Università degli Studi di Padova

FACOLTÀ DI INGEGNERIA
Corso di Laurea in Ingegneria dell'Informazione

Tesi di laurea triennale

Introduzione alle Reti di Petri

Candidato:
Elena Zanotto
Matricola 591936 - INF

Relatore:
Ch.mo Prof. Sandro Zampieri

Anno Accademico 2011-2012

"Per aspera sic itur ad astra."
A chi cadendo trova sempre la forza di rialzarsi.

Indice

Capitolo 1

Introduzione

Le Reti di Petri, introdotte nel 1962 da Carl Adam Petri nella sua tesi di dottorato, sono uno strumento per la modellizzazione di processi. Largamente utilizzate nel settore informatico ed organizzativo, sono molto utili per schematizzare la nozione di "concorrenza" e "contemporaneità". Ciò che spinse alla creazione di queste reti fu la necessità di "descrivere in modo preciso e unitario il maggior numero di fenomeni inerenti la trasmissione e l'elaborazione d'informazioni". Le reti di Petri, infatti, si distinguono da altri modelli di sistemi per alcuni punti chiave:

- *concorrenza*: è possibile rappresentare eventi tra loro non dipendenti attraverso la relazione di concorrenzialità, viene cioè a mancare il punto fondamentale di altri modelli, il riferimento temporale
- *non conseguenza delle operazioni descrivibili*: si possono modellare le più svariate strutture che non operano solo in modo sequenziale
- *astrazione*: lo stesso modello può essere utilizzato per rappresentare strutture a diversi livelli di astrazione
- *verifica*: la rappresentazione con reti di Petri permette la verifica di proprietà e la prova della loro correttezza attraverso le note proprietà delle reti stesse

La teoria di Petri permette la descrizione di un sistema attraverso una rete di Petri, una rappresentazione matematica del sistema. L'analisi della rete può quindi rivelare importanti informazioni in merito alla dinamica e all'evoluzione del sistema di partenza.

Il processo di modellizzazione

L'applicazione delle reti di Petri avviene attraverso il processo di modellizzazione. Questa consiste nel cercare una rappresentazione astratta del sistema, che riporta solo le caratteristiche di interesse, astraendo da quelle che non ne influenzano lo studio o le proprietà.
Per sistemi tra loro molto diversi e appartenenti ad ambiti differenti è possibile ricondursi a modelli simili: questo grazie all'idea che il sistema sia l'insieme di

componenti, ognuno dei quali è a sua volta un sottosistema, il cui comportamento può essere descritto indipendentemente da quello del sistema principale fatta eccezione per le interazioni tra componenti diversi.
Ogni componente si trova in un determinato stato che tiene memoria delle precedenti azioni e mantiene l'informazione necessaria allo svolgimento di quelle future. Può anche accadere che due componenti dello stesso sistema operino in contemporanea e quindi che sia necessario modellare la condizione di parallelismo o che l'inizio dell'attività di una necessiti della fine di un'altra, in questo caso è necessario ricorrere alla condizione di sincronismo.
Tutte le operazioni sopra descritte trovano ottima rappresentazione in reti di Petri.

Alcuni esempi

Ecco quindi alcuni esempi di sistemi modellizzabili con reti di Petri che sfruttano le proprietà sopracitate:

1) Un semplice ed intuitivo esempio di processo rappresentabile con rete di Petri è la procedura adottata per cucinare la pasta al sugo. In questo caso infatti è necessario svolgere più attività contemporaneamente. L'ordine da seguire potrebbe essere il seguente:

1. soffriggere la cipolla MENTRE l'acqua si scalda
2. aggiungere il pomodoro al soffritto
3. QUANDO l'acqua bolle buttare la pasta
4. QUANDO la pasta è pronta scolala
5. TERMINATE la cottura di pasta e sugo, condire gli spaghetti

2)Il ciclo delle stagioni è un esempio di rete di Petri condizioni/eventi.
Le quattro condizioni sono rappresentate dalle stagioni, gli eventi dall'inizio delle stagioni stesse. Se una condizione è verificata la si contrassegna con un punto detto *marca*, in figura questa è presente nel posto *inverno*. Ad ogni cambiamento di stagione la marca viene spostata avanti seguendo il senso delle frecce e passando attraverso i corrispondenti eventi.

3) Processi di lettura e scrittura di un sistema operativo all'interno di un'area di memoria centrale.
Si consideri una configurazione con quattro processi abilitati alla lettura e due alla scrittura in cui la memoria può essere letta simultaneamente al più da tre processi e nessun processo può accedere all'area di memoria mentre un processo di scrittura la sta modificando. La figura rappresenta questo sistema sotto forma di rete:

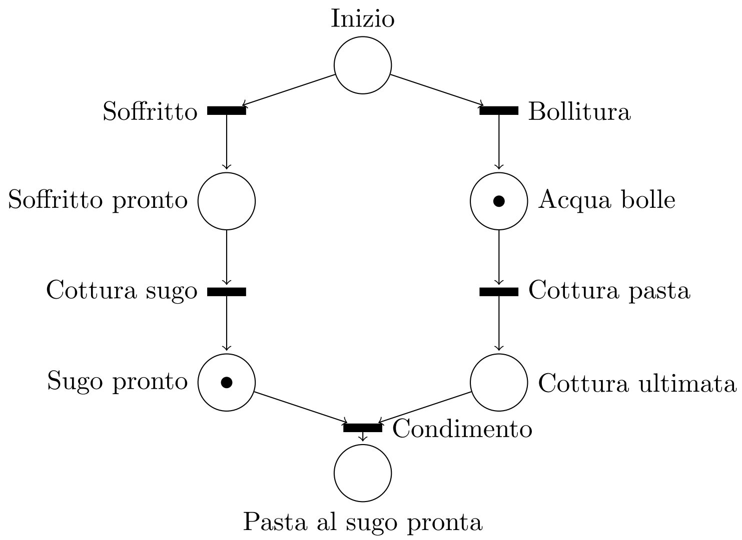


Figura 1.1: Rete di Petri per il processo di cottura della pasta al sugo

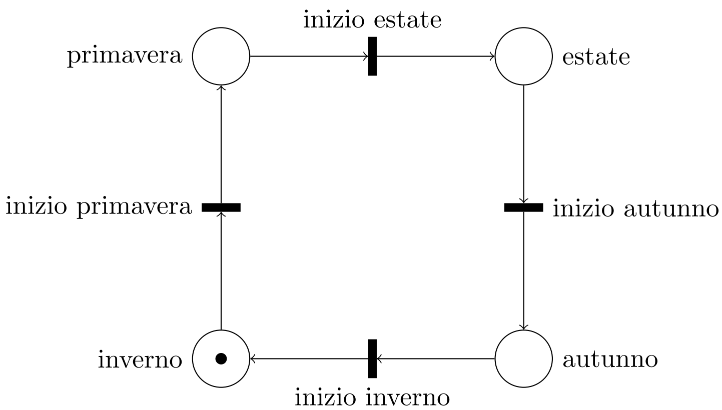


Figura 1.2: Rete di Petri per l'evoluzione delle stagioni

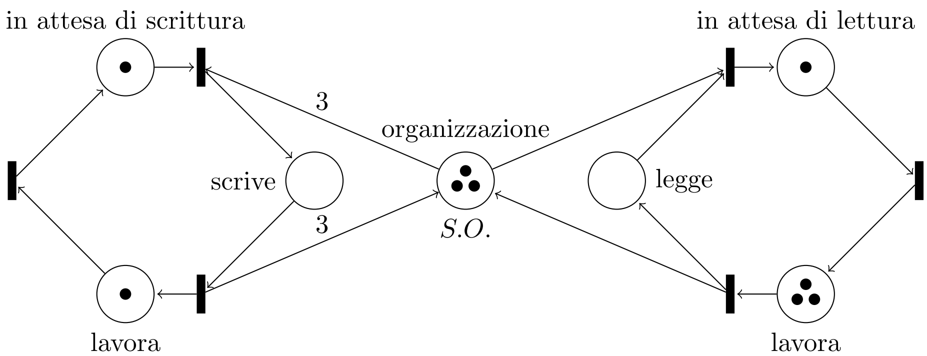


Figura 1.3: Gestione dei processi di lettura e scrittura per un sistema operativo

Capitolo 2

Definizioni e proprietà

2.1 Rete e rete di Petri

Una terna *N = (S, T, F)* è detta **rete** se:

- S e T sono insiemi disgiunti
- $F \subseteq (S \times T) \cup (T \times S)$

Una **rete di Petri** è un grafo orientato bipartito con due tipi di nodi, **posti** e **transizioni**, connessi da archi diretti. Un **arco** può unire solamente nodi di tipo diverso quindi nodi con transizioni e viceversa. I posti sono rappresentati graficamente da cerchi e le transizioni da rettangoli.

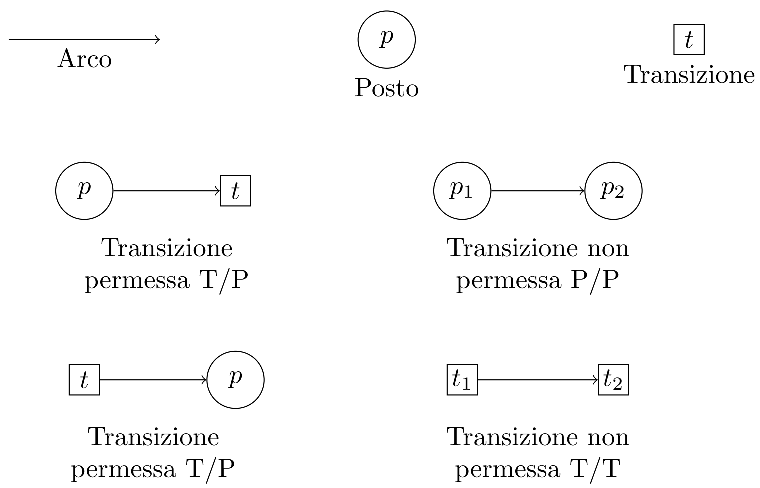


Figura 2.1: Esempi di tansizioni permesse e non consentite

Ogni posto può contenere uno o più **token** rappresentati da puntini, se i token che possono trovarsi all'interno del posto hanno numero limitato esso è rappresentato al di fuori (sopra o sotto) il corrispondente posto. Ad ogni arco

può essere associato un **peso** (weight) w, intero positivo (qualora la scrittura sia omessa il peso è considerato unitario).
La struttura costituita da un posto ed una transizione collegati da due archi opposti è detta **autoanello**.
Le reti prive di autoanelli sono dette **pure**.

