



Università degli studi di Padova

Facoltà di ingegneria

Dipartimento di Tecnica e Gestione dei Sistemi Industriali

Corso di Laurea Triennale in Ingegneria Meccanica e Meccatronica

ANALISI TRIDIMENSIONALE AGLI ELEMENTI FINITI DI UNA TRAVE CON SEZIONE A L SOGGETTA A FLESSIONE

RELATORE: CH.MO PROF. Michele Zappalorto

CORRELATORI: Ing. Paolo Andrea Carraro

LAUREANDO: Lorenzo Tiso

ANNO ACCADEMICO: 2013-2014

INDICE

Capitolo 1	<u>Introduzione</u>	1
1.1	Descrizione del lavoro	1
1.2	Introduzione al FEM	2
Capitolo 2	<u>Formulazioni analitiche</u>	4
2.1	Equazione di Navier.....	4
2.2	Equazione di Jourawski	8
2.3	Formula di Prandtl.....	12
2.4	Centro di taglio per sezione a “L”	13
Capitolo 3	<u>Modellazione FEM</u>	15
3.1	Software Ansys	15
3.2	Impostazione del modello in Ansys.....	15
3.3	Soluzione del modello in Ansys	21
3.4	Come analizzare i risultati in Ansys	21
Capitolo 4	<u>Analisi dei risultati</u>	26
4.1	Path Orizzontale	26
4.1.1	Tensione σ dovuta alla flessione	26
4.1.2	Tensione τ dovuta al taglio e alla torsione	29
4.2	Path Verticale	35
4.2.1	Tensione σ dovuta alla flessione	35
4.2.2	Tensione τ dovuta al taglio e alla torsione	38
Capitolo 5	<u>Conclusioni</u>	44
	Bibliografia.....	45

CAPITOLO 1

1.Introduzione

1.1.Descrizione del lavoro

L'obiettivo del lavoro è stato quello di analizzare con il metodo elementi finiti (FEM) una trave incastrata con sezione a "L", soggetta ad una forza verticale all'estremità in corrispondenza del baricentro. Nella sezione di mezzeria sono stati riportati:

- I contour plot sull'intera sezione delle componenti tensionali significative;
- I grafici relativi all'andamento delle stesse tensioni lungo i path indicati in figura (rappresentati dalle linee rosse tratteggiate), confrontandole con i risultati delle formulazioni analitiche note;
- Si sono infine commentati i risultati ottenuti.

Figura 1.1

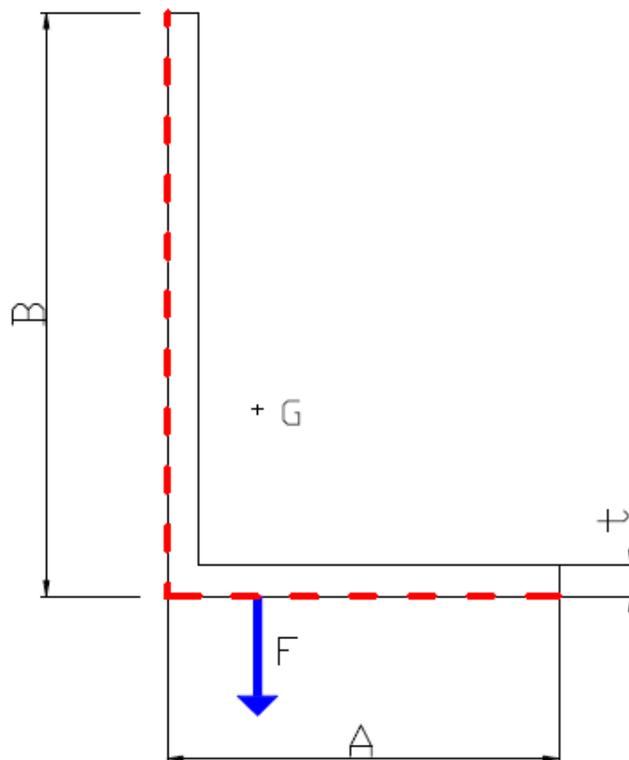
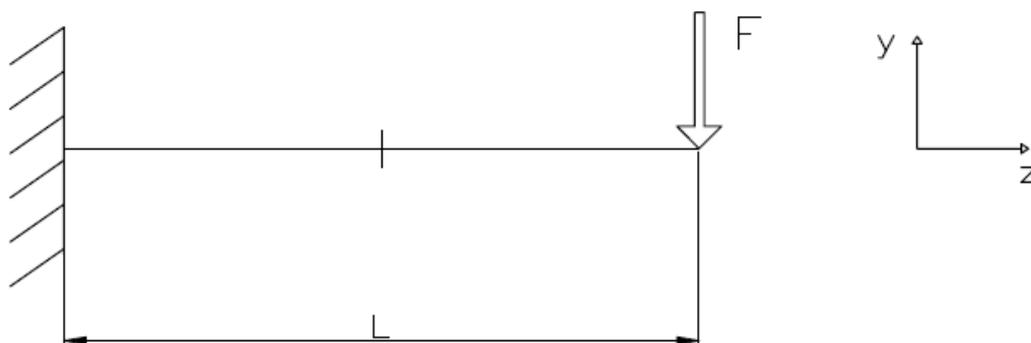


Figura 1.2



$$A = 100 \text{ mm}$$

$$B = 150 \text{ mm}$$

$$t = 8 \text{ mm}$$

$$L = 1000 \text{ mm}$$

$$F = 100000 \text{ N}$$

Nell' analisi eseguita si è ipotizzato di utilizzare un acciaio con le seguenti proprietà:

$$E = 206000 \text{ MPa};$$

$$\nu = 0,3$$

1.2.Introduzione al FEM

In molte aree dell'ingegneria i metodi analitici permettono di ottenere soluzioni in forma chiusa esatte solo in casi particolari. Lo studio di strutture meccaniche complicate viene quindi sempre più spesso condotto con l'ausilio di metodologie numeriche che, anche se in alcuni casi approssimate, permettono un approccio di calcolo unificato.

Una fra queste è il metodo degli elementi finiti (FEM) che tra i numerosi vantaggi, dà la possibilità innanzitutto di analizzare casi anche molto complicati e consente inoltre di automatizzare il calcolo delle strutture, affrontando quindi in maniera automatica e universale anche strutture molto diverse tra loro.

Il metodo degli elementi finiti discretizza il dominio continuo di partenza dando origine quindi ad una cosiddetta “mesh” (griglia) formata da elementi finiti. Su ciascun elemento la soluzione è espressa attraverso una combinazione lineare di funzioni dette funzioni di forma. Maggiore è il numero degli elementi in cui il dominio viene diviso, maggiore è l’accuratezza del risultato finale.

Esistono diversi tipi di elementi:

- quadrangolare a 4 nodi (8 gradi di libertà);
- quadrangolare a 8 nodi (16 gradi di libertà);
- elemento triangolare (6 gradi di libertà);
- ...

L’elemento triangolare è l’elemento con meno gradi di libertà e quindi è l’elemento più rigido e meno accurato.

Per determinare la discretizzazione ideale si esegue la cosiddetta “analisi di sensitività” con la quale si stabilisce il numero di elementi minimo (con cui si analizza il problema) che mi dà stabilità di soluzione.

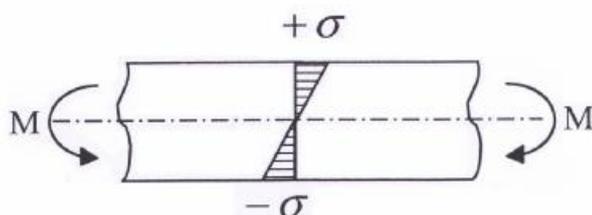
CAPITOLO 2

2. Formulazioni analitiche

2.1. Equazione di Navier

L'equazione di Navier: $\sigma_z = \frac{M \cdot y}{J_{xx}}$ (dove y è la distanza della generica fibra dall'asse neutro e J_{xx} è il momento di inerzia della sezione rispetto all'asse baricentrico $x-x$) permette di calcolare la distribuzione delle tensioni σ perpendicolari a una generica sezione di un componente, sottoposto a flessione pura. A causa dell'applicazione del momento flettente, alcune fibre del componente tenderanno ad allungarsi, altre ad accorciarsi, mentre altre ancora non si allungheranno né accorceranno: queste infatti non vedranno variare la loro lunghezza; queste ultime giacciono su un asse detto "asse neutro": si può dimostrare che l'asse neutro coincide con l'asse baricentrico; le fibre che si allungano (sopra l'asse neutro nella figura sotto riportata) saranno di conseguenza soggette ad un stato di trazione (σ positive), quelle che si accorciano (sotto l'asse neutro nella figura) ad uno stato di compressione (σ negative), mentre per le fibre sull'asse neutro la σ sarà nulla. Dalla formula di Navier è possibile vedere che le fibre che si trovano alla massima distanza dall'asse neutro, risultano essere quelle sottoposte alla massima tensione σ , inoltre si nota l'andamento lineare della variazione delle tensioni al variare di y . Come detto precedentemente l'equazione di Navier vale nel caso di flessione pura, ma tuttavia la si applica anche nel caso di flessione composta (come nel caso in analisi).

Figura 2.1



Le ipotesi che determinano la validità dell'equazione di Navier sono:

- sezioni inizialmente piane rimangono tali anche a deformazione avvenuta;

-simmetria geometrica rispetto all' asse y (per sezioni che non presentano assi di simmetria, la formula di Navier vale se ci si conduce ad un sistema di riferimento di assi principali di inerzia).

L'equazione di Navier vale se il momento geometrico misto J_{xy} della sezione è nullo. Nel caso in esame (sezione a "L") questo non si verifica se consideriamo come sistema di riferimento il sistema cartesiano originale $x-y$. E' necessario quindi andare a determinare un nuovo sistema di riferimento rispetto al quale il $J_{x'y'}$ risulti pari a zero. Il nuovo sistema di riferimento $x'-y'$ sarà ruotato rispetto all'originale di un angolo ϑ . Gli assi del nuovo sistema di riferimento vengono detti assi principali di inerzia.

Per il calcolo dell'angolo ϑ è necessario determinare i momenti di inerzia J_{xx} , J_{yy} e il momento geometrico misto (o centrifugo) J_{xy} .

$$\vartheta = \frac{1}{2} \arctan \left(\frac{2 * J_{xy}}{J_{yy} - J_{xx}} \right)$$

Nel caso in esame:

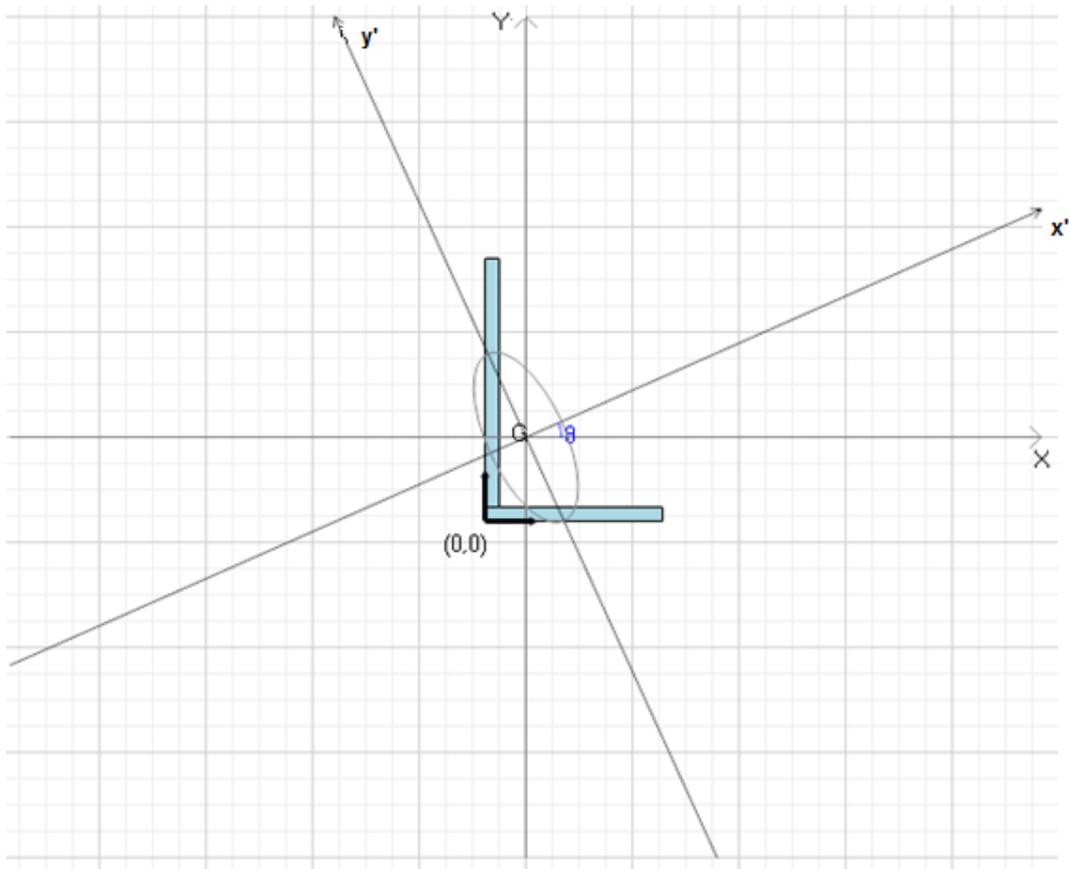
$$J_{xx} = \int_A y^2 dA = 4553621,333 \text{ mm}^4$$

$$J_{yy} = \int_A x^2 dA = 1666021,333 \text{ mm}^4$$

$$J_{xy} = \int_A z * y dA = -1619504,132 \text{ mm}^4$$

$$\vartheta = \frac{1}{2} \arctan \left(\frac{2 * (-1619504,132)}{1666021,333 - 4553621,333} \right) = 24,15^\circ$$

Figura 2.2



La relazione tra le coordinate sarà :

$$x' = x \cos \vartheta + y \sin \vartheta$$

$$y' = -x \sin \vartheta + y \cos \vartheta$$

Dato che il momento flettente causato dalla forza F (agente in direzione verticale), non è allineato con uno degli assi di inerzia principali, si ha la presenza di flessione deviata.

