



**UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI
DI PADOVA**

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

Dipartimento di Ingegneria Industriale DII

Dipartimento di Ingegneria Dell'Informazione DEI

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Aerospaziale

**MODEL PREDICTIVE CONTROL:
TEORIA E APPLICAZIONE ALLE
TURBINE EOLICHE**

Relatrice: Prof.ssa Maria Elena Valcher

Laureando: Luca Bellin

Matr. 1013985

Anno Accademico 2017/2018

27/02/2018

A mia madre

con la quale camminerò, un giorno,

in un campo fiorito di soli Giacinti ricolmi del suo amore.

Sommario

In questo lavoro di tesi sarà presentato il Model Predictive Control (MPC) prima dal punto di vista teorico e in seguito dal punto di vista applicativo con specifico riferimento al suo impiego per il controllo delle turbine eoliche.

La trattazione inizierà richiamando alcuni elementi di Teoria dei Sistemi quali:

- i modelli di stato lineari e la loro dinamica;
- i punti di equilibrio, la stabilità e la linearizzazione;
- i sistemi a segnali campionati;
- l'osservabilità e la rivelabilità;
- la retroazione dallo stato.

Al fine di introdurre il Model Predictive Control verrà, poi, enunciato il problema di controllo ottimo su intervallo finito per sistemi a tempo discreto sul quale si baserà l'MPC considerato nel seguito.

Si passerà, quindi, al nucleo della tesi sul Model Predictive Control introducendo l'algoritmo RH e la formulazione dell'MPC per sistemi lineari nella forma dello spazio di stato, analizzando le possibili soluzioni ad anello chiuso ed ad anello aperto e considerando la gestione dei vincoli sullo stato, sull'ingresso e sull'uscita.

Verrà, poi, introdotto l'MPC per sistemi non lineari e verrà discussa la stabilità dell'MPC.

Inoltre, al fine di analizzare l'Extended State Space Model Predictive Control, sarà discusso il modello nello spazio di stato esteso (ESSM) e i relativi modelli di predizione analizzando, nello specifico, il predittore utilizzato nel seguito.

A questo punto si introdurranno le turbine eoliche delle quali verrà proposto un modello a parametri concentrati che sarà usato nell'applicazione dell'MPC a queste ultime.

L'MPC lineare per le turbine eoliche sarà, infatti, esposto nel dettaglio considerando anche la possibilità di includere la predizione della velocità del vento nel controllore ottenendo un MPC PREVIEW.

Per finire si andrà ad analizzare un controllo combinato in avanti (feedforward) e in retroazione di una turbina eolica ottenuto usando un MPC con vincoli di robustezza sullo stato.

Risulterà evidente come l'MPC rappresenti un metodo di controllo avanzato la cui applicazione al problema di controllo delle turbine eoliche è in grado di fornire risultati significativamente migliori rispetto a quelli ottenuti tramite i classici controllori di base.

Ringraziamenti

Innanzitutto desidero ringraziare la Professoressa Maria Elena Valcher, non solo per essere stata una guida insostituibile in questo lavoro di tesi, ma anche e soprattutto per avermi supportato in un percorso personale, difficile e imprevisto. Senza di Lei, onestamente, non credo né che questa tesi avrebbe visto la luce né che io sarei potuto giungere a questo giorno. Se sono riuscito a concludere il mio travagliato percorso di studi devo, in primis, ringraziare Lei sia dal punto di vista accademico che da quello umano a cui va tutta la mia ammirazione e stima.

In secondo luogo reputo importante ringraziare i miei genitori per avermi permesso di continuare gli studi per tutti questi lunghi anni ed, in modo particolare, mia madre Giacinta che ha sempre fatto tutto per me sostenendomi ed ascoltandomi negli svariati momenti critici imprevisti che mi sono trovato ad affrontare. Il suo sostegno, per me, è stato, è e continuerà ad essere fondamentale e non smetterò mai di ringraziarla per il bene che ogni giorno mi dimostra.

In terzo luogo vorrei ringraziare il Dottor Castelli per avermi sempre seguito e aiutato in questi anni. Onestamente non so cosa sarebbe di me ora se ancora molti anni fa non lo avessi incontrato. A lui va il mio più sentito ringraziamento per aver fatto sì che io potessi star meglio.

Alle diverse esperienze fatte in questi anni universitari va un ringraziamento per aver contribuito a formarmi come persona.

A tutti i miei amici e a tutti i miei familiari va l'ultimo, ma non meno importante, ringraziamento per avermi sostenuto e aiutato nonostante tutto.

Siete troppi per essere citati tutti ma sappiate che ognuno di voi ha contribuito a far crescere un pezzetto di me, ragion per cui questo mio traguardo è anche vostro.

