

UNIVERSITÀ  
DEGLI STUDI  
DI PADOVA

**Università degli Studi di Padova**

Dipartimento di Ingegneria Industriale - DII

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Aerospaziale

**Simulazione del comportamento meccanico di  
compositi rinforzati utilizzando  
l'accoppiamento FEM-Peridinamica**

Tesi di laurea

Relatore  
**Prof. Ugo Galvanetto**  
Correlatore  
**Prof. Mirco Zaccariotto**

Laureando  
**Giorgio Calabrò**  
Matricola 1234059

Anno Accademico 2021-2022

*A mia madre,  
che da lassù mi rasserena  
nelle notti più buie.*

*A mio padre,  
che dopo mille tempeste  
rimane inaffondabile.*

*A mio fratello,  
con cui c'è un legame che  
è scolpito nelle tavole.*

## **Sommario**

L'obiettivo di questo lavoro di tesi è l'implementazione dell'accoppiamento FEM-Peridinamica proposto in [29] ai materiali compositi.

Dopo un attento studio sia della teoria Peridinamica applicata alle lamine unidirezionali e ai laminati, sia del metodo FEM, si è proceduto con la stesura del codice e alla preparazione dei numerosi test atti a verificare che il codice fosse in grado di simulare, con accuratezza, il comportamento meccanico dei compositi.

Sono state effettuate simulazioni considerando diverse orientazioni delle fibre, diversi valori di carico e diverse collocazioni della cricca iniziale.

In tutti i casi, i risultati sono stati concordi con quelli presentati negli studi presi a riferimento.

# Indice

<b>Introduzione</b>	<b>1</b>
<b>1 Proprietà meccaniche di lamine e laminati.</b>	<b>4</b>
1.1 Lamine . . . . .	4
1.2 Laminati . . . . .	6
<b>2 La teoria Peridinamica</b>	<b>12</b>
2.1 Aspetti generali . . . . .	13
2.1.1 Equazione del moto . . . . .	13
2.1.2 Materiale microelastico . . . . .	14
2.1.3 Linearità . . . . .	15
2.1.4 Prototype microelastic brittle material (PMB) . . . . .	16
2.2 Lamine e laminati . . . . .	19
2.2.1 La costante elastica $c$ nelle lamine ortotrope . . . . .	20
2.2.2 Il <i>bond stretch</i> critico $s_0$ nelle lamine ortotrope . . . . .	26
2.2.3 La costante elastica $c$ nei laminati . . . . .	27
2.2.4 Il <i>bond stretch</i> critico $s_0$ nei laminati . . . . .	32
<b>3 Il metodo agli elementi finiti (FEM)</b>	<b>34</b>
3.1 Elemento ASTA . . . . .	36
3.2 Elemento quadrilatero bilineare a 4 nodi . . . . .	39
3.3 Assemblaggio degli elementi FEM . . . . .	43
<b>4 Accoppiamento FEM-Peridinamica</b>	<b>46</b>
4.1 Definizione dei bond peridinamici sotto forma di elementi FEM . . . . .	47
4.2 Assemblaggio della matrice di rigidezza globale FEM-PD . . . . .	49
<b>5 Implementazione numerica</b>	<b>51</b>
5.1 Discretizzazione e orizzonte . . . . .	51
5.2 Calcolo del volume dei nodi peridinamici . . . . .	53
5.3 Algoritmo di <i>grid-adapting</i> . . . . .	54
5.4 Convergenza della soluzione peridinamica . . . . .	56
5.5 Risoluzione del modello dinamico FEM-PD . . . . .	58
5.6 Indice di danneggiamento del materiale . . . . .	60
5.7 Diagramma a blocchi del codice usato . . . . .	61
<b>6 Validazione del codice</b>	<b>64</b>

6.1	Proprietà meccaniche del materiale . . . . .	64
6.2	Test 1 - Lamina integra . . . . .	65
6.2.1	Test 1A - Inclinazione di 90° . . . . .	66
6.2.2	Test 1B - Inclinazione di 45° . . . . .	67
6.2.3	Test 1C - Inclinazione nulla . . . . .	68
6.3	Test 2 - Lamina con cricca centrale e carico laterale . . . . .	69
6.3.1	Test 2A - Inclinazione di 90° . . . . .	69
6.3.2	Test 2B - Inclinazione di 45° . . . . .	73
6.3.3	Test 2C - Inclinazione nulla . . . . .	76
6.4	Test 3 - Lamina con cricca laterale e carico verticale . . . . .	80
6.4.1	Test 3A - Inclinazione di 90° . . . . .	81
6.4.2	Test 3B - Inclinazione di 45° . . . . .	86
6.4.3	Test 3C - Inclinazione nulla . . . . .	91
6.5	Test 4 - Laminato [0/90/0] con cricca centrale e carico laterale . . . . .	96
	<b>Conclusioni</b>	<b>101</b>
	<b>Bibliografia</b>	<b>103</b>

# Introduzione

Negli ultimi anni il settore aerospaziale è stato protagonista di numerose innovazioni tra cui il ricorso sempre maggiore all'elettronica per i sistemi avionici e l'impiego di materiali non metallici per la realizzazione di sezioni strutturali critiche come la fusoliera o le superfici alari. Questi cambiamenti hanno riguardato anche l'ambito spaziale, dove la riduzione delle masse e la ricerca di una maggiore efficienza energetica degli impianti di bordo rappresentano da sempre le sfide maggiori.

Tra i materiali non metallici più importanti si annoverano i compositi, definibili come materiali eterogenei nati dall'unione di più fasi, cioè materiali aventi proprietà meccaniche molto diverse tra loro. Ciò che ne risulta è un materiale avente un comportamento meccanico migliore rispetto alle fasi prese singolarmente. Alcuni esempi sono il compensato, i parabrezza e i laminati rinforzati da fibre.

I laminati nascono dalla sovrapposizione di numerose lamine costituite da fibre, in carbonio o in vetro, e una matrice sotto forma di resina, principalmente epossidica o poliammidica.

Una fibra è estremamente sottile (circa un decimo di un capello umano) e presenta un'elevata rigidità lungo il suo asse longitudinale. Per questa sua caratteristica, la fibra funge da rinforzo della lamina. La matrice, invece, avvolge le fibre e deve garantire il loro corretto distanziamento e la protezione da eventuali agenti esterni. Le lamine sono ortotrope, cioè hanno proprietà meccaniche diverse lungo tre direzioni mutualmente perpendicolari. In base all'inclinazione delle fibre, è possibile ottenere la massima rigidità nella direzione voluta. Unendo più lamine, aventi stessa o diversa inclinazione delle fibre rispetto ad un sistema di riferimento esterno, è possibile conferire al materiale ulteriori proprietà meccaniche. Al contrario dei materiali metallici, è possibile cambiare le proprietà del materiale semplicemente variando il numero di lamine e/o l'orientazione delle fibre. La *progettazione* delle proprietà meccaniche rappresenta quindi uno dei principali vantaggi dei compositi. Nel tempo, numerose ricerche ed una crescente ottimizzazione dei processi produttivi hanno permesso una maggiore diffusione dei laminati nell'industria aerospaziale, dove i vantaggi derivanti dal loro utilizzo superano gli svantaggi, tra cui il costo. Attualmente sono impiegati per la realizzazione delle fusoliere del Boeing B787 e dell'Airbus A350.

Affinché i materiali compositi possano essere utilizzati per applicazioni strutturalmente critiche, è necessario che si sviluppino strumenti in grado di simularne il comportamento meccanico. Il metodo agli elementi finiti (in inglese *Finite Element*

*Method* - FEM) ha dimostrato di essere efficiente nella stima delle forze, deformazioni e curvature a cui possono andare incontro i laminati.

Uno dei problemi maggiori riguardanti il FEM consiste nella sua incapacità di simulare correttamente i processi di nucleazione e propagazione di fratture all'interno della struttura in esame. Questo perché il FEM consiste nella risoluzione delle derivate parziali che sono alla base della teoria classica del continuo. La frattura rappresenta una discontinuità e quindi il calcolo della derivata nei punti interessati dal danno è possibile solo mediante delle approssimazioni. Simulare questi processi è alquanto importante perché le cricche indeboliscono la struttura e possono causare cedimenti strutturali, specialmente nelle applicazioni soggette a carichi ciclici come la pressurizzazione e la depressurizzazione.

Nel tempo sono state identificate diverse strategie in grado di risolvere il problema. Una delle più usate riguarda la tecnica X-FEM (eXtended Finite Element Method), in cui funzioni ad hoc garantiscono una migliore modellazione dello spazio d'analisi attorno alla cricca e delle grandezze che governano il processo di rottura [15, 21]. Il metodo X-FEM può essere implementato in diversi software commerciali, come ABAQUS [4].

Un approccio alternativo al problema delle discontinuità consiste nell'uso della teoria Peridinamica, che offre una formulazione integrale della meccanica del continuo. Il corpo in esame viene suddiviso in una serie di punti, il cui comportamento dipende dalle interazioni con gli altri punti contenuti nel suo intorno, la cui ampiezza è definita *orizzonte*. Per questo motivo, la Peridinamica è una teoria non-locale [22]. La teoria Peridinamica è perfettamente applicabile ai materiali compositi, in quanto le interazioni tra i nodi possono essere di tipo fibra o matrice [13, 31, 12, 18, 23].

Uno degli svantaggi principali derivanti dall'utilizzo di questa teoria consiste nell'elevato costo computazionale richiesto per svolgere le numerose integrazioni e per considerare tutte le interazioni che sussistono tra i punti del sistema. Ciò ha reso la teoria difficilmente utilizzabile per applicazioni industriali.

Una delle soluzioni proposte per ridurre i tempi di simulazione si basa sull'utilizzo simultaneo della teoria FEM e Peridinamica. Nelle aree non fratturate o dove non è possibile la propagazione della cricca, si utilizza una griglia FEM mentre nelle aree soggette a rottura viene inizializzata una griglia Peridinamica. Limitando le dimensioni di quest'ultima, è possibile quindi ridurre il costo computazionale e il tempo di simulazione, garantendo allo stesso tempo un buon livello di accuratezza. L'implementazione dell'accoppiamento FEM-Peridinamica rappresenta il punto critico dell'approccio. Sono state proposte diverse strategie, tra cui l'utilizzo di *ghost nodes* [8] oppure di zone di sovrapposizione tra le due griglie [19].

Un altro approccio sviluppato per semplificare l'accoppiamento FEM-Peridinamica consiste nella creazione di una matrice di rigidità globale che contenga sia i nodi FEM che quelli peridinamici [29]. Sfruttando la formulazione *bond-based* della teoria Peridinamica, è possibile descrivere le interazioni tra i punti mediante dei legami (*bond*) che trovano il loro corrispettivo nella teoria FEM nella forma di elementi asta. Inoltre, i punti peridinamici vicini al confine tra le due griglie, sono legati ai nodi FEM che si trovano nel loro intorno. In questo caso, il legame viene definito *ibrido* [29, 6]. Grazie a questa strategia, è inoltre possibile utilizzare algoritmi di *grid-adapting* che permettono di attivare solo i bond peridinamici che sono in-

teressati da una determinata condizione. Questo riduce ulteriormente i tempi di simulazione.

Il lavoro di tesi, quindi, consiste nell'estendere la strategia di accoppiamento presentata in [29, 6] alle simulazioni che coinvolgono i compositi (lamine e laminati). Nel primo capitolo vengono descritte le proprietà meccaniche fondamentali dei materiali compositi. I capitoli due e tre sono dedicati alla presentazione sia della teoria Peridinamica sia di quella FEM. Proseguendo, i capitoli quattro e cinque affrontano il tema dell'accoppiamento FEM-Peridinamica e dell'implementazione numerica. Nell'ultimo capitolo, il sesto, vengono presentati i risultati dei test effettuati per verificare l'attendibilità del codice sviluppato.

# Capitolo 1

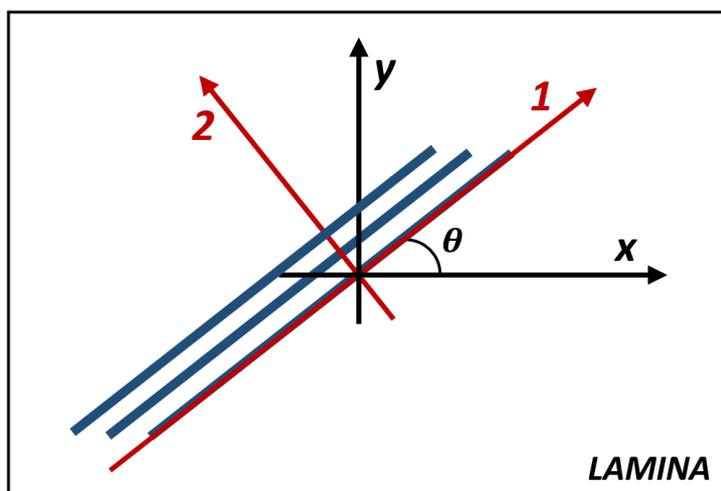
## Proprietà meccaniche di lamine e laminati.

Questa tesi riguarda lo studio sia di lamine rinforzate da fibre unidirezionali (in inglese *Unidirectional fiber reinforced lamina*) sia di laminati, che si creano sovrapponendo lamine unidirezionali che possono avere tra loro una diversa orientazione delle fibre.

Le lamine e i laminati sono generalmente materiali ortotropi, cioè possiedono proprietà meccaniche diverse lungo tre direzioni mutualmente perpendicolari.

### 1.1 Lamine

Per ogni lamina, è possibile definire un sistema di riferimento locale (figura 1.1), in cui la direzione principale coincide con quella delle fibre ed è quindi caratterizzata dalla massima rigidità.



**Figura 1.1:** Sistema di riferimento locale (rosso) ed esterno (nero) per una lamina avente fibre inclinate di  $\theta$  rispetto all'asse orizzontale esterno  $x$ .

Avendo uno spessore estremamente ridotto e proprietà meccaniche fuori dal piano trascurabili rispetto a quelle nel piano, la lamina viene spesso modellata come un corpo bidimensionale, in regime di *plane-stress*.

Si ricorda che con *plane-stress*, s'intende l'azzeramento di tutti gli sforzi agenti fuori dal piano, cioè:

$$\sigma_{zz} = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0 \quad (1.1)$$

dove  $\sigma$  e  $\tau$  sono tutti gli sforzi assiali e di taglio agenti fuori dal piano della lamina. Con questa ipotesi, le deformazioni sono quindi causate solamente da sforzi agenti nel piano della lamina.

Generalmente, la matrice d'elasticità di un materiale qualsiasi ha dimensioni [6x6]. In base al fatto che il materiale sia isotropo, ortotropo o totalmente anisotropo, si potranno identificare delle simmetrie che rendano più semplice la definizione della matrice. Nel caso *plane-stress*, la matrice ha dimensioni [3x3], in quanto si è proceduto all'eliminazione di tutti gli elementi correlati agli sforzi agenti lungo  $z$ , quindi fuori dal piano.

Nel caso di una lamina ortotropica, la matrice d'elasticità riferita al sistema di riferimento locale e in condizione di *plane-stress*, è così definita:

$$[\mathbf{Q}] = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{21} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} & \frac{\nu_{12}E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} & 0 \\ \frac{\nu_{12}E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} & \frac{E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} & 0 \\ 0 & 0 & G_{12} \end{bmatrix} \quad (1.2)$$

dove  $E_1, E_2$  sono i moduli di Young lungo rispettivamente la direzione longitudinale e trasversale,  $\nu_{12}$  il coefficiente di Poisson e  $G_{12}$  il modulo di taglio. L'ultimo elemento diagonale è definito  $Q_{66}$  perché, nella matrice d'elasticità generica, sarebbe l'ultimo elemento, cioè collocato nella sesta colonna della sesta riga.

Inoltre, in condizione di *plane-stress*, tra i coefficienti di Poisson sussiste la seguente relazione:

$$\frac{\nu_{12}}{E_1} = \frac{\nu_{21}}{E_2} \quad (1.3)$$

Dal punto di vista computazionale, risulta più conveniente utilizzare un sistema di riferimento esterno, che sia indipendente dall'inclinazione delle fibre. Questo risulta cruciale nel caso dei laminati, in cui le lamine possono avere fibre orientate in modo diverso tra loro. Per fare ciò, è necessario sia moltiplicare che premoltiplicare la matrice d'elasticità (1.2) per una matrice di trasformazione delle coordinate  $[\mathbf{T}]$ :

$$[\mathbf{T}] = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & 2cs \\ s^2 & c^2 & -2cs \\ -cs & cs & c^2 - s^2 \end{bmatrix} \quad (1.4)$$

dove  $c = \cos(\theta)$ ,  $s = \sin(\theta)$  e  $\theta$  è l'inclinazione delle fibre rispetto all'asse  $x$  del sistema di riferimento globale (in nero nella figura 1.1).

Quindi la matrice d'elasticità della lamina riferita al sistema di riferimento globale sarà:

$$\overline{[Q]} = [T]^T [Q] [T] = \begin{bmatrix} \overline{Q}_{11} & \overline{Q}_{12} & \overline{Q}_{16} \\ \overline{Q}_{21} & \overline{Q}_{22} & \overline{Q}_{26} \\ \overline{Q}_{61} & \overline{Q}_{62} & \overline{Q}_{66} \end{bmatrix} \quad (1.5)$$

dove i termini  $\overline{Q}_{ij}$  dipendono dall'inclinazione delle fibre e dai termini della matrice d'elasticità locale:

$$\begin{aligned} \overline{Q}_{11} &= Q_{11} \cos^4(\theta) + Q_{22} \sin^4(\theta) + 2(Q_{12} + 2Q_{66})\sin^2(\theta)\cos^2(\theta), \\ \overline{Q}_{12} &= (Q_{11} + Q_{22} - 4Q_{66})\sin^2(\theta)\cos^2(\theta) + Q_{12}(\cos^4(\theta) + \sin^4(\theta)), \\ \overline{Q}_{16} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66})\cos^3(\theta)\sin(\theta) - (Q_{22} - Q_{12} - 2Q_{66})\sin^3(\theta)\cos(\theta), \\ \overline{Q}_{22} &= Q_{11} \sin^4(\theta) + Q_{22} \cos^4(\theta) + 2(Q_{12} + 2Q_{66})\sin^2(\theta)\cos^2(\theta), \\ \overline{Q}_{26} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66})\cos(\theta)\sin^3(\theta) - (Q_{22} - Q_{12} - 2Q_{66})\cos^3(\theta)\sin(\theta), \\ \overline{Q}_{66} &= (Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12} - 2Q_{66})\sin^2(\theta)\cos^2(\theta) + Q_{66}(\cos^4(\theta) + \sin^4(\theta)) \end{aligned} \quad (1.6)$$

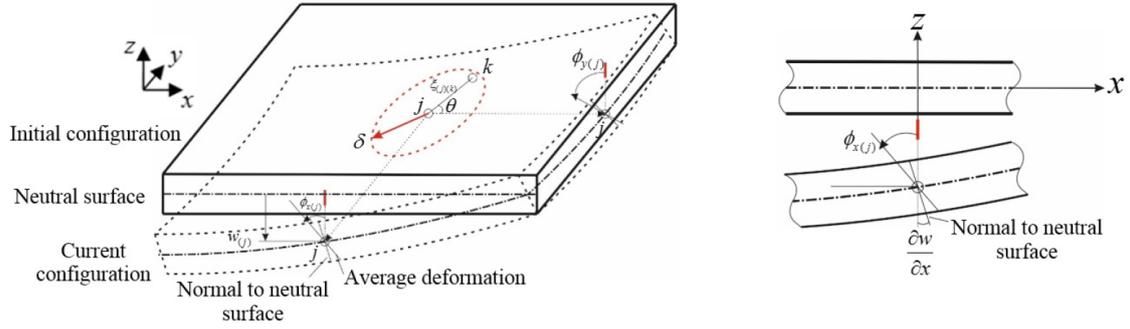
## 1.2 Laminati

Un laminato è costituito dalla sovrapposizione di un certo numero di lamine, che possono avere uguale o differente orientazione delle fibre. In base al numero, alla disposizione reciproca e alla direzione delle fibre delle lamine, è possibile conferire al materiale composito ulteriori proprietà meccaniche.

Anche per i laminati, è possibile definire una matrice di rigidezza, che rappresenta l'unione dei contributi elastici delle singole lamine. Tuttavia, la matrice sarà più complessa perché la sovrapposizione della lamine comporta, in taluni casi, degli accoppiamenti tra le diverse tipologie di deformazione.

Per prima cosa, è necessario definire una serie di assunzioni che costituiscono la base della **teoria classica dei laminati** (in inglese *Classical Laminate Theory*). Si assume che:

1. Il laminato viene approssimato ad un corpo unico. Questo prevede che vi sia un legame perfetto tra le lamine, che ne impedisca lo slittamento reciproco e la generazione di deformazioni differenziate.
2. Si considera valida l'ipotesi di Kirchhoff-Love nel caso della sola flessione (figura 1.2). Ciò prevede che una linea verticale, perpendicolare al piano medio della lamina, rimanga dritta e perpendicolare al piano a seguito di una flessione. Se si assume che la lunghezza della linea rimanga inalterata, allora si può concludere che sia gli stress che le deformazioni agenti fuori dal piano sono trascurabili. Quest'affermazione è più forte della condizione di *plane-stress*, perché in quest'ultima solo gli stress fuori dal piano sono nulli, non le deformazioni. La deformazione nel piano è costante per tutto lo spessore della lamina.



**Figura 1.2:** Condizione cinematica di Kirchhoff-Love. Immagine tratta da [27].

Di conseguenza, la deformazione indotta dalla semplice flessione varia linearmente lungo lo spessore del laminato. Inoltre, la deformazione totale agente sul laminato avrà due contributi: uno derivante dagli sforzi nel piano (che sarà costante per tutto lo spessore) e il secondo generato dalla sola flessione (che avrà un andamento lineare lungo lo spessore). Tutto ciò si può riassumere nella seguente espressione:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} -\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ -2\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} \kappa_x^0 \\ \kappa_y^0 \\ \kappa_{xy}^0 \end{bmatrix} \quad (1.7)$$

dove  $[u_0, v_0, w_0]$  sono le componenti dello spostamento nel piano mediano ( $z = 0$ ) della lamina,  $[\varepsilon_x^0, \varepsilon_y^0, \gamma_{xy}^0]$  il vettore delle deformazioni nel piano mediano ( $z = 0$ ) dovute agli sforzi nel piano (definiti *estensionali*) e  $[\kappa_x^0, \kappa_y^0, \kappa_{xy}^0]$  il vettore delle curvature, sempre nel piano mediano, dovute ai momenti agenti nel piano. Si precisa che  $\kappa_{xy}^0$  è una torsione.

Dall'espressione (1.7) si può notare come la deformazione indotta dalla flessione, sia costituita dal vettore delle curvature del piano mediano, moltiplicato per la coordinata  $z$ . All'aumentare della distanza dal piano mediano, questa deformazione sarà maggiore in modulo. Mentre, la deformazione indotta dagli sforzi estensionali, rimane costante per tutto lo spessore.

La matrice d'elasticità del laminato può essere calcolata partendo dalle forze e i momenti che agiscono sul laminato stesso.

Se si considerano forze e momenti su unità di lunghezza, quindi espressi rispettivamente in  $[N/m]$  e  $[N]$ , allora si avranno i seguenti integrali, validi per il laminato

assunto come un corpo unico:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{bmatrix} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} dz \\ \begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} z dz \end{aligned} \quad (1.8)$$

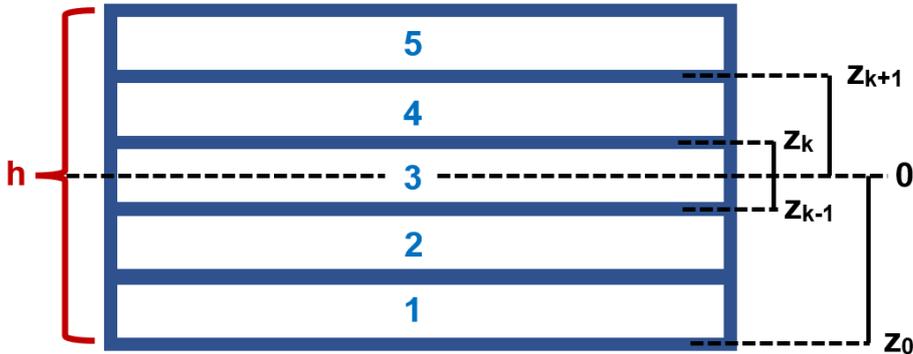
dove  $[N_x, N_y, N_{xy}]$  e  $[M_x, M_y, M_{xy}]$  sono rispettivamente il vettore della forza e del momento agente sul corpo e  $[\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}]$  il vettore delle tensioni agenti sul corpo. L'intervallo d'integrazione  $[-\frac{h}{2}, \frac{h}{2}]$  prevede che il corpo abbia altezza, lungo  $z$ , pari ad  $h$ .

Le tensioni  $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$  assumono valori diversi in ogni lamina. Precedentemente, si è assunto che solo la deformazione indotta dalle forze nel piano  $[\varepsilon_x^0, \varepsilon_y^0, \gamma_{xy}^0]$ , fosse costante lungo lo spessore e uguale tra tutte le lamine.

Gli integrali possono essere semplificati riducendo il dominio d'integrazione alle singole lamine e sommando i singoli contributi per ottenere il comportamento dell'intero laminato:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{bmatrix} &= \sum_{k=1}^{nn} \int_{z_{k-1}}^{z_k} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix}_k dz \\ \begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} &= \sum_{k=1}^{nn} \int_{z_{k-1}}^{z_k} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix}_k z dz \end{aligned} \quad (1.9)$$

dove  $k$  indica la lamina  $k$ -esima e  $nn$  il numero delle lamine. Con  $z_k$  s'intende la coordinata  $z$ , rispetto al piano medio, del bordo superiore della lamina  $k$ -esima. Per chiarimenti, si faccia riferimento alla figura 1.3.



**Figura 1.3:** Disposizione delle lamine rispetto al piano medio.

A questo punto, sfruttando la legge costitutiva del materiale e sostituendo il vettore delle deformazioni con l'espressione (1.7), si ottiene per la lamina  $k$ -esima:

$$\boldsymbol{\sigma} = [\overline{\mathbf{Q}}]\boldsymbol{\varepsilon} \Rightarrow \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix}_k = \begin{bmatrix} \overline{Q}_{11} & \overline{Q}_{12} & \overline{Q}_{16} \\ \overline{Q}_{21} & \overline{Q}_{22} & \overline{Q}_{26} \\ \overline{Q}_{61} & \overline{Q}_{62} & \overline{Q}_{66} \end{bmatrix}_k \left( \begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} \kappa_x^0 \\ \kappa_y^0 \\ \kappa_{xy}^0 \end{bmatrix} \right) \quad (1.10)$$

dove  $[\overline{\mathbf{Q}}]$  è la matrice d'elasticità, riferita al sistema di riferimento globale, della lamina (1.5).

Sostituendo (1.10) nelle espressioni contenute in (1.9), si ricava:

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^{nn} [\overline{\mathbf{Q}}_k] \int_{z_{k-1}}^{z_k} (\boldsymbol{\varepsilon}_0 + \boldsymbol{\kappa}z) dz \quad (1.11)$$

$$\begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^{nn} [\overline{\mathbf{Q}}_k] \int_{z_{k-1}}^{z_k} (\boldsymbol{\varepsilon}_0 + \boldsymbol{\kappa}z) z dz$$

dove  $[\overline{\mathbf{Q}}_k]$  è la matrice d'elasticità della lamina  $k$ -esima,  $\boldsymbol{\varepsilon}_0$  il vettore della deformazione indotta dagli sforzi assiali e di taglio e  $\boldsymbol{\kappa}$  il vettore delle curvature indotte dai momenti agenti nel piano.

Essendo indipendenti da  $z$ ,  $\boldsymbol{\varepsilon}_0$  e  $\boldsymbol{\kappa}$  possono essere portati fuori dagli integrali, ottenendo:

$$[\mathbf{N}] = \sum_{k=1}^{nn} [\overline{\mathbf{Q}}_k] \boldsymbol{\varepsilon}_0 \int_{z_{k-1}}^{z_k} dz + \sum_{k=1}^{nn} [\overline{\mathbf{Q}}_k] \boldsymbol{\kappa} \int_{z_{k-1}}^{z_k} z dz \quad (1.12)$$

$$[\mathbf{M}] = \sum_{k=1}^{nn} [\overline{\mathbf{Q}}_k] \boldsymbol{\varepsilon}_0 \int_{z_{k-1}}^{z_k} z dz + \sum_{k=1}^{nn} [\overline{\mathbf{Q}}_k] \boldsymbol{\kappa} \int_{z_{k-1}}^{z_k} z^2 dz$$

Svolgendo gli integrali, si ricava:

$$[\mathbf{N}] = \sum_{k=1}^{nn} [\overline{\mathbf{Q}}_k] \boldsymbol{\varepsilon}_0 (z_k - z_{k-1}) + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{nn} [\overline{\mathbf{Q}}_k] \boldsymbol{\kappa} (z_k^2 - z_{k-1}^2) \quad (1.13)$$

$$[\mathbf{M}] = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{nn} [\overline{\mathbf{Q}}_k] \boldsymbol{\varepsilon}_0 (z_k^2 - z_{k-1}^2) + \frac{1}{3} \sum_{k=1}^{nn} [\overline{\mathbf{Q}}_k] \boldsymbol{\kappa} (z_k^3 - z_{k-1}^3)$$

Si è giunti quindi alla conclusione. L'ultimo passo consiste nel riscrivere in forma matriciale le espressioni appena trovate (1.13). Questo è possibile perché  $[\overline{\mathbf{Q}}_k]$  è la matrice d'elasticità della lamina  $k$ -esima. Quindi, la matrice d'elasticità per un

generico laminato è così definita:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{N} \\ \mathbf{M} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B} & \mathbf{D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon} \\ \boldsymbol{\kappa} \end{bmatrix} \implies \begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ A_{21} & A_{22} & A_{26} & B_{21} & B_{22} & B_{26} \\ A_{61} & A_{62} & A_{66} & B_{61} & B_{62} & B_{66} \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ B_{21} & B_{22} & B_{26} & D_{21} & D_{22} & D_{26} \\ B_{61} & B_{62} & B_{66} & D_{61} & D_{62} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_{xy} \\ \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix}$$

La matrice di rigidezza del laminato è costituita da quattro matrici, i cui termini sono così definiti:

$$\begin{aligned} A_{ij} &= \sum_{k=1}^N (\bar{Q}_{ij})_k (z_k - z_{k-1}) && \text{Rigidezza estensionale} \\ B_{ij} &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N (\bar{Q}_{ij})_k (z_k^2 - z_{k-1}^2) && \text{Rigidezza accoppiata} \\ D_{ij} &= \frac{1}{3} \sum_{k=1}^N (\bar{Q}_{ij})_k (z_k^3 - z_{k-1}^3) && \text{Rigidezza flessionale} \end{aligned} \quad (1.14)$$

dove  $(\bar{Q}_{ij})_k$  è l'elemento avente indici  $i, j$  della matrice d'elasticità globale della lamina  $k$ -esima.

Nel caso di un generico laminato, le tensioni assiali sono accoppiate alle curvature. Viceversa, i momenti flettenti sono accoppiati alle deformazioni assiali. Praticamente, ciò significa che mettere in trazione un laminato comporta, generalmente, il suo incurvamento. Allo stesso tempo, la flessione di un laminato causa il suo allungamento o accorciamento.

Tutto ciò si verifica a causa della matrice  $[\mathbf{B}]$ , che viene propriamente definita **matrice della rigidezza accoppiata**.

Inoltre, si può notare come gli elementi  $[A_{16}, A_{26}]$  accoppino le tensioni assiali alla deformazione a taglio, così come  $[D_{16}, D_{26}]$  accoppiano i momenti flettenti alla torsione.

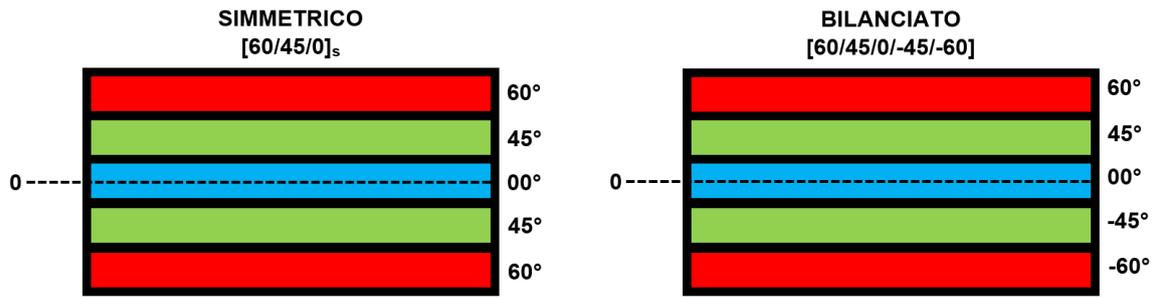
Scegliendo un'opportuna sovrapposizione delle lamine, è possibile cancellare tutti gli accoppiamenti. In particolare, si avranno due casi speciali:

- **Laminato simmetrico**

Si definisce *simmetrico* un laminato che presenta una disposizione simmetrica delle lamine rispetto al piano mediano. Ciò significa che, a pari distanza dal piano mediano, ci sono due lamine di materiale uguale aventi stesso spessore e stessa orientazione delle fibre. In figura 1.4 è disponibile un esempio.

- **Laminato bilanciato**

Si definisce *bilanciato* un laminato in cui, per ogni lamina avente spessore  $t$  e inclinazione delle fibre  $\theta$ , esiste una lamina, dall'altra parte del piano mediano, avente inclinazione opposta delle fibre  $(-\theta)$ . Sempre alla figura 1.4 è possibile osservarne un esempio.



**Figura 1.4:** Esempio di laminato simmetrico o bilanciato.

È possibile, inoltre, avere laminati sia simmetrici che bilanciati. Infatti, per semplicità, il codice sviluppato in questa tesi, prevede solo l'utilizzo di quest'ultima tipologia di laminati.

## Capitolo 2

# La teoria Peridinamica

In questo capitolo vengono descritte le ipotesi e le dimostrazioni principali che portano alla completa definizione della teoria Peridinamica. La prima parte riguarderà gli aspetti più generali della teoria, introducendo l'equazione del moto, il concetto di micromodulo e il modello costitutivo PMB nel caso di materiali isotropi. La seconda parte, invece, riguarderà l'estensione della teoria Peridinamica alle lamine e ai laminati, illustrando come sia possibile definire diverse tipologie di bond in modo che si possa tenere conto della natura ortotropa del materiale.

Nelle varie sezioni del capitolo si farà più volte riferimento ai lavori di Silling [25], Madenci [23], Ghajari [7] e Colavito [1].

Come preannunciato nell'introduzione, la Peridinamica è una teoria non-locale, in cui il comportamento di ogni punto del sistema dipende dalle sue interazioni con gli altri punti localizzati entro una certa distanza  $\delta$  che viene definita *orizzonte* [25].

Negli anni, sono state sviluppate due versioni dalla teoria Peridinamica, differenti per il modo in cui vengono descritte le interazioni tra i punti:

- **Bond-based:** all'interno dell'orizzonte, il punto sorgente ed un generico punto interagiscono tramite un bond, la cui forza è totalmente indipendente dallo spostamento degli altri punti dell'intorno. La limitazione principale di questa versione della teoria riguarda il coefficiente di Poisson, che sarà costante e indipendente dal materiale.
- **State-based:** l'interazione all'interno della coppia dei punti  $A, B$ , espressa tramite il bond, non è più "isolata" ma influenzata dalla presenza degli altri punti nell'intorno di  $A$ . Questa peculiarità non causa alcuna limitazione al coefficiente di Poisson e quindi rende questa versione della teoria più versatile, nonostante la sua implementazione sia più complessa.

La tecnica di accoppiamento FEM-Peridinamica utilizzata in questa tesi prevede l'utilizzo della versione *bond-based*. Pertanto, la trattazione di questo capitolo riguarderà solo quest'ultima.

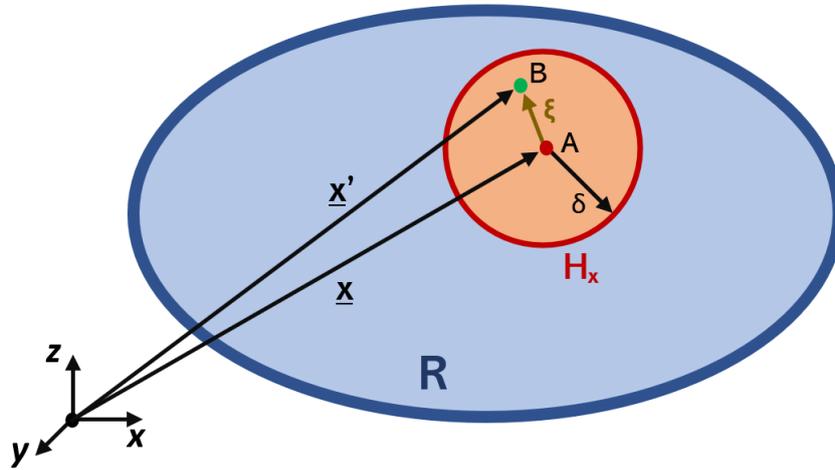
## 2.1 Aspetti generali

### 2.1.1 Equazione del moto

Facendo riferimento al corpo  $R$  in figura 2.1, l'equazione del moto associata al punto materiale  $A$ , avente coordinate al tempo  $t$  espresse dal vettore  $\underline{x}$  rispetto al sistema di riferimento globale, sarà:

$$\rho \ddot{\underline{x}}(\underline{x}, t) = \int_{H_x} \mathbf{f}(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi}) dV_{x'} + \mathbf{b}(\underline{x}, t) \quad \forall \underline{x}' \in H_x \quad (2.1)$$

dove  $\rho$  indica la densità del corpo associata al punto materiale  $A$ ,  $\ddot{\underline{x}}$  l'accelerazione del punto  $A$  al tempo  $t$ ,  $\mathbf{f}$  la *pairwise force function* cioè la forza che agisce tra il punto  $A$  e  $B$ ,  $\delta$  è l'orizzonte e raggio dell'intorno circolare  $H_x$ ,  $dV_{x'}$  il volume infinitesimo associato al punto  $B$  avente coordinate  $\underline{x}'$  e  $\mathbf{b}$  il vettore delle forze esterne agenti sul punto  $A$ .



**Figura 2.1:** Il corpo  $R$  in esame con l'intorno del punto  $A$   $H_x$  avente raggio  $\delta$ .

La *pairwise force*  $\mathbf{f}$  è funzione del vettore di posizione relativa  $\boldsymbol{\xi}$ , che per definizione è il bond tra i due punti [25], e del vettore di spostamento relativo  $\boldsymbol{\eta}$ , che sono definiti rispettivamente come:

$$\boldsymbol{\xi} = \underline{x}' - \underline{x} \quad (2.2)$$

$$\boldsymbol{\eta} = \mathbf{u}(\underline{x}', t) - \mathbf{u}(\underline{x}, t) \quad (2.3)$$

dove  $\underline{x}$  e  $\underline{x}'$  sono rispettivamente le coordinate dei punti  $A$  e  $B$ , e  $\mathbf{u}$  il vettore degli spostamenti.

Ad ogni punto del corpo  $R$  sarà associato un corrispettivo dominio d'integrazione. Tali punti, centrati nel dominio, saranno definiti come punti sorgente. I punti che dovessero soddisfare la relazione  $\|\boldsymbol{\xi}\| \leq \delta$  cioè saranno nell'intorno del punto sorgente, verranno classificati come punti famiglia. Nel caso della figura 2.1, sono rispettivamente il punto  $A$  e  $B$ .

La *pairwise force function* è definita in modo tale da possedere le seguenti proprietà:

- **Esistenza di  $f$**

La funzione ha valore non nullo solo nei casi in cui si riferisce all'interazione tra il punto sorgente ed un punto famiglia. Cioè:

$$\|\xi\| > \delta \Rightarrow f(\xi, \eta) = \mathbf{0} \quad \forall \xi, \eta \quad (2.4)$$

- **Conservazione della quantità di moto**

Nel caso della figura 2.1, la forza agente sul punto famiglia B è di pari intensità e verso opposto rispetto a quella agente sul punto sorgente A. Per entrambe, la direzione coincide con il bond. Più generalmente:

$$f(-\xi, -\eta) = -f(\xi, \eta) \quad \forall \xi, \eta \quad (2.5)$$

- **Conservazione del momento angolare**

La forza  $f$  deve essere necessariamente parallela al vettore di posizione relativa attuale, cioè la posizione relativa dei due punti a seguito della deformazione:

$$(\xi + \eta) \times f(\xi, \eta) = \mathbf{0} \quad \forall \xi, \eta \quad (2.6)$$

dove  $(\xi + \eta)$  è il vettore di posizione relativa attuale.

## 2.1.2 Materiale microelastico

Se si assumono piccoli spostamenti per tutti i punti appartenenti al corpo, allora sarà possibile ricavare una versione linearizzata della teoria Peridinamica. Questo comporta la linearizzazione della *pairwise force function*.

Il primo passo consiste nell'introdurre il concetto di materiale microelastico, per il quale la  $f$  deve rispettare la seguente condizione:

$$\int_{\Gamma} f(\eta, \xi) \cdot d\eta = \mathbf{0} \quad \forall \Gamma, \forall \xi \neq \mathbf{0} \quad (2.7)$$

dove  $d\eta$  è il vettore differenziale giacente sulla linea chiusa  $\Gamma$ .

L'espressione (2.7) indica come il lavoro netto di un punto famiglia, dovuto alla sua interazione (*pairwise force*) con il rispettivo punto sorgente, è zero se associato ad uno spostamento lungo una linea chiusa.

Pertanto,  $f$  risulta conservativa. Se si assume che questa sia anche differenziabile con continuità in  $\eta$ , allora si renderebbe applicabile il teorema di Stokes, da cui si ricava la seguente espressione:

$$\nabla_{\eta} \times f(\xi, \eta) = \mathbf{0} \quad \forall \xi, \eta \quad (2.8)$$

Quindi si ottiene che la forza  $f$  è la derivata rispetto ad  $\eta$  di un potenziale scalare  $w$  che viene denominato *pairwise potential function* o *scalar micropotential*.

Altro elemento fondamentale per la trattazione è il fatto che il potenziale sia funzione solo del modulo del vettore di posizione relativa attuale cioè  $\|\eta + \xi\|$ . Quindi è possibile scrivere quanto segue:

$$f(\eta, \xi) = \frac{\partial w}{\partial \eta}(\eta, \xi) \quad \forall \xi, \eta \quad (2.9)$$

$$f(\eta, \xi) = H(\|\eta + \xi\|, \|\xi\|)(\eta + \xi) \quad \forall \xi, \eta \quad (2.10)$$

dove  $H$  è una funzione scalare dipendente da  $\|\eta + \xi\|$ .

### 2.1.3 Linearità

Dopo aver introdotto il concetto di materiale microelastico, è possibile iniziare il processo di linearizzazione della teoria peridinamica. Le proprietà (2.5) e (2.6) possono essere riassunte nella seguente espressione:

$$\mathbf{f}(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi}) = F(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta})(\boldsymbol{\eta} + \boldsymbol{\xi}) \quad \forall \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta} \quad (2.11)$$

dove  $F$  è una funzione scalare.

