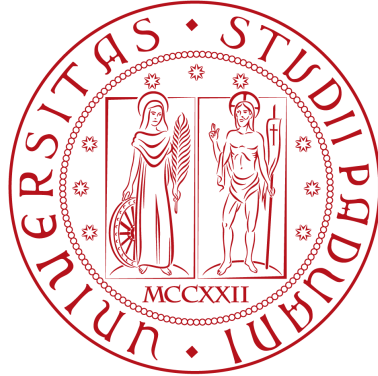


UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA



LAUREA IN FISICA

Generazione di Seconda Armonica mediante Cristalli Non Lineari

Autore:

Fabio Bergamin
1008813

Relatore:

Dott. Jean-Pierre Zendri

Dipartimento di Fisica e Astronomia
Galileo Galilei

11 dicembre 2014

“From a long view of the history of mankind — seen from, say, ten thousand years from now — there can be little doubt that the most significant event of the 19th century will be judged as Maxwell’s discovery of the laws of electrodynamics. The American Civil War will pale into provincial insignificance in comparison with this important scientific event of the same decade.”

Richard Feynman

Indice

Indice	ii
Costanti Fisiche	iii
1 Ottica Non Lineare	1
1.1 Equazione delle Onde Parassiale in un Mezzo Non Lineare	1
1.2 Generazione di Seconda Armonica	3
1.2.1 Equazioni Accoppiate per la Generazione di Seconda Armonica . .	3
1.3 Onde Piane	4
1.3.1 Conversione Debole per Onde Piane	4
1.3.2 Phase Matching e Quasi Phase Matching	6
1.3.3 Conversione Forte per Onde Piane	7
2 SHG per fasci gaussiani	9
2.1 Fasci Gaussiani in Dielettrici Lineari	9
2.2 Passaggio Singolo in Conversione Debole	11
2.3 Doppio Passaggio	16
2.3.1 Ottica Matriciale	17
2.3.2 Doppio Passaggio in Conversione Debole	18
2.4 Passaggio Singolo in Conversione Forte	24
2.5 Cavità Ottica	26
3 Esperimento	30
3.1 Apparato Sperimentale	30
3.2 Cavità Ottica	32
3.3 Conclusioni	34
Bibliografia	35

Costanti Fisiche

$$\begin{array}{ll} \text{Velocità della luce nel vuoto} & c = 299\,792\,458 \frac{\text{m}}{\text{s}} \\ \text{costante dielettrica nel vuoto} & \epsilon_0 = 8.854\,188 \times 10^{-12} \frac{\text{J}}{\text{mV}^2} \end{array}$$

a Elda...

Capitolo 1

Ottica Non Lineare

1.1 Equazione delle Onde Parassiale in un Mezzo Non Lineare

Quando la radiazione elettromagnetica in un cristallo con mancanza di simmetria per inversione ha intensità elevata, la risposta del materiale non è lineare, ma la polarizzazione dipende anche da potenze superiori di \mathbf{E}

$$\mathbf{P} = \epsilon_0(\chi^{(1)}\mathbf{E} + \chi^{(2)}\mathbf{E}^2 + \dots) \quad (1.1)$$

$$= \epsilon_0\chi^{(1)}\mathbf{E} + \mathbf{P}^{NL} \quad (1.2)$$

avendo nell'ultima eguaglianza scomposto il campo polarizzazione nella componente lineare e in quella non lineare. Dalle equazioni di Maxwell in un materiale non magnetico, in assenza di cariche e di correnti libere, e con l'approssimazione¹ che $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$, si ottiene la seguente equazione.

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0 c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{P} \quad (1.3)$$

se sostituiamo in questa la 1.2 e riordiniamo, otteniamo

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\mathbf{E} + \chi \mathbf{E}) = \frac{1}{\epsilon_0 c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{P}^{NL} \quad (1.4)$$

¹la divergenza è trascurabile per i casi di onde parassiali ed è identicamente nulla per le onde piane

Il valore $\epsilon_r = 1 + \chi$, la permittività relativa, risulta essere uguale a n^2 ; infatti, se trascuriamo il secondo membro della 1.4, abbiamo l'equazione delle onde elettromagnetiche nel mezzo, aventi velocità pari a c/n . L'equazione diventa perciò

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{n^2}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0 c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{P}^{NL} \quad (1.5)$$

ed è valida per ogni componente in frequenza dei campi \mathbf{E} e \mathbf{P}^{NL} che supponiamo propagarsi nella direzione dell'asse z e possiamo descrivere come

$$\mathbf{E} = \sum_n \mathbf{E}_n \quad (1.6)$$

$$\mathbf{P}^{NL} = \sum_n \mathbf{P}_n^{NL} \quad (1.7)$$

con

$$\mathbf{E}_n(\mathbf{r}, t) = \mathcal{E}_n(\mathbf{r}) e^{i(k_n z - \omega_n t)} + \text{c.c.} \quad (1.8)$$

$$\mathbf{P}_n^{NL}(\mathbf{r}, t) = \mathcal{P}_n^{NL}(\mathbf{r}) e^{i(k'_n z - \omega_n t)} + \text{c.c.} \quad (1.9)$$

ove \mathcal{E}_n e \mathcal{P}_n^{NL} sono ampiezze complesse. Le sommatorie in 1.6 e 1.7 sono estese solo alle frequenze ω_n positive. Applichiamo ora l'approssimazione parassiale, ovvero supponiamo che l'onda si propaghi principalmente lungo l'asse ottico z e che dunque la variazione longitudinale della sua ampiezza avvenga su distanze molto più lunghe della sua lunghezza d'onda; matematicamente ciò equivale a dire

$$\left| \frac{\partial^2 \mathcal{E}_n(\mathbf{r})}{\partial z^2} \right| \ll k_n \left| \frac{\partial \mathcal{E}_n(\mathbf{r})}{\partial z} \right| \quad (1.10)$$

dopo alcuni passaggi la 1.5 diventa

$$\left(\nabla_t^2 + 2ik_n \frac{\partial}{\partial z} \right) \mathcal{E}_n(\mathbf{r}) = -\frac{\omega_n^2}{\epsilon_0 c^2} \mathcal{P}_n^{NL}(\mathbf{r}) e^{i\Delta k_n z} \quad (1.11)$$

ove è stato introdotto il laplaciano trasverso in coordinate cilindriche

$$\nabla_t^2 = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \quad (1.12)$$

e dove si è posto

$$\Delta k_n = k'_n - k_n \quad (1.13)$$

1.2 Generazione di Seconda Armonica

Come visto, nei materiali non lineari la polarizzazione elettrica dipende anche da potenze superiori alla prima del campo elettrico. Per studiare l'effetto di generazione di seconda armonica (SHG: Second Harmonic Generator) è sufficiente considerare la dipendenza quadratica nella 1.1; infatti, se il campo elettromagnetico ha un andamento sinusoidale con pulsazione ω , la risposta non lineare della polarizzazione avrà un andamento proporzionale a

$$\sin^2(\omega t) = \frac{1 - \cos(2\omega t)}{2} \quad (1.14)$$

cioè con pulsazione doppia. Il termine “seconda armonica” deriva dal linguaggio della musica: la seconda armonica di una nota è la nota con frequenza doppia, ovvero l'ottava superiore.

1.2.1 Equazioni Accoppiate per la Generazione di Seconda Armonica

Il termine non lineare della polarizzazione al secondo membro della 1.11 è legato al campo elettrico incidente tramite la

$$P_l^{(2)}(\mathbf{r}) = \epsilon_0 \sum_{m,n=1}^3 \chi_{lmn}^{(2)} E_m(\mathbf{r}) E_n(\mathbf{r}) \quad (1.15)$$

ove la suscettività elettrica $\chi_{lmn}^{(2)}$ è un tensore a 27 componenti che tiene conto della natura anisotropa del cristallo. Poiché se si invertono gli indici l e m la componente del tensore non cambia, il numero di componenti indipendenti di $\chi_{lmn}^{(2)}$ si abbassa a 18, contraendo gli ultimi due indici. In generale comunque, fissata l'orientazione del cristallo rispetto alla luce incidente, possiamo considerare un valore efficace della suscettività, o meglio del coefficiente $d_{eff} = \chi_{eff}^{(2)}/2$. Inoltre E_m ed E_n possono essere riferiti a due campi distinti, con pulsazioni diverse ω_m e ω_n , dunque ora gli indici m e n si riferiscono alla frequenza e non alla componente del campo. Possiamo pertanto scrivere il termine non lineare della polarizzazione come

$$\mathcal{P}_l^{(2)} e^{ik'_l z} = 2\epsilon_0 d_{eff} \mathcal{E}_m e^{ik_m z} \mathcal{E}_n e^{ik_n z} \quad (1.16)$$

se m e n sono uguali, oppure

$$\mathcal{P}_l^{(2)} e^{ik'_l z} = 4\epsilon_0 d_{eff} \mathcal{E}_m e^{ik_m z} \mathcal{E}_n e^{ik_n z} \quad (1.17)$$

se m e n sono diversi, in quanto la sommatoria in 1.15 conta due volte ogni prodotto $E_m E_n$ con $m \neq n$. Se ora imponiamo che i due campi oscillino solo con pulsazioni ω e 2ω , gli accoppiamenti possibili sono

$$\mathcal{P}_{2\omega}^{(2)} e^{i(k_{2\omega} z - 2\omega t)} = 2\epsilon_0 d_{eff} \mathcal{E}_\omega e^{i(k_\omega z - \omega t)} \mathcal{E}_\omega e^{i(k_\omega z - \omega t)} \quad (1.18)$$

$$\mathcal{P}_\omega^{(2)} e^{i(k_\omega z - \omega t)} = 4\epsilon_0 d_{eff} \mathcal{E}_{2\omega} e^{i(k_{2\omega} z - 2\omega t)} \mathcal{E}_\omega^* e^{-i(k_\omega z - \omega t)} \quad (1.19)$$

che sostituiti nella 1.11 danno il sistema di due equazioni

$$\begin{cases} \frac{d}{dz} \mathcal{E}_{2\omega}(\mathbf{r}) = \frac{i}{2k_{2\omega}} \nabla_t^2 \mathcal{E}_{2\omega}(\mathbf{r}) + \frac{i2\omega}{cn_{2\omega}} d_{eff} \mathcal{E}_\omega^2(\mathbf{r}) e^{i\Delta k z} \\ \frac{d}{dz} \mathcal{E}_\omega(\mathbf{r}) = \frac{i}{2k_\omega} \nabla_t^2 \mathcal{E}_\omega(\mathbf{r}) + \frac{i\omega}{cn_\omega} 2d_{eff} \mathcal{E}_\omega^*(z) \mathcal{E}_{2\omega}(\mathbf{r}) e^{-i\Delta k z} \end{cases} \quad (1.20)$$

con

$$\Delta k = 2k_\omega - k_{2\omega} = \frac{2\omega}{c} (n_\omega - n_{2\omega}) \quad (1.21)$$

Le equazioni 1.20 sono quelle che governano la generazione di seconda armonica, esse andranno risolte per determinare $\mathcal{E}_{2/\omega}$ una volta noto il campo incidente \mathcal{E}_ω