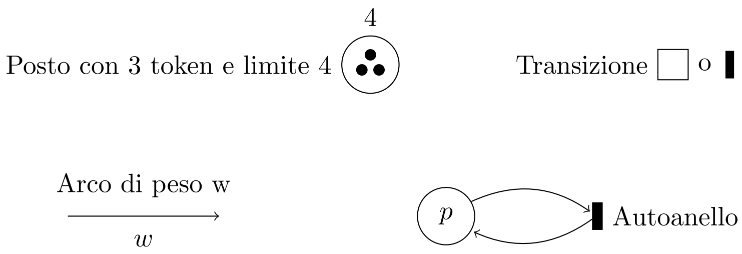
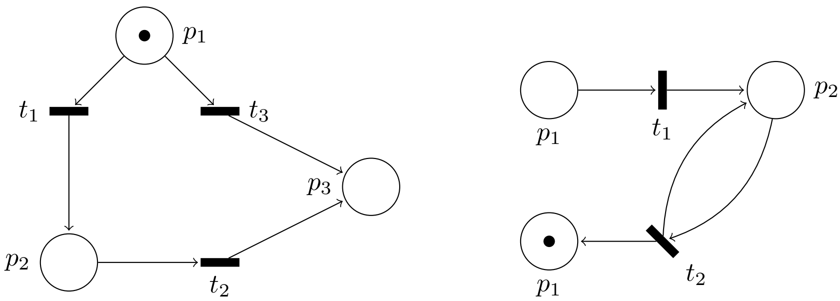


Figura 2.2: Elementi base di una Rete di Petri



(a) Pura

(b) Non pura

Figura 2.3: Esempi di purezza per una rete

A seconda della possibilità della rete di contenere uno o più token nei posti si distinguono:

- *Reti P/T* (Posti/Transizioni): possono contenere più token
- *Reti C/E* (Condizioni/Eventi): possono contenere al massimo un unico token

Una **rete di Petri** è una quintupla *PN= (P, T, A, W, M)* dove:

- $P = \{p_1, p_2 \dots p_n\}$ è un insieme finito di posti
- $T = \{t_1, t_2 \dots t_m\}$ è un insieme finito di transizioni
- $A \subseteq (P \times T) \cup (T \times P)$ è un insieme finito di archi

- $W : A \to \{1, 2, \dots\}$ è la funzione peso degli archi
- $M : P \to \{1, 2, \dots\}$ è l'insieme delle marche iniziali

Se non è definito M, la rete è individuata dalla quadrupla *PN = (P, T, A, W)*.

2.2 Precondizioni e postcondizioni

Data una RdP[1] $G = (P, T, A)$, se $(p_1, t) \in A$ è uno spigolo della rete, ovvero se $p_1 \in P$ e $t \in T$, allora p_1 è una **precondizione** di t; se $(t, p_2) \in A$ è anch'esso uno spigolo con $t \in T$, $p_2 \in P$ allora p_2 è una delle **postcondizioni** di t.
Definito un vertice $t \in T$ della RdP, l'insieme delle sue precondizioni è indicato con $\boldsymbol{\cdot t}$, l'insieme delle postcondizioni con $\boldsymbol{t \cdot}$.

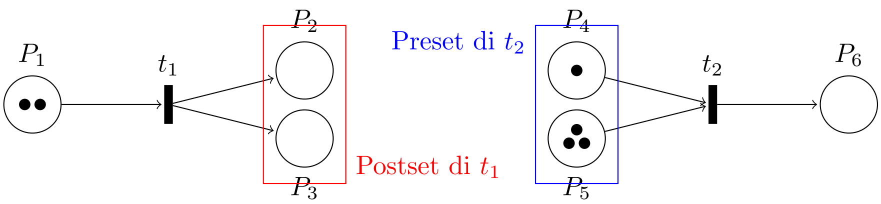


Figura 2.4: Pre e postcondizioni

2.3 Marche

Una **marca** (o **marcatura**) m è un'assegnazione di token ai posti di una RdP. I token sono utilizzati per visualizzare e descrivere l'esecuzione della RdP, il loro numero e la loro posizione possono variare durante l'esecuzione della stessa.

Una marca μ per una RdP C è una funzione definita dall'insieme dei posti P sugli interi non negativi $\mu : P \to \mathbb{N}$. La marca può altresì essere definita attraverso un vettore di n componenti, con n cardinalità dell'insieme dei posti P, in cui l'i-esima componente indica il numero di token presenti nell'i-esimo posto.

Una marcatura M_2 è detta **raggiungibile** a partire da una marcatura M_1 se esiste almeno una sequenza di transizioni che, fatte scattare, a partire da M_1 portino in M_2.
L'insieme delle marcature M raggiungibili da una data M_1 è indicato con $\boldsymbol{[M_1 >}$, M_1 è raggiungibile da M se e solo se $M \in \boldsymbol{[M_1 >}$.

Una marcatura M si dice **viva** se e solo se, scelta una qualunque transizione t della rete, da M sia possibile raggiungere una marcatura M* in cui t è abilitata. Ovvero M è viva se da essa è possibile abilitare qualsiasi transizione.

[1] Da qui in avanti si utilizzerà l'abbreviazione RdP per indicare Rete (o anche Reti) di Petri

Una RdP è viva se e solo se tutte le marcature raggiungibili da quella iniziale M_0 sono vive.

2.4 Esecuzione e non determinismo

L'esecuzione di una RdP è identificata dal numero e dalla posizione dei token all'interno della rete, la loro posizione identifica le possibili evoluzioni rappresentate quindi come sequenza di eventi discreti.
Una RdP viene eseguita attraverso il passaggio su transizioni: si rimuovono token dai posti di input e si creano nuovi token che andranno posizionati nei posto di output della transizione. La transizione può avvenire solo se è abilitata ovvero se ognuno dei posti di input ha almeno il numero di token richiesti per percorrere l'arco: se essa è abilitata l'esecuzione consiste nel rimuovere i token necessari da ognuno dei posti di input per aggiungerne, in ogni posto di output, in numero pari al peso dei corrispondenti archi di output.

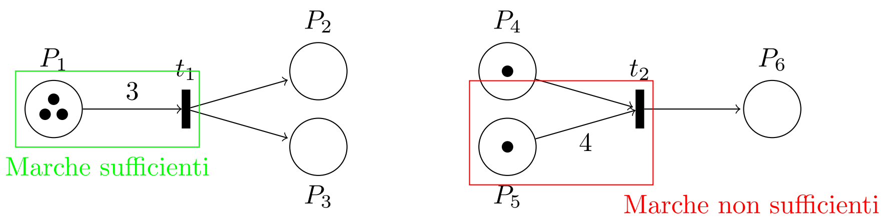


Figura 2.5: Transizione abilitata e non abilitata

A questo punto risulta evidente il non determinismo della RdP. Infatti, dal momento che può accadere che più transizioni siano abilitate contemporaneamente, se non sono definite regole in proposito lo scatto di una transizione piuttosto che un'altra è del tutto casuale. Il non determinismo nell'evoluzione di una RdP garantisce il rispetto della località della rete, ovvero l'indipendenza degli eventi.

2.5 Stati e funzione delta

Lo stato in cui si trova una RdP è definito dalle sue marcature, un cambiamento di stato è rappresentato dall'esecuzione di una transizione che comporta un cambiamento della disposizione e del numero di token nella rete.
Il cambiamento di stato è definito dalla funzione transizione delta che, applicata ad uno stato s e ad una transizione t, restituisce il nuovo stato e la relativa marcatura. Dal momento che una transizione può scattare solo se è abilitata, la δ è indefinita per valori di marca che non abilitano t.
Facendo riferimento alla seguente definizione alternativa di rete di Petri è possibile definire rigorosamente la funzione transizione.

Una rete di Petri è una quintupla $C = (P, T, I, O)$ dove:

- $P = \{p_1, p_2 \dots p_n\}$ è un insieme finito di posti
- $T = \{t_1, t_2 \dots t_m\}$ è un insieme finito di transizioni, con $P \cap T = \varnothing$
- $I : T \rightarrow P^\infty$ è la *funzione di input* che mappa ogni transizione in un insieme di posti
- $O : T \rightarrow P^\infty$ è la *funzione di output* che mappa ogni transizione in un insieme di posti

La **funzione stato successivo** $\boldsymbol{\delta} : \mathbb{N}^n \times T \rightarrow \mathbb{N}^n$ per una rete di Petri $C = (P, T, I, O)$ con marcatura μ e transizione $t_i \in T$ è definita se e solo se

$$\mu(p_j) \geq \#(p_j, I(t_i))$$ [2]

per tutti i $p_j \in P$. Se $\delta(\mu, t_i)$ è definita, allora $\delta(\mu, t_i) = \mu'$ dove

$$\mu'(p_j) = \mu(p_j) - \#(p_j, I(t_i)) + \#(p_j, 0(t_i))$$ [3]

per tutti i $p_j \in P$.

2.6 Struttura asincrona

La particolare struttura delle RdP permette che due eventi tra loro indipendenti, se entrambi abilitati, possano accadere contemporaneamente. È possibile tuttavia modellare anche sistemi che richiedono, per loro natura, la sincronizzazione senza restrizioni. La mancanza di una variabile temporale per le RdP riflette l'idea del tempo come oggetto che definisce solo l'ordine degli eventi senza condizionarli. Questa proprietà porta alla definizione di alcuni particolari configurazioni della rete:

- ***Sequenza***: due transizioni t_1 e t_2 si dicono in sequenza se t_1 precede t_2 in una data marcatura M quando, con t_1 abilitata e t_2 non abilitata, lo scatto di t_1 abilita t_2

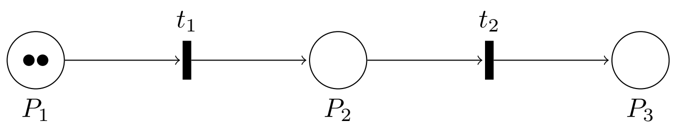
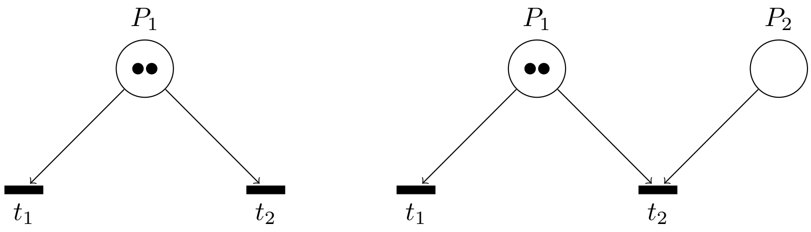


Figura 2.6: Transizioni in sequenza

[2] La notazione $\#(p_j, I(t_i))$ individua l'arco che connette il posto p_j alle sue transizioni di input $I(t_i)$, il simbolo # indica il numero di occorrenze del posto p_j nel multinsieme di input di t_i. Nel caso di funzioni di input ed output definite su insiemi le cardinalità sono solo zero o uno.

[3] Come sopra, la notazione $\#(p_j, O(t_i))$ individua l'arco che connette il posto p_j alle sue transizioni di output $O(t_i)$, il simbolo # indica il numero di occorrenze del posto p_j nel multinsieme di output di t_i.

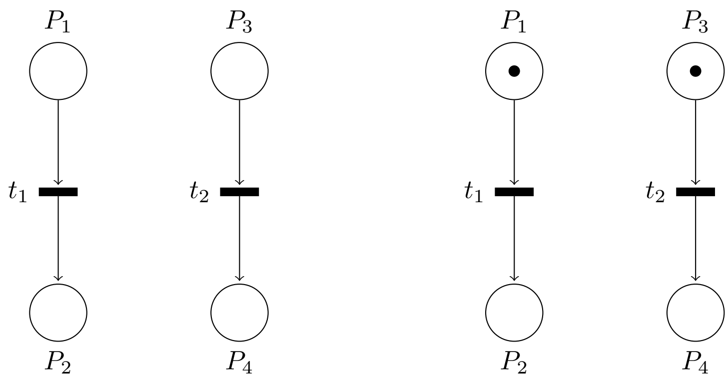
- ***Conflitto***: due transizioni t_1 e t_2 sono in **conflitto strutturale** se e solo se hanno almeno un posto d'ingresso in comune. Esse sono dette in **conflitto effettivo** se nella marcatura M sono in conflitto strutturale, entrambe abilitate ed il numero di token nei posti che le abilitano non è sufficiente a soddisfare tutti i pesi degli archi che li collegano alle transizioni.