Se si assume  $\|\boldsymbol{\eta}\| \ll 1$  quindi prossimo allo zero, allora è possibile linearizzare l'espressione (2.11) mediante l'espansione in serie di Taylor al primo ordine nell'intorno del punto  $(\mathbf{0}, \boldsymbol{\xi})$ , cioè considerando  $\boldsymbol{\xi}$  costante:

$$\mathbf{f}(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi}) = \mathbf{C}(\boldsymbol{\xi})\boldsymbol{\eta} + \mathbf{f}(\mathbf{0}, \boldsymbol{\xi}) \quad \forall \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta} \quad (2.12)$$

dove  $\mathbf{C}$  è un tensore del secondo ordine [25] denominato *micromodulo*:

$$\mathbf{C}(\boldsymbol{\xi}) = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \boldsymbol{\eta}}(\mathbf{0}, \boldsymbol{\xi}) \quad (2.13)$$

A seguito del calcolo della derivata della forza indicata in (2.11), il *micromodulo* può essere riscritto nel seguente modo:

$$\mathbf{C}(\boldsymbol{\xi}) = \boldsymbol{\xi} \otimes \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\eta}}(\mathbf{0}, \boldsymbol{\xi}) + F(\mathbf{0}, \boldsymbol{\xi}) \quad \forall \boldsymbol{\xi} \quad (2.14)$$

Nella versione linearizzata della teoria Peridinamica, si assume l'utilizzo di un materiale lineare. Se questo fosse anche microelastico (sezione 2.1.2), allora il *micromodulo* risulterebbe simmetrico, cioè:

$$\mathbf{C}(\boldsymbol{\xi}) = \mathbf{C}^T(\boldsymbol{\xi}) \quad \forall \boldsymbol{\xi} \quad (2.15)$$

Questo è dimostrabile applicando il teorema di Stokes (2.8) alla definizione di *micromodulo* espressa in (2.14).

L'espressione (2.14) è valida per tutti i materiali lineari e quindi non è necessariamente simmetrica. Affinché lo diventi, è necessario riscriverla introducendo una funzione scalare:

$$\mathbf{C}(\boldsymbol{\xi}) = \lambda(\boldsymbol{\xi})\boldsymbol{\xi} \otimes \boldsymbol{\xi} + F(\mathbf{0}, \boldsymbol{\xi}) \quad \forall \boldsymbol{\xi} \quad (2.16)$$

dove la funzione scalare  $\lambda$  viene così definita:

$$\boldsymbol{\xi} \otimes \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\eta}}(\mathbf{0}, \boldsymbol{\xi}) = \lambda(\boldsymbol{\xi})\boldsymbol{\xi} \otimes \boldsymbol{\xi} \quad \forall \boldsymbol{\xi} \quad (2.17)$$

A questo punto è possibile riscrivere l'espansione in serie di Taylor della *pairwise force function* (2.12) utilizzando il *micromodulo* simmetrico appena trovato (2.16):

$$\mathbf{f}(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi}) = [\lambda(\boldsymbol{\xi})\boldsymbol{\xi} \otimes \boldsymbol{\xi} + F(\mathbf{0}, \boldsymbol{\xi})]\boldsymbol{\eta} + \mathbf{f}(\mathbf{0}, \boldsymbol{\xi}) \quad \forall \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta} \quad (2.18)$$

Avendo considerato un materiale microelastico, è possibile confrontare l'espressione (2.11) con la (2.10) ed ottenere la seguente uguaglianza:

$$F(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}) = H(\|\boldsymbol{\eta} + \boldsymbol{\xi}\|, \|\boldsymbol{\xi}\|) \quad (2.19)$$

in cui si dimostra che la funzione scalare ipotizzata nell'approccio del micropotenziale dev'essere identica a quella che riassume tutte le proprietà della *pairwise force function*.

Usando quest'uguaglianza è quindi possibile definire la funzione scalare  $\lambda$  come:

$$\lambda(\boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{\|\boldsymbol{\xi}\|} \frac{\partial H}{\partial \|\boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{\eta}\|} (\|\boldsymbol{\xi}\|, \boldsymbol{\xi}) \quad (2.20)$$

In conclusione, è possibile scrivere la forma linearizzata della *pairwise force function* unendo l'espressione (2.18) con la definizione appena trovata di  $\lambda$  (2.20):

$$\mathbf{f}(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi}) = \left[ \frac{1}{\|\boldsymbol{\xi}\|} \frac{\partial H}{\partial \|\boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{\eta}\|} (\|\boldsymbol{\xi}\|, \boldsymbol{\xi}) + H(\mathbf{0}, \boldsymbol{\xi}) \right] (\boldsymbol{\xi} \otimes \boldsymbol{\xi}) \boldsymbol{\eta} + \mathbf{f}(\mathbf{0}, \boldsymbol{\xi}) \quad (2.21)$$

## 2.1.4 Prototype microelastic brittle material (PMB)

Nelle sottosezioni precedenti si è verificato come la teoria Peridinamica possa essere linearizzata e come questo coincida con la linearizzazione della *pairwise force function*. Per implementare la teoria è necessario identificare un materiale la cui legge costitutiva sia compatibile con tutte le assunzioni fatte in fase di linearizzazione. Si è quindi realizzato un materiale ideale denominato *Prototype microelastic brittle* (in italiano *Prototipo microelastico fragile*) che può essere associato a diversi materiali semplicemente cambiandone i parametri chiave.

Facendo riferimento all'espressione (2.10), la funzione scalare e lineare  $H$  che descrive il modello è così definita:

$$H = cs \quad (2.22)$$

dove  $c$  è la costante elastica del bond, associata alle proprietà meccaniche del materiale che si vuole simulare ed  $s$  rappresenta il *bond stretch*, che è a sua volta definito come:

$$s = \frac{\|\boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{\eta}\| - \|\boldsymbol{\xi}\|}{\|\boldsymbol{\xi}\|} \quad (2.23)$$

in cui si possono riconoscere sia il vettore di spostamento relativo sia il vettore di posizione relativa. Il suo compito consiste nel soppesare, a seguito di una deformazione, l'allungamento del bond rispetto alla sua lunghezza originaria.

È possibile introdurre il criterio di *failure* del materiale imponendo un valore massimo al *bond stretch*. Questo valore viene denominato *bond stretch* critico  $s_0$  e può essere imposto sia per gli sforzi in trazione sia per quelli in compressione (anche se più raro). Qualora dovesse essere superato, il bond verrebbe considerato *rotto* e quindi incapace di far interagire i punti ai suoi estremi.

Tutto ciò può essere riassunto definendo la *pairwise force function* nel caso PMB:

$$\mathbf{f}(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}) = cs\mu(t, \boldsymbol{\xi}) \frac{\boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{\eta}}{\|\boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{\eta}\|} \quad (2.24)$$

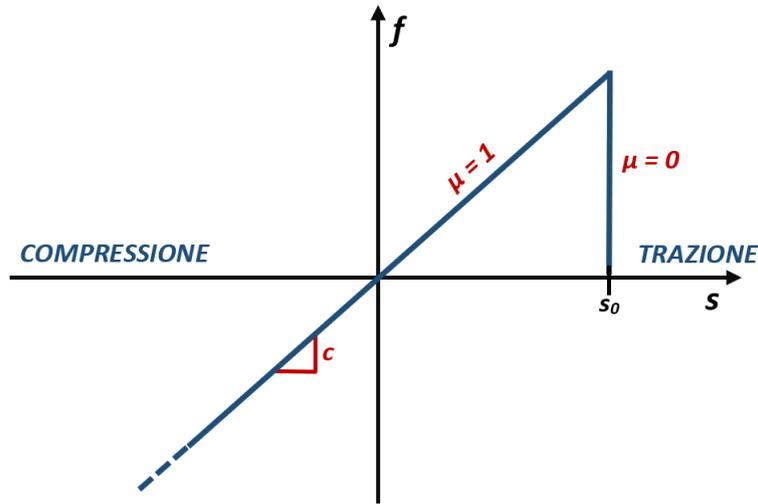
dove  $c$  ed  $s$  sono rispettivamente la costante elastica e il *bond stretch* del bond mentre  $\mu$  è una funzione scalare che permette di azzerare la *pairwise force function* per tutto

il tempo successivo all'eventuale rottura del bond. In altre parole, trasforma  $f$  in una funzione *history-dependant*:

$$\mu = \begin{cases} 1 & s \leq s_0, & 0 \leq t \leq t' \\ 0 & s > s_0, & t > t' \end{cases} \quad (2.25)$$

dove  $t'$  indica l'istante di tempo a cui è avvenuta la rottura del bond.

La figura 2.2 illustra la legge costitutiva del PMB, in particolare la relazione  $f$ - $s$  e l'effetto dell'introduzione del *bond stretch* critico  $s_0$  nel caso in cui il cedimento fosse possibile solo in trazione.



**Figura 2.2:** La legge costitutiva del materiale PMB, con rottura solo a trazione.

I parametri chiave che permettono al materiale PMB di meglio approssimare le proprietà meccaniche e di cedimento del vero materiale in esame sono rispettivamente la costante elastica  $c$  e il *bond stretch* critico  $s_0$ . Entrambi sono correlabili alle grandezze caratteristiche del materiale.

La costante elastica  $c$  si può ottenere uguagliando l'energia di deformazione calcolata con l'approccio peridinamico a quella ottenuta tramite la teoria classica d'elasticità. Se si considera un corpo omogeneo soggetto ad una deformazione omogenea (costante in tutte le direzioni e per ogni bond), allora le espressioni (2.22) e (2.23) saranno così riassunte:

$$H = \frac{c\eta}{\xi} \quad (2.26)$$

Mediante  $H$  è possibile determinare il micropotenziale  $w$  di un singolo bond:

$$w = \int H d\eta = \frac{cs^2\xi}{2} \quad (2.27)$$

A questo punto, è possibile calcolare la densità d'energia elastica in un punto mediante l'integrazione del micropotenziale definito in (2.27). L'integrazione avviene su di una sfera  $R_x$  che funge da intorno tridimensionale. Verranno quindi usate le

coordinate sferiche. Si precisa inoltre che il bond è un legame tra due punti, quindi l'energia in uno di essi sarà metà di quella complessiva del bond.

$$W_{peri} = \frac{1}{2} \int_{R_x} w(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi}) dV_{x'} = \frac{1}{2} \int_0^\delta \left( \frac{cs^2\xi}{2} \right) 4\pi\xi^2 d\xi \quad (2.28)$$

$$W_{peri} = \frac{\pi cs^2\delta^4}{4} \quad (2.29)$$

dove  $\delta$  è l'orizzonte oppure il raggio della sfera su cui avviene l'integrazione.

Nella teoria classica dell'elasticità, la densità d'energia di deformazione è funzione del *bulk modulus*  $k$ :

$$W_{classical} = \frac{9ks^2}{2} \quad (2.30)$$

Uguagliando la (2.29) con la (2.30) si ottiene l'espressione della costante elastica  $c$ .

$$c = \frac{18k}{\pi\delta^4} = \frac{12E}{\pi\delta^4} \quad (2.31)$$

dove  $E$  è il modulo di Young del materiale.

Nella versione *bond-based* della teoria Peridinamica, il coefficiente di Poisson è fisso. Nel caso in cui si utilizzasse un modello 3D (2.31) o 2D *plane-strain*, si avrà necessariamente  $\nu = \frac{1}{4}$  mentre nel caso 2D *plane-stress*,  $\nu = \frac{1}{3}$ . L'esistenza di questa limitazione sarà dimostrata nella sezione successiva, quando si definirà la teoria Peridinamica applicata ai materiali compositi.

Inoltre, in base al modello usato, la formulazione della costante elastica sarà diversa perché sarà diversa la formulazione dell'integrale (2.28).

Il calcolo del *bond stretch* critico  $s_0$  prevede invece l'impiego del tasso di rilascio di energia  $G_0$ , che definisce l'energia rilasciata dal corpo in fase di rottura rispetto alla superficie di frattura. Può essere definito per via analitica o sperimentale. Come per la costante elastica, si procederà uguagliando  $G_0$  all'energia di rottura ricavata dalla teoria Peridinamica.

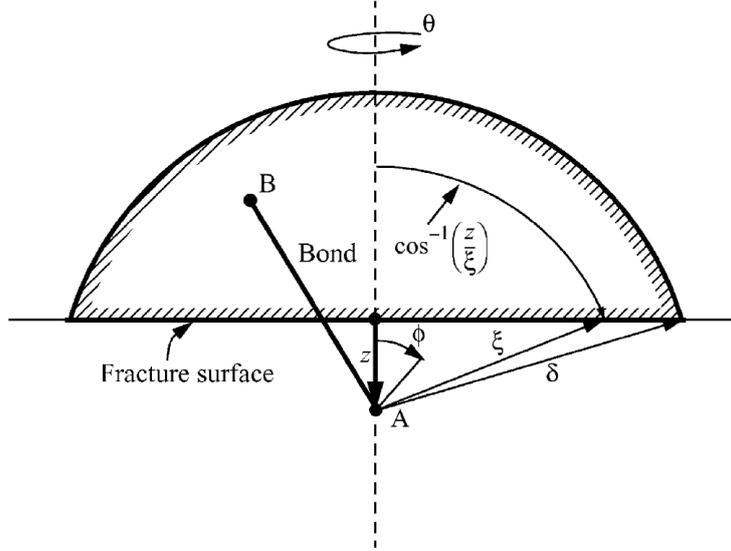
Si consideri un corpo omogeneo con una superficie di rottura piana al suo interno. In Peridinamica, la separazione di due parti del corpo avviene con la rottura di tutti i bond che intersecano la superficie di rottura.

Il lavoro necessario per la rottura di un singolo bond è pari a:

$$w_0(\xi) = \int_0^{s_0} g(s)(\xi ds) = \frac{cs_0^2\xi}{2}, \quad \xi = \|\boldsymbol{\xi}\| \quad (2.32)$$

Se si considera un volume sferico di raggio  $\delta$ , allora è possibile determinare il lavoro, su unità d'area fratturata, necessario per rompere tutti i bond all'interno della calotta, nata dall'intersezione della superficie di rottura con il volume sferico centrato nel punto sorgente. La figura 2.3 mostra chiaramente il dominio d'integrazione. Se si usano le coordinate sferiche, si ottiene:

$$G_0 = \int_0^\delta \int_0^{2\pi} \int_z^\delta \int_0^{\cos^{-1}z/\xi} \left( \frac{cs_0^2\xi}{2} \right) \xi^2 \sin(\phi) d\phi d\xi d\theta dz = \frac{\pi cs_0^2\delta^5}{10} \quad (2.33)$$



**Figura 2.3:** Il dominio d'integrazione dell'integrale (2.33). Il punto A è il punto sorgente al centro del dominio mentre B è un punto famiglia collocato aldilà della superficie di frattura. Immagine tratta da [25].

Alla fine, noto  $G_0$  per via analitica o sperimentale, è possibile determinare il *bond stretch* critico  $s_0$  applicando la (2.31) alla (2.33):

$$s_0 = \sqrt{\frac{10G_0}{\pi c \delta^5}} = \sqrt{\frac{5G_0}{6E\delta}} \quad (2.34)$$

Anche per  $s_0$  vale la stessa avvertenza della costante elastica  $c$ . In base al modello usato (3D, *plane-stress*...), la sua formulazione potrà subire delle variazioni. Per ulteriori approfondimenti, si faccia riferimento al lavoro di Zaccariotto et al. [29].

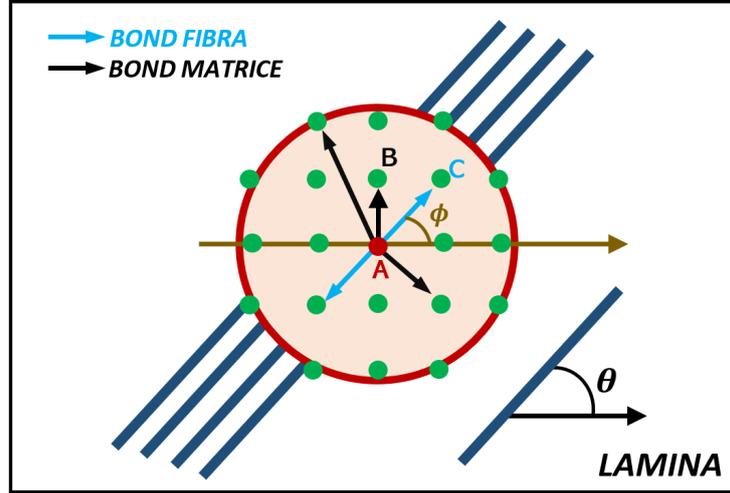
In conclusione, si evidenzia come sia la costante elastica  $c$  sia il *bond stretch* critico  $s_0$  siano dipendenti dalle caratteristiche del materiale e dall'orizzonte. Maggiore sarà l'orizzonte considerato, minori saranno  $c$  ed  $s_0$ .

## 2.2 Lamine e laminati

Se si vuole utilizzare la teoria Peridinamica per studiare il comportamento dei compositi, è necessario adattare la formulazione presentata nella sezione precedente affinché possa riprodurre fedelmente la natura ortotropa del materiale. Come visto precedentemente, i parametri chiave nell'implementazione della teoria sono la costante elastica  $c$  e il *bond stretch* critico  $s_0$ . Nelle prime due sottosezioni si descriverà nel dettaglio il procedimento per ottenerli nel caso delle lamine, mentre nell'ultima ci si concentrerà sui laminati e quindi su come la teoria sia in grado di descrivere le interazioni tridimensionali tra lamine adiacenti come la delaminazione .

## 2.2.1 La costante elastica $c$ nelle lamine ortotrope

Nella versione *bond-based* della teoria Peridinamica, il punto sorgente è connesso a tutti i suoi punti famiglia, che sono nel suo intorno, tramite dei bond. Nel caso in cui il materiale fosse isotropo, l'inclinazione reciproca dei bond non avrebbe alcun impatto sulla loro rigidità e quindi sulla costante elastica.



**Figura 2.4:** Intorno del punto sorgente  $A$   $H_x$  nel caso di una lamina ortotropa avente fibre inclinate di  $\theta$ . L'angolo  $\phi$  indica l'inclinazione del bond rispetto all'orizzontale.

Nel caso di una lamina ortotropa (figura 2.4), invece, l'orientazione dei bond diventa rilevante perché lungo la direzione delle fibre, il materiale ha proprietà meccaniche decisamente migliori e quindi i bond non possono più avere la stessa costante elastica. Se si fa sempre riferimento alla figura 2.4, tutti i bond aventi inclinazione  $\phi$  pari all'orientazione  $\theta$  delle fibre, vengono definiti **bond fibra** (per esempio  $\overline{AC}$  in figura). Tutti gli altri, come per esempio  $\overline{AB}$ , vengono classificati come **bond matrice**. Secondo il modello proposto da Oterkus e Madenci [23], implementato anche in [26, 27], la costante elastica  $c$  assume due valori distinti in base alla tipologia di bond:

$$c = \begin{cases} c_f + c_m & \phi = \theta + k\pi & \text{bond fibra} \\ c_m & \phi \neq \theta + k\pi & \text{bond matrice} \end{cases} \quad (2.35)$$

dove  $c_f$  è il contributo delle fibre alla rigidità del materiale mentre  $c_m$  quello della matrice.

Come nel caso generale, la definizione di  $c_f$  e  $c_m$  si ottiene attraverso delle considerazioni di natura energetica.

Il primo passo consiste nel riscrivere il micropotenziale (2.27) in funzione dell'inclinazione del bond stesso:

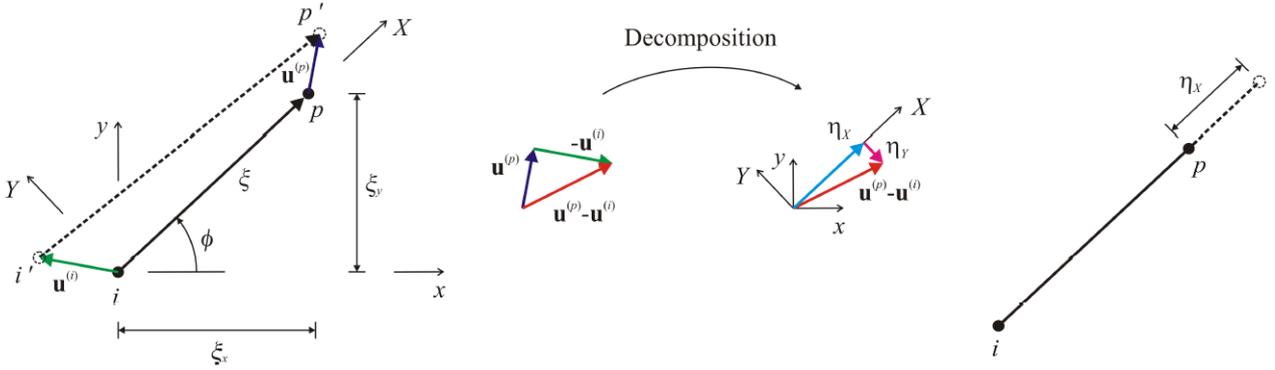
$$w = \frac{1}{2}c(\phi)s^2(\phi)\xi(\phi) \quad (2.36)$$

dove  $s(\phi)$  e  $\xi(\phi)$  sono rispettivamente il *bond stretch* e la lunghezza del bond (2.2) avente inclinazione  $\phi$  rispetto all'orizzontale. La dipendenza da  $\phi$  dei vari elementi comporta che il micropotenziale sia diverso in base al tipo di bond.

Per la determinazione di  $s(\phi)$ , è necessario svolgere diversi passaggi di natura geometrica. Il *bond stretch* del bond avente ai suoi estremi il nodo sorgente  $i$  ed il nodo famiglia  $p$ , può essere definito come:

$$s = \frac{u_X^p - u_X^i}{\|\xi\|} \quad (2.37)$$

dove  $u_X^p$  indica lo spostamento del punto  $p$  lungo la direzione  $X$  (lungo il bond). Il vettore spostamento  $\mathbf{u}$  avrà due componenti  $u_X$  e  $u_Y$ . Quest'ultima sarà lungo un asse perpendicolare al bond. Per chiarimenti, fare riferimento alla figura 2.5.



**Figura 2.5:** Spostamenti dei nodi del bond riferiti sia al sistema di riferimento locale  $X, Y$  sia a quello esterno  $x, y$ . Illustrazione tratta da [23].

Per ottenere  $s(\phi)$ , si dovrà associare lo spostamento ad una deformazione agente sulla lamina ed esprimere  $s(\phi)$  nel sistema di riferimento esterno  $x, y$ .

Si consideri una lamina soggetta ad una trazione monoassiale  $\sigma_{xx}$ . Il vettore delle deformazioni  $\varepsilon$  sarà il seguente:

$$\varepsilon = [\varepsilon_{xx} \quad \varepsilon_{yy} \quad \gamma_{xy}] = [\zeta \quad -\nu_{xy}\zeta \quad -\mu_{xy}\zeta] \quad (2.38)$$

dove  $\zeta$  è la deformazione lungo l'asse  $x$  generata da  $\sigma_{xx}$ ,  $\nu_{xy}$  il coefficiente di Poisson e  $\mu_{xy}$  un coefficiente di accoppiamento tra la deformazione di taglio e la tensione assiale [23].

Sempre facendo riferimento alla figura 2.5, è possibile cambiare il sistema di coordinate del vettore dello spostamento relativo ( $\mathbf{u}^p - \mathbf{u}^i$ ) mediante l'utilizzo di una matrice di trasformazione:

$$\begin{bmatrix} u_X^p - u_X^i \\ u_Y^p - u_Y^i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\phi) & \sin(\phi) \\ -\sin(\phi) & \cos(\phi) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_x^p - u_x^i \\ u_y^p - u_y^i \end{bmatrix} \quad (2.39)$$

Inoltre, è possibile riscrivere la differenza degli spostamenti (nel sistema esterno  $x, y$ ) dei due punti  $p, i$  in funzione della deformazione agente sulla lamina [23]:

$$\begin{aligned} u_x^p - u_x^i &= \varepsilon_{xx}\xi_x + \frac{\gamma_{xy}}{2}\xi_y \\ u_y^p - u_y^i &= \frac{\gamma_{xy}}{2}\xi_x + \varepsilon_{yy}\xi_y \end{aligned} \quad (2.40)$$

dove  $\xi_x = \|\boldsymbol{\xi}\|\cos(\phi)$  e  $\xi_y = \|\boldsymbol{\xi}\|\sin(\phi)$  sono le componenti nel piano di  $\boldsymbol{\xi}$ .

Sostituendo la (2.40) nella (2.39) e sfruttando le componenti del vettore deformazione (2.38), si può calcolare  $u_X^p - u_X^i$ .

Infine, sostituendo l'espressione appena trovata di  $u_X^p - u_X^i$  in (2.37), si ottiene  $s(\phi)$ :

$$s(\phi) = \zeta(\cos^2(\phi) - \mu_{xy} \sin(\phi)\cos(\phi) - \nu_{xy} \sin^2(\phi)) \quad (2.41)$$

Adesso, come nel caso generale, si calcola la densità d'energia di deformazione in un punto della lamina con l'approccio peridinamico, sostituendo il micropotenziale (2.36) e la nuova formulazione di  $s$  (2.41) nell'integrale (2.28):

$$\begin{aligned} W_{peri} = & \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} \int_{H_x} c(\phi)\cos^4(\phi)\xi(\phi)dH - 2\nu_{xy} \int_{H_x} c(\phi)\sin^2(\phi)\cos^2(\phi)\xi(\phi)dH \right) \zeta^2 \\ & + \frac{1}{2} \left( -2\mu_{xy} \int_{H_x} c(\phi)\sin(\phi)\cos^3(\phi)\xi(\phi)dH + 2\nu_{xy}\mu_{xy} \int_{H_x} c(\phi)\sin^3(\phi)\cos(\phi)\xi(\phi)dH \right) \zeta^2 \\ & + \frac{1}{2} \left( \nu_{xy}^2 \int_{H_x} c(\phi)\sin^4(\phi)\xi(\phi)dH + \mu_{xy}^2 \int_{H_x} c(\phi)\sin^2(\phi)\cos^2(\phi)\xi(\phi)dH \right) \zeta^2 \end{aligned} \quad (2.42)$$

L'espressione deriva dallo svolgimento del quadrato di trinomio del *bond stretch* (2.41).

Nella teoria classica del continuo, la densità d'energia di deformazione in un punto è definita come:

$$W_{classical} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\varepsilon}, \quad \boldsymbol{\sigma} = \overline{\mathbf{Q}} \boldsymbol{\varepsilon} \quad (2.43)$$

dove  $\boldsymbol{\sigma}$  è il vettore delle tensioni agenti nel piano,  $\boldsymbol{\varepsilon}$  il vettore delle deformazioni e  $\overline{\mathbf{Q}}$  la matrice d'elasticità (1.5).

Svolgendo le opportune sostituzioni, l'espressione (2.43) diventa:

$$W_{classical} = \frac{1}{2} (\overline{Q}_{11} - 2\nu_{xy}\overline{Q}_{12} - 2\mu_{xy}\overline{Q}_{16} + 2\nu_{xy}\mu_{xy}\overline{Q}_{26} + \nu_{xy}^2\overline{Q}_{22} + \mu_{xy}^2\overline{Q}_{66}) \zeta^2 \quad (2.44)$$

A questo punto, si eguagliano le due formulazioni della densità d'energia di deformazione, (2.42) e (2.44), e si ottiene una definizione integrale per ogni elemento della matrice d'elasticità della lamina:

$$\begin{aligned} \overline{Q}_{11} &= \frac{1}{2} \int_{H_x} c(\phi)\cos^4(\phi)\xi(\phi)dH \\ \overline{Q}_{12} &= \frac{1}{2} \int_{H_x} c(\phi)\sin^2(\phi)\cos^2(\phi)\xi(\phi)dH \\ \overline{Q}_{16} &= \frac{1}{2} \int_{H_x} c(\phi)\sin(\phi)\cos^3(\phi)\xi(\phi)dH \\ \overline{Q}_{22} &= \frac{1}{2} \int_{H_x} c(\phi)\sin^4(\phi)\xi(\phi)dH \\ \overline{Q}_{26} &= \frac{1}{2} \int_{H_x} c(\phi)\sin^3(\phi)\cos(\phi)\xi(\phi)dH \\ \overline{Q}_{66} &= \frac{1}{2} \int_{H_x} c(\phi)\sin^2(\phi)\cos^2(\phi)\xi(\phi)dH \end{aligned} \quad (2.45)$$

Tutti gli integrali presentati in (2.45) non sono direttamente risolvibili analiticamente perché la costante elastica  $c$  (2.35) è descritta da una funzione a tratti non continua. Per poter procedere all'integrazione, è quindi necessario ridefinire l'energia di deformazione nel caso della trattazione peridinamica [23]:

$$W_{peri,approx} = \frac{1}{2} \sum_{q=1}^Q \frac{c_f s_{qi}^2 \xi_{qi}}{2} V_q + \frac{1}{2} \int_{H_x} \frac{c_m s^2 \xi}{2} dH \quad (2.46)$$

dove  $c_f$ ,  $c_m$  sono i contributi di fibra e matrice alla rigidità del materiale e  $Q$  il numero di bond fibra all'interno del dominio  $H_x$  di raggio  $\delta$ . Con  $s_{qi}$  e  $\xi_{qi}$  si fa riferimento rispettivamente al *bond stretch* e al modulo del bond fibra (2.2) tra il punto sorgente  $i$  ed il punto famiglia  $q$  e con  $V_q$  s'intende il volume di materiale associato al punto famiglia  $q$ .

Il contributo energetico delle fibre è espresso mediante una sommatoria perché la distribuzione di bond fibra non è omogenea nel dominio e il loro numero dipende esclusivamente dalla discretizzazione. Al contrario, il contributo della matrice è omogeneo per tutto il dominio e quindi può essere espresso in forma integrale.

Sfruttando l'espressione appena definita, è possibile riscrivere gli integrali (2.45) in una forma che li renda risolvibili analiticamente:

$$\bar{Q}_{11} = \frac{1}{2} \sum_{q=1}^Q c_f \cos^4(\theta) \xi_{qi} V_q + \frac{t}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^\delta c_m (\cos^4(\phi) \xi) \xi d\xi d\phi \quad (2.47a)$$

$$\bar{Q}_{12} = \frac{1}{2} \sum_{q=1}^Q c_f \sin^2(\theta) \cos^2(\theta) \xi_{qi} V_q + \frac{t}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^\delta c_m (\sin^2(\phi) \cos^2(\phi) \xi) \xi d\xi d\phi \quad (2.47b)$$

$$\bar{Q}_{16} = \frac{1}{2} \sum_{q=1}^Q c_f \sin(\theta) \cos^3(\theta) \xi_{qi} V_q + \frac{t}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^\delta c_m (\sin(\phi) \cos^3(\phi) \xi) \xi d\xi d\phi \quad (2.47c)$$

$$\bar{Q}_{22} = \frac{1}{2} \sum_{q=1}^Q c_f \sin^4(\theta) \xi_{qi} V_q + \frac{t}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^\delta c_m (\sin^4(\phi) \xi) \xi d\xi d\phi \quad (2.47d)$$

$$\bar{Q}_{26} = \frac{1}{2} \sum_{q=1}^Q c_f \sin^3(\theta) \cos(\theta) \xi_{qi} V_q + \frac{t}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^\delta c_m (\sin^3(\phi) \cos(\phi) \xi) \xi d\xi d\phi \quad (2.47e)$$

$$\bar{Q}_{66} = \frac{1}{2} \sum_{q=1}^Q c_f \sin^2(\theta) \cos^2(\theta) \xi_{qi} V_q + \frac{t}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^\delta c_m (\sin^2(\phi) \cos^2(\phi) \xi) \xi d\xi d\phi \quad (2.47f)$$

dove  $t$  è lo spessore della lamina. Si evidenzia che nelle sommatorie, si è utilizzato  $\theta$  perché l'inclinazione dei bond fibra è pari a quella della fibre.

Risolvendo gli integrali in (2.47), si meglio esplicitano le relazioni tra le proprietà

del materiale espresse in  $[\overline{Q}]$  e la costante elastica:

$$\overline{Q}_{11} = (\beta \cos^4(\theta))c_f + \frac{\pi t \delta^3}{8}c_m \quad (2.48a)$$

$$\overline{Q}_{12} = (\beta \sin^2(\theta)\cos^2(\theta))c_f + \frac{\pi t \delta^3}{24}c_m \quad (2.48b)$$

$$\overline{Q}_{16} = (\beta \sin(\theta)\cos^3(\theta))c_f \quad (2.48c)$$

$$\overline{Q}_{22} = (\beta \sin^4(\theta))c_f + \frac{\pi t \delta^3}{8}c_m \quad (2.48d)$$

$$\overline{Q}_{26} = (\beta \sin^3(\theta)\cos(\theta))c_f \quad (2.48e)$$

$$\overline{Q}_{66} = (\beta \sin^2(\theta)\cos^2(\theta))c_f + \frac{\pi t \delta^3}{24}c_m \quad (2.48f)$$

dove

$$\beta = \frac{1}{2} \sum_{q=1}^Q \xi_{qi} V_q \quad (2.49)$$

è la sommatoria dei prodotti tra il modulo del vettore di posizione relativa (lunghezza del bond) e il volume associato al nodo famiglia, per tutti i bond fibra nell'intorno del punto sorgente.

A questo punto, con le seguenti considerazioni, sarà possibile ottenere la definizione dei contributi fibra e matrice alla costante elastica dei bond.

Dalle espressioni (2.48) è possibile osservare che:

$$\overline{Q}_{12} = \overline{Q}_{66} \quad (2.50)$$

Se si utilizzano le loro definizioni contenute in (1.6), è possibile dimostrare che:

$$Q_{12} = Q_{66} \quad (2.51)$$

Quest'uguaglianza implica la prima limitazione della teoria Peridinamica nella versione *bond-based*.  $Q_{66}$ , nella matrice d'elasticità in coordinate locali (1.2) corrisponde al modulo di taglio  $G_{12}$ , che normalmente è un parametro meccanico indipendente della lamina. Con quest'uguaglianza, si impone invece che il modulo di taglio sia così definito:

$$G_{12} = \frac{\nu_{12} E_2}{1 - \nu_{12} \nu_{21}} \quad (2.52)$$

Quando si utilizza questa formulazione della teoria, si deve essere consci del fatto che la simulazione non tiene conto del reale valore di  $G_{12}$  e quindi i risultati, in talune circostanze, potrebbero differire dai risultati sperimentali.

Confrontando la (2.48c) con la (2.48e), cioè le uniche due espressioni prive del contributo  $c_m$ , si ottiene la seguente uguaglianza:

$$\beta c_f = \frac{\overline{Q}_{16}}{\sin(\theta)\cos^3(\theta)} = \frac{\overline{Q}_{26}}{\sin^3(\theta)\cos(\theta)} \quad (2.53)$$

Se si utilizzano le definizioni di  $\overline{Q}_{16}$  e  $\overline{Q}_{26}$  contenute in (1.6) e s'impone l'uguaglianza espressa in (2.51), allora si ottiene che:

$$(Q_{11} - 3Q_{12}) - (Q_{22} - 3Q_{12}) \frac{\sin^2(\theta)}{\cos^2(\theta)} = (Q_{11} - 3Q_{12}) - (Q_{22} - 3Q_{12}) \frac{\cos^2(\theta)}{\sin^2(\theta)} \quad (2.54)$$

Tale uguaglianza risulta verificata per ogni inclinazione delle fibre ( $\forall\theta$ ) solo se:

$$Q_{22} = 3Q_{12} \quad (2.55)$$

Anche in questo caso, l'uguaglianza appena dedotta risulta essere una limitazione della versione *bond-based*. Infatti, implica che il coefficiente di Poisson  $\nu_{12}$  nel caso *plane-stress* sia necessariamente pari a:

$$\nu_{12} = \frac{1}{3} \quad (2.56)$$

Quindi, dal punto di vista delle simulazioni, vale lo stesso discorso fatto per  $G_{12}$ .

Se si considerano le uguaglianze (2.51) e (2.55) nelle definizioni di  $Q_{11}$  e  $Q_{22}$  contenute in (1.6), e con il risultato si procede alla sottrazione di (2.48d) dalla (2.48a), si ottiene:

$$c_f = \frac{Q_{11} - Q_{22}}{\beta} \quad (2.57)$$

dove  $\beta$  è definito in (2.49).

A questo punto, se si utilizzano sempre le uguaglianze (2.51) e (2.55) nella definizione di  $Q_{11}$  contenuta in (1.6) e con essa si procede alla sostituzione del  $c_f$  nell'espressione (2.48a) con quello appena trovato (2.57), si ottiene:

$$c_m = \frac{24Q_{12}}{\pi t \delta^3} \quad (2.58)$$

In conclusione, è possibile riscrivere (2.57) e (2.58) in funzione delle proprietà meccaniche fondamentali del materiale e quindi si ottengono le definizioni finali dei contributi  $c_f$  e  $c_m$  alla costante elastica dei bond peridinamici:

$$c_f = \frac{2E_1(E_1 - E_2)}{(E_1 - \frac{1}{9}E_2)(\sum_{q=1}^Q \xi_{qi} V_q)} \quad (2.59)$$

$$c_m = \frac{8E_1 E_2}{(E_1 - \frac{1}{9}E_2)\pi t \delta^3} \quad (2.60)$$

Se si considera la (2.56) insieme alla (2.52) e all'espressione dei coefficienti di Poisson (1.3), il modulo di taglio può essere definito come:

$$G_{12} = \frac{E_1 E_2}{3(E_1 - \frac{1}{9}E_2)} \quad (2.61)$$

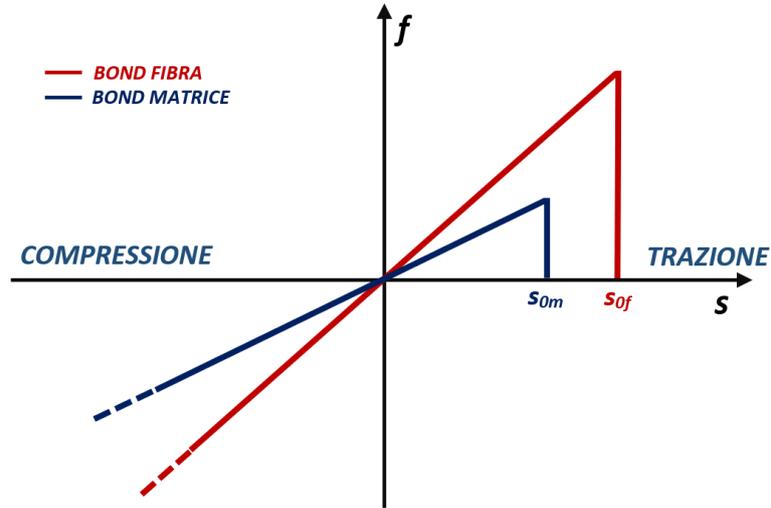
Quindi, oltre alla definizione della costante elastica  $c$  nella lamina ortotrope, si è dimostrato come, nella versione *bond-based*, il materiale venga descritto solamente da due grandezze indipendenti: i moduli di Young  $E_1$  e  $E_2$ .

## 2.2.2 Il *bond stretch* critico $s_0$ nelle lamine ortotrope

Nella versione *bond-based* della teoria Peridinamica, si può descrivere la natura ortotropa della lamina introducendo il concetto di bond fibra e bond matrice. Nella sottosezione precedente si è descritto come ad ognuno di essi sia associata una costante elastica diversa, che considera la maggiore rigidezza lungo la direzione delle fibre. Lo stesso approccio viene sfruttato per il calcolo del *bond stretch* critico  $s_0$ .

Avendo  $c$  diversa, i due bond hanno diverse leggi costitutive (figura 2.6), e quindi sarà lecito aspettarsi che la loro rottura avvenga a valori diversi di  $s_0$ .

Il bond fibra, essendo più rigido, sarà caratterizzato da un *bond stretch* critico  $s_{0f}$  maggiore rispetto a quello di un bond matrice, indicato con  $s_{0m}$ . Come nel caso generale, si presuppone che la rottura avvenga solo per trazione.



**Figura 2.6:** Leggi costitutive dei bond fibra e matrice. Si noti come la loro rottura avvenga a diversi valori di *bond stretch*, rispettivamente per  $s_{0f}$  e  $s_{0m}$ .

Per poter ottenere simulazioni precise del processo di rottura, è necessario che i valori di  $s_0$  siano molto accurati. Esistono diverse strategie per poterli calcolare.

Una delle più semplici consiste nell'utilizzo dell'approccio sviluppato per un qualsiasi materiale isotropo (2.34). In questo caso, la lamina è ortotropa e quindi non si avrà un unico tasso di rilascio d'energia  $G_0$  ma due, che tengono conto dell'orientazione delle fibre. Quindi, in condizione *plane-stress*,  $s_{0f}$  e  $s_{0m}$  sono così definiti [31, 9]:

$$s_{0f} = \sqrt{\frac{4\pi G_{IC,1}}{9E_1\delta}} \quad s_{0m} = \sqrt{\frac{4\pi G_{IC,2}}{9E_2\delta}} \quad (2.62)$$

dove  $G_{IC,1}$  e  $G_{IC,2}$  sono i tassi di rilascio d'energia per il modo di carico I nei casi in cui la cricca sia rispettivamente perpendicolare o parallela alla direzione delle fibre. Anche nel caso ortotropo, il valore dei *bond stretch* critici conserva la dipendenza dall'orizzonte ( $\delta$ ).

Nello studio di Colavito [1] viene presentata una strategia alternativa:  $s_{0f}$  e  $s_{0m}$  sono calcolati mediante un approccio iterativo, basato sul confronto con dati sperimentali.

Il primo passo consiste nel misurare sperimentalmente il carico a rottura di un determinato campione. Alla prima iterazione della simulazione, vengono ipotizzati i valori di  $s_0$  e si calcola il carico a rottura che ne deriva. Se il risultato è diverso da quello reale, si procede aumentando i valori dei *bond stretch* critici e si itera fino alla convergenza del carico simulato a quello reale.