1.3 Onde Piane

1.3.1 Conversione Debole per Onde Piane

Iniziamo lo studio di generazione di seconda armonica per il caso speciale di onde piane, cioè di onde nella forma

$$E(z) = \mathcal{E}(z) e^{ikz} \quad (1.22)$$

Per tali onde, dalle equazioni 1.20 scompare il laplaciano trasverso. Si parla di conversione debole quando si suppone che il campo fondamentale sia smorzato debolmente e che dunque la sua ampiezza \mathcal{E}_ω sia costante, l'approssimazione è valida se la seconda armonica prodotta ha un'intensità sufficientemente bassa. Dunque la seconda delle 1.20 è identicamente nulla e ci basta integrare la prima su tutta la lunghezza l del materiale. Il risultato è ²

$$\mathcal{E}_{2\omega}(l) = i \frac{2\omega d_{eff}}{cn_{2\omega}} l \mathcal{E}_\omega^2 e^{i \frac{\Delta k l}{2}} \text{sinc}\left(\frac{\Delta k l}{2}\right) \quad (1.23)$$

Dal momento che stiamo utilizzando la notazione complessa per descrivere l'oscillazione dell'onda elettromagnetica dobbiamo ricordarci che l'intensità di un'onda è proporzionale al quadrato dell'ampiezza reale del campo, ovvero al quadrato di

$$\tilde{E} = \tilde{\mathcal{E}} \cos(kz) \quad (1.24)$$

$$= \tilde{\mathcal{E}} \frac{e^{ikz} + e^{-ikz}}{2} \quad (1.25)$$

$$= \mathcal{E} e^{ikz} + c.c. \quad (1.26)$$

quando calcoliamo l'intensità a partire dall'ampiezza \mathcal{E} della 1.22 dobbiamo considerare che questa va moltiplicata per due in quanto $\mathcal{E} = |\tilde{\mathcal{E}}|/2$. L'intensità della seconda armonica all'uscita del cristallo si ottiene allora da

$$I_{2\omega} = 2c\epsilon_0 n_{2\omega} |\mathcal{E}_{2\omega}(l)|^2 \quad (1.27)$$

$$= \frac{2\omega^2 d_{eff}^2}{\epsilon_0 c^3 n_\omega^2 n_{2\omega}} l^2 I_\omega^2 \text{sinc}^2\left(\frac{\Delta k l}{2}\right) \quad (1.28)$$

se il fascio è confinato in una regione di area Σ , la potenza sarà data dall'intensità integrata su tutta l'area e il coefficiente di conversione avrà la forma

$$\eta(l, \Sigma, P_\omega) = \frac{P_{2\omega}(z=l)}{P_\omega(z=0)} \quad (1.29)$$

$$= \frac{2\omega^2 d_{eff}^2}{\epsilon_0 c^3 n_\omega^2 n_{2\omega}} l^2 \frac{P_\omega}{\Sigma} \text{sinc}^2\left(\frac{\Delta k l}{2}\right) \quad (1.30)$$

² $\text{sinc}(x) = \frac{\sin(x)}{x}$ è il *seno cardinale*

dove P_ω e $P_{2\omega}$ sono le potenze della luce alla frequenza angolare ω e 2ω rispettivamente.

1.3.2 Phase Matching e Quasi Phase Matching

Dall'equazione 1.27 osserviamo che se $\Delta k \neq 0$ l'intensità è proporzionale a $\sin^2(\Delta k l/2)$ e oscilla con periodo spaziale $2\pi/\Delta k$, dunque raggiunge il suo massimo dopo una lunghezza $l_c = \pi/\Delta k$, detta lunghezza di coerenza. Se la lunghezza del cristallo supera tale valore, l'intensità della seconda armonica comincia a diminuire a causa dell'interferenza distruttiva che si viene ad instaurare tra le due onde. Se invece $\Delta k = 0$, l'intensità cresce come l^2 , tuttavia tale condizione non è ottenibile se l'onda fondamentale e la seconda armonica si propagano lungo la stessa direzione e con la stessa polarizzazione, a causa della dipendenza dell'indice di rifrazione dalla frequenza dell'onda. Un metodo per aggirare tale ostacolo è quello di sfruttare la birifrangenza dei cristalli anisotropi, facendo viaggiare le due onde in direzioni diverse e posizionando il cristallo in modo tale da ottenere che la proiezione di una delle due sull'altra soddisfi alle condizioni di *phase matching*.

Grazie alle nuove tecnologie oggi sono disponibili cristalli PP (*Periodically Poled*) costituiti da strati sovrapposti di spessore pari alla lunghezza di coerenza, in cui la direzione dell'asse principale assume versi opposti alternatamente e di conseguenza anche il coefficiente di accoppiamento non lineare d_{eff} ha un inversione di segno periodica in grado di compensare lo sfasamento Δk . In tal modo quando l'ampiezza dell'onda generata raggiunge il valore massimo, il cambiamento di segno di d_{eff} permette all'ampiezza di crescere monotonicamente. In termini quantitativi è possibile determinare la serie di Fourier

$$d(z) = d_{eff} \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m e^{im \frac{2\pi}{\Lambda} z} \quad (1.31)$$

ove Λ è il periodo spaziale di $d(z)$ e

$$\begin{aligned} c_m &= \frac{1}{\Lambda} \int_0^\Lambda \frac{d(z)}{d_{eff}} e^{-im \frac{2\pi}{\Lambda} z} dz \\ &= e^{-i \frac{m\pi}{2}} \operatorname{sinc}\left(\frac{m\pi}{2}\right) \end{aligned}$$

infatti

$$d(z) = \begin{cases} d_{eff}, & z \in (0, \Lambda/2) \\ -d_{eff}, & z \in (\Lambda/2, \Lambda) \end{cases} \quad (1.32)$$

Tra tutti i termini della serie 1.31, c_1 è quello che dà il maggiore contributo; il coefficiente non lineare si riduce allora a

$$d'_{eff} = \frac{2}{\pi} d_{eff} \quad (1.33)$$

la condizione di *phase matching* si ottiene quando

$$\Delta k' = 2k_\omega - k_{2\omega} + m \frac{2\pi}{\Lambda} \quad (1.34)$$

raggiungibile facendo variare la temperatura del cristallo. Infatti sono dipendenti dalla temperatura sia la lunghezza del cristallo (e dunque la lunghezza $\Lambda/2$ dei suoi domini), sia gli indici di rifrazione della fondamentale e della seconda armonica.

1.3.3 Conversione Forte per Onde Piane

Quando il coefficiente di conversione è elevato, non è più possibile trascurare la diminuzione di intensità della fondamentale: vanno quindi risolte entrambe le equazioni accoppiate contemporaneamente. Poniamoci nel caso di *phase matching* perfetto ($\Delta k = 0$). Per ottenere equazioni reali dalle 1.20 ci basta considerare le quantità (reali) $\tilde{\mathcal{E}}_{2\omega} = \mathcal{E}_{2\omega} e^{i\phi_{2\omega}}$ e $\tilde{\mathcal{E}}_\omega = \mathcal{E}_\omega e^{i\phi_\omega}$, sostituirle nelle due equazioni accoppiate e porre $e^{i(\phi_{2\omega} - 2\phi_\omega)} = -i$. Il sistema si riduce a

$$\begin{cases} \frac{d}{dz} \tilde{\mathcal{E}}_{2\omega}(z) = \frac{2\omega}{cn_{2\omega}} d_{eff} \tilde{\mathcal{E}}_\omega^2(z) \\ \frac{d}{dz} \tilde{\mathcal{E}}_\omega(z) = -\frac{\omega}{cn_\omega} 2d_{eff} \tilde{\mathcal{E}}_\omega(z) \tilde{\mathcal{E}}_{2\omega}(z) \end{cases} \quad (1.35)$$

Con l'ulteriore condizione di conservazione dell'energia

$$\frac{d}{dz} (\tilde{\mathcal{E}}_{2\omega}^2 + \tilde{\mathcal{E}}_\omega^2) = 0 \quad (1.36)$$

e dal momento che in $z = 0$ è presente solo l'onda fondamentale di ampiezza $\tilde{\mathcal{E}}_0$ il sistema si può risolvere analiticamente, ottenendo

$$\begin{cases} \tilde{\mathcal{E}}_{2\omega}(z) = \sqrt{\frac{n_\omega}{n_{2\omega}}} \tilde{\mathcal{E}}_0 \tanh\left(\frac{2\omega d_{eff}}{c\sqrt{n_{2\omega}n_\omega}} \tilde{\mathcal{E}}_0 z\right) \\ \tilde{\mathcal{E}}_\omega(z) = \tilde{\mathcal{E}}_0 \operatorname{sech}\left(\frac{2\omega d_{eff}}{c\sqrt{n_{2\omega}n_\omega}} \tilde{\mathcal{E}}_0 z\right) \end{cases} \quad (1.37)$$

Le intensità delle due onde sono in relazione tramite la

$$I_{2\omega}(z) = I_0 \tanh^2\left(\frac{\omega d_{eff}}{cn_\omega} \sqrt{\frac{2}{c\epsilon_0 n_{2\omega}}} \sqrt{I_0} z\right) \quad (1.38)$$

E in questo caso il coefficiente di conversione risulta essere pari a

$$\eta(l, \Sigma, P_\omega) = \tanh^2\left(\frac{\omega d_{eff}}{cn_\omega} \sqrt{\frac{2}{c\epsilon_0 n_{2\omega}}} \sqrt{\frac{P_\omega}{\Sigma}} l\right) \quad (1.39)$$

Capitolo 2

SHG per fasci gaussiani

2.1 Fasci Gaussiani in Dielettrici Lineari

I raggi laser sono dei fasci di luce ben collimata, in grado di propagarsi per lunghe distanze con una piccola divergenza, necessitano perciò di un modello matematico opportuno per essere descritti adeguatamente e tale modello è offerto dalla soluzione dell'equazione delle onde parassiale 1.11, che in un mezzo lineare ha il secondo membro identicamente nullo. Se visti in sezione tali fasci presentano anche una struttura complessa, dovuta alla sovrapposizione di numerosi modi *hermitiani-gaussiani*, ma in tutta la nostra trattazione ci limiteremo a considerare il modo di oscillazione principale o TEM₀₀, che presenta una simmetria cilindrica. Per questo motivo la 1.11 si riduce a

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + 2ik \frac{\partial}{\partial z} \right) \mathcal{E}(r, z) = 0 \quad (2.1)$$

Consideriamo ora la generica onda sferica nella forma

$$\mathcal{E}(\rho) = \frac{e^{ik\rho}}{\rho} \quad (2.2)$$

con ρ la distanza dall'origine; nell'approssimazione parassiale

$$\rho = \sqrt{r^2 + z^2} \sim_{r \ll z} z + \frac{r^2}{2z} \quad (2.3)$$

l'onda può essere scritta come

$$E(r, z) = \mathcal{E}(r, z) e^{ikz} \quad (2.4)$$

con

$$\mathcal{E}(r, z) = \frac{1}{z} e^{ik\frac{r^2}{2z}} \quad (2.5)$$

che è ancora soluzione della 2.1 se si esegue la sostituzione di z con la quantità complessa $q = z - iz_0$, detta raggio di curvatura complesso; in tal caso infatti otteniamo un'ampiezza che ha un profilo gaussiano sul piano perpendicolare alla direzione di propagazione. La forma più utilizzata per descrivere un fascio gaussiano è la seguente:

$$E(r, z) = \mathcal{E}_0 \frac{w_0}{w(z)} e^{-\left(\frac{r}{w(z)}\right)^2} e^{i\frac{kr^2}{2R(z)}} e^{i(kz - \eta(z))} \quad (2.6)$$

ove $\mathcal{E}_0 = E(0, 0)$ è la massima ampiezza raggiunta.