(a) Strutturale (b) Effettivo

Figura 2.7: Esempio di transizioni in conflitto

- ***Concorrenza***: due transizioni t_1 e t_2 sono in **concorrenza strutturale** se non condividono alcun posto d'ingresso ovvero lo scatto di una non influenza l'altra. Sono in **concorrenza effettiva** se nella marcatura M sono entrambe abilitate.



(a) Strutturale (b) Effettiva

Figura 2.8: Esempio di transizioni in concorrenza

2.7 Rappresentazione matriciale

Oltre alla rappresentazione grafica per le RdP è possibile una rappresentazione matematica detta matriciale o algebrica. Attraverso essa è possibile descrivere l'evoluzione della rete in termini di equazione di stato.

Matrice d'ingresso

La matrice di ingresso **I** ha una riga per ogni posto della rete e una colonna per ogni transizione, ha quindi dimensione $|P| \times |T|$.
L'elemento di posto (i, j) è un intero che descrive il peso dell'arco che va dal posto i alla transizione j se l'arco esiste, vale 0 altrimenti.

$$\begin{cases} I(i,j) = W(p_i, t_j) \text{ per ogni } (p_i, t_j) \in A \\ I(i,j) = 0 \text{ per ogni } (p_i, t_j) \notin A \end{cases}$$

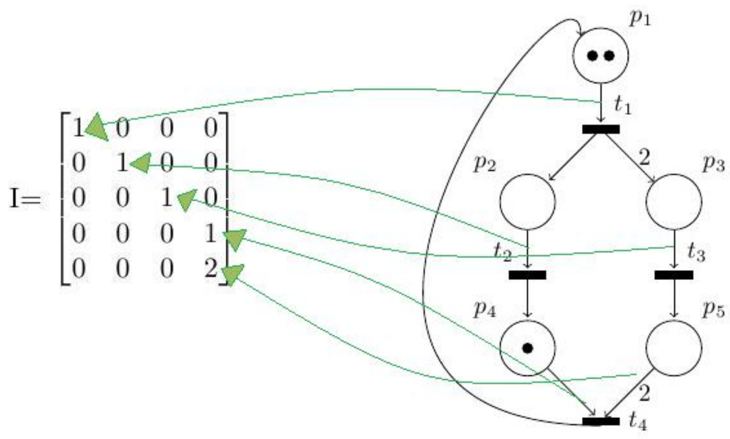


Figura 2.9: Matrice d'ingresso **I**

Matrice di uscita

La matrice **O** ha dimensioni $|P| \times |T|$ come la matrice di ingresso, l'elemento di posto (i, j) è l'intero che indica il peso dell'arco che va dalla transizione j al posto i se l'arco esiste, vale 0 altrimenti.

$$\begin{cases} O(i,j) = W(t_j, p_i) \text{ per ogni } (t_j, p_i) \in A \\ O(i,j) = 0 \text{ per ogni } (t_j, p_i) \notin A \end{cases}$$

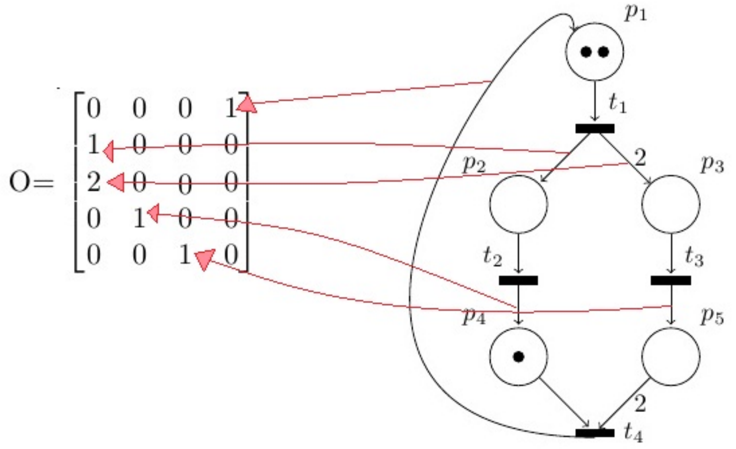


Figura 2.10: Matrice d'uscita **O**

Matrice d'incidenza

La matrice d'incidenza **C** ha dimensioni $|P| \times |T|$ ed è definita come

$$\mathbf{C = O\text{-}I}$$

Essa non ha lo stesso contenuto informativo delle matrici **I** ed **O** in quanto, se per qualche (i, j) si ha $\mathbf{I}(i, j) = \mathbf{O}\ (i, j)$, il risultato $\mathbf{C}(i, j) = 0$ si confonderebbe con la non presenza di archi tra il posto i e la transizione j.
Per reti pure le matrici **I** ed **O** hanno elementi non nulli in posizioni mutuamente esclusive per cui l'utilizzo della matrice **C** è analogo a quello di **I** ed **O** dal momento che $\mathbf{C}(i, j) = 0$ in questo caso individua solo la non presenza di archi.

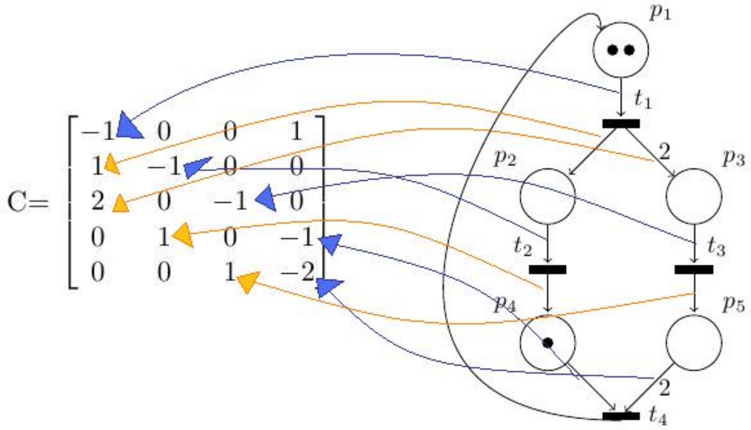


Figura 2.11: Matrice d'incidenza **C**

Vettore marcatura

Data una rete con marcatura M, si definisce il **vettore marcatura m** come il vettore colonna di dimensione $|P|$ le cui componenti sono i valori interi non negativi che rappresentano il numero di marche contenute in ogni posto della rete.

$$\mathbf{m} = [m_1, m_2, \dots m_{|P|}]^T \text{ con } m_i = \mathrm{M}(p_i),\ i = 1, 2, \dots |P|$$

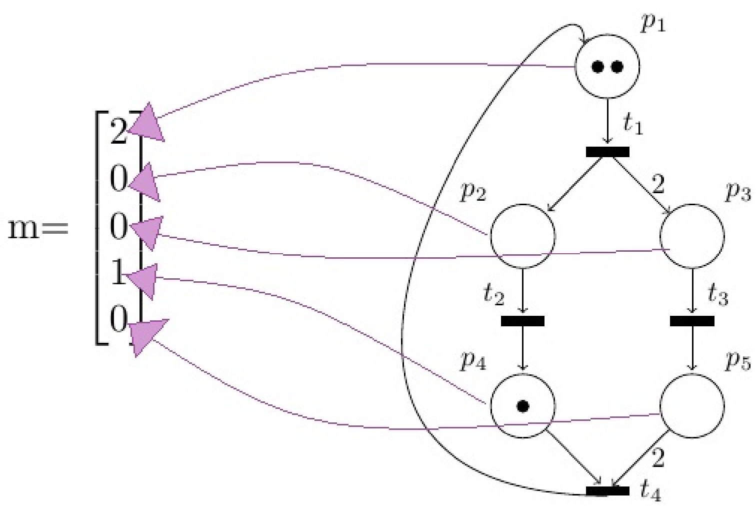


Figura 2.12: Vettore marcatura **m**

Sequenza di scatti

Una **sequenza di scatti abilitati S** in una data marcatura M_0 è una sequenza di transizioni t_i (per $i \in \{1, \dots n\}$) tali che t_1 è abilitata in M_0 e lo scatto t_i porta in una marcatura in cui $t_{(i+1)}$ è abilitata.

$$\mathbf{S} =< t_1, t_2, \dots, t_n >$$

Non tutte le sequenze di transizioni sono sequenze di scatti, infatti, data una sequenza di marcature, non è necessariamente vero che si possa trovare una sequenza di marcature abilitanti quelle stesse transizioni, in questo caso si definiscono **sequenze di scatti ammissibili** e non.

Vettore delle occorrenze

Il **vettore delle occorrenze s**, associato alla sequenza di scatti **S**, è un vettore colonna di cardinalità $|T|$ in cui l'elemento di posto i è pari al numero di occorrenze della transizione t_i nella sequenza S.

Equazione di stato

Grazie alle suddette definizioni molte proprietà della rete possono essere riformulate in maniera compatta e verificate più facilmente.
Per esempio, la condizione di abilitazione di una transizione, sia questa l'i-esima, che si trova nella marcatura M, può essere riscritta come:

$$\boldsymbol{M \geq I_i}$$

Essa indica che in M ci sono, nei posti di preset per la transizione i-esima, almeno tanti token quanto è il peso dell'arco che congiunge ognuno dei primi con la seconda.
Lo scatto della transizione i-esima a partire dalla marcatura M produce una nuova marcatura M^* definita come

$$\boldsymbol{M^* = M - \ I_i - O_i = M - C_i}$$

Più in generale la rappresentazione compatta della rete si ha con l'**equazione di stato** che permette di calcolare lo stato successivo della rete a partire dalla marcatura precedente.
Sia M_0 la marcatura corrente di una rete con matrice di incidenza $\mathbf{C}$, sia $\mathbf{S}$ una sequenza di scatti ammissibile associata al vettore $\mathbf{s}$. Sia M_1 la marcatura raggiunta in seguito all'applicazione di $\mathbf{S}$, si ha quindi:

$$\boldsymbol{M_1 = M_0 + Cs}$$

Capitolo 3

Tipologie di Reti di Petri e modellazione

3.1 Reti Condizioni/Eventi

Gli **eventi** sono situazioni che possono verificarsi in un sistema, la loro occorrenza è controllata dallo stato di tale sistema che può essere descritto da un insieme di condizioni. Una **condizione** è un predicato o descrizione logica dello stato del sistema.
Gli elementi di tipo P rappresentano le condizioni, quelli T gli eventi. Attraverso questo tipo di reti vengono rappresentati sistemi e processi in cui gli eventi si realizzano solo quando tutte le condizioni che li precedono sono soddisfatte.

Sia $G = (P, T, E)$ una **rete di Petri Condizioni/Eventi** con P insieme delle condizioni, T insieme degli eventi ed E la relazione di flusso. Sia $C \subseteq E$, esso è detto **caso**.