Sempre in questo studio, a causa di una diversa formulazione del micropotenziale e dell'energia di deformazione, i valori iniziali di  $s_{0f}$  e  $s_{0m}$  sono calcolati nel seguente modo:

$$s_{0f} = \sqrt{\frac{G_{IC,1} - G_{IC,2} \left[ 1 + \frac{1}{\left[ \frac{E_1 E_2 - 2E_1 G_{12} - E_1 E_2 \nu_{12} + 2E_2 G_{12} \nu_{12}^2}{3(E_1 - E_2 \nu_{12}^2)} \right] \delta} \right]}{\left[ \frac{E_1^2 - 2E_1 G_{12} - E_1 E_2 \nu_{12} + 2E_2 G_{12} \nu_{12}^2}{3(E_1 - E_2 \nu_{12}^2)} \right] \delta}} \quad (2.63)$$

$$s_{0m} = \sqrt{\frac{9\pi G_{IC,2} (E_1 - E_2 \nu_{12}^2)}{[(E_1 - E_2 \nu_{12}^2) G_{12} (53 - 6\pi) + E_1 E_2 (3\pi + \nu_{12} (1 - 3\pi))] \delta}}$$

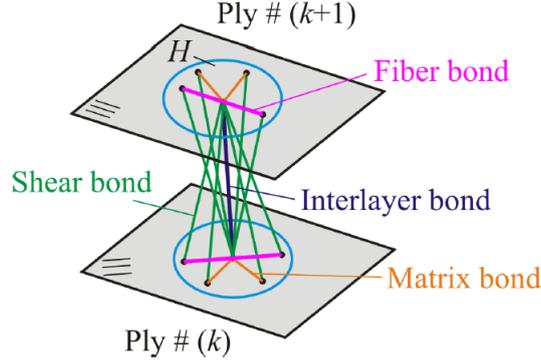
Grazie a questo approccio, definito *inverso*, Colavito ha dimostrato che  $s_{0m}$  è il *bond stretch* critico che più necessita di correzioni. Per esempio, nel caso in cui si abbia un modo di carico I e propagazione della cricca perpendicolare alla direzione delle fibre (che avranno quindi stessa orientazione del carico), il vero  $s_{0m}$  risulta essere maggiore del 34% rispetto a quello stimato dalla formula.

Questo dimostra quanto sia importante disporre di dati sperimentali riguardanti i processi di rottura. Le strategie appena presentate sono utili per poter calcolare valori approssimati dei *bond stretch* critici ma non sono sufficienti per ottenere una piena congruenza tra i risultati sperimentali e quelli simulati.

### 2.2.3 La costante elastica $c$ nei laminati

Nelle sottosezioni precedenti si è descritto come la teoria Peridinamica possa essere adattata per lo studio delle lamine. Si è visto come il comportamento ortotropo del materiale venga approssimato mediante l'utilizzo delle costanti elastiche  $c_f$  (2.59) e  $c_m$  (2.60).

Nel caso dei laminati, la teoria Peridinamica dev'essere in grado di descrivere il comportamento interlamina, cioè tutte le interazioni che sussistono tra lamine vicine. Secondo il lavoro di Madenci et al. [23], tutto ciò può essere implementato introducendo due ulteriori tipologie di bond, che siano in grado di approssimare sia le deformazioni normali al piano sia le deformazioni a taglio tra punti che sono collocati su lamine adiacenti. Essi vengono chiamati rispettivamente **bond interlamina** e **bond di taglio**.



**Figura 2.7:** Le quattro tipologie di bond presenti in un laminato. Immagine tratta da [23].

Dalla figura 2.7, si può notare come per ogni punto sorgente esistano al massimo due bond interlamina. Questo perché i due bond legano il punto sorgente solo con i punti aventi stesse coordinate nel piano ma giacenti sulla lamina superiore ed inferiore. Nel caso in cui la lamina fosse la prima o l'ultima, allora ci sarebbe un solo bond interlamina. I bond di taglio, invece, sono realizzati tra il punto sorgente e tutti i punti famiglia localizzati nella proiezione superiore ed inferiore del proprio intorno.

Come per le lamine ortotrope, il valore delle nuove costanti elastiche si può derivare attraverso un'analisi di tipo energetico. Nella fattispecie, si confronterà l'energia di deformazione calcolata in un punto materiale qualsiasi sfruttando la teoria classica del continuo con quella calcolabile usando l'approccio peridinamico.

Dal punto di vista peridinamico, la densità d'energia di deformazione nel punto sorgente *i-esimo*, può essere definita similmente a come fatto nel caso della lamina ortotropa (2.46):

$$W_{peri,laminate} = \frac{1}{2} \sum_{q=1}^2 \frac{c_{in} s_{qi}^2 \xi_{qi}}{2} V_q + \frac{1}{2} \int_{H_x} \frac{c_{is} \varphi^2}{2} dH \quad (2.64)$$

dove  $c_{in}$ ,  $c_{is}$  rappresentano le costanti elastiche rispettivamente del bond interlamina e del bond di taglio,  $\xi_{qi}$  il modulo del vettore di posizione relativa (lunghezza del bond),  $s_{qi}$  il *bond stretch* dei bond interlamina e  $V_q$  il volume associato al punto famiglia *q-esimo* sulla lamina superiore o inferiore. Invece  $\varphi$  è l'angolo di taglio associato ad ogni singolo bond di taglio.

Si ricorda che ciò è necessario in quanto l'integrale completo dell'energia non è risolubile a causa del suo dominio non continuo (c'è discontinuità nel passaggio dal bond di taglio a quello interlamina e viceversa).

Al contrario del caso ortotropo, in cui le costanti elastiche erano state derivate insieme, qui è necessario suddividere le due dimostrazioni.

## Bond interlamina

Si supponga che il laminato sia soggetto a un'espansione isotropa tale che  $s = \zeta$ . Così facendo, l'angolo di taglio  $\varphi$  sarà nullo per ogni bond [23] e la densità d'energia di deformazione dipenderà solamente dai bond interlamina:

$$W_{peri,laminate} = \frac{1}{2} \sum_{q=1}^2 \frac{c_{in} \zeta^2 t}{2} \bar{V} \quad (2.65)$$

dove  $t$  è lo spessore della lamina, che ha sostituito  $\xi_{qi}$  perché la distanza reciproca tra il punto sorgente e gli altri due punti dei bond interlamina, per definizione, coincide con lo spessore.  $\bar{V}$ , invece, indica il volume associato ai punti famiglia dei bond interlamina.

Nella teoria classica del continuo, la densità d'energia di deformazione è così definita:

$$W_{classical} = \frac{1}{2} E_{matrix} \zeta^2 \quad (2.66)$$

dove  $E_{matrix}$  è il modulo di Young della matrice.

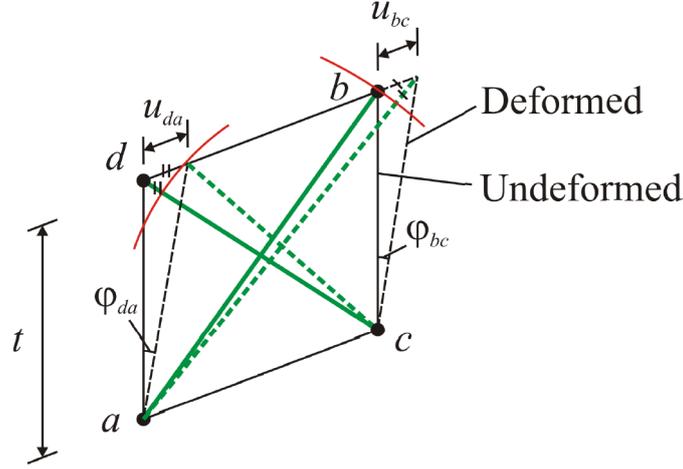
Uguagliando le densità d'energia di deformazione calcolate secondo l'approccio peridynamico (2.65) e classico (2.66), è possibile definire la costante elastica  $c_{in}$  associata ad un generico bond interlamina:

$$c_{in} = \frac{E_{matrix}}{t\bar{V}} \quad (2.67)$$

## Bond di taglio

La definizione della costante elastica associata al bond di taglio può essere ottenuta tramite delle considerazioni di natura geometrica ed energetica [23].

Il primo passo consiste nel definire l'espressione dell'angolo di taglio  $\varphi$ .



**Figura 2.8:** I bond di taglio  $\overline{ab}$  e  $\overline{cd}$ . Immagine tratta da [23].

Alla figura 2.8 è possibile notare un quadrilatero, formato dai punti sorgente  $a, c$  e i punti famiglia  $b, d$ . Nel caso del bond di taglio  $\overline{ab}$ , l'angolo  $\varphi$  viene espresso come la media tra i due angoli  $\varphi_{da}$  e  $\varphi_{bc}$ .

Assumendo piccoli angoli ed una distanza verticale tra i punti uguale allo spessore  $t$  della lamina, i singoli angoli possono essere così definiti:

$$\varphi_{da} = \frac{u_{da}}{t} \quad \varphi_{bc} = \frac{u_{bc}}{t} \quad (2.68)$$

dove  $u_{da}$  e  $u_{bc}$  sono gli spostamenti dei nodi  $d$  e  $b$  relativi rispettivamente ad  $a$  e  $c$ .

È possibile associare gli spostamenti alle variazioni di lunghezza a cui possono andare incontro i bond di taglio  $\overline{ab}$  e  $\overline{bc}$ . Infatti:

$$\begin{aligned} u_{da} &= -(\|\boldsymbol{\xi}_{cd} + \boldsymbol{\eta}_{cd}\| - \|\boldsymbol{\xi}_{cd}\|) \\ u_{bc} &= \|\boldsymbol{\xi}_{ab} + \boldsymbol{\eta}_{ab}\| - \|\boldsymbol{\xi}_{ab}\| \end{aligned} \quad (2.69)$$

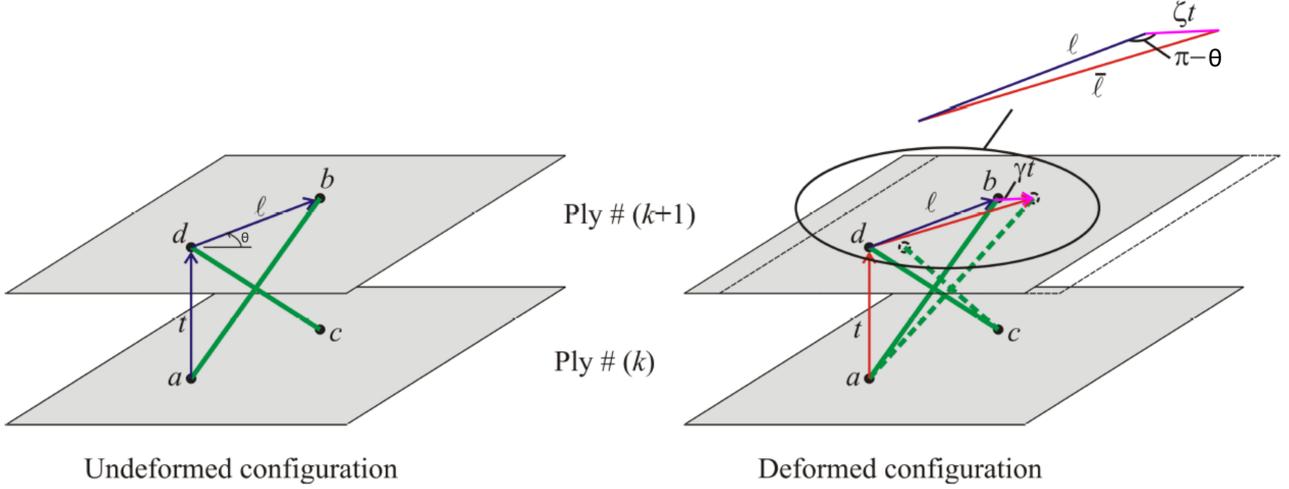
dove  $\boldsymbol{\xi}$  è il vettore di posizione relativa (2.2) e  $\boldsymbol{\eta}$  il vettore di spostamento relativo (2.3). Il segno meno della prima espressione deriva dal fatto che i due bond di taglio hanno comportamento opposto. L'estensione del primo causa la contrazione del secondo e viceversa.

Per procedere oltre, è necessario supporre che il laminato sia soggetto ad uno sforzo di taglio  $\gamma = \zeta$  tale per cui non ci sia alcuna estensione dei bond interlamina e quindi nessun loro contributo all'energia di deformazione [23]. In questo modo, i bond di taglio subiranno una deformazione e i vettori  $\boldsymbol{\xi}$  e  $\boldsymbol{\eta}$  degli spostamenti espressi in (2.69) potranno essere così ridefiniti:

$$\|\boldsymbol{\xi}_{ab}\| = \|\boldsymbol{\xi}_{cd}\| = \sqrt{l^2 + t^2}$$

$$\begin{aligned} \|\boldsymbol{\xi}_{ab} + \boldsymbol{\eta}_{ab}\| &= \sqrt{l^2 + t^2 + 2l\zeta t \cos(\theta)} = \sqrt{l^2 + t^2} + \frac{l\zeta t \cos(\theta)}{\sqrt{l^2 + t^2}} \\ \|\boldsymbol{\xi}_{cd} + \boldsymbol{\eta}_{cd}\| &= \sqrt{l^2 + t^2 - 2l\zeta t \cos(\theta)} = \sqrt{l^2 + t^2} - \frac{l\zeta t \cos(\theta)}{\sqrt{l^2 + t^2}} \end{aligned} \quad (2.70)$$

dove  $l$  è la lunghezza del bond  $\overline{bd}$  agente sulla lamina superiore e  $\theta$  la sua inclinazione rispetto all'orizzontale. Per ulteriori chiarimenti, si faccia riferimento alla figura 2.9. L'espressione di  $\|\boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{\eta}\|$  è stata ricavata con il teorema del coseno, ed è stata poi semplificata mediante l'approssimazione della radice quadrata.



**Figura 2.9:** I bond di taglio  $\overline{ab}$  e  $\overline{cd}$  a seguito della deformazione a taglio. Immagine tratta da [23].

Alla fine, sostituendo (2.70) nelle espressioni degli spostamenti (2.69) e poi il tutto in (2.68), è possibile riscrivere l'angolo di taglio  $\varphi$  come il valor medio tra i due angoli  $\varphi_{da}$  e  $\varphi_{bc}$ :

$$\varphi = \frac{\varphi_{da} + \varphi_{bc}}{2} = \frac{l\zeta \cos(\theta)}{\sqrt{l^2 + t^2}} \quad (2.71)$$

Una volta definito  $\varphi$ , è possibile calcolare la densità d'energia di deformazione nel punto  $a$  facendo riferimento all'espressione (2.64). Si ricorda che, avendo esercitato solo uno sforzo di taglio, il contributo interlamina è nullo [23].

$$W_{peri,laminate} = \frac{1}{2} \int_{H_x} \frac{c_{is} \varphi^2}{2} dH = \left[ \frac{\pi c_{is} t}{4} \left( \delta^2 + t^2 \ln \frac{t^2}{t^2 + \delta^2} \right) \right] \zeta^2 \quad (2.72)$$

dove  $\delta$  è l'orizzonte.

La densità d'energia di deformazione secondo l'approccio classico è pari a:

$$W_{classical} = \frac{1}{2} G_{matrix} \zeta^2 \quad (2.73)$$

dove  $G_{matrix}$  è il modulo di taglio della matrice.

In conclusione, uguagliando (2.72) con (2.73), si ottiene la costante elastica di un bond di taglio  $c_{is}$ :

$$c_{is} = \frac{2G_{matrix}}{\pi t} \frac{1}{\left( \delta^2 + t^2 \ln \frac{t^2}{t^2 + \delta^2} \right)} \quad (2.74)$$

Riassumendo, la teoria Peridinamica, nel caso di un laminato, prevede quattro tipi di bond, ognuno con la propria costante elastica:

$$c = \begin{cases} c_f + c_m & \phi = \theta + k\pi & \text{bond fibra} \\ c_m & \phi \neq \theta + k\pi & \text{bond matrice} \\ c_{in} & \text{fuori dal piano} & \text{bond interlamina} \\ c_{is} & \text{fuori dal piano} & \text{bond di taglio} \end{cases} \quad (2.75)$$

## 2.2.4 Il *bond stretch* critico $s_0$ nei laminati

Avendo introdotto due nuove tipologie di bond, è necessario definire i rispettivi valori di *bond stretch* critico. Come nel caso della lamina, ciò è possibile confrontando l'energia di rottura dei bond con il tasso di rilascio d'energia critica  $G$ .

La rottura di un bond interlamina può essere equiparata al processo di rottura di un corpo soggetto al modo di carico I [23]. Per questo motivo, è possibile uguagliare l'energia necessaria per la rottura di un singolo bond interlamina al tasso di rilascio d'energia critica della matrice, associato al modo I ( $G_{IC,m}$ ):

$$t \left( \frac{c_{in} s_{0in}^2}{2} \right) \bar{V} = G_{IC,m} \quad (2.76)$$

dove  $t$  è lo spessore della lamina,  $c_{in}$  la costante elastica del bond interlamina,  $s_{0in}$  il *bond stretch* critico del bond interlamina e  $\bar{V}$  il volume associato ai nodi del bond.

È possibile quindi ricavare l'espressione di  $s_{0in}$  sfruttando la definizione di  $c_{in}$  (2.67):

$$s_{in} = \sqrt{\frac{2G_{IC,m}}{tE_{matrix}}} \quad (2.77)$$

dove  $E_{matrix}$  è il modulo di Young della matrice e  $G_{IC,m}$  il tasso di rilascio d'energia critica associato al modo I e riferito alla matrice.

La rottura di un bond di taglio, invece, presenta similitudini con il processo di rottura di un corpo soggetto al modo di carico II [23].

Essendo un problema riguardante le deformazioni a taglio, non si definirà un *bond stretch* critico bensì un angolo critico  $\varphi_c$ , il cui superamento comporta la rottura del bond.

Al contrario del caso precedente in cui si faceva riferimento alla rottura di un singolo bond, qui si devono considerare tutti i bond di taglio che afferiscono ad un determinato punto sorgente [23].

L'energia necessaria per rompere tutti i bond di taglio viene eguagliata al tasso di rilascio d'energia della matrice, associato al modo II ( $G_{IIC,m}$ ):

$$t \int_{H_x} \frac{c_{is}\varphi_c^2}{2} dH = G_{IIC,m} \quad (2.78)$$

dove  $c_{is}$  è la costante elastica del bond di taglio,  $H_x$  l'intorno del punto sorgente e  $\varphi_c$  l'angolo critico.

L'integrale (2.78) può essere riscritto sfruttando il sistema di coordinate polari per definire l'intorno  $H_x$ :

$$t \left( t \frac{c_{is}\varphi_c^2}{2} \int_0^\delta l dl \int_0^{2\pi} d\varphi \right) = G_{IIC,m} \quad (2.79)$$

Risolviendo l'integrale (2.79) e usando la definizione di  $c_{is}$  (2.74), si ottiene l'espressione dell'angolo critico  $\varphi_c$ :

$$\varphi_c = \sqrt{\frac{G_{IIC,m}}{tG_{matrix}}} \quad (2.80)$$

dove  $G_{matrix}$  è il modulo di taglio della matrice e  $G_{IIC,m}$  il tasso di rilascio d'energia critica della matrice, associato al modo II.

La formulazione degli  $s_0$  riferiti ai bond giacenti nel piano della lamina non subiscono variazioni.

## Capitolo 3

# Il metodo agli elementi finiti (FEM)

Con *metodo agli elementi finiti* (in inglese *Finite Element Method - FEM*) s'intende un metodo numerico con il quale è possibile calcolare le soluzioni approssimate di un problema definibile mediante equazioni differenziali alle derivate parziali. Ad oggi, è il metodo più usato nell'ambito dell'analisi strutturale statica e dinamica ed è sfruttato da numerosi software commerciali come ABAQUS, NASTRAN e ANSYS.

Il corpo in esame viene suddiviso in un numero finito di punti, chiamati *nodi*, nei quali sono concentrati tutti gli spostamenti  $\mathbf{u}$  e le forze  $\mathbf{f}$ . Più nodi concorrono alla formazione di un elemento FEM, che può avere forme diverse in base al numero dei suoi nodi e al fatto che il modello sia 1D, 2D o 3D. In base allo spazio in cui si lavora, ad ogni nodo può essere associato un numero finito di gradi di libertà. Gli elementi, in base ai nodi in comune, vengono poi assemblati per ricostruire la versione discreta del corpo continuo in esame.

Risolvere un modello FEM significa calcolare gli spostamenti di tutti i nodi di un corpo soggetto a determinate condizioni iniziali di vincolo e/o carico.

All'interno dell'elemento, il passaggio dal mondo continuo a quello discreto è regolato da funzioni di forma, che permettono di calcolare gli spostamenti di ogni punto dell'elemento attraverso l'interpolazione di quelli concentrati ai nodi. In generale:

$$\mathbf{u}^e(x, y, z, t) = \sum_{i=1}^n N_i u_i = [\mathbf{N}] \mathbf{u}_e \quad \forall e \in R \quad (3.1)$$

dove  $\mathbf{u}^e$  è il vettore degli spostamenti di ogni punto all'interno dell'elemento  $e$ ,  $n$  il numero di nodi dell'elemento,  $N_i$  la funzione di forma associata al nodo  $i$ -esimo e facente parte della matrice  $[\mathbf{N}]$ ,  $u_i$  il vettore spostamento associato al nodo  $i$ -esimo e facente parte del vettore spostamento dell'elemento  $\mathbf{u}_e$ .  $R$ , invece, è il corpo in esame.

Le funzioni di forma  $N_i$  hanno definizioni diverse in base al tipo di elemento scelto. Inoltre, si specifica come il vettore  $\mathbf{u}_e$  non si riferisca solo ai nodi dell'elemento, ma anche a tutti i loro gradi di libertà. Per esempio, se si suppone un elemento costituito da due nodi, aventi ognuno due gradi di libertà (spostamenti lungo due

direzioni perpendicolari), allora il vettore  $\mathbf{u}_e$  assume la seguente forma:

$$\mathbf{u}_e = \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

dove il pedice indica il nodo al quale il grado di libertà  $(u, v)$  si riferisce.

Con l'espressione (3.1) è possibile linearizzare e discretizzare le leggi della meccanica strutturale in equazioni che regolano il comportamento meccanico sia dell'intero modello discreto sia dei singoli elementi.

In un'analisi statica, l'equazione del modello FEM per un singolo elemento assume la seguente forma:

$$[\mathbf{K}_e]\mathbf{u}_e = \mathbf{f}_e \quad (3.3)$$

dove  $[\mathbf{K}_e]$  è la matrice di rigidezza associata all'elemento  $e$  e  $\mathbf{f}_e$  il vettore delle forze esterne agenti sull'elemento.

La matrice di rigidezza  $[\mathbf{K}_e]$  non coincide con la matrice d'elasticità definita in (1.2) nel caso della lamina ortotropa. Infatti, quest'ultima rappresenta la legge costitutiva del materiale e non dipende dalla forma della struttura o la sua discretizzazione ma solo dalle grandezze caratteristiche come il modulo di Young e i coefficienti di Poisson, che sono propri del materiale.

La matrice  $[\mathbf{K}_e]$  si ottiene dalla combinazione delle funzioni di forma con la legge costitutiva del materiale associato all'elemento. Nello specifico:

$$[\mathbf{K}_e] = \int_{V_e} [\mathbf{B}]^T [\mathbf{D}] [\mathbf{B}] dV \quad [\mathbf{B}] = \nabla \mathbf{N} \quad (3.4)$$

dove  $V_e$  indica il volume dell'elemento,  $[\mathbf{D}]$  la matrice d'elasticità del materiale (1.2) e  $[\mathbf{B}]$  la matrice ottenuta dal calcolo del gradiente della matrice delle funzioni di forma.

Le dimensioni della matrice  $[\mathbf{K}_e]$  dipendono dal numero di nodi all'interno dell'elemento e dal numero di gradi di libertà ad essi associato. Per esempio, considerando un elemento costituito da tre nodi aventi ognuno due gradi di libertà, allora l'elemento possiede 6 gradi di libertà (due per ogni nodo) e quindi la matrice di rigidezza avrà dimensioni  $[6 \times 6]$ .

Nel caso di un'analisi dinamica, si devono considerare anche i termini inerziali (associati alle accelerazioni dei nodi) e di smorzamento (riferiti alle velocità dei nodi). Per questo motivo, l'equazione (3.3) viene ampliata aggiungendo le matrici di massa  $[\mathbf{M}_e]$  e smorzamento  $[\mathbf{C}_e]$  riferite all'elemento  $e$ :

$$[\mathbf{M}_e]\ddot{\mathbf{u}}_e + [\mathbf{C}_e]\dot{\mathbf{u}}_e + [\mathbf{K}_e]\mathbf{u}_e = \mathbf{f}_e \quad (3.5)$$

dove le matrici  $[\mathbf{M}_e]$  e  $[\mathbf{C}_e]$  sono così definite:

$$[\mathbf{M}_e] = \rho_e \int_{V_e} [\mathbf{N}]^T [\mathbf{N}] dV \quad [\mathbf{C}_e] = \alpha[\mathbf{M}_e] + \beta[\mathbf{K}_e] \quad (3.6)$$

in cui  $\rho_e$  è la densità del materiale associata all'elemento  $e$ .

La matrice dello smorzamento dipende dal modello di materiale impiegato. Qualora non ci fossero informazioni a riguardo, è possibile implementare lo smorzamento come una combinazione lineare delle matrici di massa e rigidezza. I parametri  $\alpha$  e  $\beta$  possono essere identificati per via sperimentale.

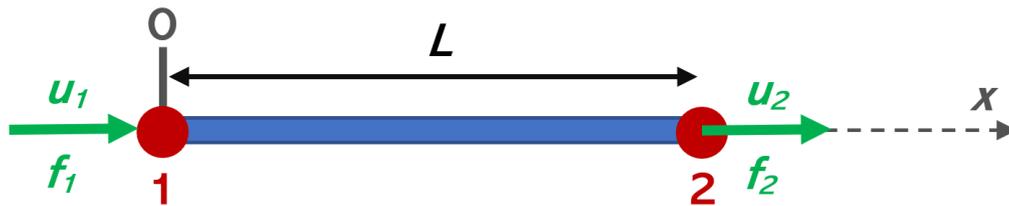
Nella prossime sezioni, si descriveranno nel dettaglio i due elementi FEM usati nel lavoro di questa tesi. L'ultima sezione, invece, affronterà il tema dell'assemblaggio degli elementi per ottenere la matrice di rigidezza globale della struttura in esame.

### 3.1 Elemento ASTA

L'asta è uno degli elementi più semplici da implementare nel FEM. È costituito da due nodi, situati alle sue estremità.

Nella tecnica d'accoppiamento FEM-Peridinamica usata in questa tesi, l'elemento asta viene usato come corrispettivo FEM dei bond peridinamici, in quanto quest'ultimi, esattamente come gli elementi asta, legano solo due punti.

### Spazio monodimensionale



**Figura 3.1:** L'elemento asta in uno spazio monodimensionale.

In uno spazio monodimensionale, sia gli spostamenti sia le forze agenti sui nodi hanno un'unica direzione, che nella figura 3.1 è indicata con l'asse  $x$ . A causa di ciò, questo elemento asta ha solo due gradi di libertà, uno per nodo, e quindi la sua matrice di rigidezza avrà dimensioni  $[2 \times 2]$ .

La matrice delle funzioni di forma è così definita:

$$[\mathbf{N}] = [N_1, N_2] = \left[ \frac{L-x}{L}, \frac{x}{L} \right] \quad (3.7)$$

dove  $L$  è la lunghezza dell'elemento e  $x$  la coordinata di un qualunque punto tra i due nodi.

Le funzioni di forma sono sempre definite in modo che abbiano valore unitario quando calcolate nel punto coincidente con il nodo a cui si riferiscono. Inoltre, nella matrice delle funzioni di forma, quando una di esse assume valore unitario, tutte le altre diventano nulle. Se si calcolano i valori di  $[\mathbf{N}]$  (3.7) nel punto avente coordinata  $x = 0$  (nodo 1), allora si ottiene  $[\mathbf{N}] = [1, 0]$ .

Viceversa, se calcolate nel punto avente coordinata  $x = L$  (nodo 2), si avrà  $[\mathbf{N}] = [0, 1]$ .

Per poter definire la matrice di rigidezza, è necessario calcolare il gradiente di (3.7). In uno spazio monodimensionale, ciò significa derivare le componenti della matrice rispetto a  $x$ . Si ottiene quindi:

$$[\mathbf{B}] = \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

A questo punto, sostituendo (3.8) nell'integrale (3.4), è possibile determinare la matrice di rigidezza. In uno spazio monodimensionale, la matrice dell'elasticità  $[\mathbf{D}]$  è definita da un solo parametro ed è pari al modulo di Young ( $E$ ). Se si suppone che l'asta abbia sezione costante per tutta la sua lunghezza, allora:

$$[\mathbf{K}_e] = \int_0^L [\mathbf{B}]^T [\mathbf{D}] [\mathbf{B}] A dl = EA \int_0^L [\mathbf{B}]^T [\mathbf{B}] dl \quad (3.9)$$

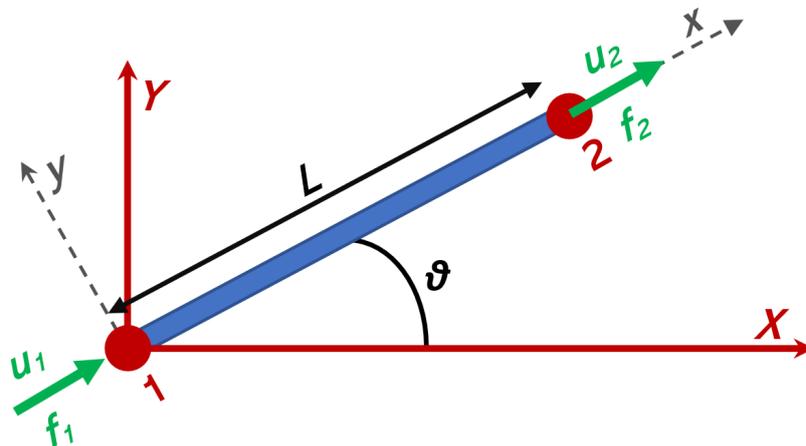
$$[\mathbf{K}_e] = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

In conclusione, per un caso statico 1D riguardante un solo elemento asta, il sistema di equazioni (3.3) è così definito:

$$\frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{Bmatrix} \quad (3.11)$$

dove 1 e 2 si riferiscono ai due nodi dell'elemento.

## Spazio bidimensionale



**Figura 3.2:** L'elemento asta in uno spazio bidimensionale.

Nella figura 3.2, si considera un elemento asta all'interno di uno spazio bidimensionale, in cui vige un sistema di riferimento esterno (rosso in figura). L'asta è inclinata di un angolo  $\theta$  rispetto all'orizzontale.

Nel sistema locale, spostamenti e forze hanno solo una componente lungo l'asta, mentre nel sistema esterno, gli stessi hanno due componenti (una orizzontale ed una

verticale).

Pertanto, ogni nodo avrà due gradi di libertà e i vettori spostamento e forza dovranno subire un cambio di coordinate:

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X \\ Y \end{Bmatrix} \quad (3.12)$$

Nello spazio bidimensionale, l'elemento asta ha quattro gradi di libertà, quindi la matrice di rigidezza ha dimensioni  $[4 \times 4]$ . Per poterla calcolare, è sufficiente riadattare la matrice definita nello spazio monodimensionale (3.10) e utilizzare un'opportuna matrice di rotazione.

Con *riadattare*, s'intende aggiungere alla matrice di rigidezza (3.10) un numero di colonne e righe pari a quello dei gradi di libertà aggiuntivi. Tutti i nuovi termini hanno valore nullo, perché nel sistema locale non trasmettono spostamenti o forze. Si ottiene quindi:

$$[\mathbf{K}_e] = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

dove la seconda e quarta riga/colonna sono associate alle componenti verticali del sistema locale, che per definizione sono zero.

La matrice di rotazione ha dimensioni  $[4 \times 4]$  ed è costruita sulla base del cambio di coordinate definito in (3.12):

$$[\mathbf{R}] = \begin{bmatrix} c & s & 0 & 0 \\ -s & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & s \\ 0 & 0 & -s & c \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

dove  $c = \cos(\theta)$  e  $s = \sin(\theta)$ .

A questo punto, si può definire la matrice di rigidezza dell'elemento asta in uno spazio bidimensionale come:

$$[\mathbf{K}]_e = [\mathbf{R}]^T [\mathbf{K}_e] [\mathbf{R}] = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} c^2 & cs & -c^2 & -cs \\ cs & s^2 & -cs & -s^2 \\ -c^2 & -cs & c^2 & cs \\ -cs & -s^2 & cs & s^2 \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

## Spazio tridimensionale

Quando si simulano i laminati, nel modello perid dinamico si usano quattro tipi di bond. I primi due (fibra e matrice), essendo nel piano della lamina, vengono associati all'elemento FEM asta definito nello spazio bidimensionale.

Gli ultimi due (interlamina e taglio) trovano sempre il loro corrispettivo FEM nell'elemento asta, che però dev'essere definito nello spazio tridimensionale perché i bond interlamina e di taglio legano nodi che si trovano su lamina diverse.

Come nel caso precedente, viene definita una nuova matrice di trasformazione, che descrive l'orientazione tridimensionale dell'elemento asta:

$$[\mathbf{R}_3] = \begin{bmatrix} \cos\theta_x & \cos\theta_y & \cos\theta_z & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\theta_x & \cos\theta_y & \cos\theta_z \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

dove  $[\theta_x, \theta_y, \theta_z]$  sono le inclinazione dell'elemento asta rispetto ai tre assi  $x, y, z$ .

È possibile calcolare il valore dei singoli coseni sfruttando le coordinate cartesiane dei due nodi. In questo caso, è necessario verificare che i risultati siano concordi con la vera orientazione del vettore.

$$\cos\theta_x = \frac{x_i - x_j}{L} \quad \cos\theta_y = \frac{y_i - y_j}{L} \quad \cos\theta_z = \frac{z_i - z_j}{L} \quad (3.17)$$

dove  $[x, y, z]_i$  e  $[x, y, z]_j$  sono le coordinate dei due nodi ed  $L$  la lunghezza dell'elemento asta:

$$L = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2} \quad (3.18)$$

In conclusione, è possibile definire la matrice di rigidezza dell'elemento asta riferito allo spazio tridimensionale usando la matrice di trasformazione appena trovata (3.16):

$$[\mathbf{K}_e^{3D}] = [\mathbf{R}_3]^T [\mathbf{K}_e^{1D}] [\mathbf{R}_3] \quad (3.19)$$

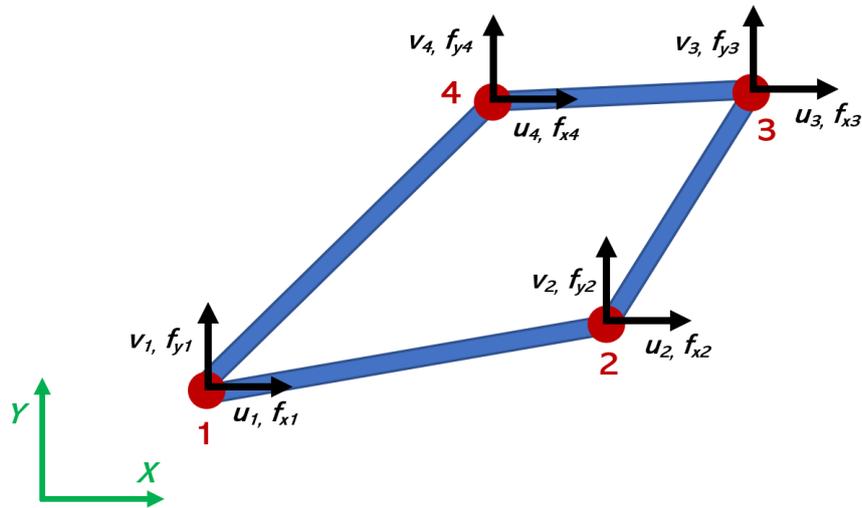
dove  $[\mathbf{K}_e^{1D}]$  è la matrice di rigidezza dell'elemento asta definito nello spazio monodimensionale (3.10).

## 3.2 Elemento quadrilatero bilineare a 4 nodi

Una lamina ortotropa viene spesso approssimata ad un corpo bidimensionale, perché il suo spessore è estremamente ridotto rispetto alla sua lunghezza e larghezza e le proprietà meccaniche fuori dal piano sono trascurabili rispetto a quelle nel piano. Quest'ultima caratteristica, inoltre, giustifica la condizione di *plane-stress* che è stata adottata finora.

Perciò, per l'implementazione della griglia FEM, si è deciso di utilizzare un elemento bidimensionale a 4 nodi (figura 3.3) denominato quadrilatero bilineare. Il termine *quadrilatero* deriva dalla forma dell'elemento, che è un generico quadrilatero, mentre con *bilineare* si fa riferimento alle funzioni di forma e al fatto che dipendano linearmente da due variabili.

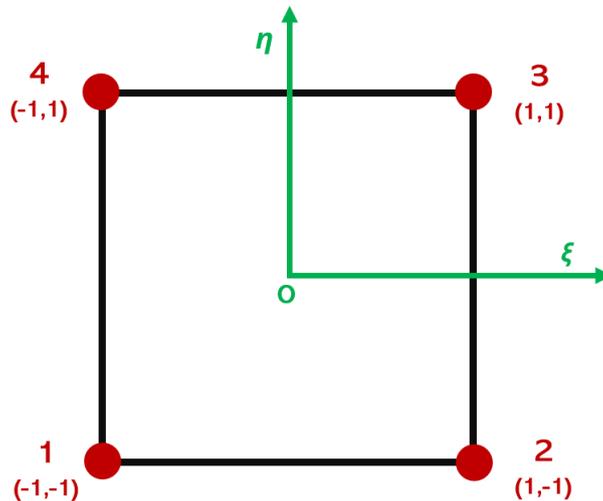
Ad ogni nodo sono associati due gradi di libertà, che diventano otto se si considera l'intero elemento.



**Figura 3.3:** L'elemento quadrilatero bilineare a 4 nodi.

Rispetto all'elemento asta, il calcolo della matrice di rigidezza dell'elemento quadrilatero richiede qualche accorgimento aggiuntivo. La maggior complessità deriva dalla forma arbitraria del quadrilatero, che rende difficile la formulazione delle funzioni di forma.

Questo problema viene risolto associando un elemento isoparametrico (figura 3.4), di forma quadra, all'elemento quadrilatero generico. Il nuovo elemento sfrutta un nuovo sistema di riferimento, che è adimensionale e definito dagli assi  $\xi$  e  $\eta$ . È fondamentale che la numerazione dei nodi appartenenti ai due elementi mantenga la stessa logica d'assegnazione (per esempio oraria o antioraria).



**Figura 3.4:** L'elemento quadrilatero isoparametrico.

Si avrà la seguente matrice delle funzioni di forma:

$$[\mathbf{N}] = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

dove le singole funzioni di forma, rispetto all'elemento isoparametrico, sono così definite:

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 - \eta) \\ N_2 &= \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 - \eta) \\ N_3 &= \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 + \eta) \\ N_4 &= \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 + \eta) \end{aligned} \quad (3.21)$$

Avendo usato un elemento isoparametrico, la matrice delle funzioni di forma (3.20) può essere usata per interpolare sia le coordinate sia gli spostamenti di un qualsiasi punto all'interno dell'elemento [2]:

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sum_{i=1}^4 N_i x_i \\ \sum_{i=1}^4 N_i y_i \end{Bmatrix} = [\mathbf{N}] \begin{Bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ x_2 \\ y_2 \\ x_3 \\ y_3 \\ x_4 \\ y_4 \end{Bmatrix} \quad \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sum_{i=1}^4 N_i u_i \\ \sum_{i=1}^4 N_i v_i \end{Bmatrix} = [\mathbf{N}] \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{Bmatrix} \quad (3.22)$$

dove  $i$  indica il nodo  $i$ -esimo,  $u_i$  e  $v_i$  gli spostamenti del nodo  $i$ -esimo lungo rispettivamente gli assi  $X, Y$ .

Per calcolare la matrice di rigidezza dell'elemento, è necessario definire la matrice  $[\mathbf{B}]$  (3.4) mediante il calcolo delle derivate delle funzioni di forma, che devono essere espresse nel sistema di riferimento  $X, Y$ . Le funzioni di forma, tuttavia, sono dipendenti da  $\xi$  e  $\eta$  e quindi si rende necessaria l'introduzione di una matrice Jacobiana  $[\mathbf{J}]$  che permetta il cambio di variabile:

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = [\mathbf{J}] \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{Bmatrix} \quad (3.23)$$

in cui la matrice Jacobiana è così definita:

$$[\mathbf{J}] = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^4 N_{i,\xi} x_i & \sum_{i=1}^4 N_{i,\xi} y_i \\ \sum_{i=1}^4 N_{i,\eta} x_i & \sum_{i=1}^4 N_{i,\eta} y_i \end{bmatrix} \quad (3.24)$$

dove  $N_{i,\xi}$  e  $N_{i,\eta}$  indicano le derivate parziali della funzione di forma  $i$ -esima rispetto a  $\xi$  e  $\eta$ . Invece  $x_i$  e  $y_i$  sono le coordinate del nodo  $i$ -esimo.

Se si svolgono tutte le derivate, si ottiene:

$$[\mathbf{J}] = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -(1 - \eta) & (1 - \eta) & (1 + \eta) & -(1 + \eta) \\ -(1 - \xi) & -(1 + \xi) & (1 + \xi) & (1 - \xi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \\ x_4 & y_4 \end{bmatrix} \quad (3.25)$$

Visto che il cambio di variabile deve avvenire da  $\xi, \eta$  a  $x, y$  allora sarà necessario invertire l'espressione (3.23).

Quindi si definisce l'inversa della matrice Jacobiana  $[\mathbf{\Gamma}]$ :

$$\mathbf{\Gamma} = \begin{bmatrix} \Gamma_{11} & \Gamma_{12} \\ \Gamma_{21} & \Gamma_{22} \end{bmatrix} = \frac{1}{\det[\mathbf{J}]} \begin{bmatrix} J_{22} & -J_{12} \\ -J_{21} & J_{11} \end{bmatrix} \quad (3.26)$$

A questo punto, si hanno tutti gli elementi per poter calcolare la matrice  $[\mathbf{B}]$ , che avrà dimensione complessiva  $[3 \times 8]$ , in cui otto deriva dal numero di gradi libertà dell'elemento e tre dalla dimensione della matrice d'elasticità del materiale (1.2):

$$[\mathbf{B}] = [B_1 \quad B_2 \quad B_3 \quad B_4] \quad (3.27)$$

dove ogni elemento  $B_i$  è una matrice di dimensioni  $[3 \times 2]$  ed è associato al nodo *i-esimo*:

$$[\mathbf{B}_i] = \begin{bmatrix} \Gamma_{11} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} + \Gamma_{12} \frac{\partial N_i}{\partial \eta} & 0 \\ 0 & \Gamma_{21} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} + \Gamma_{22} \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \\ \Gamma_{21} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} + \Gamma_{22} \frac{\partial N_i}{\partial \eta} & \Gamma_{11} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} - \Gamma_{12} \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (3.28)$$

dove  $N_i$  è la funzione di forma associata al nodo *i-esimo* e  $[\mathbf{\Gamma}]$  l'inversa della matrice Jacobiana (3.26).

Alla fine, è possibile calcolare la matrice di rigidezza di un elemento quadrilatero bilineare sostituendo nell'integrale (3.4), la matrice  $[\mathbf{B}]$  appena definita e la matrice d'elasticità del materiale composito  $[\overline{\mathbf{Q}}]$  (1.5).

Supponendo costante lo spessore della lamina o del laminato, l'integrale di volume (3.4) si trasforma in un integrale d'area:

$$[\mathbf{K}_e] = t \int_A [\mathbf{B}]^T [\mathbf{D}] [\mathbf{B}] \, dx dy = t \int_A [\mathbf{B}]^T [\overline{\mathbf{Q}}] [\mathbf{B}] \, \|\mathbf{J}(\xi, \eta)\| \, d\xi d\eta \quad (3.29)$$

dove  $t$  e  $A$  sono rispettivamente lo spessore e l'area dell'elemento quadrilatero.