Sono state introdotte le seguenti quantità:

- Raggio di curvatura: il raggio di curvatura reale del fronte d'onda

$$R(z) = z \left(1 + \left(\frac{z_0}{z} \right)^2 \right) \quad (2.7)$$

- Raggio del fascio: la distanza dall'asse di simmetria alla quale l'ampiezza del fascio è e^{-1} volte il suo valore massimo

$$w(z) = w_0 \sqrt{1 + \left(\frac{z}{z_0} \right)^2} \quad (2.8)$$

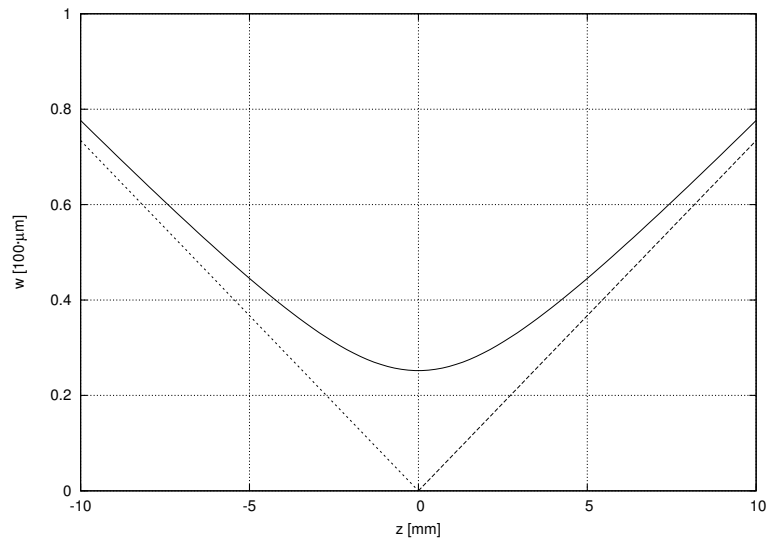


FIGURA 2.1: raggio del fascio per $w_0 = 34.5\mu\text{m}$, $z_0 = 3.5\text{mm}$

- Fase di Gouy:

$$\eta(z) = \arctan\left(\frac{z}{z_0}\right) \quad (2.9)$$

passando per il fuoco la fase dell'onda guadagna π radianti. Confrontata con un'onda piana con cui si trovi in fase a meno infinito, si troverà in opposizione di fase con essa a più infinito.

- Rayleigh *range*: la distanza dall'origine lungo la direzione di propagazione, entro la quale l'onda ha il comportamento più simile a quello di un'onda piana

$$z_0 = \frac{n\pi w_0^2}{\lambda} \quad (2.10)$$

il doppio di tale valore viene chiamato parametro confocale $b = 2z_0$.

- Raggio del *waist* (w_0): il minimo valore che assume il raggio del fascio a $z = 0$. Dal momento che i raggi del fascio non convergono in un punto, il piano $z = 0$ non è chiamato fuoco del fascio, ma *waist* (vita).
- divergenza:

$$\Theta = \frac{w_0}{z_0} \quad (2.11)$$

è la pendenza asintotica del raggio del fascio.

Una forma alternativa per esprimere l'ampiezza di un fascio gaussiano, che utilizzeremo spesso nel corso di questo capitolo, è la seguente:

$$\mathcal{E}(r, \zeta) = \mathcal{E}_0 \frac{1}{1 + i\zeta} e^{-\frac{r^2}{w_0^2(1+i\zeta)}} \quad (2.12)$$

dipendente dalla coordinata adimensionale $\zeta = z/z_0$.

2.2 Passaggio Singolo in Conversione Debole

Vogliamo ora calcolare il campo elettrico della seconda armonica generata da un fascio gaussiano che attraversa un cristallo di lunghezza l posizionato in modo da avere la faccia in ingresso a $z = 0$. Ci limiteremo al caso di conversione debole [1] applicato a cristalli PP. Sia il fascio incidente nella forma 2.12. Volendo studiare il caso più generale in cui il *waist* si trovi in $z = f$, eseguiamo la sostituzione $z \rightarrow z - f$ e il cambio di

variabile $\zeta = (z - f)/z_0$. Assumendo che l'ampiezza massima della seconda armonica $\mathcal{E}_{0,2\omega}$ sia nulla in $z = 0$ e che cresca all'interno del cristallo secondo la prima delle 1.20, quando quest'onda generata esce dal cristallo a $z = l$ il secondo membro dell'equazione accoppiata dev'essere nullo, ciò implica che l'onda deve avere un andamento gaussiano del tipo¹

$$\mathcal{E}_{2\omega}(r, \zeta) = \mathcal{E}_{0,2\omega}(\zeta) \frac{1}{1 + i\zeta} e^{-\frac{r^2}{w_{0,2\omega}^2(1+i\zeta)}} \quad (2.13)$$

Se sostituiamo questa espressione e quella per la fondamentale nella prima delle due equazioni accoppiate 1.20 otteniamo

$$\frac{d}{dz} \mathcal{E}_{0,2\omega}(\zeta) = i \frac{4\pi}{\lambda n_{2\omega}} d_{eff} \mathcal{E}_0^2 \frac{1}{1 + i\zeta} e^{i\Delta k' z} e^{\frac{r^2}{1+i\zeta} \left(\frac{2}{w_0^2} - \frac{1}{w_{0,2\omega}^2} \right)} \quad (2.14)$$

dove abbiamo sostituito il termine $2\omega/cn_{2\omega}$ con l'equivalente $4\pi/\lambda n_{2\omega}$ per evidenziare la dipendenza dalla lunghezza d'onda della fondamentale nel vuoto λ . Inoltre il termine $\Delta k'$ è quello introdotto nella 1.34.

Siccome abbiamo supposto che $\mathcal{E}_{0,2\omega}$ dipenda solo dalla coordinata longitudinale, il termine tra parentesi nell'ultimo esponenziale della 2.16 dev'essere nullo, perciò dev'essere

$$w_{0,2\omega} = \frac{w_0}{\sqrt{2}} \quad (2.15)$$

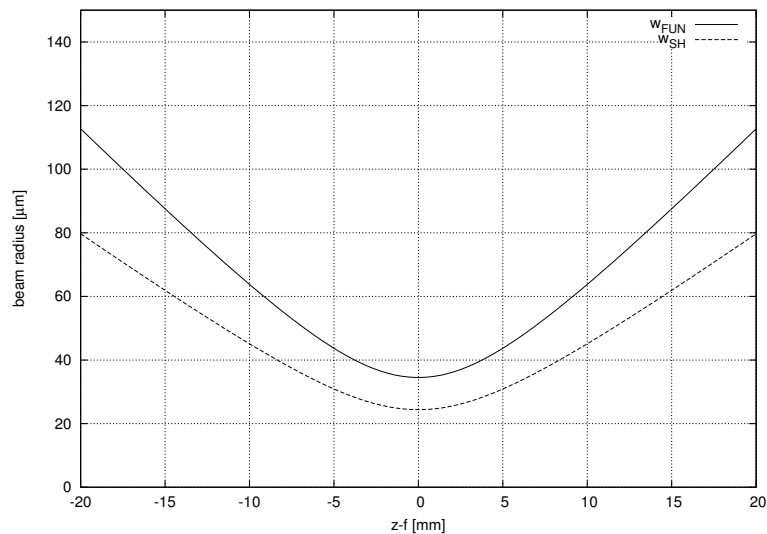


FIGURA 2.2: confronto tra i raggi dell'onda fondamentale e della seconda armonica

¹Assumiamo che la fondamentale e la seconda armonica abbiano il *waist* nella stessa posizione e che abbiano lo stesso Rayleigh *range*.

La 2.14 diventa allora

$$\frac{d}{dz}\mathcal{E}_{0,2\omega}(\zeta) = i\frac{4\pi}{\lambda n_{2\omega}}d_{eff}\mathcal{E}_0^2\frac{1}{1+i\zeta}e^{i\Delta k'z} \quad (2.16)$$

Per ottenere l'ampiezza alla fine del cristallo integriamo in dz su tutta la lunghezza del cristallo

$$\mathcal{E}_{0,2\omega}(z=l) = i\frac{4\pi}{\lambda n_{2\omega}}d_{eff}z_0\mathcal{E}_0^2e^{i\Delta k'f}\int_{-\frac{f}{z_0}}^{\frac{l-f}{z_0}}\frac{e^{i\Delta k'\zeta z_0}}{1+i\zeta}d\zeta \quad (2.17)$$

definiamo la funzione

$$h(l, f, \Delta k', z_0) = \int_{-\frac{f}{z_0}}^{\frac{l-f}{z_0}}\frac{e^{i\Delta k'\zeta z_0}}{1+i\zeta}d\zeta \quad (2.18)$$

e riscriviamo la 2.17 come

$$\mathcal{E}_{0,2\omega}(z=l) = i\frac{4\pi}{\lambda n_{2\omega}}d_{eff}z_0\mathcal{E}_0^2e^{i\Delta k'f}h(l, f, \Delta k', z_0) \quad (2.19)$$

La potenza di un fascio gaussiano è data da

$$P_\omega = n_\omega c \epsilon_0 \pi w_0^2 |\mathcal{E}_{0,\omega}|^2 \quad (2.20)$$

quindi la potenza della seconda armonica è

$$P_{2\omega} = n_{2\omega} c \epsilon_0 \frac{\pi w_0^2}{2} \left(\frac{4\pi}{\lambda n_{2\omega}} d_{eff} z_0 \mathcal{E}_0^2 \right)^2 |h|^2 \quad (2.21)$$

Dividiamo la 2.21 per la potenza della fondamentale 2.20 elevata al quadrato per ottenere il coefficiente di efficienza

$$\eta = \frac{8\pi d_{eff}^2}{\epsilon_0 c \lambda^2 n_{2\omega} n_\omega^2} \frac{z_0^2}{w_0^2} P_\omega |h(l, f, \Delta k', z_0)|^2 \quad (2.22)$$

Si noti che se il parametro confocale è grande rispetto alla lunghezza del cristallo, cioè quando il fronte d'onda è praticamente piano, la 2.18 diventa

$$h \simeq \frac{e^{-i\Delta k' f}}{z_0} \int_0^l e^{i\Delta k' z} dz \quad (2.23)$$

$$= \frac{e^{-i\Delta k' f}}{z_0} 2e^{i\frac{\Delta k' l}{2}} \frac{\sin\left(\frac{\Delta k' l}{2}\right)}{\Delta k'} \quad (2.24)$$

e facendo il modulo al quadrato

$$|h|^2 = \frac{l^2}{z_0^2} \text{sinc}^2\left(\frac{\Delta k' l}{2}\right) \quad (2.25)$$

e si ritrova così la 2.19 una volta posto $\Sigma = \pi w_0^2/2$ - l'area efficace di un fascio gaussiano - e ricordando che nel caso generale appena discusso la seconda armonica ha un raggio del *waist* più piccolo di quello della fondamentale. In generale invece la 2.18 va calcolata numericamente. Nei grafici che seguono il *waist* è considerato essere posto al centro del cristallo, questa condizione massimizza la potenza della seconda armonica in uscita (vedi Figura 2.3).