Esempio

Consideriamo una macchina che si occupa di inviare il pezzo richiesto dall'utente. Le condizioni in questo caso sono:

Condizioni	**Eventi**
a) Macchina in attesa	1)Arriva un ordine
b) Ordine arrivato	2)La macchina inizia a processare l'ordine
c) Lavorazione dell'ordine	3)La macchina finisce di processare l'ordine
d) Ordine completato	4)L'oggetto è inviato

Pre e post condizioni in questo caso sono :

Evento	**PRE Condizioni**	**POST Condizioni**
1	Nessuna	b
2	a,b	c
3	c	d,a
4	d	Nessuna

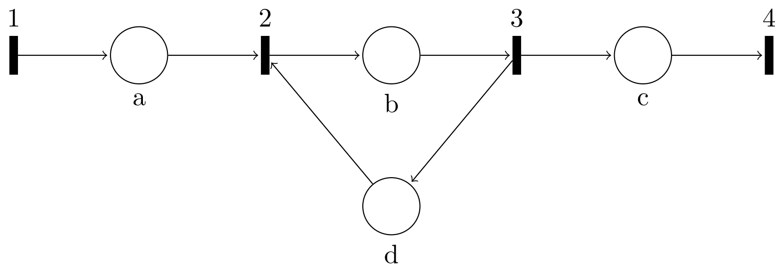


Figura 3.1: Rete Condizioni/Eventi per l'esempio

3.2 Reti Posti/Transizioni

Rispetto alle reti C/E, cui sono analoghe per tipologia, queste permettono la presenza di più token nei posti ed i token che transitano sulle transizioni possono essere più d'uno a seconda del peso dell'arco associato detto anche **capacità**.

Le reti P/T sono frequentemente utilizzate in campi nei quali si considerano il numero e la distribuzione di oggetti dinamicamente variabili (dati di un calcolatore, merci di un magazzino, pezzi di un sistema produttivo ecc ...). In essi si richiede che sia permessa la variazione di numero e distribuzione di oggetti purchè tale variazione resti entro limiti prefissati. Sistemi di questo tipo si rappresentano mediante reti che hanno per transizioni gli elementi attivi del sistema, tipo istanze e macchine, e per posti gli elementi passivi come i depositi ed i magazzini. Gli oggetti variabili si indicano tramite marche. Le situazioni di blocco che possono presentarsi, dovute a carenza o eccesso di oggetti, si palesano graficamente in transizioni che non possono scattare perché i posti d'entrata sono vuoti e/o quelli d'uscita sono pieni. In questi casi la **rete non** è **viva**.

Esempio

Consideriamo un sistema costituito da un produttore e due consumatori: gli oggetti prodotti, rappresentati da marche, sono raccolti un magazzino dal quale possono essere prelevati dai consumatori. In particolare:

- Il magazzino può contenere al massimo 5 marche

- Il produttore produce tre marche per volta
- L'accesso al magazzino è consentito ad un solo consumatore alla volta
- Ogni consumatore preleva due marche per volta dal magazzino

L'interesse sia contare le produzioni.

La relativa rete P/T è la seguente.

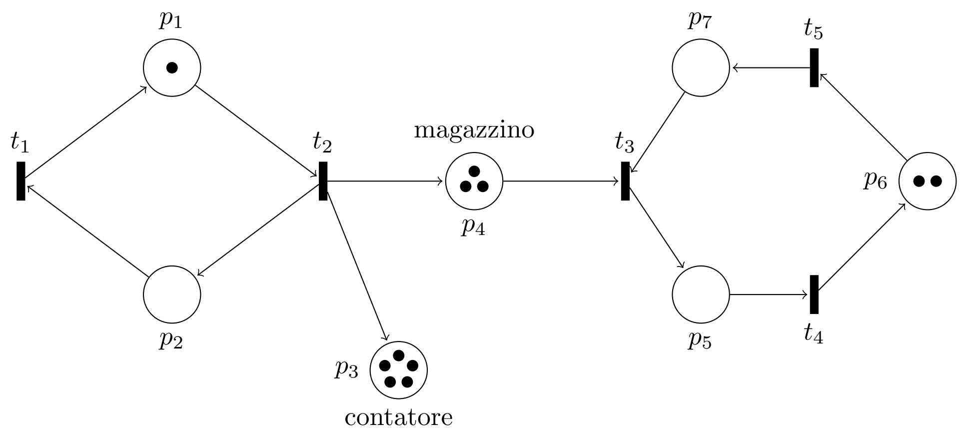


Figura 3.2: Esempio di rete P/T

3.3 Reti temporizzate

In questo tipo di reti si tiene conto anche del tempo, nel caso in cui sia legato ad una distribuzione di probabilità la **rete** è detta anche **stocastica**. La variabile temporale può essere connessa al concetto di rete di Petri in diversi modi, la si può voler aggiungere per modellare specifiche necessità del sistema come le seguenti:

- Una transizioni t deve scattare entro 10 unità di tempo
- Un token deve rimanere in un certo posto per almeno 2 unità di tempo
- Una transizione richiede almeno 3 unità di tempo per scattare

Si indica il tempo in unità non meglio specificate in quanto esse dipenderanno strettamente dall'applicazione di riferimento e non dal modello.
Il concetto di costante di tempo può essere introdotto per transizioni, posti ed archi e da questo dipenderà la descrizione del modello; aggiungere il tempo solo ad archi o transizioni per esempio sono tecniche utili per risolvere differenti tipologie di problemi.
Si assume di seguito di fare riferimento alla teoria delle reti di Petri temporizzate che assegna il concetto di tempo alle transizioni.

Vincoli temporali: Si associa ad ogni transizione un limite inferiore d ed uno superiore D in modo tale che se la transizione t è abilitata a scattare, essa lo debba fare non prima di d e non oltre D unità di tempo a partire dall'avvenuta abilitazione (a meno che non si disabiliti prima).

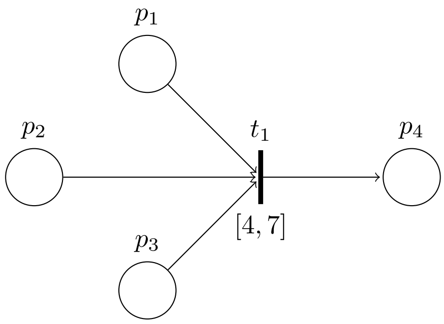


Figura 3.3: Esempio di rete temporizzata

Si assume che bound inferiore e superiore soddisfino

$$\begin{cases} d \geq 0 \\ D \leq +\infty \end{cases}$$

Se per una transizione non sono definiti i bound, è implicitamente assunta valida la limitazione $[0, +\infty]$, ovvero la transizione può scattare non appena è abilitata.

Nell'esempio seguente se un token arriva in p_1 al tempo 3, uno arriva in p_2 al tempo 4 ed uno in p_3 al tempo 1, la transizione t_1 scatta in modo non deterministico tra i tempi 9 e 12 compresi.
Nella figura 3.4 si nota inoltre che:

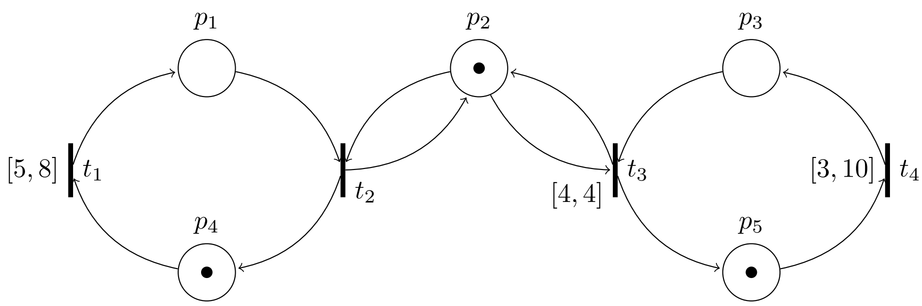


Figura 3.4: Esempio di rete temporizzata

- t_2 non ha vincoli quindi di default si assume il buond $[0, +\infty]$
- t_3 scatta esattamente 4 unità di tempo dopo che viene abilitata a meno che t_2 non scatti e quindi la disabiliti

- Se t_3 è abilitata al tempo T e t_2 non scatta nell'intervallo $[T, T+4]$, allora si avrà necessariamente uno scatto di t_3 al tempo $T+4$, questa è un caso detto di **strong time semantics** (STS)

Strong e Weak Time Semantics

La **STS**, ovvero una situazione in cui una transizione deve scattare al raggiungimento del limite superiore, è una delle possibili convenzioni per l'esecuzione di una RdP ma non è la sola. Nel caso seguente, facendo riferimento alla STS, la transizione t_1 non scatterebbe mai poichè potrebbe farlo solo se abilitata ma la sua abilitazione avverrebbe solo in concomitanza con quella di t_2 che, avendo limiti inferiori, scatterebbe sempre prima di t_1.

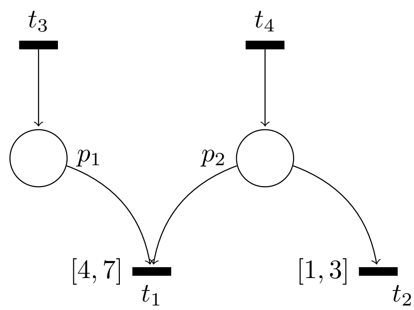


Figura 3.5: Esempio per STS

La WTS, **weak time semantics**, è una convenzione alternativa nella quale una transizione abilitata non è obbligata a scattare al suo upper bound ma se scatta, lo fa in un periodo compreso tra lower ed upper bound.

Una sequenza di scatti ammissibile in figura 3.5 è $< t_3, 2 >, < t_4, 5 >$ e $< t_1, 10 >$.
E' da notare inoltre che, nel caso t_2 non scatti entro il limite superiore, non potrà farlo più fino a quando non verrà disabilitata e nuovamente abilitata.

Non esiste una particolare motivazione per la quale va preferita una logica rispetto all'altra, è necessario piuttosto valutare le caratteristiche del sistema da modellare e decidere di conseguenza.

Scatti simultanei

Nelle reti di Petri non temporizzate il concetto di simultaneità non trova riscontro mentre in quelle temporizzate è possibile rappresentarlo facendo in modo che l'intervallo in cui le transizioni interessate possono scattare comprenda almeno un'unità temporale comune.
Si consideri la figura 3.6:

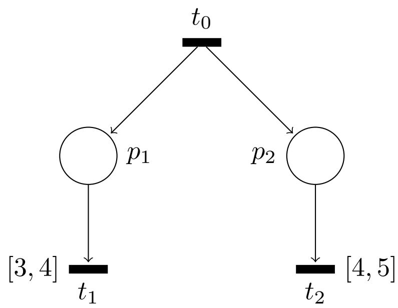


Figura 3.6: Esempio di rete che permette scatti simultanei

Se t_0 scatta al tempo 1, sia t_1 che t_2 sono abilitate a scattare al tempo 5 infatti entrambe le sequenza di scatto seguenti sono ammissibili: $< t_0, 1 >$, $< t_1, 5 >$, $< t_2, 5 >$ e $< t_0, 1 >$, $< t_2, 5 >$, $< t_1, 5 >$.

Nel caso in figura 3.7 lo scatto di t_0 e t_1 avviene nello stesso istante, la sequenza da essi definita è rappresentabile in modo generico come $< t_0, T >$, $< t_1, T >$. La sequenza inversa ($< t_1, T >$, $< t_0, T >$) non è invece ammissibile dato che t_0 precede t_1.

Le transizioni il cui lower bound è 0, come la transizione t_1 della figura 3.7 sono dette **zero-time transitions** poichè possono scattare nello stesso istante nel quale vengono abilitate.