Per rendere più agevole il processo d'integrazione, è possibile riscrivere l'integrale precedente sfruttando l'elemento isoparametrico, che è un quadrato centrato in zero (figura 3.4):

$$[\mathbf{K}_e] = t \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [\mathbf{B}]^T [\overline{\mathbf{Q}}] [\mathbf{B}] \, \|\mathbf{J}(\xi, \eta)\| \, d\xi d\eta \quad (3.30)$$

dove si ha un integrale doppio, i cui intervalli d'integrazione  $[-1, 1]$  derivano da come l'elemento isoparametrico è stato definito.

La risoluzione dell'integrale non è stata riportata in questo lavoro perché, data la complessità, si è deciso di sfruttare direttamente le tecniche di calcolo simbolico implementate nel software MATLAB.

### 3.3 Assemblaggio degli elementi FEM

Per poter studiare il comportamento meccanico di una struttura, indipendentemente dalla sua complessità, è necessario utilizzare più di un elemento FEM. Il numero di elementi da impiegare dipende da molti fattori come le risorse di calcolo a disposizione, il livello di accuratezza richiesto dai risultati e la complessità intrinseca della struttura.

L'insieme degli elementi che discretizzano parzialmente o interamente una struttura costituisce una griglia (in inglese *mesh*), in cui elementi adiacenti condividono nodi, spostamenti e forze. Questo è possibile tramite il loro *assemblaggio*.

Così come ogni elemento possiede una matrice di rigidezza, anche la struttura ne ha una ed è chiamata matrice di rigidezza globale  $[\mathbf{K}_s]$ . Questa matrice si ottiene assemblando insieme le matrici di rigidezza di tutti gli elementi della *mesh*.

Il processo di assemblaggio che viene descritto in questa sezione ha validità universale.



**Figura 3.5:** La struttura in esame

Il blocco della figura 3.5 è stato suddiviso in quattro nodi (1,2,3,4) e tre elementi asta (A,B,C) uguali. Il nodo 2 e il nodo 3 sono associati a più di un elemento.

Per semplificare la comprensione del processo d'assemblaggio, si assume che sia gli spostamenti sia le forze agiscano solamente lungo l'asse longitudinale del blocco. Ciò permette l'utilizzo degli elementi asta definiti nello spazio monodimensionale. Ad ogni nodo viene associato un solo grado di libertà.

L'equazione FEM della struttura assume la seguente forma:

$$[\mathbf{K}_s]\mathbf{u}_s = \mathbf{f}_s \quad \implies \quad [\mathbf{K}_s] \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{Bmatrix} \quad (3.31)$$

dove  $[\mathbf{K}_s]$  è la matrice di rigidezza globale,  $\mathbf{u}_s$  e  $\mathbf{f}_s$  i vettori spostamento e forza relativi ai quattro nodi della struttura. Essendo suddivisa in quattro nodi aventi un grado di libertà ciascuno, la struttura ha quattro gradi di libertà e  $[\mathbf{K}_s]$  ha dimensioni  $[4 \times 4]$ .

Per semplificare l'argomentazione, si è deciso di utilizzare per gli elementi la stessa numerazione nodale usata a livello globale, cioè di struttura.

È possibile definire le equazione FEM corrispondenti ad ognuno dei tre elementi. In questo caso, avendo scelto elementi asta 1D, le matrici di rigidezza hanno dimensione due.

Elemento **A** - Nodi **1,2**

$$\begin{bmatrix} K_{A,11} & K_{A,12} \\ K_{A,21} & K_{A,22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{A,1} \\ u_{A,2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_{A,1} \\ f_{A,2} \end{Bmatrix}$$

Elemento **B** - Nodi **2,3**

$$\begin{bmatrix} K_{B,22} & K_{B,23} \\ K_{B,32} & K_{B,33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{B,2} \\ u_{B,3} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_{B,2} \\ f_{B,3} \end{Bmatrix}$$

Elemento **C** - Nodi **3,4**

$$\begin{bmatrix} K_{C,33} & K_{C,34} \\ K_{C,43} & K_{C,44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{C,3} \\ u_{C,4} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_{C,3} \\ f_{C,4} \end{Bmatrix}$$

Affinché si possa procedere con l'assemblaggio della matrice di rigidezza globale, è necessario definire le condizioni d'accoppiamento degli elementi, che riguardano sia gli spostamenti sia le forze agenti sui nodi in comune.

Per prima cosa, gli spostamenti degli elementi che afferiscono ad uno stesso nodo, devono essere uguali. Nel nostro esempio, ciò significa che:

$$\begin{aligned} \text{Nodo } \mathbf{2} \quad u_2 &= u_{A,2} = u_{B,2} \\ \text{Nodo } \mathbf{3} \quad u_3 &= u_{B,3} = u_{C,3} \end{aligned} \quad (3.32)$$

In secondo luogo, le forze totali agenti sui nodi in comune rappresentano la somma dei contributi dei singoli elementi a quei nodi. Quindi:

$$\begin{aligned} \text{Nodo } \mathbf{2} \quad f_2 &= f_{A,2} + f_{B,2} \\ \text{Nodo } \mathbf{3} \quad f_3 &= f_{B,3} + f_{C,3} \end{aligned} \quad (3.33)$$

Per i nodi non in comune, spostamenti e forze coincidono con quelli definiti nei relativi elementi:

$$\begin{aligned} \text{Nodo } \mathbf{1} \quad u_1 &= u_{A,1} \quad f_1 = f_{A,1} \\ \text{Nodo } \mathbf{4} \quad u_4 &= u_{C,4} \quad f_4 = f_{C,4} \end{aligned} \quad (3.34)$$

Dopo tutte queste considerazioni, è possibile scrivere le equazioni d'equilibrio per l'intera struttura, sfruttando le matrici di rigidezza per definire le forze  $f$

$$\begin{cases} f_1 = K_{A,11}u_1 + K_{A,12}u_2 \\ f_2 = K_{A,21}u_1 + K_{A,22}u_2 + K_{B,22}u_2 + K_{A,23}u_3 \\ f_3 = K_{B,32}u_2 + K_{B,33}u_3 + K_{C,33}u_3 + K_{C,34}u_4 \\ f_4 = K_{C,43}u_3 + K_{A,44}u_4 \end{cases} \quad (3.35)$$

Si può notare come nelle equazioni riguardanti i nodi in comune, i termini delle matrici di rigidezza aventi stessi indici numerici siano moltiplicati per lo stesso spostamento:

$$\begin{aligned} &(K_{A,22} + K_{B,22})u_2 \\ &(K_{B,33} + K_{C,33})u_3 \end{aligned}$$

Questi, infatti, rappresentano i termini accoppiati del sistema.

In forma matriciale, il sistema (3.35) diventa:

$$\begin{bmatrix} K_{A,11} & K_{A,12} & 0 & 0 \\ K_{A,21} & K_{A,22} + K_{B,22} & K_{B,23} & 0 \\ 0 & K_{B,32} & K_{B,33} + K_{C,33} & K_{C,34} \\ 0 & 0 & K_{C,43} & K_{C,44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{Bmatrix} \quad (3.36)$$

In conclusione, se si confronta (3.31) con il sistema matriciale appena trovato (3.36), si osserva subito come quella appena trovata sia proprio la matrice di rigidezza della struttura. Inoltre, si può capire come l'assemblaggio di questa matrice consista nella somma dei termini delle matrici di rigidezza che afferiscono agli stessi gradi di libertà.

Se la numerazione nodale usata nei singoli elementi coincide con quella globale, allora l'assemblaggio consiste banalmente nella somma degli elementi aventi stessi indici numerici. Nel caso in cui la numerazione negli elementi non corrisponda a quella usata a livello di struttura, sarà necessario associare ciascun grado di libertà di ogni elemento al corrispondente grado di libertà globale prima di procedere alla somma dei termini di rigidezza.

## Capitolo 4

# Accoppiamento FEM-Peridinamica

L'accoppiamento della *mesh* FEM con la griglia peridinamica nasce dalla necessità di simulare accuratamente il comportamento meccanico di strutture fratturate in tempi relativamente brevi e con un uso moderato delle risorse di calcolo.

La teoria Peridinamica, grazie alla sua formulazione integrale, risolve con facilità modelli caratterizzati da discontinuità ma i tempi di risoluzione sono relativamente alti. I modelli FEM, invece, sono rapidi e computazionalmente efficienti ma trovano grandi difficoltà nel simulare il comportamento meccanico in prossimità di fratture, visto che si basano sulla risoluzione delle derivate parziali della teoria classica del continuo.

Di conseguenza, unire le due teorie è un'ottima soluzione per limitarne gli svantaggi ed esaltarne i punti di forza.

Da un punto di vista generale, ciò può essere definito come un problema d'accoppiamento tra un modello non-locale (nel nostro caso la Peridinamica) ed uno locale (FEM). Esistono diverse strategie, che vengono suddivise in base alla *smoothness* con la quale viene realizzata la transizione tra i due modelli [5]. Per una trattazione approfondita sul tema, si faccia riferimento allo studio di D'Elia et al. [5].

Giannakeas et al. [8], per esempio, hanno proposto l'uso di *ghost nodes* (nodi fantasma peridinamici) all'interno degli elementi FEM periferici, che permettono di far lavorare insieme le due teorie senza dover necessariamente cambiare la conformazione di elementi e nodi delle due griglie.

Nel lavoro di Kilic et al. [19], invece, si è deciso di unire le due griglie implementando un'area di sovrapposizione (*overlap region*) dove le equazioni d'equilibrio FEM e Peridinamiche vengono accoppiate ed utilizzate insieme.

La strategia che si è voluto utilizzare in questa tesi consiste nella definizione di una matrice di rigidezza globale che includa sia gli elementi FEM sia gli elementi peridinamici [6, 29]. Questo è reso possibile convertendo i bond peridinamici in elementi FEM di tipo asta, la cui rigidezza dipenderà dai parametri chiave della teoria Peridinamica come il micromodulo e la lunghezza del bond. Quest'approccio ha diversi vantaggi:

- **Nessuna zona di sovrapposizione o *ghost nodes*.**

Utilizzando questa tecnica, non è necessario implementare né aree in cui le equazioni FEM e peridinamiche sono accoppiate né *ghost nodes* che fungano

da interfaccia tra le due teorie. In questo caso, i nodi preservano la loro natura.

La tecnica d'accoppiamento usata riguarda la definizione degli elementi e il modo in cui le loro matrici di rigidezza vengono sommate. Quest'ultimo punto riguarda specialmente i nodi in prossimità del confine tra le due griglie.

- **Implementazione semplificata delle *boundary conditions*.**

Avendo assemblato una matrice di rigidezza globale, la simulazione si basa sulla risoluzione delle equazioni d'equilibrio FEM. Nella teoria Peridinamica, carichi e vincoli non possono essere applicati a singoli punti, perché dotati di volume infinitesimo e quindi non compatibili con la formulazione integrale della teoria (2.1). Di conseguenza, è necessario associare le condizioni a contorno a determinati volumi del corpo, che abbiano una dimensione minima paragonabile a quella dell'orizzonte [23].

La tecnica usata in questa tesi rende possibile l'utilizzo delle equazioni FEM. Pertanto, l'assegnazione delle *boundary conditions* segue le regole della teoria FEM, che permette di agire a livello dei singoli nodi.

Originariamente, l'approccio scelto per l'accoppiamento FEM-Peridinamica richiedeva un uguale densità di nodi nei due tipi di griglia. Nello specifico, la distanza tra i nodi doveva essere uguale in tutte le direzioni e in tutte e due le griglie. Per semplicità d'implementazione, nel codice si è proceduto in questo senso.

Tuttavia, è possibile superare questa *limitazione* utilizzando la tecnica proposta in [30].

La prima sezione del capitolo riguarda l'associazione dei bond peridinamici ad elementi FEM di tipo asta. La seconda, invece, descrive l'assemblaggio della nuova matrice di rigidezza globale.

## 4.1 Definizione dei bond peridinamici sotto forma di elementi FEM

Nel dominio discreto, cioè in quello dell'implementazione numerica, l'integrale fondamentale della teoria Peridinamica (2.1) viene riscritto rimpiazzando l'integrale con la sommatoria:

$$\rho \ddot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}_i, t_k) = \sum_{j=1}^N \mathbf{f}(\mathbf{u}(\mathbf{x}_j, t_k) - \mathbf{u}(\mathbf{x}_i, t_k), \mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i) V_j + \mathbf{b}(\mathbf{x}_i, t_k) \quad (4.1)$$

dove  $N$  è il numero di nodi famiglia nell'intorno del nodo sorgente,  $\mathbf{u}$  il vettore spostamento al tempo  $t_k$ ,  $V_j$  il volume associato al nodo famiglia  $j$ -esimo,  $\mathbf{b}$  il vettore delle forze di volume esterne e  $\rho$  la densità del materiale associata ai nodi.

Quest'equazione del moto esprime forze di volume. Per ottenere le sole forze, è necessario moltiplicare entrambi i membri dell'espressione per il volume del nodo sorgente  $V_i$ . Per un singolo bond si ottiene:

$$\rho V_i \ddot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}_i, t_k) = \mathbf{f}(\mathbf{u}(\mathbf{x}_j, t_k) - \mathbf{u}(\mathbf{x}_i, t_k), \mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i) V_i V_j + \mathbf{b}(\mathbf{x}_i, t_k) V_i \quad (4.2)$$

Se si considera il modello di materiale PMB, descritto nel capitolo due, è possibile ridefinire la *pairwise force function*  $\mathbf{f}$  (2.24). Considerandone solo il modulo e trascurando le forze di volume esterne  $\mathbf{b}$ , l'espressione della forza del bond  $F$  (4.2) si semplifica ulteriormente:

$$F = \rho V_i \ddot{u} = cs V_i V_j \quad (4.3)$$

dove  $c$  è il micromodulo (oppure costante elastica del bond) ed  $s$  il *bond stretch*. Non è presente  $\mu(\xi)$  perché si presuppone di operare con bond interi e quindi  $\mu$  assume valore unitario.

Secondo la (2.37) il *bond stretch* può essere così definito:

$$s = \frac{u_j - u_i}{\|\boldsymbol{\xi}\|} \quad (4.4)$$

dove  $u_i$  e  $u_j$  sono gli spostamenti del nodo sorgente e famiglia lungo il bond.

Per procedere con la trattazione, è necessario definire la forza secondo il modello FEM.

Se si considera un elemento asta in uno spazio monodimensionale (3.10) e le rispettive equazioni d'equilibrio, si ottiene che:

$$\frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} \quad \longrightarrow \quad F_2 = \frac{EA}{L}(u_2 - u_1) \quad (4.5)$$

A questo punto, si può confrontare la forza del bond peridinamico (4.3) con quella ottenuta per un elemento asta (4.5). Inoltre, se si sfrutta la definizione di *bond stretch* (4.4):

$$c V_i V_j \frac{u_j - u_i}{\|\boldsymbol{\xi}\|} = \frac{EA}{L}(u_2 - u_1) \quad (4.6)$$

dove gli spostamenti coincidono perché associati agli stessi nodi (cambia solo la loro denominazione).

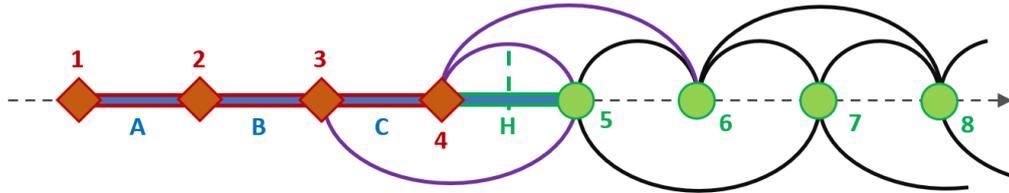
Considerato ciò, è possibile semplificare la differenza degli spostamenti e si può notare come il coefficiente della matrice di rigidità FEM possa essere riscritto sotto forma di parametri peridinamici. Inoltre, la lunghezza dell'elemento asta  $L$  corrisponde alla lunghezza del bond  $\|\boldsymbol{\xi}\|$ .

In conclusione, è stato dimostrato il legame tra un bond peridinamico ed un elemento asta FEM. La matrice di rigidità dell'elemento asta peridinamico viene indicata con  $[\mathbf{K}_{PD}]$ :

$$[\mathbf{K}_{FEM}] = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \longrightarrow \quad [\mathbf{K}_{PD}] = \frac{c V_i V_j}{\|\boldsymbol{\xi}\|} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

## 4.2 Assemblaggio della matrice di rigidezza globale FEM-PD

Dopo aver dimostrato il dualismo tra un elemento FEM asta ed il bond peridinamico, il passo successivo consiste nell'assemblaggio della matrice di rigidezza globale, costituita sia da nodi FEM sia da nodi peridinamici.



**Figura 4.1:** Barra suddivisa in nodi FEM (rombo) e nodi peridinamici (cerchio). I rettangoli bordati di rosso rappresentano gli elementi FEM e le linee nere i bond peridinamici. Sia i bond viola sia l'elemento FEM centrale (bordo verde) vengono definiti *ibridi*.

In figura 4.1 è presente una barra, assunta monodimensionale, suddivisa in almeno 8 nodi (4 FEM e 4 peridinamici). Ci sono tre elementi FEM asta (A,B,C) di lunghezza  $\Delta x$  e numerosi bond peridinamici che legano i nodi in base all'orizzonte, che in questo caso corrisponde a  $\delta = 2\Delta x$ . L'elemento centrale, così come i bond viola, vengono definiti *ibridi*, perché presentano delle caratteristiche uniche, che li rendono diversi sia dagli elementi asta sia dagli elementi peridinamici.

Dalla figura si può notare come tutti i nodi peridinamici abbiano legami indipendentemente dalla natura dei rispettivi nodi famiglia. Per esempio, avendo  $\delta = 2\Delta x$ , il nodo 5 (peridinamico) è legato ai nodi 3,4 (FEM) e 6,7 (peridinamici).

Se si assume che la numerazione nodale a livello d'elemento coincida con quella a livello di struttura, l'assemblaggio della matrice di rigidezza globale risulta semplice e consiste nella somma dei termini delle matrici di rigidezza aventi stessi indici. Per esempio, al nodo 7 saranno associati i contributi di rigidezza degli elementi peridinamici  $\overline{57}, \overline{67}, \overline{78}, \overline{79}$ . Al nodo 2, invece, saranno sommati i contributi degli elementi FEM A,B.

Questo è valido solo per gli elementi peridinamici e gli elementi FEM definiti *interni*, cioè costituiti solamente da nodi FEM o peridinamici. Tutti gli altri elementi, indipendentemente dalla loro natura, sono definiti *ibridi*. Questo perché costituiti da nodi non appartenenti alla propria griglia di riferimento.

In questi casi, le matrici di rigidezza dei singoli elementi devono essere modificate prima di poter essere usate nell'assemblaggio. Ciò si vede necessario per garantire l'equilibrio delle forze tra la mesh FEM e la griglia peridinamica. Infatti, la forza dell'elemento FEM ibrido associato ad un determinato nodo, dev'essere uguale e contraria alla somma delle forze dei singoli bond ibridi riferiti allo stesso nodo.

Questo è realizzabile azzerando, nelle singole matrici di rigidezza, tutte le righe as-

sociate ai gradi di libertà inerenti i nodi di natura diversa. Si ricorda come la riga  $i$ -esima della matrice sia associata alla forza  $i$ -esima. Per esempio, nell'elemento H della figura, la seconda riga della matrice sarà composta da zeri. Così come la prima riga della matrice dell'elemento peridinamico  $\bar{54}$ .

Dopo questo accorgimento, è possibile assemblare anche le matrici di rigidezza degli elementi ibridi.

In conclusione, si vuole mostrare la matrice di rigidezza globale per i primi 8 nodi. Avendo assunto una barra monodimensionale, ogni nodo ha un solo grado di libertà. La struttura, quindi, ne ha otto e la sua matrice di rigidezza avrà dimensioni  $[8 \times 8]$ . Usando per gli elementi FEM e peridinamici le matrici di rigidezza definite in (4.7), si ottiene:

$$\mathbf{K}_s = \begin{matrix} & \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{4} & \mathbf{5} & \mathbf{6} & \mathbf{7} & \mathbf{8} & \dots \\ \mathbf{1} & K_F & -K_F & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \mathbf{2} & -K_F & 2K_F & -K_F & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \mathbf{3} & 0 & -K_F & 2K_F & -K_F & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \mathbf{4} & 0 & 0 & -K_F & 2K_F & -K_F & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \mathbf{5} & 0 & 0 & -\frac{K_P}{4} & -K_P & \frac{5K_P}{2} & -K_P & -\frac{K_P}{4} & 0 & \dots \\ \mathbf{6} & 0 & 0 & 0 & -\frac{K_P}{4} & -K_P & \frac{5K_P}{2} & -K_P & -\frac{K_P}{4} & \dots \\ \mathbf{7} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{K_P}{4} & -K_P & \frac{5K_P}{2} & -K_P & \dots \\ \mathbf{8} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{K_P}{4} & -K_P & \frac{5K_P}{2} & \dots \\ & \vdots & \ddots \end{matrix}$$

dove  $K_F$  e  $K_P$  sono i coefficienti delle matrici di rigidezza degli elementi FEM e peridinamici:

$$K_F = \frac{EA}{L} \quad K_P = \frac{cV_i V_j}{\|\xi\|} \quad (4.8)$$

## Capitolo 5

# Implementazione numerica

Finora, si è provveduto alla descrizione delle fondamenta teoriche alla base di questo lavoro di tesi. In questo capitolo, invece, si affronta il tema dell'implementazione numerica, cioè di come tutta la teoria descritta possa essere declinata in un codice MATLAB.

Verrà approfondito il concetto di convergenza della simulazione, così come la scelta del tipo di risolutore FEM (esplicito o implicito). Inoltre, si descriverà l'algoritmo di *grid-adapting* e il problema riguardante il calcolo del volume dei nodi nell'intorno di un nodo sorgente. Nell'ultima sezione verrà presentato il diagramma a blocchi del codice MATLAB realizzato per la tesi.

### 5.1 Discretizzazione e orizzonte

Come anticipato nei capitoli precedenti, la prima parte di ogni codice riguardante l'analisi strutturale, indipendentemente dal fatto che sia FEM o Peridinamica, consiste nella discretizzazione del corpo in esame, cioè nella sua suddivisione in nodi. Essendo che l'insieme dei nodi costituisce una griglia (in inglese *mesh*), la loro distanza viene definita *grid-spacing* (in italiano *distanziamento della griglia*).

Tra il numero dei nodi e il *grid-spacing*, sussiste una relazione di proporzionalità inversa, cioè il loro prodotto è sempre costante e uguale alla lunghezza discretizzata. Quindi, nel caso di un corpo bidimensionale, aventi dimensioni  $L_x$  e  $L_y$  lungo le direzioni  $x, y$ , la discretizzazione può essere implementata mediante due strategie diverse:

- **Scelta del numero dei nodi**

Se si decide di fissare il numero dei nodi, che può essere diverso per ciascuna direzione  $x, y$ , allora il *grid-spacing* non sarà arbitrario e dipenderà dalle dimensioni. In questo caso, si ottiene che:

$$\Delta x = \frac{L_x}{n_x} \quad \Delta y = \frac{L_y}{n_y} \quad (5.1)$$

dove  $n_x$  e  $n_y$  è il numero dei nodi nelle direzioni  $x, y$ ,  $\Delta x$  e  $\Delta y$  il *grid-spacing* nelle direzioni  $x, y$ .

- **Scelta del *grid-spacing***

Invece dei nodi, è possibile fissare un *grid-spacing* per ogni direzione. In questo modo, il numero dei nodi sarà vincolato e calcolabile con la seguente espressione:

$$n_x = \frac{Lx}{\Delta x} + 1 \quad n_y = \frac{Ly}{\Delta y} + 1 \quad (5.2)$$

Questa strategia necessita di alcune precisazioni. Il numero dei nodi dev'essere intero ma il rapporto nelle espressioni non sempre lo è. Si deve quindi approssimare il rapporto all'intero più vicino. Dopodiché, il risultato va aumentato di uno perché il rapporto identifica solo il numero di intervalli tra nodi ed ognuno di essi è costituito da due nodi.

Qualunque sia la strategia scelta, salvo casi particolari, la lunghezza discretizzata non coinciderà mai con quella reale. Questo perché possono essere necessarie delle approssimazioni a seguito del calcolo del *grid-spacing* o del numero dei nodi. Ciononostante, maggiore è la densità della *mesh* (maggior  $n_{x,y}$  o minor  $\Delta x, y$ ), minore è l'errore rispetto alla dimensione reale. Questo vale anche per l'accuratezza dei risultati.

Nel caso della griglia peridinamica, è necessario definire l'intorno di ogni nodo sorgente. Per uno spazio bidimensionale, questa regione è circolare e ha un raggio  $\delta$ , definito *orizzonte*:

$$\delta = m\Delta x \quad (5.3)$$

dalla quale è possibile determinare il *grid-spacing* da utilizzare dopo che è stato scelto l'orizzonte e il parametro  $m$ , che è generalmente un numero intero che esprime l'ampiezza dell'orizzonte come multiplo del *grid-spacing*.

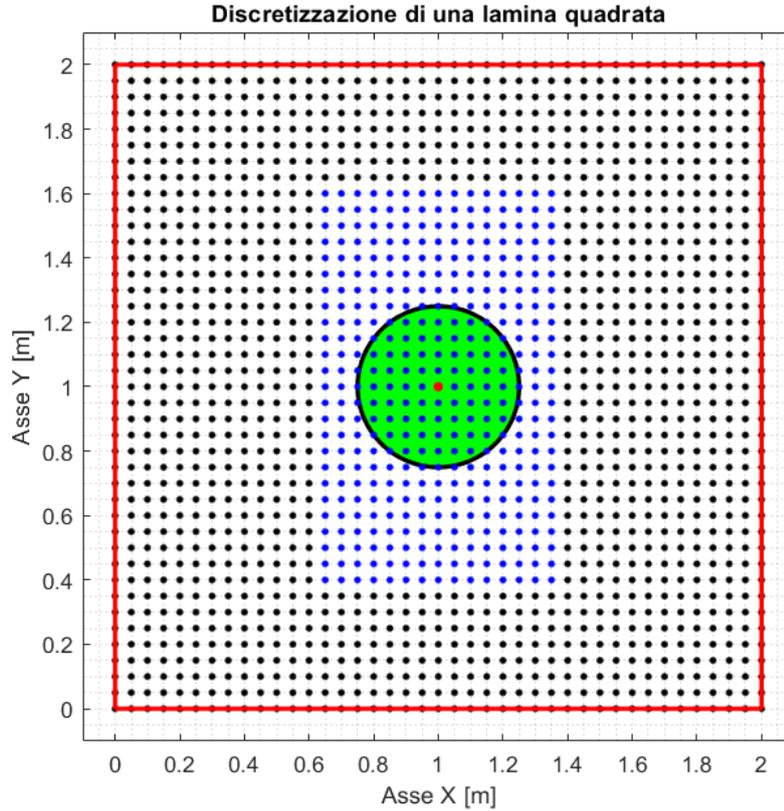
La scelta dei parametri è cruciale per la convergenza dei risultati nell'area peridinamica perché gran parte dei parametri chiave della teoria, come il micromodulo e il *bond stretch* critico, sono in funzione di  $\delta$ . Quest'aspetto sarà meglio approfondito nella sezione dedicata alla convergenza della soluzione peridinamica.

Come specificato nel capitolo precedente, nel nostro caso è necessario mantenere costante la distanza tra i nodi, in tutte le direzioni e griglie. Questo è reso possibile mediante una discretizzazione che imponga lo stesso *grid-spacing*  $\Delta$  sia alla griglia FEM sia a quella peridinamica. Inoltre, s'impone lo stesso  $\Delta$  a tutte le direzioni  $x, y$ .

In conclusione, alla figura 5.1, è possibile osservare la discretizzazione di una lamina quadrata, realizzata imponendo un determinato *grid-spacing*. Al centro è presente anche una griglia peridinamica. Le caratteristiche della lamina e della mesh sono riassunte nella tabella 5.1:

Lunghezza [m]	Larghezza [m]	$\delta$ [m]	$m$	$\Delta x, y$	$n_{FEM}$	$n_{PD}$	$n_{x,y}$
2	2	0.25	5	0.05	1306	375	41

**Tabella 5.1:** Caratteristiche della lamina e della mesh FEM-Peridinamica



**Figura 5.1:** Griglia FEM-Peridinamica (nero/blu). Al centro è raffigurato l'intorno (verde), avente raggio  $\delta = 5\Delta x$ , del nodo sorgente rosso. Il bordo rosso delimita la lamina.

## 5.2 Calcolo del volume dei nodi peridinamici

Quando si utilizza la forma discreta della teoria Peridinamica (4.1), così come la matrice di rigidezza associata all'elemento asta peridinamico (4.8), risulta necessario calcolare i volumi associati sia al nodo sorgente sia ai nodi famiglia, cioè di tutti i nodi che si trovano nell'intorno del nodo sorgente (figura 5.1).

Quindi, ogni nodo viene posto al centro di una cella avente una sezione quadrata e uno spessore coincidente con quello della lamina in cui si trova. Il suo volume sarà quindi:

$$V_{node} = t\Delta x^2 \quad (5.4)$$

dove  $t$  è lo spessore della lamina e  $\Delta x$  il *grid-spacing* scelto per la mesh FEM-Peridinamica.

Questa definizione è valida sia per il nodo sorgente, sia per tutti quei nodi famiglia la cui cella è totalmente contenuta nell'intorno.

Per i nodi famiglia periferici, la cui cella è parzialmente fuori dall'intorno, il volume così definito risulta essere sovrastimato. Infatti, solo una parte di esso, quella nell'intorno, contribuisce alla rigidezza del bond e quindi al comportamento del nodo sorgente. In definitiva, si possono indurre degli errori nei risultati delle simulazioni.

Per questi nodi, si rende necessaria l'introduzione di un coefficiente  $\beta$ , che permetta di correggere il volume del nodo famiglia, calcolato con (5.4), in base alla sua distanza dal nodo sorgente.

Il termine  $\beta$  può essere definito in diversi modi:

- **Rapporto tra la distanza relativa orizzonte-nodo e il *grid-spacing***

In questo caso, il coefficiente  $\beta$  viene inteso come il rapporto fra la differenza che sussiste tra lunghezza del bond ed orizzonte, e la dimensione della cella, che per definizione coincide con il *grid-spacing*.

In altre parole, significa *correggere* il volume del nodo in base alla frazione di lato della cella che è contenuta nell'intorno.

$$\beta = \begin{cases} 1 & \|\xi\| \leq \delta - 0.5\Delta x \\ \frac{\delta + 0.5\Delta x - \|\xi\|}{\Delta x} & \delta - 0.5\Delta x < \|\xi\| \leq \delta + 0.5\Delta x \\ 0 & \|\xi\| > \delta + 0.5\Delta x \end{cases} \quad (5.5)$$

dove  $\delta$  è l'orizzonte scelto,  $\|\xi\|$  la lunghezza del bond (2.2) e  $\Delta x$  il *grid-spacing*.

- **Rapporto tra l'area interna e totale della cella**

Quest'approccio risulta più accurato del precedente perché prevede il calcolo dell'effettiva porzione di volume contenuta nell'intorno. Essendo lo spessore costante in tutta la lamina, si utilizza l'area della cella. La porzione d'area in questione può essere determinata analiticamente oppure attraverso degli algoritmi, che identificano i punti d'intersezione tra la cella e il confine dell'intorno, e poi determinano il valore dell'area della frazione di cella in esame.

$$\beta = \begin{cases} 1 & \|\xi\| \leq \delta - 0.5\Delta x \\ \frac{A_{interna}}{\Delta x^2} & \delta - 0.5\Delta x < \|\xi\| \leq \delta + 0.5\Delta x \\ 0 & \|\xi\| > \delta + 0.5\Delta x \end{cases} \quad (5.6)$$

dove  $A_{interna}$  indica la porzione d'area, contenuta nell'intorno, della cella periferica e  $\Delta x^2$  l'area totale della cella.

In entrambi i casi, si aggiunge al  $\delta$  una tolleranza di  $0.5\Delta x$ . Questo perché alcuni nodi sono fuori dall'intorno ma talmente vicini da avere la propria cella intersecante con esso. Quindi, per poterne considerare il contributo, è necessario estendere l'uso dell'algoritmo di calcolo di  $\beta$  ad un raggio leggermente maggiore.

### 5.3 Algoritmo di *grid-adapting*

L'utilizzo accoppiato di griglie FEM e Peridinamiche permette di ridurre fortemente i tempi di simulazione e le risorse computazionali richieste.

Normalmente, la posizione dell'area peridinamica si basa su delle ipotesi iniziali inerenti la possibile zona di propagazione delle cricche. Tutti i nodi peridinamici concorrono alla simulazione sin dalla prima iterazione.

Tuttavia, è possibile ridurre ulteriormente il costo computazionale della simulazione introducendo un algoritmo di *grid-adapting*, mediante il quale è possibile attivare

solo determinate aree della griglia peridinamica. Nelle aree non attive, rimane implementata la *mesh* FEM. Questa strategia è estremamente utile perché riduce al minimo indispensabile l'uso della teoria Peridinamica.

In questo lavoro di tesi, la condizione che regola l'attivazione dei nodi peridinamici riguarda il *bond stretch*  $s$  (2.23).

Inizialmente, la griglia peridinamica è implementata nella simulazione ma non concorre alla matrice di rigidezza della struttura perché inattivata. Ad ogni iterazione, per ogni bond è calcolato il relativo *bond stretch*, che dipende dai risultati ottenuti mediante l'impiego della sola mesh FEM. L'obiettivo è attivare i nodi peridinamici appartenenti ai bond che sono prossimi alla rottura, che avviene quando  $s$  supera il valore critico  $s_0$ .

Perciò, è possibile implementare un *IF-cycle* che verifichi quali bond abbiano un *bond stretch* vicino alla condizione di rottura. Questa *vicinanza* viene definita mediante un coefficiente numerico  $\alpha$ , che indica la percentuale di  $s_0$  che dev'essere raggiunta dal bond affinché possa essere attivato, e quindi concorrere alla matrice di rigidezza della struttura:

$$s_{attivazione} = \alpha s_0 \quad 0 < \alpha < 1 \quad (5.7)$$

Se  $\alpha$  fosse zero,  $s_{attivazione}$  sarebbe zero e tutti i bond si attiverrebbero alla prima iterazione, rendendo nullo il *grid-adapting*. Se fosse uno, allora i bond si attiverrebbero solo quando rotti. Questo ridurrebbe sensibilmente l'accuratezza della simulazione, perché il processo iniziale di rottura verrebbe guidato solamente dalla teoria FEM. Per questo motivo, si è deciso di utilizzare un valore di  $\alpha$  compreso tra 0.7 e 0.85. Valori più bassi renderebbero meno efficiente l'algoritmo di *grid-adapting*.

Per concludere, è possibile osservare nella figura 5.2 un diagramma a blocchi riguardante il funzionamento dell'algoritmo e il modo in cui i bond vengono implementati nella matrice di rigidezza globale man mano che avviene la loro attivazione.

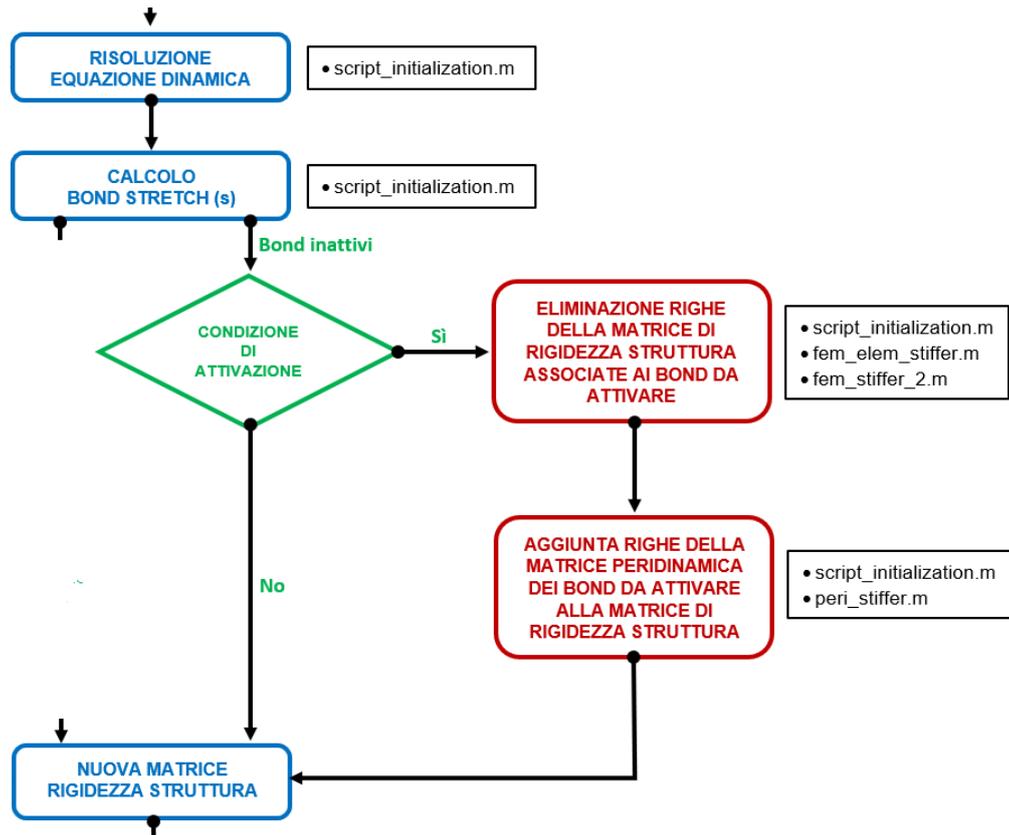


Figura 5.2: Diagramma a blocchi riguardante l’algoritmo di *grid-adapting*.

## 5.4 Convergenza della soluzione peridinamica

Come anticipato nelle sezioni precedenti, fissato l’orizzonte  $\delta$  e il parametro  $m$ , è possibile calcolare il *grid-spacing*  $\Delta x$ .

La scelta di questi parametri non è del tutto arbitraria perché influenzano la capacità del modello peridinamico di convergere verso la soluzione più accurata possibile.

Inoltre, intervenendo sempre sui parametri, sarà possibile far convergere la soluzione verso i risultati previsti dalla meccanica classica oppure verso la soluzione non-locale esatta prevista dalla Peridinamica.

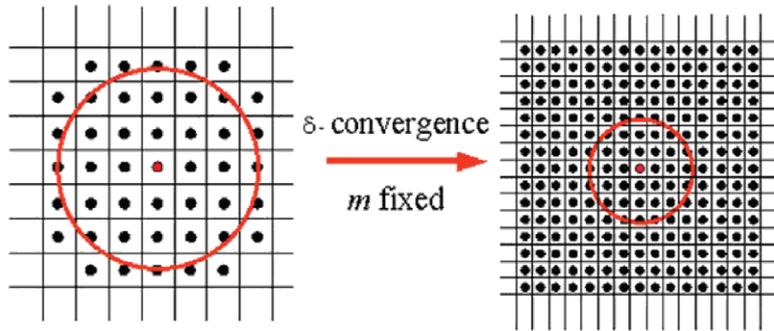
Esistono due tecniche di convergenza [12]:

- **$\delta$ -convergenza**

L’orizzonte  $\delta$  viene fatto tendere a zero mantenendo costante il parametro  $m$  (che dev’essere alto) e riducendo il *grid-spacing*.

Riducendo  $\delta$  e  $\Delta x$  si mantiene costante il numero di nodi nell’intorno del nodo sorgente ma aumenta quello complessivo della struttura.

Questa tecnica garantisce la convergenza della soluzione peridinamica su quella fornita dalla meccanica classica perché riduce le dimensioni dell’area d’integrazione (figura 5.3).

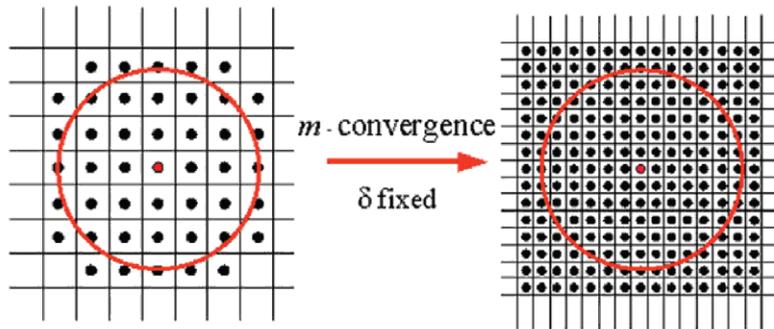


**Figura 5.3:** Esempio di  $\delta$ -convergenza. Figura tratta da [12].

- **$m$ -convergenza**

Il parametro  $m$  viene fatto tendere ad infinito mantenendo costante l'orizzonte  $\delta$  e diminuendo il *grid-spacing*. In questo modo, il numero dei nodi nell'intorno aumenta considerevolmente.

Questa seconda strategia fornisce l'esatta soluzione non-locale della teoria Peridinamica, visto che molti più nodi famiglia contribuiscono al comportamento del nodo sorgente (figura 5.4).



**Figura 5.4:** Esempio di  $m$ -convergenza. Figura tratta da [12].

La scelta dei parametri  $m$  e  $\delta$  è influenzata anche dalle risorse computazionali disponibili per svolgere la simulazione. Sia la prima sia la seconda strategia comportano un *grid-spacing* molto ridotto. A parità di dimensioni della struttura, ciò significa aumentare considerevolmente il numero di nodi e quindi la richiesta di memoria e velocità di calcolo.

Secondo lo studio di Bobaru et al. [12], nel caso dei materiali compositi, un valore di  $m = 5$  e un raggio dell'orizzonte pari a  $\delta = 2mm$  è più che sufficiente per catturare le diverse tipologie di danno e simulare correttamente il percorso di propagazione della cricca.