Si scompone di conseguenza la forza totale lungo gli assi principali di inerzia della sezione; nascono di conseguenza due componenti di momento, rispettivamente sull'asse x' e sull'asse y'.

$$Mx' = Mx \cdot \cos \vartheta$$

$$My' = Mx' \cdot \sin\vartheta$$

La tensione σ di flessione complessiva si ottiene sommando i singoli effetti e sarà:

$$\sigma_z = \frac{Mx' \cdot y'}{Jx'x'} + \frac{My' \cdot x'}{Jy'y'}$$

L'asse neutro, ovvero il luogo geometrico dei punti dove le tensioni di flessione risultano essere pari a zero, può essere determinato ponendo la σ_z uguale a zero.

$$\frac{Mx' \cdot y'}{Jx'x'} + \frac{My' \cdot x'}{Jy'y'} = 0$$

Si può calcolare quindi l'angolo β tra l'asse principale di inerzia x' e l'asse neutro:

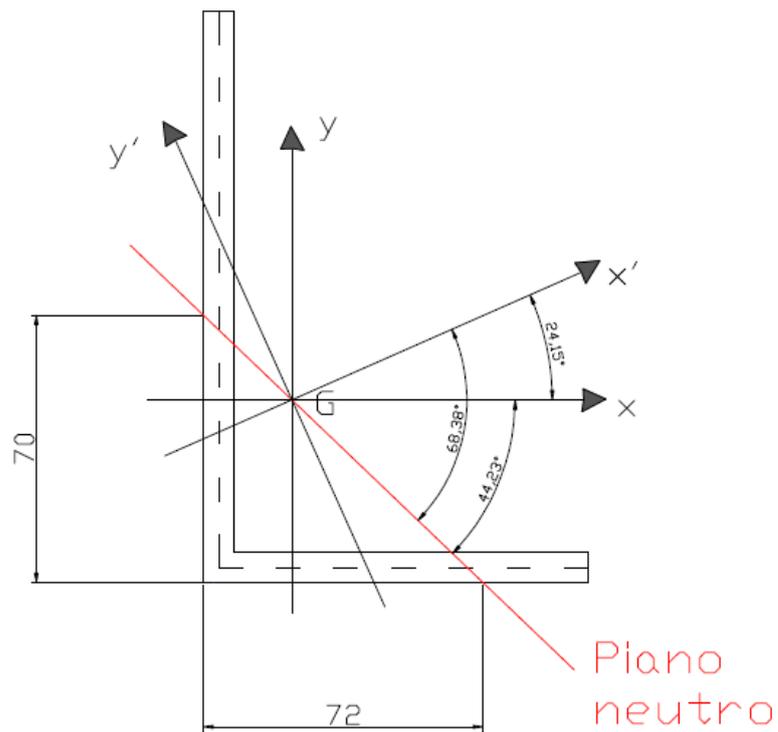
$$\beta = \arctan\left(\frac{My' \cdot Jx'x'}{Mx' \cdot Jy'y'}\right)$$

Nel caso in esame:

$$\beta = \arctan\left(\frac{20456328,9}{45623882} \cdot \frac{5279464,639}{940178,027}\right) = -68,38^\circ$$

Quindi l'asse neutro è inclinato di $-63,8^\circ$ rispetto all'asse principale di inerzia x' .

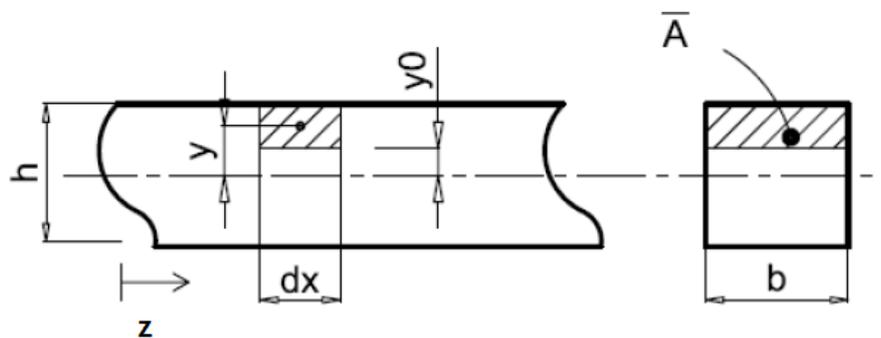
Figura 2.3



2.2. Equazione di Jourawski

Si consideri una condizione di carico in cui sia presente non flessione pura, ma flessione composta (come nel caso in esame).

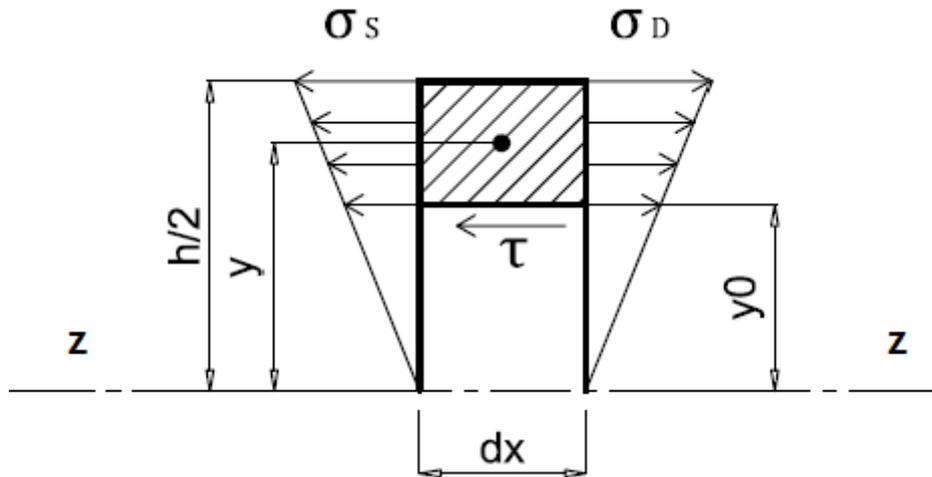
Figura 2.4



La flessione composta prevede una variazione del momento flettente lungo la trave; di conseguenza si ha l'esistenza del taglio, essendo infatti la derivata del momento flettente rispetto alla asse longitudinale della trave diversa da zero.

Se si considerano infatti le facce di sinistra e di destra dell'elemento infinitesimo della trave (indicato in figura sottostante), esse sono soggette a delle tensioni σ_s e σ_D diverse fra di loro; considerando la coordinata z di figura crescente da sinistra verso destra, si ha che σ_D risulta essere maggiore di σ_s in quanto Mf_D è maggiore di Mf_s .

Figura 2.5



$$\sigma_s = \frac{M \cdot y}{J_{xx}} \quad \text{e} \quad \sigma_D = \frac{(M + dM) \cdot y}{J_{xx}}$$

Queste tensioni danno origine a delle forze sull'elemento che ovviamente risultano essere diverse tra loro:

$$Fs = \int_{\tilde{A}} \frac{M \cdot y}{J_{xx}} d\tilde{A} \quad \text{e} \quad Fd = \int_{\tilde{A}} \frac{(M + dM) \cdot y}{J_{xx}} d\tilde{A},$$

dove \tilde{A} è la superficie dell'elemento su cui agisce σ_s e σ_D . Ovviamente Fd risulta essere maggiore di Fs . Si genera quindi un eccesso di forza ΔF verso destra.

Per garantire l'equilibrio dell'elemento è necessario che sulla sua faccia inferiore, nascano delle componenti di tensione, parallele alla faccia stessa: esse sono delle componenti di tensione tangenziali τ .

Supponendo che le tensioni tangenziali siano uniformemente distribuite lungo la larghezza b della trave, si arriva alla formulazione finale dell'equazione di Jourawsky:

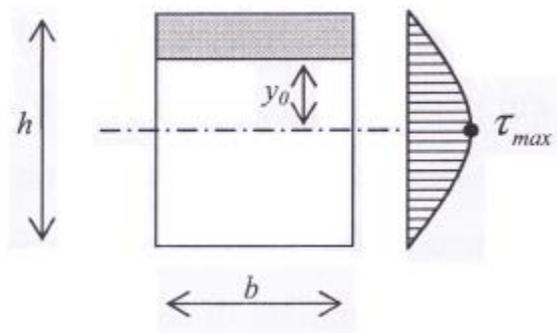
$$\tau_{yz} = \frac{T * S_{xx}}{J_{xx} * b}$$

Dove S_{xx} è il momento statico del primo ordine dell'area \tilde{A} rispetto all'asse x-x, mentre J_{xx} è il momento d'inerzia dell'area \tilde{A} rispetto all'asse x-x.

Per sezioni rettangolari l'andamento delle tensioni di taglio è parabolico e ha valore nullo sulla superficie e massimo in corrispondenza dell'asse baricentrico:

$$\tau_{zy,max} = \frac{3T}{2A}$$

Figura 2.6



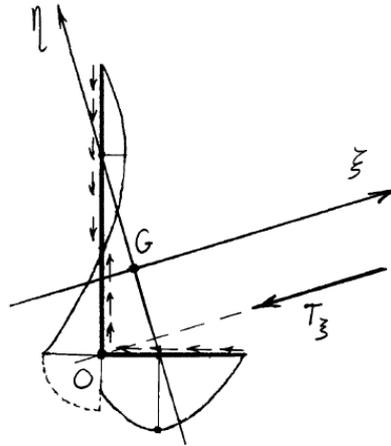
Avendo nel caso in analisi a che fare con una sezione a "L" è necessario andare ad analizzare le componenti di tensione tangenziale che si generano per applicazione della forza verticale F .

Essendo la forza F non allineata con uno degli assi principali di inerzia, si ha a che fare con taglio deviato: è quindi necessario scomporre la forza nelle due direzioni coincidenti con gli assi principali di inerzia. Avremo quindi due componenti di taglio per ciascuna ala della sezione.

Questo è l'andamento teorico delle due componenti di tensioni tangenziali dovute al taglio:

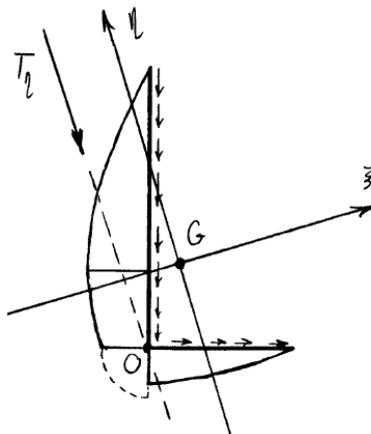
$$\tau_1 = \frac{T\zeta * S\eta}{J\eta * b}$$

Figura 2.7



$$\tau_2 = \frac{T\eta * S\zeta}{J\zeta * b}$$

Figura 2.8

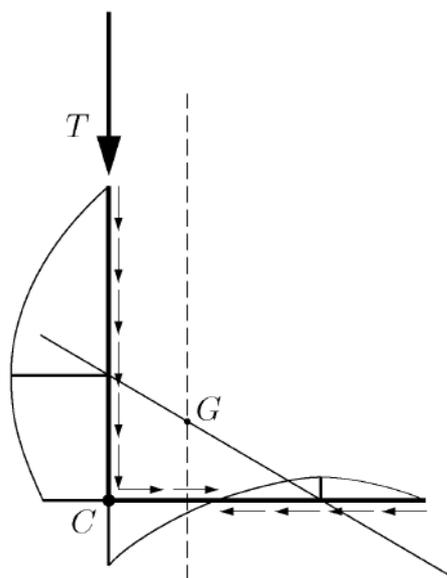


La tensione di taglio totale sar :

$$\tau = \frac{T\eta * S\zeta}{J\zeta * b} + \frac{T\zeta * S\eta}{J\eta * b}$$

L'andamento della tensione totale sar :

Figura 2.9



Si può vedere come le tensioni tangenziali di taglio abbiano in ogni caso valore massimo in corrispondenza dell'intersezione tra l'asse neutro e la linea media della sezione. Questo perché le tensioni tangenziali hanno valore massimo quando la derivata del momento flettente è uguale a zero, ovvero nel piano neutro di flessione.

2.3. Formula di Prandtl

Prandtl propose un metodo semplificato per la risoluzione del problema della determinazione delle τ di torsione, utilizzando la "analogia delle membrane".

Si consideri una sezione rettangolare di base b e altezza t . La massima tensione tangenziale dovuta alla sollecitazione di torsione si manifesta in corrispondenza dei punti, appartenenti al perimetro della sezione, che si trovano più vicine al centro della sezione. Si ha che per b/t molto elevato:

$$\tau_{max} = \frac{Mt}{Jt} * t$$

$$\vartheta_u = \frac{Mt}{G * Jt}$$

con $Jt = \frac{1}{3}t^3L$, dove L è la lunghezza della linea media; nel caso di sezioni composte da un numero discreto di rettangoli (come nel caso in esame) si avrà semplicemente:

$$\tau_{max} = \frac{Mt}{Jt} * t_{i,max}$$

con:

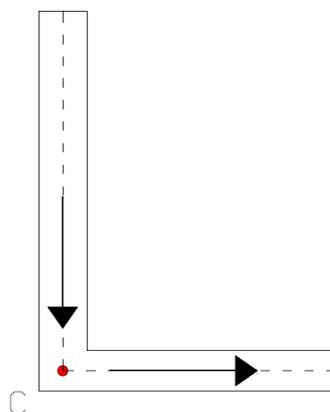
$$Jt = \frac{1}{3} \sum_i L_i * t_i^3$$

La τ_{max} si ha nel rettangolo di spessore maggiore.

2.4. Centro di taglio per sezione a "L"

Data una sezione costituita da due tratti rettilinei (come per la sezione a "L" esaminata), il centro di taglio coincide con l'intersezione delle linee medie dei due tratti. Infatti, qualunque sia il valore del taglio, le due risultanti di tensione tangenziale lungo i due rami della sezione, si combinano in un'unica forza con retta d'azione passante per l'intersezione delle rette d'azione dei due rami.