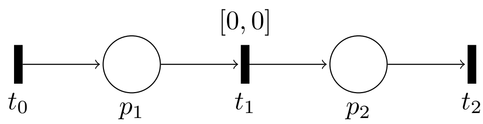


Figura 3.7: Esempio di RdP con *zero time transitions*

Funzinamento Zeno

Se non correttamente gestite, le zero-time transitions, possono portare alla comparsa per la rete di quello che viene chiamato **Zeno behaviour**. Questa tipologia di funzionamento indica la possibilità per la rete di evolvere infinitamente senza mai cambiare istante temporale.
Un esempio di ciò si ha nella rete in figura 3.8 nella quale è ammissibile la sequenza di scatti infinita (per ogni T in cui p_1 contiene un token) :

$$< t_0, T >, < t_1, T >, < t_2, T >, < t_0, T >, < t_1, T >, < t_2, T >, \text{ecc..}$$

Nonostante nella realtà non accada che una sequenza di transizioni possa evolvere senza che passi del tempo, il funzionamento della rete di tipo Zeno può

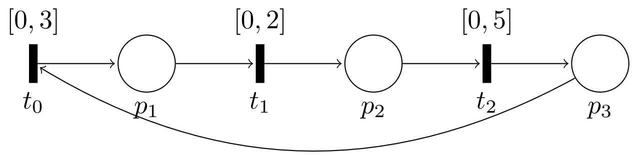


Figura 3.8: Esempio di *Zeno behaviour*

essere utile per modellare talune specifiche esigenze del sistema quale ad esempio quella che identifica come trascurabile il tempo che intercorre tra lo scatto di due transizioni.

Limite superiore infinito

Una situazione come quella rappresentata in figura 3.9 oltre ad indicare che la transizione non può scattare prima di 2 unità di tempo intende anche che la stessa potrebbe non scattare mai.
Questo è alla base della relazione tra le RdP temporizzate e le non temporizzate: in una RdP non temporizzata, infatti, si assume implicitamente che ad ogni transizione siano associati i bound $[0, +\infty]$.
Un'interpretazione alternativa della forma $[d, +\infty]$ consiste nel considerare la transizione cui è associato il limite secondo la logica STS per cui la transizione è costretta a scattare sempre anche se dopo un tempo infinito.

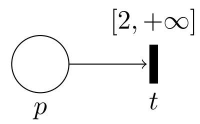


Figura 3.9: Transizione con limite superiore infinito

Preset vuoto

Nelle reti non temporizzate è permesso che le transizioni abbiano present vuoto il che consente loro di scattare in qualsiasi momento. Nel caso di reti temporizzate invece, si da un'interpretazione differente: un preset vuoto indica che la transizione, per la quale si assume definito il bound $[d, D]$, non può scattare due volte in meno di d unità di tempo.
Un preset vuoto è quindi equivalente ad un posto di enable (abilitazione), p_{en}, che nella marcatura iniziale ha un token all'interno, collocato a fianco della transizione con preset vuoto e ad essa connesso in modo da formare un autoanello.

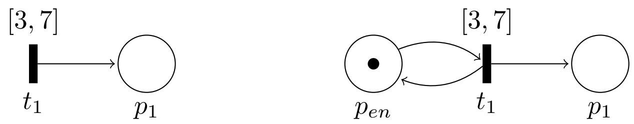


Figura 3.10: Rappresentazione del significato di preset vuoto in una RdP temporizzata

3.4 Reti con marche individuali: reti colorate

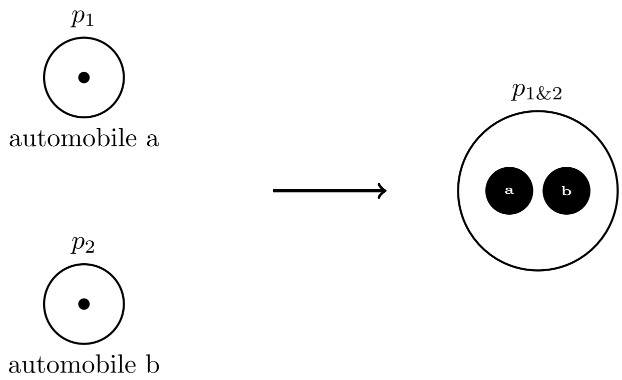


Figura 3.11: Da token distinguibili per posizione a token individuali

Due token non sono distinguibili l'uno dall'altro: in figura 3.11, per esempio, l'automobile `a` e la `b` sono distinguibili solo grazie al posto in cui si trovano. Un'alternativa a questa rappresentazione consiste nel rappresentare le due auto nello stesso posto rendendole univocamente individuabili grazie all'uso di token differenti detti "colorati". I colori in questo contesto possono essere visti come identificatori di differenti tipi di oggetto.
Una rete colorata usa token di diversi "colori", ad ogni transizione sono quindi associati diversi tipi di scatto a seconda dei token coinvolti.

Formalmente, una **rete di Petri colorata** è definita da:

- P: insieme di posti
- T: insieme delle transizioni
- $A \subseteq (P \times T) \cup (T \times P)$ è un insieme finito di archi
- $C : (P \cup T) \to \Omega$ dove Ω è l'insieme dei colori. $C(p)$ con $p \in P$ è l'insieme dei colori associati al posto p, ovvero l'insieme dei colori di token che possono trovarsi all'interno di p. $C(t)$ con $t \in T$ è l'insieme dei colori associati alla transizione t ed identifica quali scatti avvengono per t a seconda del colore dei token che la attraversano.
- $W^-(p, t) : C \to N^{|C(P)|}$ è la funzione che definisce le precondizioni di una transizione facendo riferimento ai colori. W^- mette in relazione ogni

scatto di t (cioè ogni colore di t) con un vettore con numero di elementi pari al numero di colori dei posti della rete. Il valore al posto i-esimo del vettore indica il numero di token del colore i-esimo necessari a far scattare la transizione.

- $W^+(p,t) : C \to N^{|C(P)|}$ è la funzione che definisce le postcondizioni di una transizione facendo riferimento ai colori. W^+ mette in relazione ogni scatto di t con un vettore di interi. Il valore al posto i-esimo del vettore indica il numero di token del colore i-esimo presenti dopo lo scatto della transizione.
- M_0: è la marcatura iniziale

Altre reti

Alla generica struttura delle reti di Petri è possibile applicare due particolari restrizioni:

Restrizione 1): Ogni posto può contenere al più una marca

Restrizione 2): Nessun posto può essere contemporaneamente posto di input e di output per la stessa transizione

Le reti che soddisfano la restrizione 1 sono dette **RdP ordinarie**, quelle che soddisfano la restrizione 2 sono dette **prive di auto-anelli** o **non riflessive** ed infine quelle che le soddisfano entrambe sono dette RdP **ristrette**. Tuttavia queste restrizioni non aggiungono complessità allo studio dell'evoluzione della rete, lo studio della loro raggiungibilità ad esempio è equivalente come sancito dal teorema seguente:

Teorema : I problemi di raggiungibilità delle seguenti classi di RdP sono tra loro equivalenti:

1. RdP generiche
2. RdP ordinarie
3. RdP prive di auto anelli
4. RdP ristrette

$$
\begin{tikzcd}
 & \text{RdP generiche} \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
\text{RdP ordinarie} \arrow[dr] & & \text{RdP senza autoanelli} \arrow[dl] \\
 & \text{RdP ristrette} &
\end{tikzcd}
$$

Figura 3.12: Relazione tra tipologie di RdP

Capitolo 4

Analisi delle reti

4.1 Raggiungibilità

Il problema della raggiungibilità per una rete di Petri consiste nello stabilire se, data una marcatura $M : P \to \mathbb{N}$, M appartiene alle marcature raggiungibili da quella iniziale.
Per studiare la raggiungibilità è utile la costruzione dei cosiddetti **invarianti**, ovvero di quegli insiemi di posti (**invarianti di tipo P**) o di transizioni (**invarianti di tipo T**) tali che la marcatura complessiva non varia in riferimento ai posti o alle transizioni coinvolti.

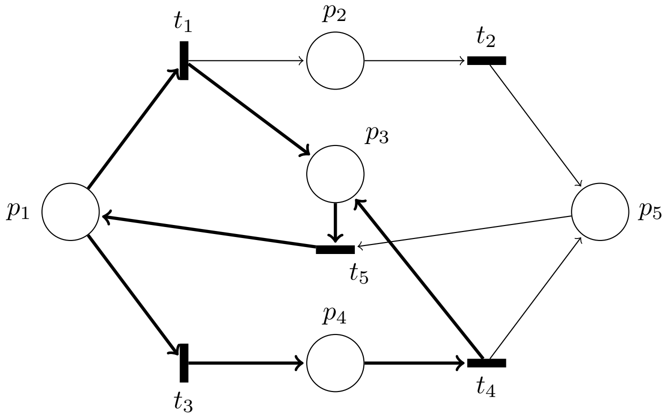


Figura 4.1: Invariante: la somma delle marche in $\{p_1, p_3, p_4\}$ non varia allo scattare delle transizioni

Insieme di raggiungibilità

Si definisce **insieme di raggiungibilità** $R(N, M_0)$ di una rete N con marcatura iniziale M_0 l'insieme più piccolo di marcature tali da comprendere M_0 e da contenere soltanto marcature dalle quali, con opportuno scatto, si raggiunge un'altra marcatura appartenente a quell'insieme.

Grafo di raggiungibilità

Si definisce **grafo di raggiungibilità** di una rete N con marcatura iniziale M_0 il grafo i cui nodi sono associati agli elementi di $R(N, M_0)$ e i cui archi sono associati alle transizioni che portano da una marcatura dell'insieme ad un'altra. Si definisce allo stesso modo l'**albero di raggiungibilità**, con la sola differenza che mentre l'albero si sviluppa creando ad ogni passo nuovi nodi, il grafo connette tra loro i nodi già esistenti.

L'albero è costruito a partire dalla marcatura iniziale e si sviluppa seguendo tutte le possibili evoluzioni della rete producendo tutte le marcature raggiungibili. Esso rappresenta ogni possibile sequenza di scatti di transizioni; ogni percorso con inizio la radice rappresenta una sequenza di transizioni permesse.

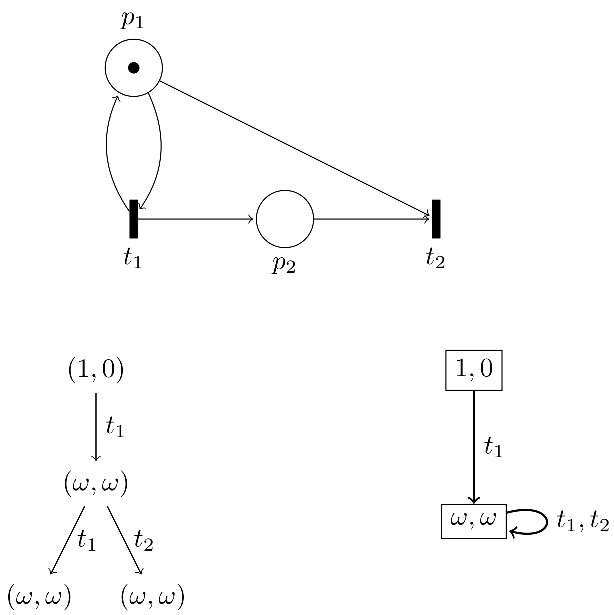


Figura 4.2: Rete con relativi albero e grafo di raggiungibilità

L'albero costruito potrebbe essere infinito pur non essendo infinita la rete (vedi esempio figura 4.5), per questo motivo è utile introdurre delle speciali marcature con differenti funzioni. Si definiscono:

- *dead markings*: marcature nelle quali nessuna transizione è abilitata a scattare, costituiscono i nodi terminali o foglie dell'albero
- *duplicate markings*: marcature che nell'albero sono già comparse in precedenza, danno origine a quelli che vengono definiti nodi duplicati. Non è necessario considerare i successori/figli di questi nodi dal momento che essi sono già stati prodotti dalla prima occorrenza del nodo nell'albero.