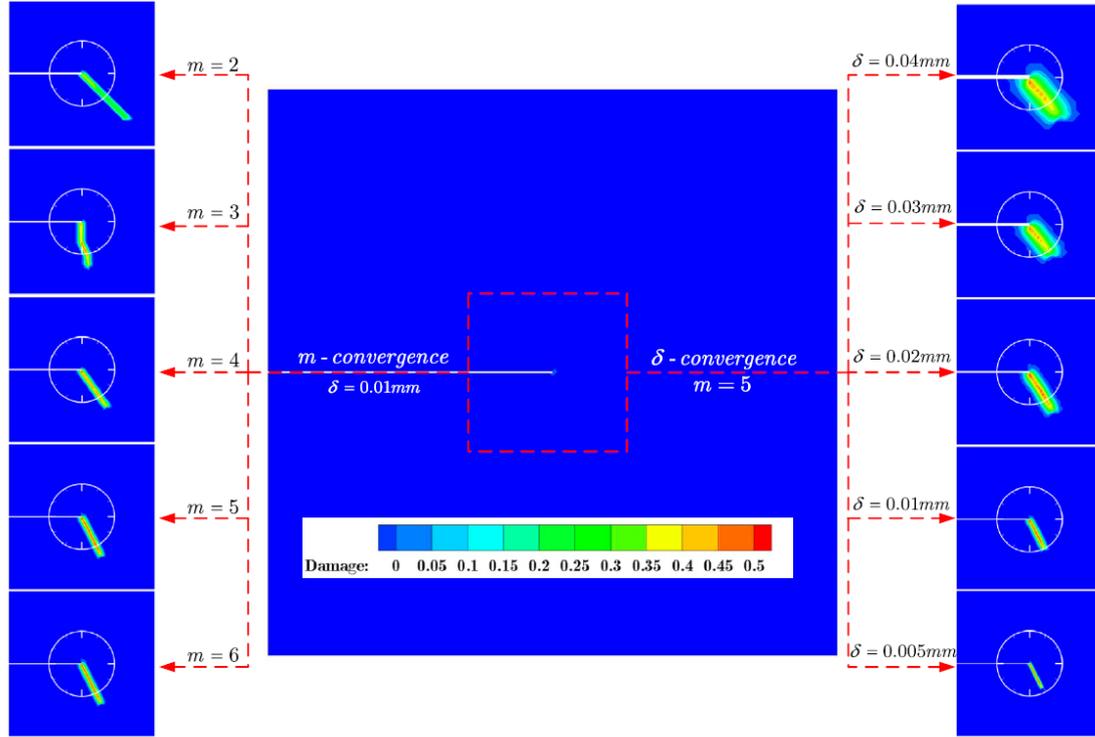
Casi più complessi, invece, richiedono necessariamente  $\delta < 1mm$ .

Si vuole concludere questa sezione allegando un'immagine (figura 5.5) tratta da [22], in cui è stata simulata la propagazione di una cricca sfruttando entrambe le tecniche di convergenza.

Nel caso della  $m$ -convergenza (sinistra), valori bassi di  $m$  comportano risultati inaffidabili. La cricca, per esempio nel caso  $m = 3$ , segue la direzione verticale di discretizzazione.

Nel caso della  $\delta$ -convergenza (destra), invece, valori alti dell'orizzonte causano un forte allargamento della zona soggetta alla propagazione della cricca.

Tutto ciò sottolinea quanto sia importante la scelta dei parametri.



**Figura 5.5:** Propagazione di una cricca secondo le due tecniche di convergenza. Figura tratta da [22].

## 5.5 Risoluzione del modello dinamico FEM-PD

La simulazione della propagazione della cricca può essere effettuata mediante l'implementazione di un modello dinamico FEM-Peridinamica.

Grazie alla tecnica d'accoppiamento scelta, è possibile definire una matrice di rigidità globale che consideri sia i nodi FEM sia quelli peridinamici. Il comportamento del modello sarà quindi descritto dall'espressione (3.5), dove la matrici non si riferiscono più al singolo elemento ma all'intera struttura. Inoltre, in questo lavoro di tesi, non si è previsto l'uso di alcun smorzamento, quindi l'espressione assume la seguente forma:

$$[\mathbf{M}_s]\ddot{\mathbf{u}}_s + [\mathbf{K}_s]\mathbf{u}_s = [\mathbf{M}_s]\ddot{\mathbf{u}}_s + \mathbf{F}_{int} = \mathbf{F}_{ext} \quad (5.8)$$

dove  $[\mathbf{M}_s]$  è la matrice di massa costituita dalle masse associate a tutti i nodi della struttura,  $\mathbf{F}_{int}$  il vettore delle forze interne derivanti dalla rigidità della struttura e  $\mathbf{F}_{ext}$  il vettore delle forze esterne.

Essendo un modello dinamico, gli spostamenti  $\mathbf{u}$  di un nodo non variano solo in base alla posizione ma anche al tempo. È un problema non stazionario e questo lo si può notare dal fatto che l'espressione (5.8) richieda la conoscenza dell'accelerazione dei nodi. Quindi, il modello dev'essere discretizzato sia nel dominio spaziale sia in quello temporale. Nella simulazione, il tempo non è continuo ma suddiviso in numerosi istanti temporali.

Nella trattazione che segue, si usa il pedice  $h$  per indicare l'istante di tempo attuale, mentre  $h - 1$  e  $h + 1$  si riferiscono rispettivamente all'istante precedente e successivo ad  $h$ . Tra due istanti sussiste un intervallo di tempo  $\Delta t$ .

I metodi numerici che permettono di modellare il comportamento meccanico di un corpo nel tempo, cioè di poter identificare il vettore spostamento all'istante successivo  $\mathbf{u}_{h+1}$ , possono essere divisi in due categorie [2]:

- **Espliciti**

Questi metodi sono chiamati *espliciti* perché definiscono il vettore spostamento  $\mathbf{u}_{h+1}$  in funzione di spostamenti, velocità ed accelerazioni degli istanti precedenti, quindi noti o ipotizzati come condizione iniziale. Sono *condizionatamente stabili*, cioè vanno a convergenza solo se il  $\Delta t$  usato per la discretizzazione è inferiore ad un preciso valore critico, la cui identificazione non è sempre immediata. Nonostante richiedano molte iterazioni, questi metodi sono alquanto rapidi e poco esosi di risorse computazionali. Per questo motivo, sono tra i più usati.

- **Impliciti**

Si parla di metodo *implicito* quando il vettore spostamento  $\mathbf{u}_{h+1}$  è funzione sia di spostamenti, velocità ed accelerazioni degli istanti precedenti  $h - 1$  sia delle velocità ed accelerazioni degli istanti successivi  $h + 1$ . Vengono definiti *incondizionatamente stabili* perché la loro convergenza non dipende dall'intervallo di tempo  $\Delta t$ . Richiedono meno iterazioni ma ognuna di esse ha un elevato costo computazionale e quindi necessitano di più tempo.

In questo lavoro si è deciso d'implementare un metodo esplicito, basato sulla differenziazione centrale classica (in inglese *Classical Central Differences*).

Viene definito a *differenziazione centrale* perché le velocità e le accelerazioni sono ottenute tramite una serie di differenze tra gli spostamenti nei vari istanti temporali.

Alla base del metodo ci sono le seguenti espressioni:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{u}}_h &= \frac{1}{2\Delta t}(\mathbf{u}_{h+1} - \mathbf{u}_{h-1}) \\ \ddot{\mathbf{u}}_h &= \frac{1}{\Delta t^2}(\mathbf{u}_{h+1} - 2\mathbf{u}_h + \mathbf{u}_{h-1})\end{aligned}\tag{5.9}$$

Sfruttando (5.9), è possibile riscrivere la (5.8) in modo che sia discretizzata nel tempo e che ad ogni iterazione ci possa restituire il vettore spostamento  $\mathbf{u}_{h+1}$ , che è in funzione degli spostamenti dell'iterazione precedente:

$$\frac{1}{\Delta t^2}[\mathbf{M}]\mathbf{u}_{h+1} = \mathbf{F}_{ext} - [\mathbf{K}]\mathbf{u}_h + \frac{1}{\Delta t^2}[\mathbf{M}](2\mathbf{u}_h - \mathbf{u}_{h-1})\tag{5.10}$$

In conclusione, essendo un metodo esplicito, è necessario calcolare un  $\Delta t_{critico}$ , oltre al quale non sia possibile la convergenza. Avendo a disposizione la matrice di rigidità globale, è possibile utilizzare le tecniche illustrate in [2].

Nel caso si volesse calcolare  $\Delta t_{critico}$  basandosi solamente sulla griglia peridinamica, allora è possibile definire [26, 29]:

$$\Delta t_{critico} = \sqrt{\frac{2\rho}{\sum_{p=1}^N \frac{c_p}{\|\xi_p\|} V_p}} > \Delta t \quad (5.11)$$

dove  $N$  è il numero di nodi famiglia nell'intorno del nodo sorgente,  $V_p$  il volume del nodo famiglia  $p$ -esimo,  $c_p$  il micromodulo,  $\|\xi_p\|$  la lunghezza del bond e  $\rho$  la densità del materiale.

## 5.6 Indice di danneggiamento del materiale

Uno dei vantaggi della teoria Peridinamica consiste nel poter simulare la propagazione di cricche pre-esistenti nella struttura in esame. Il processo di rottura viene concepito mediante la rottura dei bond peridinamici. In base a quelli che sono andati a rottura, è possibile determinare la direzione di propagazione del danno. Infatti, non tutti i bond all'interno dell'orizzonte vengono danneggiati.

È possibile introdurre un parametro  $\phi$  che definisca la gravità del danno per ogni singolo nodo sorgente della griglia peridinamica in funzione del numero di bond rotti nel proprio intorno.

Per un nodo sorgente avente coordinate  $\underline{x}$  al tempo  $t$ , l'indice di danneggiamento del materiale è così definito:

$$\phi(\underline{x}, t) = 1 - \frac{\int_{H_x} \mu(\xi, t) dV}{\int_{H_x} dV} \quad (5.12)$$

dove  $\mu$  è la funzione *history-dependant* associata ad ogni bond (2.25) e  $H_x$  l'intorno del nodo sorgente in questione.

L'indice  $\phi$  varia da 0 (nessun bond rotto nell'intorno) a 1 (tutti i bond sono danneggiati). Generalmente, i nodi sorgente che sono vicini ad una cricca presentano un indice di danneggiamento vicino a 0.5. Ciò significa che tutti i bond che intersecano la cricca sono danneggiati, mentre gli altri sono integri.

Nella sua versione discretizzata, l'indice  $\phi$  prevede l'uso delle sommatorie al posto degli integrali.

$$\phi(\underline{x}, t) = 1 - \frac{\sum_{q=1}^N \mu(\xi, t) V_q}{\sum_{q=1}^N V_q} \quad (5.13)$$

dove  $N$  è il numero di nodi famiglia nell'intorno mentre  $V_q$  è il volume associato al nodo famiglia  $q$ -esimo.

È possibile riadattare l'indice  $\phi$  affinché sia in grado di definire la gravità del danno nel caso dei soli bond fibra o matrice [9]. Questo risulta particolarmente utile nelle

simulazioni riguardanti gli impatti, dove sia le fibre sia la matrice vengono danneggiati.

Tuttavia, nella maggior parte dei casi, il danno avviene a livello di matrice, che è il costituente più debole del materiale composito, e quindi questa distinzione non è necessaria.

$$\begin{aligned}\phi(\underline{\mathbf{x}}, t)_f &= 1 - \frac{\sum_{q=1}^{N_f} \mu(\underline{\boldsymbol{\xi}}, t) V_q}{\sum_{q=1}^{N_f} V_q} \\ \phi(\underline{\mathbf{x}}, t)_m &= 1 - \frac{\sum_{q=1}^{N_m} \mu(\underline{\boldsymbol{\xi}}, t) V_q}{\sum_{q=1}^{N_m} V_q}\end{aligned}\tag{5.14}$$

dove  $N_f$  e  $N_m$  è il numero di bond fibra e matrice nell'intorno del nodo sorgente.

Nel caso dei laminati, l'indice del danno tiene conto anche della rottura dei bond interlamina e di taglio. Inoltre, è possibile ridefinire (5.14) affinché l'indice si riferisca solo ai bond interlamina o di taglio.

## 5.7 Diagramma a blocchi del codice usato

In quest'ultima sezione si vuole fornire una panoramica del funzionamento del codice preparato durante il lavoro di tesi. In figura 5.6 è presente il diagramma a blocchi del codice, in cui sono riassunti gli step principali e gli script/function MATLAB che li eseguono.

Il cuore del codice è rappresentato dallo script MATLAB denominato *script\_initialization.m*, che si occupa di:

- **Inizializzare la simulazione**

Lo script contiene informazioni riguardanti le dimensioni geometriche e le proprietà meccaniche della lamina o del laminato. Vengono definiti i carichi, i vincoli e le caratteristiche della discretizzazione spaziale e temporale. In tutto ciò è coadiuvata dalle seguenti function:

- *gridder.m/quadder.m*: si occupano rispettivamente di discretizzare lo spazio della struttura e d'identificare gli elementi FEM partendo dai nodi appena creati.
- *bonder.m/bonder2.m*: si occupano della creazione della griglia peridinamica. In particolare, per ogni nodo peridinamico, vengono identificati i nodi famiglia e i rispettivi volumi. Per ogni bond viene calcolata la lunghezza e il corrispettivo micromodulo, che sarà diverso in base alla sua inclinazione.  
Nel caso dei laminati, si hanno altre due function (*bonder3.m/bonder4.m*) che si occupano di assegnare i valori peridinamici, calcolati per una lamina, ai nodi di tutte le altre costituenti il laminato.
- *dirichlet.m*: identifica i nodi che si trovano sul bordo della lamina, ai quali saranno applicate le condizioni di vincolo e carico.

- **Assemblare la matrice di rigidità iniziale della struttura**

Alla prima iterazione, l'intera griglia peridinamica è inattiva, quindi la matrice

di rigidezza è costituita solo da elementi FEM. La function *fem\_stiffer\_1.m* si occupa di assemblare le matrici di rigidezza degli elementi FEM (ottenute tramite la function *fem\_elem\_stiffer.m*) per ottenere la matrice di rigidezza della struttura.

Nel caso dei laminati, si utilizza un ulteriore function (*laminated\_stiffer.m*) per calcolare la matrice d'elasticità del laminato in esame.

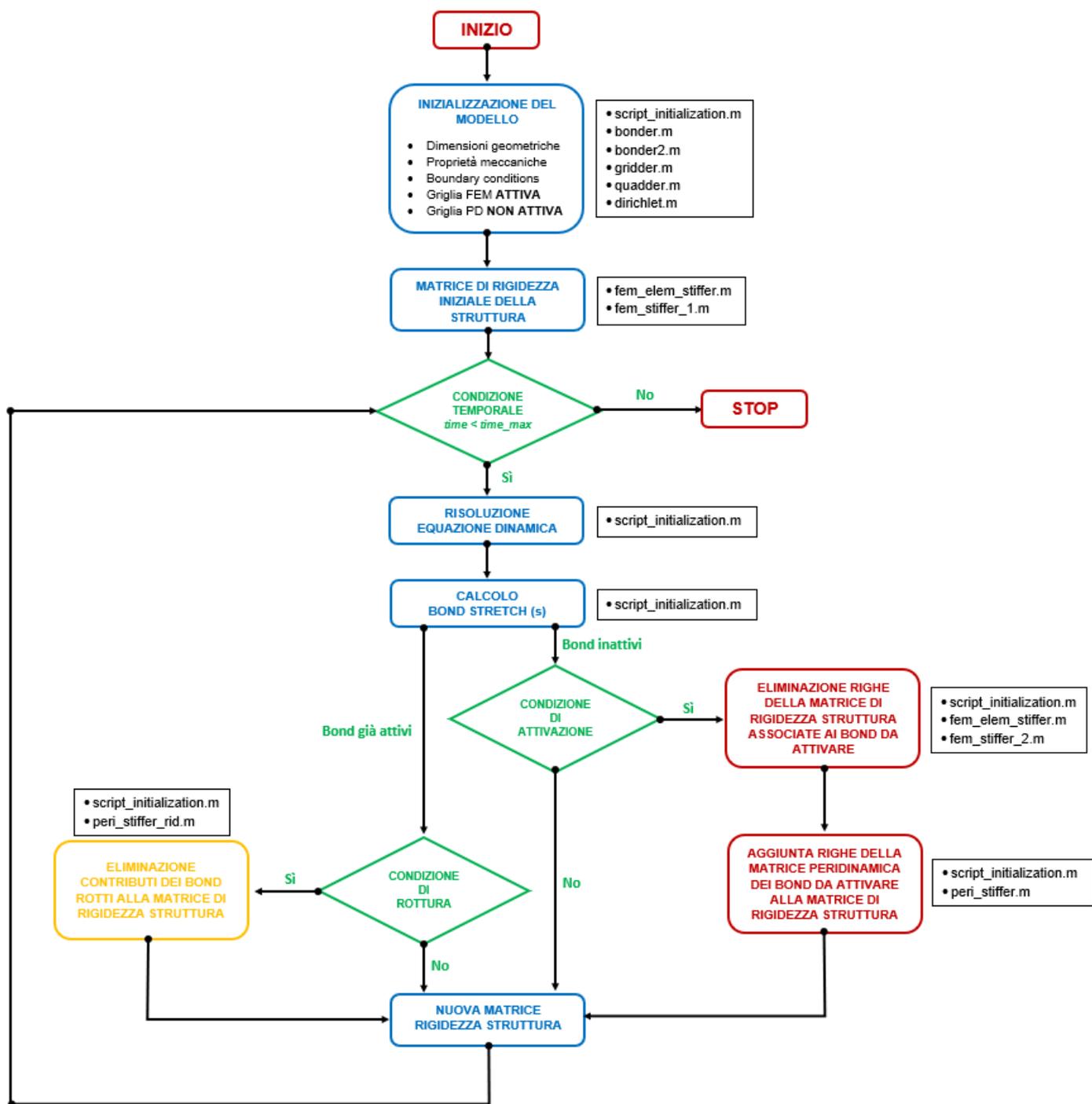
- **Eeguire il ciclo iterativo del modello dinamico**

Nello script viene risolta l'espressione (5.10) fino al raggiungimento del tempo massimo di simulazione. Viene calcolato il *bond stretch* di ogni bond e, successivamente, verificata la condizione di attivazione e rottura.

Riguardo a quest'ultimo punto, lo script è coadiuvato da tre function:

- *peri\_stiffer.m*: si occupa della creazione degli elementi asta peridinamici associati ai bond attivati.
- *fem\_stiffer\_2.m*: provvede all'identificazione delle righe della matrice di rigidezza globale associate agli elementi FEM che vengono sostituiti dagli elementi peridinamici appena attivati. Queste verranno poi cancellate.
- *peri\_stiffer\_rid.m*: si occupa di identificare le righe della matrice di rigidezza globale associate ai bond peridinamici che sono stati classificati come *rotti*. Queste righe verranno poi eliminate.

Nel capitolo successivo, che riguarda i risultati delle simulazioni di prova, verranno fornite informazioni riguardanti l'efficienza computazionale.



**Figura 5.6:** Diagramma a blocchi del codice per lo studio del comportamento meccanico di lamine e laminati.

## Capitolo 6

# Validazione del codice

In questo capitolo vengono presentati i risultati delle simulazioni che sono effettuate per verificare il corretto funzionamento del codice. Le simulazioni sono state realizzate variando, di caso in caso, l'orientazione delle fibre, la collocazione dei carichi e la posizione della cricca iniziale. Inoltre, sono state implementate delle simulazioni in cui si è dimostrato l'aumento di accuratezza causato dall'impiego della tecnica di  $\delta$ -convergenza.

Tutte le simulazioni sono state realizzate usando un laptop dotato di processore Intel i7-6500U (fino a 3.10 GHz) e 12 GB di memoria RAM.

Gran parte del *post-processing* è stato effettuato mediante l'uso del software open-source PARAVIEW, i cui file d'input (*.vtk*) sono stati realizzati convertendo i risultati ottenuti in MATLAB con uno script redatto in *python*.

### 6.1 Proprietà meccaniche del materiale

Affinché il modello sia il più accurato possibile per poter simulare il comportamento meccanico della struttura, è necessario disporre di numerose informazioni riguardanti il materiale. Questo è particolarmente importante per i tassi di rilascio d'energia critica  $G_0$ , che influenzano il valore dei *bond stretch* critici e quindi il processo di propagazione della cricca.

Dopo un'accurata ricerca, si è deciso di utilizzare, per tutte le simulazioni, la lamina M55J/M18 in fibra di carbonio e matrice epossidica [12, 1]. Si è scelta questa lamina perché, negli studi consultati, era l'unica di cui venivano forniti tutti i parametri necessari per inizializzare correttamente la simulazione.

Questa lamina è stata usata anche per l'assemblaggio dei laminati simulati in questa tesi.

Le proprietà meccaniche sono riassunte nella seguente tabella (6.1).

Proprietà - M55J/M18	
Modulo di Young $E_1$ [GPa]	329
Modulo di Young $E_2$ [GPa]	6
Modulo di taglio $G_{12}$ [GPa]	4.4
Coefficiente di Poisson $\nu_{12}$	0.346
Tasso rilascio energia $G_{IC,1}$ [J/m <sup>2</sup> ]	15490
Tasso rilascio energia $G_{IC,2}$ [J/m <sup>2</sup> ]	168
Densità $\rho$ [kg/m <sup>3</sup> ]	1630

**Tabella 6.1:** Proprietà meccaniche della lamina usata nelle simulazioni [12].

Avendo usato la versione *bond-based* della teoria Peridinamica, il modulo di taglio e il coefficiente di Poisson usati nella simulazione non sono uguali a quelli in tabella 6.1. Per chiarimenti, si faccia riferimento al capitolo due.

Lo spessore della lamina è pari a  $t = 0.1 \text{ mm}$ .

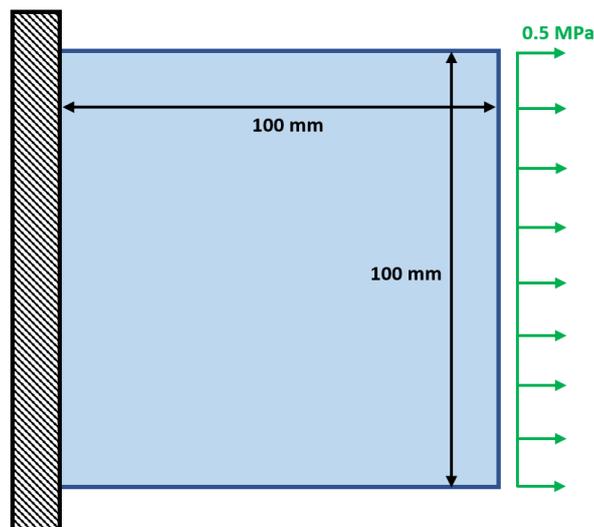
## 6.2 Test 1 - Lamina integra

Il primo passo nella validazione del codice consiste nel simulare il comportamento meccanico di una lamina non danneggiata, vincolata nel bordo sinistro e posta in trazione in quello destro (figura 6.1).

Non avendo cricche iniziali, è possibile confrontare i risultati del modello FEM-Peridinamica implementato con quelli di un modello puramente FEM.

Tra i risultati ci saranno delle differenze a causa della diversa natura delle due teorie usate: non-locale per la Peridinamica e locale per la teoria classica del continuo.

Sono state svolte tre simulazioni, ognuna delle quali riferita ad una diversa inclinazione delle fibre della lamina.



**Figura 6.1:** Lamina quadrata non danneggiata usata per il confronto.

La lamina è stata discretizzata con un  $\Delta x = 0.5 \text{ mm}$ . Per la griglia peridinamica, si è utilizzato un parametro  $m$  pari a 5. In totale ci sono 40401 nodi, di cui 3721 sono peridinamici.

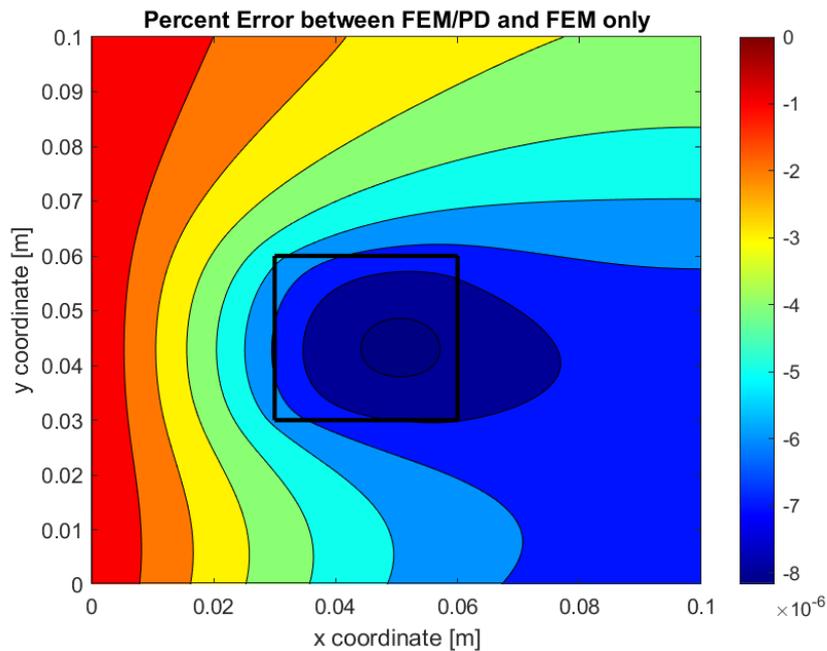
In tutti e tre i casi, si utilizzato un carico distribuito pari a 0.5 MPa.

Si ricorda che la rigidezza della lamina è fortemente influenzata dall'inclinazione delle fibre, che è riferita all'asse orizzontale.

### 6.2.1 Test 1A - Inclinazione di $90^\circ$

In questo caso, le fibre sono perpendicolari al carico applicato.

Dalla figura 6.2 si può constatare come l'errore percentuale, calcolato tra gli spostamenti del modello FEM-Peridinamico e il modello solamente FEM abbia globalmente un ordine di grandezza pari a  $10^{-6}$ . L'errore maggiore, nonostante non abbia un ordine di grandezza diverso, si concentra nella zona in cui è stata implementata la griglia peridinamica (quadrato nero).



**Figura 6.2:** Errore relativo percentuale tra il modello FEM-PD e solamente FEM nel test 1A.

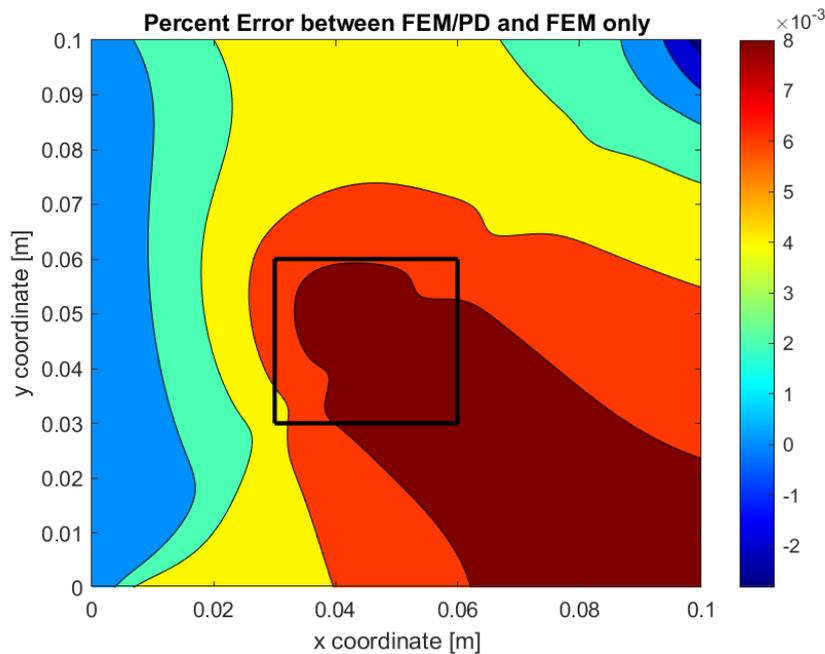
## 6.2.2 Test 1B - Inclinazione di 45°

In questo caso, le fibre hanno un'inclinazione di 45° rispetto all'orizzontale. L'errore percentuale ottenuto (figura 6.3) è molto più alto rispetto al caso precedente ed è sull'ordine di grandezza di  $10^{-3}$ . Nello specifico, i valori più alti vengono riscontrati sempre nella zona peridinamica, per poi propagarsi perpendicolarmente alla direzione delle fibre.

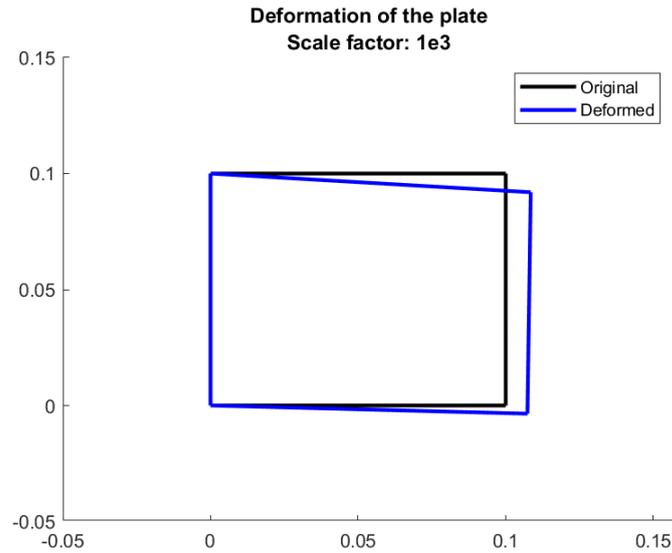
Per garantire una corretta comprensione di come si sia deformata la lamina, si è deciso di allegare l'immagine della deformazione (figura 6.4), prima e dopo l'applicazione del carico.

Probabilmente ciò è causato dal modello peridinamico usato, che può avere maggiori difficoltà nel simulare lamine non aventi fibre inclinate di 0°/90°.

Ciononostante, l'errore percentuale complessivo è ancora ridotto quindi il modello FEM-PD implementato risulta valido.



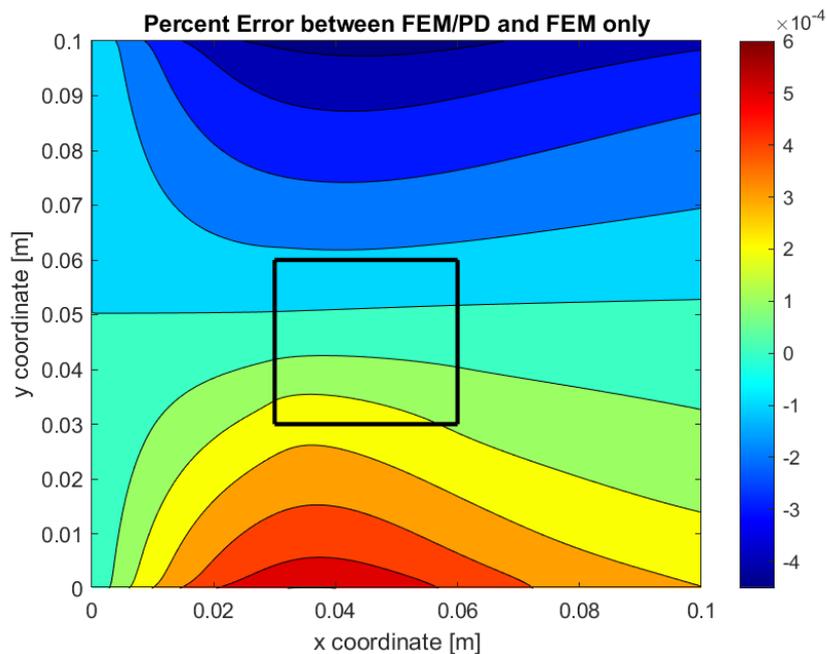
**Figura 6.3:** Errore relativo percentuale tra il modello FEM-PD e solamente FEM nel test 1B.



**Figura 6.4:** Deformazione della lamina nel test 1B.

### 6.2.3 Test 1C - Inclinazione nulla

In quest'ultimo test, le fibre hanno la stessa orientazione del carico. Rispetto alle situazioni precedenti, non vi è alcuna concentrazione dell'errore percentuale nella zona peridinamica. Complessivamente, l'errore ha un ordine di grandezza pari a  $10^{-4}$ , che rende valido il modello FEM-Peridinamica implementato.



**Figura 6.5:** Errore relativo percentuale tra il modello FEM-PD e solamente FEM nel test 1C.

## 6.3 Test 2 - Lamina con cricca centrale e carico laterale

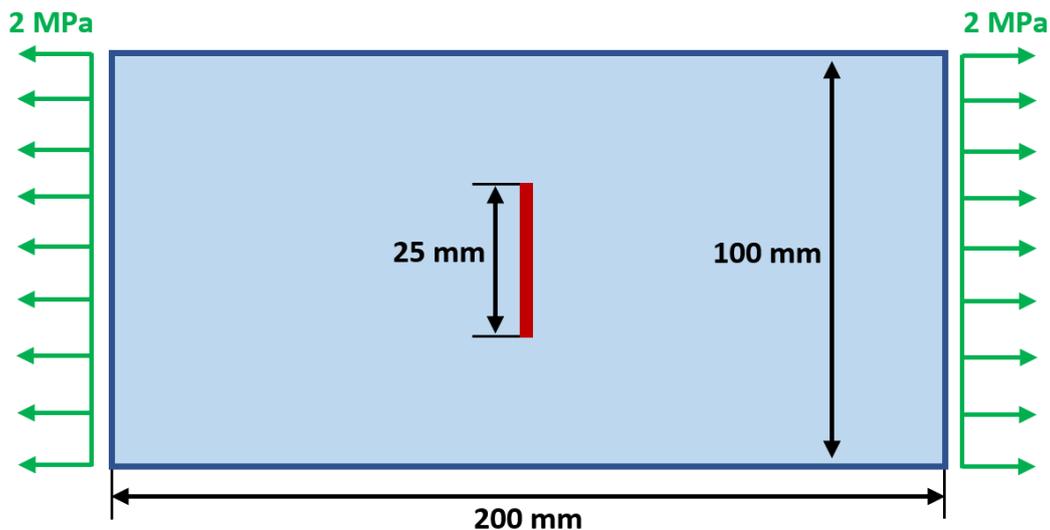
In questa sezione vengono presentati i risultati riguardanti la simulazione di una lamina caratterizzata da una cricca centrale e un carico applicato sui due lati verticali. Sono state effettuate tre simulazioni, ognuna delle quali riferita ad una diversa orientazione delle fibre.

In tutti e tre i casi, si è usato un parametro  $m = 5$  e *grid-spacing*  $\Delta x = 0.5 \text{ mm}$ . Questo è stato fatto sia per evitare una richiesta troppo elevata di risorse computazionali sia per ottenere un buon livello di accuratezza nella simulazione del processo di rottura.

Prima di presentare i risultati, si fa presente come l'inclinazione delle fibre sia riferita all'asse orizzontale.

### 6.3.1 Test 2A - Inclinazione di $90^\circ$

La configurazione mostrata nella figura 6.6 coincide con quella presentata da Hu e Bobaru in [12]. Si ha una lamina rettangolare, a cui sono applicati due carichi distribuiti. Le fibre hanno un'inclinazione di  $90^\circ$  rispetto all'orizzontale.



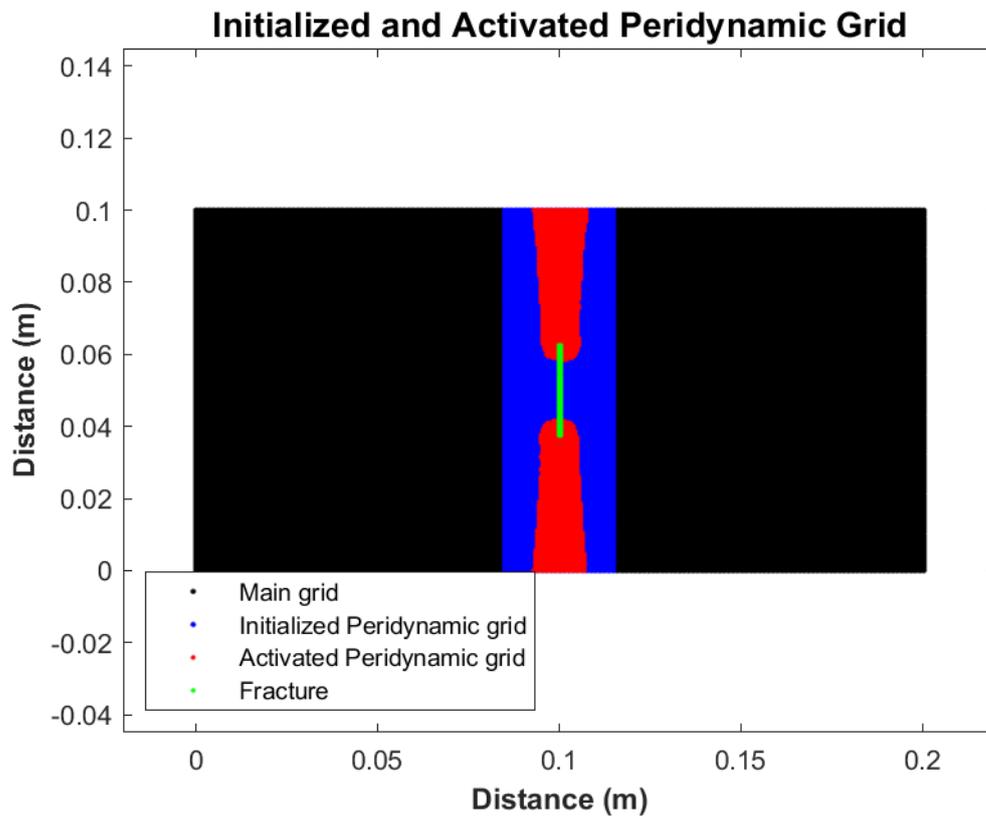
**Figura 6.6:** Lamina rettangolare con cricca centrale e fibre inclinate di  $90^\circ$  rispetto all'orizzontale.

Nella tabella 6.2 sono riassunte le caratteristiche computazionali del modello e della simulazione.

Come si può osservare nella tabella 6.2, l'algoritmo di *grid-adapting* è stato molto utile per ridurre al minimo il numero di nodi peridinamici necessari per la simulazione. Infatti, quelli attivati sono solo il 31% di quelli inizializzati. Tutto ciò è evidente anche alla figura 6.7, dove si mostra la lamina discretizzata, insieme ai nodi peridinamici inizializzati (in blu) e attivati (in rosso).

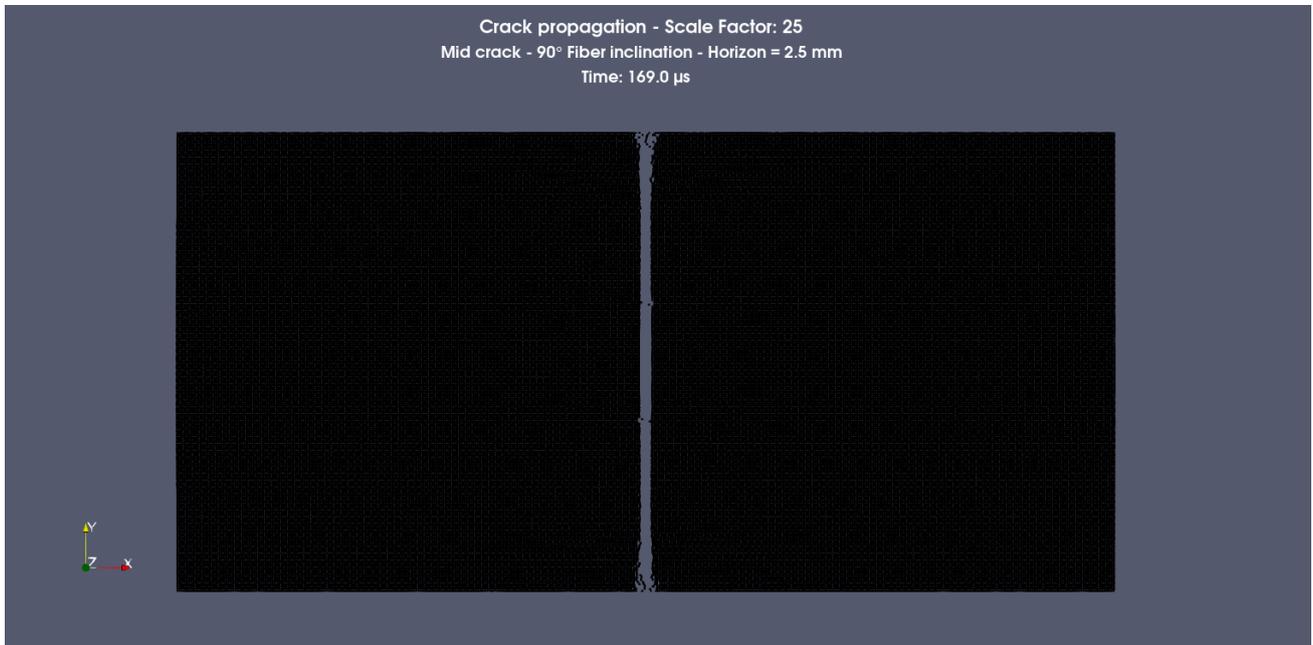
Proprietà computazionali	
Orizzonte $\delta$ [mm]	2.5
Grid-spacing $\Delta x$ [mm]	0.5
Parametro $m$	5
Nodi (FEM-PD)	80802
Nodi PD inizializzati	12261
Nodi PD attivati	3792
Intervallo di tempo $\Delta t$ [ns]	35
Tempo massimo simulato [ $\mu s$ ]	170
Tempo richiesto [s]	3429

**Tabella 6.2:** Proprietà computazionali del test 2A della lamina con cricca centrale.

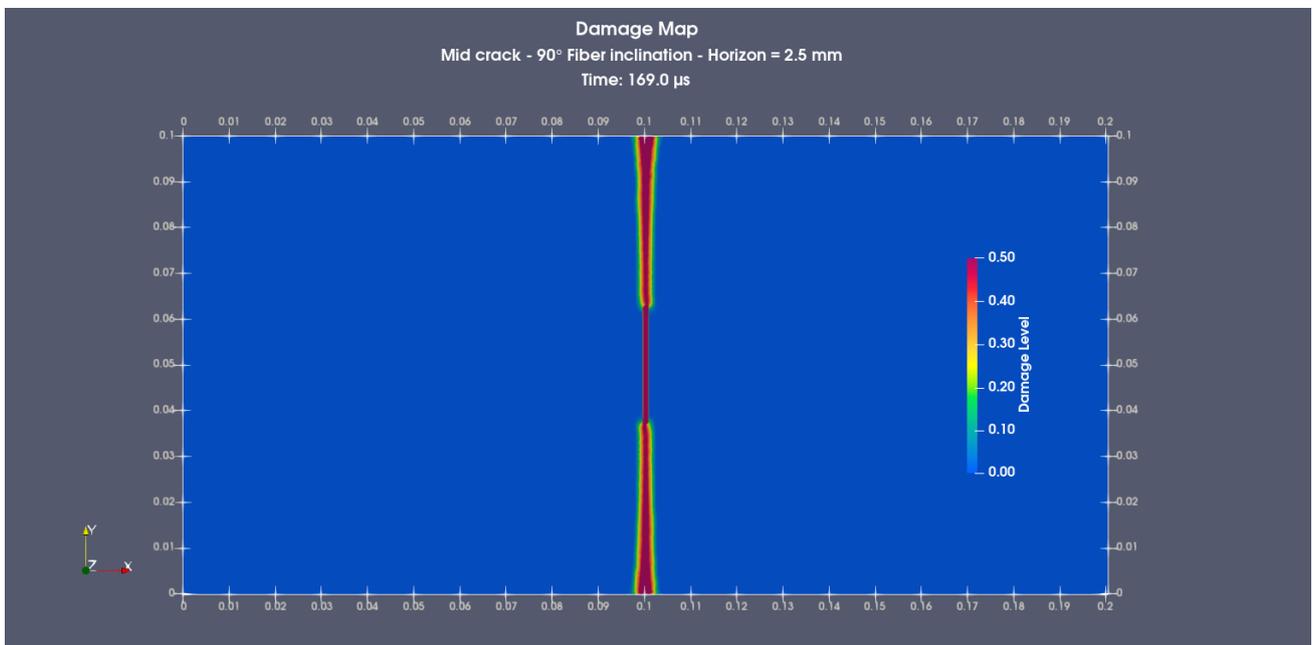


**Figura 6.7:** Nodi peridinamici inizializzati e attivati nel test 2A.

A questo punto, si presentano i risultati delle simulazioni. L'immagine 6.8 raffigura la lamina deformata, con uno *scale factor* pari a 25, mentre la figura 6.9 presenta il profilo del danno totale subito dalla lamina, realizzato mediante l'indice di danno definito in (5.13).