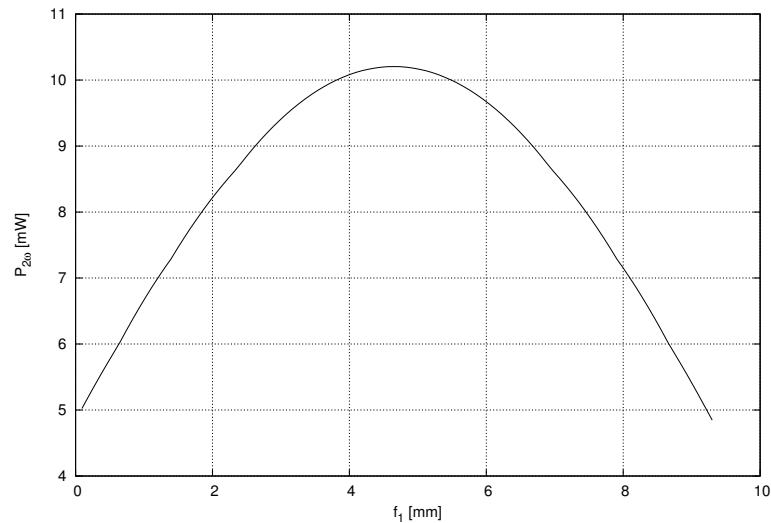


FIGURA 2.3: efficienza in funzione della posizione del *waist* per $l = 9.3\text{mm}$, $\lambda = 1064\text{nm}$, $P_\omega = 1\text{W}$ in PPKTP con $d_{eff} = 8.5\text{pm/V}$.

La dipendenza del coefficiente di efficienza dal raggio del *waist* è visualizzata in 2.4, ove abbiamo ottimizzato lo sfasamento $\Delta k'$ per ogni valore di w_0 . Infatti l'efficienza dipende fortemente dallo sfasamento, e dunque dalla temperatura del cristallo, come mostrato in 2.5 dove sono visualizzate diverse curve per valori del raggio del *waist* diversi. Un'utile visualizzazione grafica della dipendenza simultanea dai due parametri $\Delta k'$ e w_0 è riportata in Figura 2.6.

Si noti che la massima efficienza non si ottiene più per la condizione di *phase matching*

perfetto ($\Delta k' = 0$), ma per uno sfasamento finito. Tale effetto è dovuto al termine della fase di Gouy: quando l'onda passa per il fuoco riceve uno sfasamento di π e per questo motivo il termine non lineare della polarizzazione non riesce ad accoppiarsi efficacemente con l'onda generata, a meno che non venga introdotto uno sfasamento opposto per compensare l'effetto.

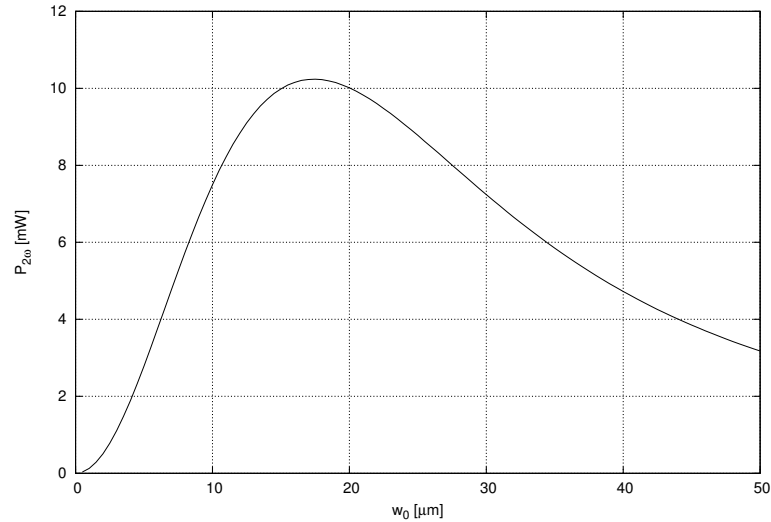


FIGURA 2.4: efficienza in funzione del raggio del *waist* con i parametri di Figura 2.3. Potenza massima 10.2mW per $w_0 = 17.5\mu\text{m}$

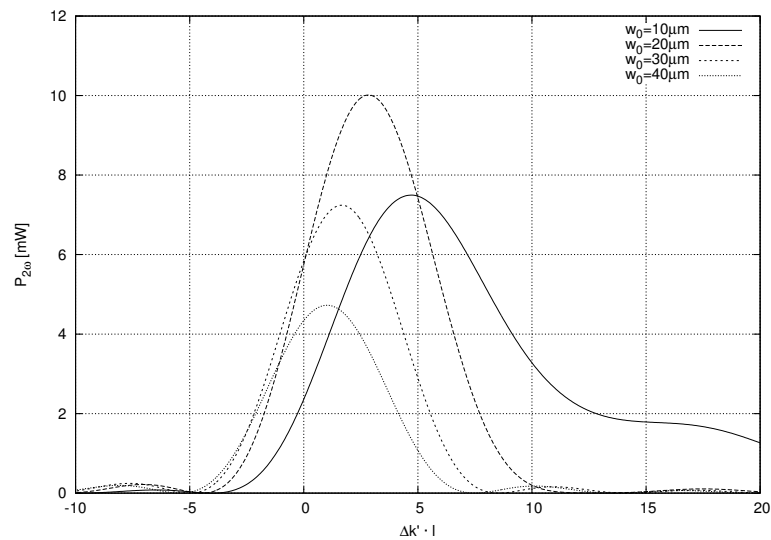


FIGURA 2.5: efficienza in funzione dello sfasamento con i parametri di Figura 2.3

In conclusione abbiamo visto che fissata la lunghezza del cristallo e la potenza dell'onda fondamentale, i parametri che possiamo far variare sono la posizione del *waist* e il suo raggio. Per ragioni di simmetria era prevedibile che, per ottenere il massimo di efficienza, il fascio dovesse essere focalizzato nel centro del cristallo. Altrettanto intuitivo è il fatto che il raggio del *waist* non deve essere troppo grande, perché in tal caso la densità

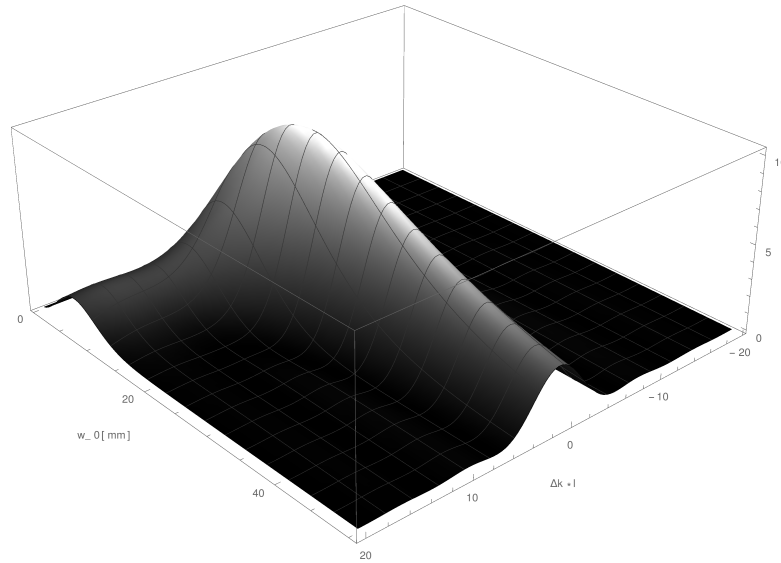


FIGURA 2.6: efficienza in funzione dello sfasamento e del raggio del *waist* con i parametri di Figura 2.3

di energia della fondamentale è troppo bassa per generare efficacemente la seconda armonica. Altresì non deve essere ridotto troppo, perché avrebbe una divergenza troppo grande; infatti dalla 2.11

$$\Theta = \frac{\lambda}{n\pi w_0} \quad (2.26)$$

e con un Θ elevato la densità di energia cala di molto già a breve distanza dal *waist*, in quanto la potenza del fascio viene “diluita” in una sezione maggiore.

2.3 Doppio Passaggio

Per poter aumentare l’efficienza del generatore di seconda armonica si pone uno specchio sferico con un *coating* ad alta riflettività alla fine del cristallo non lineare, in tal modo l’onda a frequenza doppia generata viene riflessa assieme alla fondamentale e si somma con la seconda armonica generata da questa nel secondo passaggio. Onde evitare disturbi dovuti a vibrazioni si può rendere il sistema più compatto ponendo lo specchio a diretto contatto con il cristallo, il quale deve quindi avere un’estremità curva, con lo stesso raggio di curvatura dello specchio. Quest’ultimo viene realizzato depositando lo strato riflettente direttamente sul cristallo.

Vediamo ora come si modifica il fascio gaussiano dopo la riflessione da uno specchio sferico.

2.3.1 Ottica Matriciale

Sfruttiamo l'approssimazione parassiale per utilizzare gli strumenti dell'ottica matriciale [4]: un raggio di luce è descritto dalla sua distanza dall'asse ottico (l'asse di simmetria cilindrica dell'apparato) e dall'angolo che con esso forma, cioè dal vettore

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} r \\ \alpha \end{pmatrix} \quad (2.27)$$

L'azione delle componenti ottiche sul raggio è descritta da matrici

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \quad (2.28)$$

in particolare quella associata ad uno specchio sferico con raggio di curvatura R posto in un mezzo con indice di rifrazione n è

$$M_r(R) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{2n}{R} & 1 \end{pmatrix} \quad (2.29)$$

mentre la matrice di traslazione per una distanza d è

$$M_t(d) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{d}{n} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.30)$$

L'azione del passaggio del raggio attraverso una successione di elementi è data semplicemente dal prodotto delle matrici associate a tali elementi, disposte da destra verso sinistra secondo l'ordine con cui il raggio attraversa l'elemento corrispondente. possiamo allora ricavare direttamente il raggio di curvatura (che per un fascio gaussiano è il valore complesso $q = z - iz_0$) tramite la formula:

$$\frac{q_2}{n} = \frac{A \frac{q_1}{n} + B}{C \frac{q_1}{n} + D} \quad (2.31)$$

Per ricavare dove si trova il *waist* dell'onda riflessa sfruttiamo dunque la seguente matrice

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = M_t(d_2)M_r(R)M_t(d_1) \quad (2.32)$$

$$= \begin{pmatrix} 1 - \frac{2d_2}{R} & \frac{d_2}{n} + \frac{d_1}{n} - \frac{2d_1d_2}{nR} \\ -\frac{2n}{R} & 1 - \frac{2d_1}{R} \end{pmatrix} \quad (2.33)$$

Ove d_1 e d_2 sono le distanze del fuoco dallo specchio rispettivamente per l'onda incidente e per quella riflessa. Procediamo imponendo che sia il raggio di curvatura del fascio incidente, sia quello del fascio riflesso siano quantità puramente immaginarie (chiamiamole rispettivamente $-iz_{01}/n$ e $-iz_{02}/n$). Risolvere l'equazione 2.31 per la parte reale e per quella immaginaria equivale a risolvere il sistema

$$\begin{cases} C \frac{z_{01}}{n} \frac{z_{02}}{n} + B = 0 \\ A \frac{z_{01}}{n} - D \frac{z_{02}}{n} = 0 \end{cases} \quad (2.34)$$

che dà come risultato

$$d_2 = \frac{2R(z_{01}^2 + d_1^2) - R^2d_1}{4z_{01}^2 + (2d_1 - R)^2} \quad (2.35)$$

e

$$z_{02} = \frac{R^2z_{01}}{4z_{01}^2 + (2d_1 - R)^2} \quad (2.36)$$

ricaviamo il valore del raggio del *waist* dalla 2.10

$$w_{02} = \frac{R}{\sqrt{4z_{01}^2 + (2d_1 - R)^2}} w_{01} \quad (2.37)$$

2.3.2 Doppio Passaggio in Conversione Debole

Durante il primo passaggio la fondamentale e la seconda armonica hanno il *waist* nella stessa posizione f_1 e lo stesso parametro confocale z_{01} , pertanto dalla 2.35 e dalla 2.36 anche i due fasci riflessi avranno le stesse caratteristiche f_2 e z_{02} tra di loro; ovviamente saranno diversi i raggi del *waist*. Quando i fronti d'onda dei due fasci vengono riflessi dallo specchio subiscono entrambi uno sfasamento di π per le note regole di riflessione, in quanto lo specchio ha un indice di rifrazione più grande di quello del cristallo. È

inoltre presente uno sfasamento relativo Φ tra i due fronti dovuto alla dipendenza della riflessione dalla frequenza, per la presenza del *coating* ottico ad alta riflettività. Essendo in regime di conversione debole possiamo ancora sfruttare il ragionamento della sezione 2.2. Il fattore $|h_{SP}|$ dev'essere sostituito con [6]

$$|h_{DP}(l, f_1, \Delta k', z_{01}, R)| = \left| \int_0^l \left(\frac{e^{i\Delta k'(z-f_1)}}{1 + i\frac{z-f_1}{z_{01}}} - e^{i\Phi} e^{i\Delta k'l} \left(\frac{w_{01}}{w_{02}} \right) \frac{e^{i\Delta k'(z-f_2)}}{1 + i\frac{z-f_2}{z_{02}}} \right) dz \right| \quad (2.38)$$

ove $e^{i\Delta k'l}$ è lo sfasamento guadagnato al secondo passaggio rispetto al primo e il segno meno è dovuto al termine di sfasamento $e^{i\pi}$.