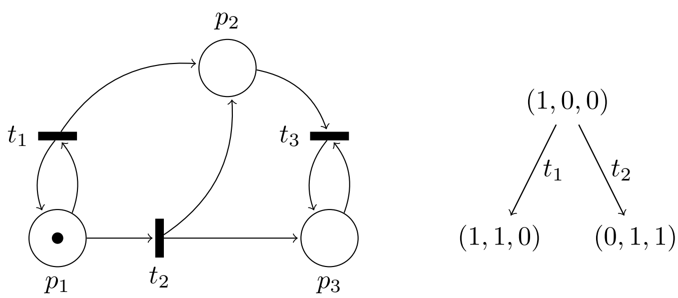


Figura 4.3: Rete di Petri e relativo primo passo nella costruzione dell'albero di raggiungibilità

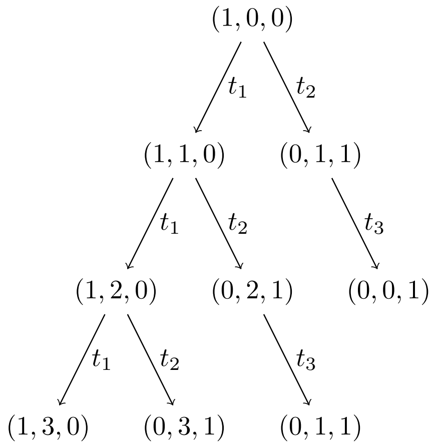


Figura 4.4: Terzo passo nella costruzione dell'albero di raggiungibilità della RdP di figura 4.3

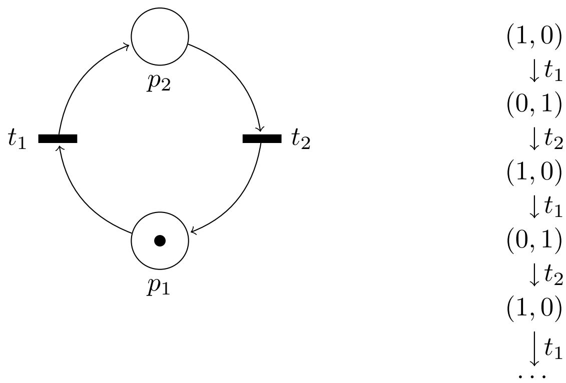


Figura 4.5: Esempio di rete finita con albero di raggiungibilità infinito

Si consideri una sequenza di scatti σ che ha inizio dalla marcatura μ e termina nella marcatura μ' dove $\mu' > \mu$. La marcatura μ' differisce da μ per alcuni tokens aggiuntivi situati in taluni posti, ovvero si può riscrivere:

$$\mu' = \mu + (\mu' - \mu) \text{ con } (\mu' - \mu) > 0$$

Dal momento che gli scatti non sono influenzati dai tokens aggiuntivi si potrà raggiungere da μ' una terza marcatura μ'' con la stessa sequenza σ dove $\mu'' > \mu'$ poichè si avrà un aggiunta di $\mu' - \mu$ tokens. Quindi:

$$\begin{gathered} \mu'' = \mu' + (\mu' - \mu) = \mu + 2(\mu' - \mu) \\ \mu''' = \mu'' + (\mu' - \mu) = \mu + 3(\mu' - \mu) \\ \dots \\ \mu^n = \mu + n(\mu' - \mu) \end{gathered}$$

Ripetendo la sequenza σ un numero arbitrario di volte, attraverso quei posti che aggiungono i tokens extra, si avrà la creazione di un numero infinito di tokens. Nella figura 4.4 è possibile far scattare la transizione t_1 il numero di volte desiderato per ottenere il progressivo aumento di una unità nei token all'interno di p_2.

L'infinito numero di marcature che si ottengono da questa tipologia di loop sono indicate attraverso il simbolo ω che rappresenta una sorta di infinito, un numero arbitrariamente elevato di token. Si definisce, per ogni a costante:

$$\begin{gathered} \omega + a = \omega \\ \omega - a = \omega \\ a < \omega \\ \omega \leq \omega \end{gathered}$$

Attraverso l'introduzione di ω è possibile rappresentare con alberi finiti anche reti che altrimenti avrebbero avuto albero di raggiungibilità infinito, a tal proposito l'albero relativo alla RdP di figura 4.3 diventa:

$$\begin{tikzcd}
 & & (1,0,0) \arrow[dl, "t_1"] \arrow[dr, "t_2"] & & \\
 & (1,\omega,0) \arrow[dl, "t_1"] \arrow[dr, "t_2"] & & (0,1,1) \arrow[dr, "t_3"] & \\
(1,\omega,0) & & (0,\omega,1) \arrow[dr, "t_3"] & & (0,0,1) \\
 & & & (0,\omega,1) &
\end{tikzcd}$$

Figura 4.6: Albero di raggiungibilità della RdP di figura 4.3

4.2 Limitatezza e Sicurezza

Spesso può essere utile conoscere la capacità massima della rete, ovvero il numero massimo di token che essa può contenere, per una duplice ragione: definire la dimensione del sistema ed evidenziare eventuali errori nella scrittura del modello.
A tal proposito si farà uso delle seguenti definizioni:

- Un posto p di una RdP è detto **posto k-limitato** se il numero di token al suo interno non supera mai k, ovvero $M(p) \leqslant k\ \forall M \in R(M_0)$
- Un posto p di una RdP è detto **posto limitato** se è k-limitato per un qualche intero $k > 0$
- Una RdP è detto **rete k-limitata** se il numero di token all'interno di ogni suo posto non supera mai k, ovvero $M(p) \leqslant k$,$\forall p \in P$ e $\forall M \in R(M_0)$
- Una RdP è detta **rete limitata** se è k-limitato per un qualche interno $k > 0$

Una **rete** di Petri è detta **sicura** se è 1-limitata ovvero $M(p) \leqslant 1$, $\forall p \in P$ e $\forall M \in R(M_0)$.

Teorema Una RdP è limitata se e solo se le marcature legate ai nodi dell'albero di raggiungibilità non contengono ω. Se questa condizione è soddisfatta, la RdP è anche k-limitata se tutte le marche dell'albero di raggiungibilità non contengono elementi superiori a k.

La presenza del simbolo ω all'interno del grafo o dell'albero infatti indica che il numero di token all'interno della rete è potenzialmente illimitato ovvero che esistono una o più sequenze di scatti che possono essere ripetute indefinitamente. Analogamente se la rete è illimitata lo è anche il numero di marcature raggiungibili da quella iniziale M_0. Se la RdP è limitata e ω non è presente nel grafo di raggiungibilità, la RdP rappresenta un **sistema a stati finiti**.

Conservatività

Una RdP è detta **conservativa** se non perde o guadagna token nell'esecuzione ma ne mantiene un numero costante.
Si consideri il vettore w dei pesi dei posti, ovvero il numero di token in essi contenuti, la RdP è conservativa se la somma degli elementi del vettore w è costante su tutte le marcature raggiungibili.
La conservatività di una rete può essere verificata attraverso l'albero di raggiungibilità; poichè esso è finito è possibile effettuare la somma dei pesi per ogni marcatura, se questa è pari per ogni marcatura M la rete è conservativa, altrimenti non lo è.
È necessario prestare attenzione all'analisi di reti che nell'albero contengono il simbolo ω poichè esso rappresenta una gamma infinita di valori. Dato che i pesi sono quantità positive, possono cioè essere 0 o valori superiori, se c'è un valore positivo diverso da 0 allora marcature che contengono ω avranno peso differente proprio a causa di questa componente. Da ciò si evince che ogni marcatura con peso non nullo ha peso ω e quindi la rete è non conservativa.

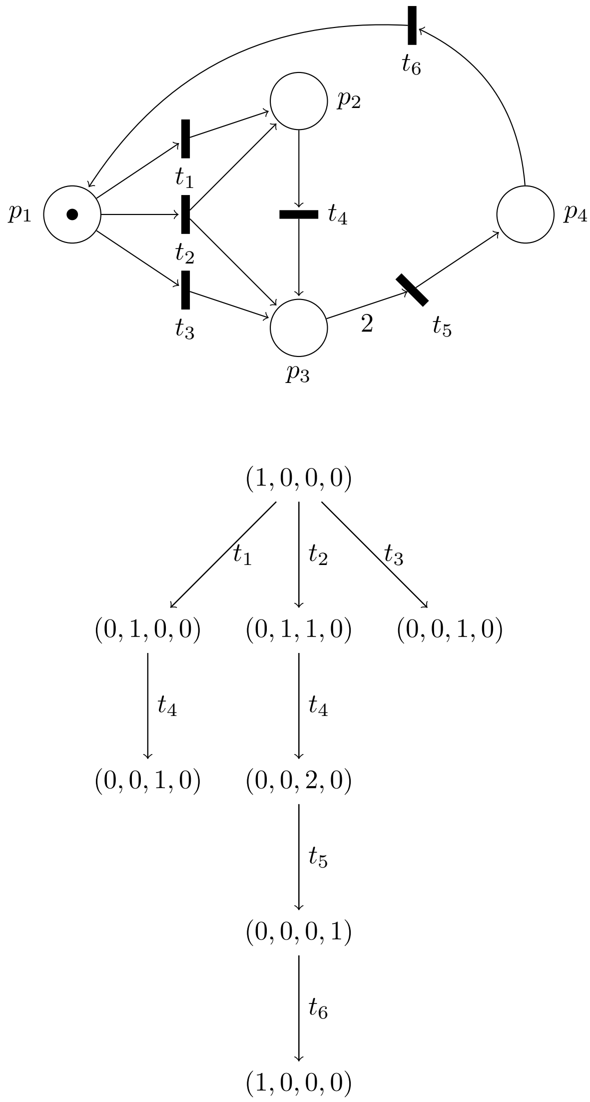


Figura 4.7: Rete di Petri e relativo albero di raggiungibilità

Si è fatto riferimento ad un concetto di conservatività rispetto ad un certo vettore dei pesi w, esso però è definito solo per reti limitate.
Per determinare il vettore w ogni posto dalla capacità illimitata deve avere capacità 0, come sottolineato sopra, affinchè si possa avere la conservatività ma ciò non è possibile se la rete ha vettore dei pesi con somma non nulla.

Problema di copertura

Il **problema di copertura** per una RdP consiste nel determinare, data una marcatura μ', se la marcatura μ'' con $\mu'' > \mu'$ è raggiungibile.
Questo problema può essere risolto attraverso l'ispezione dell'albero di raggiun-

gibilità costruito a partire da una certa μ ricercando un nodo x con marcatura $\mu(x)$ tale da avere $\mu(x) > \mu'$: se x esiste allora $\mu(x)$ restituisce una marcatura raggiungibile che comprende μ'; se invece x non esiste, μ' non è compreso in nessuna marcatura raggiungibile. Il percorso dalla radice dell'albero all'eventuale marcatura trovata definisce la sequenza di scatti che porta alla marcatura richiesta. Se una delle componenti di $\mu(x)$ è ω si avrà nel cammino un loop che sarà necessario percorrere tante volte quante il valore della componente corrispondente nella marcatura data.

4.3 Vivezza e punti morti

Si definisce **punto morto** in una RdP una transizione, o un insieme di transizioni, che non possono scattare. Una transizione è invece detta viva se può scattare. Questo non significa che la transizione debba essere abilitata ma soltanto che può esserlo.
Una transizione t_i di una RdP C è detta **potenzialmente scattabile** in una marcatura μ se esiste una marcatura $\mu' \in R(C, \mu)$ tale che t_i sia abilitata in μ'. Una transizione è viva in μ se è potenzialmente scattabile in ogni marcatura in $R(C, \mu)$.