**Figura 6.8:** Deformazione della lamina nel test 2A.

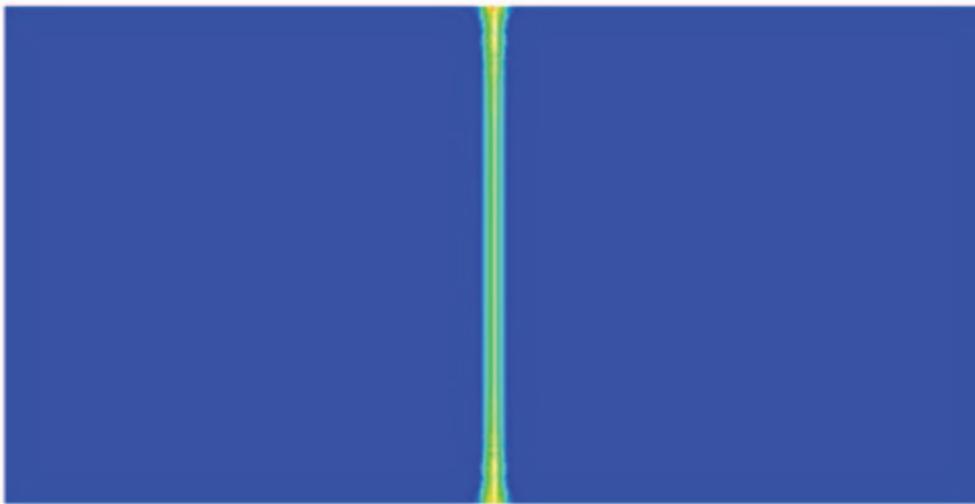


**Figura 6.9:** Profilo del danno subito dalla lamina nel test 2A.

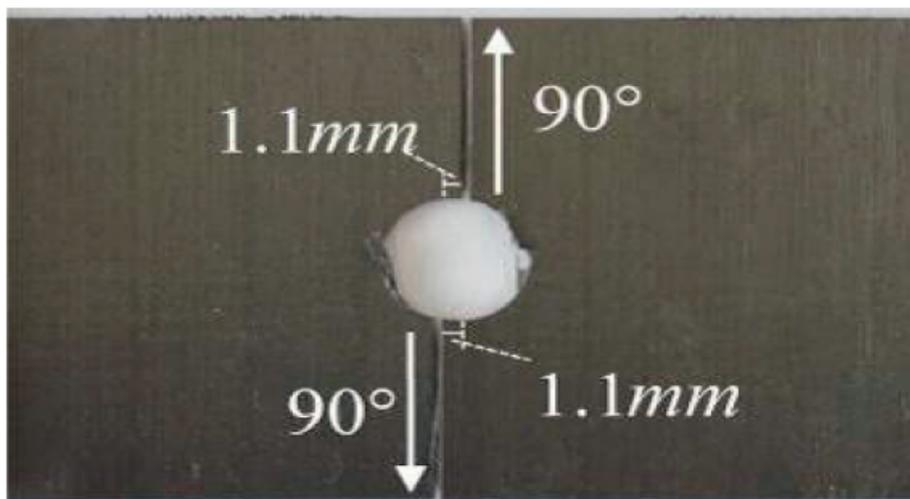
Il percorso di propagazione della cricca coincide con quello ottenuto da Bobaru [12] (figura 6.10) a parità di condizioni.

Essendo la matrice il componente più debole della lamina, era previsto che la cricca si propagasse lungo la direzione delle fibre, più precisamente nello spazio ristretto che sussiste tra le fibre stesse. Questo comportamento è confermato anche da diverse prove sperimentali (figura 6.11).

Dal profilo del danno (figura 6.9) è possibile notare un allargamento della cricca in prossimità del bordo superiore ed inferiore. Questo è dovuto agli effetti di bordo, che si verificano a causa della sovrastima del volume associato ai nodi peridinamici periferici. Nel modello FEM-Peridinamica, ciò si risolve imponendo che la griglia peridinamica non sia a contatto con i bordi del dominio. Nel nostro caso, si è voluto simulare la propagazione completa della cricca fino ai bordi del provino.



**Figura 6.10:** Propagazione della cricca nel caso 2A, secondo Bobaru et al. [12].

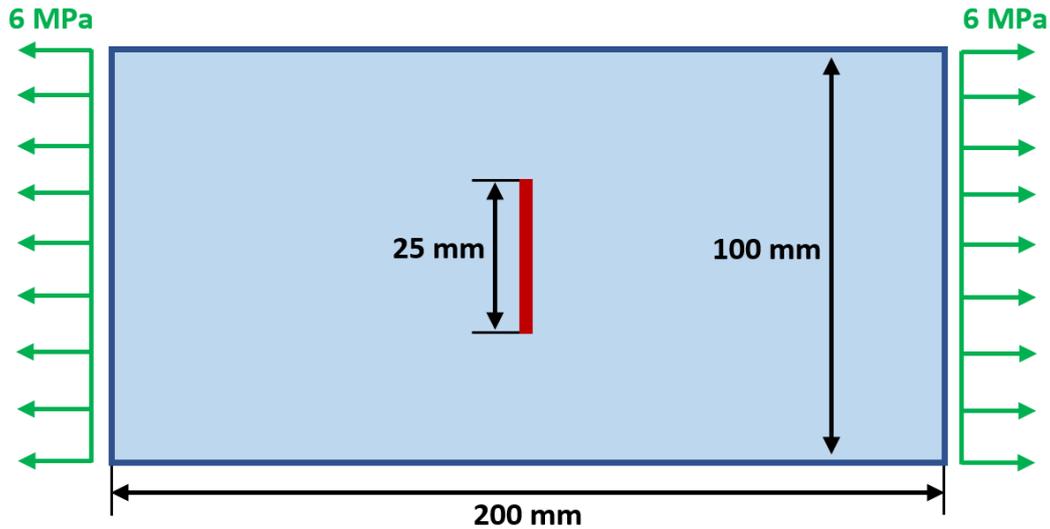


**Figura 6.11:** Esempio di lamina danneggiata da un carico perpendicolare alla direzione delle fibre. Immagine tratta da [9].

### 6.3.2 Test 2B - Inclinazione di 45°

Si utilizza la stessa configurazione del caso precedente, ad eccezione dell'inclinazione delle fibre e del carico applicato, che è maggiore (figura 6.12). Ciò è necessario perché le fibre iniziano ad allinearsi al carico e quindi la lamina diventa più rigida e resistente. Anche in questo caso, la configurazione coincide con quella usata da Bobaru et al. [12].

Si preannuncia che la simulazione di questo caso è alquanto complessa, perché questa particolare inclinazione delle fibre è responsabile di diversi processi di rottura.



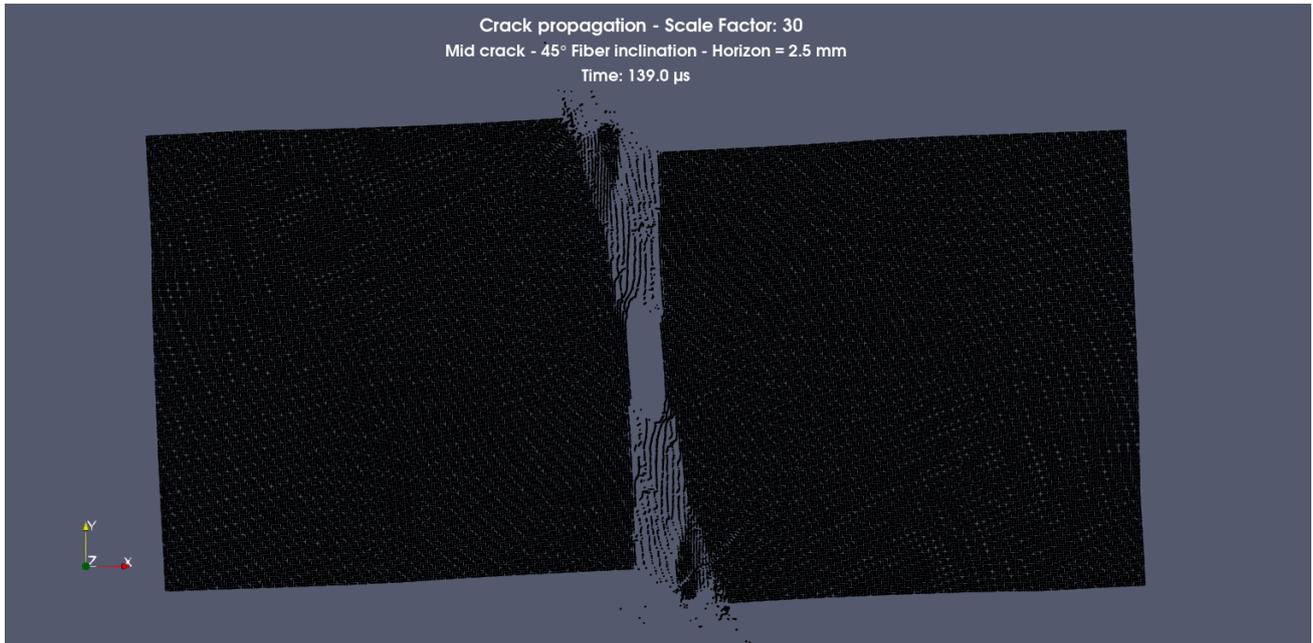
**Figura 6.12:** Lamina rettangolare con cricca centrale e fibre inclinate di 45° rispetto all'orizzontale.

Proprietà computazionali	
Orizzonte $\delta$ [mm]	2.5
Grid-spacing $\Delta x$ [mm]	0.5
Parametro $m$	5
Nodi (FEM-PD)	80802
Nodi PD inizializzati	40401
Nodi PD attivati	19622
Intervallo di tempo $\Delta t$ [ns]	35
Tempo massimo simulato [ $\mu s$ ]	140
Tempo richiesto [s]	8474

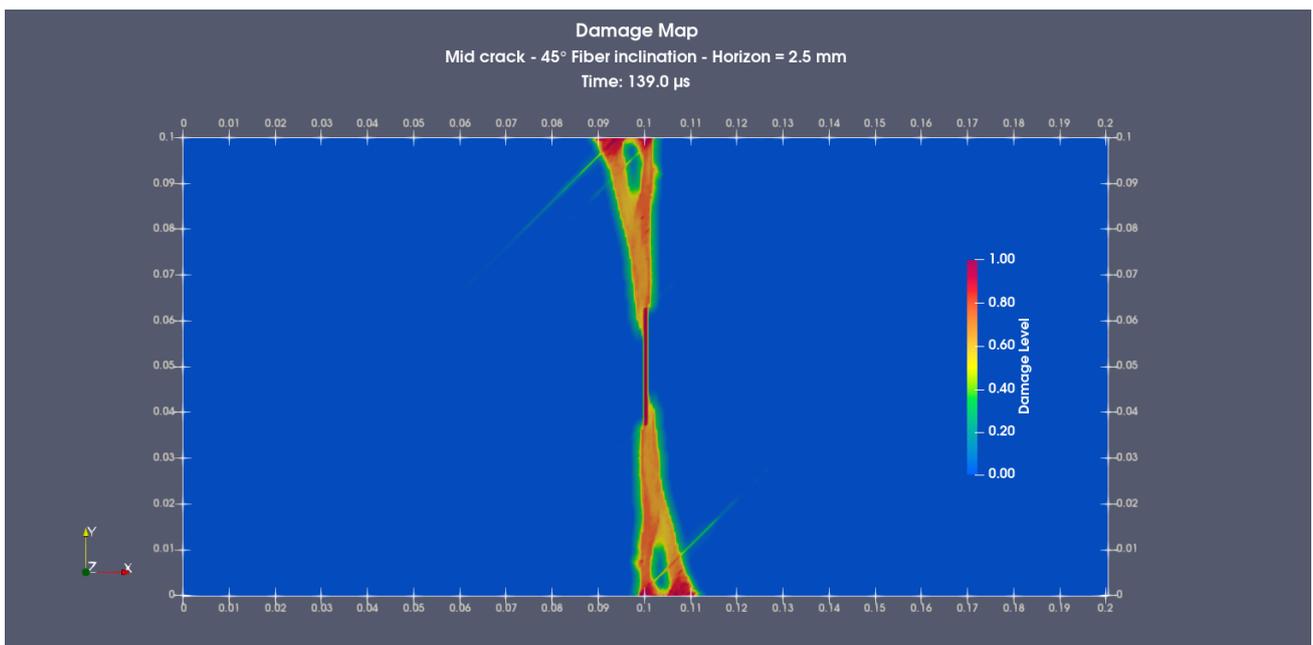
**Tabella 6.3:** Proprietà computazionali del test 2B della lamina con cricca centrale.

Dalla tabella 6.3, che riassume le caratteristiche del modello, si può notare come la griglia peridinamica implementata abbia dimensioni maggiori (il numero dei nodi peridinamici è aumentato) rispetto a quella del test 2A. Questo perché le fibre hanno un'inclinazione di  $45^\circ$  e quindi la propagazione della cricca coinvolge una parte molto ampia della lamina.

La figura 6.13 mostra la lamina deformata mentre la figura 6.14 si riferisce al profilo del danno totale.



**Figura 6.13:** Deformazione della lamina nel test 2B.



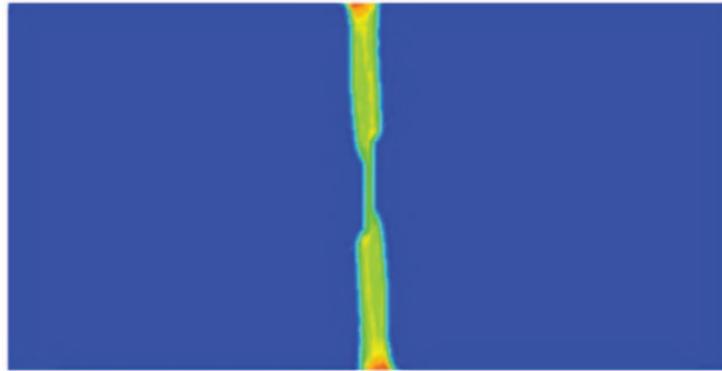
**Figura 6.14:** Profilo del danno subito dalla lamina nel test 2B.

Al contrario del caso precedente, non si sviluppa subito una cricca lungo la direzione delle fibre. Il primo passo consiste nella grave rottura della matrice che si trova in prossimità della cricca iniziale. Nello specifico, è possibile avere diverse microfrotture nella matrice lungo tutto l'asse trasversale. Si ritiene che questo fenomeno dipenda molto dalla tipologia di fibra e matrice usata, perché negli studi analizzati non sempre si presenta.

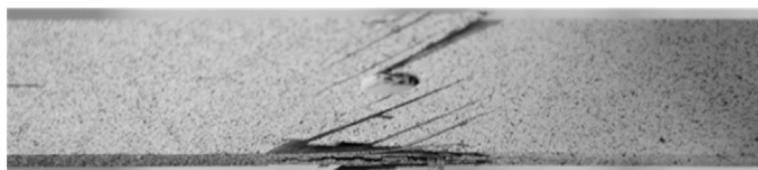
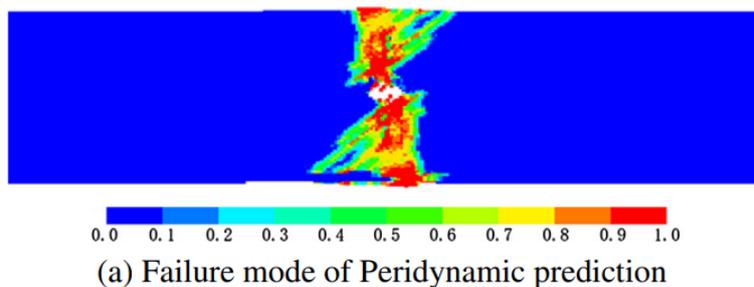
In un secondo tempo, si sviluppano le cricche lungo la direzione delle fibre ( $45^\circ$ ). Questo è ben visibile nel profilo del danno (figura 6.14), in particolare vicino ai bordi orizzontali.

Per poter simulare meglio questo fenomeno, sarebbe necessario sia una griglia molto più densa (ridotto *grid-spacing*) sia una discretizzazione temporale più fina (ridotto  $\Delta t$ ).

A causa delle ridotte risorse di calcolo e di tempo, non si è potuto procedere oltre. Tuttavia, i risultati ottenuti trovano riscontro sia nel lavoro di Bobaru [12] (figura 6.15), sia nelle prove sperimentali (figura 6.16).



**Figura 6.15:** Propagazione della cricca nel caso 2B, secondo Bobaru et al. [12].

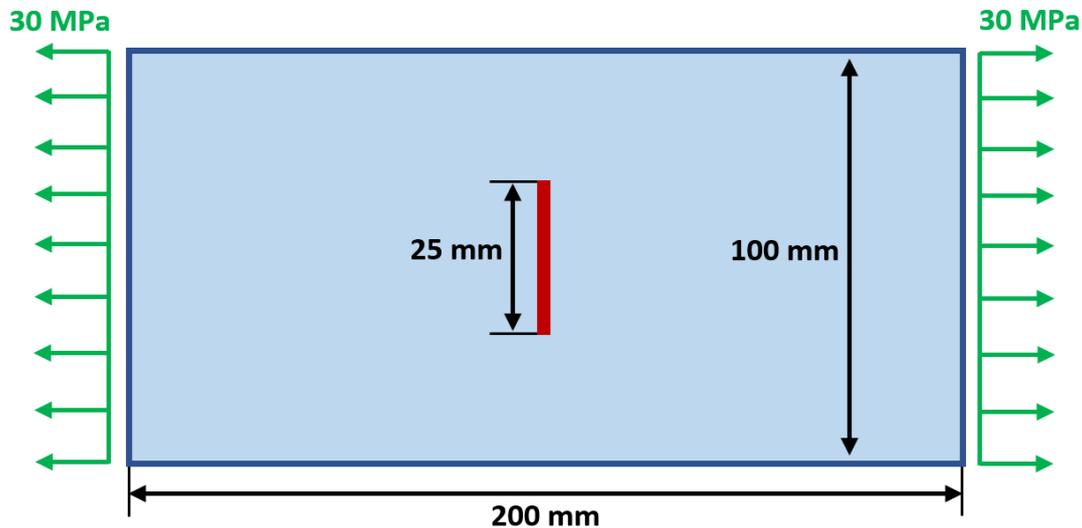


(b) Failure mode of experimental investigation

**Figura 6.16:** Esempio di laminato danneggiato. Si trascurino gli effetti di delaminazione e ci si concentri sui danni superficiali. Immagine tratta da [20].

### 6.3.3 Test 2C - Inclinazione nulla

Così come per il caso precedente, la seguente configurazione (figura 6.17) differisce solo per l'inclinazione delle fibre e il valore del carico applicato. Le fibre sono perfettamente allineate al carico, quindi è necessario uno sforzo di trazione alquanto elevato per poter dare origine al processo di rottura della lamina.



**Figura 6.17:** Lamina rettangolare con cricca centrale e fibre parallele all'asse orizzontale.

Al contrario dei casi precedenti, il carico è stato scelto in modo arbitrario per due motivi. Il primo riguarda il fatto che lo studio di Bobaru usato sinora come riferimento, non prevede l'analisi di lamine con fibre e carico allineati.

Il secondo è che gran parte degli studi prevede l'utilizzo di modelli puramente peridinamici, in cui i carichi sono definiti in modo diverso rispetto al metodo FEM. Mentre nella teoria Peridinamica, i carichi vengono associati a precisi volumi (periferici o totalmente interni) della lamina, nel metodo FEM la forzante esterna è assegnata solo ai nodi disposti sul bordo. Inoltre, negli studi spesso mancavano tutte le informazioni necessarie per poter definire correttamente i parametri peridinamici come i *bond stretch* critici.

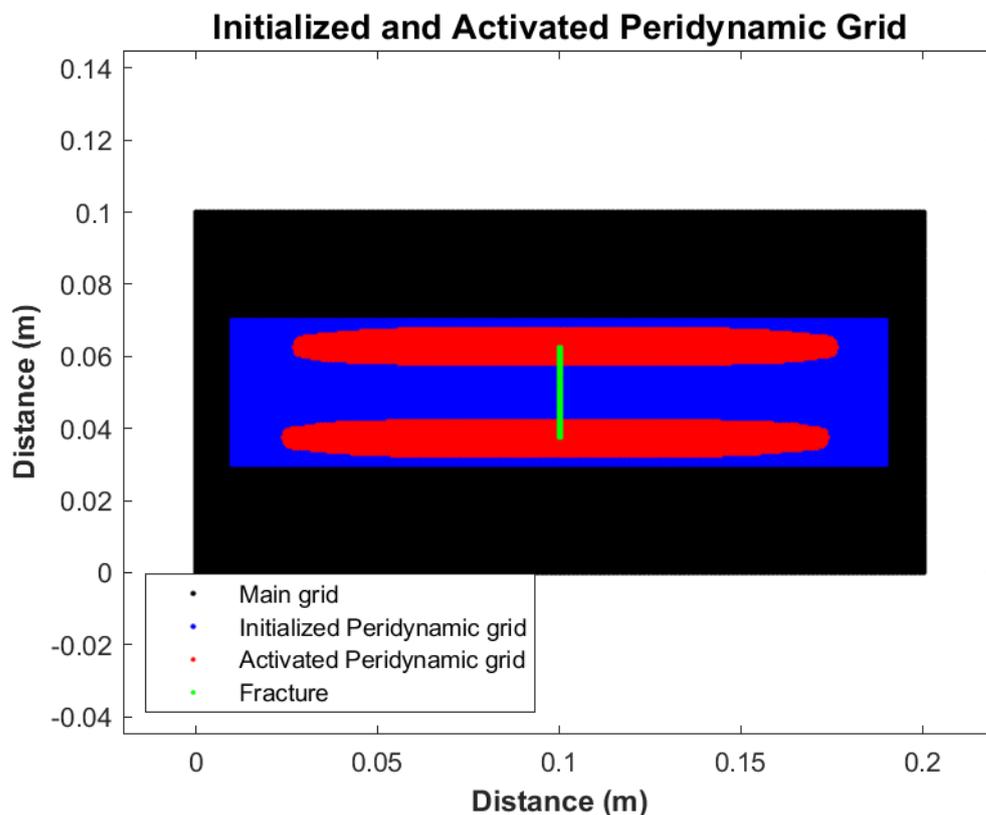
Per tutti questi motivi, è molto complesso confrontare simulazioni di diversi studi e generalmente si cerca di convalidare il codice attraverso una serie di indagini sperimentali.

Con questa simulazione si vuole verificare che la direzione di propagazione della cricca fosse corretta rispetto a casi simili riscontrabili in altri studi. Per fare ciò, non è necessario, almeno in prima approssimazione, che il valore del carico applicato sia uguale.

Come per i casi precedenti, la tabella 6.4 riassume tutti i dati inerenti la discretizzazione spaziale e temporale della lamina. La figura 6.18, invece, mostra il profilo d'attivazione dei nodi peridinamici.

Proprietà computazionali	
Orizzonte $\delta$ [mm]	2.5
Grid-spacing $\Delta x$ [mm]	0.5
Parametro $m$	5
Nodi (FEM-PD)	80802
Nodi PD inizializzati	29241
Nodi PD attivati	10892
Intervallo di tempo $\Delta t$ [ns]	35
Tempo massimo simulato [ $\mu s$ ]	150
Tempo richiesto [s]	11338

**Tabella 6.4:** Proprietà computazionali del test 2C della lamina con cricca centrale.

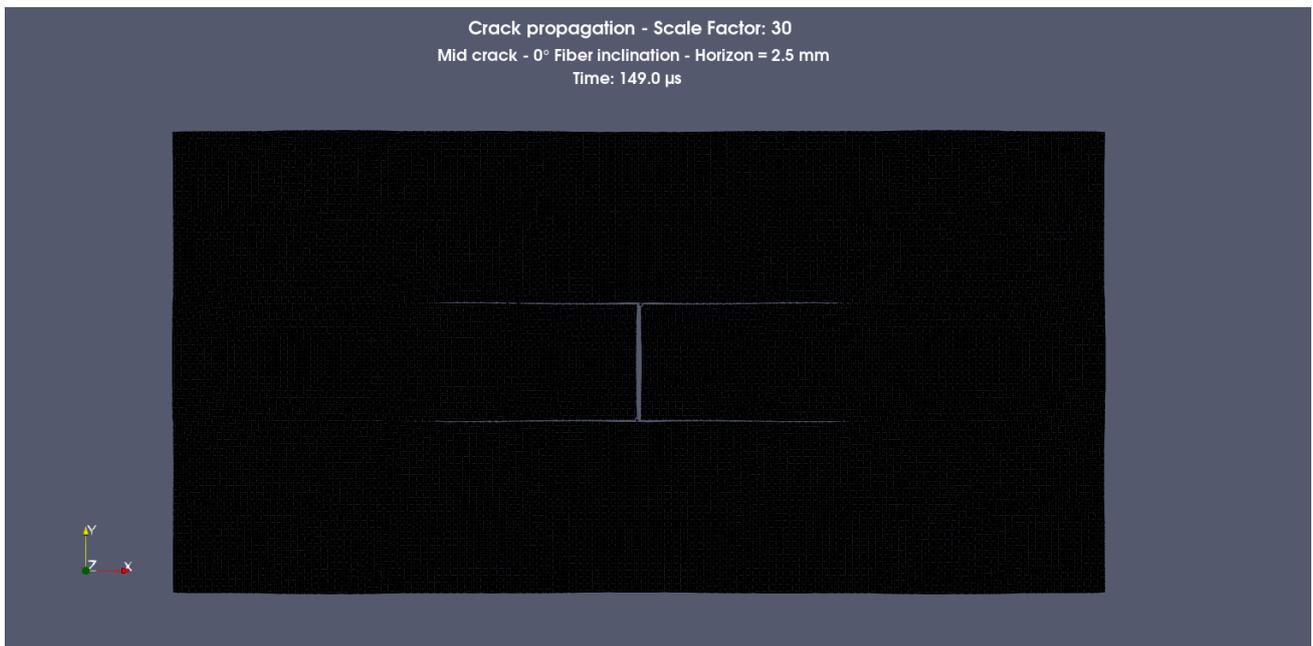


**Figura 6.18:** Nodi peridinamici inizializzati e attivati nel test 2C.

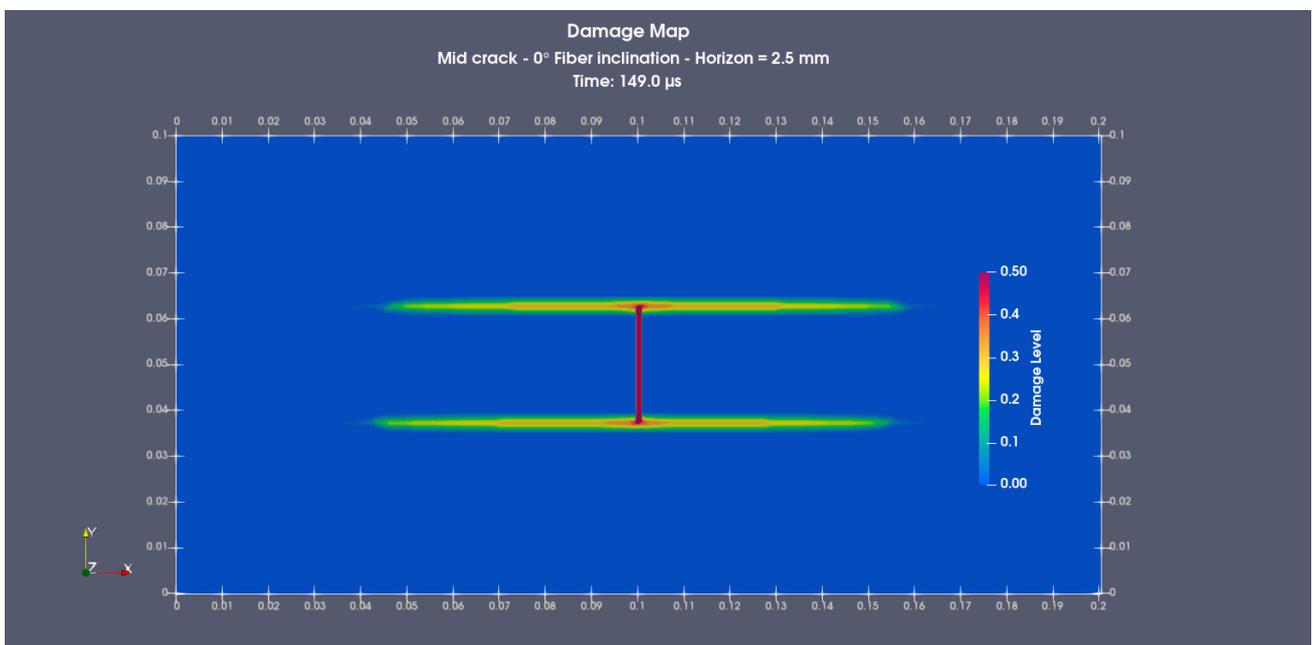
Sia dall'immagine raffigurante la lamina deformata (figura 6.19) sia dal profilo del danno totale (figura 6.20) è possibile osservare come dalla cricca iniziale, si propagano due cricche sottili e orizzontali. Essendo le fibre orientate come il carico, è molto difficile procurare un danno maggiore alla lamina.

Si fa presente che il carico usato in questo test sia quindici volte quello impiegato nel

caso 2A, con le fibre perpendicolari alla trazione. Ciò dimostra il forte contributo delle fibre alla rigidità dell'intero materiale.

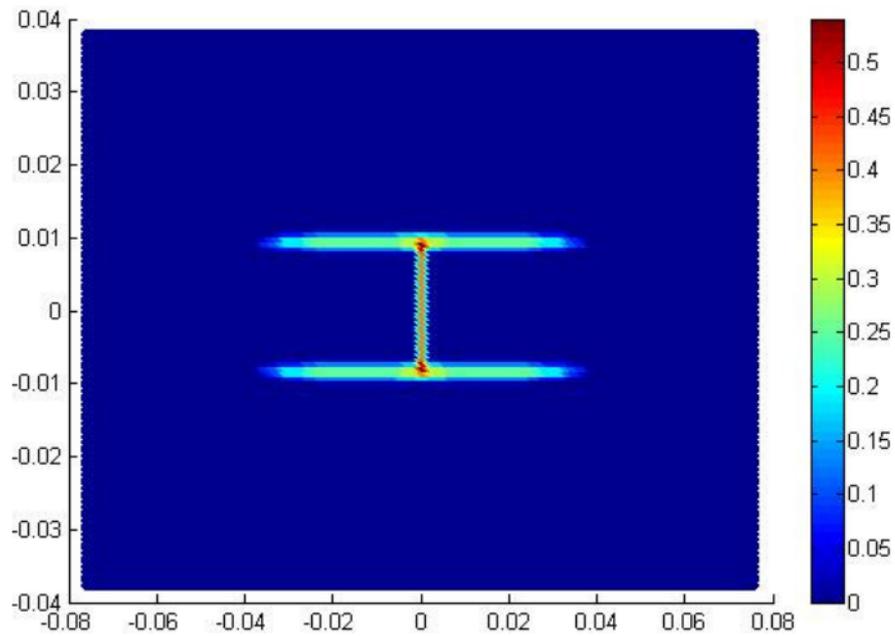


**Figura 6.19:** Deformazione della lamina nel caso 2C.

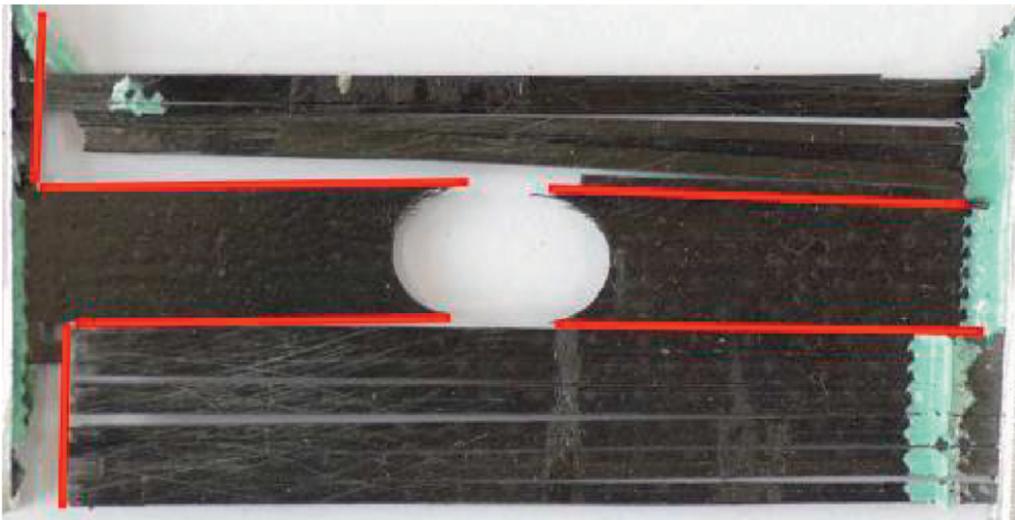


**Figura 6.20:** Profilo del danno subito dalla lamina nel caso 2C.

I risultati ottenuti sono qualitativamente concordi sia con quelli presentati da Madenci [23] (figura 6.21), sia con quelli ottenibili per via sperimentale (figura 6.22).



**Figura 6.21:** Propagazione della cricca nel caso 2C, secondo lo studio di Oterkus e Madenci [23].



**Figura 6.22:** Esempio di lamina danneggiata da un carico parallelo alla direzione delle fibre. Immagine tratta da [9].

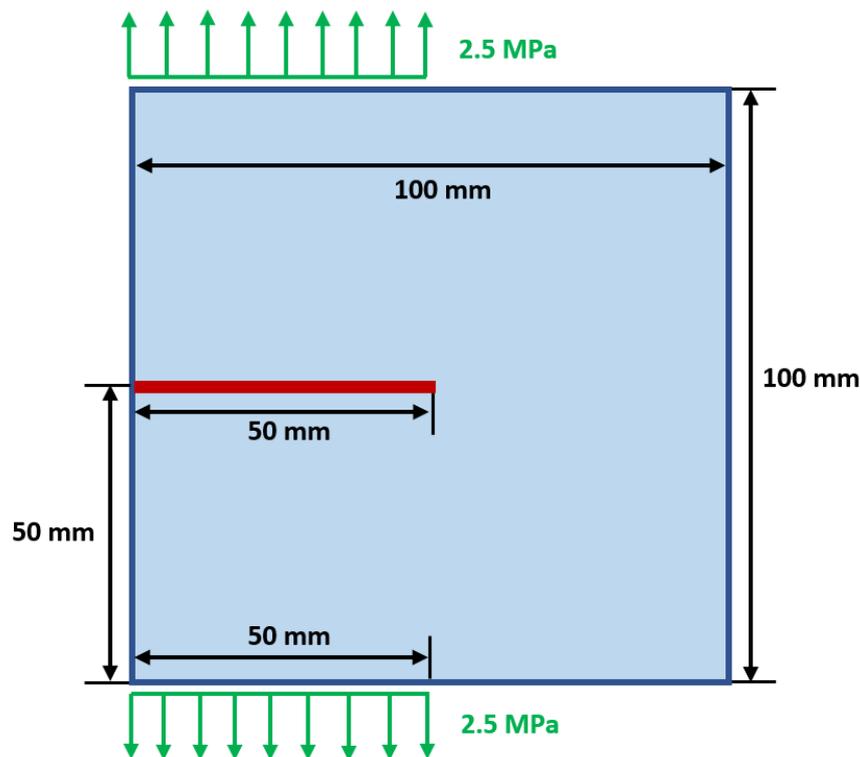
## 6.4 Test 3 - Lamina con cricca laterale e carico verticale

In questa sezione vengono commentati i risultati inerenti la simulazione di una lamina quadrata soggetta ad un modo di carico I, cioè ad un carico perpendicolare alla cricca iniziale. Nello specifico, la lamina presenta una cricca iniziale orizzontale ed è soggetta a due carichi distribuiti, applicati sul bordo superiore ed inferiore. Come nel caso 2C, l'ammontare del carico è stato scelto arbitrariamente. L'obiettivo è verificare che la cricca, in base all'inclinazione delle fibre, si propaghi nella giusta direzione.

Sono state scelte tre orientazioni delle fibre, e per ognuna di esse sono state realizzate quattro simulazioni. Le prime tre insieme rappresentano un esempio d'applicazione della tecnica di  $\delta$ -convergenza. Fissato il parametro  $m = 3$ , si è ridotta la dimensione dell'orizzonte  $\delta$  agendo sul *grid-spacing*  $\Delta x$ . L'intenzione è quella di dimostrare come questa strategia sia molto utile per migliorare l'accuratezza dei risultati.

La quarta simulazione, invece, è stata realizzata con un parametro  $m$  più alto, pari a 5. Ciò è stato fatto per verificare i vantaggi derivanti dall'uso di un  $m$  maggiore e per comprendere se analisi compiute con orizzonti più piccoli (nella terza simulazione  $\delta = 1.5 \text{ mm}$ ) possano fornire risultati paragonabili o migliori rispetto a quelli ottenuti con  $m$  ed orizzonte maggiori (nella quarta simulazione  $\delta = 2.5 \text{ mm}$  ma  $m = 5$ ).

In tutte le simulazioni, fatta eccezione per l'inclinazione delle fibre, si è usata la stessa configurazione, espressa in termini di dimensioni, materiale e carico applicato.



**Figura 6.23:** Configurazione del test 3.

### 6.4.1 Test 3A - Inclinazione di 90°

Si simula il comportamento meccanico di una lamina fratturata, con fibre inclinate di 90° rispetto all'orizzontale, soggetta al modo di carico I.

Nella tabella 6.5 sono riassunte tutte le informazioni riguardanti l'implementazione delle quattro simulazioni. Con  $a, b, c$  si fa riferimento a quelle riguardanti l'uso della tecnica della  $\delta$ -convergenza.

La lettera  $d$ , invece, fa riferimento alla simulazione realizzata con  $m = 5$  e il *grid-spacing* minore delle tre simulazioni precedenti, che è pari a  $\Delta x = 0.5\text{mm}$ .

Proprietà computazionali	a	b	c	d
Orizzonte $\delta$ [mm]	3	2.25	1.5	2.5
Grid-spacing $\Delta x$ [mm]	1	0.75	0.5	0.5
Parametro $m$	3	3	3	5
Nodi (FEM-PD)	10302	18225	40602	40602
Nodi PD inizializzati	2121	3645	8241	8241
Nodi PD attivati	1084	1437	2110	3694
Intervallo di tempo $\Delta t$ [ns]	50	50	35	35
Tempo massimo simulato [ $\mu\text{s}$ ]	200	200	200	200
Tempo richiesto [s]	324	559	1380	2748

**Tabella 6.5:** Proprietà computazionali delle quattro simulazioni riferite ai test 3A.

Guardando il tempo necessario per svolgere le varie simulazioni (ultima riga della tabella), si può subito notare come l'uso di un ridotto parametro  $m$  consente un risparmio considerevole di tempo. Tuttavia, dev'essere verificato che l'utilizzo di un parametro  $m$  più piccolo non pregiudichi eccessivamente l'accuratezza della soluzione. Come già descritto nel capitolo dell'implementazione numerica, valori di  $m$  troppo bassi possono causare degli effetti indesiderati come la falsa coincidenza della direzione di propagazione della cricca con gli assi di riferimento della griglia dei nodi.

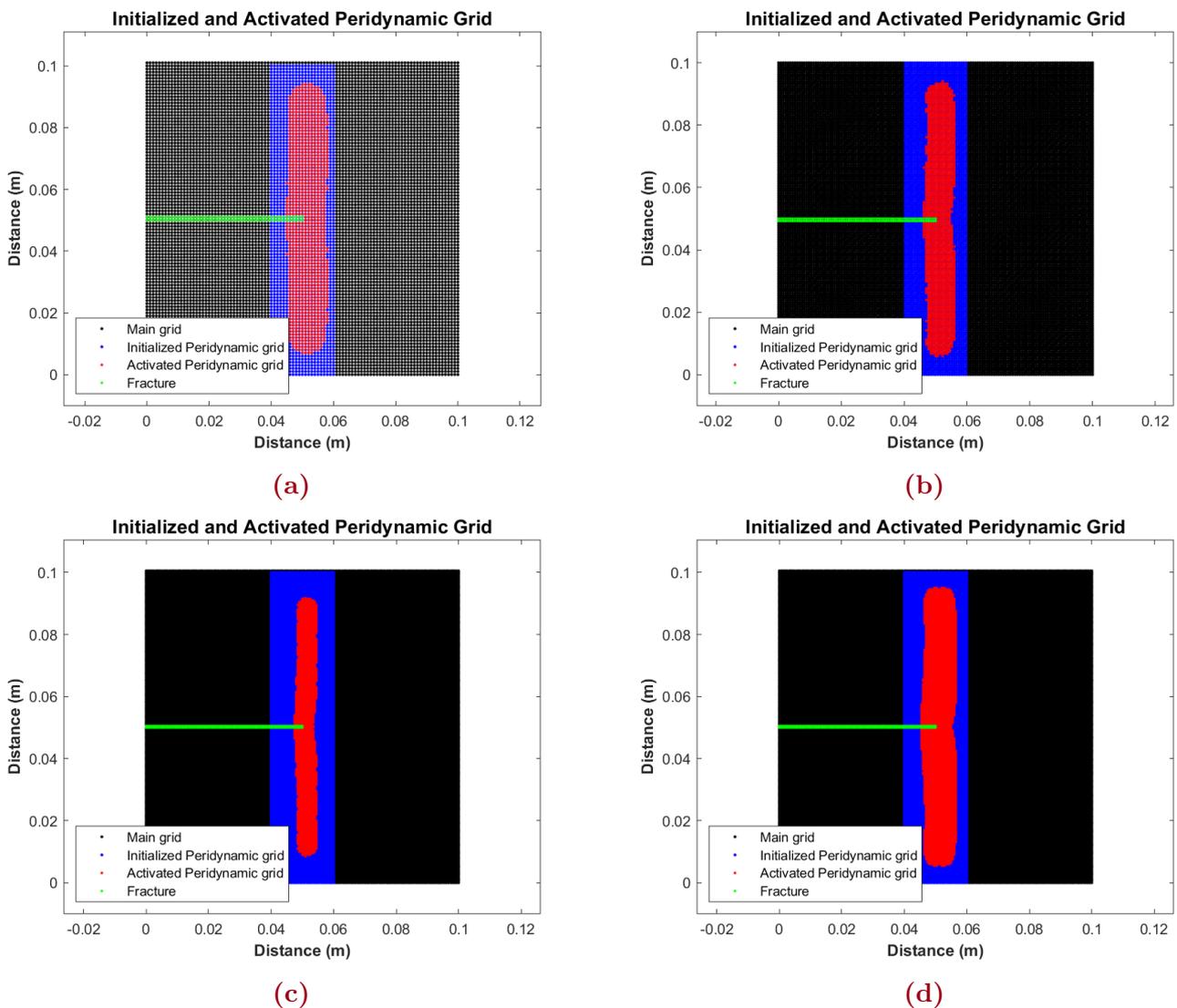
Nella figura 6.24 si possono osservare le griglie dei nodi peridinamici inizializzati ed attivati. Si può già constatare che la cricca si propaga verticalmente, lungo la direzione delle fibre. Inoltre la diminuzione di  $\Delta x$  comporta una riduzione dell'area d'attivazione dei nodi peridinamici. Questo perché l'orizzonte decresce anch'esso, nello specifico si ha  $\delta_a = 3\text{ mm}$ ,  $\delta_b = 2.25\text{ mm}$  e  $\delta_c = 1.5\text{ mm}$ . Nel caso  $d$ , il valore di  $\delta$  è poco superiore a quello del caso  $b$  ed è pari a  $2.5\text{ mm}$ . Pertanto, le due aree d'attivazione sono visibilmente simili, nonostante il numero dei nodi che le compongono siano notevolmente diversi.