Indice

1. Elementi di teoria dei sistemi	1
• 1.1 Modelli di stato lineari e loro dinamica.....	3
- 1.1.1 Modelli di stato lineari.....	4
- 1.1.2 Sistemi lineari, tempo-invarianti e discreti.....	10
- 1.1.3 Sistemi lineari, tempo-invarianti e a tempo continuo.....	20
• 1.1.3.1 Evoluzione libera dello stato.....	20
• 1.1.3.2 Evoluzione forzata dello stato.....	27
- 1.1.4 Rappresentazione in s dei sistemi lineari e continui.....	29
- 1.1.5 Sistemi algebricamente equivalenti.....	32
• 1.2 Punti di equilibrio, stabilità e linearizzazione.....	35
- 1.2.1 Equilibrio e stabilità dell'equilibrio nei sistemi autonomi	36
- 1.2.2 Stabilità dei sistemi lineari.....	39
- 1.2.3 Stabilità dei sistemi continui: il metodo diretto di Lyapunov.....	41
- 1.2.4 Stabilità dei sistemi discreti: il metodo diretto di Lyapunov.....	45
- 1.2.5 Analisi della stabilità col metodo di linearizzazione.....	47
• 1.3 Sistemi a segnali campionati.....	55
• 1.4 Osservabilità e rivelabilità.....	56
- 1.4.1 Osservabilità.....	56
- 1.4.2 Rivelabilità.....	59
• 1.5 Sistemi di stato: retroazione dallo stato e stabilizzazione	60
2. Elementi di teoria del controllo ottimo	65
• 2.1 Introduzione.....	67
• 2.2 Controllo ottimo su intervallo finito dei sistemi discreti.....	68
3. Model Predictive Control	77
• 3.1 Introduzione.....	79
• 3.2 MPC per sistemi lineari nella forma dello spazio di stato.....	80
- 3.2.1 Soluzione ad anello chiuso.....	80
- 3.2.2 Soluzione ad anello aperto.....	81
- 3.2.3 Gestione dei vincoli sullo stato, sull'ingresso e sull'uscita.....	83
• 3.3 Algoritmi MPC industriali.....	85
- 3.3.1 Inseguimento dei segnali di riferimento e trattazione dei disturbi.....	85
- 3.3.2 Rilassamento dei vincoli.....	87
• 3.4 MPC per sistemi non lineari.....	88

- 3.4.1 MPC a tempo continuo.....	88
• 3.5 Algoritmi MPC e stabilità.....	90
- 3.5.1 Vincolo di stato finale nullo.....	95
4. Extended State Space Model Predictive Control	99
• 4.1 Introduzione.....	101
• 4.2 Premesse.....	102
- 4.2.1 Descrizione del sistema.....	102
- 4.2.2 Definizioni.....	103
- 4.2.3 Modello nello spazio di stato esteso (ESSM).....	105
• 4.3 Modelli di predizione.....	111
- 4.3.1 Modello di predizione in funzione delle variabili di processo.....	111
- 4.3.2 Modello di predizione in funzione delle variazioni delle variabili di processo.....	116
- 4.3.3 Analisi del predittore.....	120
• 4.4 Algoritmo MPC di base.....	124
- 4.4.1 L'obiettivo del controllo.....	124
5. Turbine eoliche	127
• 5.1 Introduzione.....	129
• 5.2 Modellazione.....	131
6. Model Predictive Control per le Turbine Eoliche	137
• 6.1 Introduzione.....	139
• 6.2 Progettazione del controllo.....	140
- 6.2.1 Stima.....	140
- 6.2.2 Controllore.....	141
• 6.3 Risultati delle simulazioni.....	143
• 6.4 Predizione della velocità del vento.....	145
- 6.4.1 Fatica.....	146
- 6.4.2 Carichi estremi.....	147
• 6.5 MPC non lineare per le turbine eoliche.....	149
7. Controllo combinato in avanti e in retroazione di una turbina eolica usando un MPC con vincoli sullo stato	153
• 7.1 Introduzione.....	155
• 7.2 Il problema del controllo.....	156
- 7.2.1 Il controllo in avanti.....	156
- 7.2.2 Misure della velocità del vento.....	156
- 7.2.3 MPC per le turbine eoliche.....	157
• 7.3 Il modello della turbina.....	158

• 7.4 MPC.....	161
- 7.4.1 La formulazione del problema.....	161
- 7.4.2 Linearizzazione.....	162
- 7.4.3 Stabilità.....	164
- 7.4.4 Il programma quadratico (QP).....	166
- 7.4.5 Il controllo in avanti.....	166
- 7.4.6 Vincoli robusti sullo stato.....	167
• 7.4.6.1 Disturbo additivo.....	168
• 7.4.6.2 Modifica del controllore.....	171
• 7.4.6.3 Disturbo non misurato.....	173
• 7.4.6.4 Algoritmo.....	173
• 7.5 Risultati delle simulazioni.....	174
- 7.5.1 Produzione di potenza nominale.....	175
- 7.5.2 Raffiche di vento.....	177
- 7.5.3 Perdita nella griglia.....	179
- 7.5.4 Capacità durante il funzionamento.....	180
• Conclusioni.....	181
Appendice	185
• A.1 Risposta impulsiva.....	187
• A.2 Risposta al gradino.....	189
• A.3 Modelli ARMA.....	191
Bibliografia	195

Capitolo 1

ELEMENTI DI TEORIA DEI SISTEMI

1.1: MODELLI DI STATO LINEARI E LORO DINAMICA

La rappresentazione in forma di stato di sistemi dinamici è una rappresentazione estremamente utile sia per fornire una descrizione completa di sistemi con più ingressi ed uscite, sia al fine di progettare azioni di controllo.

Un sistema a tempo continuo o discreto si dice in forma di stato quando è rappresentato dalle seguenti due equazioni:

- Equazione di stato: sistema di equazioni differenziali o di equazioni alle differenze del primo ordine
- Equazione di uscita o misura: legame statico tra le variabili di stato, gli ingressi e le uscite del sistema

In questo primo paragrafo si andranno ad analizzare modelli di stato lineari e la loro relativa dinamica.

