elemento  $w$  di uno spazio vettoriale complesso  $W$  nella forma  $w = u + iv$  con  $u, v$  appartenenti ad uno stesso spazio vettoriale reale  $V$ , si avrebbe, allora, che  $W \equiv V_{\mathbb{C}}$ . Ad esempio, prendendo  $W := \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ , si nota che  $w = \frac{w-w^\dagger}{2} + i \frac{w+w^\dagger}{2i}$  con  $u = \frac{w-w^\dagger}{2}$ ,  $v = \frac{w+w^\dagger}{2i}$  e  $u, v \in \mathfrak{su}(2)$ .



Ad esempio<sup>11</sup>:

$$\mathfrak{su}(2)_{\mathbb{C}} \equiv \text{Span}_{\mathbb{C}}(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} : a, b, c \in \mathbb{C} \right\} = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}). \quad (1.5)$$

Nella teoria delle rappresentazioni, la complessificazione di uno spazio vettoriale è molto utilizzata, poichè si comporta bene rispetto agli omeomorfismi lì definiti e rispetto alla struttura di algebra di Lie, come mostrano, di preciso, i seguenti risultati:

**Proposizione 1.** *Siano:  $\mathfrak{g}$  un'algebra di Lie reale ( $\dim_{\mathbb{R}}\mathfrak{g} < \infty$ ),  $\mathfrak{h}$  un'algebra di Lie complessa ( $\dim_{\mathbb{C}}\mathfrak{h} < \infty$ ) e  $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$  la complessificazione di  $\mathfrak{g}$  (intesa come spazio vettoriale). Allora:*

1. *le parentesi di Lie  $[\cdot, \cdot]$  su  $\mathfrak{g}$  ammettono un'unica estensione bilineare complessa  $[\cdot, \cdot]_{\mathbb{C}}$  su  $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ . Tale estensione rende  $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$  un'algebra di Lie complessa, che prende il nome di complessificazione di  $\mathfrak{g}$ .*
2. *ogni omomorfismo reale  $\phi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$  di algebre di Lie si estende ad un unico omomorfismo complesso  $\phi_{\mathbb{C}} : \mathfrak{g}_{\mathbb{C}} \rightarrow \mathfrak{h}$  di algebre di Lie.*

*Dimostrazione.* Siano  $v, w \in \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$  e  $\mathcal{B}$  una sua base; esistono quindi  $v_1, v_2, w_1, w_2 \in \mathfrak{g}$  tali che  $v \equiv v_1 + iv_2$  e  $w \equiv w_1 + iw_2$ . L'unicità dell'estensione delle parentesi di Lie di  $\mathfrak{g}$  su  $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$  discende direttamente dalla proprietà universale del prodotto tensore. Per bilinearità,  $[\cdot, \cdot]_{\mathbb{C}}$  deve essere per forza data da:

$$\begin{aligned} [\cdot, \cdot]_{\mathbb{C}} : \mathfrak{g}_{\mathbb{C}} \times \mathfrak{g}_{\mathbb{C}} &\rightarrow \mathfrak{g}_{\mathbb{C}} \equiv \text{Span}_{\mathbb{C}}(\mathcal{B}) \\ (v, w) &\mapsto [v, w]_{\mathbb{C}} := ([v_1, w_1] - [v_2, w_2]) + i([v_1, w_2] + [v_2, w_1]) \end{aligned}$$

ed è facile verificare che queste  $[\cdot, \cdot]_{\mathbb{C}}$  equipaggiano effettivamente  $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$  di una struttura di Algebra di Lie (complessa).

La dimostrazione di 2) è simile e si trova che:

$$\begin{aligned} \phi_{\mathbb{C}} : \mathfrak{g}_{\mathbb{C}} &\rightarrow \mathfrak{h} \\ v &\mapsto \phi_{\mathbb{C}}(v) := \phi(v_1) + i\phi(v_2) \end{aligned}$$

□

La seconda asserzione della precedente proposizione porta in evidenza il seguente

**Corollario 1.** *Sia  $\mathfrak{g}$  un'algebra di Lie reale e  $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$  la sua complessificazione. Sia  $\delta : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$  una rappresentazione finito dimensionale complessa di  $\mathfrak{g}$  ( $\dim_{\mathbb{C}}V < \infty$ ).*

*Tale  $\delta$  si estende unicamente ad una rappresentazione (lineare complessa) di  $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ , denotata con  $\delta_{\mathbb{C}}$ , tale che:*

$$\begin{aligned} \delta_{\mathbb{C}} : \mathfrak{g}_{\mathbb{C}} &\rightarrow \mathfrak{gl}(V) \\ v &\mapsto \delta_{\mathbb{C}}(v) = \delta_{\mathbb{C}}(v_1 + iv_2) := \delta(v_1) + i\delta(v_2) \end{aligned}$$

(come al solito,  $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} \ni v = v_1 + iv_2$  e  $v_1, v_2 \in \mathfrak{g}$ ).

<sup>11</sup>Si indicherà con  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$  l'algebra di Lie costituita dallo spazio vettoriale definito in (5) munito dell'usuale commutatore di matrici.

Applicando questo corollario alla rappresentazione  $d\Pi^n$  di  $\mathfrak{su}(2)$  otteniamo  $d\Pi_{\mathbb{C}}^n$ , rappresentazione complessa di  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ ,  $d\Pi_{\mathbb{C}}^n : \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) \times \mathcal{P}^n \rightarrow \mathcal{P}^n$ .

Sia  $\begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{pmatrix} = R \in \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$  e  $A, B \in \mathfrak{su}(2)$  tali che  $R = A + iB$ . Allora, ricorrendo ad (1.3), troviamo:

$$[d\Pi_{\mathbb{C}}^n(R)f](z_1, z_2) = -\frac{\partial f}{\partial z_1}(r_{11}z_1 + r_{12}z_2) - \frac{\partial f}{\partial z_2}(r_{21}z_1 + r_{22}z_2) \quad (1.6)$$

Risulta conveniente utilizzare  $d\Pi_{\mathbb{C}}^n$  perchè vale la seguente

**Proposizione 2.** *Sia  $\delta : \mathfrak{su}(2) \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$  una rappresentazione complessa finito-dimensionale e sia  $\delta_{\mathbb{C}}$  la sua estensione a rappresentazione lineare complessa di  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ .*

*Allora:*

$$\delta \text{ è rappr. irriducibile di } \mathfrak{su}(2) \iff \delta_{\mathbb{C}} \text{ è rappr. irriducibile di } \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}).$$

*Dimostrazione.* Supponiamo che  $\delta$  sia irriducibile e sia  $U$  un sottospazio vettoriale (complesso) di  $V$  invariante sotto l'azione di  $\delta_{\mathbb{C}}(\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}))$ . Allora, certamente,  $U$  sarebbe pure invariante sotto l'azione di  $\delta(\mathfrak{su}(2))$ , poichè  $\mathfrak{su}(2) \subset \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ . Però  $\delta_{\mathbb{C}}(\mathfrak{su}(2)) = \delta(\mathfrak{su}(2))$  e, per l'irriducibilità ipotizzata, si avrebbe o  $U = \{0\}$  o  $U = V$ . Viceversa, sia  $\delta_{\mathbb{C}}$  irriducibile e sia  $U$  un sottospazio vettoriale (complesso) di  $V$  invariante per  $\mathfrak{su}(2)$ . Allora  $U$  sarebbe pure invariante sotto l'azione di  $\delta_{\mathbb{C}}(R)$ , con  $R$  della forma  $R = A + iB$  e  $A, B \in \mathfrak{su}(2)$ . Ma ogni elemento di  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$  può essere scritto come un tale  $R$ , quindi, per l'irriducibilità ipotizzata si avrebbe nuovamente o  $U = \{0\}$  o  $U = V$ .  $\square$

**Osservazione 1.** *Sembra intuitivamente più facile verificare l'irriducibilità di  $d\Pi_{\mathbb{C}}^n$  rispetto all'irriducibilità di  $d\Pi^n$ , poichè, essendo  $\mathfrak{su}(2) \subset \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ , appare più difficile trovare un sottospazio invariante per  $d\Pi_{\mathbb{C}}^n$ . Per cui, quando si cercano le rappresentazioni irriducibili di  $\mathfrak{su}(2)$ , conviene prima cercare quelle di  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ ; una volta trovate queste, però, la Proposizione 2 garantisce che non ci siano altre rappresentazioni irriducibili di  $\mathfrak{su}(2)$ .*

Ora che abbiamo riformulato, in maniera equivalente, il problema dell'irriducibilità di  $d\Pi^n$  in termini dell'irriducibilità di  $d\Pi_{\mathbb{C}}^n$ , possiamo facilmente verificare la

**Proposizione 3.** *Dato l'intero  $n \geq 0$ ,  $d\Pi_{\mathbb{C}}^n$  è una rappresentazione (complessa, finito-dimensionale) irriducibile di  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ .*

*Dimostrazione.* Consideriamo la base di  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ , costituita dagli elementi

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

che, tramite  $d\Pi_{\mathbb{C}}^n$ , agiscono così su  $\mathcal{P}^n$  (vedi (2)):

$$d\Pi_{\mathbb{C}}^n(H) = -z_1 \frac{\partial}{\partial z_1} + z_2 \frac{\partial}{\partial z_2} \quad d\Pi_{\mathbb{C}}^n(X) = -z_2 \frac{\partial}{\partial z_1} \quad d\Pi_{\mathbb{C}}^n(Y) = -z_1 \frac{\partial}{\partial z_2}$$

Sia  $U$  un sottospazio di  $\mathcal{P}^n$  invariante per  $d\Pi_{\mathbb{C}}^n$ . Dato che  $U$  deve essere assunto non vuoto, c'è almeno un elemento  $0 \neq u \in U$ . Tale  $u$  ammetterà una

decomposizione del tipo:  $u = a_0 z_1^n + a_1 z_1^{m-1} z_2 + a_2 z_1^{m-2} z_2^2 + \dots + a_m z_2^m$  per certi  $a_j \in \mathbb{C}$  tali per cui almeno uno di questi coefficienti sia diverso da zero. Detto  $k := \max_{a_j \neq 0} j$ , si possono presentare due casi:

1.  $k = 0$ , cioè  $u = a_0 z_1^n$ . Allora, agendo iterativamente su  $u$  tramite  $d\Pi_{\mathbb{C}}^n(X)$  si ottiene una base di tutto  $\mathcal{P}^n$ , per cui  $U = \mathcal{P}^n$ .
2.  $k > 0$ . Allora, applicando  $n - k$  volte  $d\Pi_{\mathbb{C}}^n(Y)$  al vettore  $u$  si ottiene un vettore proporzionale a  $z_1^n$  e, quindi, si ritorna nelle condizioni del caso precedente.

In altri termini, non esistono sottospazi propri di  $\mathcal{P}^n$  invarianti per  $d\Pi_{\mathbb{C}}^n$ .  $\square$

In verità, si può dimostrare molto di più, come afferma la seguente<sup>12</sup>

**Proposizione 4.** *Sia dato un intero  $n \geq 0$ . Allora:*

1. *Esiste una rappresentazione complessa irriducibile di  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$  di dimensione  $n + 1$ .*
2. *Date due rappresentazioni irriducibili di  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$  della stessa dimensione, queste sono equivalenti.*
3. *Per ogni rappresentazione  $\gamma$  irriducibile, complessa e finito-dimensionale di  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ , esiste un unico  $n$  che rende  $\gamma$  e  $d\Pi_{\mathbb{C}}^n$  equivalenti.*

Trasferendo su  $SU(2)$  i risultati ottenuti nello studio dell'irriducibilità delle rappresentazioni di  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ , otteniamo la più importante

**Proposizione 5.** *Sia  $\Lambda : SU(2) \times W \rightarrow W$  una rappresentazione irriducibile di  $SU(2)$  su uno spazio vettoriale  $W$  complesso finito dimensionale.*

*Allora:*

1. *Esiste un unico intero  $n \geq 0$  che rende  $\Lambda$  e  $\Pi^n$  equivalenti.*
2.  *$\Pi^n$  è una rappresentazione (complessa,  $n + 1$  dimensionale) irriducibile di  $SU(2)$ .*

*Dimostrazione.* Si noti che, qui sotto, si sfrutta in maniera essenziale il fatto che  $SU(2)$  è connesso. Sono quindi le proprietà topologiche di  $SU(2)$  che permettono di dedurre l'irriducibilità di una rappresentazione del gruppo a partire dall'irriducibilità della corrispondente rappresentazione derivata.

1. La rappresentazione derivata  $d\Lambda : \mathfrak{su}(2) \rightarrow \mathfrak{gl}(W)$  si estende linearmente ad una rappresentazione lineare complessa  $d\Lambda_{\mathbb{C}}$  di  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$  su  $W$ . Mostriamo che quest'ultima è irriducibile. Sia  $U \neq \{0\}$  un sottospazio (complesso) di  $W$ , invariante per  $d\Lambda_{\mathbb{C}}(\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}))$ . Allora  $U$  è invariante sotto l'azione di<sup>13</sup>  $\text{Exp}(d\Lambda_{\mathbb{C}}(L))$  per ogni  $L \in \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$  e, a maggior ragione, è invariante sotto l'azione dei termini della forma  $\text{Exp}(d\Lambda_{\mathbb{C}}(L)) = \text{Exp}(d\Lambda(L)) = \Lambda(\exp(L))$  per ogni  $L \in \mathfrak{su}(2)$ . Ma  $SU(2)$  è un gruppo topologico connesso e, quindi, per ogni  $g \in SU(2)$  si ha  $g = \prod_{k=1}^r \exp(L_k)$

<sup>12</sup>Per la dimostrazione si consulti [BH], cap. 5.4

<sup>13</sup>Qui e nel seguito si indica con *Exp* l'esponenziazione di un endomorfismo definito su un certo spazio vettoriale e con *exp* la mappa esponenziale di matrici.

per un certo intero  $0 < r < \infty$  e con  $L_k \in \mathfrak{su}(2)$ ,  $k \in \{1, \dots, r\}$ . Quindi si verifica che

$$\Lambda(g)U = (\Lambda(\prod_{k=1}^r \exp(L_k)))U = (\prod_{k=1}^r \Lambda(\exp(L_k)))U \subseteq U.$$

Dato che  $\Lambda$  è irriducibile e che  $U$  è non vuoto, abbiamo che  $U = W$ . Quindi  $d\Lambda_{\mathbb{C}}$  è irriducibile e, per la proposizione (4), esiste un unico intero  $n \geq 0$  che rende  $d\Lambda_{\mathbb{C}}$  equivalente a  $d\Pi_{\mathbb{C}}^n$ . Cioè esiste un isomorfismo (lineare complesso)  $A : W \rightarrow \mathcal{P}^n$  che soddisfa:

$$A(d\Lambda_{\mathbb{C}}(R)) = (d\Pi_{\mathbb{C}}^n(R))A \quad \forall R \in \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C});$$

quindi  $A(d\Lambda_{\mathbb{C}}(R))A^{-1} = d\Pi_{\mathbb{C}}^n(R)$  per ogni  $R \in \mathfrak{su}(2)$ , ovvero

$$A(d\Lambda(R))A^{-1} = d\Pi^n(R) \quad \forall R \in \mathfrak{su}(2).$$

Esponenziando in ambo i membri dell'ultima equazione otteniamo:

$$\exp(A(d\Lambda(R))A^{-1}) = A(\exp(d\Lambda(R)))A^{-1} = A(\Lambda(\exp(R))A^{-1})$$

e

$$\exp(d\Pi^n(R)) = \Pi^n(\exp(R)),$$

per cui

$$\Pi^n(\exp(R)) = A(\Lambda(\exp(R))A^{-1}).$$

Dato che  $\exp(\mathfrak{su}(2))$  genera  $SU(2)$  abbiamo che:  $A\Lambda(G) = \Pi^n(G)A \quad \forall G \in SU(2)$ .

2. Dalla proposizione (3),  $d\Pi_{\mathbb{C}}^n$  è irriducibile. Per la proposizione (2), è irriducibile pure  $d\Pi^n$ . Sia  $U \subseteq \mathcal{P}^n$  un sottospazio non vuoto invariante per  $\Pi^n(SU(2))$ . Per un  $L \in \mathfrak{su}(2)$  arbitrario, vale  $(\Pi^n(\exp(tL)))U \subseteq U$ , ovvero  $(\exp(d\Pi^n(tL)))U \subseteq U$  per ogni  $t \in \mathbb{R}$ : prendendo la derivata in  $t$  calcolata in 0, si conclude che  $(d\Pi^n(L))U \subseteq U$  e, per l'irriducibilità di  $d\Pi^n$ ,  $U = \mathcal{P}^n$ .

□

Da questa proposizione e dalla equivalenza tra  $\Pi^n$  e  $\pi^n$ , possiamo concludere che, a meno di isomorfismi di rappresentazioni, la famiglia  $\{\pi^n\}_{n \geq 0}$  rappresenta l'insieme di *tutte* le rappresentazioni complesse, finito-dimensionali e irriducibili di  $SU(2)$ . In verità, data la compattezza di  $SU(2)$ , si può considerare  $\{\pi^n\}_{n \geq 0}$  come la famiglia di tutte le rappresentazioni complesse, finito-dimensionali, irriducibili e *unitarie* del gruppo, come suggerito dalla seguente

**Proposizione 6.** *Sia  $\gamma$  una rappresentazione di un gruppo compatto  $G$  su uno spazio vettoriale  $V$  di dimensione finita.*

*Allora, esiste su  $V$  un prodotto interno euclideo rispetto al quale  $\gamma$  risulta unitaria.*

*Dimostrazione.* Questa proposizione si basa sul fatto che la misura  $\mu$  di Haar<sup>14</sup> di  $G$  è finita se e soltanto se  $G$  è compatto. Allora, se  $G$  è compatto, è ben definito il seguente prodotto scalare su  $V$ :

$$\langle v_1, v_2 \rangle_\gamma := \int_G \langle \gamma(g)v_1, \gamma(g)v_2 \rangle_V d\mu(g) \quad \forall v_1, v_2 \in V,$$

ove si è indicato con  $\langle \cdot, \cdot \rangle_V$  un arbitrario prodotto interno su  $V$  (quest'ultimo esiste certamente, poichè  $V$  è finito dimensionale). Non è difficile controllare che  $\langle \cdot, \cdot \rangle_\gamma$  è un prodotto interno e che, rispetto a questa struttura,  $\gamma(g)$  risulta essere un operatore unitario per ogni  $g \in G$ .  $\square$

Applicando questa proposizione al caso  $G := SU(2)$ ,  $\gamma := \pi^n$ ,  $V := \tilde{\mathcal{P}}^n$  ( $\langle \cdot, \cdot \rangle_V$  sia il solito prodotto scalare su  $\mathbb{C}$ ) si riesce a dimostrare, con un po' di lavoro<sup>15</sup>, che la rappresentazione  $\pi^n$  è unitaria rispetto al prodotto interno di  $\tilde{\mathcal{P}}^n$  dato da:

$$\langle P_1, P_2 \rangle_{\pi^n} = \frac{n+1}{\pi} \int_{\mathbb{C}} P_1(w) \overline{P_2(w)} (1+|w|^2)^{-n-2} dw \quad \forall P_1, P_2 \in \tilde{\mathcal{P}}^n. \quad (1.7)$$

Inoltre, sempre per la compattezza di  $SU(2)$ , si può dimostrare che non esistono rappresentazioni unitarie irriducibili infinito-dimensionali di  $SU(2)$ ; vale infatti la seguente

**Proposizione 7.** *Sia  $\gamma$  una rappresentazione unitaria irriducibile di un gruppo compatto  $G$  su uno spazio di Hilbert  $V$ .*

*Allora,  $V$  è di dimensione finita.*

*Dimostrazione.* Si indichi con  $\langle \cdot, \cdot \rangle_\gamma$  il prodotto scalare in  $V$  rispetto al quale  $\gamma$  risulta unitaria. Fissato un elemento  $u \in V$  tale che  $\|u\|_\gamma = 1$ , si consideri l'operatore  $T : V \rightarrow V$  dato da

$$Tv := \int_G \langle v, \gamma(g)u \rangle_\gamma d\mu(g) \quad \forall v \in V,$$

ove si è indicata con  $\mu$  la misura di Haar di  $G$  normalizzata. Si verifica facilmente che  $T$  è un morfismo della rappresentazione  $\gamma$ , ovvero che  $T$  commuta con  $\gamma(g)$  per ogni  $g \in G$ . Quindi, dato che  $\gamma$  è irriducibile, il *Lemma di Schur*<sup>16</sup>

<sup>14</sup>Una misura di Haar sinistra (destra) su un gruppo è una misura non nulla sulla  $\sigma$ -algebra di Borel di  $G$  che è localmente finita e invariante per traslazioni a sinistra (destra). Ogni gruppo di Lie, in quanto localmente compatto, ammette una misura di Haar sinistra, unica a meno di una costante moltiplicativa. Il gruppo  $G$  si dice unimodulare se la misura di Haar sinistra coincide con quella destra; ad esempio, si può mostrare che  $SU(2)$  è unimodulare per compattezza. Per ulteriori dettagli si rimanda a [GF2]-capitolo 2.2 e a [JF]-capitolo 5.