Il termine w_{01}/w_{02} deriva dal seguente ragionamento: dalla 2.6, prima e dopo la riflessione il fascio gaussiano della fondamentale ha la seguente forma

$$E_\omega \propto \mathcal{E}_{01,\omega} \frac{w_{01}}{w_1(z)} e^{-\left(\frac{r}{w_1(z)}\right)^2} \quad (2.39)$$

e

$$E_\omega \propto \mathcal{E}_{02,\omega} \frac{w_{02}}{w_2(z)} e^{-\left(\frac{r}{w_2(z)}\right)^2} \quad (2.40)$$

Sulla superficie di riflessione dev'essere

$$w_1(l) = w_2(l) \quad (2.41)$$

e dev'essere uguale anche il campo nelle due forme 2.39 e 2.40, deve allora valere la

$$\mathcal{E}_{01,\omega} w_{01} = \mathcal{E}_{02,\omega} w_{02} \quad (2.42)$$

Una conferma di tale relazione è data anche dalla conservazione dell'energia: la potenza incidente è

$$P_{1,\omega} = n_\omega \pi c \epsilon_0 w_{01}^2 \mathcal{E}_{01,\omega}^2 \quad (2.43)$$

e quella riflessa

$$P_{2,\omega} = n_{2\omega} \pi c \epsilon_0 w_{02}^2 \mathcal{E}_{02,\omega}^2 \quad (2.44)$$

tali quantità coincidono solo se vale la 2.41. Prendiamo ora in considerazione il fascio della seconda armonica generata nel primo passaggio, la sua ampiezza massima sarà

$$\mathcal{E}_{01,2\omega} \propto \mathcal{E}_{01,\omega}^2 \quad (2.45)$$

e pertanto quando viene riflesso dev'essere

$$\mathcal{E}_{02,2\omega} \propto \mathcal{E}_{01,2\omega} \frac{w_{01}}{w_{02}} \propto \mathcal{E}_{01,\omega}^2 \frac{w_{01}}{w_{02}} \quad (2.46)$$

La seconda armonica generata dalla fondamentale riflessa avrà invece un'ampiezza

$$\mathcal{E}_{02,2\omega} \propto \mathcal{E}_{02,\omega}^2 = \mathcal{E}_{01,\omega}^2 \left(\frac{w_{01}}{w_{02}} \right)^2 \quad (2.47)$$

pertanto quando sommiamo i due contributi di andata e ritorno, possiamo raccogliere a fattore il termine w_{01}/w_{02} e nel secondo addendo della 2.38 rimane il termine w_{01}/w_{02} . Si ottiene che l'ampiezza massima del fascio gaussiano che si propaga fuori dal cristallo sarà

$$\mathcal{E}_{0,2\omega} = i \frac{4\pi}{\lambda n_{2\omega}} d_{eff} \frac{w_{01}}{w_{02}} \mathcal{E}_0^2 h_{SP}(l, f_1, \Delta k', z_{01}, R) \quad (2.48)$$

Si noti che manca il fattore z_0 , che invece compariva nella 2.19, in quanto la 2.38 è integrata direttamente in z senza l'ausilio della variabile ζ . Inoltre è presente il termine w_{01}/w_{02} la cui derivazione è stata discussa poc'anzi. Per ricavare il coefficiente di conversione bisogna prestare attenzione al fatto che la potenza in ingresso è riferita al fascio gaussiano della fondamentale con raggio del *waist* pari a w_{01} mentre la potenza della seconda armonica generata è riferita al fascio con raggio minimo pari a $w_{02}/\sqrt{2}$. Le due potenze valgono

$$P_\omega = n_\omega c \epsilon_0 \pi w_{01}^2 |\mathcal{E}_0|^2 \quad (2.49)$$

e

$$P_{2\omega} = n_{2\omega} c \epsilon_0 \frac{\pi w_{02}^2}{2} |\mathcal{E}_0|^2 \quad (2.50)$$

A conti fatti il coefficiente di efficienza vale infine

$$\eta = \frac{8\pi d_{eff}^2}{\epsilon_0 c \lambda^2 n_{2\omega} n_{\omega}^2} \frac{1}{w_{01}^2} P_{\omega} |h_{SP}(l, f_1, \Delta k', z_01, R)|^2 \quad (2.51)$$

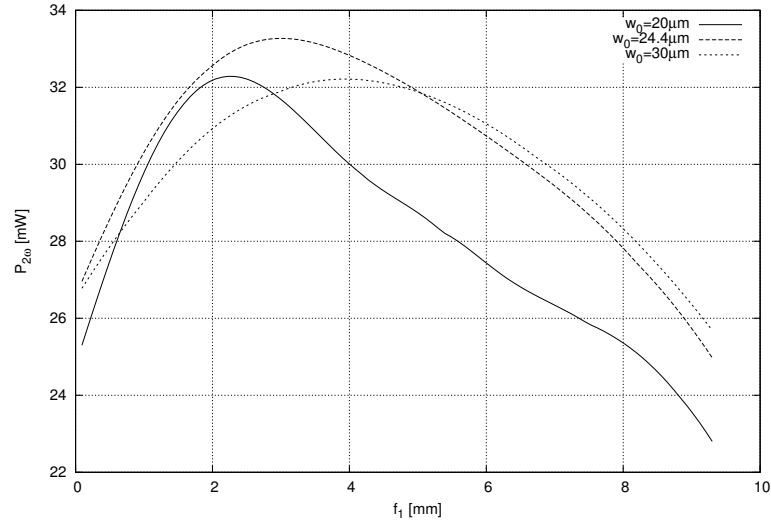


FIGURA 2.7: potenza emessa in funzione di f_1 per diversi valori del raggio del *waist* della fondamentale con $l = 9.3mm$, $R = 8mm$, $\Phi = 1.13$ in PPKTP

Nel caso di doppio passaggio la posizione ottimale del *waist* in generale non si trova più al centro del cristallo, come si vede in Figura 2.7, ma dipende dalla curvatura dello specchio. Anche il diametro ottimo del *waist* è cambiato rispetto alla singola passata.

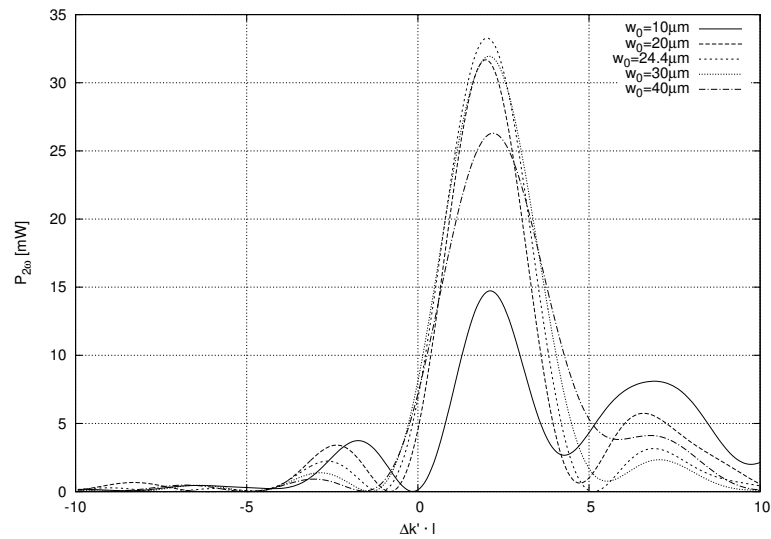
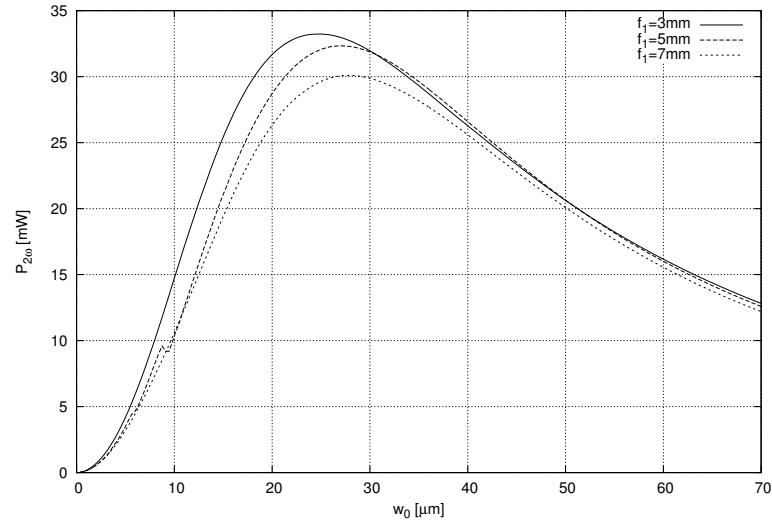
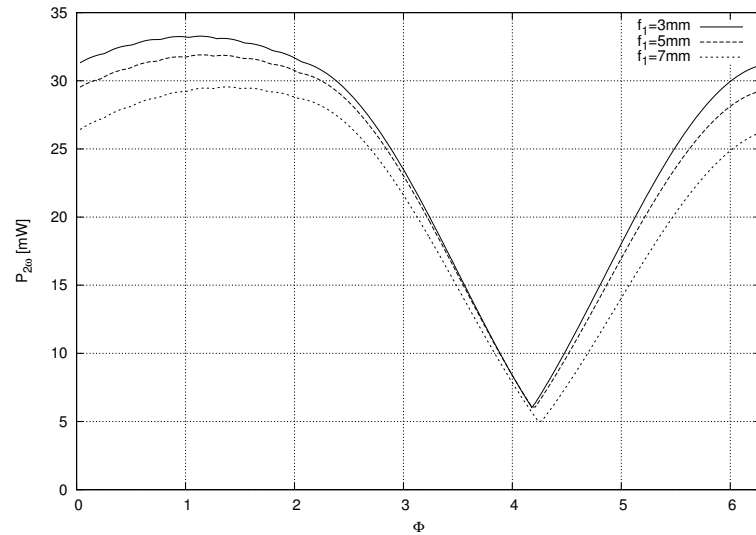


FIGURA 2.8: potenza emessa in funzione dello sfasamento con $f_1 = 3.0mm$, $\Phi = 1.13$

Nelle Figure 2.8, 2.9 e 2.10 riportiamo alcuni grafici che mostrano la potenza di seconda armonica generata da un fascio fondamentale di potenza $1W$ e lunghezza d'onda $\lambda = 1064nm$ in funzione dei vari parametri, per un cristallo di PPKTP di lunghezza $l = 9.3mm$, coefficiente non lineare $d = 8.5pm/V$ e raggio di curvatura dello specchio $R =$


 FIGURA 2.9: potenza emessa in funzione del raggio del *waist* con $\Phi = 1.13$

 FIGURA 2.10: potenza emessa in funzione di Φ con $w_{01} = 24.4$

$8mm$. La massima efficienza che si può ottenere per un cristallo con tali parametri è del 3.32%. Per ottenere una tale potenza di seconda armonica dev'essere $f_1 = 3.0mm$ e $w_{01} = 24.4\mu m$. Se ricaviamo il Rayleigh *range* z_0 e calcoliamo il raggio di curvatura del fronte d'onda a fine cristallo mediante la 2.7 otteniamo che questo è proprio uguale al raggio di curvatura dello specchio, e non è un caso.