1.1.1: MODELLI DI STATO LINEARI

I modelli di stato sono una classe di sistemi dinamici descritti da equazioni di stato e di uscita aventi la seguente struttura:

$$\begin{cases} x_1(t+1) = f_1(x_1(t), \dots, x_n(t), u_1(t), \dots, u_r(t)) \\ \vdots \\ x_n(t+1) = f_n(x_1(t), \dots, x_n(t), u_1(t), \dots, u_r(t)) \end{cases} \quad (1.1)$$

per SISTEMI DISCRETI

$$\begin{cases} y_1(t) = h_1(x_1(t), \dots, x_n(t), u_1(t), \dots, u_r(t)) \\ \vdots \\ y_m(t) = h_m(x_1(t), \dots, x_n(t), u_1(t), \dots, u_r(t)) \end{cases} \quad (1.2)$$

Dunque per sistemi a tempo discreto si ha un sistema di n equazioni alle differenze con r ingressi e m equazioni di uscita.

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = f_1(x_1(t), \dots, x_n(t), u_1(t), \dots, u_r(t)) \\ \vdots \\ \dot{x}_n(t) = f_n(x_1(t), \dots, x_n(t), u_1(t), \dots, u_r(t)) \end{cases} \quad (1.3)$$

per SISTEMI CONTINUI

$$\begin{cases} y_1(t) = h_1(x_1(t), \dots, x_n(t), u_1(t), \dots, u_r(t)) \\ \vdots \\ y_m(t) = h_m(x_1(t), \dots, x_n(t), u_1(t), \dots, u_r(t)) \end{cases} \quad (1.4)$$

Dunque per sistemi a tempo continuo si ha un sistema di n equazioni differenziali con r ingressi e m equazioni di uscita.

Definiamo:

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} \quad : \text{ vettore di stato all'istante } t$$

$$x(t) \in X = R^n$$

dove $X = R^n$ è uno spazio vettoriale chiamato SPAZIO di STATO. Gli elementi dello spazio di stato sono detti STATI del SISTEMA.

$x_1(\cdot), x_2(\cdot), \dots, x_n(\cdot)$ sono delle funzioni scalari del tempo chiamate VARIABILI di STATO: nel caso di sistemi discreti, sono le soluzioni del sistema di equazioni (1.1) mentre, nel caso di sistemi continui, sono le soluzioni del sistema di equazioni (1.3).

Si definisce TRAIETTORIA la curva descritta, nello spazio, dalle variabili di stato al variare del tempo.

Definiamo:

$$u(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \vdots \\ u_r(t) \end{bmatrix} : \text{vettore degli ingressi all'istante } t$$

dove $u(t) \in U = R^r$ è uno spazio vettoriale chiamato SPAZIO (o ALFABETO) dei VALORI di INGRESSO e dove $u_1(\cdot), u_2(\cdot), \dots, u_r(\cdot)$ sono chiamate funzioni di ingresso.

Definiamo:

$$y(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_m(t) \end{bmatrix} : \text{vettore delle uscite all'istante } t$$

dove $y(t) \in Y = R^m$ è uno spazio vettoriale chiamato SPAZIO (o ALFABETO) dei VALORI in USCITA e dove $y_1(\cdot), y_2(\cdot), \dots, y_m(\cdot)$ sono chiamate funzioni di uscita.

Si riscrivono le equazioni (1.1), (1.2), (1.3), (1.4) in FORMA COMPATTA:

$$\begin{cases} x(t+1) = f(x(t), u(t)) \\ y(t) = h(x(t), u(t)) \end{cases} \quad \text{SISTEMI DISCRETI} \quad (1.5)$$

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \\ y(t) = h(x(t), u(t)) \end{cases} \quad \text{SISTEMI CONTINUI} \quad (1.6)$$

con f ed h i vettori di componenti f_1, \dots, f_n e h_1, \dots, h_m .

Nel caso dei sistemi continui l'equazione di stato $\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$ fornisce la mappa di aggiornamento di stato in forma implicita ottenuta come soluzione di un sistema di equazioni scalari differenziali ordinarie di primo grado.

Nel caso dei sistemi discreti, invece, l'equazione di stato $x(t+1) = f(x(t), u(t))$ fornisce direttamente la mappa di aggiornamento di un passo in forma implicita. Difatti, noti $x(t)$ ed $u(t)$ all'istante t , riesco a calcolare direttamente il valore dello stato all'istante successivo $x(t+1)$.

NB: La relativa equazione di stato in forma esplicita sarebbe: $x(t) = \phi(x_0, u(\tau), \tau \in [0, t])$
 dove per i sistemi lineari continui vale: $x(t) = e^{Ft} x_0$
 Per la definizione di esponenziale di una matrice si rimanda al paragrafo 1.1.3.1.

Le funzioni f_1, \dots, f_n definiscono la mappa di aggiornamento di stato.

Su f_1, \dots, f_n impongo alcune condizioni che non comportano vincoli particolari per i sistemi discreti ma che si traducono in vincoli di regolarità sulla struttura delle equazioni differenziali.

Nello specifico, al sistema (1.3) è richiesta l'ammissione di un'unica soluzione assegnate le condizioni iniziali e assegnata una funzione d'ingresso ed è richiesto che l'esistenza di tale soluzione sia garantita $\forall t > t_0$.

Se tali condizioni sono soddisfatte, la mappa di aggiornamento di stato è CAUSALE nel senso che lo stato in un generico istante τ e l'ingresso nell'intervallo $[\tau, t)$ determinano univocamente lo stato in t .

Ciò implica che lo stato raggiunto dal sistema in un generico istante non dipenda dai valori dell'ingresso successivi a tale istante.

Le funzioni h_1, \dots, h_m rappresentano il legame statico tra i valori assunti in un certo istante dalle variabili di stato e di ingresso e i valori assunti nello stesso istante dalle variabili di uscita e caratterizzano la mappa di uscita.