<sup>15</sup>Indicata con  $\mu$  la misura di Haar di  $SU(2)$  normalizzata ad 1, basta ricordare che, per una funzione  $f$  integrabile in  $SU(2)$ , vale

$$\int_{SU(2)} f(g) d\mu(g) = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\pi d\theta \int_0^\pi d\phi \int_0^{2\pi} d\psi f \circ \Phi(\theta, \phi, \psi) \sin^2(\theta) \sin(\phi),$$

ove si sottintende

$$g = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 & x_3 + ix_4 \\ -x_3 + ix_4 & x_1 + ix_2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \Phi(\theta, \phi, \psi) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \cos(\phi) \\ \sin(\theta) \sin(\phi) \cos(\psi) \\ \sin(\theta) \sin(\phi) \sin(\psi) \end{pmatrix}.$$

<sup>16</sup>Si faccia riferimento a [BH], capitolo 5.

implica che  $T = c\mathbb{I}$  per un certo  $c \in \mathbb{C}$ . Sicuramente  $c \neq 0$ , poichè  $T$  non è l'operatore nullo ( $\langle Tu, u \rangle_\gamma > 0$ ). Per concludere, è sufficiente dimostrare la compattezza di  $T$  (dalla quale conseguirebbe quella di  $T/c = \mathbb{I}$ ), perchè l'operatore identità su uno spazio di Hilbert  $V$  è compatto se e solo se quest'ultimo è di dimensione finita. Per definizione di rappresentazione unitaria, la mappa  $g \mapsto \gamma(g)v$  è continua e quindi, per compattezza di  $G$ , deve essere pure uniformemente continua (Teorema di Heine). Preso  $\epsilon > 0$ , si può trovare una partizione di  $G$  in insiemi disgiunti  $E_1, E_2, \dots, E_k$  ( $0 < k < \infty$ ) e dei punti  $g_j \in E_j$  tali che  $\|\gamma(g)u - \gamma(g_j)u\|_\gamma < \frac{1}{2}\epsilon$  per  $g \in E_j$ . Allora, per  $g \in E_j$  vale

$$\begin{aligned} & \| \langle v, \gamma(g)u \rangle_\gamma \gamma(g)u - \langle v, \gamma(g_j)u \rangle_\gamma \gamma(g_j)u \|_\gamma \\ & \leq \| \langle v, [\gamma(g) - \gamma(g_j)]u \rangle_\gamma \gamma(g)u \|_\gamma + \| \langle v, \gamma(g_j)u \rangle_\gamma [\gamma(g) - \gamma(g_j)]u \|_\gamma \\ & < \epsilon \|v\|_\gamma. \end{aligned}$$

Quindi, se si definiscono gli operatori  $T_\epsilon : V \rightarrow V$  per mezzo di

$$T_\epsilon v := \sum_{j=1}^k \mu(E_j) \langle v, \gamma(g_j)u \rangle_\gamma \gamma(g_j)u = \sum_{j=1}^k \int_{E_j} \langle v, \gamma(g_j)u \rangle_\gamma \gamma(g_j)u d\mu(g),$$

si avrà che  $\|Tv - T_\epsilon v\|_\gamma < \epsilon \|v\|_\gamma$  per ogni  $v \in V$ . L'immagine di ciascun  $T_\epsilon$  è finito dimensionale, in quanto sottospazio di  $V$  generato dai vettori  $\{\gamma(g_j)u\}_1^k$ ; quindi  $T_\epsilon$  è compatto per ogni  $\epsilon$ . Allora  $T$  è a sua volta compatto, essendo<sup>17</sup> il limite in norma di operatori compatti.  $\square$

Dato che siamo interessati alle sole rappresentazioni unitarie e irriducibili, potremo riferirci alla famiglia  $\{\pi^n\}_{n \geq 0}$  come a quell'insieme di rappresentazioni che, a meno di equivalenze, costituiscono *tutte* le rappresentazioni irriducibili di  $SU(2)$ .

<sup>17</sup>Non è difficile mostrare che l'insieme degli operatori compatti definiti su uno spazio di Hilbert  $V$  è un sottospazio chiuso di  $\mathcal{L}(V)$ , si veda [JF], capitolo 6.2. Qui si è indicato con  $\mathcal{L}(V)$  l'insieme di tutti gli operatori limitati definiti su  $V$ .

## 2 Il gruppo di Heisenberg e due famiglie di sue rappresentazioni

In questo capitolo, vogliamo descrivere due famiglie di rappresentazioni unitarie irriducibili del gruppo di Heisenberg, una delle quali (la rappresentazione di Bargmann) sarà utilizzata nel Capitolo 3.

I risultati saranno derivati con rigore matematico, senza prestare particolare attenzione al significato fisico degli oggetti incontrati nel corso della trattazione; inoltre, per rendere più agili i conti che dovremo affrontare nel Capitolo 3, si è optato per una notazione diversa da quella comunemente utilizzata in fisica.

### 2.1 H e $\mathfrak{h}$

Il gruppo di Heisenberg  $H$  è l'insieme  $\mathbb{R}^3$  dotato della seguente legge prodotto:

$$\begin{aligned} \cdot_H : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ ((p, q, t), (r, s, t')) &\mapsto (p, q, t) \cdot_H (r, s, t') := (p + r, q + s, t + t' + qr - ps). \end{aligned} \quad (2.1)$$

Rispetto a questa operazione,  $H$  ha elemento neutro  $(0, 0, 0)$  e l'inverso di  $(p, q, t)$  è  $(-p, -q, -t)$ ; inoltre, si verifica che il sottoinsieme  $\mathcal{Z} = \{(0, 0, t) : t \in \mathbb{R}\}$  è il centro e anche il sottogruppo commutatore<sup>18</sup> di  $H$ .

**Osservazione 2.** *La legge grupale (2.1) diventa più chiara dal punto di vista fisico se associamo (per il momento in maniera informale) alla terna  $(p, q, t) \in H$  l'operatore unitario  $U(p, q, t) = e^{i(p\hat{P}+q\hat{Q}+t\hat{T})}$ , ove si sono indicati con  $\hat{P}, \hat{X}$  gli usuali operatori di momento e di posizione soddisfacenti l'algebra di Heisenberg (2.2); sicché, un conto standard<sup>19</sup> fornisce*

$$U(p, q, t)U(r, s, t') = U(p + r, q + s, t + t' + qr - ps).$$

Il gruppo  $H$ , a differenza di  $SU(2)$ , non è compatto, ma è comunque connesso e semplicemente connesso. La sua algebra di Lie  $\mathfrak{h}$  è definita come lo spazio vettoriale  $\mathbb{R}^3$  munito della seguente parentesi di Lie:

$$\begin{aligned} [\cdot, \cdot]_{\mathfrak{h}} : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ ((p, q, t), (r, s, t')) &\mapsto [(p, q, t), (r, s, t')]_{\mathfrak{h}} := (0, 0, 2(qr - ps)). \end{aligned}$$

Il gruppo di Heisenberg e la sua algebra di Lie sono nilpotenti<sup>20</sup> di passo due. Ciò permette di affermare che, essendo  $H$  anche connesso e semplicemente connesso,  $\mathfrak{h}$  e  $H$  possono essere identificati attraverso la mappa esponenziale, come ora rapidamente mostriamo. Si noti che, grazie a quanto illustreremo qui sotto, potremo verificare concretamente che  $\mathfrak{h}$  è effettivamente l'algebra di Lie di  $H$ .

Innanzitutto, realizziamo  $\mathfrak{h}$  come algebra di Lie di matrici. Sia dunque  $\mathfrak{t}^0(3, \mathbb{R})$  lo spazio vettoriale delle matrici reali  $3 \times 3$  triangolari superiori aventi diagonale principale nulla dotato del solito commutatore fra matrici; abbiamo il seguente isomorfismo tra algebre di Lie:

<sup>18</sup>Si consulti [JM] per la definizione di centro e sottogruppo commutatore di un gruppo.

<sup>19</sup>Si sfrutti -sempre in maniera informale- la relazione di Baker-Campbell-Hausdorff.

<sup>20</sup>Si veda [JM] capitolo 6.

$$m : \mathfrak{h} \rightarrow \mathfrak{t}^0(3, \mathbb{R})$$

$$(p, q, t) \mapsto m(p, q, t) := \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2}q & t \\ 0 & 0 & \sqrt{2}p \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Il gruppo di Lie di matrici connesso corrispondente a  $\mathfrak{t}^0(3, \mathbb{R})$  si ottiene esponenziando:

$$M(p, q, t) := \exp(m(p, q, t)) = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2}q & t + pq \\ 0 & 1 & \sqrt{2}p \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.2)$$

Da (2.2) segue che la mappa esponenziale appena calcolata è una biezione tra l'algebra di Lie  $\mathfrak{t}^0(3, \mathbb{R})$  delle matrici  $m(p, q, t)$  e il gruppo di Lie di matrici  $M(\mathbb{R}^3) := \{M(p, q, t) : (p, q, t) \in \mathbb{R}^3\}$ . Di conseguenza, la mappa  $M : \mathbb{R}^3 \rightarrow M(\mathbb{R}^3)$  che ad ogni punto  $(p, q, t) \in \mathbb{R}^3$  associa la matrice  $M(p, q, t) := \exp(m(p, q, t))$  è un diffeomorfismo tra varietà. Inoltre, vale

$$M(p, q, t)M(r, s, t') = M(p+r, q+s, t+t' + qr - ps) = M((p, q, t) \cdot_H (r, s, t')),$$

per cui, si può intendere  $M$  come quell'isomorfismo di gruppi di Lie  $M : \mathbb{R}^3 \rightarrow M(\mathbb{R}^3)$  che permette di trasferire su  $\mathbb{R}^3$  la struttura di gruppo di  $M(\mathbb{R}^3)$ , ottenendo così proprio  $H$ . Dato che  $H$  è connesso e semplicemente connesso, tale  $M$  è quell'unico<sup>21</sup> isomorfismo tra  $H$  e  $M(\mathbb{R}^3)$  avente  $m$  come differenziale sull'elemento neutro di  $H$ ; in altri termini,  $M$  è quell'unico isomorfismo di gruppi di Lie che rende commutativo il seguente diagramma:

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{h} & \xrightarrow{m} & m(\mathbb{R}^3) \\ \downarrow e\tilde{x}p & & \downarrow \exp \\ H & \xrightarrow{M} & M(\mathbb{R}^3) \end{array}$$

Per la commutatività di questo diagramma, la mappa esponenziale  $e\tilde{x}p : \mathfrak{h} \rightarrow H$ , nelle nostre coordinate, deve essere l'identità.

Dopo aver introdotto il gruppo di Heisenberg, vogliamo esaminare in dettaglio due famiglie di sue realizzazioni come gruppo di trasformazioni unitarie di spazi infinito-dimensionali.

## 2.2 La rappresentazione di *Schrödinger*

Si indichi con  $\mathcal{S}$  lo spazio delle funzioni di Schwartz definite su  $\mathbb{R}$  e con  $\mathcal{L}(\mathcal{S})$  l'algebra degli operatori limitati<sup>22</sup> su  $\mathcal{S}$ . Dato  $\lambda \in \mathbb{R}$ , si considerino  $\hat{P}$ ,  $\hat{Q}$  e  $\hat{T}$ , operatori simmetrici in  $\mathcal{L}(\mathcal{S})$  dati da:

$$[\hat{P}f](x) := -i \frac{\partial f}{\partial x}(x) \quad [\hat{Q}f](x) := 2\lambda x f(x) \quad [\hat{T}f](x) := -\lambda f(x) \quad \forall f \in \mathcal{S}$$

<sup>21</sup>Si rimanda a [BH], capitolo 5, Teorema 5.33.

<sup>22</sup>Ricordiamo che  $\mathcal{S}$  è uno spazio topologico metrizzabile; si può dimostrare che, in  $\mathcal{S}$ , un operatore è continuo (rispetto alla topologia indotta dalla metrica di  $\mathcal{S}$ ) se e solo se è limitato. Si consulti [GF3] o a [WR2] per ulteriori dettagli.



e che soddisfano

$$([\hat{P}, \hat{Q}]f)(x) = -2\lambda if(x) \quad \forall f \in \mathcal{S}, \quad \text{ovvero} \quad [\hat{P}, \hat{Q}] = -2i\hat{T}. \quad (2.3)$$

E' facile controllare che, per ogni  $\lambda \in \mathbb{R}$ , la mappa

$$\begin{aligned} d\rho^\lambda : \mathfrak{h} &\rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{S}) \\ (p, q, t) &\mapsto d\rho^\lambda(p, q, t) := i(p\hat{P} + q\hat{Q} + t\hat{T}) \end{aligned}$$

è una realizzazione di  $\mathfrak{h}$  sul sottospazio reale  $\mathcal{LA}(\mathcal{S}) \subset \mathcal{L}(\mathcal{S})$  degli operatori anti-hermitiani definiti su  $\mathcal{S}$  e generato dagli operatori anti-hermitiani  $i\hat{P}$ ,  $i\hat{Q}$  e  $i\hat{T}$ .

Siamo interessati ad esponenziare questa rappresentazione, in modo tale da ottenere una rappresentazione  $\rho^\lambda$  del gruppo di Heisenberg su  $\mathcal{S}$ . Intuitivamente, avremo che

$$\begin{aligned} \rho^\lambda : H \times \mathcal{S} &\rightarrow \mathcal{S} \\ ((p, q, t), f) &\mapsto \rho^\lambda(p, q, t)f = e^{i(p\hat{P} + q\hat{Q} + t\hat{T})} f. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Ora vogliamo dare un senso ben preciso alla suggestiva notazione utilizzata in (2.4) per definire la rappresentazione  $\rho^\lambda$ , in modo tale da chiarire la natura dell'operatore  $e^{i(p\hat{P} + q\hat{Q} + t\hat{T})}$ .

Fissiamo  $(p, q, t) \in \mathbb{R}^3$ , siano  $f \in \mathcal{S}$  e  $s \in \mathbb{R}$ . Detta

$$g(x, s) := [e^{is(p\hat{P} + q\hat{Q} + t\hat{T})} f](x),$$

vale  $[\rho^\lambda(p, q, t)f](x) = g(x, 1)$ , per cui si tratta di identificare la funzione  $g$ . Definiamo<sup>23</sup>  $g$  come la soluzione dell'equazione differenziale

$$\frac{\partial g}{\partial s}(x, s) = i[(p\hat{P} + q\hat{Q} + t\hat{T})g](x, s) = p\frac{\partial g}{\partial x}(x, s) + 2\lambda iqx - i\lambda tg(x, s)$$

con condizione iniziale  $g(x, 0) = f(x)$  per ogni  $x \in \mathbb{R}$ , cioè:

$$\frac{\partial g}{\partial s}(x, s) - p\frac{\partial g}{\partial x}(x, s) = (2\lambda iqx - i\lambda t)g(x, s), \quad g(x, 0) = f(x) \quad \forall x, s \in \mathbb{R}.$$

A sinistra si riconosce la derivata di  $g$  lungo il vettore  $(-p, 1)$ , per cui, se definiamo

$$x(s) := x - sp \quad \text{e} \quad G(s) := g(x(s), s),$$

otteniamo che

$$G'(s) = (2\lambda iqx - i\lambda t)G(s) \quad \text{con} \quad G(0) = f(x).$$

Segue allora facilmente che

$$g(x - sp, s) = G(s) = f(x)e^{2\lambda isqx - \lambda is^2 qp - i\lambda st},$$

prendendo  $s = 1$  e sostituendo  $x$  con  $x + p$ , arriviamo infine a

$$[e^{i(p\hat{P} + q\hat{Q} + t\hat{T})} f](x) = e^{i\lambda(pq + 2qx - t)} f(x + p). \quad (2.5)$$

<sup>23</sup>Si osservi che, se si definisce  $g$  in questa maniera, allora  $d\rho^\lambda$  è effettivamente la rappresentazione derivata di  $\rho^\lambda$ .

Da (2.5) segue immediatamente che, per ogni  $f \in \mathcal{S} \subset L^2(\mathbb{R})$ , vale

$$\|\rho^\lambda(p, q, t)f\|_{L^2(\mathbb{R})} = \|f\|_{L^2(\mathbb{R})};$$

quindi, per densità di  $\mathcal{S}$  in  $L^2(\mathbb{R})$ , possiamo estendere  $\rho^\lambda(p, q, t)$  ad un unico operatore unitario definito su  $L^2(\mathbb{R})$  per ogni  $(p, q, t) \in H$ , sfruttando un noto risultato dell'analisi funzionale<sup>24</sup>

**Teorema 1.** *Sia  $R : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$  un operatore definito su  $\mathcal{S}$  che verifica*

$$\|Rf\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq C\|f\|_{L^2(\mathbb{R})} \quad \forall f \in \mathcal{S}$$

per una certa costante positiva  $C \in \mathbb{R}$  indipendente da  $f$ . Allora esiste un operatore limitato su  $L^2(\mathbb{R})$  che estende  $R$ . Inoltre questo operatore è univocamente determinato.

Otteniamo così la seguente rappresentazione unitaria di  $H$  su  $L^2(\mathbb{R})$

$$\begin{aligned} \rho^\lambda : H \times L^2(\mathbb{R}) &\rightarrow L^2(\mathbb{R}) \\ ((p, q, t), f) &\mapsto [\rho^\lambda(p, q, t)f](x) := e^{i\lambda(-t+pq+2qx)} f(x+p), \end{aligned} \quad (2.6)$$

che è detta *rappresentazione di Schrödinger*.