Sono definiti diversi livelli di vivezza per una RdP C con marcatura μ:

- *Livello 0*: Una transizione t_i è viva al livello 0 se non puoi mai scattare
- *Livello 1*: Una transizione t_i è viva al livello 1 se è potenzialmente scattabile
- *Livello 2*: Una transizione t_i è viva al livello 2 se per ogni intero n esiste una sequenza di scatti nella quale t_i occorre almeno n volte
- *Livello 3*: Una transizione t_i è viva al livello 3 se c'è una sequenza di scatti infinita nella quale t_i compare infinitamente
- *Livello 4*: Una transizione t_i è viva al livello 4 se per ogni $\mu' \in R(C, \mu)$ esiste una sequenza di scatti σ tale che t_i è abilitata in $\delta(\mu', \sigma)$

Una transizione viva al livello 0 è detta anche morta, una viva la livello 4 è detta viva.

Il **problema della vivezza** per una RdP consiste nel determinare se per tutte le transizioni $t_i \in T$, t_i è viva. Analogamente è definito il problema della vivezza per una singola transizione che consiste nel determinare se data una $t_i \in T$ essa è viva.
Il problema della vivezza della rete è riducibile a quello della vivezza di ogni singola transizione ossia consiste nel risolvere m problemi di vivezza singola dove $m = |T|$.
Facendo riferimento al grafo di raggiungibilità si può verificare che una rete è viva se ogni nodo che non contiene ω ha almeno un arco di uscita.

4.4 Reversibilità

Spesso nei modelli di processi produttivi può essere necessario introdurre la nozione di reversibilità di un processo affinché sia possibile rappresentare eventi, come la rottura di macchine e strumenti, o la necessità di ripetere alcuni passaggi se il prodotto non rispetta le richieste. Per una RdP questi eventi si riconducono al concetto di reversibilità ed esistenza di stati home.

Una RdP è **reversibile** se è possibile risalire alla marcatura iniziale qualsiasi sia la marcatura nella quale ci si trova, ovvero data una certa M_0, la RdP è reversibile se $M_0 \in R(M)$ $\forall M \in R(M_0)$.

Una marcatura M_i di una RdP con marcatura iniziale M_0 è detta **home state** se è raggiungibile da ogni marcatura raggiungibile da M_0, cioè se $M_i \in R(M)$ $\forall M \in R(M_0)$.

Nell'esempio in figura 4.8 è facile osservare che la rete è reversibile in quanto la marcatura iniziale $M_0 = (1,0,0,0)$ è raggiungibile da qualsiasi altra marcatura (il grafo è connesso).

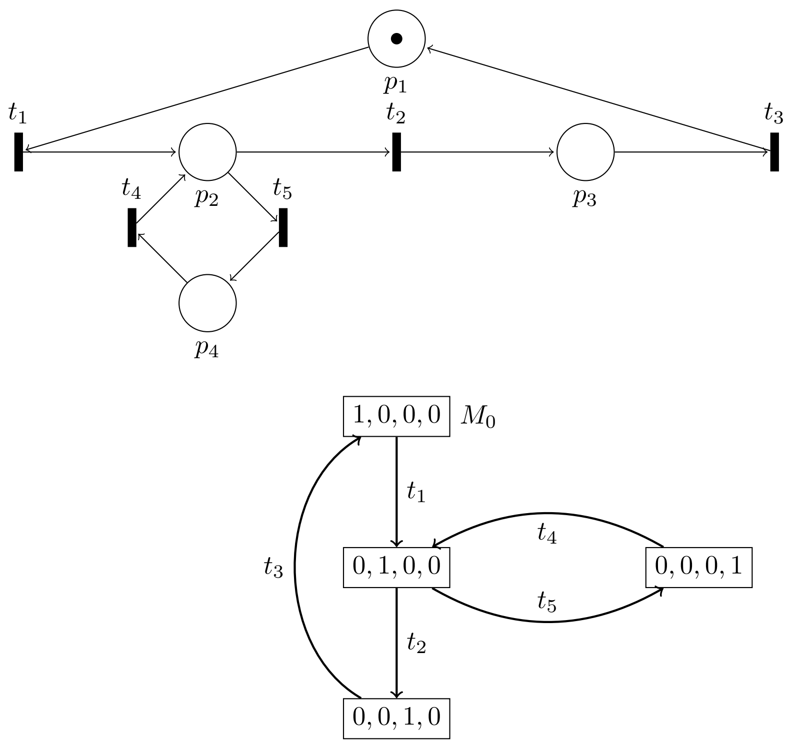


Figura 4.8: Rete reversibile e grafo di raggiungibilità

Capitolo 5

Esempi di applicabilità

5.1 Esempio 1

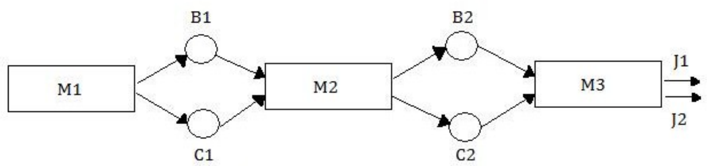


Figura 5.1: Schema della produzione di oggetti di due tipi differenti

Si considerino tre macchine M_1, M_2 ed M_3 poste in serie che producono due tipi di prodotto J_1 e J_2. Tra la macchina M_1 e la M_2 avviene la produzione di una certa quantità di J_1 che viene immagazzinato in un buffer B_1 capace di contenere un massimo di 4 prodotti e una quantità di J_2 contenuti in C_1 di capacità 4. Analogamente tra le macchine M_2 ed M_3 avviene la produzione di un certo numero di oggetti J_2 posti nel buffer C_2 di capacità limitata a 3 e di J_1 accantonati nel buffer B_2 di capacità 3. I tempi impiegati per la produzione sono i seguenti:

- un oggetto J_1 richiede 2 unità di tempo in M_1, 3 in M_2 e 1 in M_3
- un oggetto J_2 richiede 4 unità di tempo in M_1, 5 in M_2 e 6 in M_3

La rappresentazione con Rete di Petri è la seguente:

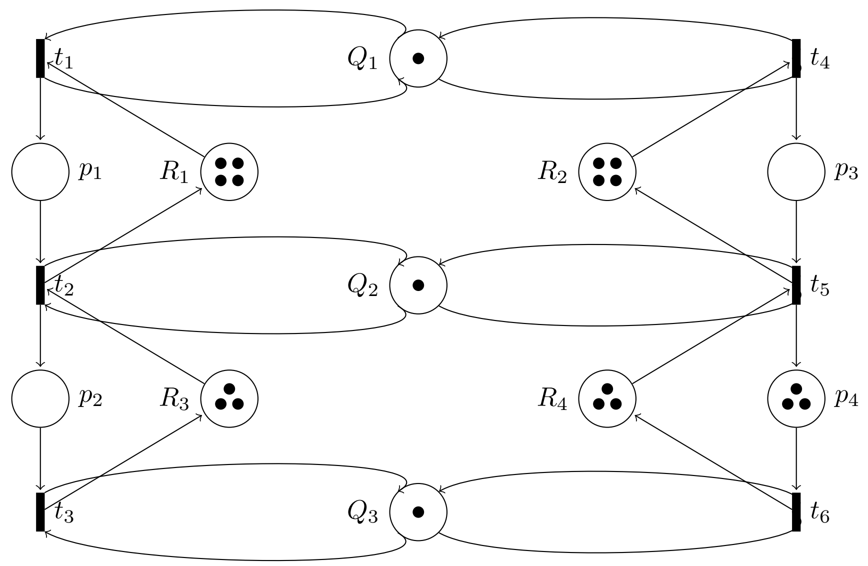


Figura 5.2: Rappresentazione con RdP dell'Esempio 1

Tuttavia è possibile semplificare lo schema se si fa uso delle reti colorate in cui:

- token ROSA: oggetto J_1
- token GIALLO: oggetto J_2
- token ROSSO:rappresenta le capacità rimanenti dei buffer C_1 e C_2 per prodotti di tipo J_2
- token VERDE: rappresenta le capacità rimanenti dei buffer B_1 e B_2 per prodotti di tipo J_1
- token BLU: previene la possibilità di attraversare una transizione più di un oggetto alla volta

Riunendo ora le coppie (t_1, t_4), (t_2, t_5) e (t_3, t_6) rispettivamente in $t_{1,4}$, $t_{2,5}$ e $t_{3,6}$ queste rappresentano un magazzino e non più delle operazioni. Riuniamo quindi allo stesso modo le coppie (R_1, R_2), (R_3, R_4), (p_1, p_3) e (p_2, p_4) in $R_{1,2}$,$R_{3,4}$,$p_{1,3}$ e $p_{2,4}$. Introduciamo due tipi di scatto per una transizione: scatti di tipo 1 che rappresentano la produzione di oggetti J_1 e scatti di tipo 2 che rappresentano al produzione di oggetti di tipo J_2.

Transizione	Scatto	Input	Output	Durata
$t_{1,4}$	1	$Q_1, R_{1,2}$	$p_{1,3}, Q_1$	2
$t_{1,4}$	2	$Q_1, R_{1,2}$	$p_{1,3}, Q_1$	4
$t_{2,5}$	1	$Q_2, p_{1,3}, R_{3,4}$	$R_{1,2}, p_{2,4}, Q_2$	3
$t_{2,5}$	2	$Q_2, p_{1,3}, R_{3,4}$	$R_{1,2}, p_{2,4}, Q_2$	5
$t_{3,6}$	1	$Q_3, p_{2,4}$	$R_{3,4}, Q_3$	1
$t_{3,6}$	2	$Q_3, p_{2,4}$	$R_{3,4}, Q_3$	6

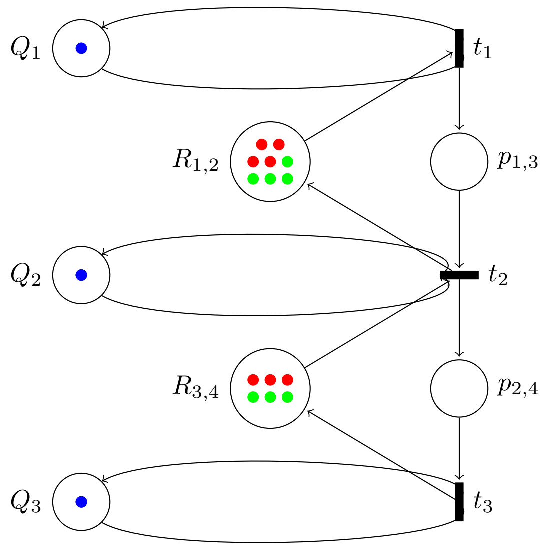


Figura 5.3: Rappresentazione con rete colorata di figura 5.2

La rete sopra può essere descritta come per definizione da :