Se supponiamo di avere uno specchio con raggio di curvatura tale che un fascio gaussiano venga riflesso con lo stesso profilo, il fattore di conversione massimo che si può ottenere è quattro volte quello della singola passata, infatti avendo

$$\begin{cases} f_1 = f_2 \equiv f \\ w_{01} = w_{02} \equiv w_0 \\ z_{01} = z_{02} \equiv z_0 \end{cases} \quad (2.52)$$

la 2.38 diventa

$$h_{DP} = \int_0^l \frac{e^{i\Delta k'(z-f)}}{1 + i\frac{z-f}{z_0}} (1 - e^{i(\Phi + \Delta k'l)}) dz \quad (2.53)$$

che è uguale alla 2.18 a parte il fattore $1 - \exp(i(\Phi + \Delta k'l))$ avente come valore massimo due. Elevando al quadrato h_{DP} si ottiene il fattore quattro anticipato sopra. La condizione ottimale per il passaggio doppio è che il *waist* si trovi a metà lunghezza del cristallo e che il raggio di curvatura dello specchio sia uguale al raggio di curvatura del fronte d'onda della fascio gaussiano; dalla 2.7, con $l/2$ al posto di z , dev'essere cioè

$$R = \frac{l^2 + 4z_0^2}{2l} \quad (2.54)$$

A livello sperimentale tuttavia è molto difficile ottenere la situazione ottima, ovvero

$$\Phi + \Delta k'l = \pi \quad (2.55)$$

in quanto anche h_{SP} dipende da $\Delta k'$ e fissato lo sfasamento Φ , in generale non è più soddisfatta la 2.55. Inoltre Φ - dovuto all'interferenza tra la radiazione riflessa dai vari strati del *coating HR* ottico - non è facilmente calcolabile, in quanto dipendente dall'angolo tra il raggio d'incidenza e la superficie dello specchio.

In Figura 2.11 sono visualizzati con le linee tratteggiate i due casi estremi di *phase matching* relativi a due valori di Φ differenti per π radianti. Non conoscendo esattamente il valore di Φ c'è il rischio di ritrovarsi - dopo aver ottimizzato $\Delta k'$ - in uno dei due picchi della curva verde con $\Phi = -3.24$. In tal caso si otterrebbe un coefficiente di conversione $\eta = 0.026$ al posto di $\eta = 0.041$; si avrebbe comunque un miglioramento rispetto alla singola passata, per cui vale $\eta = 0.010$, ma si avrebbe una perdita del 37.4% rispetto al caso ottimale.

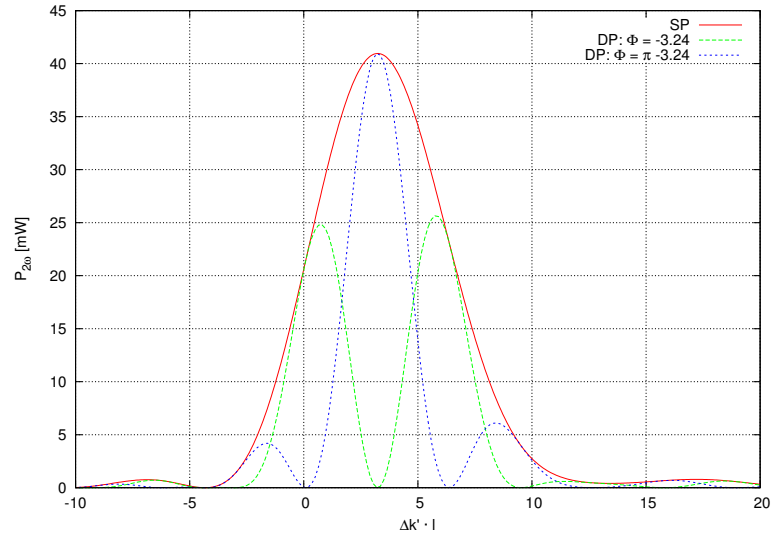


FIGURA 2.11: *phase matching* in doppia passata per i due valori estremi di Φ . La curva continua è quattro volte la potenza della singola passata. Con $l = 9.3\text{mm}$, $f_1 = 4.65\text{mm}$, $w_0 = 17.5\mu\text{m}$ in PPKTP

2.4 Passaggio Singolo in Conversione Forte

Per studiare il caso di conversione forte [2] abbiamo bisogno di entrambe le equazioni 1.20, in quanto parte della potenza della fondamentale viene trasformata in potenza della seconda armonica. Assumeremo che fondamentale e seconda armonica abbiano un profilo gaussiano con lo stesso parametro confocale e il *waist* nella stessa posizione. Senza perdere troppo di generalità possiamo considerare di porci nell'asse ottico, dobbiamo cioè studiare lo sviluppo dell'ampiezza massima $\mathcal{E}_{0,2\omega}$ del fascio gaussiano relativo alla seconda armonica. Sfruttiamo ancora una volta la forma 2.12 con l'ulteriore condizione che $\mathcal{E}_0 = \mathcal{E}_0(z)$. Come visto nella sezione 2.2, dal momento che i due fasci gaussiani sono soluzioni del primo membro delle equazioni accoppiate riscritte nella forma seguente

$$\begin{cases} \frac{d}{dz} \mathcal{E}_{2\omega}(\mathbf{r}) - \frac{i}{2k_{2\omega}} \nabla_t^2 \mathcal{E}_{2\omega}(\mathbf{r}) = i \frac{4\pi}{n_{2\omega}\lambda} d_{eff} \mathcal{E}_\omega^2(\mathbf{r}) e^{i\Delta k'z} \\ \frac{d}{dz} \mathcal{E}_\omega(\mathbf{r}) - \frac{i}{2k_\omega} \nabla_t^2 \mathcal{E}_\omega(\mathbf{r}) = i \frac{4\pi}{n_\omega\lambda} d_{eff} \mathcal{E}_\omega^*(z) \mathcal{E}_{2\omega}(\mathbf{r}) e^{-i\Delta k'z} \end{cases} \quad (2.56)$$

se sostituiamo tali soluzioni nelle equazioni qua sopra otteniamo

$$\begin{cases} \frac{1}{1+i\zeta} \frac{d}{dz} \mathcal{E}_{0,2\omega}(z) = i \frac{4\pi}{n_{2\omega}\lambda} d_{eff} \frac{\mathcal{E}_{0,\omega}^2(z)}{(1+i\zeta)^2} e^{i\Delta k'z} \\ \frac{1}{1+i\zeta} \frac{d}{dz} \mathcal{E}_{0,\omega}(z) = i \frac{4\pi}{n_\omega\lambda} d_{eff} \frac{\mathcal{E}_{0,2\omega}(z)}{1+i\zeta} \frac{\mathcal{E}_{0,\omega}^*(z)}{1-i\zeta} e^{-i\Delta k'z} \end{cases} \quad (2.57)$$

e anche in questo caso il fascio gaussiano che descrive la seconda armonica ha un raggio del *waist* pari a $w_{0,2\omega} = w_{0,\omega}\sqrt{2}$. Per ottenere uno stesso coefficiente nelle ultime

due equazioni consideriamo le due ampiezze normalizzate $\mathcal{A}_{0,\omega} = \mathcal{E}_{0,\omega}\sqrt{n_\omega}$ e $\mathcal{A}_{0,2\omega} = \mathcal{E}_{0,2\omega}\sqrt{n_{2\omega}}$, le 2.57 diventano

$$\begin{cases} \frac{d}{dz}\mathcal{A}_{0,2\omega}(z) = i\kappa\frac{\mathcal{A}_{0,\omega}^2(z)}{1+i\zeta}e^{i\Delta k'z} \\ \frac{d}{dz}\mathcal{A}_{0,\omega}(z) = i\kappa\frac{\mathcal{A}_{0,2\omega}(z)\mathcal{A}_{0,\omega}^*(z)}{1-i\zeta}e^{-i\Delta k'z} \end{cases} \quad (2.58)$$

con

$$\kappa = \frac{4\pi d_{eff}}{\lambda} \frac{1}{n_\omega\sqrt{n_{2\omega}}} \quad (2.59)$$

Dal momento che il sistema 2.59 non è analiticamente risolvibile, eseguiamo un ciclo

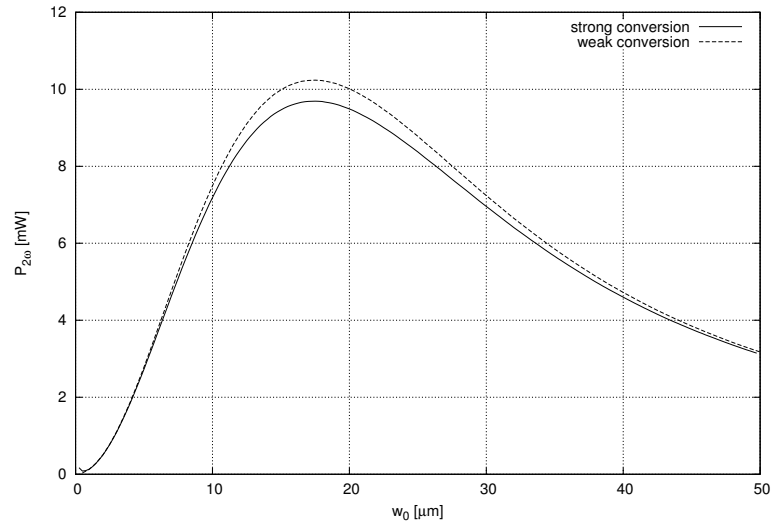


FIGURA 2.12: confronto tra la potenza emessa in funzione del raggio della *waist* della fondamentale nel caso di conversione debole e forte. Fissati $l = 9.3\text{mm}$, $d_{eff} = 8.5\text{pm/V}$, $f = l/2$, $P_\omega = 1\text{W}$, $\lambda = 1064\text{nm}$ in PPKTP

numerico in cui suddividiamo la lunghezza del cristallo l in tanti intervalli uguali di larghezza Δz . Implementiamo per ogni j -esimo step le due ampiezze secondo le

$$\begin{cases} \mathcal{A}_{0,2\omega}(z_j) = \mathcal{A}_{0,2\omega}(z_{j-1}) + \frac{d}{dz}\mathcal{A}_{0,2\omega}(z_j)\Delta z \\ \mathcal{A}_{0,\omega}(z_j) = \mathcal{A}_{0,\omega}(z_{j-1}) + \frac{d}{dz}\mathcal{A}_{0,\omega}(z_j)\Delta z \end{cases} \quad (2.60)$$

La potenza del fascio a pulsazione doppia alla fine del cristallo si otterrà da

$$P_{2\omega} = n_{2\omega}c\epsilon_0\pi \left(\frac{w_0}{\sqrt{2}}\right)^2 \frac{|\mathcal{A}_{0,2\omega}(l)|^2}{n_{2\omega}} \quad (2.61)$$

In Figura 2.12 sono confrontati gli andamenti dell'efficienza di generazione di seconda armonica ricavati con i due tipi di conversione. Nel caso di conversione debole si ha una sovrastima del 5.5% sulla potenza massima della seconda armonica, in quanto non viene considerata la perdita di potenza dell'onda fondamentale.