Figura 2.10



Dato che il centro di taglio non appartiene alla direzione di applicazione della forza (lungo il baricentro in direzione y) si procede alla determinazione del momento torcente che si genera. Per fare questo si calcola la distanza lungo la coordinata x tra il centro di taglio e il baricentro; La posizione del centro di taglio è nota come detto in precedenza; resta quindi da determinare la posizione del baricentro:

$$x_g = \frac{\sum A_i * x_i}{\sum A_i} = \frac{100 * 8 * 50 + 142 * 8 * 4}{100 * 8 + 142 * 8} = 23 \text{ mm}$$

$$y_g = \frac{\sum A_i * y_i}{\sum A_i} = \frac{100 * 8 * 4 + 142 * 8 * 79}{100 * 8 + 142 * 8} = 48 \text{ mm}$$

Il momento torcente prodotto è quindi:

$$M_t = F * (x_g - x_c) = 100000 * (23 - 4) = 1900000 \text{ N} * \text{mm}$$

CAPITOLO 3

3.Modellazione FEM

3.1.Software Ansys

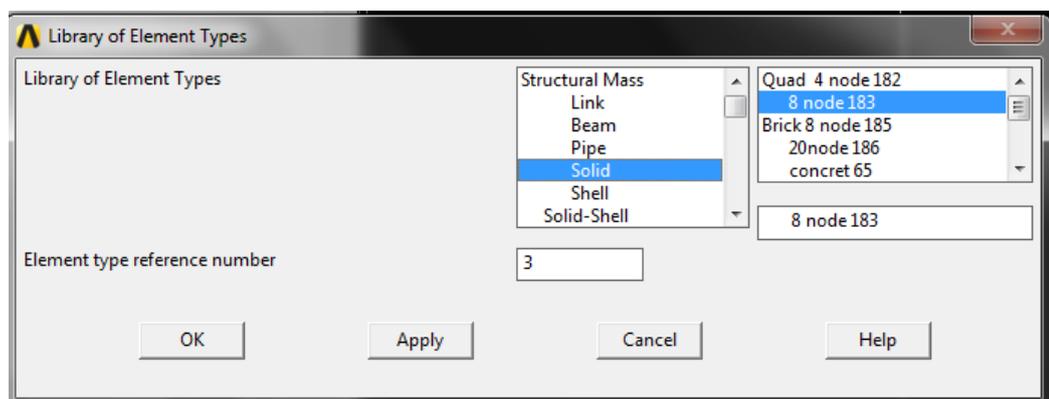
Il software utilizzato per l'analisi del problema è Ansys; come per la maggior parte dei software di analisi agli elementi finiti, anche Ansys prevede una suddivisione del processo in tre passi fondamentali:

- Preprocessor: in questa fase si costruisce il modello ad elementi finiti, determinandone la geometria, il tipo di elemento utilizzato, le proprietà del materiale, la meshatura, l'applicazione del carico e infine le condizioni di vincolo.
- Solution: in questa fase il programma calcola la soluzione al problema impostato.
- Postprocessor: in quest'ultima fase si procede alla raccolta, all'elaborazione e alla visualizzazione dei risultati.

3.2.Impostazione del modello in Ansys

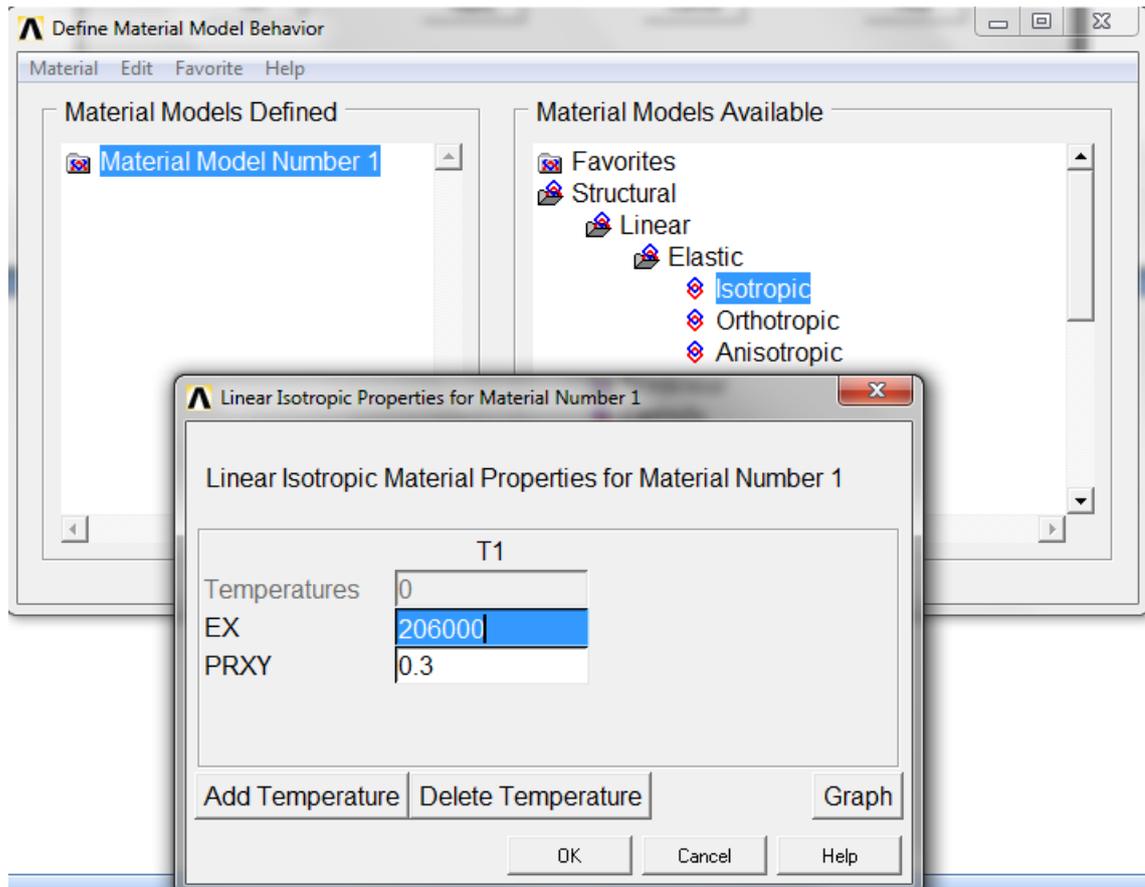
Innanzitutto si è proceduto con la scelta del **tipo di elemento** da utilizzare: dal menù del *Preprocessor* si è cliccato sull'opzione *Element Type / Add/Edit/Delete* si è scelto un elemento piano (Plane 2node 183) che una volta estruso diventerà un elemento Solid-Brick 20node 186;

Figura 3.1



Successivamente si sono impostate le **proprietà del materiale**: dal menù del *Preprocessor* si è cliccato sull'opzione *Material Props / Material Models / Structural / Linear / Elastic / Isotropic* e si sono inseriti i valori del modulo di elasticità e del coefficiente di Poisson del materiale (come si vede in figura).

Figura 3.2



In seguito si è impostata la **geometria della sezione**: dal menù del *Preprocessor* si è cliccato sull'opzione *Modeling / Create / Keypoints....Lines...Areas*

I passaggi sono riportati nelle seguenti figure:

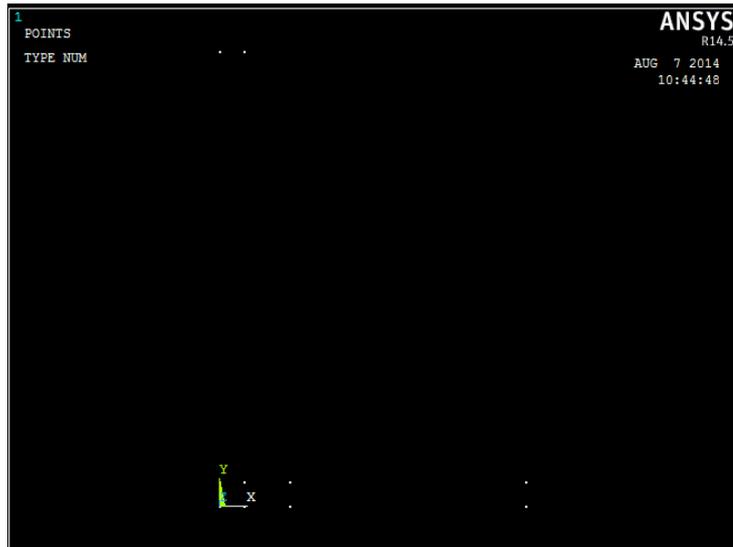


Figura 3.3 Keypoints

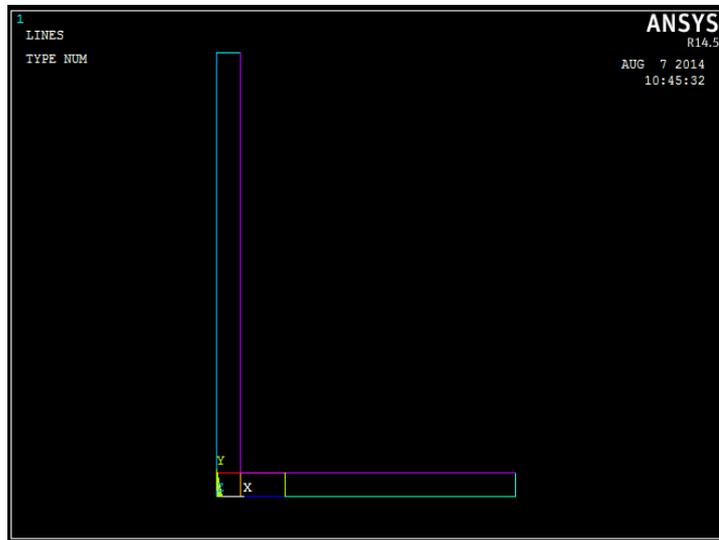


Figura 3.4 Linee

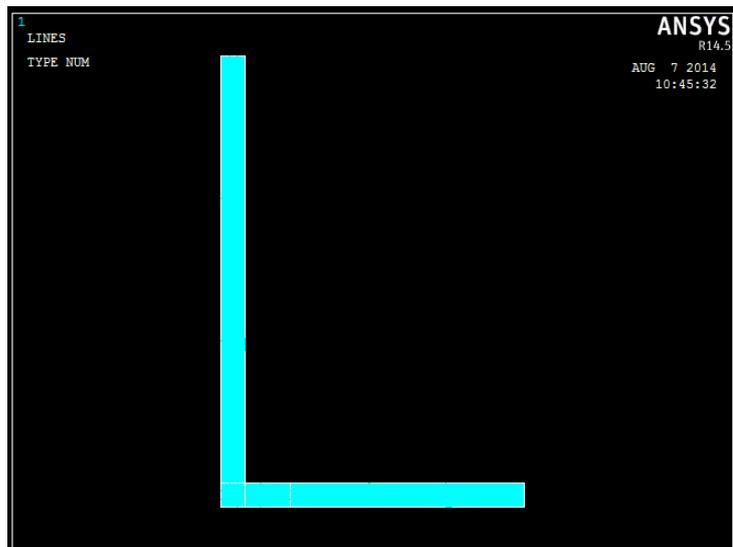


Figura 3.5 Aree

Si è proceduto quindi alla realizzazione della **mesh**:

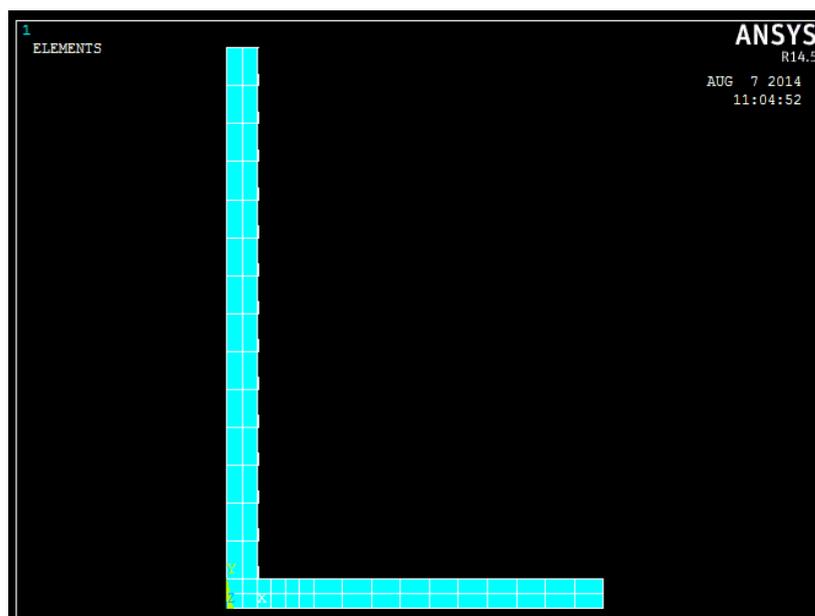
- dal menù del *Preprocessor* si è cliccato sull'opzione *Meshing / Size Cntrls / Manual Size / Lines / Picked Lines* , è stata eseguita quindi la suddivisione delle linee in tratti, in maniera più fitta nei punti più "delicati" (applicando di volta in volta il numero di suddivisioni).

Figura 3.6



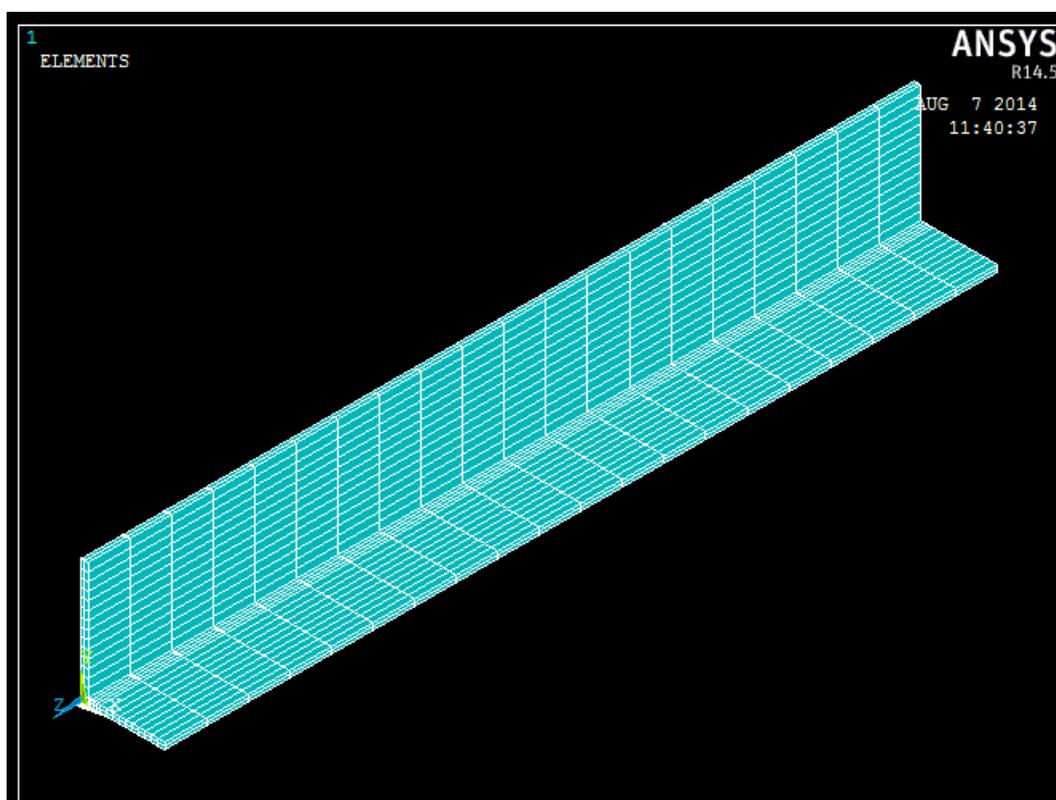
- dal menù del *Preprocessor* si è cliccato sull'opzione *Meshing / Mesh / Mapped / 3 or 4 sides* ; quindi dopo averle selezionate si è arrivati alla meshatura finale delle aree.