I risultati delle simulazioni sono presentati nelle figure 6.25 e 6.26, che si riferiscono rispettivamente alla raffigurazione della lamina deformata e al profilo di propagazione del danno.

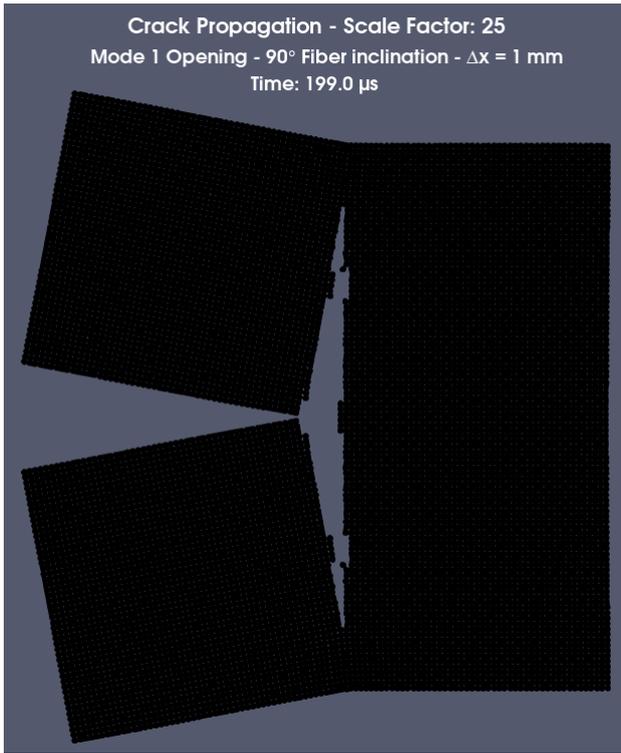
Osservando la figura 6.25, si può constatare che la cricca si propaga verticalmente in entrambi i sensi. Questo è causato dal fatto che il carico è applicato a entrambi i bordi orizzontali della lamina. Inoltre, si può osservare come la zona di propagazione sia meglio definita nel caso  $d$ , che è caratterizzato dal parametro  $m$  più alto. Ciò conferma l'influenza del parametro sull'accuratezza dei risultati. Nel caso  $a$  e  $b$ , invece, le superfici originatesi dalla propagazione della cricca risultano frastagliate.

Qualora il tempo fosse un vincolo più importante dell'accuratezza, il caso  $c$  rappresenta un ottimo compromesso. I suoi risultati sono comparabili con quelli del caso  $d$ , nonostante il tempo impiegato per ottenerli sia notevolmente più basso, circa la metà.

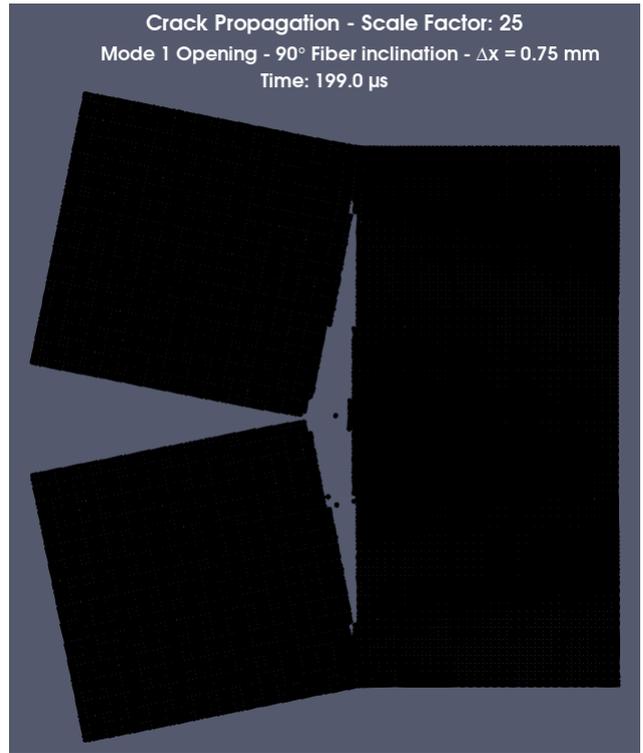
I risultati di tutte le simulazioni sono concordi sia con quelli ottenuti da Colavito [1] (con lo stesso materiale), sia con quelli ottenibili per via sperimentale. Sono entrambi visibili alla figura 6.27.



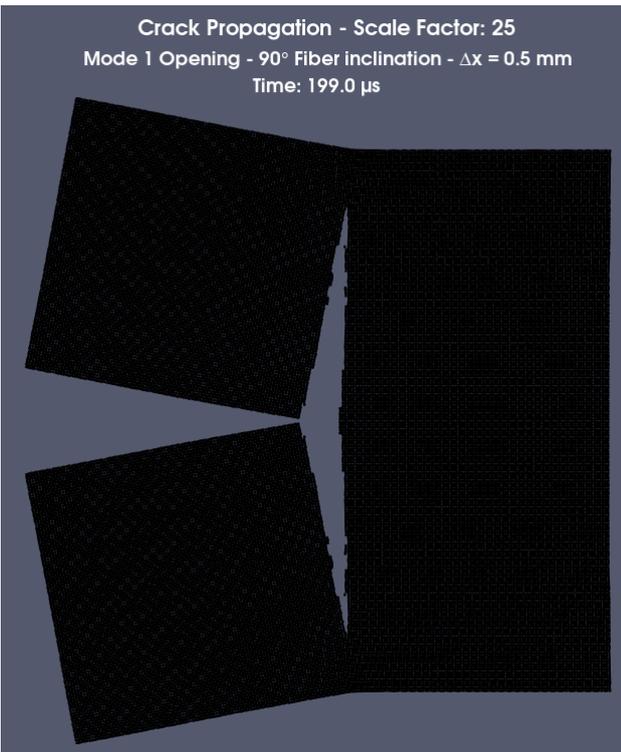
**Figura 6.24:** Nodi peridinamici inizializzati (blu) e attivati (rosso) nelle quattro simulazioni del test 3A rispetto alla griglia totale (nero).



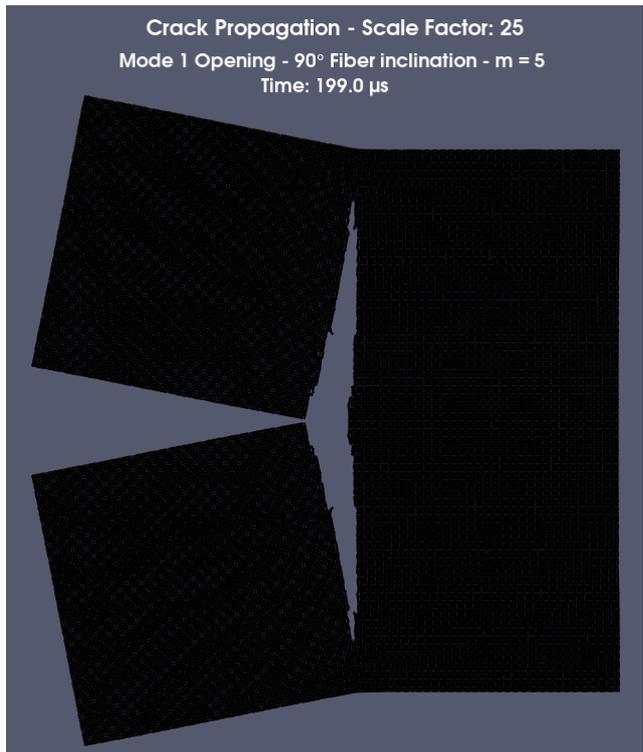
(a)



(b)

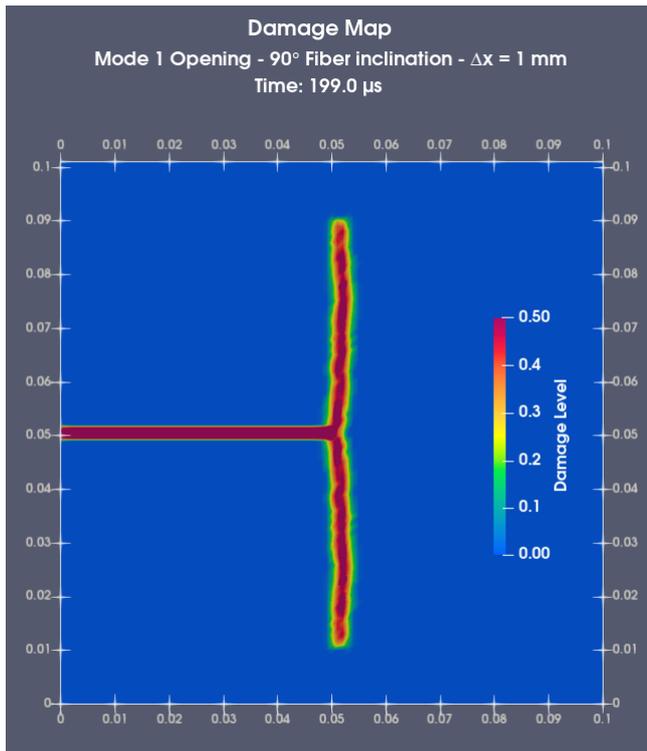


(c)

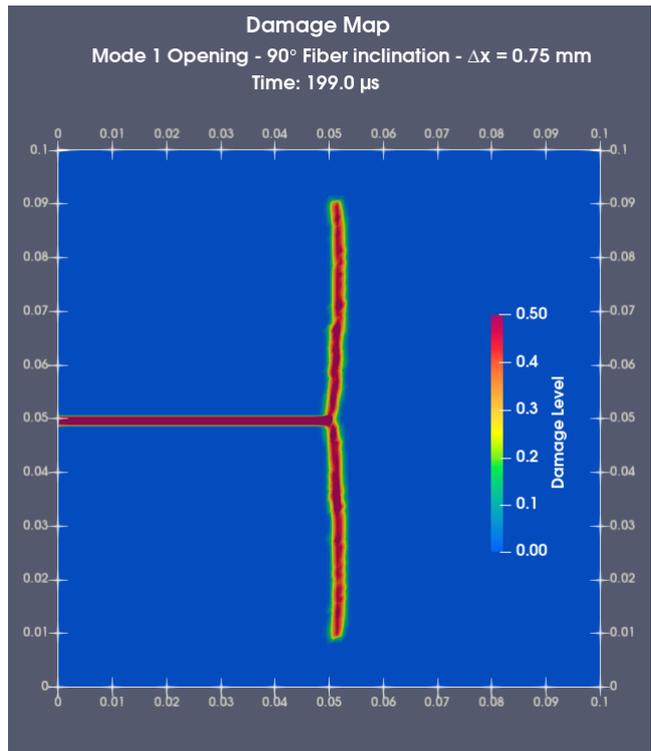


(d)

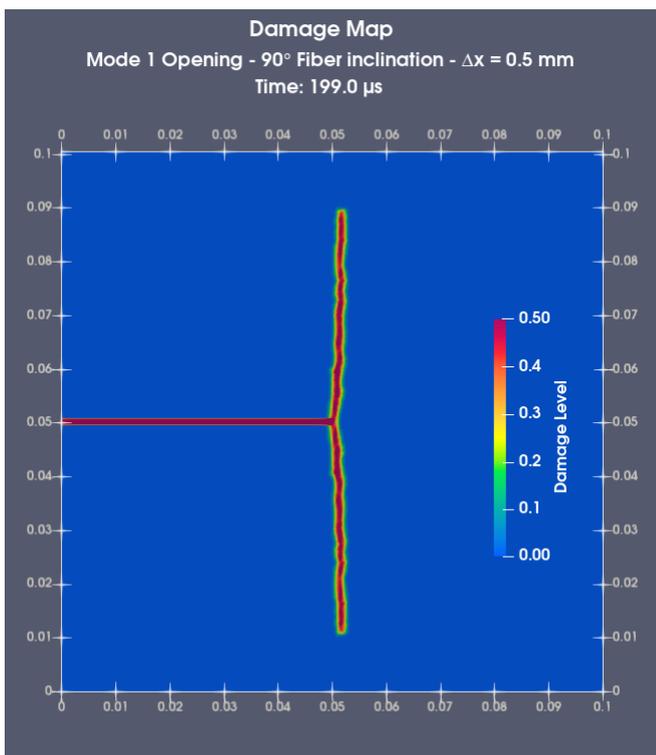
**Figura 6.25:** Deformazione della lamina risultante dalle simulazioni del test 3A.



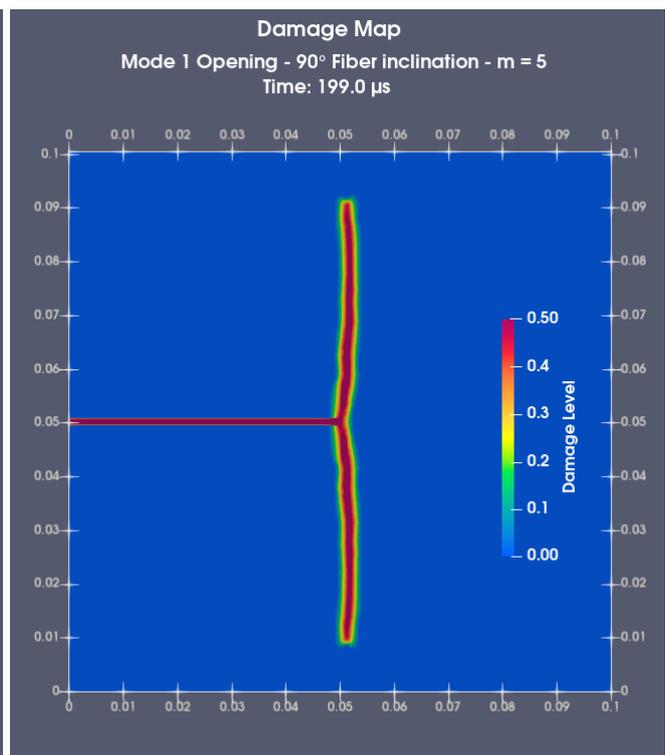
(a)



(b)

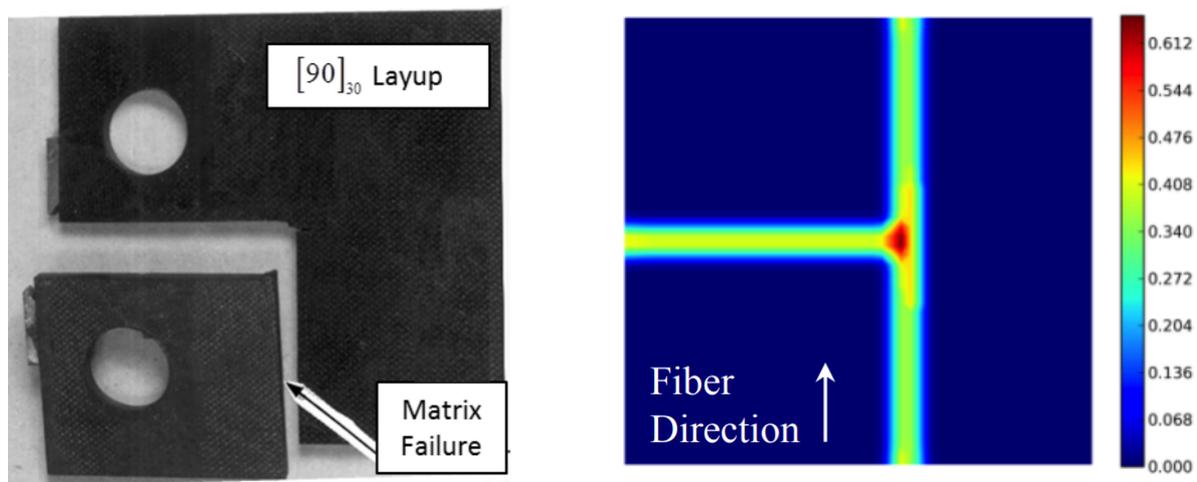


(c)



(d)

**Figura 6.26:** Profilo di propagazione del danno subito dalla lamina ottenuto dalle simulazioni del test 3A.



**Figura 6.27:** Risultati numerici e sperimentali riferiti al test 3A. Immagine tratta da [1].

## 6.4.2 Test 3B - Inclinazione di 45°

Il test 3B si riferisce alle simulazioni del comportamento meccanico di una lamina fratturata, con fibre inclinate di 45° rispetto all'orizzontale, sempre soggetta al modo di carico I.

Per indicare le quattro simulazioni, si utilizzano sempre le lettere  $a, b, c$  e  $d$ , che si riferiscono alle quattro tipologie di discretizzazione usate nel caso precedente.

Tutte le informazioni più importanti sono raccolte nella tabella 6.6.

Proprietà computazionali	a	b	c	d
Orizzonte $\delta$ [mm]	3	2.25	1.5	2.5
Grid-spacing $\Delta x$ [mm]	1	0.75	0.5	0.5
Parametro $m$	3	3	3	5
Nodi (FEM-PD)	10302	18225	40602	40602
Nodi PD inizializzati	3136	5476	12321	12321
Nodi PD attivati	728	1084	1413	2640
Intervallo di tempo $\Delta t$ [ns]	50	50	35	35
Tempo massimo simulato [ $\mu s$ ]	200	200	200	200
Tempo richiesto [s]	432	660	1853	3364

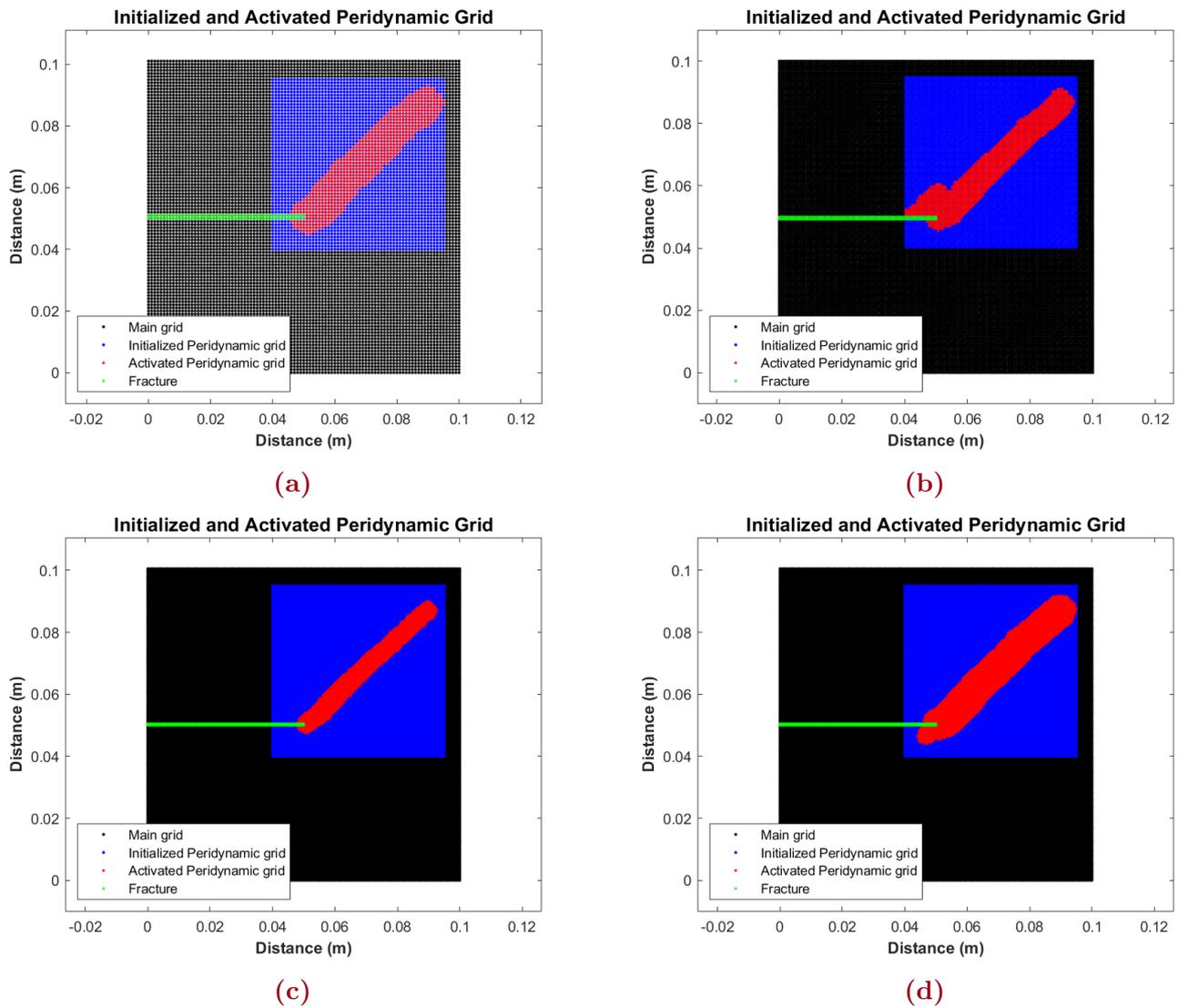
**Tabella 6.6:** Proprietà computazionali delle quattro simulazioni riferite al test 3B.

Come per il caso precedente, il tempo di simulazione è fortemente influenzato sia dalla densità della griglia dei nodi sia dal valore del parametro  $m$ . Ciononostante, il tempo richiesto rimane al di sotto dell'ora, con una differenza sostanziale (+81%) tra il caso  $c$  e  $d$ , che differiscono solo per il valore di  $m$ .

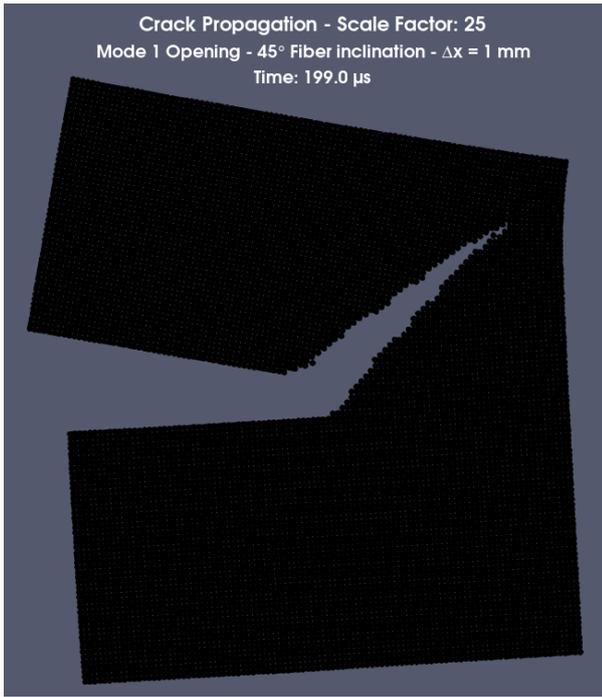
Nella figura 6.28 si può notare come la griglia peridinamica inizializzata occupi l'intera area superiore destra della lamina. Per ridurre i tempi di calcolo, sarebbe possibile implementare un'area minore, che meglio circoscriva la zona interessata dalla cricca. In questo caso, si è preferito procedere con un'area più ampia, in modo da verificare che la direzione di propagazione assumesse l'inclinazione prevista senza alcun condizionamento da parte del codice. Nel caso  $b$ , si può osservare come in prossimità della cricca iniziale ci sia una concentrazione anomala di nodi peridinamici attivati. Probabilmente ciò è dovuto agli effetti di approssimazione in fase di discretizzazione, causati dall'utilizzo di un  $\Delta x$  che non è divisore delle lunghezze usate. È possibile che questi effetti siano amplificati, rispetto al caso 3A e poi 3C, a causa dell'inclinazione di 45° delle fibre, che non le pone allineate agli assi della griglia.

Confrontando i risultati mostrati nelle figure 6.29 e 6.30 si può constatare come i casi  $c$  e  $d$  siano ancora i migliori nel simulare accuratamente il processo di rottura. Questo è particolarmente evidente nei rispettivi profili di propagazione del danno, che presentano una risoluzione migliore rispetto ai casi  $a$  e  $b$ .

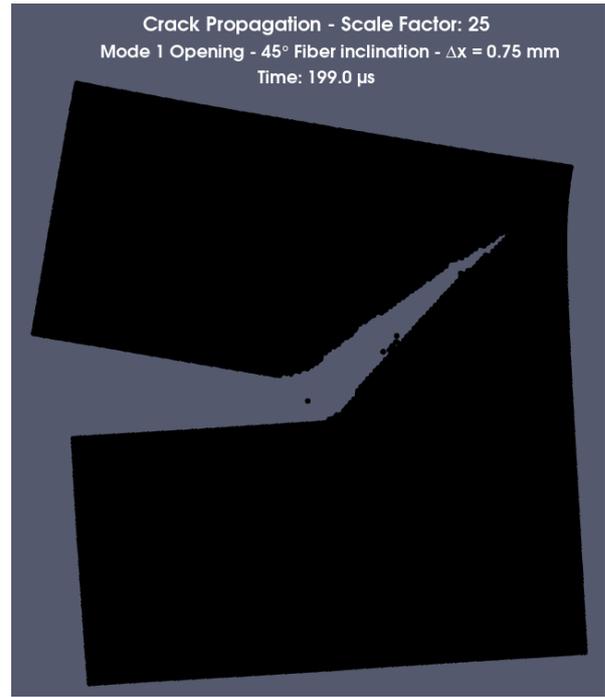
In figura 6.31 si possono visualizzare i risultati ottenuti da Ghajari et al. [7] nel caso di una piastra quadrata soggetta ad un modo di carico I.



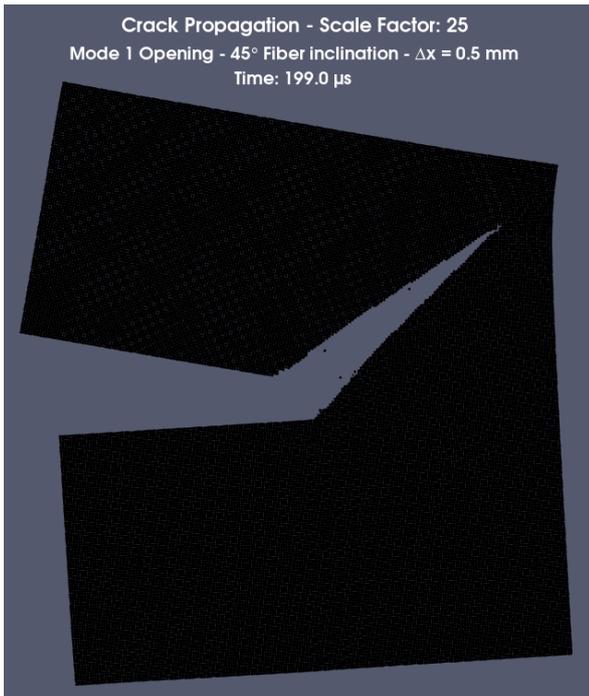
**Figura 6.28:** Nodi peridinamici inizializzati (blu) e attivati (rosso) nelle quattro simulazioni del test 3B rispetto alla griglia totale (nero).



(a)



(b)

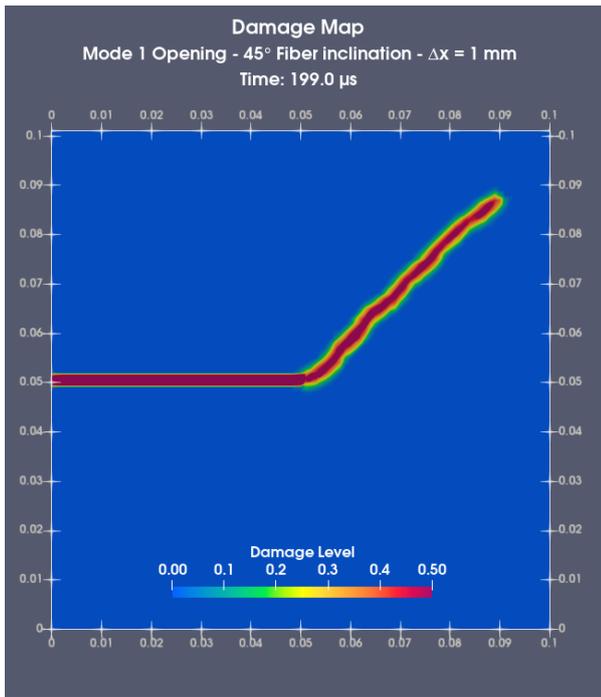


(c)

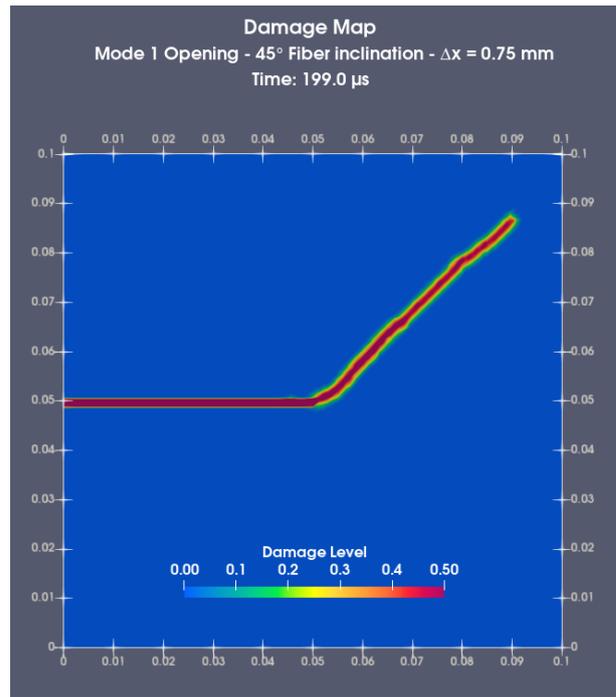


(d)

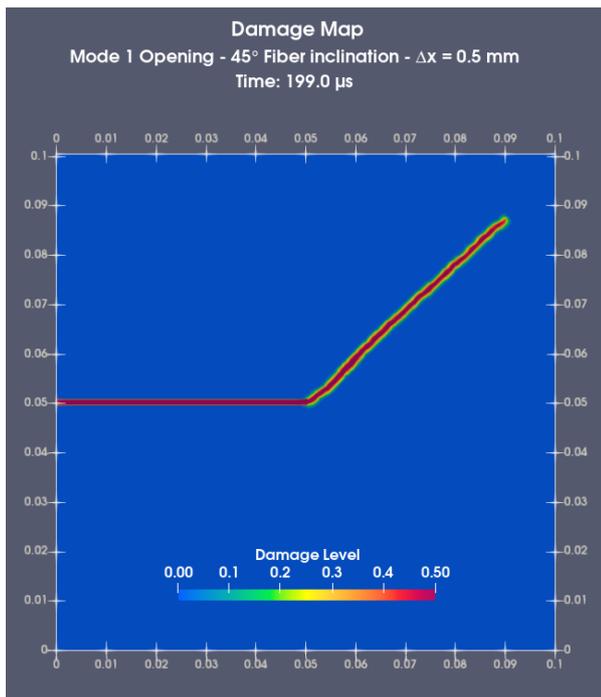
**Figura 6.29:** Deformazione della lamina risultante dalle simulazioni del test 3B.



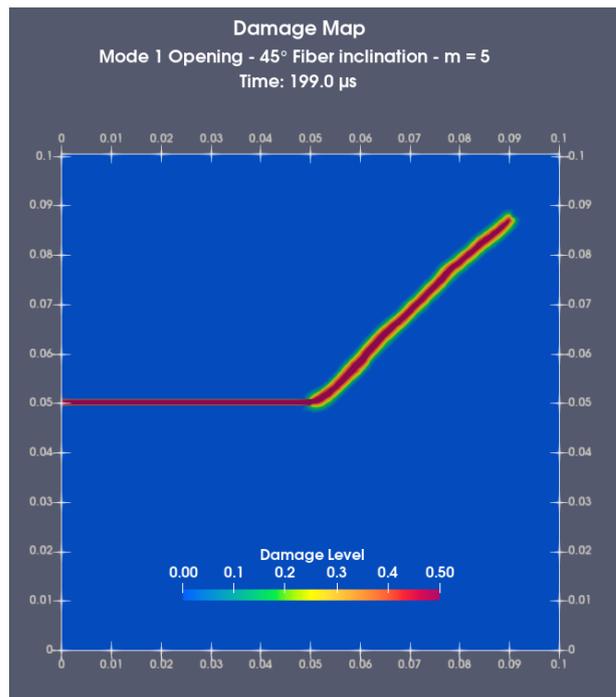
(a)



(b)

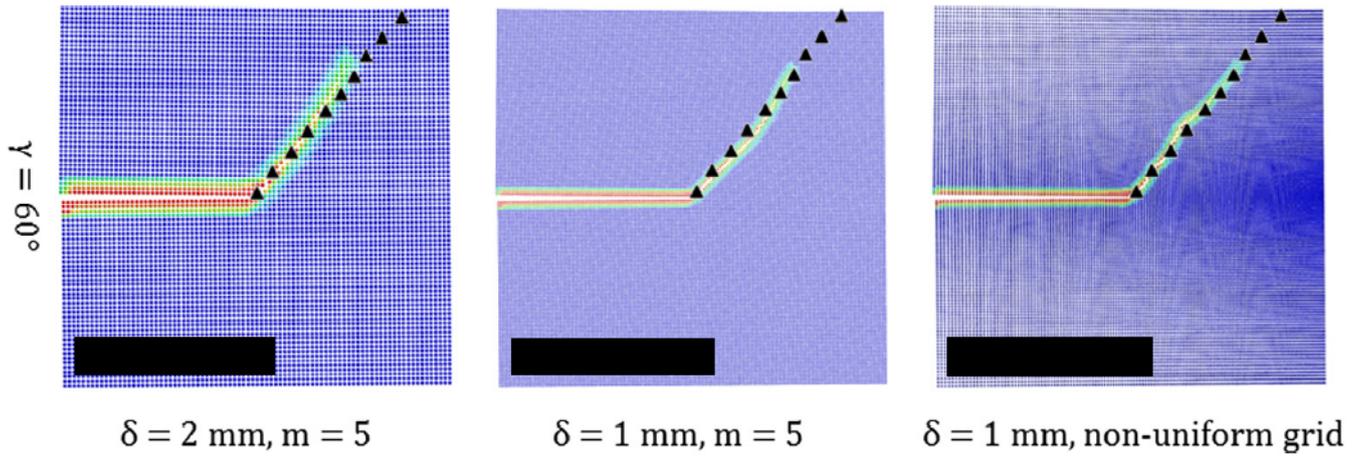


(c)



(d)

**Figura 6.30:** Profilo di propagazione del danno subito dalla lamina ottenuto dalle simulazioni del test 3B.



**Figura 6.31:** Risultati numerici tratti dallo studio di Ghajari et al. [7]. Si ricorda che questa configurazione è simile a quella utilizzata nel test 3B ad eccezione del materiale e dell'inclinazione dell'asse principale locale, che in questo caso è di  $60^\circ$ .

### 6.4.3 Test 3C - Inclinazione nulla

In questa sottosezione vengono presentati i risultati delle simulazioni di una lamina avente fibre perpendicolari al carico applicato.

Come nei casi precedenti, si utilizzano le lettere  $a, b, c, d$  per distinguere le quattro simulazioni effettuate. La tabella 6.7 riassume le loro caratteristiche principali.

Proprietà computazionali	a	b	c	d
Orizzonte $\delta$ [mm]	3	2.25	1.5	2.5
Grid-spacing $\Delta x$ [mm]	1	0.75	0.5	0.5
Parametro $m$	3	3	3	5
Nodi (FEM-PD)	10302	18225	40602	40602
Nodi PD inizializzati	1176	1998	4551	4551
Nodi PD attivati	514	677	980	1784
Intervallo di tempo $\Delta t$ [ns]	50	50	35	35
Tempo massimo simulato [ $\mu s$ ]	150	150	150	150
Tempo richiesto [s]	154	252	651	1257

**Tabella 6.7:** Proprietà computazionali delle quattro simulazioni riferite al test 3C.

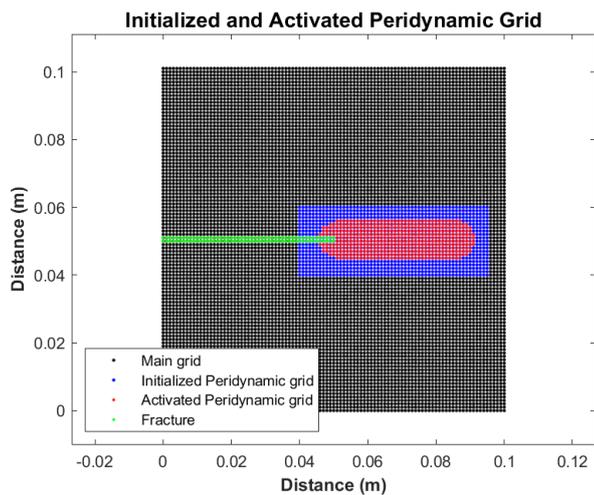
Rispetto ai casi precedenti, il tempo massimo simulato è ridotto perché le fibre sono perpendicolari al carico applicato e quindi la lamina è nella sua versione meno rigida. Avendo utilizzato lo stesso carico a trazione, la riduzione è necessaria per evitare che la lamina potesse dividersi totalmente in due parti.

La griglia d'implementazione dei nodi peridinamici (figura 6.32) ha dimensioni inferiori rispetto ai casi precedenti, visto che la cricca dovrebbe propagarsi in un unico verso e per una lunghezza decisamente inferiore.

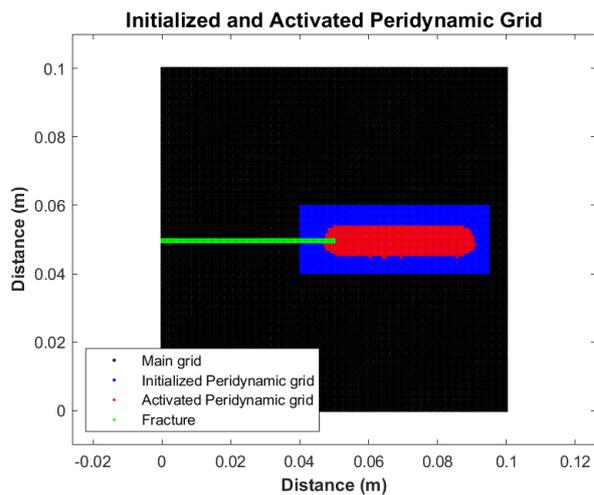
I risultati delle simulazioni sono visibili alla figura 6.33 e 6.34.

Si può facilmente constatare come in tutti i casi la simulazione del processo di rottura sia estremamente accurata. Le zone soggette ad apertura della cricca sono nette e i profili del danno sono precisi. Ad eccezione del caso  $d$ , più lento per motivi già descritti, tutte le simulazioni sono state effettuate in meno di 10 minuti.

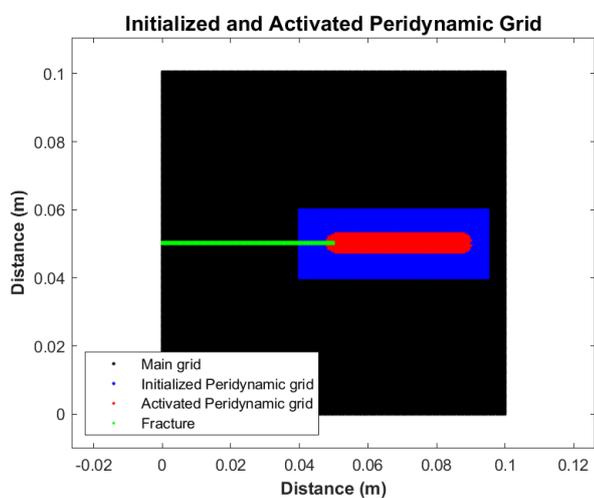
I profili di propagazione del danno sono concordi con quelli ottenuti sia per via numerica da Colavito [1] sia per via sperimentale, sempre da Colavito (figura 6.35).