UN SISTEMA DINAMICO È LINEARE E TEMPO-INVARIANTE se le funzioni f_i con $i = 1, \dots, n$ e h_j con $j = 1, \dots, m$ sono FUNZIONI LINEARI dei propri argomenti ovvero se i sistemi (1.1), (1.2), (1.3) e (1.4) assumono la forma:

$$\begin{cases} x_1(t+1) = f_{11}x_1(t) + \dots + f_{1n}x_n(t) + g_{11}u_1(t) + \dots + g_{1r}u_r(t) \\ \vdots \\ x_n(t+1) = f_{n1}x_1(t) + \dots + f_{nn}x_n(t) + g_{n1}u_1(t) + \dots + g_{nr}u_r(t) \end{cases}$$

SISTEMI DISCRETI

$$\begin{cases} y_1(t) = h_{11}x_1(t) + \dots + h_{1n}x_n(t) + d_{11}u_1(t) + \dots + d_{1r}u_r(t) \\ \vdots \\ y_m(t) = h_{m1}x_1(t) + \dots + h_{mn}x_n(t) + d_{m1}u_1(t) + \dots + d_{mr}u_r(t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = f_{11}x_1(t) + \dots + f_{1n}x_n(t) + g_{11}u_1(t) + \dots + g_{1r}u_r(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_n(t) = f_{n1}x_1(t) + \dots + f_{nn}x_n(t) + g_{n1}u_1(t) + \dots + g_{nr}u_r(t) \end{cases}$$

SISTEMI CONTINUI

$$\begin{cases} y_1(t) = h_{11}x_1(t) + \dots + h_{1n}x_n(t) + d_{11}u_1(t) + \dots + d_{1r}u_r(t) \\ \vdots \\ y_m(t) = h_{m1}x_1(t) + \dots + h_{mn}x_n(t) + d_{m1}u_1(t) + \dots + d_{mr}u_r(t) \end{cases}$$

I sistemi lineari appena scritti vengono abitualmente espressi nella seguente forma matriciale:

$$\text{SISTEMI DISCRETI} \quad \begin{cases} x(t+1) = Fx(t) + Gu(t) \\ y(t) = Hx(t) + Du(t) \end{cases} \quad (1.7)$$

$$\text{SISTEMI CONTINUI} \quad \begin{cases} \dot{x}(t) = Fx(t) + Gu(t) \\ y(t) = Hx(t) + Du(t) \end{cases} \quad (1.8)$$

con:

$$x(t) \in R^n \quad u(t) \in R^r \quad y(t) \in R^m$$

$$F \in R^{n \times n} \quad G \in R^{n \times r}$$

$$H \in R^{m \times n} \quad D \in R^{m \times r}$$

$$F = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & \cdots & f_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_{n1} & f_{n2} & \cdots & f_{nn} \end{bmatrix}; \quad G = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & \cdots & g_{1r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ g_{n1} & g_{n2} & \cdots & g_{nr} \end{bmatrix};$$

$$H = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & \cdots & h_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ h_{m1} & h_{m2} & \cdots & h_{mn} \end{bmatrix}; \quad D = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & \cdots & d_{1r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ d_{m1} & d_{m2} & \cdots & d_{mr} \end{bmatrix}.$$

F è la matrice del sistema di stato.

G è la matrice di ingresso che esprime il legame tra gli ingressi e gli stati.

H è la matrice di uscita che esprime il legame tra gli stati e le uscite.

D è la matrice che indica l'esistenza di un legame istantaneo tra le uscite e gli ingressi.

Un sistema si definisce strettamente proprio se $D = 0$.

SISTEMI LINEARI: PRINCIPIO DI SOVRAPPOSIZIONE DEGLI EFFETTI

Per i sistemi lineari vale la proprietà di sovrapposizione degli effetti per cui l' "effetto" sulle variabili di stato e di uscita dovuto alla sovrapposizione di "cause" (ovvero ingressi e stati iniziali) è pari alla somma degli effetti dovuti alle singole cause agenti separatamente.

Riferendosi ai sistemi di equazioni (1.7) e (1.8) si ha che:

- Essendo $x'(\cdot)$ l'andamento dello stato e $y'(\cdot)$ l'andamento dell'uscita corrispondenti allo stato iniziale $x'(0) = x'_0$ e all'ingresso $u'(\cdot)$
- Essendo $x''(\cdot)$ l'andamento dello stato e $y''(\cdot)$ l'andamento dell'uscita corrispondenti allo stato iniziale $x''(0) = x''_0$ e all'ingresso $u''(\cdot)$
- Ottengo l'andamento dello stato $x'(\cdot) + x''(\cdot)$ e l'andamento dell'uscita $y'(\cdot) + y''(\cdot)$ corrispondenti allo stato iniziale $x(0) = x'_0 + x''_0$ e all'ingresso $u'(\cdot) + u''(\cdot)$.

DIMOSTRAZIONE:

Riferendomi ad un sistema a tempo continuo si ha:

$$\frac{dx'}{dt}(t) = Fx'(t) + Gu'(t), \quad x'(0) = x'_0$$

$$\frac{dx''}{dt}(t) = Fx''(t) + Gu''(t), \quad x''(0) = x''_0$$

$$\frac{d}{dt}(x'(t) + x''(t)) = F(x'(t) + x''(t)) + G(u'(t) + u''(t)), \quad x'(0) + x''(0) = x'_0 + x''_0$$

Quest'ultima equazione mostra che $x'(\cdot) + x''(\cdot)$ soddisfa l'equazione di stato (1.8) quando l'ingresso è $u'(\cdot) + u''(\cdot)$ e lo stato iniziale è $x'_0 + x''_0$.