**Osservazione 3.** *Nel primo capitolo, abbiamo visto che l'analisi delle rappresentazioni di  $SU(2)$  si riduce a quella delle rappresentazioni di  $\mathfrak{su}(2)$ : infatti, le rappresentazioni del gruppo e le rappresentazioni dell'algebra sono in corrispondenza uno ad uno e quindi, per motivi di convenienza, ci siamo concentrati sulle seconde. Qui, diversamente, lo studio delle rappresentazioni di  $H$  riguarda operatori unitari (limitati) su  $L^2(\mathbb{R})$  e non comporta i problemi di dominio di autoaggiuntezza degli operatori (illimitati)  $\hat{P}$ ,  $\hat{Q}$  che incontreremmo se dovessimo esaminare le rappresentazioni di  $\mathfrak{h}$  su  $L^2(\mathbb{R})$ .*

**Osservazione 4.** *Gli operatori unitari  $e^{i(p\hat{P}+q\hat{Q}+t\hat{T})} = \rho^\lambda(p, q, t)$  (che trovano una definizione precisa nella (2.6) sono chiamati operatori di Weyl e soddisfano la seguente proprietà*

$$\begin{aligned} e^{i(p\hat{P}+q\hat{Q}+t\hat{T})} e^{i(r\hat{P}+s\hat{Q}+t'\hat{T})} &= \rho^\lambda(p, q, t)\rho^\lambda(r, s, t') = \rho^\lambda((p, q, t) \cdot_H (r, s, t')) \\ &= e^{i((p+r)\hat{P}+(q+s)\hat{Q}+(t+t'+qr-ps)\hat{T})}, \end{aligned} \quad (2.7)$$

per ogni  $(p, q, t), (r, s, t') \in \mathbb{R}^3$ , poiché  $\rho^\lambda$  è una rappresentazione di  $H$ .

In Fisica Teorica, le uguaglianze che si ottengono variando  $(p, q, t), (r, s, t') \in \mathbb{R}^3$  in (2.7) sono note come<sup>25</sup> "Relazioni di Weyl" e sono una conseguenza della regola di commutazione canonica tra  $\hat{P}$  e  $\hat{X}$ . Intuitivamente, infatti, al principio di indeterminazione di Heisenberg rappresentato da

$$[\hat{P}, \hat{Q}] = -2i\hat{T}, \quad \text{cioè da} \quad [d\rho^\lambda(1, 0, 0), d\rho^\lambda(0, 1, 0)] = 2d\rho^\lambda(0, 0, 1) \quad (2.8)$$

corrisponderebbe, in termini degli operatori di Weyl, la relazione

$$\rho^\lambda(1, 0, 0)\rho^\lambda(0, 1, 0) = \rho^\lambda(1, 1, -1),$$

<sup>24</sup>Si rimanda a [WR2] per la dimostrazione.

<sup>25</sup>Si consulti [VM], capitolo 10, per ulteriori dettagli.

che porge<sup>26</sup>

$$e^{i\hat{P}} e^{i\hat{Q}} = e^{i\hat{P}+i\hat{Q}+i\hat{T}} = e^{i\hat{P}+i\hat{Q}} e^{i\hat{T}} = e^{i\hat{Q}+i\hat{P}} e^{i\hat{T}} = e^{i\hat{Q}} e^{i\hat{P}} e^{\frac{i}{2}[\hat{P},\hat{Q}]}, \quad (2.10)$$

caso particolare delle relazioni di Weyl sopra scritte.

L'elemento di matrice di  $\rho^\lambda$  corrispondente alle funzioni  $f, g \in L^2(\mathbb{R})$  è dato dalla mappa  $E(f, g) : H \rightarrow \mathbb{C}$ , tale che  $(p, q, t) \mapsto E(f, g)(p, q, t) := \langle \rho^\lambda(p, q, t)f, g \rangle_{L^2(\mathbb{R})}$ . Come già notato, il centro  $\mathcal{Z}$  di  $H$  agisce, tramite  $\rho^\lambda$ , mediante la semplice moltiplicazione per un fattore di fase; quindi, nel seguito, potremo dimenticarci della coordinata di Heisenberg  $t$  e aggiungerla poi, alla fine della nostra analisi, quando necessario. Risulta allora naturale considerare la *trasformata di Fourier-Wigner* definita da

$$\begin{aligned} V(f, g) : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{C} \\ (p, q) &\mapsto V(f, g)(p, q) := E(f, g)(p, q, 0), \end{aligned} \quad (2.11)$$

che ci permetterà di mostrare l'irriducibilità di  $\rho^\lambda$  e di ricavare, in maniera rigorosa, la trasformata di Bargmann; entrambi questi risultati verranno raggiunti con  $\lambda \neq 0$  e la necessità di questo vincolo è imposta dalle proprietà di  $V$  che saranno sfruttate nella trattazione e che riassumiamo nella prossima

**Proposizione 8.** *Siano  $(f_1, g_1)$  e  $(f_2, g_2) \in L^2(\mathbb{R}) \times L^2(\mathbb{R})$ ,  $(p, q) \in \mathbb{R}^2$  e  $\lambda \neq 0$ . Allora:*

1.  $V(f_1, g_1)$  è una funzione continua e limitata su  $\mathbb{R}^2$ :  $\|V(f_1, g_1)\|_\infty = \|f_1\|_{L^2(\mathbb{R})} \|g_1\|_{L^2(\mathbb{R})}$ ;
2.  $V$  è una mappa sesquilineare su  $L^2(\mathbb{R}^2)$ , equivalentemente verifica:

$$\langle V(f_1, g_1), V(f_2, g_2) \rangle_{L^2(\mathbb{R}^2)} = \frac{\pi}{\lambda} \langle f_1, f_2 \rangle_{L^2(\mathbb{R})} \overline{\langle g_1, g_2 \rangle_{L^2(\mathbb{R})}} \quad (2.12)$$

*Dimostrazione.* 1) è dalla facile verifica. Per controllare 2), invece, conviene prima notare che, grazie al cambio di variabili  $y = p + 2x$ , la trasformata di Fourier-Wigner può essere riscritta come

$$V(f_1, g_1) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} e^{i\lambda q y} f\left(\frac{y+p}{2}\right) \overline{g\left(\frac{y-p}{2}\right)} dy.$$

Allora

$$\begin{aligned} &\langle V(f_1, g_1), V(f_2, g_2) \rangle_{L^2(\mathbb{R}^2)} = \\ &= \frac{1}{4} \int_{\mathbb{R}^2} \left[ \int_{\mathbb{R}} e^{i\lambda q y} f_1\left(\frac{y+p}{2}\right) \overline{g_1\left(\frac{y-p}{2}\right)} dy \right] \left[ \int_{\mathbb{R}} e^{-i\lambda q k} f_2\left(\frac{k+p}{2}\right) \overline{g_2\left(\frac{k-p}{2}\right)} dk \right] dpdq \\ &= \frac{1}{4} \frac{2\pi}{\lambda} \iiint_{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}} \delta(y-k) f_1\left(\frac{y+p}{2}\right) \overline{g_1\left(\frac{y-p}{2}\right)} f_2\left(\frac{k+p}{2}\right) \overline{g_2\left(\frac{k-p}{2}\right)} dk dy dp dk \\ &= \frac{\pi}{\lambda} \iint_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} f_1(a) \overline{f_2(a)} \overline{g_1(b)} \overline{g_2(b)} dadb. \end{aligned}$$

<sup>26</sup>Da (2.6) segue, in particolare, che  $\rho^\lambda(0, 0, t) = e^{-i\lambda t \text{id}}|_{L^2(\mathbb{R})}$  per ogni  $(0, 0, t) \in \mathcal{Z}$ , per cui

$$e^{i(p\hat{P}+q\hat{Q}+t\hat{T})} = e^{i(p\hat{P}+q\hat{Q})} e^{it\hat{T}} = e^{it\hat{T}} e^{i(p\hat{P}+q\hat{Q})}, \quad (2.9)$$

che è proprio quello che ci si aspettava, perchè una rappresentazione di  $H$  deve mappare il centro  $\mathcal{Z}$  nel centro del (sotto)gruppo immagine.

□

Dalla sesquilinearità di  $V$  consegue direttamente che

**Corollario 2.**  $\rho^\lambda$  è irriducibile per ogni  $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ .

*Dimostrazione.* Sia  $W$  un sottospazio chiuso non banale di  $L^2(\mathbb{R})$ , invariante per la rappresentazione  $\rho^\lambda$ . Consideriamo  $f \in W \setminus \{0\}$  e indichiamo con  $W^\perp$  il sottospazio ortogonale a  $W$  in  $L^2(\mathbb{R})$ . Per  $g \in W^\perp$ , si verifica  $0 = \langle \rho^\lambda(p, q, 0)f, g \rangle_{L^2(\mathbb{R}^2)} = V(f, g)(p, q)$  per ogni  $(p, q) \in \mathbb{R}^2$ ; per la (2.12) otteniamo  $0 = \|V(f, g)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 = \frac{\pi}{\lambda} \|f\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \|g\|_{L^2(\mathbb{R})}^2$  e, dato che  $f \neq 0$ , abbiamo necessariamente che  $g = 0$ . Dunque  $W^\perp = \{0\}$ , ovvero  $W$  è denso in  $L^2(\mathbb{R})$ . Dato che  $W$  è chiuso,  $W = L^2(\mathbb{R})$ . □

Quindi, la famiglia  $\{\rho^\lambda\}_{\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}}$  delle rappresentazioni di *Schrödinger* costituisce una famiglia di rappresentazioni (complesse, infinito dimensionali) unitarie e irriducibili di  $H$ . Rimane da studiare  $\rho^0$ , per la quale dimostriamo la seguente

**Proposizione 9.**  $\rho^0$  è una rappresentazione (complessa) unitaria infinito-dimensionale di  $H$  che non è irriducibile.

*Dimostrazione.* Siano  $f \in L^2(\mathbb{R})$  e  $(p, q, t) \in H$ ; allora  $[\rho^0(p, q, t)f](x) = f(x + p) =: [T_p f](x)$ , ove si è indicato con  $T_p$  l'operatore di traslazione su  $L^2(\mathbb{R})$  di un fattore  $p^{27}$ . Per concludere, è sufficiente esibire un sottospazio chiuso  $W \subset L^2(\mathbb{R})$  ( $W \neq \{0\}$ ,  $W \neq L^2(\mathbb{R})$ ) invariante per  $T_p$  per ogni  $p \in \mathbb{R}$ . Si indichi con  $\hat{\cdot} : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$  l'operatore unitario dato dalla trasformata di Fourier su  $L^2(\mathbb{R})$  e con  $\check{\cdot} : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$  l'antitrasformata. Abbiamo che  $W$  è invariante sotto l'azione di  $T_p$  per ogni  $p \in \mathbb{R} \iff \hat{W}$  è invariante per la moltiplicazione per  $e_p$  per ogni  $p \in \mathbb{R}$ , ove  $e_p$  denota un fattore del tipo  $e_p = e^{i\delta p}$  (con  $\delta \in \mathbb{R}$  che dipende dalla convenzione utilizzata per definire la trasformata di Fourier). Dato che i fattori  $e_p = e^{i\delta p}$  hanno norma unitaria, per ottenere un sottospazio invariante sotto la loro azione è sufficiente considerare il sottoinsieme  $S_E$  di  $L^2(\mathbb{R})$  dato dalle funzioni che si annullano quasi ovunque in un determinato sottoinsieme misurabile  $E$  di  $\mathbb{R}$  di misura positiva; quindi, ponendo  $W_E := \check{S}_E$ , si ottiene un sottoinsieme invariante per traslazioni. Inoltre, un tale  $S_E$  risulta pure chiuso, poichè è esattamente l'ortogonale al sottospazio costituito dalle funzioni quadrato sommabili che si annullano quasi ovunque sull'insieme complementare di  $E$ ; dato che l'antitrasformata è un'isometria, anche  $W_E$  risulta essere chiuso (le isometrie preservano la relazione di ortogonalità). E' facile, infine, scegliere  $E$  in maniera tale  $W_E$  sia non vuoto. Quindi, basta prendere  $W := W_E$ . □

**Osservazione 5.** La rappresentazione  $\rho^0$  è sicuramente riducibile poichè, adottando le notazioni usate nella dimostrazione precedente, è facile vedere che<sup>28</sup>

<sup>27</sup>Dato che la misura di Lebesgue è invariante per traslazioni, ritroviamo che  $T_p$  è un operatore unitario  $\forall p \in \mathbb{R}$ , come garantito dal fatto che  $T_p$  è una rappresentazione di *Schrödinger*.

<sup>28</sup>Assumendo che l'antitrasformata di Fourier si possa scrivere come un integrale, vale:  $L^2(\mathbb{R}) \ni f = f_1 + f_2$  con  $W_{]-\infty, 0]} \ni f_1(x) = a \int_{]0, \infty[} \hat{f}(\zeta) e^{i\delta x \zeta} d\zeta$  e  $W_{]0, \infty[} \ni f_2(x) = a \int_{]-\infty, 0]} \hat{f}(\zeta) e^{i\delta x \zeta} d\zeta$ ; qui  $\delta$  e  $a$  sono delle costanti reali che dipendono dalla convenzione usata per definire la trasformata.

$L^2(\mathbb{R}) = W_{]-\infty, 0]} \oplus W_{[0, \infty[}$ . Inoltre, si può mostrare che la rappresentazione  $\rho^0$  non è completamente riducibile<sup>29</sup>.

Dato che ci interessano solo le rappresentazioni unitarie e irriducibili del gruppo di Heisenberg, quando ci riferiremo alla famiglia delle rappresentazioni di Schrödinger intenderemo l'insieme delle  $\{\rho^\lambda\}_{\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}}$  e ci dimenticheremo, d'ora in poi, di  $\rho^0$ ; infatti, quest'ultima non assume alcuno significato fisico, a differenza delle altre  $\rho^\lambda$  e delle rappresentazioni  $\sigma_{a,b}$  (che incontreremo fra poco).

Dopo aver analizzato l'irriducibilità di  $\rho_\lambda$  per ogni  $\lambda \in \mathbb{R}$ , ci chiediamo se la famiglia delle  $\{\rho^\lambda\}_{\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}}$  costituisce (a meno di un isomorfismo di rappresentazioni) l'insieme di tutte le rappresentazioni unitarie irriducibili di  $H$ ; se ciò fosse vero<sup>30</sup>,  $\{\rho^\lambda\}_{\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}}$  sarebbe sicuramente l'insieme *minimale* di tutte le rappresentazioni unitarie e irriducibili di  $H$ , poichè vale la seguente

**Proposizione 10.** *Siano  $\lambda, \tau \in \mathbb{R}$ ,  $\lambda \neq \tau$ .*

*Allora  $\rho^\lambda$  e  $\rho^\tau$  sono inequivalenti.*

*Dimostrazione.* Siano  $\lambda, \tau$  come nell'ipotesi.

Assumiamo -per assurdo- che esista l'operatore di intralacciamento tra  $\rho^\lambda$  e  $\rho^\tau$ ; chiamato  $T : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$  questo operatore, avremmo che

$$[\rho^\lambda(p, q, t)f](x) = [T^{-1} \circ \rho^\tau(p, q, t) \circ Tf](x) \quad \forall (p, q, t) \in H \text{ e } \forall f \in L^2(\mathbb{R}).$$

In particolare, preso  $(p, q, t) = (0, 0, t) \in \mathcal{Z}$ ,

$$e^{-i\lambda t} f(x) = T^{-1} e^{-i\tau t} (Tf)(x) = e^{-i\tau t} T^{-1} (Tf)(x) = e^{-i\tau t} f(x),$$

per cui

$$e^{-i(\lambda-\tau)t} f(x) = f(x) \quad \text{per q.o. } x \in \mathbb{R};$$

se  $f \neq 0$ , allora  $e^{-i(\lambda-\tau)t} = 1$  e ciò si può verificare solo se  $\tau = \lambda$ .  $\square$

Per rispondere alla nostra domanda, è necessario enunciare<sup>31</sup> il fondamentale

**Teorema 2.** *(di Stone-Von Neumann.) Sia  $\gamma : H \rightarrow U(\mathcal{H})$  una rappresentazione unitaria di  $H$  su uno spazio di Hilbert (complesso)  $\mathcal{H}$ , la cui restrizione  $\gamma|_{\mathcal{Z}} : \mathcal{Z} \rightarrow U(\mathcal{H})$  sia tale che per ogni  $(0, 0, t) \in \mathcal{Z}$  valga  $\gamma|_{\mathcal{Z}}(0, 0, t) = e^{-i\lambda t} \mathbb{I}$  per un certo  $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ . Allora:*

$$\mathcal{H} = \bigoplus_{\alpha} \mathcal{H}_{\alpha},$$

ove  $\{\mathcal{H}_{\alpha}\}_{\alpha}$  denota una famiglia di sottospazi  $\mathcal{H}_{\alpha} \subseteq \mathcal{H}$  mutuamente ortogonali (quindi chiusi) invarianti per  $\gamma$  e tali che:

$$\gamma|_{\mathcal{H}_{\alpha}} \text{ è unitariamente equivalente a } \rho^\lambda \quad \forall \alpha.$$

In particolare, se  $\gamma$  è irriducibile, allora  $\gamma$  è unitariamente equivalente a  $\rho^\lambda$ .

<sup>29</sup>E' sufficiente notare che  $\rho^0(p, q, t)\rho^0(p', q', t') = \rho^0(p', q', t')\rho^0(p, q, t)$  per ogni  $(p, q, t), (p', q', t') \in H$  e il teorema di Schur implica allora che gli spazi irriducibili per  $\rho^0$  devono essere uno-dimensionali; infine, è facile convincersi che tali spazi dovrebbero esattamente essere quelli generati dalle funzioni  $e^{ixr}$  al variare di  $r \in \mathbb{Z}$ , funzioni che, però, non appartengono a  $L^2(\mathbb{R})$ .

<sup>30</sup>Vedremo che non è così, perchè oltre alle rappresentazioni di Schrödinger ci sono anche delle rappresentazioni unitarie irriducibili unodimensionali (che più avanti verranno indicate con  $\sigma_{a,b}$ ).

<sup>31</sup>Rimandiamo a [GF1], capitolo 1.5 per la dimostrazione.

Questo risultato ci permette di dimostrare il seguente

**Corollario 3.** *Sia  $\gamma$  una rappresentazione (complessa) unitaria irriducibile di  $H$ . Allora,  $\gamma$  è unitariamente equivalente ad una e ad una soltanto di queste rappresentazioni:*

- $\rho^\lambda$  (agente su  $L^2(\mathbb{R})$ ) per un unico valore di  $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ;
- $\sigma_{a,b}$  (agente su  $\mathbb{C}$ ) e data da  $\sigma_{a,b}(p, q, t) = e^{i(ap+bq)}$  con  $a, b \in \mathbb{R}$ .

*Dimostrazione.* Sia  $\gamma$  una rappresentazione (complessa) unitaria e irriducibile di  $H$ . Essendo un omomorfismo fra gruppi,  $\gamma$  mappa il centro  $\mathcal{Z}$  di  $H$  sul centro del sottogruppo  $\gamma(H)$ , per cui  $\gamma(p, q, s)\gamma(0, 0, t) = \gamma(0, 0, t)\gamma(p, q, s)$  per ogni  $p, q, t, s \in \mathbb{R}$ . Dato che  $\gamma$  è una rappresentazione complessa, il *Lemma di Schur*<sup>32</sup> implica che  $\gamma(0, 0, t) = c(t)\mathbb{I}$ , con  $c(t) \in \mathbb{C}$  per ogni  $t \in \mathbb{R}$ ; poichè  $\gamma$  è unitaria, si può porre, in tutta generalità,  $c(t) := e^{-i\lambda t}$  per un certo  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

Se  $\lambda \neq 0$ , il teorema di Stone-Von Neumann garantisce che  $\gamma$  è unitariamente equivalente a  $\rho^\lambda$ ; inoltre, grazie alla proposizione 3,  $\gamma$  non può essere equivalente ad un'altra  $\rho^\tau$  con  $\tau \neq \lambda$ .