- $P = \{p_{1,3}, p_{2,4}, Q_1, Q_2, Q_3, R_{1,2}, R_{3,4}\}$
- $T = \{t_{1,4}, t_{2,5}, t_{3,6}\}$
- $A = \{(t_{1,4}, p_{1,3}), (Q_1, t_{1,4}), (t_{1,4}, Q_1), (R_{1,2}, t_{1,4}),$
  $(p_{1,3}, t_{2,5}), (t_{2,5}, p_{2,4}), (Q_2, t_{2,5}), (t_{2,5}, Q_2), (t_{2,5}, R_{1,2}),$
  $(R_{3,4}, t_{2,5}), (p_{2,4}, t_{3,6}), (Q_3, t_{3,6}), (t_{3,6}, Q_3), (t_{3,6}, R_{3,4})\}$
- $C = \{$BLU,VERDE,ROSSO,GIALLO,ROSA$,1,2\}$ dove 1,2 sono relativi alle transizioni e i colori ai posti. Si ha inoltre:
  $C(Q_1)$=$C(Q_2)$=$C(Q_3)$=$\{$BLU$\}$;
  $C(p_{1,3})$=$C(p_{2,4})$=$\{$ROSSO, VERDE$\}$;
  $C(R_{1,2})$=$C(R_{3,4})$=$\{$GIALLO,ROSA$\}$;
  $C(t_{1,4})$=$C(p_{1,3})$=$C(t_{3,6})$=$\{1,2\}$;
- $W^-_{(Q_2,t_{2,5})}(1)$=$W^-_{(Q_2,t_{2,5})}(2)$=$W^-_{(Q_1,t_{1,4})}(1)$=
  $W^-_{(Q_1,t_{1,4})}(2)$=$W^-_{(Q_3,t_{3,6})}(1)$=$W^-_{(Q_3,t_{3,6})}(2)$=$[0,0,0,0,1]$;
  $W^-_{(R_{1,2},t_{1,4})}(1)$=$W^-_{(R_{3,4},t_{2,5})}(1)$=[0,0,1,0,0];
  $W^-_{(R_{1,2},t_{1,4})}(2)$=$W^-_{(R_{3,4},t_{2,5})}(2)$=[0,0,0,1,0];
  $W^-_{(p_{1,3},t_{2,5})}(1)$=$W^-_{(p_{2,4},t_{3,6})}(1)$=[1,0,0,0,0];
  $W^-_{(p_{1,3},t_{2,5})}(2)$=$W^-_{(p_{2,4},t_{3,6})}(2)$=[0,1,0,0,0];
- $W^+_{(t_{1,4},Q_1)}(1)$=$W^+_{(t_{1,4},Q_1)}(2)$=$W^+_{(t_{2,5},Q_2)}(1)$=
  $W^+_{(t_{2,5},Q_2)}(2)$=$W^+_{(t_{3,6},Q_3)}(1)$=$W^+_{(t_{3,6},Q_3)}(2)$=[0,0,0,0,1],
  $W^+_{(t_{2,5},R_{1,2})}(1)$=$W^+_{(t_{3,6},R_{3,4})}(1)$=[0,0,1,0,0];

$W^+_{(t_{2,5},R_{1,2})}(2)$=$W^+_{(t_{3,6},R_{3,4})}(2)$=[0,0,0,1,0];
$W^+_{(t_{1,4},p_{1,3})}(1)$=$W^+_{(t_{2,5},p_{2,4})}(1)$=[1,0,0,0,0];
$W^+_{(t_{1,4},p_{1,3})}(2)$=$W^+_{(t_{2,5},p_{2,4})}(2)$=[0,1,0,0,0];

- $M_0(Q_1)$=$M_0(Q_2)$=$M_0(Q_3)$=[0,0,0,0,1]; $M_0(R_{1,2})$=[0,0,4,4,0]; $M_0(R_{3,4})$)=[0,0,3,3,0]; $M_0(p_{1,3})$)=$M_0(p_{2,4})$)=[0,0,0,0,0];

Lo scatto di una transizione t, con riferimento a un colore $c \in C(t)$ consiste in:

1. sottrarre il vettore $W^-_{(p,t)}(c)$ dalle marcature di tutti i $p \in \cdot t$;
2. aggiungere il vettore $W^+_{(t,p)}(c)$ alle marcature di tutti i $p \in t\cdot$;

Si consideri a tal proposito lìesempio in figura 5.1: lo scatto della transizione $t_{1,4}$ a partire dalla marcatura iniziale con riferimento al prodotto J_1, porta alla nuova marcatura M_1 così calcolata:

$$M_1(Q_1) = [0,0,0,0,1] - W^-_{Q_1,t_{1,4}}(1) + W^+_{t_{1,4},Q_1}(1) = [0,0,0,0,1]$$
$$M_1(R_{1,2}) = [0,0,4,4,0] - W^-_{R_{1,2},t_{1,4}}(1) = [0,0,3,4,0]$$
$$M_1(p_{1,3}) = [0,0,0,0,0] + W^+_{t_{1,4},p_{1,3}}(1) = [1,0,0,0,0]$$

5.2 Esempio 2

In figura 5.4 sono rappresentati due robot che eseguono in modo coordinato l'operazione di PICK-& -PLACE di un oggetto. Ogni robot, per tale operazione, è dotato di una pinza (gripper o G da qui in seguito) che può essere aperta o chiusa. L'operazione PICK & PLACE può essere a sua volta scomposta in quattro sotto operazioni:

1. operazione di PICK: R_1 effettua il prelievo dell'oggetto dalla stazione di input
2. trasporto dell'oggetto dalla stazione di input al punto di incontro;
3. scambio dell'oggetto da R_1 a R_2;
4. trasporto dell'oggetto dal punto di incontro alla stazione di output.

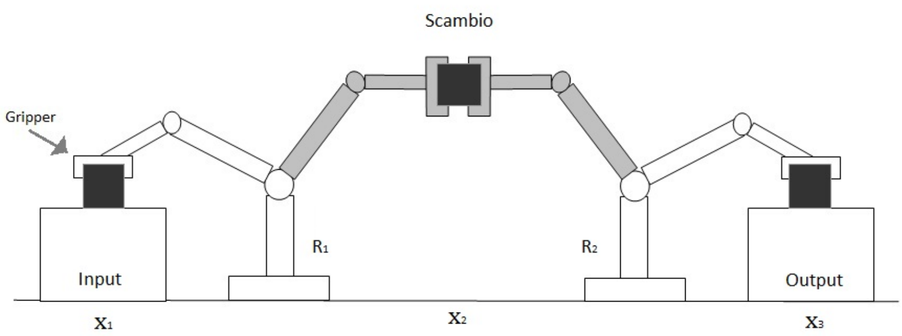


Figura 5.4: PICK & PLACE di due robot

Si desidera rappresentare mediante RdP il sistema con particolare attenzione al movimento dei gripper di entrambi i robot.
Si usano le seguenti notazioni:

R_1,R_2 : robot 1 e 2, il movimento di R_1 precede quello di R_2

x_1 : posizione di inizio, posto in cui si trovano i pezzi da spostare

x_2 : posizione intermedia di scambio in cui il pezzo va da R_1 ad R_2

x_3 : posizione finale in R_2 posa il pezzo spostato

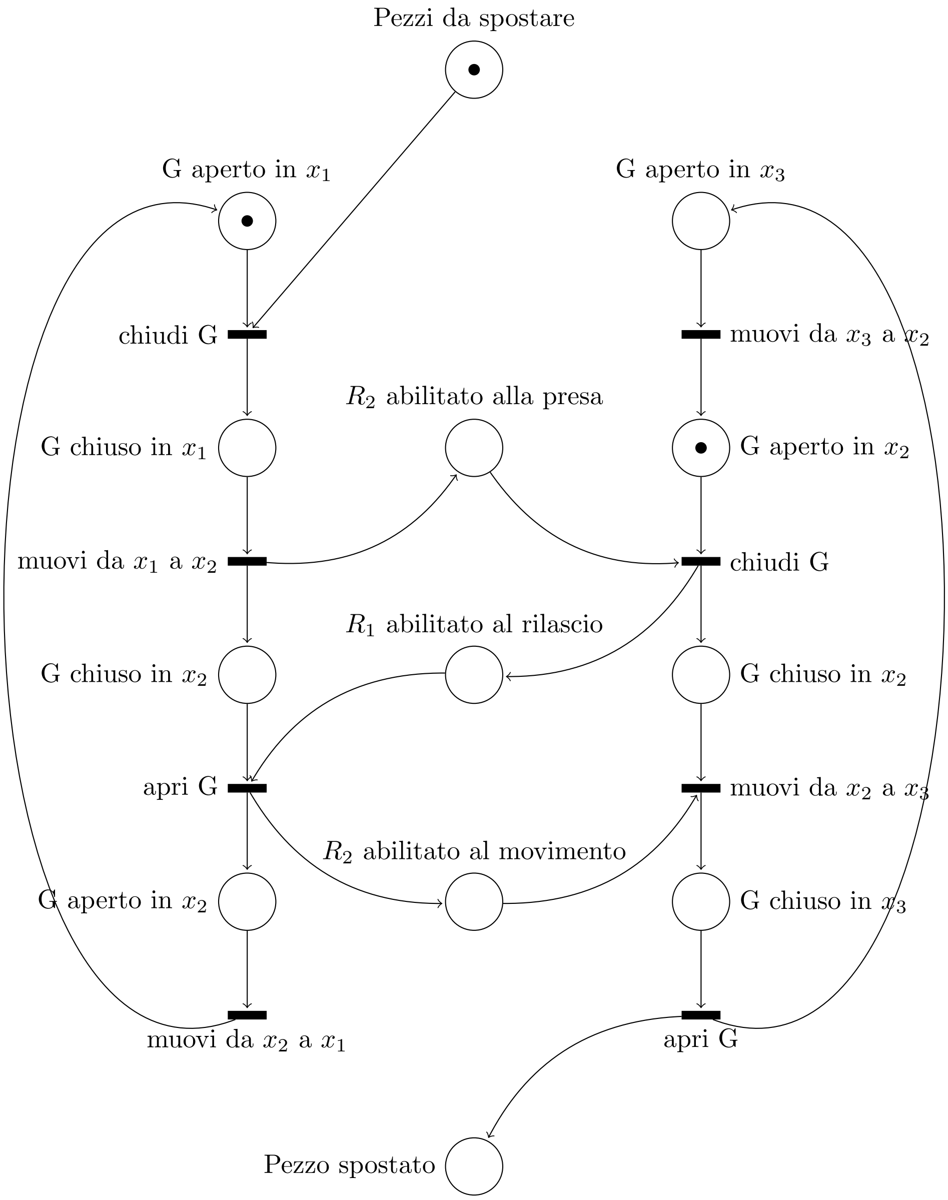


Figura 5.5: Rete di Petri per il sistema di Esempio 2

Bibliografia

[1] C. Girault and R. Valk, *Petri Nets for Systems Engineering*, Springer, 2002

[2] J.L. Peterson, *Petri net theory and the modeling of systems*, Prentice Hall, 1981

[3] J.M. Proth and X. Xie, *Petri Nets. A Tool for Design and Management of Manufacturing Systems*, Wiley, 1996

[4] W. Reisig, *Le reti di Petri*, Arnoldo Mondadori Editore, 1984

Elenco delle figure

Ringraziamenti

Desidero ringraziare tutti coloro che hanno contribuito alla realizzazione di questo elaborato ed in particolare il prof. Sandro Zampieri per la cortese disponibilità.
Grazie a mamma e papà per l'amore, la presenza ed il costante supporto.
Grazie a Raffaele per ogni parola, ad Alessandro e Stefano per aver saputo ascoltare.
Grazie a Nicolò, Roberto e Marisa per l'incoraggiamento e i preziosi volumi avuti in prestito.
Grazie infine a chi in questi anni ha saputo starmi accanto senza giudicare, a chi mi ha permesso di imparare dai suoi errori e a chi non ha mai smesso di prendermi sul serio.