Per l'uscita vale:

$$y'(t) = Hx'(t) + Du'(t)$$

$$y''(t) = Hx''(t) + Du''(t)$$

$$y'(t) + y''(t) = H(x'(t) + x''(t)) + D(u'(t) + u''(t))$$

dove l'ultima equazione dimostra la sovrapposizione delle uscite.

NB: Le cause da sommare per ottenere la sovrapposizione degli effetti sono sia gli ingressi che gli stati iniziali.

Talvolta si parla di sovrapposizione degli effetti nel legame ingresso-uscita di un sistema lineare considerando apparentemente nella sovrapposizione delle cause solo le funzioni di ingresso senza esplicito riferimento allo stato iniziale (e in questi casi si intende sempre che lo stato iniziale è nullo ovvero $x(0) = 0$).

La sovrapposizione degli effetti a partire dallo stato iniziale nullo non implica, in generale, la linearità del sistema dinamico che gode di questa proprietà.

Un'importante conseguenza del principio di sovrapposizione degli effetti è la seguente equazione:

$$x(\cdot) = x_l(\cdot) + x_f(\cdot)$$

dove:

$x_l(\cdot)$ è l'EVOLUZIONE LIBERA DI STATO corrispondente all'evoluzione dello stato a partire da $x(0) = x_0$ e ingresso nullo

$x_f(\cdot)$ è l'EVOLUZIONE FORZATA DI STATO corrispondente all'evoluzione dello stato a partire da $x(0) = 0$ e ingresso $u(\cdot)$

con $x(\cdot)$ l'evoluzione dello stato relativa allo stato iniziale $x(0) = x_0$ e all'ingresso $u(\cdot)$.

La linearità dell'equazione di uscita implica inoltre che l'uscita $y(\cdot)$ possa essere scritta a sua volta come somma dell'evoluzione libera $y_l(\cdot)$ e dell'evoluzione forzata $y_f(\cdot)$ ovvero:

$$y(\cdot) = y_l(\cdot) + y_f(\cdot)$$

OSSERVAZIONE: Un sistema lineare continuo o discreto di equazioni (1.7) o (1.8) sarà indicato con $\Sigma = (F, G, H, D)$ o se strettamente proprio con $\Sigma = (F, G, H)$.

Poiché la maggior parte delle proprietà di interesse sistemistico non dipendono da D , nel seguito si farà riferimento solo a sistemi strettamente propri, ovvero $\Sigma = (F, G, H)$ a meno che non sia diversamente precisato.

PROPRIETÀ DI TEMPO-INVARIANZA

Un'altra proprietà dei sistemi descritti dai sistemi di equazioni (1.5) e (1.6) è quella di essere invarianti rispetto a traslazioni temporali.

Per tradurre in termini formali questo concetto si definisce l'operatore di traslazione temporale di ampiezza Δ che associa ad ogni funzione $u(\cdot)$ la funzione $(\sigma^\Delta u)(\cdot)$ definita, $\forall t$, dalla:

$$(\sigma^\Delta u)(t) = u(t + \Delta)$$

Scelti allora arbitrariamente un intervallo $[\tau, t)$, uno stato iniziale $x(\tau) = x_0$ e una funzione d'ingresso $u(\cdot)$, i valori dello stato $x(t)$ e dell'uscita $y(t)$ al tempo t coincidono con i valori dello stato $x(t - \Delta)$ e dell'uscita $y(t - \Delta)$ al tempo $t - \Delta$, quando si assume $x(\tau - \Delta) = x_0$ come condizione iniziale in $\tau - \Delta$ e la funzione $(\sigma^\Delta u)(\cdot)$ come funzione d'ingresso nell'intervallo $[\tau - \Delta, t - \Delta)$.

La verifica che il sistema discreto dato dalle (1.5) goda delle proprietà di tempo-invarianza è immediata: basta applicare $(t - \tau)$ volte l'equazione di aggiornamento dello stato in un passo sui due intervalli $[\tau, t)$ $[\tau - \Delta, t - \Delta)$.

Per il sistema continuo (1.6), invece si supponga che $x(\cdot)$ soddisfi l'equazione differenziale seguente:

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(x(t), u(t)) \quad \text{con} \quad x(\tau) = x_0$$

e si ponga:

$$\begin{aligned} \bar{x}(\cdot) &= (\sigma^\Delta x)(\cdot) \\ \bar{u}(\cdot) &= (\sigma^\Delta u)(\cdot) \end{aligned}$$

Si ha allora:

$$\frac{d\bar{x}(t - \Delta)}{d(t - \Delta)} = \frac{d\bar{x}(t - \Delta)}{dt} = f(\bar{x}(t - \Delta), \bar{u}(t - \Delta)) \quad \text{con} \quad \bar{x}(\tau - \Delta) = x_0$$

Posto $t' = t - \Delta$ si ha:

$$\frac{d\bar{x}(t')}{d(t')} = f(\bar{x}(t'), \bar{u}(t')) \quad \text{con} \quad \bar{x}(\tau - \Delta) = x_0$$

Quest'ultima equazione prova che la funzione $\bar{x}(\cdot)$ è soluzione dell'equazione (1.6) con condizione iniziale:

$$\bar{x}(\tau - \Delta) = x_0$$

Al tempo $t - \Delta$ si ha allora:

$$\bar{x}(t - \Delta) = (\sigma^\Delta x)(t - \Delta) = x[(t - \Delta) + \Delta] = x(t)$$

Per quanto riguarda l'uscita, la tempo-invarianza è una conseguenza immediata dell'uguaglianza:

$$h(\bar{x}(t - \Delta), \bar{u}(t - \Delta)) = h(x(t), u(t))$$

1.1.2: SISTEMI LINEARI, TEMPO-INVARIANTI E DISCRETI

In questo paragrafo e nel successivo andremo ad analizzare la struttura delle mappe di aggiornamento di stato per i sistemi lineari e invarianti iniziando, qui, dai sistemi discreti poiché algebricamente più semplici.