Se, invece,  $\lambda = 0$ , risulta che  $\gamma(0, 0, t) = \mathbb{I}$ . Consideriamo allora la rappresentazione  $\hat{\gamma}$  indotta da  $\gamma$  sul gruppo quoziente<sup>33</sup>  $H/\mathcal{Z} \cong \mathbb{R}^2$ , data da  $\hat{\gamma}(p, q) := \gamma(p, q, 0)$  ( $\hat{\gamma}(p, q)$  e  $\gamma(p, q, 0)$  agiscono sullo stesso spazio complesso di Hilbert). Dato che  $\mathcal{Z}$  è anche il sottogruppo commutatore di  $H$ ,  $H/\mathcal{Z}$  è un sottogruppo abeliano di  $H$ ; infatti, la legge prodotto  $\cdot_H$  su  $H/\mathcal{Z}$  si riduce alla somma definita sullo spazio vettoriale  $\mathbb{R}^2$ . Il lemma di Schur applicato alla rappresentazione complessa irriducibile  $\hat{\gamma}$  del gruppo abeliano  $H/\mathcal{Z}$  prova che  $\hat{\gamma}$  è una rappresentazione unidimensionale, ovvero<sup>34</sup>  $\hat{\gamma} : H/\mathcal{Z} \rightarrow \mathbb{C}^*$ . Ritornando a  $\gamma$ , abbiamo allora, per la sua unitarietà, che  $\gamma(p, q, t) = e^{i(ap+bq)}\mathbb{I}$  con  $a, b \in \mathbb{R}$ .  $\square$

In definitiva, le rappresentazioni complesse, unitarie e irriducibili di  $H$  o sono infinito-dimensionali o<sup>35</sup> sono uno-dimensionali e possono essere classificate semplicemente considerando la loro restizione su  $\mathcal{Z}$ . In altre parole, non esistono rappresentazioni complesse, unitarie e irriducibili di  $H$  che siano finito dimensionali con dimesione strettamente più grande di uno. Ciò è profondamente diverso da quanto si realizza in  $SU(2)$ , per il quale sappiamo esistere rappresentazioni complesse unitarie e irriducibili  $(n+1)$ -dimensionali per ogni intero  $n \geq 0$  (si pensi a  $\pi^n$ ).

**Osservazione 6.** *Il Corollario 3 e la sua dimostrazione celano un profondo significato fisico, che ora vogliamo mettere in evidenza. Assumiamo che ogni rappresentazione unitaria e irriducibile  $\gamma$  di  $H$  sullo spazio di Hilbert  $\mathcal{H}$  possa essere espressa come*

$$\begin{aligned} \gamma : \quad H &\rightarrow U(\mathcal{H}) \\ (p, q, t) &\mapsto \gamma(p, q, t) = e^{i(pP_x + qQ_x - \frac{t}{2i}[P_x, Q_x])}, \end{aligned}$$

<sup>32</sup>Si faccia riferimento a [BH], capitolo 5,

<sup>33</sup>Si noti che  $\mathcal{Z}$ , in quanto centro, è un sottogruppo normale e, quindi,  $H/\mathcal{Z}$  è dotato di un'unica e ben definita struttura di gruppo.

<sup>34</sup>Si indichi con  $\mathbb{C}^*$  il duale di  $\mathbb{C}$ .

<sup>35</sup>La già nota rappresentazione  $M : H \rightarrow M(\mathbb{R}^3)$  che realizza il gruppo di Heisenberg come gruppo di Lie di matrici non rientra in questa classificazione, poichè non è unitaria.

ove  $P_x$  e  $Q_x$  sono certi operatori autoaggiunti definiti su  $\mathcal{H}$  e aventi commutatore  $[P_x, Q_x] = -2i\lambda \text{id}|_{\mathcal{H}}$  per un certo  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Considerando  $P_x$  e  $Q_x$  come le osservabili impulso e posizione di una particella libera di muoversi in una dimensione, possiamo affermare che:

- se  $\lambda \neq 0$ , allora  $\gamma$  è unitariamente equivalente a  $\rho^\lambda$ , perciò  $\mathcal{H} \equiv L^2(\mathbb{R})$  e gli operatori  $P_x, Q_x$  sono unitariamente equivalenti alle osservabili  $\hat{P}, \hat{Q}$ : in altri termini, se  $[P_x, Q_x] \neq 0$  si ottiene la meccanica quantistica;
- se  $\lambda = 0$ , allora  $\gamma(p, q, t)$  è unitariamente equivalente a  $\sigma_{p_x, q_x}(p, q, t) = e^{i(pp_x + qq_x)}$  per certi  $p_x, q_x \in \mathbb{R}$ , perciò  $\mathcal{H} = \mathbb{C}$  e gli operatori  $P_x, Q_x$  devono essere pensati come dei numeri commutanti  $p_x, q_x$ . Di preciso, questi ultimi sono i valori numerici dell'impulso e della posizione della particella classica e, quindi, al variare della coppia  $(p_x, q_x) \in \mathbb{R}^2$  si ottiene la meccanica classica.

In altre parole, la meccanica quantistica deve necessariamente svilupparsi su uno spazio infinito-dimensionale e ciò è causato, come abbiamo potuto constatare, dalla regola di commutazione canonica, che vuole  $[P_x, Q_x]$  proporzionale all'identità su  $\mathcal{H}$ . Infatti, se si verificasse  $[P_x, Q_x] = -2i\lambda \text{id}|_{\mathcal{H}}$  ( $\lambda \neq 0$ ) su un certo  $\mathcal{H}$  di dimensione  $n < \infty$ , allora  $P_x$  e  $Q_x$  sarebbero delle matrici  $n \times n$  e, calcolando la traccia del commutatore  $[P_x, Q_x]$  si raggiungerebbe rapidamente l'assurdo.

Dopo aver classificato tutte le rappresentazioni (complesse) unitarie e irriducibili di  $H$ , si pone ora attenzione su quelle infinito dimensionali. Vogliamo studiare la famiglia delle rappresentazioni di Bargmann e analizzare, nel dettaglio, la trasformazione unitaria che la rende equivalente alla famiglia di Schrödinger.

### 2.3 Dalla rappresentazione di Schrödinger a quella di Bargmann

Dalla Proposizione 8, si intuisce che la trasformata di Fourier-Wigner è un'ottima candidata che può essere sfruttata per costruire un'isometria tra  $L^2(\mathbb{R})$  e  $L^2(\mathbb{R}^2)$ ; infatti, presa una funzione  $\phi_0 \in L^2(\mathbb{R})$ ,  $\|\phi_0\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 = \frac{\lambda}{\pi}$ , la mappa  $V(\cdot, \phi_0) : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^2)$  tale che  $f \rightarrow V(f, \phi_0)$  sarebbe, per la sesquilinearità di  $V$ , un'isometria. Definiamo, allora

$$\begin{aligned} \Phi : L^2(\mathbb{R}) &\rightarrow L^2(\mathbb{R}^2) \\ f &\mapsto \Phi(f) := V(f, \phi_0) \end{aligned}$$

ove  $L^2(\mathbb{R}) \ni \phi_0(x) = \left(\frac{2\lambda^3}{\pi^3}\right)^{\frac{1}{4}} e^{-\lambda x^2}$  e verifica  $\|\phi_0\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 = \frac{\lambda}{\pi}$  (qui e in seguito assumeremo  $\lambda > 0$ ).

Sfruttando l'unitarietà di  $\rho^\lambda$ , abbiamo che

$$\begin{aligned} \Phi(f)(p, q) &= \langle f, \rho(-p, -q)\phi_0 \rangle_{L^2(\mathbb{R})} \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-i\lambda(pq - 2qx)} \overline{\phi_0(x - p)} dx \end{aligned}$$

e, definendo la nuova variabile complessa  $z := p + iq$ , arriviamo a

$$\begin{aligned}\Phi(f)(p, q) &= \left( \sqrt{\frac{\lambda}{\pi}} e^{-\frac{\lambda}{2}|z|^2} \right) \left( \left( \frac{2\lambda}{\pi} \right)^{\frac{1}{4}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{\lambda}{2}z^2 + 2\lambda xz - \lambda x^2} f(x) dx \right) \\ &=: \left( \sqrt{\frac{\lambda}{\pi}} e^{-\frac{\lambda}{2}|z|^2} \right) (B_\lambda f)(z)\end{aligned}\quad (2.13)$$

Si è qui introdotta la *trasformata di Bargmann*  $B_\lambda$  di una funzione  $f \in L^2(\mathbb{R})$ , data da:  $(B_\lambda f)(z) := \left( \left( \frac{2\lambda}{\pi} \right)^{\frac{1}{4}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{\lambda}{2}z^2 + 2\lambda xz - \lambda x^2} f(x) dx \right)$ . Si noti che l'integrale che la definisce converge uniformemente su ogni sottoinsieme compatto di  $\mathbb{C}$  e ciò è quanto basta per affermare che  $(B_\lambda f)(z)$  è una funzione olomorfa<sup>36</sup>.

Come sopra spiegato, abbiamo che

$$\|\Phi(f)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 = \|V(f, \phi_0)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 = \frac{\pi}{\lambda} \|f\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \|\phi_0\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 = \|f\|_{L^2(\mathbb{R})}^2,$$

mentre, da (2.13), segue

$$\|\Phi(f)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 = \frac{\lambda}{\pi} \int_{\mathbb{C}} e^{-\lambda|z|^2} |(B_\lambda f)|^2(z) dz;$$

quindi

$$\|f\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 = \|B_\lambda f\|_{L^2(\mathbb{C}, \frac{\lambda}{\pi} e^{-\lambda|z|^2})}^2,$$

e la trasformata di Bargmann risulta dunque essere un'isometria tra  $L^2(\mathbb{R})$  e lo spazio di Fock  $\mathcal{F}_\lambda$ , lo spazio di Hilbert delle funzioni intere su  $\mathbb{C}$  a quadrato sommabili rispetto alla misura  $\frac{\lambda}{\pi} e^{-\lambda|z|^2}$ .

In verità, si può verificare che  $\text{Range}(B_\lambda) = \mathcal{F}_\lambda$ : la trasformata di Bargmann è un'isometria suriettiva, ovvero è un operatore unitario tra  $L^2(\mathbb{R})$  e  $\mathcal{F}_\lambda$ , come messo in evidenza dalla prossima

**Proposizione 11.** *Siano:*

- $\mathcal{F}_\lambda := \{F : F \text{ olomorfa su } \mathbb{C} \text{ con } \|F\|_{\mathcal{F}_\lambda}^2 := \frac{\lambda}{\pi} \int_{\mathbb{C}} e^{-\lambda|z|^2} |F(z)|^2 dz < \infty\}$  lo spazio di Fock<sup>37</sup>;

- $B_\lambda$  la trasformata di Bargmann

$$B_\lambda : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{F}_\lambda$$

$$f \mapsto B_\lambda f \quad (B_\lambda f)(z) := \left( \left( \frac{2\lambda}{\pi} \right)^{\frac{1}{4}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{\lambda}{2}z^2 + 2\lambda xz - \lambda x^2} f(x) dx \right);$$

*Si verifica che:*

<sup>36</sup>Infatti, si vede ad occhio che, se si riuscisse a portare dentro al segno di integrale la derivata complessa rispetto a  $\bar{z}$ , risulterebbe banalmente  $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}(B_\lambda f) = 0$ , da cui l'analiticità complessa di  $B_\lambda f$ ; ma, restringendoci ad un compatto, la funzione integranda è facilmente maggiorabile con una funzione integrabile che non dipende da  $z$ , per cui il teorema della convergenza dominata permette a  $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$  di passare sotto al segno di integrale.

<sup>37</sup>Si indicherà con  $dz$  l'elemento d'area su  $\mathbb{C}$ .



1.  $\mathcal{F}_\lambda = L^2(\mathbb{C}, \frac{\lambda}{\pi} e^{-\lambda|z|^2}) \cap \{\text{funzioni intere su } \mathbb{C}\}$  è un sottospazio vettoriale (complesso) chiuso di  $L^2(\mathbb{C}, \frac{\lambda}{\pi} e^{-\lambda|z|^2})$ , ovvero è uno spazio di Hilbert (separabile) rispetto al prodotto interno dato da

$$\langle \mathcal{F}, \mathcal{G} \rangle_{\mathcal{F}_\lambda} := \frac{\lambda}{\pi} \int_{\mathbb{C}} e^{-\lambda|z|^2} \mathcal{F}(z) \overline{\mathcal{G}(z)} dz \quad \forall \mathcal{F}, \mathcal{G} \in \mathcal{F}_\lambda;$$

2.  $B_\lambda$  è una trasformazione unitaria.

*Dimostrazione.* Per 1) rimandiamo a [VM], capitolo 3.2; alternativamente, per dimostrare la chiusura di  $\mathcal{F}_\lambda$ , si può ricorrere ad un risultato dell'analisi complessa che afferma che il limite uniforme sui compatti di una successione di funzioni olomorfe è olomorfo.

Per quanto riguarda 2), vogliamo mostrare che  $B$  è in grado di mappare una base ortonormale di  $L^2(\mathbb{R})$  in una base ortonormale di  $\mathcal{F}_\lambda$ . Sappiamo che  $\{\psi_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  è una base di  $L^2(\mathbb{R})$ , ove:  $\psi_k(x) := \frac{1}{\pi^{\frac{1}{4}} \sqrt{2^k k!}} e^{-\frac{x^2}{2}} H_k(x)$  con  $H_k(x) = (-1)^k e^{x^2} (\frac{d}{dx})^k e^{-x^2}$   $k$ -esimo polinomio di Hermite. Con un cambio di variabile, si vede che pure l'insieme  $\{\psi_k^\lambda\}_{k \in \mathbb{N}}$  costituito dai vettori  $\psi_k^\lambda(x) := (2\lambda)^{\frac{1}{4}} \psi_k(\sqrt{2\lambda}x)$  deve essere una base ortonormale di  $L^2(\mathbb{R})$ . Sia  $\{u_k^\lambda\}_{k \in \mathbb{N}}$  la base ortonormale di  $\mathcal{F}_\lambda$  costituita dai monomi  $u_k^\lambda(z) := \sqrt{\frac{\lambda^k}{k!}} z^k$ .

Si definisce allora  $M^\lambda(z, x) := \sum_{k=0}^{\infty} u_k^\lambda(z) \psi_k^\lambda(x)$  il nucleo dell'operatore integrale  $A$  che permette di passare da una base all'altra:

$$A : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{F}_\lambda$$

$$f \mapsto Af \quad \text{dove} \quad (Af)(z) := \int_{\mathbb{R}} M^\lambda(z, x) f(x) dx.$$

Per concludere bisogna mostrare che  $A = B_\lambda$ ; equivalentemente, dobbiamo verificare che  $M^\lambda$  coincide con il nucleo della trasformata di Bargmann, ovvero che

$$M^\lambda(z, x) = \left(\frac{2\lambda}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{\lambda}{2} z^2 + 2\lambda x z - \lambda x^2}.$$

Questo risultato si ottiene facilmente sfruttando l'espressione della funzione generatrice dei polinomi di Hermite<sup>38</sup>  $e^{2yt-t^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} H_k(y)$ .  $\square$

Dato che la trasformata di Bargmann è unitaria, si può esplicitarne l'inversa senza difficoltà; infatti, da

$$\langle B_\lambda^{-1} \mathcal{F}, g \rangle_{L^2(\mathbb{R})} = \langle \mathcal{F}, B_\lambda g \rangle_{\mathcal{F}_\lambda} \quad \forall \mathcal{F} \in \mathcal{F}_\lambda, \quad \forall g \in L^2(\mathbb{R})$$

<sup>38</sup>Dato  $t \in \mathbb{R}$ , sia  $T$  la funzione generatrice dei polinomi di Hermite,  $T(y) := e^{2yt-t^2}$  e sia  $g(y) := e^{y^2}$ . Allora, l'uguaglianza segue dallo sviluppo di McLaurin della funzione  $e^{-y^2} T(y) = e^{-g(y-t)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-t)^k}{k!} g^{(k)}(y)$ , poichè  $g^{(k)}(y) = \frac{d^k}{dy^k} e^{-y^2} = (-1)^k e^{-y^2} H_k(y)$ .

otteniamo<sup>39</sup>:

$$B_\lambda^{-1} : \mathcal{F}_\lambda \rightarrow L^2(\mathbb{R})$$

$$\mathcal{F} \mapsto B_\lambda^{-1}\mathcal{F}, (B_\lambda^{-1}\mathcal{F})(z) := 2^{\frac{1}{4}} \left(\frac{\lambda}{\pi}\right)^{\frac{5}{4}} \int_{\mathbb{C}} \mathcal{F}(z) e^{-\lambda(|z|^2 + x^2 + \frac{z^2}{2} - 2x\bar{z})} dz.$$

Prendendo  $B_\lambda$  come operatore di intralacciamento, possiamo costruire una nuova rappresentazione unitaria infinito-dimensionale  $\beta^\lambda$  di  $H$ , equivalente a  $\rho^\lambda$ .

Prima, però, conviene identificare la struttura di varietà differenziale soggiacente a  $H$  con  $\mathbb{C} \times \mathbb{R}$ , per mezzo del seguente diffeomorfismo tra varietà:

$$\begin{aligned} C : H &\rightarrow \mathbb{C} \times \mathbb{R} \\ (p, q, t) &\mapsto C(p, q, t) := (p + iq, t) \end{aligned}$$

Grazie a  $C^{-1}$ , si può trasferire su  $\mathbb{C} \times \mathbb{R}$  la struttura di gruppo di  $H$  e si indicherà allora con  $\hat{H}$  il gruppo di Lie dato dalla varietà  $\mathbb{C} \times \mathbb{R}$  munita della seguente legge prodotto:

$$\begin{aligned} \cdot_{\hat{H}} : \hat{H} \times \hat{H} &\rightarrow \hat{H} \\ ((z, t), (z', t')) &\mapsto (z, t) \cdot_{\hat{H}} (z', t') := (z + z', t + t' + \text{Im}(zz')). \end{aligned}$$

L'algebra di Lie  $\hat{\mathfrak{h}}$  di  $\hat{H}$  è lo spazio vettoriale  $\mathbb{C} \times \mathbb{R}$  che eredita da  $\mathfrak{h}$  le seguenti parentesi di Lie:

$$\begin{aligned} [\cdot, \cdot]_{\hat{\mathfrak{h}}} : \hat{\mathfrak{h}} \times \hat{\mathfrak{h}} &\rightarrow \hat{\mathfrak{h}} \\ ((z, t), (z', t')) &\mapsto [(z, t), (z', t')]_{\hat{\mathfrak{h}}} := (0, 0, 2 \text{Im } zz'). \end{aligned} \quad (2.12)$$

Procediamo con il determinare  $\beta^\lambda$ ; siano  $(r, s, t) \in H$ ,  $z := p + iq$ ,  $w := r + is$  e  $f \in L^2(\mathbb{R})$ . Dato che  $\beta^\lambda$  e  $\rho^\lambda$  devono essere intralacciate dalla trasformata di Bargmann, deve verificarsi:

$$\begin{aligned} [\beta^\lambda(w, t)Bf](z) &= [\beta^\lambda(C(r, s, t))Bf](z) = [B\rho^\lambda(r, s, t)f](z) = \\ &= e^{-i\lambda t} [B\rho^\lambda(r, s, 0)f](z) = \\ &= e^{-i\lambda t} \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}} e^{\frac{\lambda}{2}|z|^2} \Phi(\rho^\lambda(r, s, 0)f)(p, q) \\ &= e^{-i\lambda t} \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}} e^{\frac{\lambda}{2}|z|^2} V(\rho^\lambda(p, q, 0)\rho^\lambda(r, s, 0)f, \phi_0) \\ &= e^{-i\lambda t} \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}} e^{\frac{\lambda}{2}|z|^2} e^{-i\lambda \text{Im}(z\bar{w})} V(\rho^\lambda(p + r, q + s, 0)f, \phi_0) \\ &= e^{-i\lambda t} \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}} e^{\frac{\lambda}{2}|z|^2} e^{-i\lambda \text{Im}(z\bar{w})} \Phi(f)(p + r, q + s) \\ &= e^{-i\lambda t} \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}} e^{\frac{\lambda}{2}|z|^2} e^{-i\lambda \text{Im}(z\bar{w})} \sqrt{\frac{\lambda}{\pi}} e^{-\frac{\lambda}{2}|z+w|^2} (Bf)(z + w) \\ &= e^{-i\lambda t} e^{-\frac{\lambda}{2}|w|^2 - \lambda z\bar{w}} (Bf)(z + w) \end{aligned}$$

<sup>39</sup>Qui abbiamo esplicitato  $B_\lambda^{-1}$  sottoforma di un operatore integrale, che risulta essere ben definito per un sottospazio  $\mathcal{Y}$  (quello dei polinomi) denso in  $\mathcal{F}$ ; per le funzioni  $\tilde{f}$  dello spazio di Fock per cui l'integrale non è assolutamente convergente, si mostra essere lecito considerare una successione di funzioni  $\{\mathcal{F}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  in  $\mathcal{Y}$  convergente a  $\tilde{f}$  nella topologia di Fock e porre  $B_\lambda^{-1}(\tilde{f}) := \lim_{n \rightarrow \infty} B_\lambda^{-1}\mathcal{F}_n$ , ove il limite è inteso nella topologia di  $L^2(\mathbb{R})$ .