Figura 3.7



A questo punto si è proceduto alla **estrusione** della sezione lungo l'asse z per una lunghezza pari a 1000 mm: dal menù del *Preprocessor* si è cliccato sull'opzione *Modeling / Operate / Extrude / Areas / By XYZ Offset* e si sono selezionate le aree della sezione. Il risultato ottenuto è stato il seguente:

Figura 3.8



Si è passati poi alla definizione del **carico**: dal menù del *Preprocessor* si è cliccato sull'opzione *Load / Define Loads / Apply / Structural / Force/Moment / On Keypoints*, si è scelto il keypoint su cui applicare la forza e si sono impostati i parametri della forza stessa:

Figura 3.9

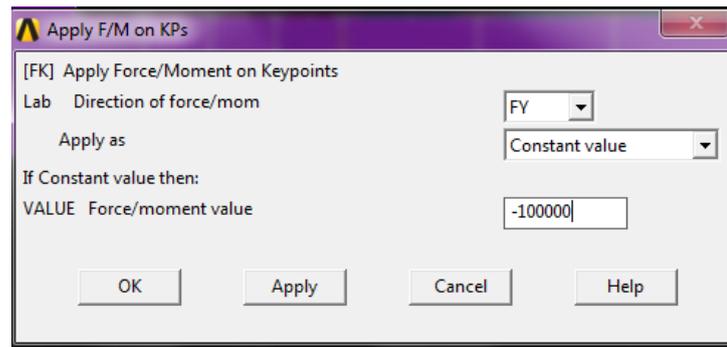
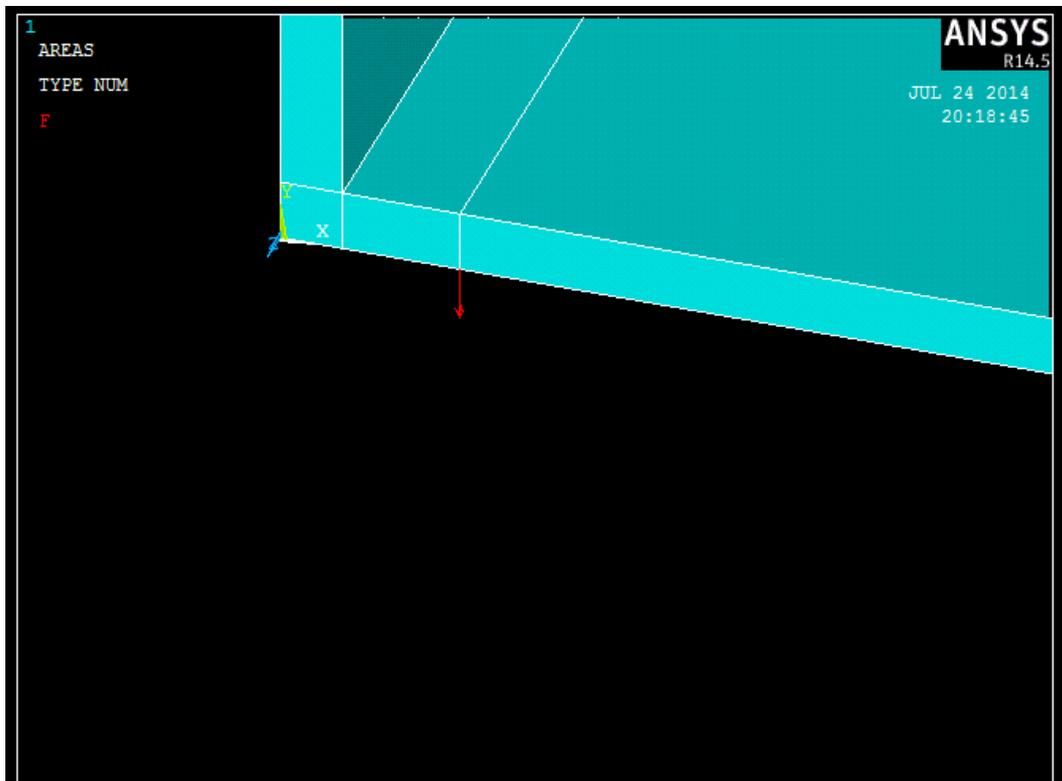
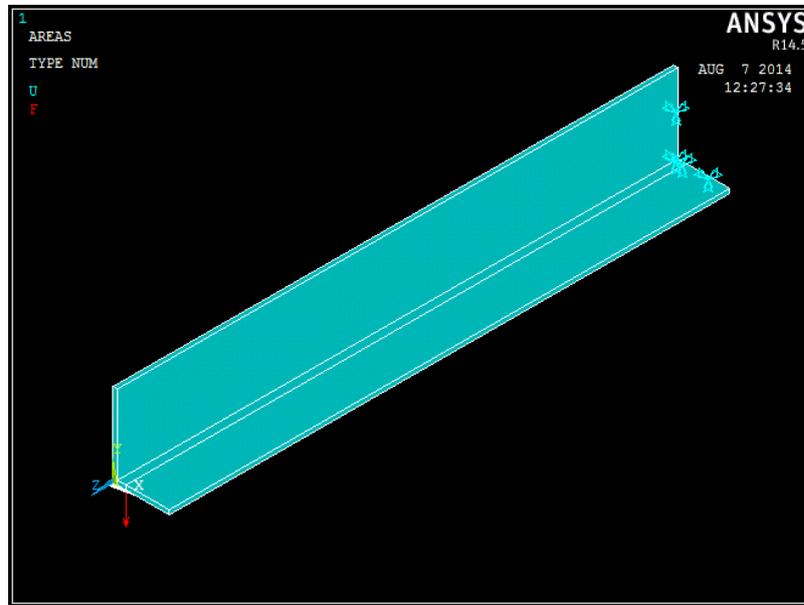


Figura 3.10



Infine si sono impostate le **condizioni di vincolo**: dal menù del *Preprocessor* si è cliccato sull'opzione *Load / Define Loads / Apply / Structural / Displacement / On Areas* , si sono selezionate tutte le aree della sezione di estremità e si è impostato il vincolo di incastro:

Figura 3.11



3.3.Soluzione del modello in Ansys

A questo punto, dopo aver implementato il modello, si procede al calcolo della **soluzione** eseguita ovviamente dal software Ansys: dal menù *Solution* si è cliccato sull'opzione *Solve / Current LS*.

Il tempo di soluzione dipende dal numero di equazioni che il software deve elaborare, e questo è tanto maggiore tanto più fitta è la mesh eseguita sul modello in analisi.

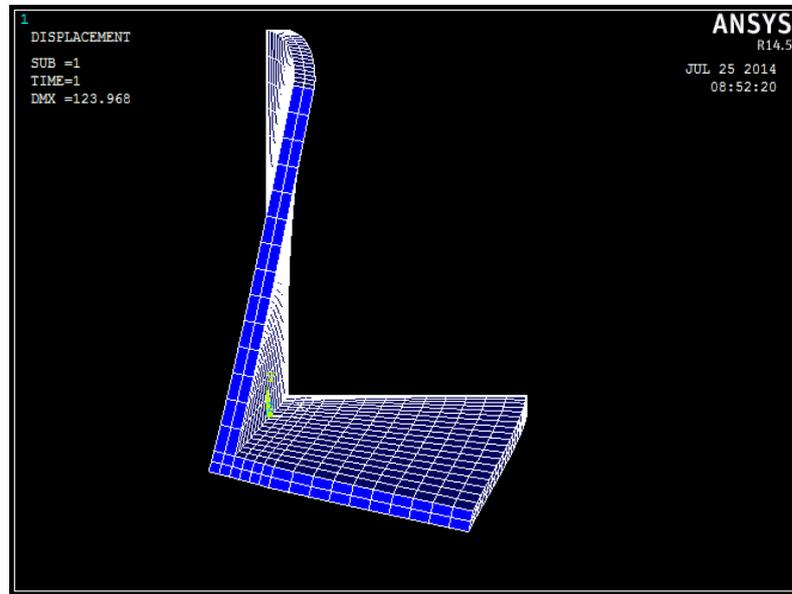
3.4.Come analizzare i risultati in Ansys

Una volta lanciata la soluzione è necessario estrapolare i risultati ottenuti. Le operazioni che si possono fare sono molteplici.

Per rendersi conto se quello che si è fatto è corretto, si va innanzitutto a rappresentare la deformata della trave: dal menù *General PostProc* si è cliccato su *Plot Results / Deformed Shape* ; dal disegno sotto riportato si vede quello che ci si aspettava: la trave non subisce solo

un abbassamento ma anche una rotazione dovuta al fatto che la forza non è applicata lungo una direzione passante per il centro di taglio, dando origine quindi ad un momento torcente.

Figura 3.12



E' possibile inoltre rappresentare l'andamento delle varie tensioni su tutto il modello: dal menù *General PostProc* si è cliccato sull'opzione *Query Results / Subgrid Solution* ; a questo punto è possibile scegliere la tensione da rappresentare:

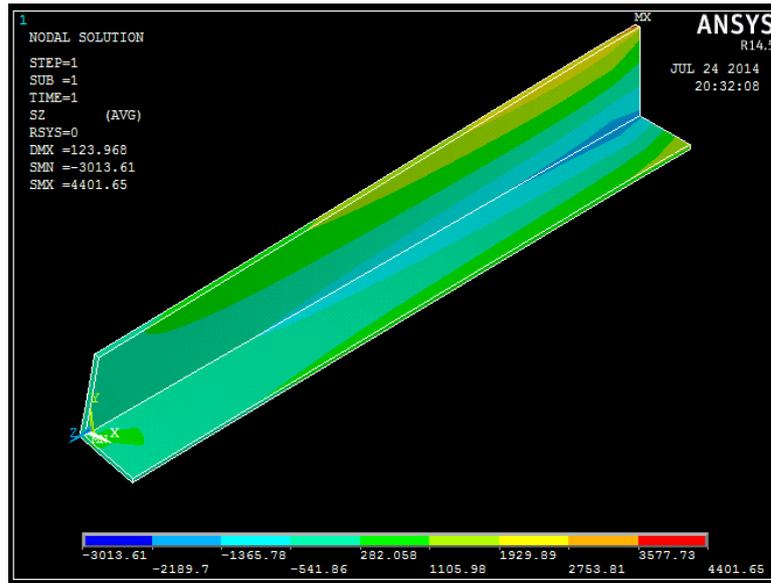


Figura 3.13 Sigma Z

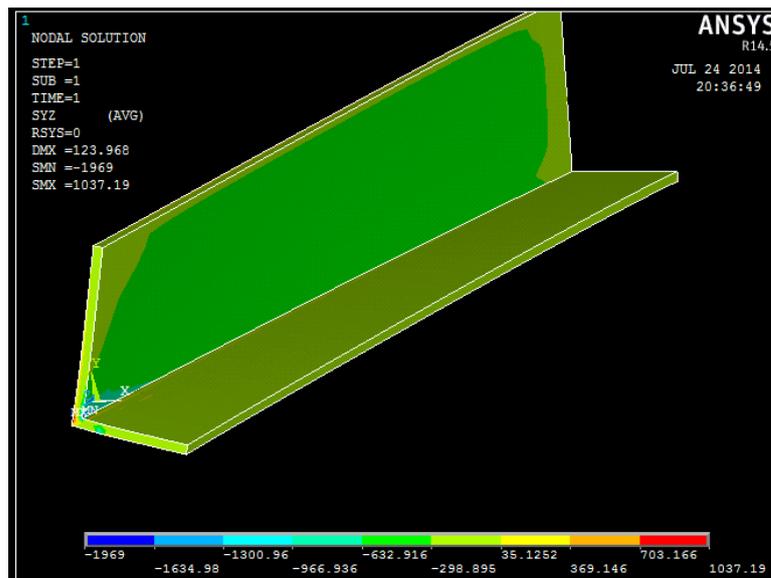


Figura 3.14 Tau YZ

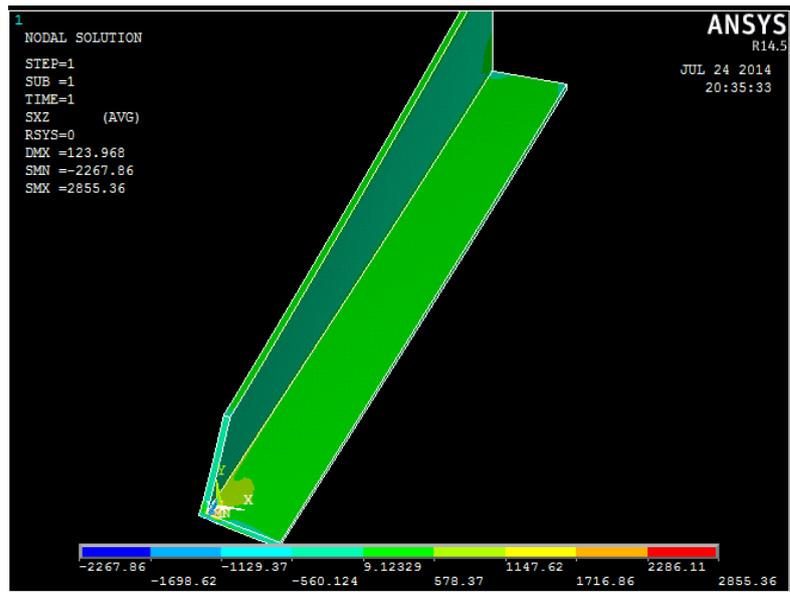
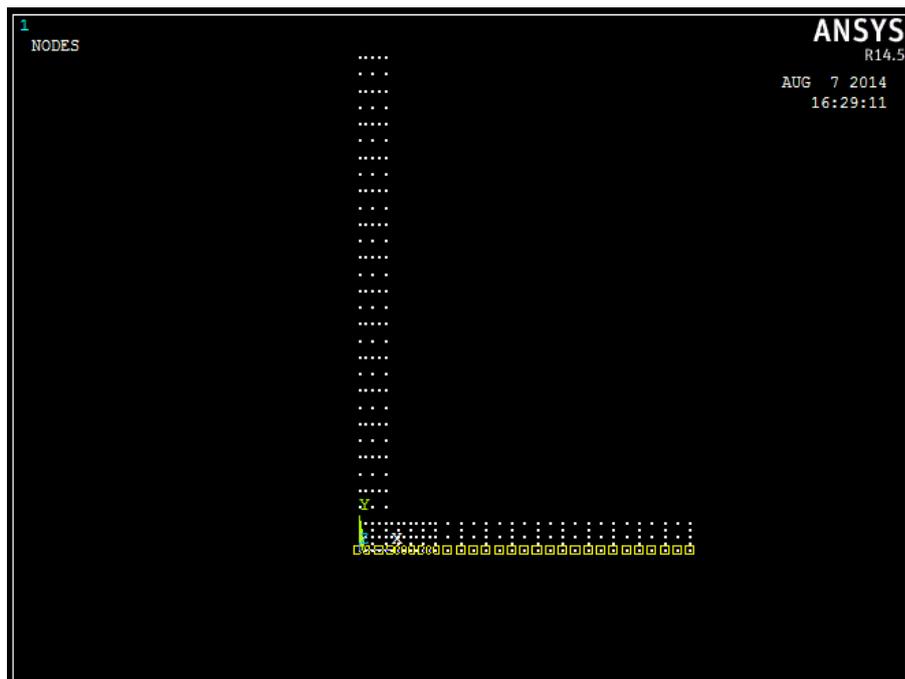


Figura 3.15 Tau XZ

La stessa cosa è possibile farla per una singola sezione (le figure relative si vedranno nel capitolo successivo).

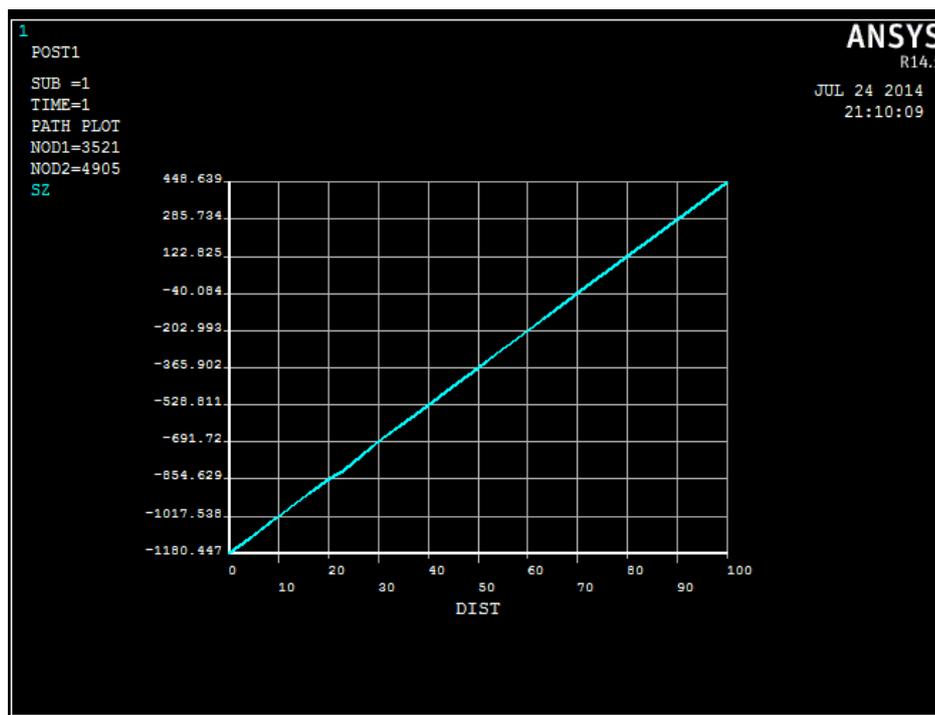
Per rappresentare invece l'andamento delle tensioni lungo una direzione preferenziale (Path) si procede nel seguente modo: dal menù *General PostProc* si è cliccato sull'opzione *Path Operation / Define Path / By Nodes* e si vanno a cliccare uno ad uno nell'ordine tutti i nodi in quella determinata direzione da analizzare; nell'immagine seguente, ad esempio, sono rappresentati i nodi selezionati per il path orizzontale:

Figura 3.16



A questo punto dopo aver definito i Path da analizzare si va a richiamare un Path (se ne sono stati definiti più di uno) cliccando dal menù *General PostProc* l'opzione *Path Operation / Recall Path* ; poi per plottare le tensioni selezionate contro la distanza da uno specifico punto su un grafico, si clicca dal menù *General PostProc* l'opzione *Path Operation / Plot Path Item / On Graph*. Il risultato ottenuto, ad esempio riguardo alle tensioni σ_z lungo il Path orizzontale, è il seguente:

Figura 3.17



Con l'opzione *List Path Item* è possibile inoltre trasportare i dati ottenuti in un grafico excell, come si farà nel capitolo successivo, al fine di confrontare i risultati con quelli delle formulazioni analitiche.

CAPITOLO 4

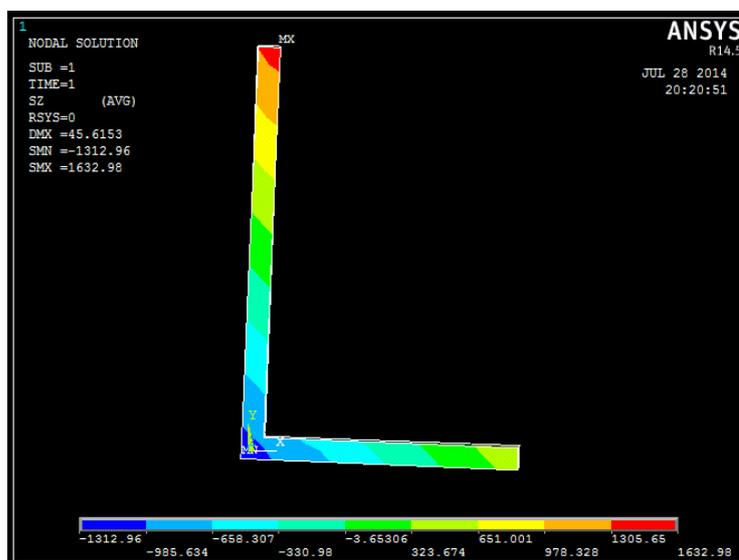
4. Analisi dei risultati

4.1. Path Orizzontale

4.1.1. Tensione σ dovuta alla flessione

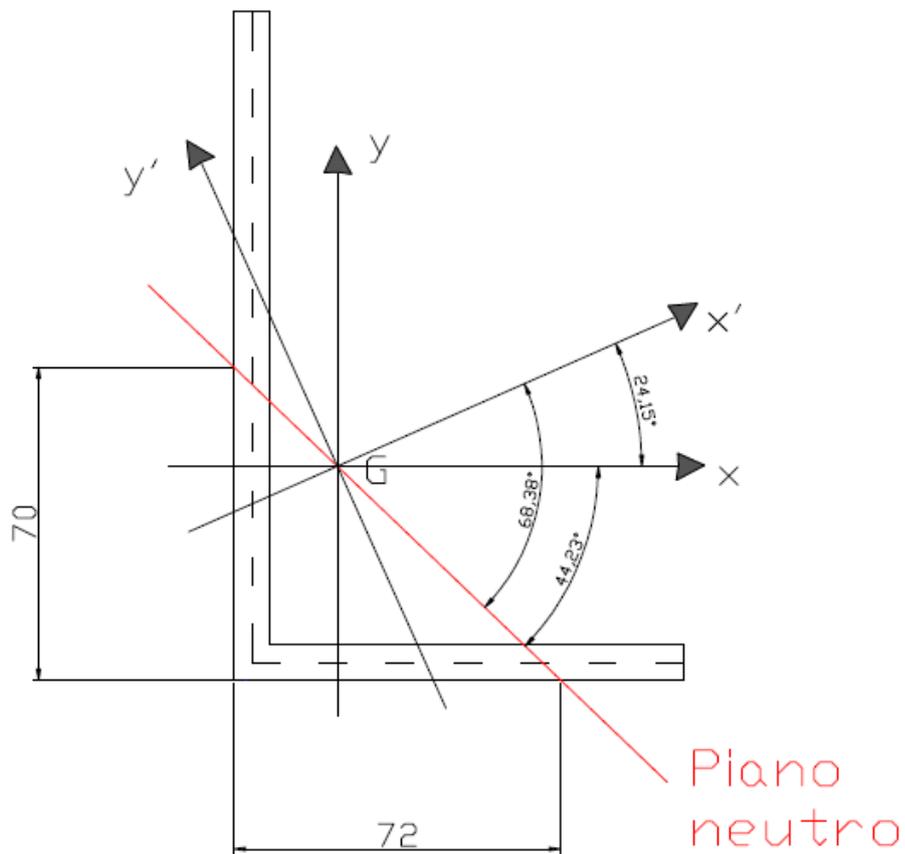
Si riporta innanzi tutto il contour plot relativo alle σ di flessione:

Figura 4.1



E' possibile notare come il piano neutro di flessione sia inclinato di circa 45° rispetto all'asse x . Questo dà conferma di quanto calcolato nel paragrafo 2.1; infatti si era trovato che l'angolo di inclinazione del piano neutro di flessione rispetto all'asse principale di inerzia x' era di circa 68° , e quindi l'angolo di inclinazione del piano neutro di flessione rispetto all'asse x risulta essere $68,38^\circ - 24,15^\circ = 44,23^\circ$ (dove $24,15^\circ$ è l'angolo di rotazione tra i due sistemi di riferimento), quindi all'incirca 45° come quanto detto precedentemente riguardo alla figura.

Figura 4.2



Andiamo ad eseguire il confronto, riguardo alla tensione σ di flessione, tra i risultati forniti dalle formulazioni analitiche e quelli forniti dal software di calcolo.

Il momento flettente nella sezione da analizzare (quella di mezzeria) risulta essere pari a:

$$M_f = F * \frac{L}{2} = 100000 \text{ N} * 0,5 \text{ m} = 50000 \text{ N} * \text{m}$$

$$J_{x'} = 5279464,639 \text{ mm}^4$$

$$J_{y'} = 940178,027 \text{ mm}^4$$

$$M_{fx'} = 45623882 \text{ N} * \text{mm}$$

$$M_{fy'} = 20456328,9 \text{ N} * \text{mm}$$

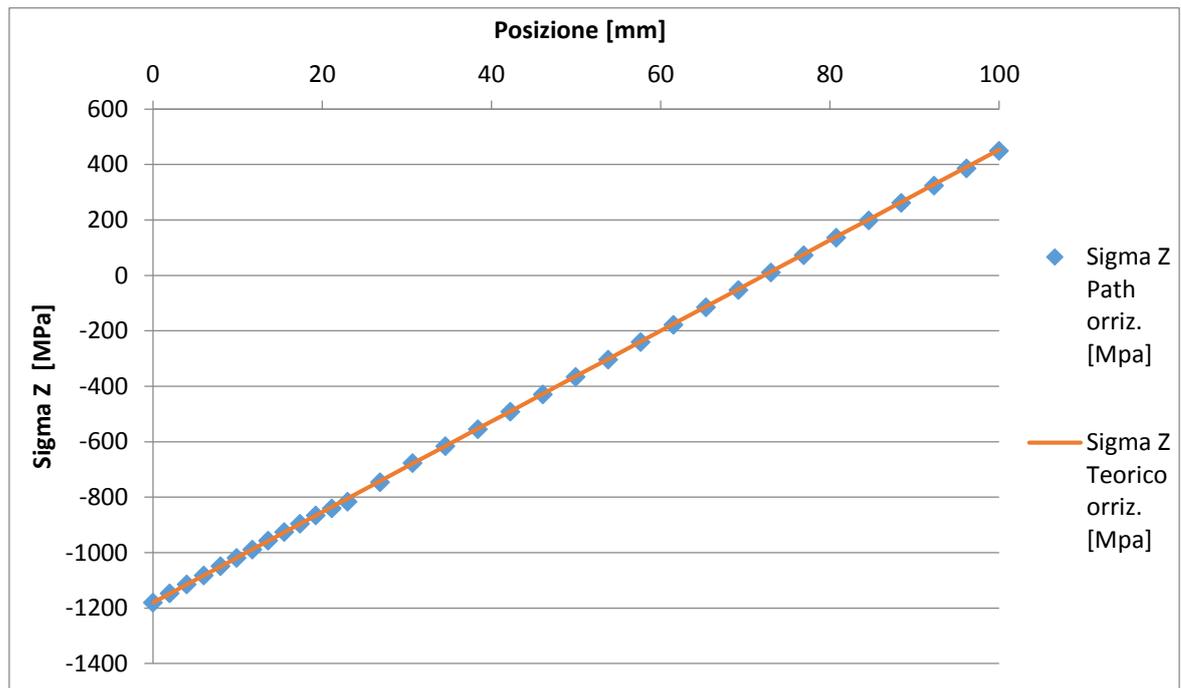
$$\sigma_z = \frac{M_{fx'} * y'}{J_{x'}} + \frac{M_{fy'} * x'}{J_{y'}}$$