2.5 Cavità Ottica

Nella sezione 2.3.2 abbiamo visto che, in condizioni ottimali, la potenza di seconda armonica generata in doppio passaggio è quattro volte quella generata in passaggio singolo. Si può pensare che continuando a far passare avanti e indietro la fondamentale per N volte si ottenga un incremento del coefficiente di conversione pari a N^2 rispetto a quello per un unico passaggio. In realtà non è proprio così: se poniamo due specchi uno di fronte all'altro e vi facciamo “rimbalzare” il fascio relativo all'onda fondamentale, questo subirà ad ogni passaggio una diminuzione di intensità dovuta alla dispersione nel mezzo e al fatto che parte dell'energia che trasporta si è trasformata in energia della seconda armonica (conversione forte). Continuando ad immettere la radiazione elettromagnetica nella cavità si può tuttavia ottenere una condizione stabile in cui la fondamentale diventa un'onda stazionaria con una certa potenza media che produce costantemente il campo della seconda armonica.

Una cavità ottica è un dispositivo in grado di confinare al suo interno luce ad una data frequenza, ottenuto ponendo due superfici riflettenti una di fronte all'altra in maniera che la luce all'interno della cavità interferisca costruttivamente. Il fascio di luce che incontra la prima superficie viene in parte riflesso ed in parte trasmesso, una volta attraversata la cavità incontra la seconda superficie e ancora una volta si divide in una componente che attraversa la superficie abbandonando la cavità e in una che torna indietro. Il processo di andata e ritorno si ripete molte volte e due fasci adiacenti possono avere interferenza costruttiva o distruttiva a seconda della distanza tra gli specchi. In questo modo il dispositivo è in grado di selezionare la frequenza che genera interferenza costruttiva.

Indichiamo con $r_i = \sqrt{\mathcal{R}_i}$ e $t_i = \sqrt{\mathcal{T}_i}$ i coefficienti di riflessione e trasmissione per le ampiezze del campo, ove \mathcal{R}_i e \mathcal{T}_i sono i coefficienti di riflessione e trasmissioni usuali, definiti come la frazione di intensità che attraversa la superficie e a quella che viene riflessa, L'indice $i = 1, 2$ si riferisce alla prima o alla seconda superficie. Per la conservazione dell'energia dev'essere ovviamente $\mathcal{T}_i = 1 - \mathcal{R}_i$.

In condizioni stazionarie possiamo pensare a quattro campi distinti: quello incidente E_I sulla prima superficie, quello riflesso E_R dalla prima superficie, quello trasmesso E_T oltre la seconda superficie e il campo stazionario E_{INT} all'interno della cavità, subito dopo la prima superficie. Dal momento che usualmente possiamo considerare il coefficiente di

trasmissione del cristallo e i coefficienti di riflessione delle due superfici viste dall'interno prossimi all'unità, la potenza del campo che circola nella cavità è approssimativamente costante, dunque l'ampiezza del campo sarà E_{INT} in tutta la cavità. Subito dopo la prima superficie deve valere [3]

$$E_{INT} = t_1 E_I + r_2 e^{i\delta} r_1 E_{INT} \quad (2.62)$$

ove δ è la variazione di fase accumulata in un andata e ritorno del fascio all'interno della cavità (i due sfasamenti di π per le riflessioni si cancellano a vicenda). Da questa e dal fatto che

$$E_T = t_2 E_{INT} \quad (2.63)$$

otteniamo che l'ampiezza del campo trasmesso deve essere

$$E_T = \frac{t_1 t_2}{1 - r_1 r_2 e^{i\delta}} E_I \quad (2.64)$$

All'esterno della prima superficie deve valere

$$E_R = r_1 E_I + t_1 e^{i\delta} e^{i\pi} r_2 E_{INT} \quad (2.65)$$

$$= \frac{r_1 - r_2 e^{i\delta}}{1 - r_1 r_2 e^{i\delta}} E_I \quad (2.66)$$

Quadrando le equazioni 2.64 e 2.65 per ottenere le analoghe espressioni per le potenze, ottenendo

$$P_T = \frac{\mathcal{T}_1 \mathcal{T}_2}{|1 - \sqrt{\mathcal{R}_1 \mathcal{R}_2} e^{i\delta}|^2} P_I \quad (2.67)$$

$$P_R = \frac{|\sqrt{\mathcal{R}_1} - \sqrt{\mathcal{R}_2} e^{i\delta}|^2}{|1 - \sqrt{\mathcal{R}_1 \mathcal{R}_2} e^{i\delta}|^2} P_I \quad (2.68)$$

La potenza che circola all'interno della cavità si ottiene quadrando la 2.62 e vale

$$P_{INT} = \frac{\mathcal{T}_1}{|1 - \sqrt{\mathcal{R}_1 \mathcal{R}_2} e^{i\delta}|^2} P_I \quad (2.69)$$

Dalla 2.69 si vede che nel caso $\delta = 0$ e $\mathcal{R}_1 \simeq \mathcal{R}_2 \simeq 1$ la potenza in cavità è molto maggiore di quella in ingresso P_I . Se allora inseriamo in cavità un cristallo non lineare, il campo E_ω che sentirà sarà molto alto permettendo di ottenere efficienze elevate. Prendiamo quindi in considerazione lo smorzamento del campo fondamentale dovuto al fenomeno di generazione di seconda armonica, supponendo di inserire il cristallo in cavità, dovremmo allora introdurre un coefficiente di trasmissione relativo al cristallo stesso. Tale termine sarà uguale a [5]

$$\mathcal{T}_{SHG} = (1 - \eta_{SH}) \quad (2.70)$$

ove η_{SH} è il coefficiente di conversione per la singola passata, che come abbiamo visto nel caso di conversione debole (vedi la 2.22), dipende dalla potenza al fondamentale; poniamo

$$\eta_{SH} = \gamma_{SH} P_\omega \quad (2.71)$$

La 2.62 diventa

$$E_{INT} = t_1 E_I + \sqrt{\mathcal{T}_{SHG} r_2} e^{i\delta} \sqrt{\mathcal{T}_{SHG} r_1} E_{INT} \quad (2.72)$$

e dunque la 2.69 diventa

$$P_{INT} = \frac{\mathcal{T}_1}{|1 - \sqrt{\mathcal{R}_1 \mathcal{R}_2} \mathcal{T}_{SHG} e^{i\delta}|^2} P_I \quad (2.73)$$

Nel caso stazionario di risonanza, che per un fascio gaussiano si ottiene quando il raggio di curvatura degli specchi è esattamente uguale al raggio di curvatura del fronte d'onda del fascio, deve valere $\delta = 0$ e l'ultima equazione diventa

$$P_{INT} = \frac{\mathcal{T}_1}{(1 - \sqrt{\mathcal{R}_1 \mathcal{R}_2} (1 - \gamma_{SH} P_{INT}))^2} P_I \quad (2.74)$$

che è un'equazione cubica, e quindi risolvibile, in P_{INT} . Una volta ricavata la P_{INT} si ottiene la potenza della seconda armonica dalla

$$P_{SH} = 2\gamma_{SH} P_{INT}^2 \quad (2.75)$$

ove il fattore 2 rappresenta la somma della seconda armonica che si propaga in avanti e di quella che si propaga all'indietro fuori dalla cavità [5]. In definitiva il coefficiente di conversione totale diventa

$$\eta = \frac{2\gamma_{SH}P_{INT}^2}{P_I} \quad (2.76)$$

Notiamo che introducendo lo smorzamento della fondamentale dovuto alla generazione di seconda armonica, la 2.68 diventa

$$P_R = \frac{(\sqrt{\mathcal{R}_1} - \sqrt{\mathcal{R}_2}(1 - \gamma_{SH}P_{INT}))^2}{(1 - \sqrt{\mathcal{R}_1\mathcal{R}_2}(1 - \gamma_{SH}P_{INT}))^2} P_I \quad (2.77)$$

e variando la potenza incidente P_I , e di conseguenza quella che circola nella cavità P_{INT} , è possibile ottenere la condizione per cui tutta la luce incidente entra nella cavità. Il valore di γ_{SH} si ottiene una volta noto il profilo del fascio gaussiano risonante nella cavità.

Capitolo 3

Esperimento

3.1 Apparato Sperimentale

Al fine di predire l'intensità di verde ($\lambda_{GREEN} = 532nm$) producibile con un fascio infrarosso ($\lambda_{IR} = 1064nm$) dovremo conoscere esattamente il valore dello sfasamento Φ prodotto dallo specchio ed il coefficiente di conversione non lineare d_{eff} . Queste quantità possono essere stimate sperimentalmente con l'apparato schematizzato in Figura 3.1.

Un laser infrarosso di potenza massima $500mW$ attraversa in successione due lamine

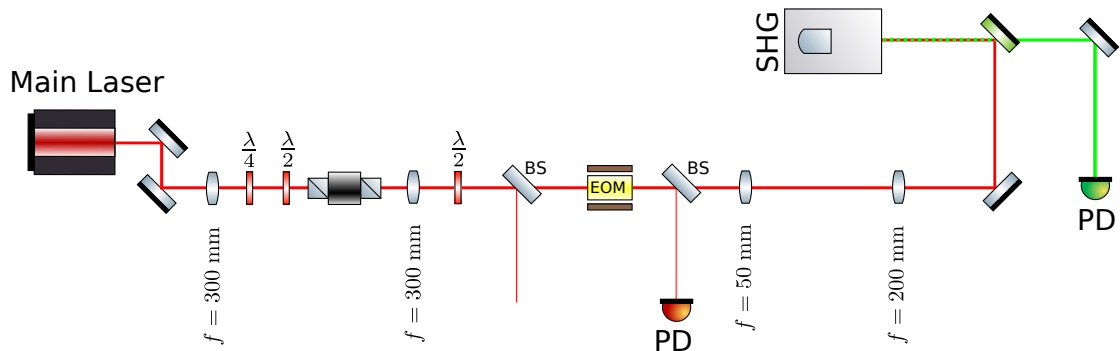


FIGURA 3.1: Schema del banco ottico. Il modulatore elettro-ottico EOM non è necessario ai fini della nostra misura, ma lo disegniamo perché effettivamente è presente in quanto servirà per quando sarà presente la cavità ottica.

a quarto d'onda ed una a mezza onda. Lo scopo della prima è di trasformare la luce uscente dal laser in luce polarizzata linearmente mentre la seconda lamina gira il piano di polarizzazione ad un valore selezionabile. La luce laser attraversa poi un isolatore di Faraday che viene utilizzato per fare sì che l'eventuale luce riflessa venga fermata e non raggiunga il laser danneggiandolo.

Dopo l'isolatore la luce attraversa due lenti che formano il telescopio di *matching*, atto a trasformare il fascio gaussiano in uscita dal laser in un fascio gaussiano con posizione e

diametro del *waist* selezionabili dallo sperimentatore. La posizione e la distanza focale delle lenti viene disegnata mediante l'ausilio delle matrici ABCD (vedi sezione 2.3.1).