Abbiamo trovato la cosiddetta *rappresentazione di Bargmann* del gruppo di Heisenberg:

$$\beta^\lambda : \hat{H} \times \mathcal{F}_\lambda \rightarrow \mathcal{F}_\lambda$$

$$((w, t), \mathcal{F}) \mapsto \beta^\lambda(w, t)\mathcal{F} \text{ con } [\beta^\lambda(w, t)\mathcal{F}](z) := e^{-\lambda(it+z\bar{w}+\frac{1}{2}|w|^2)}\mathcal{F}(z+w).$$

Si vuole sottolineare che la rappresentazione di Bargmann ha la forma appena esposta solo per  $\lambda > 0$ , vincolo che ricordiamo essere stato introdotto con lo studio della funzione  $\Phi(f) : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^2)$  tale che  $f \mapsto \Phi(f) := V(f, \phi_0)$ .

Per ottenere  $\beta^\lambda$  nel caso<sup>40</sup>  $\lambda < 0$ , sarebbe sufficiente ripetere i conti di questa sottosezione assumendo  $L^2(\mathbb{R}) \ni \phi_0(x) := \left(\frac{2|\lambda|^3}{\pi^3}\right)^{\frac{1}{4}} e^{-|\lambda|x^2}$  e, senza nuove difficoltà, si otterrebbe la seguente rappresentazione di  $\hat{H}$ :

$$\beta^\lambda : \hat{H} \times \mathcal{F}_\lambda^a \rightarrow \mathcal{F}_\lambda^a$$

$$((w, t), \mathcal{F}) \mapsto \beta^\lambda(w, t)\mathcal{F} \text{ con } [\beta^\lambda(w, t)\mathcal{F}](z) := e^{\lambda(-it-zw+\frac{1}{2}|w|^2)}\mathcal{F}(z-\bar{w})$$

ancora unitariamente equivalente a  $\rho^\lambda$  per mezzo della trasformata di Bargmann, che, per  $\lambda < 0$ , diventa

$$B_\lambda : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{F}_\lambda^a$$

$$f \mapsto B_\lambda f \quad (B_\lambda f)(z) := \left( \left( \frac{2|\lambda|}{\pi} \right)^{\frac{1}{4}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{|\lambda|}{2}\bar{z}^2 + 2|\lambda|x\bar{z} - |\lambda|x^2} f(x) dx \right);$$

In queste formule si è indicato con  $\mathcal{F}_\lambda^a$  lo spazio di Fock nel caso  $\lambda < 0$ , dato da  $\mathcal{F}_\lambda^a := \{\mathcal{F} \circ a : \mathcal{F} \in \mathcal{F}_{|\lambda|} \text{ e } a : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \text{ tale che } a(z) := \bar{z}\}$ ; in altre parole,

$$\mathcal{F}_\lambda^a = \{F : F \text{ antiolomorfa su } \mathbb{C} \text{ con } \|F\|_{\mathcal{F}_\lambda^a}^2 := \|F\|_{\mathcal{F}_{|\lambda|}}^2\}.$$

In definitiva, siamo riusciti a costruire la famiglia  $\{\beta^\lambda\}_{\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}}$  delle rappresentazioni di Bargmann di  $\hat{H}$ ; ciascuna di queste  $\beta^\lambda$  è unitariamente equivalente ad una  $\rho^\lambda$  per un unico valore di  $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , per cui è infinito-dimensionale, unitaria ed irriducibile.

---

<sup>40</sup>Dato che  $[\hat{P}, \hat{Q}] = -2i\lambda$ , invertire il segno di  $\lambda$  significa, dal punto di vista fisico, scambiare l'operatore impulso con quello di posizione.

### 3 Contrazione di gruppi

Nel capitolo 2, abbiamo già avuto modo di sottolineare la profonda differenza esistente tra le rappresentazioni unitarie irriducibili di  $H$  e quelle di  $SU(2)$ . In questa sezione, ci domandiamo se le prime (infinito-dimensionali) possano essere considerate come il "limite" di una successione delle seconde (che ricordiamo essere finito-dimensionali). Dato che la rappresentazione di un gruppo rispecchia intimamente la struttura del gruppo stesso, prima di rispondere a tale quesito, conviene capire se, almeno, si possano ricavare le caratteristiche di  $H$  a partire da quelle di  $SU(2)$ . Geometricamente parlando, si tratta di trovare un modo per passare con continuità dalla sfera unitaria  $\Omega \subset \mathbb{C}^2$  ( $\Omega \equiv SU(2)$ ) alla sottovarietà complessa  $\mathbb{C} \times \mathbb{R} \subset \mathbb{C}^2$  ( $\mathbb{C} \times \mathbb{R} \equiv \hat{H}$ ); contemporaneamente, dal punto di vista algebrico, la trasformazione cercata deve tramutare il prodotto di  $SU(2)$  in quello di  $\hat{H}$ . Ovviamente, per mezzo di un diffeomorfismo globale non è possibile realizzare nessuna delle due richieste. Appare naturale, allora, ricorrere ad una famiglia di funzioni  $\{\phi_\epsilon\}_\epsilon$  dipendenti da un parametro  $\epsilon \in \mathbb{R}$  che siano dei diffeomorfismi *locali* e che siano dei *quasi-omomorfismi* di gruppi in grado, cioè, di identificare *a meno di un certo errore* le due leggi prodotto in prossimità degli elementi neutri  $e_{\hat{H}}, e_{SU(2)}$ ; una volta fatto ciò, agendo poi per traslazione, si potrebbero quasi-identificare i due prodotti in un intorno di un generico  $g \in SU(2)$  e nel corrispondente intorno immagine di  $\phi_\epsilon(g) \in \hat{H}$ . La speranza risiede nel poter trovare una famiglia suddetta in modo tale che l'errore commesso nell'identificazione tra le due leggi prodotto sia trascurabile nel limite in cui si manda il parametro  $\epsilon$  ad un certo valore di "transizione". Queste idee trovano la loro formulazione matematica nel concetto di contrazione di gruppi di Lie, che introduciamo con la seguente

**Definizione 2.** Siano  $(F, \cdot_F), (G, \cdot_G)$  due gruppi di Lie connessi. Si definisce *contrazione di  $G$  su  $F$*  la famiglia  $\{\phi_\epsilon\}_{\epsilon \in \mathbb{R}_{>0}}$  di mappe tali che:

1.  $\phi_\epsilon \in C^\infty(F, G)$  per ogni  $\epsilon > 0$ ;
2.  $\phi_\epsilon(e_F) = e_G$  per ogni  $\epsilon > 0$ ;
3. dato un qualsiasi intorno  $V$  di  $e_F$  aperto e relativamente compatto, sia  $U := V \cap V^{-1}$ ; si verifica che:
  - (a) esiste un  $\epsilon_U \in \mathbb{R}_{>0}$  per cui  $\phi_\epsilon|_U$  è un diffeomorfismo per  $\epsilon < \epsilon_U$ ;
  - (b) dato  $W$  tale che  $W^2 \subset U$ , allora vale  $(\phi_\epsilon(W))^2 \subset \phi_\epsilon(U)$  per  $\epsilon < \epsilon_U$ ;
  - (c) per  $x, y \in U$  vale<sup>41</sup>

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \phi_\epsilon^{-1}(\phi_\epsilon(x) \cdot_G \phi_\epsilon(y)) = x \cdot_F y$$

uniformemente su  $\overline{U \times U}$  con tutte le derivate in  $x$  e in  $y$ .

**Osservazione 7.** Sia  $U$  come nella definizione. Allora ogni mappa  $\phi_\epsilon$  induce, per  $\epsilon < \epsilon_{U^2}$ , un prodotto  $\cdot_F^\epsilon$  in  $F|_U$ , dato da

$$\begin{aligned} \cdot_F^\epsilon : U \times U &\rightarrow U \\ (x, y) &\mapsto x \cdot_F^\epsilon y := \phi_\epsilon^{-1}(\phi_\epsilon(x) \cdot_G \phi_\epsilon(y)) \end{aligned}$$

<sup>41</sup>Si noti che per le proprietà (3.a) e (3.b) questo limite è ben definito per  $\epsilon < \epsilon_{U^2}$ : basta prendere  $W := \{x, y\}$ .

che, per costruzione, è isomorfo alla legge di gruppo  $\cdot_G$  naturalmente presente in  $\phi_\epsilon(U)$ . La definizione vuole che la famiglia  $\{\phi_\epsilon\}_{\epsilon \in \mathbb{R}_{>0}}$  sia tale che la successione dei prodotti  $\{\cdot_F\}_{0 < \epsilon < \epsilon_U^2}$  converga uniformemente sul compatto  $\overline{U \times U}$  alla legge gruppale  $\cdot_F|_{\overline{U \times U}}$ ; si richiede lo stesso tipo di convergenza anche per la successione delle derivate in  $x$  e in  $y$  di questi prodotti, affinché il  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \cdot_F$  sia una funzione  $C^\infty$  in entrambe le variabili, proprio come lo è  $\cdot_F|_{\overline{U \times U}}$ .

In altri termini, si vuole che le mappe  $\{\phi_\epsilon\}_{\epsilon \in \mathbb{R}_{>0}}$  determinino, nel limite, una funzione  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \phi_\epsilon$  la cui restrizione ad  $U$  sia in grado di convertire il prodotto di  $F$  in quello di  $G$ ; infatti, (3.c) può essere equivalentemente riformulato come

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \phi_\epsilon(x) \cdot_G \phi_\epsilon(y) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \phi_\epsilon(x \cdot_F y) \quad \text{per } x, y \in U. \quad (3.1)$$

Se si pone  $y := x^{-1}$  in (3.1), otteniamo che<sup>42</sup>

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \phi_\epsilon(x) \cdot_G \phi_\epsilon(x^{-1}) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \phi_\epsilon(e_F) = e_G \quad \text{per } x \in U,$$

e, per l'unicità di  $e_G$ , segue

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \phi_\epsilon(x^{-1}) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} (\phi_\epsilon(x))^{-1} \quad \text{per } x \in U. \quad (3.2)$$

In definitiva, quindi, la definizione pretende che  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \phi_\epsilon$  sia in grado di identificare in  $U$  la struttura di gruppo (cioè sia la legge prodotto che la legge d'inversione) di  $F$  con quella di  $G$  (come affermato da (3.1) e (3.2)).

La contrazione di gruppi  $\{\phi_\epsilon\}_{\epsilon \in \mathbb{R}_{>0}}$  induce la *contrazione dell'algebra di Lie* di  $F$  sull'algebra di Lie di  $G$ , rappresentata dalla famiglia  $\{\varphi_\epsilon\}_{\epsilon \in \mathbb{R}_{>0}}$  dei differenziali  $\varphi_\epsilon := (d\phi_\epsilon)_{e_F} : \mathfrak{f} \rightarrow \mathfrak{g}$ , funzioni lineari invertibili per  $0 < \epsilon < \epsilon_U$  che soddisfano:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \varphi_\epsilon^{-1}[\varphi_\epsilon(X), \varphi_\epsilon(Y)]_{\mathfrak{g}} = [X, Y]_{\mathfrak{f}} \quad \forall X, Y \in \mathfrak{f}. \quad (3.3)$$

Spesso, le contrazioni di gruppi si possono costruire a partire da azioni di gruppi definite su varietà che si modificano, con continuità, rispetto ad un certo parametro. Adotteremo questa strategia per studiare, nella prossima sezione, la contrazione di  $SU(2)$  sul gruppo di Heisenberg  $\hat{H}$ , la quale permetterà di descrivere, successivamente, le rappresentazioni infinito-dimensionali irriducibili e unitarie di  $\hat{H}$  come un opportuno limite di rappresentazioni finito-dimensionali irriducibili e unitarie di  $SU(2)$ .

### 3.1 Contrazione di $SU(2)$ sul gruppo di Heisenberg

Abbiamo già accennato, nel capitolo 1, che il diffeomorfismo  $\mathcal{I} : \Omega \rightarrow SU(2)$ , tale che  $\mathcal{I}(\alpha, \beta) = \begin{pmatrix} \bar{\beta} & \alpha \\ -\bar{\alpha} & \beta \end{pmatrix}$  permette di identificare la struttura differenziabile soggiacente a  $SU(2)$  con la sfera unitaria  $\Omega \subset \mathbb{C}^2$  centrata nell'origine ( $\Omega \equiv \mathbb{S}^3 \subset \mathbb{R}^4$ ). Quindi, per rendere simili le strutture differenziabili sottostanti a  $\hat{H}$  e a  $SU(2)$ , dobbiamo modificare -per mezzo di trasformazioni  $C^\infty$ - la sfera  $\Omega$ , introducendo una famiglia di varietà dipendenti da un parametro  $\epsilon$  in grado di approssimare, nel limite in cui  $\epsilon$  tenda a 0, una varietà non più compatta diffeomorfa a  $\mathbb{C} \times \mathbb{R} \equiv \hat{H}$ .

Detta  $S_1$  la sfera unitaria in  $\mathbb{C}^2$  di centro  $(0, i)$ , si indichi con:

<sup>42</sup> $U$  è simmetrico, per cui  $x^{-1}$  appartiene ancora ad  $U$ .

- $\gamma$  il diffeomorfismo

$$\begin{aligned}\gamma: \Omega &\rightarrow S_1 \\ (\alpha, \beta) &\mapsto \gamma(\alpha, \beta) := (-i\alpha, -i\beta + i).\end{aligned}$$

- $S_\epsilon$  l'immagine di  $S_1$  tramite la dilatazione

$$\begin{aligned}D_\epsilon: \mathbb{C}^2 &\rightarrow \mathbb{C}^2 \\ (z_1, z_2) &\mapsto D_\epsilon(z_1, z_2) := \left( \frac{z_1}{\epsilon^{\frac{1}{2}}}, \frac{z_2}{\epsilon} \right).\end{aligned}$$

Si può allora riconoscere in  $\{S_\epsilon\}_\epsilon$  la famiglia di varietà ottenute a partire da  $\Omega$  per mezzo del diffeomorfismo  $\gamma_\epsilon := D_\epsilon \circ \gamma$ , ove<sup>43</sup>

$$\begin{aligned}\gamma_\epsilon: \Omega &\rightarrow S_\epsilon \\ (z_1, z_2) &\mapsto \gamma_\epsilon(z_1, z_2) = \left( -\frac{i}{\epsilon^{\frac{1}{2}}}z_1, \frac{i}{\epsilon}(1 - z_2) \right).\end{aligned}$$

Ora bisogna dotare ciascun  $S_\epsilon$  di una struttura di gruppo. Si può ricorrere all'azione di  $SU(2)$  su  $\Omega$  data da

$$\begin{aligned}A_\Omega: SU(2) \times \Omega &\rightarrow \Omega \\ (g, (z_1, z_2)) &\mapsto A_\Omega(g, (z_1, z_2)) := \left( g \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \right)^T.\end{aligned}$$

la quale, tramite  $\gamma_\epsilon$ , può essere estesa ad un'azione su  $S_\epsilon$ , ottenendo

$$\begin{aligned}A_{S_\epsilon}: SU(2) \times S_\epsilon &\rightarrow S_\epsilon \\ (g, (z_{1\epsilon}, z_{2\epsilon})) &\mapsto A_{S_\epsilon}(g, (z_{1\epsilon}, z_{2\epsilon})) := \gamma_\epsilon \left( A_\Omega(g, \gamma_\epsilon^{-1}(z_{1\epsilon}, z_{2\epsilon})) \right).\end{aligned}$$

E' facile verificare che  $A_{S_\epsilon}$  eredita da  $A_{S_\Omega}$  l'importante proprietà che la rende un'azione semplicemente transitiva, secondo cui: per ogni  $z, \tilde{z} \in S_\epsilon$  esiste un unico  $g_{z\tilde{z}} \in SU(2)$  tale che  $A_{S_\epsilon}(g_{z\tilde{z}}, z) = \tilde{z}$ . Ciò permette di definire su ciascun  $S_\epsilon$  una legge prodotto  $\cdot_{S_\epsilon}$  che munisce  $S_\epsilon$  di una struttura di gruppo isomorfa a quella di  $SU(2)$ :

$$\begin{aligned}\cdot_{S_\epsilon}: S_\epsilon \times S_\epsilon &\rightarrow S_\epsilon \\ ((z_1, z_2), (w_1, w_2)) &\mapsto (z_1, z_2) \cdot_{S_\epsilon} (w_1, w_2) := A_{S_\epsilon}(\mathcal{I} \circ \gamma_\epsilon^{-1}(z_1, z_2), (w_1, w_2)),\end{aligned}$$

cioè<sup>44</sup>

$$(z_1, z_2) \cdot_{S_\epsilon} (w_1, w_2) = (z_1 + w_1 + i\epsilon(z_1 w_2 - \bar{z}_2 w_1), z_2 + w_2 + i\bar{z}_1 w_1 + i\epsilon z_2 w_2). \quad (3.4)$$

Le varietà  $S_\epsilon$  sono state ottenute dilatando anisotropicamente la sfera  $S_1$ , per cui possono essere pensate come degli "ellissoidi" in  $\mathbb{C}^2$ , che condividono con

<sup>43</sup>Verrà utilizzata spesso la funzione inversa di  $\gamma_\epsilon$ , che riportiamo qui, per comodità:  $\gamma_\epsilon^{-1}: S_\epsilon \rightarrow \Omega$ , con  $\gamma_\epsilon^{-1}(z_1, z_2) = (i\sqrt{\epsilon}z_1, i\epsilon z_2 + 1)$ .

<sup>44</sup>Si sottolinea che la formula (3.4) vale per tutti gli  $\epsilon \in ]0, 1]$ , quindi anche per  $S_1$ .