$$x' = x \cos \vartheta + y \sin \vartheta$$

$$y' = -x \sin \vartheta + y \cos \vartheta$$

	Risultati Path orizzontale	Risultati teorici				
Posizione [mm]	Sigma Z [MPa]	Sigma Z [MPa]	x [mm]	y [mm]	x' [mm]	y' [mm]
0,0	-1180,4	-1180,5	-23	-48	-40,57	-34,44978
2,0	-1147,9	-1147,8	-21	-48	-38,75	-35,2653
4,0	-1115,4	-1115,1	-19	-48	-36,92	-36,08082
6,0	-1082,6	-1082,4	-17	-48	-35,10	-36,89634
8,0	-1049,8	-1049,8	-15	-48	-33,27	-37,71186
9,9	-1019,5	-1019,1	-13,125	-48	-31,56	-38,47641
11,8	-989,2	-988,5	-11,25	-48	-29,84	-39,24096
13,6	-958,0	-957,8	-9,375	-48	-28,13	-40,00551
15,5	-926,7	-927,2	-7,5	-48	-26,42	-40,77007
17,4	-896,6	-896,5	-5,625	-48	-24,71	-41,53462
19,3	-866,5	-865,9	-3,75	-48	-23,00	-42,29917
21,1	-841,6	-835,3	-1,875	-48	-21,28	-43,06372
23,0	-816,6	-804,6	0	-48	-19,57	-43,82827
26,9	-747,1	-741,7	3,85	-48	-16,06	-45,39815
30,7	-677,5	-678,8	7,7	-48	-12,54	-46,96802
34,6	-616,4	-615,8	11,55	-48	-9,03	-48,5379
38,4	-555,3	-552,9	15,4	-48	-5,51	-50,10778
42,3	-492,4	-490,0	19,25	-48	-2,00	-51,67766
46,1	-429,5	-427,1	23,1	-48	1,52	-53,24754
50,0	-366,7	-364,2	26,95	-48	5,04	-54,81741
53,8	-303,9	-301,2	30,8	-48	8,55	-56,38729
57,7	-241,3	-238,3	34,65	-48	12,07	-57,95717
61,5	-178,6	-175,4	38,5	-48	15,58	-59,52705
65,4	-115,9	-112,5	42,35	-48	19,10	-61,09692
69,2	-53,2	-49,6	46,2	-48	22,61	-62,6668
73,1	9,5	13,4	50,05	-48	26,13	-64,23668
76,9	72,3	76,3	53,9	-48	29,64	-65,80656
80,8	135,0	139,2	57,75	-48	33,16	-67,37644
84,6	197,7	202,1	61,6	-48	36,67	-68,94631
88,5	260,4	265,0	65,45	-48	40,19	-70,51619
92,3	323,1	328,0	69,3	-48	43,70	-72,08607
96,2	385,9	390,9	73,15	-48	47,22	-73,65595
100,0	448,6	453,8	77	-48	50,74	-75,22582

Grafico di confronto:

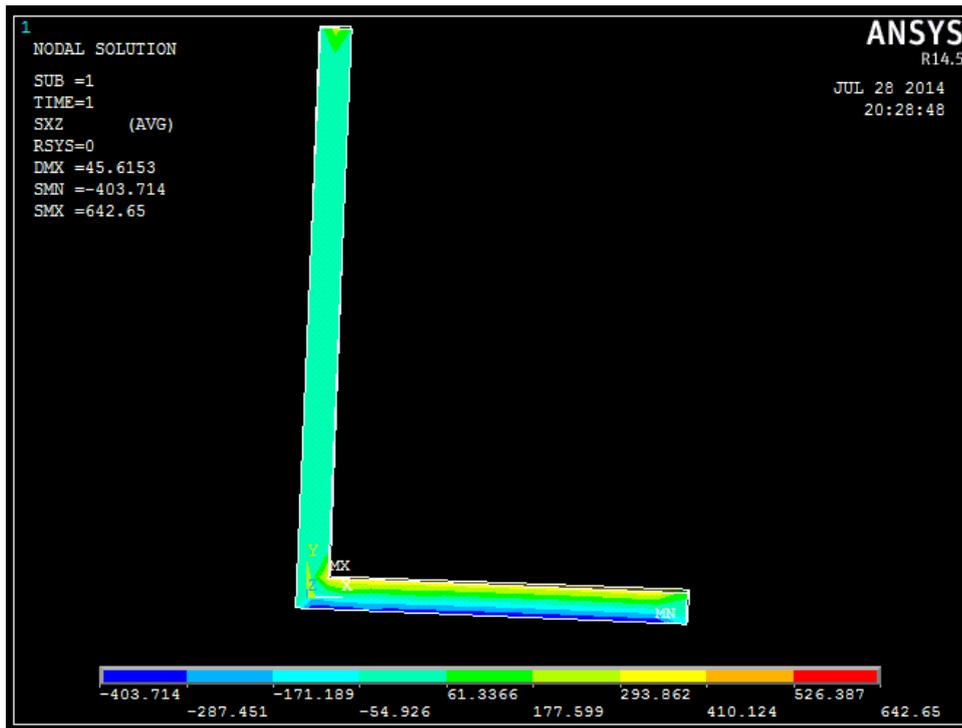


Si può notare, sia guardando il grafico che la tabella precedente, che i valori rilevati con i due metodi risultano essere praticamente coincidenti. Alcune lievi discrepanze si possono notare nel punto di applicazione della forza (a 23 mm circa lungo l'asse x): questo può essere dovuto ad una locale variazione del flusso di tensioni non rilevabile ovviamente dalle formulazioni analitiche.

4.1.2. Tensione τ dovuta al taglio e alla torsione

Si riporta innanzi tutto il contour plot relativo alle τ_{xz} :

Figura 4.3



Andiamo ad eseguire il confronto, riguardo alla tensione τ_{xz} , tra i risultati forniti dalle formulazioni analitiche e quelli forniti dal software di calcolo.

$$Mt = F * (xg - xc) = 100000 \text{ N} * 0,019 \text{ m} = 1900 \text{ N} * \text{m}$$

$$\tau_{max, torsione} = \frac{Mt}{Jt} * t$$

$$Jt = 41301,333 \text{ mm}^4$$

$$t = 8 \text{ mm}$$

$$\tau_{taglio} = \frac{T\eta * S\zeta}{J\zeta * b} + \frac{T\zeta * S\eta}{J\eta * b}$$

$$T\eta = T * \cos(24,15^\circ) = 91247,75 \text{ N}$$

$$T\zeta = T * \sin(24,15^\circ) = 40912,7 \text{ N}$$

Per rappresentare l'andamento teorico delle tensioni tangenziali si sono costruite per ogni ala della sezione due parabole (rappresentanti le due componenti di tensione dovute al taglio) di cui si conosce le coordinate del vertice e di altri due punti; le due parabole di ciascuna ala sono state sommate tra di loro tenendo conto dei versi dei flussi di tensione; si è poi andati a sommare a queste, la componente di tensione dovuta alla torsione.

Le componenti di tensione tangenziale del taglio e della torsione sono state sottratte/sommate in base al verso dei flussi di tensione.

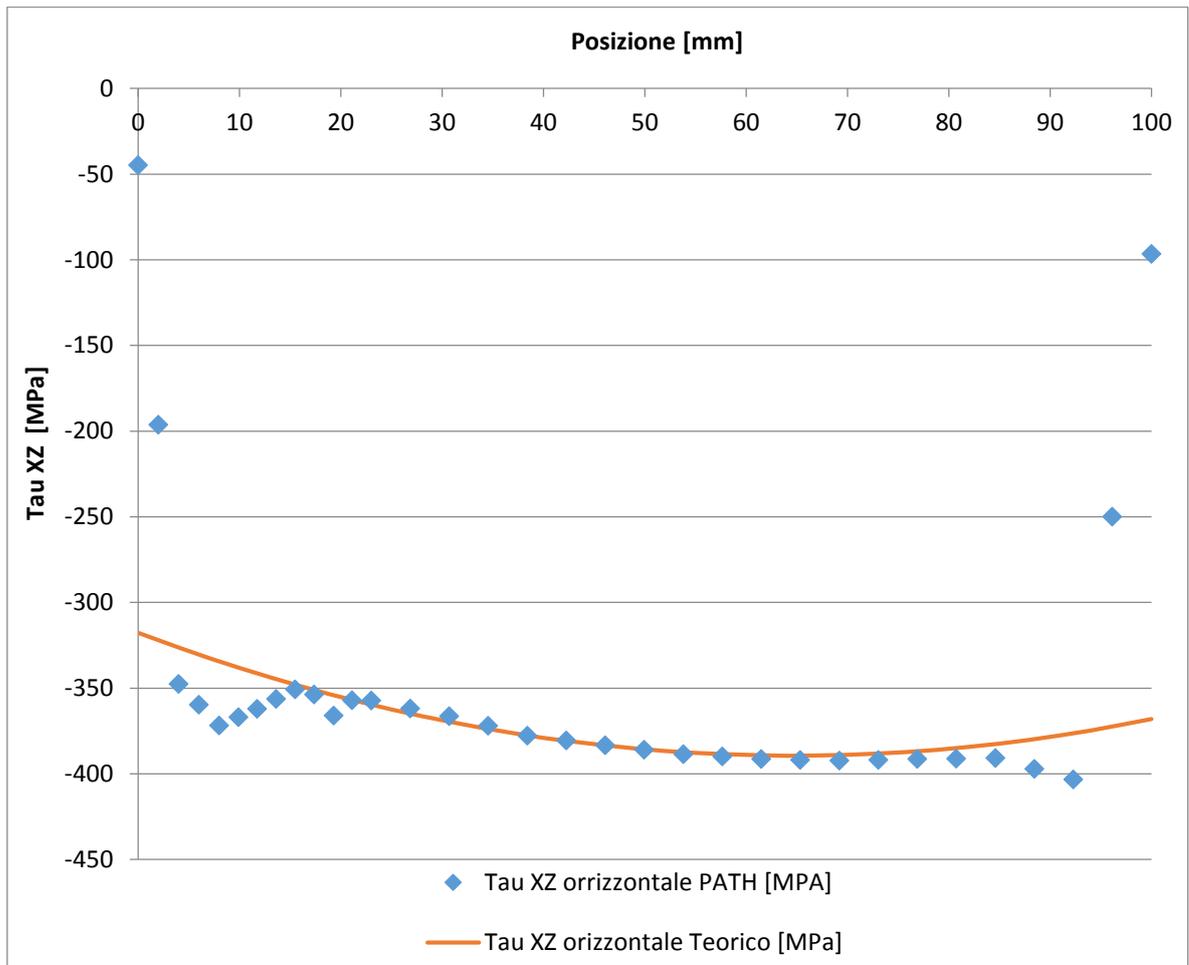
Risultati teorici				
Posizione [mm]	Tau XZ torsione MAX [MPa]	Tau XZ taglio (1°componente) [MPa]	Tau XZ taglio (2°componente) [MPa]	Tau XZ TOT. [MPa]
		$S_{\eta} = 11296$	$S_{\zeta} = 42488$	
100,0	368	0,00	0,00	-368,00
97,0	368	-6,45	-2,97	-371,48
94,0	368	-12,54	-5,89	-374,65
91,0	368	-18,27	-8,76	-377,51
88,0	368	-23,64	-11,58	-380,06
85,0	368	-28,66	-14,36	-382,30
82,0	368	-33,32	-17,08	-384,24
79,0	368	-37,62	-19,76	-385,86
76,0	368	-41,57	-22,39	-387,18
73,0	368	-45,16	-24,96	-388,19
70,0	368	-48,39	-27,49	-388,89
67,0	368	-51,26	-29,98	-389,28
64,0	368	-53,78	-32,41	-389,37
61,0	368	-55,94	-34,79	-389,14
58,0	368	-57,74	-37,13	-388,61
55,0	368	-59,18	-39,41	-387,77
52,0	368	-60,27	-41,65	-386,62
49,0	368	-61,00	-43,84	-385,16
46,0	368	-61,37	-45,98	-383,40
43,0	368	-61,39	-48,07	-381,32
40,0	368	-61,05	-50,11	-378,94
37,0	368	-60,35	-52,10	-376,25
34,0	368	-59,29	-54,04	-373,25
31,0	368	-57,88	-55,94	-369,94
28,0	368	-56,11	-57,79	-366,32
25,0	368	-53,98	-59,58	-362,39
22,0	368	-51,49	-61,33	-358,16

19,0	368	-48,65	-63,03	-353,62
16,0	368	-45,45	-64,68	-348,77
13,0	368	-41,89	-66,29	-343,61
10,0	368	-37,98	-67,84	-338,14
7,0	368	-33,71	-69,35	-332,36
4,0	368	-29,08	-70,80	-326,28
0,0	368,0	-22,3	-72,7	-317,68

	Risultati PATH
Posizione [mm]	Tau XZ TOT. [MPa]
0,0	-44,7
2,0	-196,1
4,0	-347,5
6,0	-359,5
8,0	-371,6
9,9	-366,8
11,8	-362,0
13,6	-356,3
15,5	-350,6
17,4	-353,7
19,3	-365,8
21,1	-357,0
23,0	-357,2
26,9	-361,7
30,7	-366,2
34,6	-371,9
38,4	-377,6
42,3	-380,4
46,1	-383,2
50,0	-385,8
53,8	-388,4
57,7	-389,8
61,5	-391,2
65,4	-391,7
69,2	-392,2
73,1	-391,7
76,9	-391,2
80,8	-391,0
84,6	-390,7
88,5	-397,0
92,3	-403,2

96,2	-249,9
100,0	-96,5

Grafico di confronto:



Si può notare come l'andamento dei risultati ottenuti con i due metodi risulti essere coincidente nel tratto centrale. La non coincidenza alle estremità dell'ala può essere dovuta al fatto che il valore teorico delle tau dovute al momento torcente non è un valore locale ma bensì un valore massimo; si deve inoltre tenere conto del fatto che all'estremità sinistra dell'ala orizzontale abbiamo una variazione di forma dovuta all'ala verticale della sezione stessa.