Una volta selezionato il fascio gaussiano si posiziona il cristallo non lineare (titanilfo-

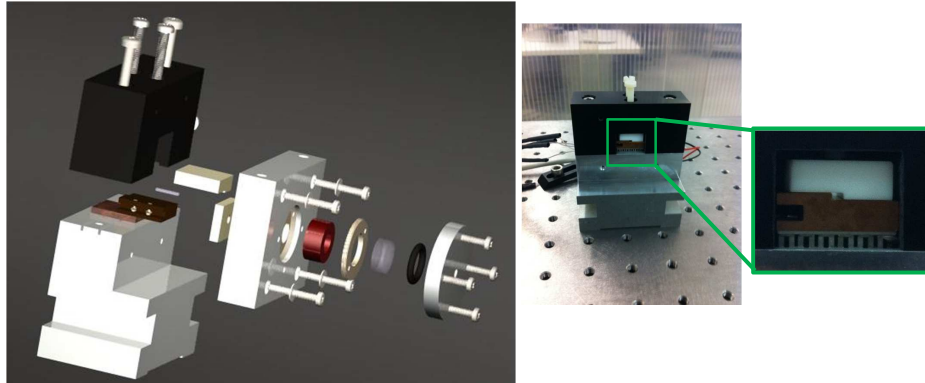


FIGURA 3.2: Nella figura di sinistra: schema del supporto del cristallo. Il cristallo viene schiacciato tra una placca di rame OHFC ed una placca isolante di macor. Per evitare stress meccanici tra il cristallo e le due placche viene posto un sottile ($0.1mm$) foglio di indio. La placca di rame contiene due termometri PTC100 $1 \times 1mm^2$ che vengono schiacciati su di essa con delle molle di rame-berillio. In questa maniera si evitano le paste conduttive che potrebbero danneggiare il cristallo. Uno dei due termometri viene utilizzato per la retroazione sulla corrente della cella Peltier (che sta alla base della placca) mentre l'altro come monitor di temperatura. La struttura del supporto è poi complicata dal fatto che in prospettiva dovrà anche alloggiare lo specchio per fare la cavità ottica.

Nella figura di destra: foto dettagliata del cristallo montato. A centro si vede chiaramente il cristallo. Alla base la cella Peltier sopra la quale è posizionata la placca di rame. Sopra ancora la placca di macor.

sfato di potassio PPKTP) ad una distanza nota dal *waist* di quest'ultimo e si misura la potenza del verde generata. Al fine di ottenere il *phase matching* la temperatura del cristallo viene modificata fino ad ottenere il massimo della potenza del verde (si sfrutta cioè il fatto che gli indici di rifrazione del cristallo hanno una dipendenza in temperatura). Questo viene fatto scaldando con una cella Peltier un basamento di rame ad alta conducibilità su cui è schiacciato il cristallo. La temperatura della placca di rame è continuamente misurata e la corrente della cella Peltier viene continuamente modificata per mantenere la temperatura costante. In questo modo si ottiene una stabilizzazione in

temperatura dell'ordine di qualche mK . Infine la luce verde riflessa dal cristallo viene separata dall'infrarosso mediante uno specchio diecrico e misurata con un fotodiode al silicio.

In figura 3.2 si può vedere uno schema costruttivo del supporto porta cristallo ed una foto dell'assemblato finale.

Una tipica curva sperimentale che si ottiene con l'apparato descritto è riportata in Figura 3.3. Nonostante la curva abbia qualitativamente la forma aspettata (vedi Figura 2.8),

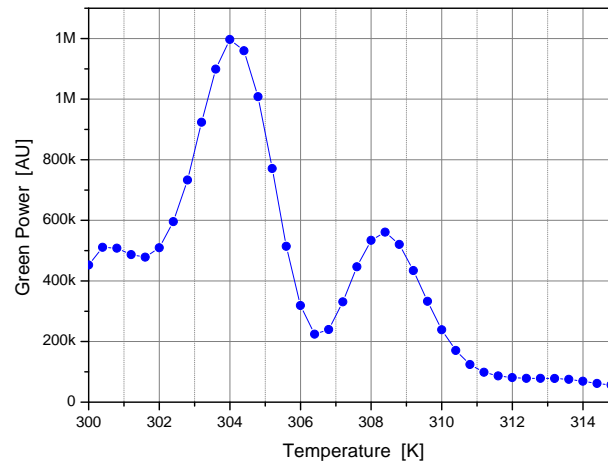


FIGURA 3.3: Risultati sperimentali preliminari per la generazione di luce verde in doppia passata. In ordinata la tensione espressa in microvolt ai capi del fotodiode: questa misura è proporzionale alla potenza del verde generato. La costante di calibrazione al momento della scrittura della tesi non è ancora disponibile. Va comunque fatto notare che in ogni caso la potenza del verde è sottostimata perché lo specchio diecrico assorbe circa il 5% della luce verde. Il fattore di reiezione dell'infrarosso dello specchio diecrico è circa 10^{-4} ed inoltre l'efficienza del fotodiode all'infrarosso è circa 5 volte inferiore che al verde. La contaminazione dell'infrarosso nella nostra misura risulta così inferiore a pochi punti percentuali.

essa rappresenta un risultato preliminare e quindi non si possono ancora ottenere le grandezze fisiche di nostro interesse. A breve comunque sarà prevista una campagna di misura di queste curve in funzione del *waist* del fascio gaussiano infrarosso in ingresso e della sua posizione nel cristallo.

3.2 Cavità Ottica

La cavità ottica realizzata in laboratorio è costituita dal cristallo con uno specchio a diretto contatto con l'estremità curva di questo e da un secondo specchio (menisco) situato davanti all'estremità piatta del cristallo, come schematizzato in Figura 3.4. Per

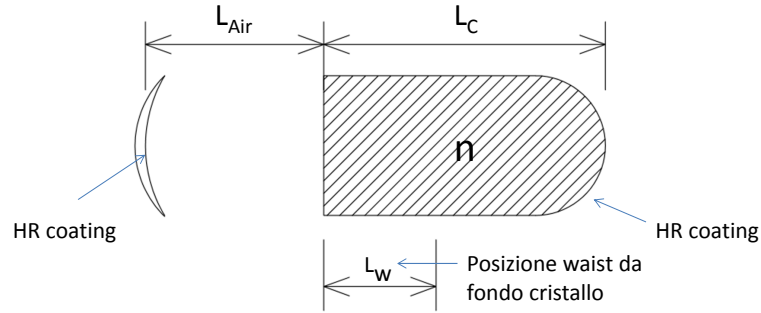


FIGURA 3.4: Schema della cavità ottica che verrà utilizzata in laboratorio

ottenere la condizione di risonanza basta imporre che il *waist*, dopo un *round trip*, sia nella stessa posizione. Utilizzando l'ottica matriciale si vuole cioè che

$$\frac{q_w}{n} = \frac{A \frac{q_w}{n} + B}{C \frac{q_w}{n} + D} \quad (3.1)$$

con $q_w = iz_0$

e con la matrice ABCD data da

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{L_W}{n} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & L_{Air} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{2}{R_2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & L_{Air} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \quad (3.2)$$

$$\times \begin{pmatrix} 1 & \frac{L_C}{n} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{2n}{R_1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{L_C - L_W}{n} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.3)$$

Ove L_C è la lunghezza del cristallo, L_W la distanza del *waist* dall'estremità piana del cristallo, L_{Air} la distanza del menisco dal cristallo, n l'indice di rifrazione del cristallo, R_1 il raggio di curvatura dello specchio attaccato al cristallo e R_2 quello del menisco. Risolvendo la 3.1 per la parte reale e immaginaria, si ottengono i valori di l_w e z_0 - e da

quest'ultimo quello di w_0 - che descrivono l'onda stazionaria.

Facciamo questo calcolo per il caso particolare realizzato in laboratorio con $L_C = 9.3mm$, $R_1 = 8mm$, $R_2 = 25mm$, $L_{Air} = 22mm$, $n = n_{IR} = 1.8302$; otteniamo $L_W = 5.14mm$ e $w_0 = 36.8\mu m$. Sostituendo questi valori nella 2.22, con $n_{2\omega} = 1.8894$, $f = L_W$ e *phase matching* ottimale, otteniamo $\gamma_{SH} = 5.40 \cdot 10^{-3}W^{-1}$, ove γ_{SH} è quello definito in 2.71. Per stimare la potenza della fondamentale confinata nella cavità risolviamo la 2.74 in P_{INT} con i seguenti valori: $\mathcal{R}_1 = 0.99975$, $\mathcal{R}_2 = 0.8$, $\mathcal{T}_1 = 0.2$, $\gamma_{SH} = 5.40 \cdot 10^{-3}W^{-1}$. Per $P_I = 300mW$ (potenza realistica del laser utilizzato in laboratorio) otteniamo $P_{INT} = 3.88W$ all'interno della cavità, per cui si genera una potenza di verde pari a $P_{GREEN} = 2\gamma_{SH}P_{INT}^2 = 162.25mW$. In definitiva si ha un'efficienza data dalla 2.76 pari a $\eta = 54.08\%$.

3.3 Conclusioni

In questa tesi si è calcolata l'efficienza di conversione di seconda armonica da parte di un cristallo non lineare attraversato da un fascio laser. Inizialmente il calcolo è stato fatto in approssimazione di onda piana. Successivamente si è passati al più realistico caso di un fascio gaussiano assumendo l'ipotesi semplificativa di conversione debole. Sono stati trattati sia il caso del singolo passaggio che di doppio passaggio evidenziando per entrambe le configurazioni quali siano i parametri ottimali per massimizzare l'efficienza di conversione. Mediante l'integrazione numerica è stato successivamente trattato il caso di conversione forte dove non si può più trascurare l'attenuazione della fondamentale durante il processo di conversione. Le differenze con il caso di conversione debole sono comunque risultate limitate a qualche punto percentuale. Infine mediante una trattazione approssimata è stata predetta la potenza di seconda armonica prodotta utilizzando cavità ottiche. In questo caso le efficienze di conversione possono superare il 50% per opportuni parametri del fascio gaussiano risonante e della geometria della cavità, quindi per una trattazione accurata si dovrebbe procedere ad una stima numerica in regime di conversione forte includendo anche le perdite ottiche nel cristallo. Grazie al lavoro impostato per la conversione forte nel caso di singola o doppia passata questa trattazione dovrebbe essere facilmente implementabile anche nel caso della cavità risonante e sarà oggetto del lavoro nei prossimi mesi.

Bibliografia

- [1] G. D. Boyd and D. A. Kleinman. Parametric interaction of focused gaussian light beams. *Journal of Quantum Electronics*, 39(8):3597–3639, July 1968.
- [2] N. Lastzka. Analyse nichtlinearer resonatoren. Master’s thesis, AEI Hannover, 2005.
- [3] Dietr Meschede. *Optics, Light and Lasers: The Practical Approach to Modern Aspects of Photonics and Laser Physics, 2nd, Revised and Enlarged Edition*, chapter 5.5, pages 195–199. Wiley-VCH, 2007.
- [4] A. E. Siegman. *Lasers*. University Science Books, Mill Valley, 1986.
- [5] William J. Kozlovsky, C. D. Nabors, and Robert L. Byer. Efficient second harmonic generation of a diode-laser-pumped CW Nd:YAG laser using monolithic MgO:LiNbO₃ external resonant cavities. *Journal of Quantum Electronics*, 24(6):913–919, June 1988.
- [6] S. I. Kablukov V. A. Akulov, S. A. Babin and K. S. Raspopin. Intracavity frequency doubling of Yb-doped fiber laser with 540-550 nm tuning. *Fiber Optics*, 21(12):935–939, December 2010.