$S_1$  lo stesso spazio tangente nell'origine. Intuitivamente, mandando  $\epsilon$  a 0, l'ellissoide  $S_\epsilon$  assume una forma sempre "più alta che larga", poiché, per  $\epsilon \rightarrow 0$ ,  $\epsilon^{-\frac{1}{2}}$  cresce meno rapidamente di quanto non faccia  $\epsilon^{-1}$ . Se vogliamo che le varietà  $S_\epsilon$  riescano ad approssimare, in qualche maniera, la varietà soggiacente a  $\hat{H}$ , conviene modificare anche quest'ultima; ovviamente, bisogna effettuare questa trasformazione preservando la struttura di gruppo di  $\hat{H}$ , proprio come faremo ora.

Consideriamo l'azione  $A_{\hat{H}}$  di  $\hat{H}$  su  $\mathbb{C}^2$  data da:

$$A_{\hat{H}}: \hat{H} \times \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$$

$$((\zeta, t), (z_1, z_2)) \mapsto A_{\hat{H}}((\zeta, t), (z_1, z_2)) := (z_1 + \zeta, t + \frac{i}{2}|\zeta|^2 + z_2 + i\bar{\zeta}z_1).$$

Poichè  $A_{\hat{H}}$  è semplicemente transitiva sulla varietà  $S_0 := \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 : \text{Im } z_2 = \frac{1}{2}|z_1|^2\}$ , si può identificare quest'ultima con  $\hat{H}$  per mezzo del diffeomorfismo

$$\gamma_0: \hat{H} \rightarrow S_0$$

$$(\zeta, t) \mapsto \gamma_0(\zeta, t) := A_{\hat{H}}((\zeta, t), (0, 0)) = (\zeta, t + \frac{i}{2}|\zeta|^2);$$

inoltre,  $\gamma_0$  permette di trasferire su  $S_0$  la struttura di gruppo di  $\hat{H}$ :

$$\cdot_{S_0}: S_0 \times S_0 \rightarrow S_0$$

$$((z_1, z_2), (w_1, w_2)) \mapsto (z_1, z_2) \cdot_{S_0} (w_1, w_2) := A_{\hat{H}}(\gamma_0^{-1}(z_1, z_2), (w_1, w_2)),$$

cioè

$$(z_1, z_2) \cdot_{S_0} (w_1, w_2) = (z_1 + w_1, z_2 + w_2 + i\bar{z}_1 w_1). \quad (3.5)$$

**Osservazione 8.** *Si vuole mettere in evidenza che, da (3.4) e (3.5), risulta*

$$(z_1, z_2) \cdot_{S_\epsilon} (w_1, w_2) \stackrel{*}{=} (z_1, z_2) \cdot_{S_0} (w_1, w_2) + (o(\epsilon), o(\epsilon)),$$

e le due leggi prodotto potrebbero essere identificate a meno di un errore dell'ordine di  $o(\epsilon)$ ; ovviamente, l'uguaglianza appena scritta non è corretta, perchè in (\*) si sottintende  $(z_1, z_2), (w_1, w_2) \in S_\epsilon$  e, quindi, non è ben definita l'operazione  $(z_1, z_2) \cdot_{S_0} (w_1, w_2)$ . Per rendere rigorosa l'equazione (\*), si veda il Lemma 1.

Ora siamo pronti per analizzare la dinamica che lega gli ellissoidi  $S_\epsilon$  alla varietà  $S_0$ . Si noti che quest'ultima deve essere pensata come se fosse un paraboloide in  $\mathbb{C}^2$ , avente vertice assoluto nell'origine, concavità verso l'alto e asse  $\text{Im } z_2$  come asse di simmetria.

**Lemma 1.** *Sia data una successione  $\{z_\epsilon\}_{\epsilon \in \mathbb{R}_{>0}}$  tale che:*

- $z_\epsilon \in S_\epsilon$  per ogni  $\epsilon > 0$ ,
- esista il limite  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} z_\epsilon =: z_0$  in  $\mathbb{C}^2$ .

Allora:

1.  $z_0 \in S_0$ ;

2. presa un'altra successione  $\{w_\epsilon\}_{\epsilon \in \mathbb{R}_{>0}}$  che soddisfa gli stessi requisiti di  $\{z_\epsilon\}_{\epsilon \in \mathbb{R}_{>0}}$ , si ha che

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} z_\epsilon \cdot_{S_\epsilon} w_\epsilon = z_0 \cdot_{S_0} w_0.$$

*Dimostrazione.* Se  $z_\epsilon = (z_{1\epsilon}, z_{2\epsilon}) \in S_\epsilon$ , allora  $\gamma_\epsilon^{-1}(z_{1\epsilon}, z_{2\epsilon}) \in \Omega$ , per cui l'equazione che definisce  $S_\epsilon$  è  $\epsilon|z_{1\epsilon}|^2 + |\epsilon z_{2\epsilon} - i|^2 = 1$ ; questa è equivalente a

$$\operatorname{Im} z_{2\epsilon} \stackrel{**}{=} \frac{1}{2}(|z_{1\epsilon}|^2 + \epsilon|z_{2\epsilon}|^2) \quad \forall z_\epsilon \in S_\epsilon.$$

L'esistenza di  $z_0$  in  $\mathbb{C}^2$  implica in particolare che  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} |z_{2\epsilon}| < \infty$ ; se esiste il limite  $z_0$ , allora questo deve necessariamente appartenere a  $S_0$ , come si vede prendendo il limite in (\*\*).

Per quanto riguarda 2), è sufficiente notare che prendendo il limite nell'equazione (3.4) si ottiene il prodotto scritto in (3.5).  $\square$

Stabilita una procedura che permette di costruire una successione convergente in  $\mathbb{C}^2$  in cui ogni elemento appartiene ad un  $S_\epsilon$  diverso, allora questa successione deve convergere necessariamente ad un elemento di  $S_0$ . Segue che la varietà immagine  $S_\epsilon = \gamma_\epsilon(\Omega)$  approssima la varietà  $S_0$  per  $\epsilon \rightarrow 0$ .

Il Lemma 1 ci consentirà di attribuire un evidente significato geometrico alla contrazione tra i due gruppi di Lie  $SU(2) \equiv S_1$  e  $\hat{H} \equiv S_0$ , che ora descriviamo.

Sia  $\phi$  la funzione definita da

$$\begin{aligned} \phi: S_0 &\rightarrow S_1 \setminus (0, 2i) \\ (z_1, z_2) &\mapsto \phi(z_1, z_2) := \left(2i \frac{z_1}{2i + z_2}, 2i \frac{z_2}{2i + z_2}\right). \end{aligned}$$

Allora, indicate con  $\phi_\epsilon$  ( $\epsilon \in \mathbb{R}$ ) le mappes<sup>45</sup>

$$\begin{aligned} \phi_\epsilon: S_0 &\rightarrow S_1 \setminus (0, 2i) \\ (z_1, z_2) &\mapsto \phi_\epsilon(z_1, z_2) := \phi \circ D_\epsilon^{-1}(z_1, z_2) = \left(2i \frac{\sqrt{\epsilon} z_1}{2i + \epsilon z_2}, 2i \frac{\epsilon z_2}{2i + \epsilon z_2}\right), \end{aligned} \quad (3.6)$$

si verificare immediatamente la seguente

**Proposizione 12.** *La famiglia  $\{\phi_\epsilon\}_{\epsilon \in [0,1]}$  è una contrazione di  $SU(2) \equiv S_1$  su  $\hat{H} \equiv S_0$ .*

La famiglia  $\{\phi_\epsilon\}_{\epsilon \in [0,1]}$  definisce un procedimento che permette di costruire la successione  $\{z_\epsilon\}_{\epsilon \in \mathbb{R}_{>0}}$  convergente ad un certo  $z_0 \in S_0$  (vedi Lemma 1); infatti, dato  $z_0 = (z_1, z_2) \in S_0$ , è sufficiente porre  $S_\epsilon \ni z_\epsilon := D_\epsilon \circ \phi_\epsilon(z_1, z_2)$ , per ottenere che  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} z_\epsilon = z_0$ , poiché vale<sup>46</sup>

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} D_\epsilon \circ \phi_\epsilon(z_1, z_2) = (z_1, z_2) \quad \forall (z_1, z_2) \in S_0. \quad (3.7)$$

<sup>45</sup>Si noti che  $D_\epsilon$  induce un diffeomorfismo di  $S_0$  in sè.

<sup>46</sup>L'equazione (3.7) afferma che, per  $\epsilon \rightarrow 0$ , la contrazione  $\{\phi_\epsilon\}_{\epsilon \in [0,1]}$  definisce una funzione limite che è l'inversa della dilatazione  $D_\epsilon$ ; si giustifica quindi il nome attribuito alla famiglia  $\{\phi_\epsilon\}_{\epsilon \in [0,1]}$ .



Quindi *qualsiasi* elemento di  $S_0$  può essere considerato il limite di elementi appartenenti ai vari  $S_\epsilon$ . Concludiamo, quindi, che la famiglia degli ellissoidi  $\{S_\epsilon\}_{\epsilon \in ]0,1]}$  realizza concretamente la deformazione continua di  $SU(2)$  in  $\hat{H}$ .

Ora vogliamo capire come utilizzare questa deformazione tra gruppi per passare da  $\mathfrak{su}(2)$  a  $\hat{\mathfrak{h}}$ , ove si è indicata<sup>47</sup> con  $\hat{\mathfrak{h}}$  l'algebra di Lie di  $\hat{H}$  introdotta nel capitolo precedente. Di preciso, ci aspettiamo che  $\mathfrak{s}_1 \equiv \mathfrak{su}(2)$  possa essere confusa - nel limite in cui gli ellissoidi  $S_\epsilon$  si adagiano su  $S_0$  - con  $\mathfrak{s}_0 = \hat{\mathfrak{h}}$ .

Lo spazio vettoriale  $\tilde{T} := \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 : \text{Im } z_2 = 0\}$  sottostante a  $\mathfrak{s}_\epsilon$  è lo stesso per  $\epsilon \in ]0,1]$ . Al variare di  $\epsilon$  in  $]0,1]$ , mutano, invece, le costanti di struttura definenti le parentesi di Lie su  $\tilde{T}$ . Ciò non deve stupire, perché, per deformare  $S_1$  in  $S_\epsilon$ , bisogna modificare la geometria e la legge prodotto di  $S_1$ , e ciò equivale a cambiare la forma dei campi vettoriali invarianti a sinistra definiti sulla varietà; l'algebra di Lie di un gruppo di Lie  $G$  è canonicamente identificabile con lo spazio vettoriale dei campi vettoriali invarianti a sinistra definiti su  $G$  munito della naturale parentesi di Lie data dal commutatore fra campi vettoriali<sup>48</sup>, per cui, in ultima analisi, ad un  $\epsilon$  diverso deve corrispondere necessariamente una diversa parentesi di Lie su  $\tilde{T}$ .

A priori possiamo già affermare che  $\mathfrak{s}_1$  deve essere isomorfa a  $\mathfrak{s}_\epsilon$  per ogni  $\epsilon \in ]0,1[$ , poiché vale

$$\mathfrak{s}_\epsilon = (dD_\epsilon)_{(0,0)}(\mathfrak{s}_1) = D_\epsilon(\mathfrak{s}_1) \quad \forall \epsilon \in ]0,1[ \quad (3.8)$$

e  $(dD_\epsilon)_{(0,0)}$ , in quanto differenziale sull'elemento neutro di un isomorfismo di gruppi di Lie, è un isomorfismo di algebre di Lie.

Scelta la base  $\{X, Y, Z\}$  di  $\tilde{T}$  data da  $X := (1, 0)$ ,  $Y := (i, 0)$  e  $Z := (0, 1)$ , possiamo riassumere la struttura di  $\mathfrak{s}_1$  esplicitando il valore delle seguenti parentesi di Lie:

$$[X, Y]_{\mathfrak{s}_1} = -2Z, \quad [Y, Z]_{\mathfrak{s}_1} = -2X, \quad [Z, X]_{\mathfrak{s}_1} = -2Y; \quad (3.9)$$

per ricavare (3.10) si è sfruttato il fatto che  $SU(2)$  e  $S_1$  sono diffeomorfi grazie all'isomorfismo di gruppi di Lie dato da  $J : SU(2) \rightarrow S_1$  tale che  $g \mapsto \gamma \circ \mathcal{I}^{-1}(g)$  per ogni  $g \in SU(2)$ ; il differenziale<sup>49</sup>  $j$  di  $J$  sul punto  $(0, 0)$  è allora un isomorfismo di algebre di Lie che permette di calcolare le parentesi di Lie in  $\mathfrak{s}_1$ , secondo

$$[A, B]_{\mathfrak{s}_1} = j([j^{-1}(A), j^{-1}(B)]_{\mathfrak{su}(2)}) \quad \forall A, B \in \mathfrak{s}_1.$$

Con una formula simile<sup>50</sup>, si possono calcolare le costanti di struttura di  $\mathfrak{s}_\epsilon$  per ogni  $\epsilon \in ]0,1[$ , ottenendo:

$$[X, Y]_{\mathfrak{s}_\epsilon} = -2Z, \quad [Y, Z]_{\mathfrak{s}_\epsilon} = -2\epsilon X, \quad [Z, X]_{\mathfrak{s}_\epsilon} = -2\epsilon Y. \quad (3.11)$$

<sup>47</sup>Nel seguito, adotteremo sempre questa convenzione, per cui, dato un gruppo di Lie ( $G$ ), ci si riferirà alla sua algebra di Lie con le lettere minuscole gotiche ( $\mathfrak{g}$ ).

<sup>48</sup>Si consulti [AT], capitolo 3.5.

<sup>49</sup>Si ha

$$j : \quad \mathfrak{su}(2) \rightarrow \mathfrak{s}_1 \\ \left( \begin{array}{cc} \bar{\beta} & \alpha \\ -\bar{\alpha} & \beta \end{array} \right) \mapsto j \left( \begin{array}{cc} \bar{\beta} & \alpha \\ -\bar{\alpha} & \beta \end{array} \right) := (dJ)_{(0,0)} \left( \begin{array}{cc} \bar{\beta} & \alpha \\ -\bar{\alpha} & \beta \end{array} \right) = (-i\alpha, i\beta). \quad (3.10)$$

<sup>50</sup>Il ragionamento è lo stesso, l'isomorfismo di algebre di Lie che si deve utilizzare è  $D_\epsilon$ , come già accennato in (3.9).

Grazie a (3.12) si nota immediatamente che, al decrescere di  $\epsilon$ , l'algebra  $\mathfrak{s}_\epsilon$  diventa sempre “meno anticommutativa”, fino a coincidere, nel limite in cui  $\epsilon \rightarrow 0$ , con l'algebra di Heisenberg, determinata dalle seguenti costanti di struttura (vedi equazione (2.7)):

$$[X, Y]_{\hat{h}} = -2Z, \quad [Y, Z]_{\hat{h}} = 0, \quad [Z, X]_{\hat{h}} = 0. \quad (3.12)$$

Ciò permette alla contrazione di gruppi di Lie  $\{\phi_\epsilon\}_{\epsilon \in ]0,1]}$  di indurre una contrazione delle rispettive algebre di Lie, come messo in evidenza dalla

**Proposizione 13.** *Si definisca  $\phi_\epsilon$ , per ogni  $\epsilon \in ]0,1]$ , come nella Proposizione (12). Si indichi, per ogni  $\epsilon \in ]0,1]$ , con  $\varphi_\epsilon : \mathfrak{s}_0 = \hat{\mathfrak{h}} \rightarrow \mathfrak{s}_1 \equiv \mathfrak{su}(2)$  il differenziale nell'elemento neutro  $(0,0) \in S_0$  della funzione  $\phi_\epsilon$ .*

*Allora, la famiglia  $\{\varphi_\epsilon\}_{\epsilon \in ]0,1]}$  è una contrazione di  $\mathfrak{su}(2) \equiv \mathfrak{s}_1$  in  $\hat{\mathfrak{h}}$ .*

*Dimostrazione.* Si noti che  $\varphi_\epsilon = (d\phi_\epsilon)_{(0,0)} = (d\phi)_{(0,0)} \circ D_\epsilon^{-1} = D_\epsilon^{-1}$  per ogni  $\epsilon$  in  $]0,1]$ , per cui  $\{\varphi_\epsilon\}_{\epsilon \in ]0,1]}$  è interamente costituita da isomorfismi di spazi vettoriali. Siano  $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$ . Da un lato, abbiamo che

$$[aX + bY + cZ, dX + eY + fZ]_{\hat{h}} = 2Z(bd - ae)$$

e dall'altro, risulta che

$$\begin{aligned} \varphi_\epsilon^{-1}([\varphi_\epsilon(aX + bY + cZ), \varphi_\epsilon(dX + eY + fZ)]_{\mathfrak{s}_1}) &= \\ &= 2Z(bd - ae) + 2\epsilon Y(af - cd) + 2\epsilon X(ce - bf). \end{aligned}$$

Per cui, (3.3) è soddisfatta.  $\square$

Si vuole sottolineare che la contrazione permette di ottenere -nel limite- un'algebra di Lie nilpotente ( $[\tilde{\mathfrak{h}}, \tilde{\mathfrak{h}}]_{\tilde{\mathfrak{h}}} = \text{Span}_{\mathbb{R}}(Z) \subset \tilde{\mathfrak{h}}$ ) a partire da  $\mathfrak{su}(2)$  che, essendo un'algebra semplice, è “massimamente anticommutativa” ( $[\mathfrak{su}(2), \mathfrak{su}(2)] = \mathfrak{su}(2)$ ). Ciò potrebbe essere sfruttato per trasferire stime e risultati dalla più maneggevole  $\hat{\mathfrak{h}}$ , alla più complicata  $\mathfrak{su}(2)$  (e viceversa, nel caso).

### 3.2 Dalle rappresentazioni di $SU(2)$ a quelle del gruppo di Heisenberg

Abbiamo appurato che, tramite la contrazione, è possibile passare da  $SU(2)$  a  $\hat{H}$ ; dunque, è lecito aspettarsi che si possa definire un certo limite di rappresentazioni che permetta di realizzare il gruppo di Heisenberg come limite di realizzazioni di  $SU(2)$ . Alla luce dell'approccio seguito nella precedente sezione, conviene riformulare le rappresentazioni di  $SU(2)$  (e di  $\hat{H}$ ) studiate nel Capitolo 1 (e 2) in termini di equivalenti rappresentazioni di  $S_\epsilon$  (e di  $S_0$ ).

Tornerà comodo disporre dell'analogo della funzione  $\Gamma^n$  (introdotta nel capitolo 1) per  $S_\epsilon$  e per  $S_0$ ; ricordiamo che  $\Gamma^n$  è l'operatore di intralacciamento tra le rappresentazioni  $\Pi^n$  e  $\pi^n$ , che -in sostanza- permette di passare dallo spazio  $\tilde{\mathcal{P}}^n$  dei polinomi complessi  $P$  in una variabile allo spazio  $\mathcal{P}^n$  dei polinomi complessi  $f$  in due variabili.