Possiamo ora andare a plottare il solo andamento delle tensioni di taglio relative all'ala orizzontale: per fare questo è necessario andare ad applicare la forza in corrispondenza del centro di taglio, in maniera tale da andare a togliere l'effetto del momento torcente indotto. Il risultato confrontato con le formulazioni analitiche è il seguente:

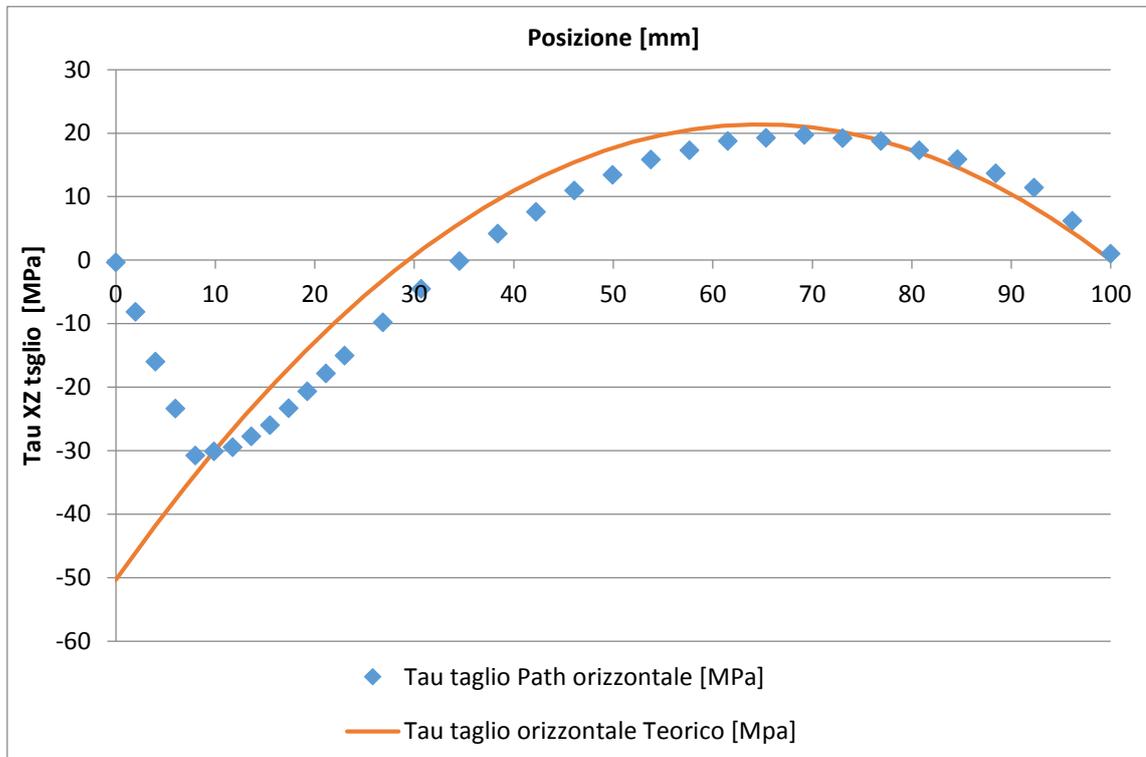
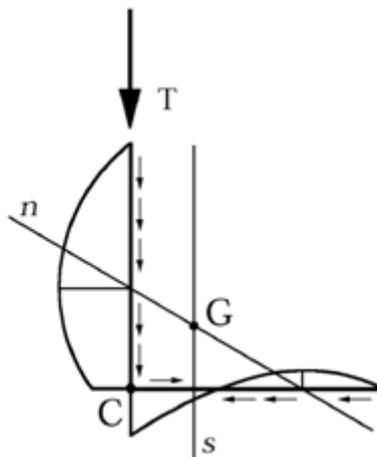


Figura 4.4

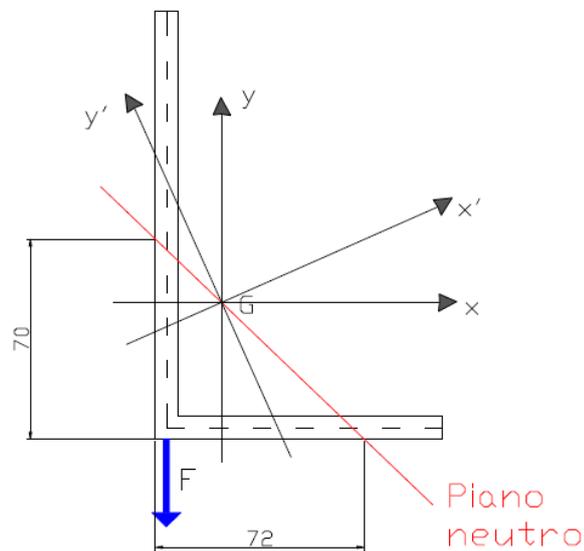


Come si può vedere, l'andamento delle tensioni tangenziali di taglio τ_{zx} ricavate dal Path orizzontale coincide, seppur con qualche differenza, con l'andamento teorico. Inoltre si può

notare come il vertice della parabola delle tensioni tangenziali di taglio sia all'intersezione tra l'asse neutro e la sezione stessa (ovvero a 72 mm circa dallo spigolo di intersezione tra le due ali, per l'ala orizzontale). Le differenze che ci sono, possono essere dovute all'approssimazione fatta per il calcolo del momento statico del primo ordine.

Il fatto che il fem indichi che all'estremità di sinistra dell'ala orizzontale le tau di taglio sono uguali a zero è causato dal fatto che nello spigolo devono per forza essere uguali a zero le tau stesse; nella teoria invece le tau di taglio sono diverse da zero perché si considera l'andamento della tensione di taglio lungo la linea media.

Figura 4.5

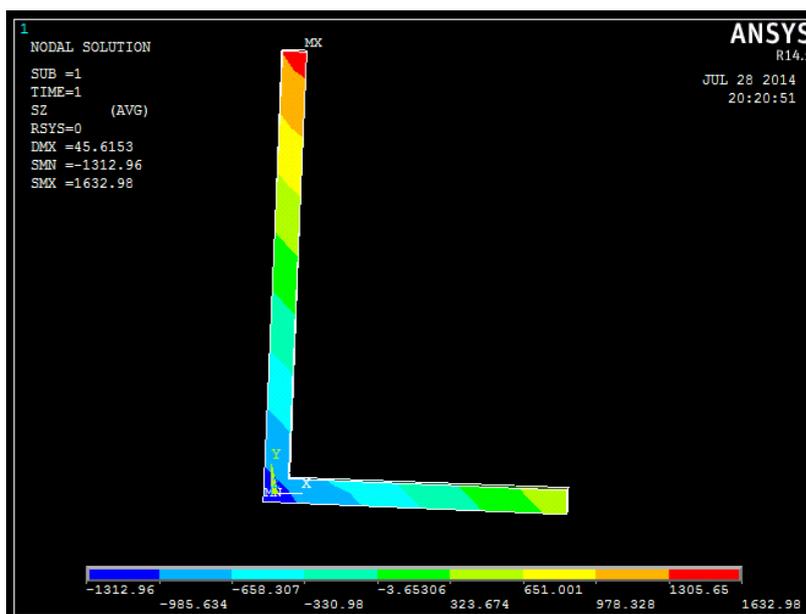


4.2.Path Verticale

4.2.1.Tensione σ dovuta alla flessione

Si riporta innanzi tutto il contour plot relativo alle σ di flessione:

Figura 4.6

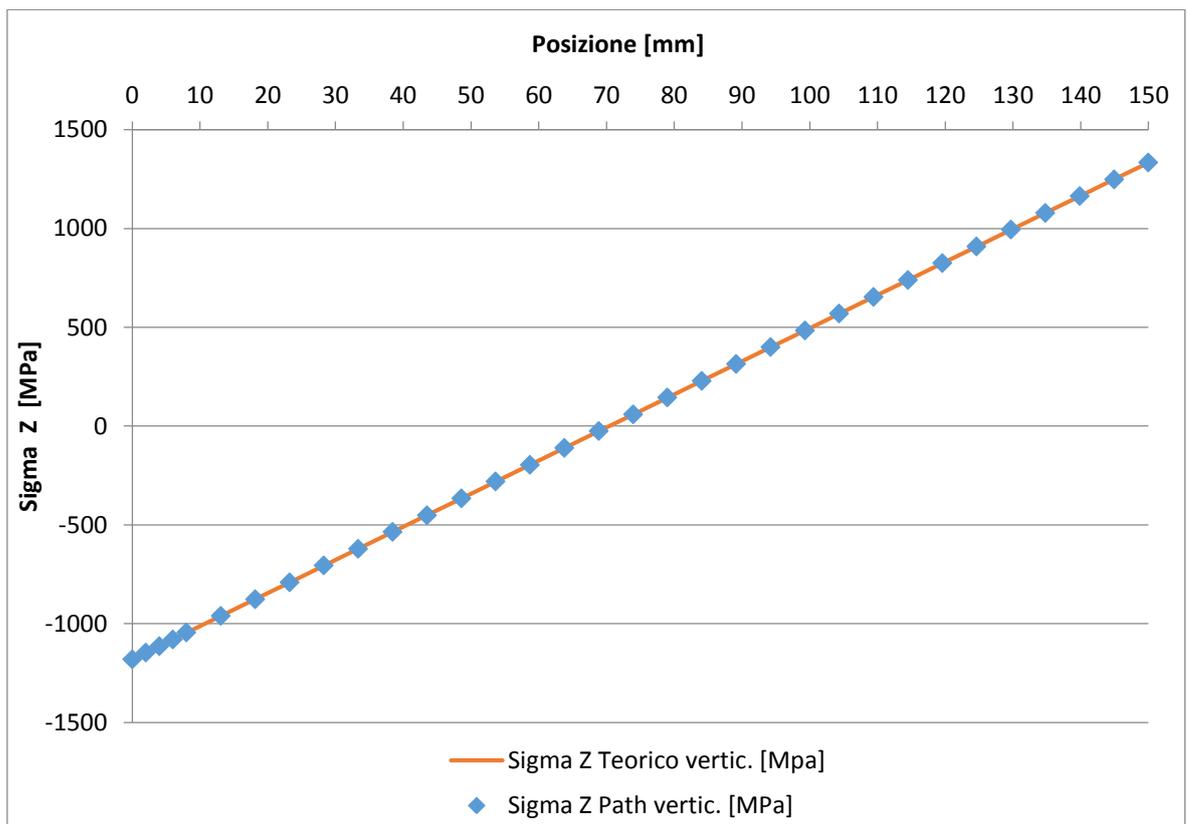


Andiamo ad eseguire il confronto, riguardo alla tensione σ di flessione, tra i risultati forniti dalle formulazioni analitiche e quelli forniti dal software di calcolo.

	Risultati Path Verticale	Risultati teorici				
Posizione [mm]	Sigma Z [MPa]	Sigma Z [MPa]	x [mm]	y [mm]	x' [mm]	y' [mm]
0,0	-1180,4	-1180,5	-23	-48,000	-40,5735	-34,44978
2,0	-1147,4	-1147,0	-23	-46,000	-39,7580	-32,6236
4,0	-1114,3	-1113,5	-23	-44,000	-38,9425	-30,79742
6,0	-1079,9	-1079,9	-23	-42,000	-38,1270	-28,97125
8,0	-1045,6	-1046,4	-23	-40,000	-37,3115	-27,14507
13,1	-960,9	-961,4	-23	-34,929	-35,2437	-22,51479
18,1	-876,3	-876,4	-23	-29,857	-33,1755	-17,88361
23,2	-791,2	-791,4	-23	-24,786	-31,1078	-13,25333
28,3	-706,2	-706,4	-23	-19,714	-29,0396	-8,622145
33,4	-621,1	-621,3	-23	-14,643	-26,9719	-3,991871
38,4	-536,1	-536,3	-23	-9,571	-24,9037	0,639316
43,5	-451,1	-451,3	-23	-4,500	-22,8360	5,26959
48,6	-366,0	-366,3	-23	0,571	-20,7682	9,899864
53,6	-281,0	-281,3	-23	5,643	-18,7001	14,53105
58,7	-196,0	-196,3	-23	10,714	-16,6323	19,16133
63,8	-111,0	-111,3	-23	15,786	-14,5641	23,79251
68,9	-26,0	-26,3	-23	20,857	-12,4964	28,42279
73,9	59,0	58,7	-23	25,929	-10,4282	33,05397
79,0	144,1	143,8	-23	31,000	-8,3605	37,68425

84,1	229,1	228,8	-23	36,071	-6,2927	42,31452
89,1	314,1	313,8	-23	41,143	-4,2246	46,94571
94,2	399,1	398,8	-23	46,214	-2,1568	51,57598
99,3	484,1	483,8	-23	51,286	-0,0886	56,20717
104,4	569,1	568,9	-23	56,360	1,9803	60,84018
109,4	654,1	653,8	-23	61,430	4,0477	65,46954
114,5	739,1	738,8	-23	66,500	6,1150	70,0989
119,6	824,1	823,8	-23	71,570	8,1824	74,72827
124,6	909,0	908,8	-23	76,640	10,2497	79,35763
129,7	994,0	993,8	-23	81,710	12,3171	83,98699
134,8	1079,0	1078,9	-23	86,790	14,3885	88,62548
139,9	1164,1	1163,9	-23	91,860	16,4558	93,25484
144,9	1248,8	1248,9	-23	96,930	18,5232	97,8842
150,0	1333,6	1333,9	-23	102,000	20,5905	102,5136

Grafico di confronto:

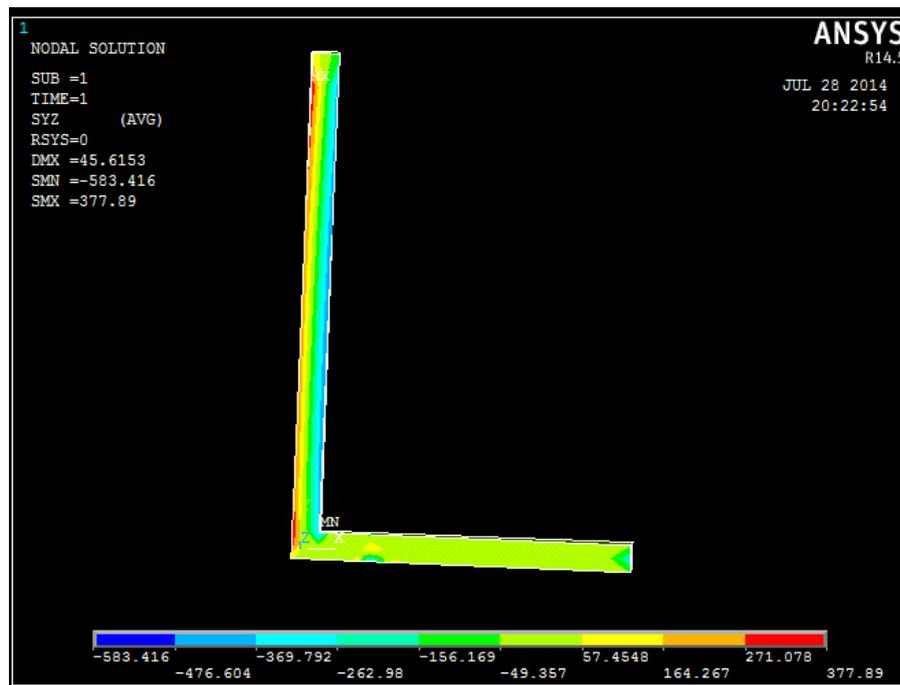


Si può notare, sia guardando il grafico che la tabella precedenti, che i valori rilevati con i due metodi risultano essere praticamente coincidenti.