Data la mappa di aggiornamento di stato di un passo:

$$x(t+1) = Fx(t) + Gu(t) \quad (1.9)$$

ci proponiamo di calcolare la mappa di aggiornamento dello stato in un numero generico di passi k e cioè di valutare lo stato all'istante $t+k$ conoscendo lo stato $x(t)$ nell'istante t e i valori $u(t), u(t+1), \dots, u(t+k-1)$ dell'ingresso nell'intervallo $[t, t+k)$.

Per la proprietà di tempo-invarianza è possibile considerare l'intervallo $[0, k)$ anziché l'intervallo $[t, t+k)$.

Considero come stato iniziale in 0 lo stato $x(t)$:

$$\text{STATO INIZIALE: } x(0) = x(t)$$

e come successione di valori dell'ingresso negli istanti $0, 1, \dots, k-1$ i valori:

$$u(t), u(t+1), \dots, u(t+k-1)$$

$$\text{ISTANTE INIZIALE: } t_0 = 0$$

Applicando ITERATIVAMENTE la (1.9) si ottiene:

$$\begin{aligned} x(1) &= Fx(0) + Gu(0) \\ x(2) &= Fx(1) + Gu(1) = F^2x(0) + FG u(0) + Gu(1) \\ x(3) &= Fx(2) + Gu(2) = F^2x(1) + FG u(1) + Gu(2) = \\ &= F^3x(0) + F^2G u(0) + FG u(1) + FG u(2) \\ &\vdots \\ &\vdots \\ &\vdots \\ x(k) &= F^k x(0) + F^{k-1}G u(0) + \dots + Gu(k-1) \end{aligned}$$

L'ultima equazione fornisce la mappa di aggiornamento di stato in k passi:

$$\begin{aligned} x(k) &= F^k x(0) + \sum_{i=0}^{k-1} F^{k-i-1} G u(i) = \\ &= x_l(k) + x_f(k) \end{aligned} \quad (1.10)$$

dove x_l è l'evoluzione libera dello stato che si ottiene dalla (1.10) ponendo $u(0) = u(1) = \dots = u(k-1) = 0$ risultando essere pari a

$$x_l(k) = F^k x(0)$$

mentre x_f è l'evoluzione forzata dello stato che si ottiene dalla (1.10) ponendo $x(0) = 0$ risultando essere pari a:

$$x_f(k) = \sum_{i=0}^{k-1} F^{k-i-1} G u(i)$$

Inoltre, l'espressione matriciale per $x_f(k)$ risulta essere pari a:

$$x_f(k) = [G | FG | \dots | F^{k-1}G] \begin{bmatrix} u(k-1) \\ u(k-2) \\ \vdots \\ u(0) \end{bmatrix}$$

dove

$[G | FG | \dots | F^{k-1}G]$ è una matrice a blocchi di dimensioni $n \times rk$

$\begin{bmatrix} u(k-1) \\ u(k-2) \\ \vdots \\ u(0) \end{bmatrix}$ è un vettore di dimensione $rk \times 1$ costruito con i valori della $u(\cdot)$

OSSERVAZIONE:

Ipotizzando che esista F^{-1} , il sistema risulta reversibile.

Noto $x(k)$ e u in $[0, k)$ posso calcolare lo stato iniziale $x(0)$:

$$x(0) = F^{-k} x(k) + \sum_{i=0}^{k-1} F^{-i-1} G u(i)$$

L'uscita sarà:

$$y(t) = Hx(t) + Du(t)$$

$$y(k) = HF^k x(0) + \sum_{i=0}^{k-1} HF^{k-i-1} G u(i) + Du(k) \quad (1.11)$$

$$= Y_l(k) + Y_f(k)$$

con

$$Y_f(k) = HF^k x(0) = Hx_f(k)$$

il contributo in evoluzione libera
al valore dell'uscita all'istante k

(1.12)

$$Y_f(k) = \sum_{i=0}^{k-1} HF^{k-i-1} Gu(i) + Du(k)$$

$$= Hx_f(k) + Du(k)$$

il contributo in evoluzione
forzata al valore dell'uscita
all'istante k

con STATO INIZIALE $x(0)$

e con SUCCESSIONE DI INGRESSI $u(0), u(1), \dots, u(k-1), u(k)$.

Le matrici $HF^{k-1-i}G$ con $i = 0, \dots, (k-1)$ si possono indicare come HF^hG con $h = 0, 1, \dots$ e hanno dimensione $m \times r$ dove m è la dimensione del vettore y ed r è la dimensione del vettore u .

Alle matrici HF^hG si può attribuire un interessante significato che risulta essere immediato nel caso di un sistema con $r = m = 1$ ovvero con un solo ingresso e una sola uscita ovvero si tratta della cosiddetta risposta impulsiva (d'uscita) per la cui trattazione si rimanda all'appendice A.1.

In realtà questo significato risulta valido anche avendo più uscite ma un solo ingresso.