Definiamo allora le mappe  $\Gamma_\epsilon^n$  e  $\Gamma^\lambda$ .

$$\Gamma_\epsilon^n : \tilde{\mathcal{P}}^n \rightarrow \mathcal{P}_\epsilon^n \quad (3.13)$$

$$P \mapsto \Gamma_\epsilon^n P := (\Gamma P) \circ \gamma_\epsilon^{-1} \text{ con } (\Gamma_\epsilon^n P)(z_1, z_2) = (1 + i\epsilon z_2)^n P\left(\frac{-\epsilon^{\frac{1}{2}} z_1}{1 + i\epsilon z_2}\right)$$

è in grado di mappare i polinomi complessi di grado al massimo  $n$  in una sola variabile complessa nello spazio  $\mathcal{P}_\epsilon^n$  dei polinomi complessi omogenei di grado  $n$  in due variabili complesse<sup>51</sup>  $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$ ; penseremo  $\mathcal{P}_\epsilon^n$  dotato del prodotto euclideo  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{P}_\epsilon^n}$  che rende  $\Gamma_\epsilon^n$  unitario, per cui, dati  $P_\epsilon, Q_\epsilon \in \mathcal{P}_\epsilon^n$ , avremo  $\langle P_\epsilon, Q_\epsilon \rangle_{\mathcal{P}_\epsilon^n} := \langle (\Gamma_\epsilon^n)^{-1} P_\epsilon, (\Gamma_\epsilon^n)^{-1} Q_\epsilon \rangle_{\pi^n}$ .

$$\begin{aligned} \Gamma_\lambda : \mathcal{F}_\lambda &\rightarrow \mathcal{F}_\lambda^0 \\ \mathcal{F} &\mapsto \Gamma_\lambda(\mathcal{F}) \quad \text{con} \quad \Gamma_\lambda(\mathcal{F})(z_1, z_2) := \mathcal{F}(-z_1)e^{i\lambda z_2} \end{aligned}$$

è la biiezione tra le funzioni  $\mathcal{F} \in \mathcal{F}_\lambda$  (che dipendono da una sola variabile complessa) e lo spazio immagine  $\Gamma_\lambda(\mathcal{F}_\lambda) = \mathcal{F}_\lambda^0$ , costituito dalle funzioni  $\mathcal{F}^0$  dipendenti da due variabili complesse; penseremo  $\mathcal{F}_\lambda^0$  come lo spazio di Hilbert munito della norma che fa di  $\Gamma_\lambda$  un operatore unitario, ovvero  $\|\mathcal{F}^0\|_{\mathcal{F}_\lambda^0} := \|\Gamma_\lambda^{-1}(\mathcal{F}^0)\|_{\mathcal{F}_\lambda}$  per ogni  $\mathcal{F}^0 \in \mathcal{F}_\lambda^0$ .

Tramite questi operatori, possiamo definire:

- la rappresentazione  $\Pi_\epsilon^n$  di  $S_\epsilon$  in  $\mathcal{P}_\epsilon^n$ , equivalente a  $\pi^n$  per ogni  $n \geq 0$ ; di preciso

$$\begin{aligned} \Pi_\epsilon^n : S_\epsilon \times \mathcal{P}_\epsilon^n &\rightarrow \mathcal{P}_\epsilon^n \\ (z_\epsilon, f_\epsilon) &\mapsto \Pi_\epsilon^n(z_\epsilon)f_\epsilon := \Gamma_\epsilon^n \circ \pi^n(\mathcal{I} \circ \gamma_\epsilon^{-1}(z_\epsilon))(\Gamma_\epsilon^n)^{-1} f_\epsilon \end{aligned} \quad (3.14)$$

e, dato che esiste un unico  $P \in \tilde{\mathcal{P}}^n$  tale che  $f_\epsilon = \Gamma_\epsilon^n P$ , abbiamo che

$$\begin{aligned} (\Pi_\epsilon^n(z_\epsilon)f_\epsilon)(z_1, z_2) &= \left( \Gamma_\epsilon^n \circ \pi^n(\mathcal{I} \circ \gamma_\epsilon^{-1}(z_\epsilon))P \right)(z_1, z_2) \\ &= \left( \Gamma_\epsilon^n \circ \pi^n(\mathcal{I} \circ \gamma_\epsilon^{-1}(z_\epsilon))P \right) \circ \gamma_\epsilon^{-1}(z_1, z_2). \end{aligned} \quad (3.15)$$

- la rappresentazione  $\beta_0^\lambda$  di  $S_0$  in  $\mathcal{F}_\lambda^0$ , equivalente a  $\beta^\lambda$  ( $\lambda > 0$ ), cioè

$$\begin{aligned} \beta_0^\lambda : S_0 \times \mathcal{F}_\lambda^0 &\rightarrow \mathcal{F}_\lambda^0 \\ (z_0, \mathcal{F}_0) &\mapsto \beta_0^\lambda(z_0)\mathcal{F}_0 := \Gamma_\lambda \circ \beta^\lambda(\gamma_0^{-1}(z_0)) \circ (\Gamma_\lambda^{-1})\mathcal{F}_0 \end{aligned} \quad (3.16)$$

e, poiché c'è un' unica  $\mathcal{F} \in \mathcal{F}^\lambda$  tale che  $\mathcal{F}_0 = \Gamma_\lambda \mathcal{F}$ , otteniamo

$$\begin{aligned} (\beta_0^\lambda(z_0)\mathcal{F}_0)(z_1, z_2) &= \left( \Gamma_\lambda \circ \beta^\lambda(\gamma_0^{-1}(z_0))\mathcal{F} \right)(z_1, z_2) \\ &= e^{i\lambda z_2} \left( \beta^\lambda(\gamma_0^{-1}(z_0))\mathcal{F} \right)(-z_1). \end{aligned} \quad (3.17)$$

<sup>51</sup>Per essere consistenti, dato che  $\gamma_\epsilon^{-1} : S_\epsilon \rightarrow \Omega$ , bisognerebbe considerare  $\mathcal{P}_\epsilon^n$  come lo spazio costituito dai polinomi complessi omogenei di grado  $n$  in due variabili complesse  $(z_1, z_2) \in S_\epsilon$ ; per non appesantire troppo la notazione, qui e nel seguito si intenderà con  $\gamma_\epsilon$  il diffeomorfismo di *tutto*  $\mathbb{C}^2$  in sé, ovvero  $\gamma_\epsilon : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$  con  $\gamma_\epsilon(z_1, z_2) = (-i\epsilon^{-\frac{1}{2}} z_1, \epsilon^{-1}(-iz_2 + i))$ .

Come visto nel Capitolo 2, per  $\lambda < 0$  vale

$$\beta^\lambda(z, t) = \beta^{|\lambda|}(-\bar{z}, -t) \text{ per ogni } (z, t) \in \hat{H};$$

analogamente, per  $\lambda < 0$  si può costruire la rappresentazione  $\beta_0^\lambda$  di  $S_0$  su  $\Gamma_\lambda(\mathcal{F}_\lambda^a)$  ponendo

$$\beta_0^\lambda(z_1, z_2) := \beta_0^{|\lambda|}(-\bar{z}_1, -\bar{z}_2) \text{ per ogni } (z_1, z_2) \in S_0.$$

**Osservazione 9.** Poichè gli operatori di intralacciamento  $\Gamma_\epsilon^n$  e  $\Gamma_\lambda$  sono (per costruzione) unitari, le rappresentazioni  $\Pi_\epsilon^n$  e  $\beta_0^\lambda$  sono unitariamente equivalenti alle rappresentazioni  $\pi^n$  e  $\beta^\lambda$ .

Vogliamo dimostrare che si può costruire una successione di rappresentazioni  $\{\Pi_\epsilon^n\}_{n \in \mathbb{N}}$  convergente (in un qualche senso che sarà chiaro poi) alla rappresentazione  $\beta_0^\lambda$  per un certo  $\lambda > 0$ . Ciò che riusciremo a verificare è che ogni funzione di  $\mathcal{F}_\lambda^0$  può essere considerata come il limite di un'appropriata famiglia di polinomi estratti dagli spazi  $\mathcal{P}_\epsilon^n$  (proposizione 14), in modo tale che pure le corrispettive azioni  $\Pi_\epsilon^n$  convergano ad una  $\beta_0^\lambda$  (Teorema 2).

Innanzitutto, bisogna scegliere la funzione  $n : ]0, 1] \rightarrow \mathbb{N}$  che permette di regolare, in base al valore assunto dal parametro  $\epsilon$ , la dimensione  $n(\epsilon)$  di ciascuno spazio  $\mathcal{P}_\epsilon^n$  in cui si deve selezionare un polinomio; una condizione necessaria che deve soddisfare  $n(\epsilon)$  è

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon n(\epsilon) = \lambda \quad \text{per un certo } \lambda > 0. \quad (3.18)$$

Infatti, preso per  $P \in \tilde{\mathcal{P}}^n$  il polinomio costantemente uguale ad 1, abbiamo che

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \Gamma_\epsilon^{n(\epsilon)} P = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} (1 + i\epsilon z_2)^{n(\epsilon)}$$

e, affinché<sup>52</sup> questo limite stia in  $\mathcal{F}_\lambda^0$  (almeno intendendolo come limite puntuale), dobbiamo assumere (3.19); in tal caso,  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \Gamma_\epsilon^{n(\epsilon)} P = e^{i\lambda z_2}$  addirittura uniformemente in ogni compatto di  $\mathbb{C}^2$ .

**Proposizione 14.** Per  $\lambda > 0$  sia  $n(\epsilon)$  la funzione definita sopra che soddisfa (10). Data una funzione analitica  $\mathcal{F} \in \mathcal{F}_\lambda$ , si indichi con  $F_n$  il polinomio di ordine  $n$  del suo sviluppo di McLaurin; sia infine

$$P_\epsilon := \Gamma_\epsilon^{n(\epsilon)} F_{n(\epsilon)}(\epsilon^{-\frac{1}{2}} \cdot). \quad (3.19)$$

Allora,

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} P_\epsilon = \Gamma_\lambda \mathcal{F}$$

uniformemente su ogni compatto di  $\mathbb{C}^2$ .

<sup>52</sup>Non è ancora chiaro il motivo per cui si deve aspettare a priori che questo limite stia in  $\mathcal{F}_\lambda^0$ ; lo diventerà con la Proposizione 14.

*Dimostrazione.* Da (5) abbiamo

$$P_\epsilon(z_1, z_2) = (1 + i\epsilon z_2)^{n(\epsilon)} F_{n(\epsilon)}\left(\frac{-z_1}{1 + i\epsilon z_2}\right).$$

Fissiamo un compatto  $K \subset \mathbb{C}^2$  e sia  $\epsilon$  piccolo abbastanza da poter considerare  $1 + i\epsilon z_2 \neq 0$  per  $(z_1, z_2) \in K$ . Allora

$$\begin{aligned} |P_\epsilon(z_1, z_2) - (\Gamma_\lambda \mathcal{F})(z_1, z_2)| &= |(1 + i\epsilon z_2)^{n(\epsilon)} F_{n(\epsilon)}\left(\frac{-z_1}{1 + i\epsilon z_2}\right) - \mathcal{F}(-z_1)e^{i\lambda z_2}| \\ &\leq \left| (1 + i\epsilon z_2)^{n(\epsilon)} \left( F_{n(\epsilon)}\left(\frac{-z_1}{1 + i\epsilon z_2}\right) - F_{n(\epsilon)}(-z_1) \right) \right| + \\ &+ \left| (1 + i\epsilon z_2)^{n(\epsilon)} (F_{n(\epsilon)}(-z_1) - \mathcal{F}(-z_1)) \right| + \left| \left( (1 + i\epsilon z_2)^{n(\epsilon)} - e^{i\lambda z_2} \right) \mathcal{F}(-z_1) \right| \end{aligned}$$

e, nel limite in cui  $\epsilon \rightarrow 0$ :

- il primo addendo si annulla, poiché, per il teorema del valor medio e per il teorema di Weierstrass<sup>53</sup> vale

$$\left| F_{n(\epsilon)}\left(\frac{-z_1}{1 + i\epsilon z_2}\right) - F_{n(\epsilon)}(-z_1) \right| \leq C \left| \frac{-z_1}{1 + i\epsilon z_2} + z_1 \right|,$$

per una certa costante  $C \in \mathbb{R}$  che non dipende da  $\epsilon$ .

- il secondo pezzo si annulla perchè  $\mathcal{F}$  è olomorfa e, dunque, lo sviluppo di Taylor converge uniformemente su ogni compatto;
- il terzo termine si annulla per ipotesi (abbiamo già detto che la condizione (3.19) può essere intesa come limite uniforme sui compatti).

□

Segue l'importante

**Teorema 3.** *Siano  $\lambda$ ,  $n(\epsilon)$ ,  $\mathcal{F}$  e  $P_\epsilon$  come nelle ipotesi della proposizione precedente. Sia poi  $\{z_\epsilon\}_{\epsilon \in ]0,1]}$  con  $z_\epsilon \in S_\epsilon$  per ogni  $\epsilon \in ]0,1]$  e tale che  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} z_\epsilon =: z_0 \in S_0$ .*

Allora,

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \Pi_\epsilon^{n(\epsilon)}(z_\epsilon) P_\epsilon = \beta_0^\lambda(z_0) (\Gamma_\lambda \mathcal{F}) \quad (3.20)$$

uniformemente su ogni compatto di  $\mathbb{C}^2$ .

*Dimostrazione.* Omessa, poiché molto simile a quella della proposizione precedente (non sopraggiunge alcuna nuova difficoltà concettuale). □

Questo è il primo risultato che abbiamo ottenuto e che ci permette di capire la relazione esistente tra le rappresentazioni di  $SU(2)$  e quelle del gruppo di Heisenberg.

Ora vogliamo investigare la validità di (3.21) da un punto di vista più strettamente connesso con la struttura hilbertiana degli spazi su cui agiscono le

<sup>53</sup>Le derivate di  $F_{n(\epsilon)}$  sono banalmente continue e, se  $(z_1, z_2)$  variano in  $K$ , allora il punto  $-z_1/(1 + i\epsilon z_2)$ , quando  $\epsilon$  è vicino a 0, varia su un compatto.

rappresentazioni coinvolte.

Dati  $F, G \in \tilde{\mathcal{P}}^{n(\epsilon)}$ , consideriamo

$$P_\epsilon := \Gamma_\epsilon^{n(\epsilon)} F_{n(\epsilon)}(\epsilon^{-\frac{1}{2}} \cdot) \quad Q_\epsilon := \Gamma_\epsilon^{n(\epsilon)} G_{n(\epsilon)}(\epsilon^{-\frac{1}{2}} \cdot).$$

**Teorema 4.** *Per ogni  $\epsilon \in ]0, 1]$  sia  $n(\epsilon)$  in grado di soddisfare (3.19). Sia  $\{z_\epsilon\}_{\epsilon \in ]0, 1]}$  una successione di elementi di  $S_\epsilon$  tale che  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} z_\epsilon = z_0 \in S_0$ , con  $z_0 = \gamma_0(\zeta, t) = (\zeta, t + \frac{i}{2}|\zeta|^2)$ ,  $(\zeta, t) \in \hat{H}$ .*

*Allora, per ogni coppia di polinomi  $F, G \in \tilde{\mathcal{P}}^{n(\epsilon)}$  vale*

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \langle \Pi_\epsilon^{n(\epsilon)}(z_\epsilon) P_\epsilon, Q_\epsilon \rangle_{\mathcal{P}_\epsilon^{n(\epsilon)}} = \langle \beta^\lambda(\zeta, t) F, G \rangle_{\mathcal{F}_\lambda}. \quad (3.21)$$

*Dimostrazione.* Per linearità, possiamo direttamente assumere  $F(w) = w^k$  e  $G(w) = w^j$ , con  $k, j$  naturali. Indicheremo con  $(\alpha(\epsilon), \beta(\epsilon))$  l'elemento  $(i\epsilon^{\frac{1}{2}}z_{\epsilon 1}, 1 + i\epsilon z_{\epsilon 2}) = \gamma_\epsilon^{-1}(z_\epsilon) \in \Omega$ . Da (3.16) abbiamo che

$$\Pi_\epsilon^{n(\epsilon)}(z_\epsilon) P_\epsilon = \Gamma_\epsilon^{n(\epsilon)} \circ \pi^{n(\epsilon)}(\mathcal{I} \circ \gamma_\epsilon^{-1}(z_\epsilon)) F_{n(\epsilon)}(\epsilon^{-\frac{1}{2}} \cdot),$$

per cui

$$\begin{aligned} & \langle \Pi_\epsilon^{n(\epsilon)}(z_\epsilon) P_\epsilon, Q_\epsilon \rangle_{\mathcal{P}_\epsilon^{n(\epsilon)}} = \langle (\Gamma_\epsilon^{n(\epsilon)})^{-1} \Pi_\epsilon^{n(\epsilon)}(z_\epsilon) P_\epsilon, (\Gamma_\epsilon^{n(\epsilon)})^{-1} Q_\epsilon \rangle_{\pi^{n(\epsilon)}} = \\ & = \langle (\Gamma_\epsilon^{n(\epsilon)})^{-1} \Pi_\epsilon^{n(\epsilon)}(z_\epsilon) F_{n(\epsilon)}(\epsilon^{-\frac{1}{2}} \cdot), G_{n(\epsilon)}(\epsilon^{-\frac{1}{2}} \cdot) \rangle_{\pi^{n(\epsilon)}} \\ & = \langle \pi^{n(\epsilon)}(\mathcal{I} \circ \gamma_\epsilon^{-1}(z_\epsilon)) F_{n(\epsilon)}(\epsilon^{-\frac{1}{2}} \cdot), G_{n(\epsilon)}(\epsilon^{-\frac{1}{2}} \cdot) \rangle_{\pi^{n(\epsilon)}} \quad (3.22) \\ & = \frac{n(\epsilon) + 1}{\pi} \int_{\mathbb{C}} \pi^{n(\epsilon)}(\mathcal{I}(\gamma_\epsilon^{-1}(z_\epsilon))) F_{n(\epsilon)}(\epsilon^{-\frac{1}{2}} w) \overline{G_{n(\epsilon)}(\epsilon^{-\frac{1}{2}} w)} (1 + |w|^2)^{-n(\epsilon)-2} dw \end{aligned}$$

e, per  $\epsilon$  piccolo abbastanza da poter considerare  $F_{n(\epsilon)} = F$  e  $G_{n(\epsilon)} = G$ ,

$$\begin{aligned} & = \frac{n(\epsilon) + 1}{\pi} \int_{\mathbb{C}} (-i\overline{\alpha(\epsilon)}w + \overline{\beta(\epsilon)})^{n(\epsilon)-k} (\epsilon^{-\frac{1}{2}}(\beta(\epsilon)w - i\epsilon^{-\frac{1}{2}}\alpha(\epsilon)))^k \times \\ & \quad \times (\epsilon^{-\frac{1}{2}}\bar{w})^j (1 + |w|^2)^{-n(\epsilon)-2} dw \end{aligned}$$

ed effettuando il cambio di variabili  $u := \epsilon^{-\frac{1}{2}}w$  ( $dw = \epsilon du$ )

$$\begin{aligned} & = \frac{\epsilon(n(\epsilon) + 1)}{\pi} \int_{\mathbb{C}} (-i\overline{\alpha(\epsilon)}\epsilon^{\frac{1}{2}}w + \overline{\beta(\epsilon)})^{n(\epsilon)-k} (\beta(\epsilon)w - i\epsilon^{-\frac{1}{2}}\alpha(\epsilon))^k \times \\ & \quad \times \bar{w}^j (1 + \epsilon|w|^2)^{-n(\epsilon)-2} dw \end{aligned}$$

introducendo le formule per  $\alpha(\epsilon)$  e per  $\beta(\epsilon)$ , arriviamo a

$$\begin{aligned} & = \frac{\epsilon(n(\epsilon) + 1)}{\pi} \int_{\mathbb{C}} (1 - \epsilon(\overline{z_{1\epsilon}}w + i\overline{z_{2\epsilon}}))^{n(\epsilon)-k} ((1 + i\epsilon z_{2\epsilon})w + z_{1\epsilon})^k \times \\ & \quad \times \bar{w}^j (1 + \epsilon|w|^2)^{-n(\epsilon)-2} dw. \quad (3.23) \end{aligned}$$

Nel limite in cui  $\epsilon \rightarrow 0$ , risulta che

$$\epsilon(n(\epsilon) + 1) \rightarrow \frac{\lambda}{\pi},$$

mentre l'integrando in (3.24) tende puntualmente alla funzione

$$e^{-\lambda(it + \frac{1}{2}|\zeta|^2 + \bar{\zeta}w)}(w + \zeta)^k \bar{w}^j e^{-\lambda|w|^2},$$

quindi, per concludere, è sufficiente giustificare il passaggio del limite sotto al segno di integrale; con un po' di lavoro, si mostra essere lecito applicare il teorema della convergenza dominata (si consulti [FR]).