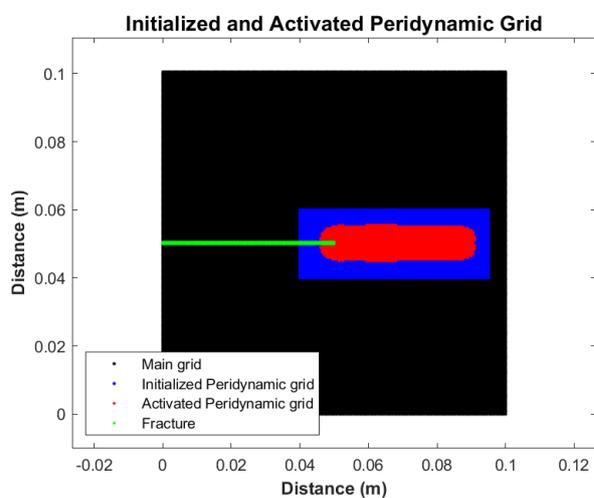
(a)



(b)

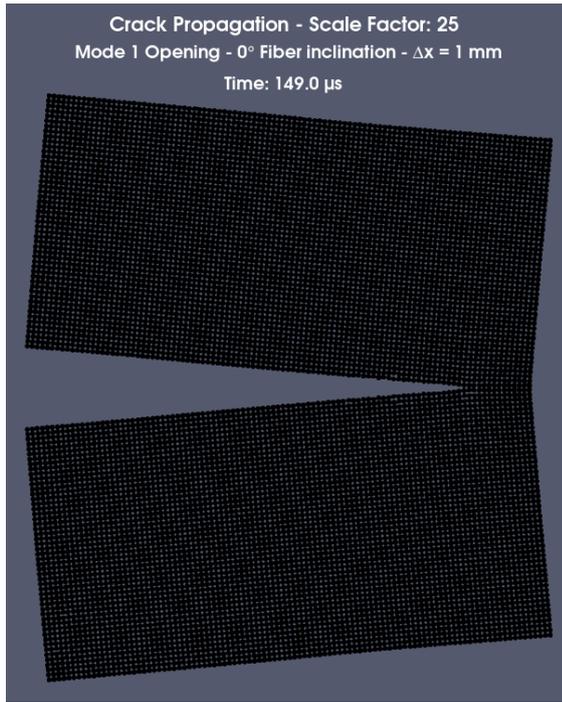


(c)

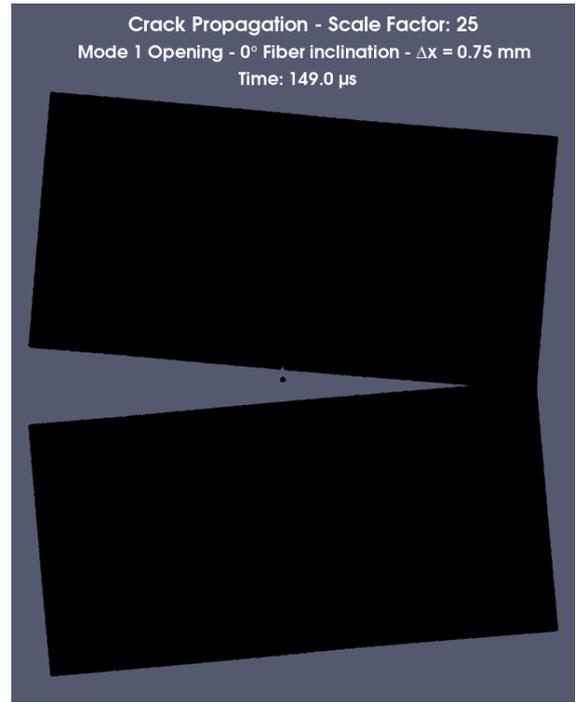


(d)

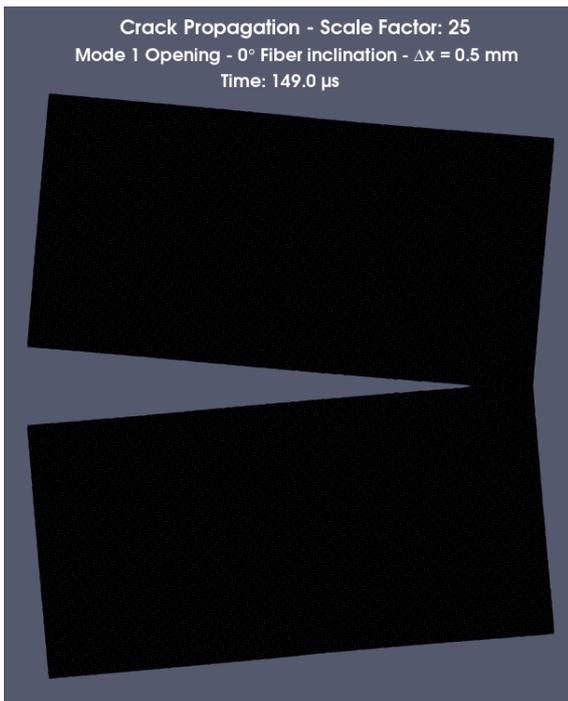
**Figura 6.32:** Nodi peridinamici inizializzati (blu) e attivati (rosso) nelle quattro simulazioni del test 3C rispetto alla griglia totale (nero).



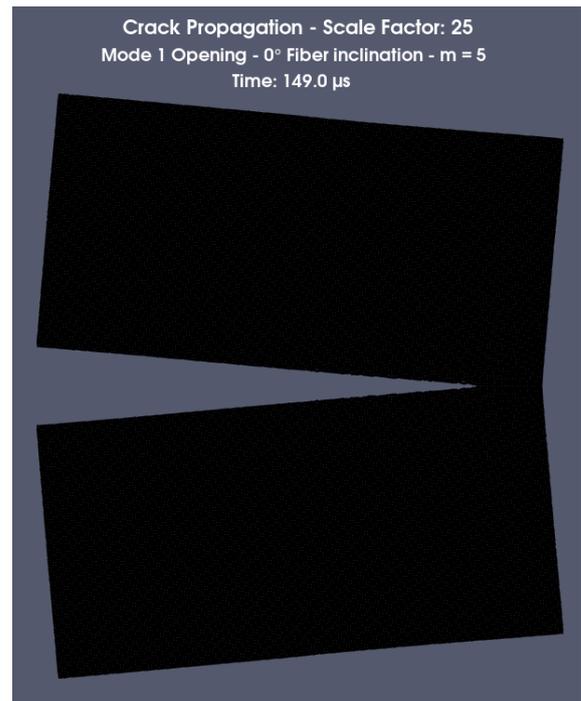
(a)



(b)

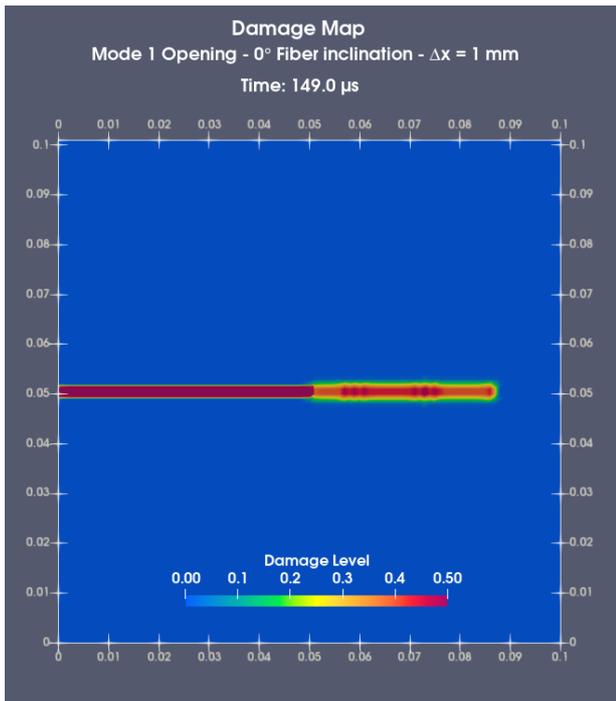


(c)

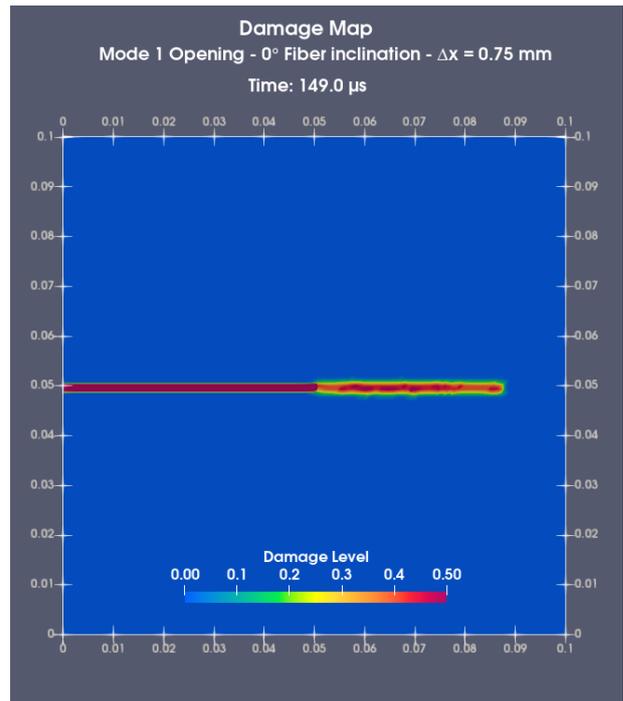


(d)

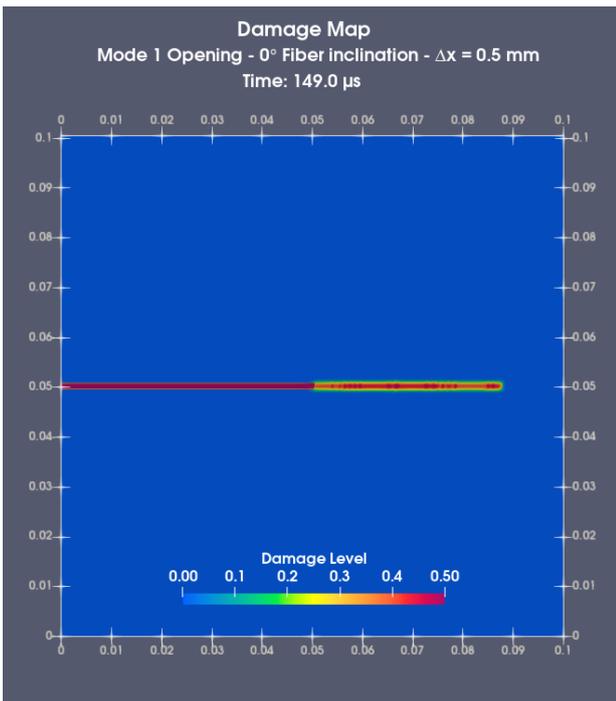
**Figura 6.33:** Deformazione della lamina risultante dalle simulazioni del test 3C.



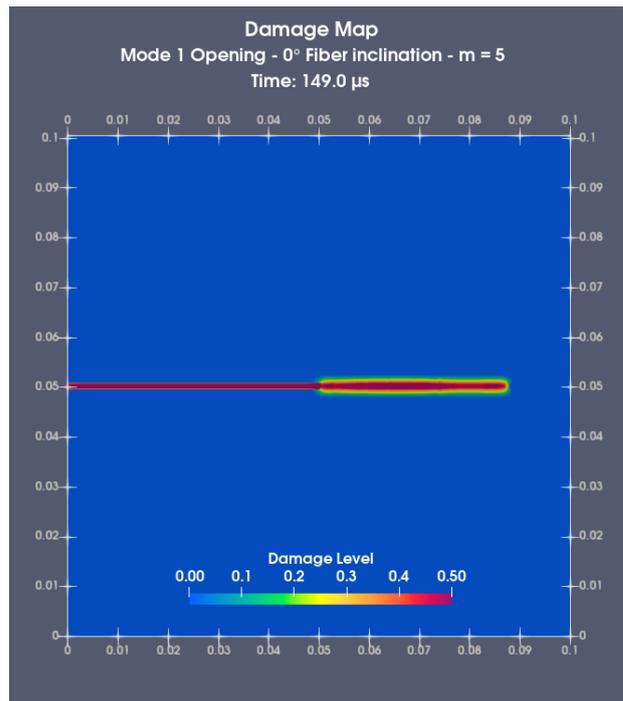
(a)



(b)

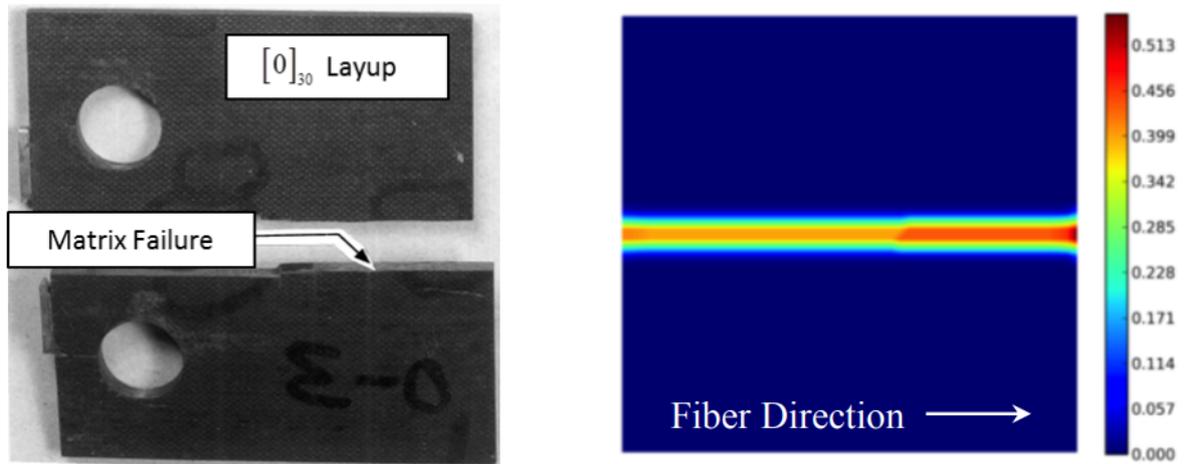


(c)



(d)

**Figura 6.34:** Profilo di propagazione del danno subito dalla lamina ottenuto dalle simulazioni del test 3C.



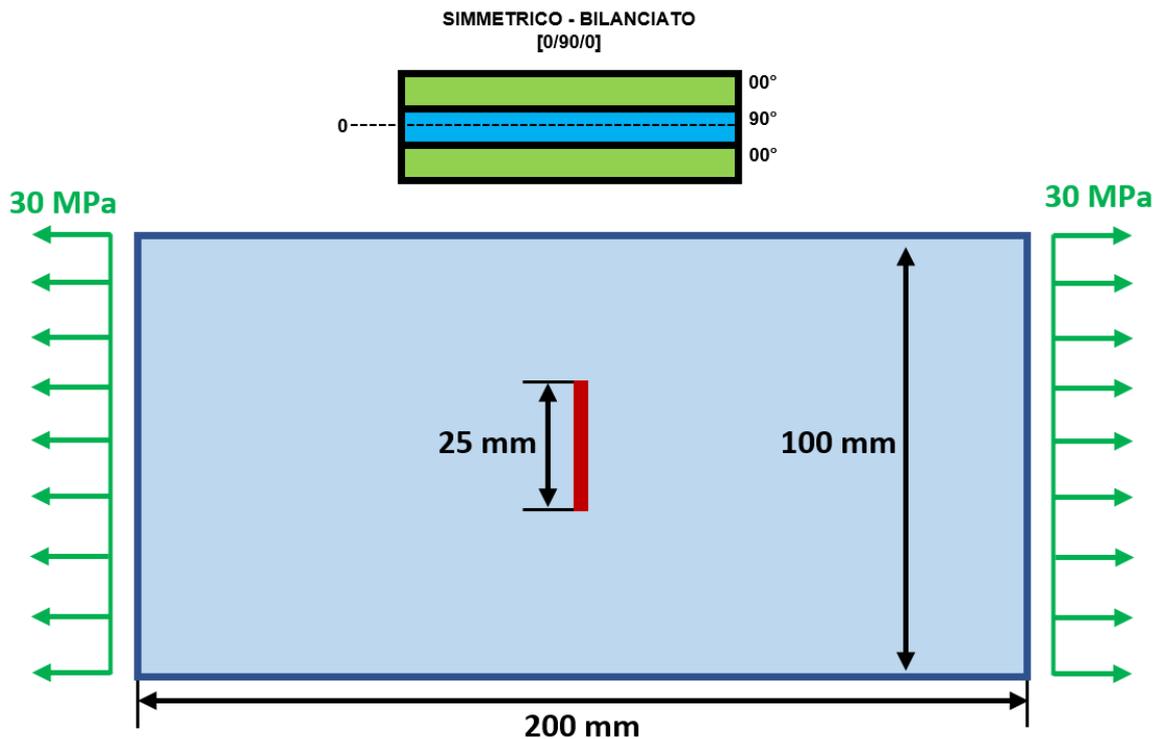
**Figura 6.35:** Risultati numerici e sperimentali riferiti al caso 3C. Immagine tratta da [1].

## 6.5 Test 4 - Laminato [0/90/0] con cricca centrale e carico laterale

In quest'ultimo test si è voluto simulare il comportamento meccanico di un laminato simmetrico e bilanciato [0/90/0] caratterizzato da una cricca centrale.

Si è scelta questa disposizione delle lamine perché il codice sfrutta solo i termini  $A_{ij}$  della matrice d'elasticità del laminato e quindi si sono voluti evitare accoppiamenti tra sforzi estensionali e curvature e tra sforzi estensionali e deformazioni a taglio.

In figura 6.36 è possibile osservare la configurazione scelta per il test.



**Figura 6.36:** Laminato [0/90/0] utilizzato per il test 4.

In tabella 6.8 sono raccolte le principali informazioni inerenti la discretizzazione usata.

Leggendola, si può notare come non ci sia la voce inerente ai nodi peridinamici inizializzati. Questo perché, nel caso dei laminati, l'algoritmo di *grid-adapting* non garantiva un corretto funzionamento del codice. Nello specifico, si sono manifestati dei problemi nel processo di attivazione dei bond tridimensionali. Quindi, si è deciso di attivare tutti i nodi peridinamici sin dalla prima iterazione.

Inoltre, si può notare come l'orizzonte scelto sia maggiore rispetto ai casi precedenti ( $\delta_{lam} = 3 \text{ mm}$ ). Valori più piccoli, quindi *grid-spacing* minori, avrebbero comportato un elevato costo computazione.

Per lo stesso motivo, si è scelto un parametro  $m = 3$ .

<b>Proprietà computazionali</b>	
<b>Orizzonte <math>\delta</math> [mm]</b>	3
<b>Grid-spacing <math>\Delta x</math> [mm]</b>	1
<b>Parametro <math>m</math></b>	3
<b>Nodi (FEM-PD)</b>	61506
<b>Nodi PD attivati</b>	21573
<b>Intervallo di tempo <math>\Delta t</math> [ns]</b>	35
<b>Tempo massimo simulato [<math>\mu s</math>]</b>	130
<b>Tempo richiesto [s]:</b>	29757

**Tabella 6.8:** Proprietà computazionali del test 4 del laminato con cricca centrale.

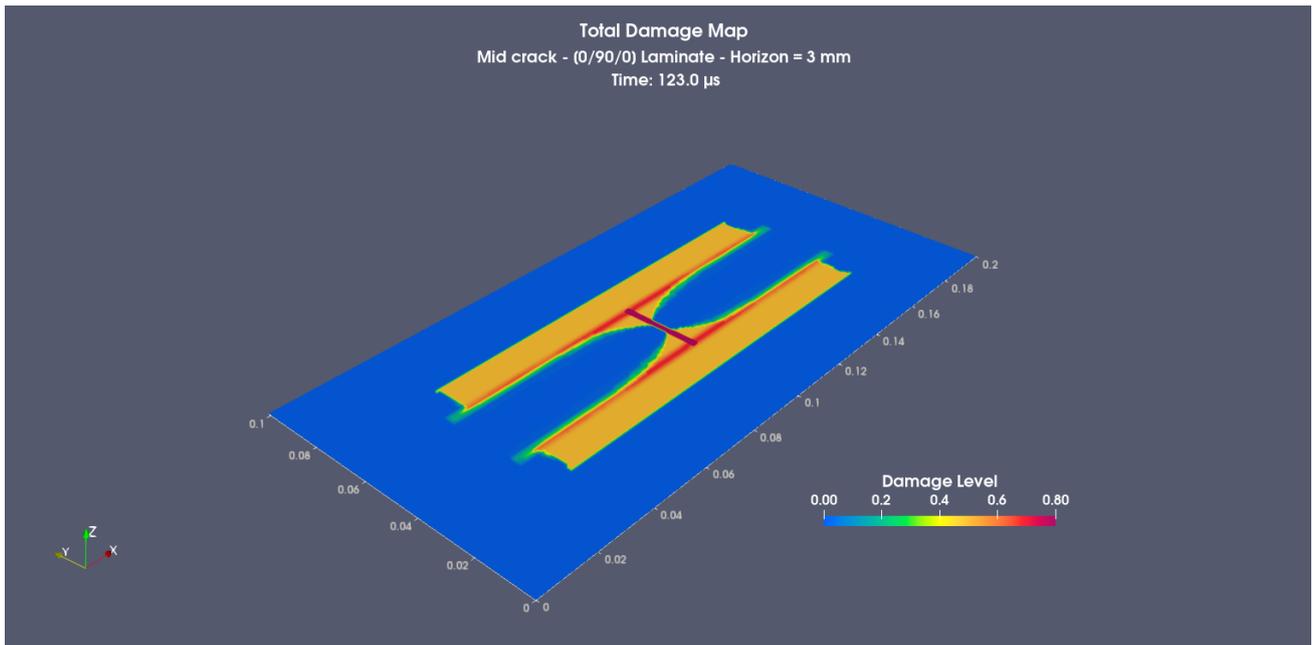
Alla figura 6.37 si può osservare il profilo del danno totale subito dal laminato, che è stato calcolato considerando tutte le tipologie di bond presenti nel modello. La regione visibile nella figura è pressoché identica in tutte e tre le lamine. L'area rettangolare è causata principalmente dalla rottura dei bond di taglio tra le lamine.

Nelle figure 6.38-6.39-6.40 vengono rappresentati i profili di propagazione del danno per le singole lamine, ottenuti considerando solo il contributo dei bond fibra e matrice.

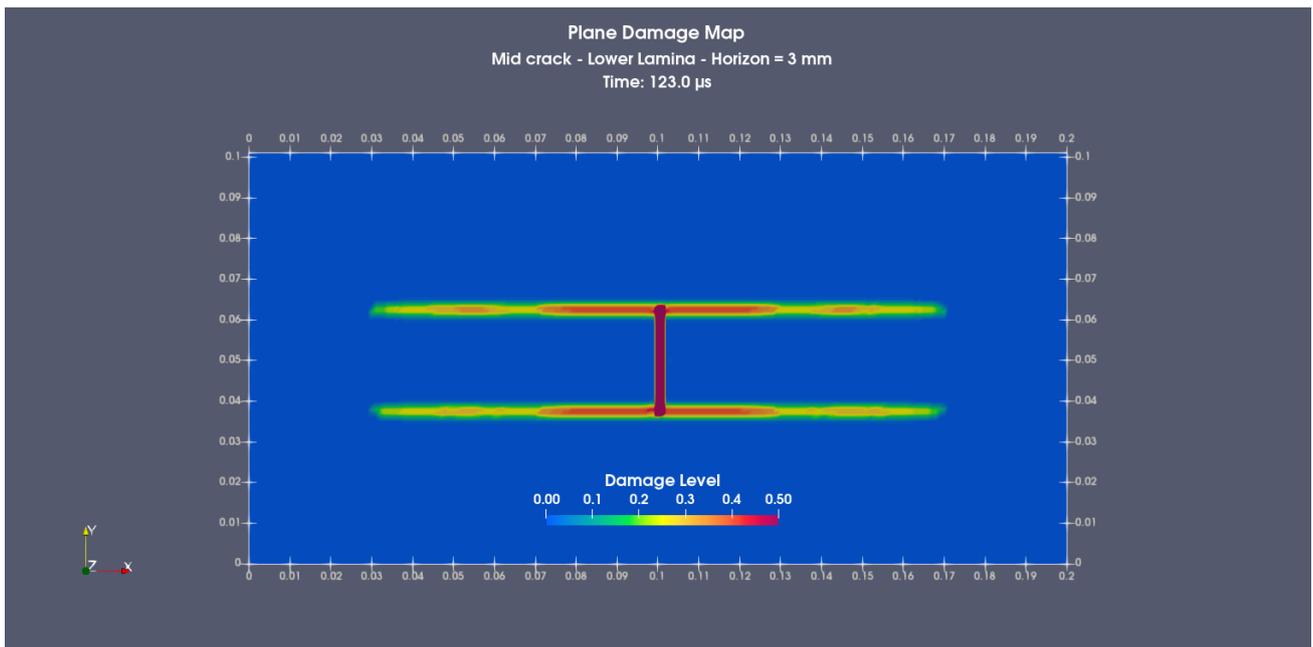
Nella lamina centrale, nonostante abbia le fibre perpendicolari al carico, la propagazione della cricca è simile a quella ottenuta nella lamina superiore ed inferiore. Questo è dovuto al fatto che non si sta più simulando una lamina, come nel test 2A, bensì un laminato. Le interazioni interlamina, riprodotte sia dai bond interlamina sia dai bond di taglio, contribuiscono a questo risultato.

Anche in questo caso si sottolinea come l'accuratezza dei parametri d'inizializzazione della simulazione siano fondamentali per poter ottenere dei risultati prossimi a quelli ottenibili per via sperimentale. Nel nostro caso, per il calcolo dei parametri peridinamici dei bond interlamina e di taglio, sono state utilizzate le proprietà meccaniche della matrice presentate in [23].

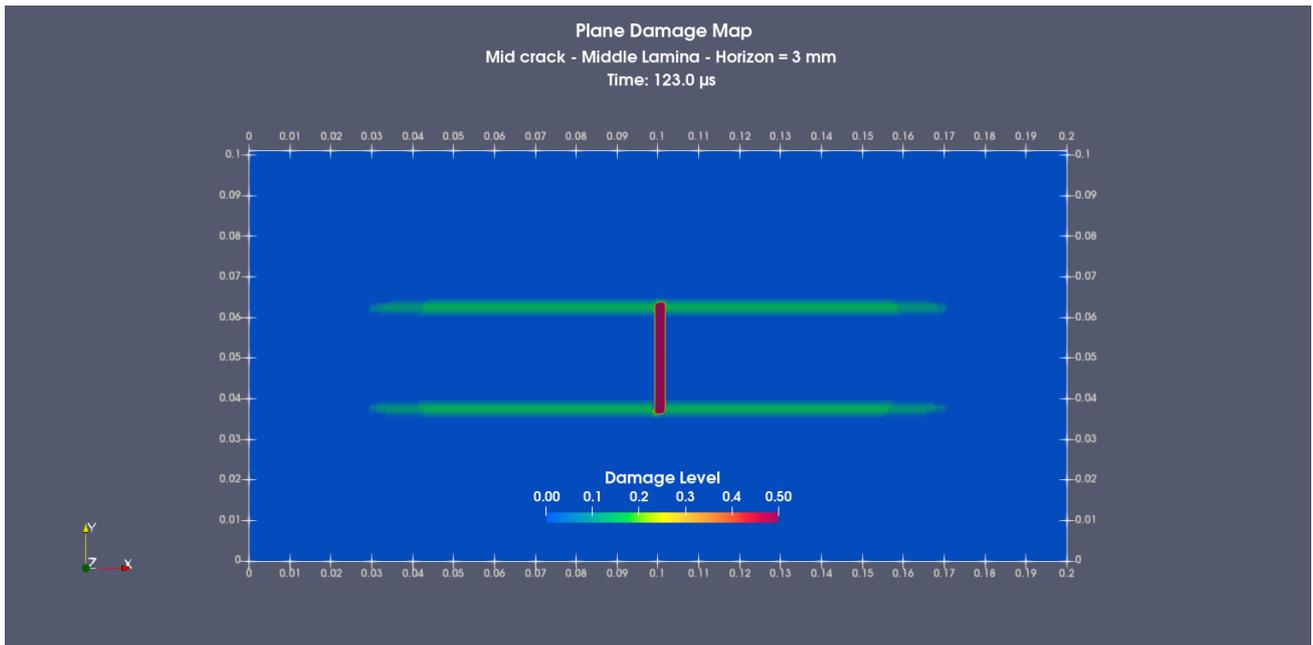
I risultati ottenuti sono qualitativamente compatibili con quelli calcolati sia da Madenci et al. [23] (figura 6.41), sia da Kilic et al. [18].



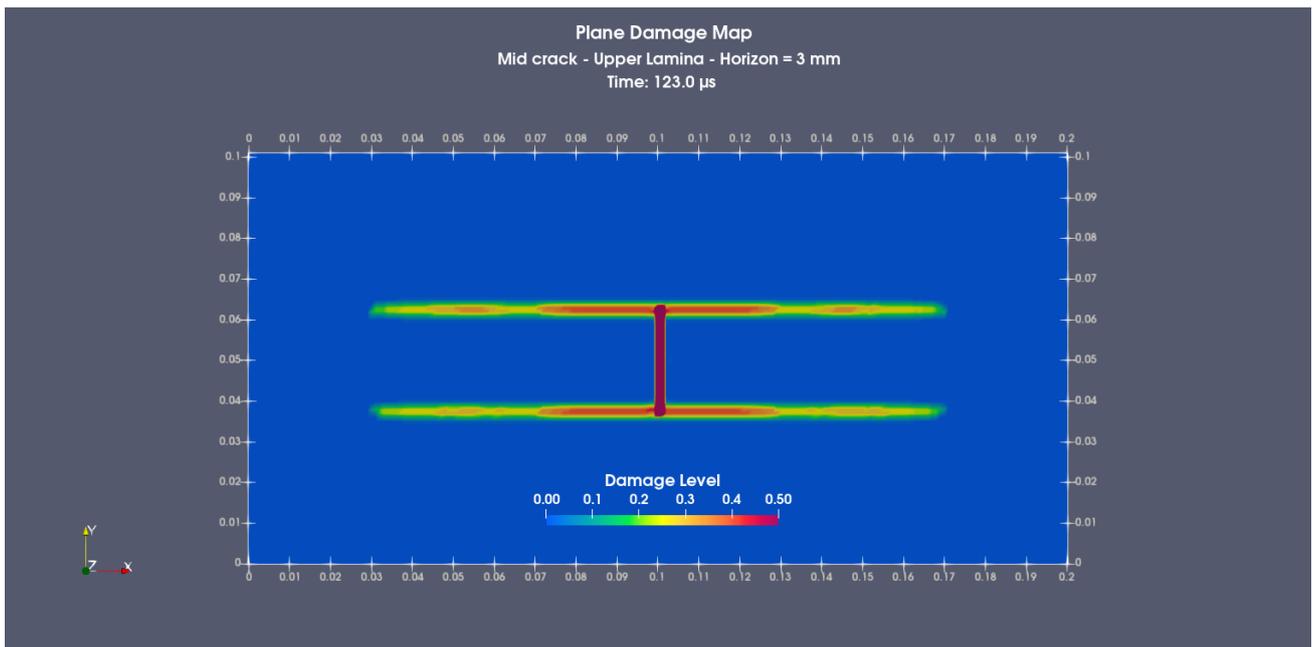
**Figura 6.37:** Profilo del danno totale per il laminato del test 4.



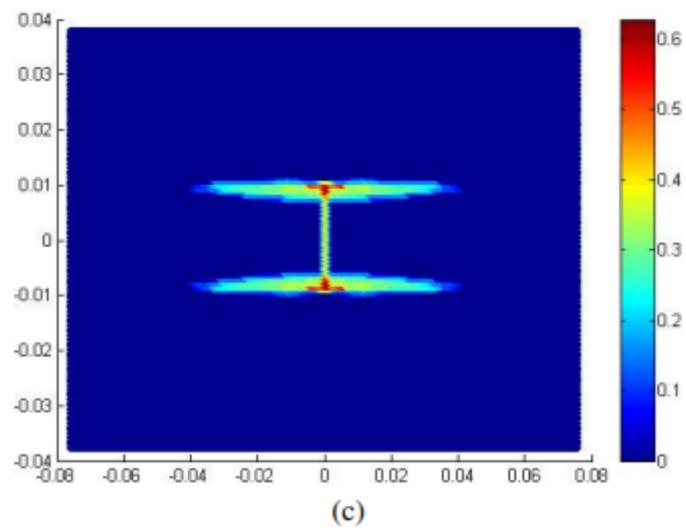
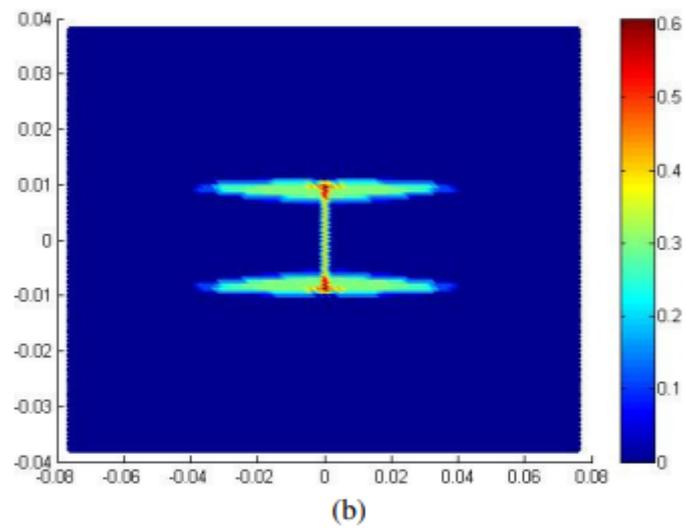
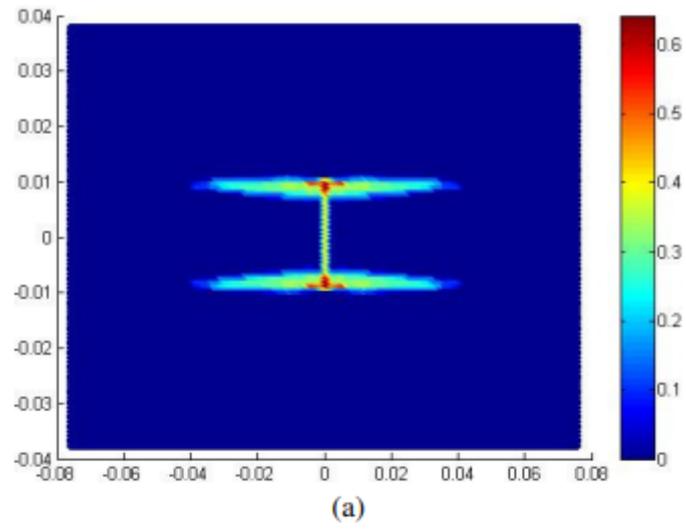
**Figura 6.38:** Profilo del danno per la lamina inferiore del test 4.



**Figura 6.39:** Profilo del danno per la lamina mediana del test 4.



**Figura 6.40:** Profilo del danno per la lamina superiore del test 4.



**Figura 6.41:** Profili del danno per le lamine del laminato  $[0/90/0]$  ottenuti da Madenci et al. [23].

# Conclusioni

L'utilizzo dei materiali compositi nell'ingegneria aerospaziale è in forte crescita ed è dettato dalla necessità sia di ridurre ulteriormente le masse dei componenti, preservando i requisiti di rigidità, sia di garantire una maggior libertà in fase di design grazie alla possibilità di poter *progettare* il materiale.

Il loro maggior utilizzo va di pari passo con la maggior criticità dei componenti per i quali vengono selezionati, e quindi è fondamentale avere a disposizione dei metodi numerici che siano in grado di simulare, con accuratezza, il loro comportamento meccanico nelle più diverse condizioni.

L'accoppiamento FEM-Peridinamica proposto in [29] ha dimostrato, in più di un'occasione, la capacità di esaltare i vantaggi di entrambe le tecniche e di ridurre i tempi di simulazione garantendo, nel contempo, l'accuratezza desiderata. Questo risulta estremamente utile per prevedere eventuali propagazioni di cricche, che sono particolarmente pericolose nell'industria aerospaziale.

Durante questo lavoro di tesi, si sono realizzati una serie di codici che hanno permesso l'integrazione di questa tecnica d'accoppiamento con le lamine unidirezionali e i laminati. Sono stati effettuati numerosi test e in ognuno di essi il codice ha dimostrato di essere in grado di prevedere, con accuratezza, il comportamento dinamico del materiale in esame e l'eventuale evoluzione di fratture.

Inoltre, il codice dimostra la sua più completa affidabilità nel momento in cui si conoscono perfettamente le proprietà meccaniche del materiale simulato. È possibile reperire queste informazioni contattando le aziende produttrici oppure in loco, realizzando delle prove sperimentali.

Esistono diversi margini di miglioramento, sia dal punto di vista teorico sia da quello computazionale.

Per esempio, è possibile indagare maggiormente sulla definizione della costante elastica nel caso dei materiali compositi. In questo lavoro ne è stata usata una che garantisse sia un ottimo accoppiamento con il FEM sia una discreta semplicità nell'implementazione informatica. Tuttavia, definizioni più approfondite potrebbe risultare più utili nel simulare, con accuratezza maggiore, lamine con fibre aventi inclinazioni non ortodosse, che in questa tesi non sono state affrontate in quanto poco usate in ambito industriale e per mancanza di studi per eventuali confronti. Tutto ciò è estremamente rilevante per la parte dei laminati.

Inoltre, sarebbe interessante modificare il codice affinché sia compatibile con le tecniche di calcolo parallelo preinstallate in MATLAB. Questo permetterebbe l'utilizzo di mesh molto più dense.

In conclusione, questo lavoro rappresenta un ulteriore passo per una migliore capacità di simulazione dei materiali compositi, che oggi rappresentano una nuova quotidianità nell'ambito dell'ingegneria strutturale.

# Bibliografia

- [1] K. W. Colavito. Peridynamics for failure and residual strength prediction of fiber-reinforced composites. *The University of Arizona.*, 2013.
- [2] R. D. Cook and H. Saunders. Concepts and applications of finite element analysis (2nd edition). *Journal of Pressure Vessel Technology*, 106, 1984.
- [3] F. S. de Oliveira and J. J. de Lima Junior. Quantification of uncertain parameters in static structures using the interval analysis and the finite element method. 2017.
- [4] C. Duan, X. Chen, and R. Li. The numerical simulation of fatigue crack propagation in inconel 718 alloy at different temperatures. *Aerospace Systems*, 3, 2020.
- [5] M. D’Elia, X. Li, P. Seleson, X. Tian, and Y. Yu. A review of local-to-nonlocal coupling methods in nonlocal diffusion and nonlocal mechanics. *Journal of Peridynamics and Nonlocal Modeling*, 4, 2022.
- [6] U. Galvanetto, T. Mudric, A. Shojaei, and M. Zaccariotto. An effective way to couple fem meshes and peridynamics grids for the solution of static equilibrium problems. *Mechanics Research Communications*, 76, 2016.
- [7] M. Ghajari, L. Iannucci, and P. Curtis. A peridynamic material model for the analysis of dynamic crack propagation in orthotropic media. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 276, 2014.
- [8] I. N. Giannakeas, T. K. Papathanasiou, A. S. Fallah, and H. Bahai. Coupling xfem and peridynamics for brittle fracture simulation—part i: feasibility and effectiveness. *Computational Mechanics*, 66, 2020.
- [9] J. Guo, W. Gao, Z. Liu, X. Yang, and F. Li. Study of dynamic brittle fracture of composite lamina using a bond-based peridynamic lattice model. *Advances in Materials Science and Engineering*, 2019, 2019.
- [10] Y. D. Ha and F. Bobaru. Studies of dynamic crack propagation and crack branching with peridynamics. *International Journal of Fracture*, 162, 2010.
- [11] R. Haynes, J. Cline, B. Shonkwiler, and E. Armanios. On plane stress and plane strain in classical lamination theory. *Composites Science and Technology*, 127, 2016.

- [12] W. Hu, Y. D. Ha, and F. Bobaru. Peridynamic model for dynamic fracture in unidirectional fiber-reinforced composites. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 217-220, 2012.
- [13] Y. L. Hu and E. Madenci. Bond-based peridynamic modeling of composite laminates with arbitrary fiber orientation and stacking sequence. *Composite Structures*, 153, 2016.
- [14] X. Huang, Z. Bie, L. Wang, Y. Jin, X. Liu, G. Su, and X. He. Finite element method of bond-based peridynamics and its abaqus implementation. *Engineering Fracture Mechanics*, 206, 2019.
- [15] L. Jia, C. Zhang, Z. Hu, P. Song, L. Yu, and C. Tang. Failure analysis of composite laminates under transverse shear load via xfem. *Composite Structures*, 262, 2021.
- [16] P. I. Kattan. *MATLAB guide to finite elements: An interactive approach*. 2008.
- [17] B. Kilic. Peridynamic theory for progressive failure prediction in homogeneous and heterogeneous materials. *ProQuest Dissertations and Theses*, 2008.
- [18] B. Kilic, A. Agwai, and E. Madenci. Peridynamic theory for progressive damage prediction in center-cracked composite laminates. *Composite Structures*, 90, 2009.
- [19] B. Kilic and E. Madenci. Coupling of peridynamic theory and the finite element method. *Journal of Mechanics of Materials and Structures*, 5, 2010.
- [20] Y. le Hu, Y. Yu, and H. Wang. Peridynamic analytical method for progressive damage in notched composite laminates. *Composite Structures*, 108, 2014.
- [21] D. Motamedi and S. Mohammadi. Fracture analysis of composites by time independent moving-crack orthotropic xfem. *International Journal of Mechanical Sciences*, 54, 2012.
- [22] T. Ni, M. Zaccariotto, Q. Z. Zhu, and U. Galvanetto. Static solution of crack propagation problems in peridynamics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 346, 2019.
- [23] E. Oterkus and E. Madenci. Peridynamic analysis of fiber-reinforced composite materials. *Journal of Mechanics of Materials and Structures*, 7, 2012.
- [24] F. Shen, Y. Yu, Q. Zhang, and X. Gu. Hybrid model of peridynamics and finite element method for static elastic deformation and brittle fracture analysis. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 113, 2020.
- [25] S. A. Silling and E. Askari. A meshfree method based on the peridynamic model of solid mechanics. volume 83, 2005.
- [26] C. Sun and Z. Huang. Peridynamic simulation to impacting damage in composite laminate. *Composite Structures*, 138, 2016.

- [27] A. Taştan, U. Yolum, M. A. Güler, M. Zaccariotto, and U. Galvanetto. A 2d peridynamic model for failure analysis of orthotropic thin plates due to bending. *Procedia Structural Integrity*, 2, 2016.
- [28] Y. Wang, G. Shi, and X. Wang. Displacement and stress analysis of laminated composite plates using an eight-node quasi-conforming solid-shell element. *Curved and Layered Structures*, 4, 2017.
- [29] M. Zaccariotto, T. Mudric, D. Tomasi, A. Shojaei, and U. Galvanetto. Coupling of fem meshes with peridynamic grids. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 330, 2018.
- [30] M. Zaccariotto, D. Tomasi, and U. Galvanetto. An enhanced coupling of pd grids to fe meshes. *Mechanics Research Communications*, 84, 2017.
- [31] W. Zhou, D. Liu, and N. Liu. Analyzing dynamic fracture process in fiber-reinforced composite materials with a peridynamic model. *Engineering Fracture Mechanics*, 178, 2017.

## Ringraziamenti

Vorrei ringraziare il professor Galvanetto per aver accettato di farmi da relatore in questo lavoro di tesi.

Sono veramente grato al professor Zaccariotto per tutto il sostegno che mi ha dimostrato in questi anni, che va dall'aiuto che mi ha offerto nella preparazione dei documenti Erasmus fino ai consigli, tempestivi e motivanti, che mi ha dato in questo lavoro di tesi. Grazie di cuore.

Vorrei ringraziare la mia famiglia, vicina e lontana, di sangue e allargata, per il supporto che mi ha sempre manifestato e per il quale sarò sempre grato.

Ringrazio di cuore tutti i miei amici, a Verona e a Padova, che negli anni mi hanno aiutato a vincere parte della timidezza e della riservatezza che mi porto dentro da sempre.

Poi ci sei tu. Nonostante tu sia imbarcata in una missione di sola andata per l'esplorazione dello spazio interstellare, sono sicuro che il tuo sguardo è fisso verso quel punto blu dal quale provieni. Grazie al telescopio che ti ha fornito il capo ingegnere, osservi le vite di tre semplici esseri umani, ai quali offri sostegno con quella cosa che la tecnologia non è ancora in grado di replicare: l'amore.

A tutti voi, *per aspera ad astra*.