Posto:

$$\begin{aligned} x(0) &= 0 \\ u(0) &= 1 \\ u(1) &= u(2) = \dots = 0 \end{aligned}$$

si ha:

$$\begin{aligned} y(0) &= y_f(0) = Du(0) = D \\ y(1) &= y_f(1) = HGu(0) = HG \\ &\dots \\ y(h) &= y_f(h) = HF^{h-1}Gu(0) = HF^{h-1}G \\ &\dots \end{aligned}$$

Per sistemi multivariabili (ovvero con un numero di ingressi e/o uscite > 1) è possibile estendere l'interpretazione precedente alle colonne delle matrici HF^hG .

Posto :

$$x(0) = 0$$

$$u(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \leftarrow i\text{-esima componente}$$

$$u(1) = u(2) = \dots = 0$$

si ha che:

$$\begin{aligned} y(0) &\text{ è l}'i\text{-esima colonna di } D \\ y(1) &\text{ è l}'i\text{-esima colonna di } HG \\ &\dots \\ y(h) &\text{ è l}'i\text{-esima colonna di } HF^{h-1}G \\ &\dots \end{aligned}$$

Quindi l' i -esima colonna della successione di matrici D, HG, HFG, HF^2G, \dots e' la risposta impulsiva d'uscita in corrispondenza a un ingresso impulsivo applicato al solo i -esimo morsetto d'ingresso.

OSSERVAZIONE:

Se, anziché considerare come istante iniziale il tempo 0 come si è fatto nella equazione (1.10), si assume un istante generico t , l'espressione di $x(k)$, per $k \geq t$, è ricavabile ancora in modo ricorsivo dalla (1.9) e dipenderà da $x(t)$ e dalla successione degli ingressi $u(i)$, $t \leq i \leq k - 1$, secondo la:

$$x(k) = F^{k-t}x(t) + \sum_{i=t}^{k-1} F^{k-i-1}Gu(i)$$

Come si vede dalle equazioni (1.10) e (1.12) il calcolo di $x(k)$ e $y(k)$ con $k = 0, 1, \dots$ si basa sostanzialmente sul calcolo delle potenze della matrice F .

Tale calcolo risulta semplificato se si tiene conto dei seguenti fatti:

- Le potenze di matrici simili F e $T^{-1}FT$ sono legate dalla relazione:

$$\begin{aligned} (T^{-1}FT)^k &= (T^{-1}FT)(T^{-1}FT) \dots (T^{-1}FT) = \\ &= T^{-1}F \cdot I \cdot F \cdot \dots \cdot F \cdot T \\ &= T^{-1}F^kT \end{aligned}$$

- Ogni matrice è riconducibile, per similarità, ad una matrice diagonale a blocchi in forma di Jordan. In particolare, le matrici di struttura semplice si riconducono a matrici diagonali, con elementi eventualmente complessi, o alla forma reale di Jordan.

- La potenza k -esima di una matrice diagonale a blocchi è una matrice diagonale a blocchi con i blocchi sulla diagonale costituiti dalle potenze k -esime dei blocchi della matrice di partenza.

Si tratta quindi di esprimere le potenze dei miniblocchi di Jordan e dei blocchi della forma reale di Jordan.

Per quanto riguarda la potenza k -esima di un miniblocco J di Jordan di ordine i relativo all'autovalore $\lambda \neq 0$ si ha:

$$J^k = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \cdot & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda \end{bmatrix}^k = \begin{bmatrix} \lambda^k & \lambda^{k-1} \binom{k}{1} & \dots & \lambda^{k-i+1} \binom{k}{i-1} \\ 0 & \lambda^k & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dots & \dots & \dots & \lambda^k \end{bmatrix} \quad (1.13)$$

con la condizione $\binom{k}{l} = 0$ se $l > k$

La dimostrazione della (1.13) si basa sullo sviluppo binomiale della somma di due matrici che commutano.

Considerata N , matrice nilpotente, pari a:

$$N = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \cdot & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

si ottiene:

$$\begin{aligned} J^k &= (\lambda I + N)^k \\ &= \lambda^k I^k + \binom{k}{1} \lambda^{k-1} I^{k-1} N + \binom{k}{2} \lambda^{k-2} I^{k-2} N^2 + \dots + N^k \end{aligned} \quad (1.14)$$

Data la struttura delle matrici N^j con $j = 0, 1, \dots$, ciascuno dei termini della somma in (1.14) contribuisce ad una sola delle sovradiagonali di J^k .

INTEGRAZIONE:

La matrice N è NILPOTENTE se $\exists k \in \mathbb{Z}, k > 0$ tale che:

$$N^k = 0$$

Ad esempio:

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$J^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$J^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$J^4 = 0 \rightarrow$ la matrice J è NILPOTENTE!

In generale, se $\lambda = 0$, si ha:

$$J^k = \begin{bmatrix} \delta(k) & \delta(k-1) & \dots & \dots & \dots & \delta(k-d+1) \\ 0 & \delta(k) & \delta(k-1) & \dots & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \delta(k) & \delta(k-1) \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \delta(k) \end{bmatrix}$$

con $\dim(J) = d$.

I modi elementari della matrice F (o, equivalentemente, del sistema), associati al miniblocco J relativo all'autovalore $\lambda \neq 0$, sono le successioni elementari presenti nella (1.14) ovvero per $k \in \mathbb{Z}_+$:

$$\lambda^k, \binom{1}{k} \lambda^{k-1}, \dots, \binom{k}{\mu-1} \lambda^{k-\mu+1}$$

dove μ è la dimensione del miniblocco di Jordan J relativo a λ .

Il coefficiente binomiale che appare nell'espressione dei modi elementari serve anche ad introdurre l'informazione sull'istante temporale in cui i modi diventano "attivi".