□

Possiamo riformulare questo teorema, in modo da mettere più in evidenza la relazione tra le rappresentazioni del gruppo di Heisenberg e quelle di  $SU(2)$ :

**Teorema 5.** *Per ogni  $\epsilon \in ]0, 1]$  sia  $n(\epsilon)$  in grado di soddisfare (3.19). Sia  $\{g_\epsilon\}_{\epsilon \in ]0, 1]}$  una successione di elementi di  $SU(2)$  tale che -detti  $(\alpha(\epsilon), \beta(\epsilon)) := \mathcal{I}^{-1}(g_\epsilon)$ - si verifica che*

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \gamma_\epsilon(\alpha(\epsilon), \beta(\epsilon)) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} (-i\epsilon^{-\frac{1}{2}}\alpha(\epsilon), -i\epsilon^{-1}(\beta(\epsilon) - 1)) = z_0 \in S_0,$$

con  $z_0 = \gamma_0(\zeta, t) = (\zeta, t + \frac{1}{2}i|\zeta|^2)$ ,  $(\zeta, t) \in \hat{H}$ .

Allora, per ogni coppia di polinomi  $P, Q \in \tilde{\mathcal{P}}^{n(\epsilon)}$  vale

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \langle \pi^{n(\epsilon)}(g_\epsilon)P(\epsilon^{-\frac{1}{2}}\cdot), Q(\epsilon^{-\frac{1}{2}}\cdot) \rangle_{\pi^{n(\epsilon)}} = \langle \beta^\lambda(\zeta, t)F, G \rangle_{\mathcal{F}_\lambda} \quad (3.24)$$

*Dimostrazione.* La dimostrazione è identica a quella del Teorema 3; si parta dalla formula (3.23) con le necessarie sostituzioni  $(g_\epsilon$  al posto di  $\mathcal{I} \circ \gamma_\epsilon^{-1}(z_\epsilon)$ ,  $P, Q$  anzichè  $F_{n(\epsilon)}, G_{n(\epsilon)}$ ). □

Giunti a questo punto, possiamo precisare il senso per mezzo del quale bisogna intendere la convergenza tra le rappresentazioni. Infatti, il prossimo corollario mostrerà che gli elementi di matrice  $\sigma_{jk}^\lambda$  delle rappresentazioni irriducibili (unitarie, infinito-dimensionali) di  $\hat{H}$  possono essere ottenuti come il limite degli elementi di matrice  $s_{jk}^n$  delle rappresentazioni irriducibili (unitarie, finito-dimensionali) di  $SU(2)$ ; insomma, quando si parla di limite di una successione di rappresentazioni, si sottintende la convergenza della successione data dai corrispondenti elementi di matrice.

Sappiamo già che  $\mathcal{F}$  ammette una base ortonormale  $\{u_j^\lambda\}_{j \in \mathbb{N}}$  formata dai monomi  $u_j^\lambda(w) := \sqrt{\frac{\lambda^j}{j!}} w^j$ ; anche  $\tilde{\mathcal{P}}^n$  è munito di una base  $\{e_j^n\}_{j \in \{0, 1, 2, \dots, n\}}$  ortonormale<sup>54</sup> costituita da monomi, del tipo  $e_j^n = \sqrt{\binom{n}{j}} w^j$ .

Rispetto a queste basi, gli elementi di matrice su  $SU(2)$  sono

$$s_{jk}^n(g) := \langle \pi^n(g)e_k^n, e_j^n \rangle_{\pi^n} \quad \forall j, k \in \{0, 1, \dots, n\}, \quad \forall g \in SU(2),$$

mentre quelli su  $\hat{H}$  sono

$$\sigma_{jk}^\lambda(\zeta, t) := \langle \beta^\lambda(\zeta, t)u_k^\lambda, u_j^\lambda \rangle_{\mathcal{F}_\lambda} \quad \forall j, k \in \{0, 1, \dots\}, \quad \forall (\zeta, t) \in \hat{H}.$$

<sup>54</sup>Rispetto al prodotto euclideo  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\pi^n}$ .

**Corollario 4.** Siano  $n(\epsilon)$ ,  $(\zeta, t)$  e  $\{g_\epsilon\}_{\epsilon \in ]0,1]}$  come nel Teorema 4.

Allora

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} s_{jk}^{n(\epsilon)}(g_\epsilon) = \sigma_{jk}^\lambda(\zeta, t) \quad (3.25)$$

per ogni coppia di indici  $j, k$  che renda l'uguaglianza ben posta.

*Dimostrazione.* Ponendo  $P(w) := w^k$  e  $Q(w) := w^j$ , abbiamo:

$$\begin{aligned} s_{jk}^{n(\epsilon)}(g_\epsilon) &= \sqrt{\binom{n(\epsilon)}{k}} \sqrt{\binom{n(\epsilon)}{j}} \langle \pi^{n(\epsilon)}(g_\epsilon) P, Q \rangle_{\pi^n} \\ &= \epsilon^{\frac{j+k}{2}} \sqrt{\binom{n(\epsilon)}{k}} \sqrt{\binom{n(\epsilon)}{j}} \langle \pi^{n(\epsilon)}(g_\epsilon) P(\epsilon^{-\frac{1}{2}}), Q(\epsilon^{-\frac{1}{2}}) \rangle_{\pi^n} \end{aligned}$$

Allora, è sufficiente ricorrere a (16) e all'identità

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon^a \binom{n(\epsilon)}{a} = \frac{\lambda^a}{a!} \quad a \in \mathbb{N},$$

valida sia per  $a = j$  che per  $a = k$ . □

Per concludere, rimane da studiare la relazione che intercorre tra le rappresentazioni  $\beta^\lambda$  e quelle di  $SU(2)$  nel caso  $\lambda < 0$ .

Come abbiamo già osservato, per  $\lambda < 0$  si può costruire la rappresentazione  $\beta^\lambda$  componendo  $\beta^{|\lambda|}$  con l'automorfismo  $\eta$  di  $\hat{H}$  dato da  $\eta : (z, t) \mapsto (-\bar{z}, -t)$ :

$$\beta^\lambda(z, t) = \beta^{|\lambda|}(\eta(\zeta, t)) \quad \forall (z, t) \in \hat{H}.$$

L'automorfismo  $\eta$  trova nella funzione  $\eta_0$  il suo analogo in  $S_0$ :

$$\eta_0(z_1, z_2) = (-\bar{z}_1, -\bar{z}_2) \quad \forall (z_1, z_2) \in S_0;$$

infatti,  $\eta_0$  può essere utilizzata per costruire la rappresentazione  $\beta_0^\lambda$  di  $S_0$  a partire da  $\beta_0^{|\lambda|}$

$$\beta_0^\lambda(z_1, z_2) := \beta_0^{|\lambda|}(\eta_0(z_1, z_2)) \quad \text{per ogni } (z_1, z_2) \in S_0,$$

in modo tale che  $\beta_0^\lambda$  sia equivalente a  $\beta^\lambda$  anche per  $\lambda < 0$ .

È fondamentale notare che  $\eta_0$  non è un automorfismo per  $S_0$  mentre lo è invece per  $S_\epsilon$  con  $\epsilon \in ]0, 1]$ .

Essendo una biiezione di  $S_\epsilon$  in sè,  $\eta_0$  induce a sua volta la trasformazione  $\nu$  di  $SU(2)$ , tale che  $\nu(\mathcal{I}(\alpha, \beta)) := \mathcal{I}(\gamma_\epsilon^{-1} \circ \eta_0 \circ \gamma_\epsilon(\alpha, \beta)) = \overline{\mathcal{I}(\alpha, \beta)} = \mathcal{I}(\bar{\alpha}, \bar{\beta})$ ; la funzione  $\nu$  è un automorfismo di  $SU(2)$ , poiché vale

$$\mathcal{I}(\bar{\alpha}, \bar{\beta}) = \begin{pmatrix} \beta & \bar{\alpha} \\ -\alpha & \bar{\beta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\beta} & \alpha \\ -\bar{\alpha} & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

ovvero

$$\nu(\mathcal{I}(\alpha, \beta)) = \mathcal{I}(\bar{\alpha}, \bar{\beta}) = \mathcal{I}(i, 0) \mathcal{I}(\alpha, \beta) \mathcal{I}(i, 0). \quad (3.26)$$

Da ciò segue subito che la rappresentazione  $\pi^{-n}$  di  $SU(2)$  su  $\tilde{\mathcal{P}}^n$  definita da

$$\begin{aligned} \pi^{-n} : \quad SU(2) \times \tilde{\mathcal{P}}^n &\rightarrow \tilde{\mathcal{P}}^n \\ (\mathcal{I}(\alpha, \beta), P) &\mapsto \pi^{-n}(\mathcal{I}(\alpha, \beta))P := \pi^n(\nu(\mathcal{I}(\alpha, \beta)))P \end{aligned}$$



è (unitariamente) equivalente a  $\pi^n$ ; infatti, usando (3.27) e la proprietà di omomorfismo di  $\pi^n$ , vale

$$\pi^{-n}(g) = \chi \circ \pi^n(g) \circ \chi^{-1},$$

ove si è indicato con  $\chi$  l'operatore di intralacciamento

$$\begin{aligned} \chi: \tilde{\mathcal{P}}^n &\rightarrow \tilde{\mathcal{P}}^n \\ P &\mapsto \chi P := \pi^n(\mathcal{I}(i, 0))P \quad \text{cioè} \quad \chi P(w) := w^n P(w^{-1}). \end{aligned} \quad (3.27)$$

Si noti che  $\chi^{-1} = \chi$  e che, per costruzione,  $\chi$  è un operatore unitario in  $\tilde{\mathcal{P}}$  rispetto al prodotto scalare  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\pi^n}$ .

Ora siamo in grado di dimostrare il

**Corollario 5.** *Siano  $(\zeta, t)$  e  $\{g_\epsilon\}_{\epsilon \in ]0,1]}$  come nel Teorema 4; sia  $\lambda < 0$  e, per  $\epsilon \in ]0, 1]$ , sia  $n(\epsilon)$  tale che  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon n(\epsilon) = |\lambda|$ .*

Allora

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} s_{n(\epsilon)-j, n(\epsilon)-k}^{n(\epsilon)}(g_\epsilon) = \sigma_{jk}^\lambda(\zeta, t) \quad (3.28)$$

per ogni coppia di indici  $j, k$  che renda l'uguaglianza ben posta.

*Dimostrazione.* Da (3.28) segue  $e_{n-k}^n = \chi(e_k^n)$ , per qualsiasi  $k \in \{0, 1, \dots, n\}$ . Sfruttando le proprietà di  $\chi$ , abbiamo

$$\begin{aligned} s_{n-j, n-k}^n(g) &= \langle \pi^n(g)e_{n-k}^n, e_{n-j}^n \rangle_{\pi^n} = \langle \pi^n(g)\chi(e_k^n), \chi(e_j^n) \rangle_{\pi^n} \\ &= \langle \chi \circ \pi^{-n}(g) \circ \chi(\chi(e_k^n)), \chi(e_j^n) \rangle_{\pi^n} \\ &= \langle \pi^{-n}(g)e_k^n, e_j^n \rangle_{\pi^n}. \end{aligned}$$

Per cui, utilizzando (3.26), abbiamo

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} s_{n(\epsilon)-j, n(\epsilon)-k}^{n(\epsilon)}(g_\epsilon) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \langle \pi^{-n(\epsilon)}(g_\epsilon)e_k^{n(\epsilon)}, e_j^{n(\epsilon)} \rangle_{\pi^{n(\epsilon)}} \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \langle \pi^{n(\epsilon)}(\nu(\mathcal{I}(\alpha(\epsilon), \beta(\epsilon))))e_k^{n(\epsilon)}, e_j^{n(\epsilon)} \rangle_{\pi^{n(\epsilon)}} \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} s_{jk}^{n(\epsilon)}(\bar{g}_\epsilon) = \sigma_{jk}^{|\lambda|}(-\bar{\zeta}, -t) = \sigma_{jk}^\lambda(\zeta, t). \end{aligned}$$

La penultima uguaglianza è vera, poiché, se  $\{g_\epsilon\}_{\epsilon \in ]0,1]}$  è tale che

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \gamma_\epsilon(\alpha(\epsilon), \beta(\epsilon)) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left( -\frac{i}{\epsilon^{-\frac{1}{2}}} \alpha_\epsilon, \frac{i}{\epsilon} (1 - \beta) \right) = (\zeta, t) \in \hat{H},$$

allora  $\{\bar{g}_\epsilon\}_{\epsilon \in ]0,1]}$  è  $\{\mathcal{I}(\bar{\alpha}_\epsilon, \bar{\beta}_\epsilon)\}_{\epsilon \in ]0,1]}$  deve essere tale che

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \gamma_\epsilon(\bar{\alpha}(\epsilon), \bar{\beta}(\epsilon)) = -\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \overline{\gamma_\epsilon(\alpha(\epsilon), \beta(\epsilon))} = (-\bar{\zeta}, -t).$$

□

**Osservazione 10.** *Si vuole sottolineare che, in base al limite di rappresentazioni definito da (3.29) e (3.26), abbiamo dimostrato che due rappresentazioni non equivalenti di  $\hat{H}$  ( $\beta^\lambda$  e  $\beta^{-\lambda}$ ) possono essere considerate limite di una sequenza di rappresentazioni equivalenti di  $SU(2)$  ( $\pi^n$  e  $\pi^{-n}$ ). Questo fatto è intrinsecamente legato alle proprietà di  $\hat{H}$  e di  $SU(2)$ , che sono tali da far convergere certi automorfismi di  $S_\epsilon$  a dei non-automorfismi di  $S_0$  (si pensi ad  $\eta_0$ ).*

## Appendice A

Riportiamo qui, per comodità, le seguenti definizioni.

**Definizione 3.** Sia  $G$  un gruppo di Lie e si indichi con  $GL(V)$  il gruppo dato dagli automorfismi dello spazio vettoriale  $V$ . Si dice che la mappa

$$\Sigma : G \rightarrow GL(V)$$

è una *rappresentazione complessa (risp. reale) finito-dimensionale* di  $G$  sullo spazio vettoriale complesso (risp. reale) finito-dimensionale  $V$  se è un omomorfismo di Gruppi di Lie, cioè se  $\Sigma$  è una mappa  $C^\infty$  che soddisfa

$$\Sigma(a) \circ \Sigma(b) = \Sigma(ab) \quad \forall a, b \in G.$$

Si indichi con  $\mathfrak{gl}(V)$  l'algebra di Lie data dagli endomorfismi dello spazio vettoriale complesso finito-dimensionale  $V$  e sia  $\mathfrak{g}$  un'algebra di Lie reale (o complessa). Allora si dice che la mappa

$$\sigma : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$$

è una *rappresentazione complessa finito-dimensionale* di  $\mathfrak{g}$  se è un omomorfismo di algebre di Lie, cioè se  $\sigma$  è una mappa lineare reale (o complessa) che soddisfa

$$[\sigma(A), \sigma(B)] = \sigma([A, B]) \quad \forall A, B \in \mathfrak{g}.$$

**Definizione 4.** Sia  $G$  un gruppo di Lie, sia  $\mathcal{H}$  uno spazio di Hilbert (complesso) e si indichi con  $U(\mathcal{H})$  l'insieme degli operatori unitari definiti su  $\mathcal{H}$ .

Una *rappresentazione unitaria* di  $G$  in  $\mathcal{H}$  è un omomorfismo di gruppi

$$\Sigma : G \rightarrow U(\mathcal{H})$$

continuo rispetto alla norma operatoriale forte, cioè deve essere tale che

$$\Sigma(a)\Sigma(b) = \Sigma(ab) \quad \forall a, b \in G$$

e tale che

$$x \mapsto \Sigma(a)x \quad \text{sia continua da } G \text{ in } \mathcal{H} \text{ per ogni } x \in \mathcal{H}.$$

**Definizione 5.** Sia  $\Sigma$  (risp.  $\sigma$ ) una rappresentazione reale o complessa di un gruppo  $G$  (risp. di un'algebra  $\mathfrak{g}$ ) di Lie sullo spazio vettoriale  $V$  di dimensione finita. Un sottospazio  $W \subset V$  è detto *invariante* per  $\Sigma$  (risp. per  $\sigma$ ) se, per ogni  $a \in G$  (risp. per ogni  $A \in \mathfrak{g}$ ), vale

$$\Sigma(a)W \subset W \quad (\text{risp. } \sigma(A)W \subset W).$$

La rappresentazione  $\Sigma$  (risp.  $\sigma$ ) è detta *irriducibile* se gli unici sottospazi invarianti sono  $\{0\}$  e  $V$ .

**Definizione 6.** Sia  $\Sigma : G \rightarrow U(\mathcal{H})$  una rappresentazione unitaria. In tal caso,  $\Sigma$  si dice *irriducibile* se gli unici sottospazi invarianti per  $\Sigma$  e chiusi in  $\mathcal{H}$  sono  $\{0\}$  e  $V$ .

## Riferimenti bibliografici

- [JF1] J. Faraut, *Analysis on Lie Groups. An introduction*, Cambridge University Press, New York, NY, USA (2008).
- [BH] B. C. Hall, *An Elementary Introduction to Groups and Representations*, arXiv:math-ph/0005032 (2000).
- [JF2] J. Faraut, K. Harzallah, *Deux Cours d'Analyse Harmonique*, Ecole d'Eté d'Analyse Harmonique de Tunis, Progress in Mathematics, Birkhäuser (1984).
- [SW] S. Weinberg, *The Quantum Theory of Fields, Volume I*, Cambridge University Press (1995).
- [GF1] G. B. Folland, *Harmonic Analysis in Phase Space*, Princeton U. Press, Princeton, N:J., USA, (1989).
- [GF2] G. B. Folland, *A Course in Abstract Harmonic Analysis, Second edition*, Textbooks in Mathematics, CRC Press, University of Washington, Seattle, Washington, USA (1995).
- [GF3] G. B. Folland, *Real Analysis, Modern Techniques and Their Applications, Second edition*, Wiley-Interscience, New-York, USA (1999).
- [WR1] W. Rudin, *Real and Complex Analysis*, 3rd Ed., McGraw-Hill, Inc., New York, NY, USA (1987).
- [WR2] W. Rudin, *Functional Analysis*, 2nd Ed., McGraw-Hill, Boston, USA (1991).
- [AK] A.A. Kirillov, *Elements of the Theory of Representations*, Springer-Verlag Berlin (1976).
- [FR] F. Ricci, *A Contraction of  $SU(2)$  to the Heisenberg Group*, Monatshefte für Mathematik, Springer-Verlag, Mh. Math. 101, 211-225 (1986).
- [JM] J.S. Milne, *Group Theory (v3.10)*, Lecture Notes (2010).
- [AT] M. Abate, F. Tovena, *Geometria differenziale*, Springer-Verlag Italia, UNITEXT-La Matematica per il 3+2 (2011).
- [VS] V.S. Varadarajan, *Lie Groups, Lie Algebras, and Their Representations*, Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag Berlin (1984).
- [VM] V. Moretti, *Teoria Spettrale e Meccanica Quantistica, Operatori in spazi di Hilbert*, UNITEXT, Springer-Verlag Italia (2010).