4.2.2. Tensione τ dovuta al taglio e alla torsione

Si riporta innanzi tutto il contour plot relativo alle τ_{yz} :

Figura 4.7



Andiamo ad eseguire il confronto, riguardo alla tensione τ_{yz} , tra i risultati forniti dalle formulazioni analitiche e quelli forniti dal software di calcolo.

	Risultati teorici			
Posizione [mm]	Tau YZ torsione MAX [MPa]	Tau YZ taglio (1° componente) [MPa]	Tau YZ taglio (2° componente) [MPa]	Tau YZ TOT. [MPa]
		$S_{\eta} = 4145,70775$	$S_{\zeta} = 45984,00162$	
150,0	368	0,04	0,00	368,04
147,0	368	-2,57	-5,24	360,19
144,0	368	-5,01	-10,34	352,65
141,0	368	-7,30	-15,29	345,41

138,0	368	-9,43	-20,11	338,47
135,0	368	-11,39	-24,78	331,83
132,0	368	-13,20	-29,31	325,49
129,0	368	-14,84	-33,70	319,46
126,0	368	-16,33	-37,95	313,73
123,0	368	-17,65	-42,05	308,30
120,0	368	-18,82	-46,01	303,17
117,0	368	-19,83	-49,83	298,34
114,0	368	-20,67	-53,51	293,82
111,0	368	-21,36	-57,05	289,60
108,0	368	-21,88	-60,44	285,68
105,0	368	-22,25	-63,69	282,06
102,0	368	-22,45	-66,81	278,74
99,0	368	-22,50	-69,77	275,73
96,0	368	-22,38	-72,60	273,02
93,0	368	-22,11	-75,29	270,61
90,0	368	-21,67	-77,83	268,50
87,0	368	-21,07	-80,23	266,70
84,0	368	-20,32	-82,49	265,19
81,0	368	-19,40	-84,61	263,99
78,0	368	-18,33	-86,58	263,09
75,0	368	-17,09	-88,41	262,50
72,0	368	-15,69	-90,10	262,20
69,0	368	-14,14	-91,65	262,21
66,0	368	-12,42	-93,06	262,52
63,0	368	-10,55	-94,33	263,13
60,0	368	-8,51	-95,45	264,04
57,0	368	-6,31	-96,43	265,26
54,0	368	-3,96	-97,27	266,77
51,0	368	-1,4	-97,97	268,59
48	368	1,2	-98,52	270,71
45	368	4,1	-98,94	273,14
42	368	7,1	-99,21	275,86
39	368	10,2	-99,34	278,89
36	368	13,5	-99,33	282,22
33	368	17,0	-99,17	285,85
30	368	20,7	-98,88	289,79
27	368	24,5	-98,44	294,02
24	368	28,4	-97,86	298,56
21	368	32,5	-97,13	303,40
18	368	36,8	-96,27	308,54

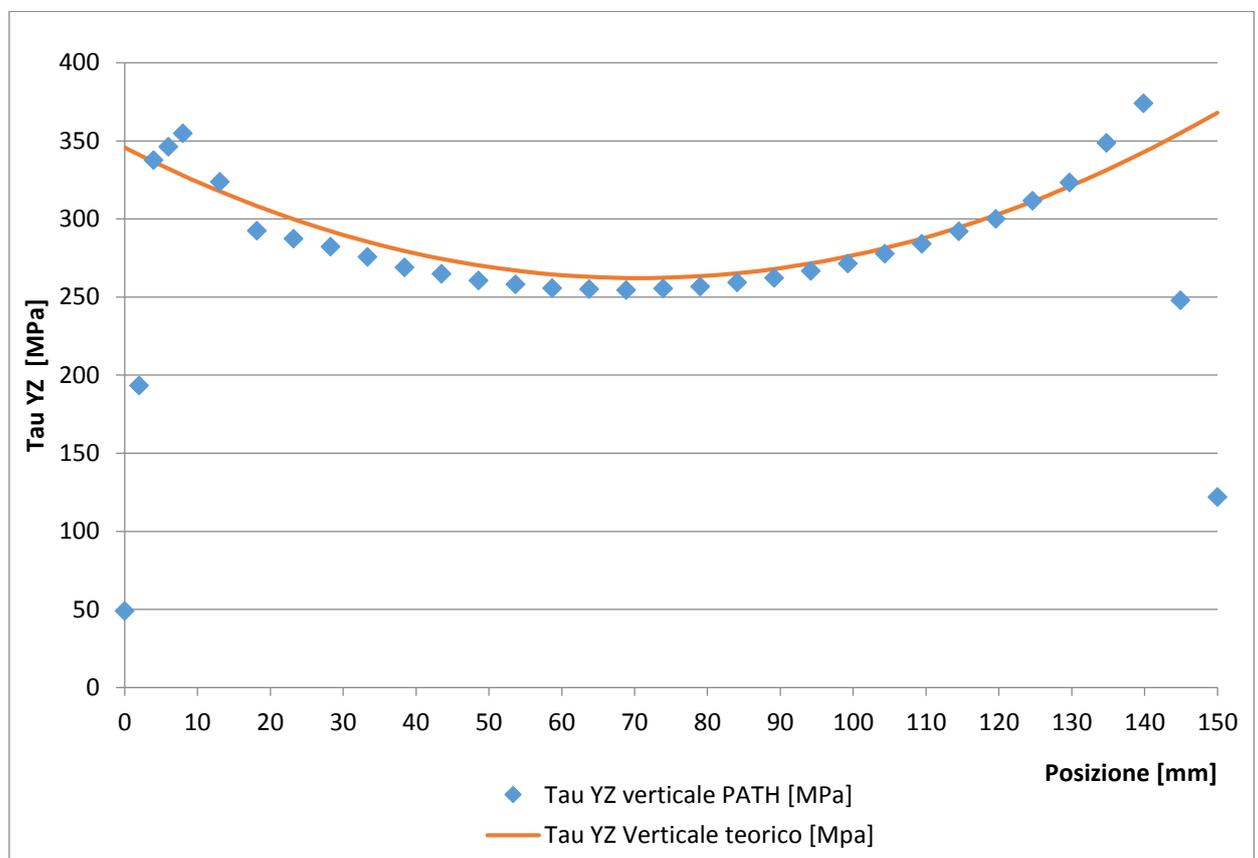
15	368	41,3	-95,26	313,99
12	368	45,8	-94,12	319,73
9	368	50,6	-92,83	325,78
6	368	55,5	-91,40	332,13
3	368	60,6	-89,82	338,78
0	368	65,8	-88,11	345,74

	Risultati PATH
Posizione [mm]	Tau YZ TOT. [MPa]
0,0	49,0
2,0	193,4
4,0	337,7
6,0	346,2
8,0	354,8
13,1	323,7
18,1	292,6
23,2	287,5
28,3	282,4
33,4	275,7
38,4	269,0
43,5	264,8
48,6	260,6
53,6	258,1
58,7	255,7
63,8	255,1
68,9	254,4
73,9	255,5
79,0	256,6
84,1	259,4
89,1	262,3
94,2	266,8
99,3	271,4
104,4	277,7
109,4	284,0
114,5	292,0
119,6	300,0
124,6	311,7
129,7	323,4
134,8	348,7
139,9	374,0

144,9	248,0
150,0	122,0

Le componenti di tensione tangenziale del taglio e della torsione sono state sottratte/sommate in base al verso dei flussi di tensione.

Grafico di confronto:



Si può notare che l'andamento dei risultati ottenuti con i due metodi è all'incirca lo stesso; alcune differenze possono essere dovute al fatto che il valore della tensione tangenziale teorica dovuta al momento torcente è il valore massimo e non il valore locale; si deve inoltre tenere conto del fatto che all'estremità inferiore dell'ala verticale si ha una variazione di forma dovuta all'ala orizzontale della sezione stessa.

Possiamo ora andare a plottare il solo andamento delle tensioni tangenziali di taglio relative al path sull'ala verticale. Il risultato, confrontato con le formulazioni analitiche, è il seguente:

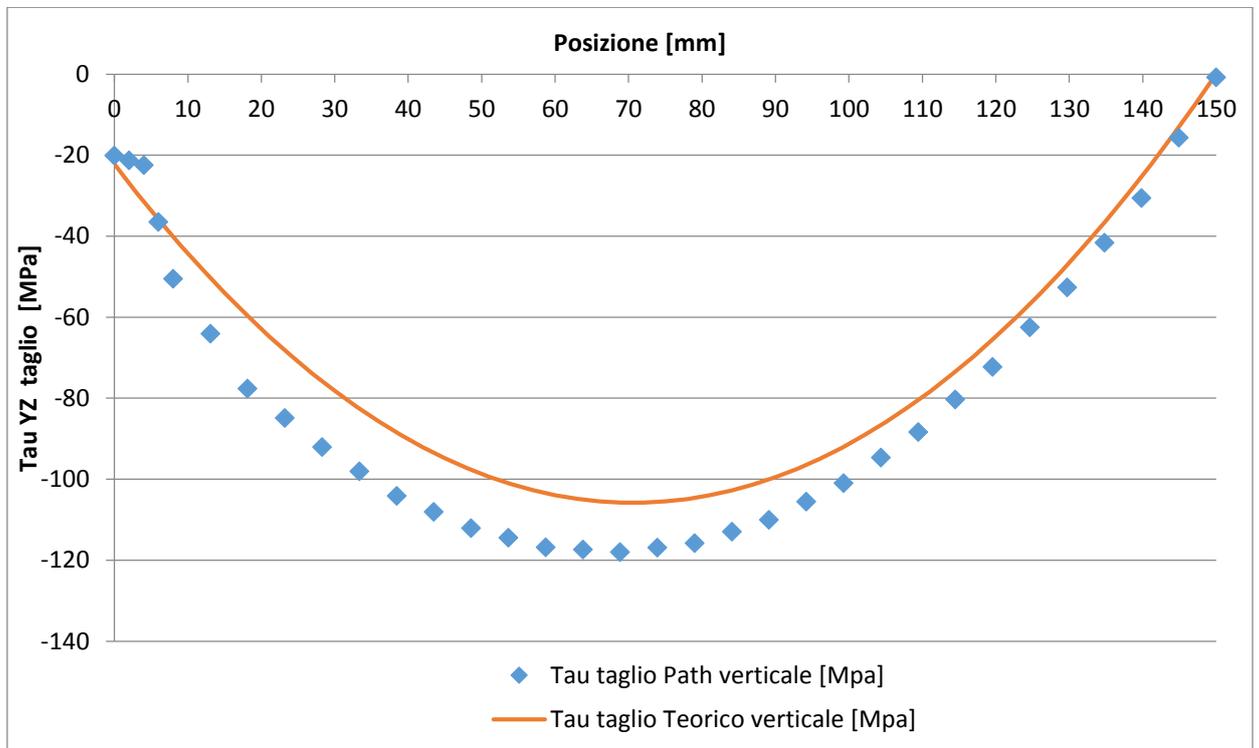
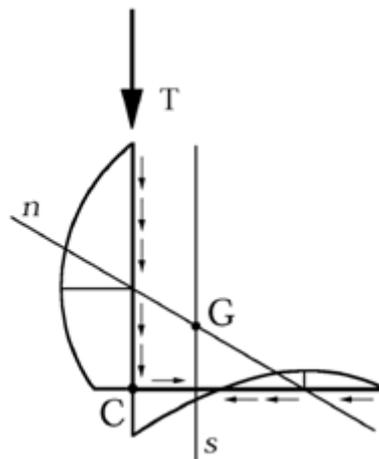


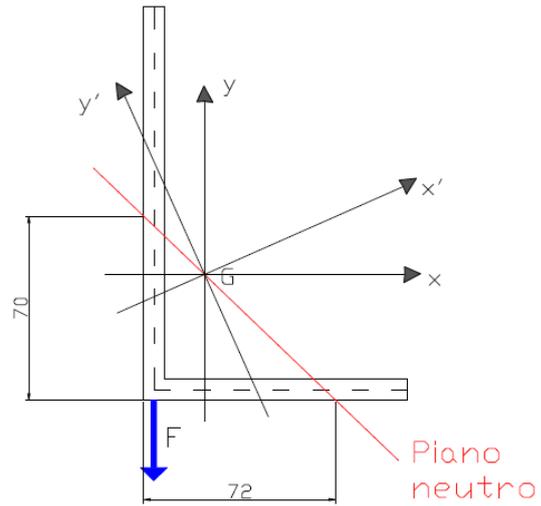
Figura 4.8



Come si può vedere, l'andamento delle tensioni tangenziali τ_{zy} ricavate dal Path verticale, coincide in buona parte con l'andamento teorico (errore max 10%). Inoltre si può notare come il vertice della parabola delle tensioni tangenziali dovute al taglio sia all'intersezione tra l'asse

neutro e la sezione stessa (ovvero a 70 mm circa dallo spigolo di intersezione tra le due ali, per l'ala verticale). La differenza del valore minimo della tau di taglio tra i due casi può essere dovuta all'approssimazione fatta per il calcolo del momento statico del primo ordine.

Figura 4.9



CAPITOLO 5

1. Conclusioni

Dall'analisi condotta si è potuto vedere come le tensioni σ dovute alla flessione ricavate con il software, risultano essere praticamente coincidenti a quelle ricavate teoricamente; questo perché l'analisi è stata condotta nella sezione di mezzeria, abbastanza lontana dal vincolo e dal punto di applicazione della forza; questo è stato riscontrato sia lungo il path verticale, che quello orizzontale.

Per quanto riguarda le tensioni tangenziali τ , le differenze rilevate tra i due metodi possono ritenersi minime: esse sono dovute in larga parte all'effetto della variazione di forma della sezione in corrispondenza del punto di incontro tra le due ali; è da considerare anche il fatto che il valore teorico delle τ dovute al momento torcente è un valore massimo e non locale.

Bibliografia

“Costruzione di Macchine” , Cleup , Marino Quaresimin, Michele Zappalorto