I modi elementari della matrice F (o, equivalentemente, del sistema), associati al miniblocco J relativo all'autovalore nullo $\lambda = 0$, sono pari, per $k \in \mathbb{Z}_+$, alla sequenza di impulsi:

$$\delta(k), \delta(k-1), \dots, \dots, \delta(k-\mu_0+1)$$

dove μ_0 è la dimensione del miniblocco di Jordan J relativo all'autovalore $\lambda = 0$.

Cerchiamo ora di capire come valutare il numero dei modi elementari distinti coinvolti.

Per far questo, introduciamo la seguente notazione dove la matrice F è scritta in forma di Jordan con l'ipotesi di aver ordinato i miniblocchi relativi al medesimo i -esimo autovalore λ_i dal più grande al più piccolo (risultato ottenibile tramite l'applicazione di opportune matrici di permutazione davanti e dietro alla matrice F già scritta in forma di Jordan). Assumiamo che $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ siano gli autovalori distinti di F .

I blocchi F_i della matrice F sono, a loro volta, delle matrici a blocchi i cui blocchi sono dati dai miniblocchi di Jordan relativi all' i -esimo autovalore λ_i .

Quindi si ha:

$$F = \begin{bmatrix} F_1 & & & \\ & F_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & F_r \end{bmatrix}$$

dove:

$$F_i = \begin{bmatrix} J_{i,1} & & & \\ & J_{i,2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_{i,s_i} \end{bmatrix}$$

con $J_{i,l}$ l' l -esimo miniblocco di Jordan relativo all' i -esimo autovalore λ_i , di dimensione $n_{i,l}$, ovvero:

$$J_{i,l} = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & & & \\ & \lambda_i & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \lambda_i & 1 \\ & & & & \lambda_i \end{bmatrix} \in C^{n_{i,l} \times n_{i,l}}$$

Si nota che, avendo ordinato i miniblocchi di Jordan in ordine decrescente, vale la seguente disuguaglianza:

$$n_{i,1} \geq n_{i,2} \geq \dots \geq n_{i,s_i}$$

dove s_i è il numero dei miniblocchi di Jordan relativi all' i -esimo autovalore λ_i (che risulta esser uguale anche alla molteplicità geometrica di λ_i).

Ogni miniblocco di Jordan $J_{i,l}$ di dimensione $n_{i,l}$ relativo all'autovalore λ_i individua $n_{i,l} = \dim(J_{i,l})$ modi elementari distinti e linearmente indipendenti. Ovviamente, se si

considerano due miniblocchi di Jordan relativi al medesimo autovalore λ_i , il numero di modi elementari distinti individuati dai due miniblocchi coincide con la dimensione del più grande dei due miniblocchi. Quindi, il massimo numero di modi elementari distinti associati all'autovalore λ_i è pari alla dimensione del più grande miniblocco di Jordan relativo a λ_i e, quindi ad $n_{i,1}$ nel caso in cui si ipotizzi di ordinare in modo decrescente i miniblocchi nella forma di Jordan di F relativi a λ_i . Complessivamente, il numero totale di modi elementari distinti individuati dalla matrice F sarà, quindi, pari a $\sum_{i=1}^r n_{i,1}$ dove r è il numero degli autovalori distinti della matrice F .

È importante sottolineare, inoltre, come tale informazione su quanti e quali siano i modi del sistema venga fornita proprio dal grado del polinomio (annullatore) minimo della matrice F in quanto esso coincide con:

$$\Psi_F(z) = \prod_{i=1}^r (z - \lambda_i)^{n_{i,1}}$$

Dunque riassumendo:

- 1) il numero dei modi distinti, relativi ad uno specifico autovalore λ_i , è pari alla dimensione del più grande miniblocco di Jordan ad esso relativo. Tale dimensione coincide con la molteplicità di λ_i come zero del polinomio (annullatore) minimo;
- 2) mettendo, poi, assieme gli r autovalori distinti della matrice F , ottengo che il numero complessivo di modi elementari distinti sia pari, proprio, al grado del polinomio (annullatore) minimo di F (o equivalentemente della sua forma di Jordan).

Il modo elementare $m(k) = \binom{k}{l} \lambda^{k-l}$, $k, l \in \mathbb{Z}_+$ e $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ è:

- convergente (a zero, per $k \rightarrow +\infty$), ovvero $\lim_{k \rightarrow +\infty} m(k) = 0$ se e solo se $|\lambda| < 1$;
- limitato, ovvero $\exists M \in \mathbb{R}_+$ tale che $|m(k)| < M, \forall k \in \mathbb{Z}_+$ se e solo se $|\lambda| \leq 1$ e, nel caso in cui $|\lambda| = 1, l = 0$;
- divergente (per $k \rightarrow +\infty$) in tutti gli altri casi.

Gli eventuali modi elementari associati all'autovalore nullo, $\delta(k-l)$ con $k, l \in \mathbb{Z}_+$, sono sempre convergenti a zero.

Per il calcolo della potenza k -esima di un blocco diagonale della forma reale di Jordan, relativo alla coppia di autovalori complessi coniugati $\sigma \pm j\omega$, del tipo:

$$M = \begin{bmatrix} \sigma & \omega \\ -\omega & \sigma \end{bmatrix}$$

si procede nel modo seguente.

Si ponga:

$$\begin{aligned} |\lambda| &= |\sigma + j\omega| \\ \theta &= \arg(\sigma + j\omega) \end{aligned}$$

da cui segue:

$$\begin{aligned} \sin\theta &= \frac{\omega}{|\lambda|} \\ \cos\theta &= \frac{\sigma}{|\lambda|} \end{aligned}$$

Si scomponga ora M nel prodotto:

$$M = DR = RD \quad (1.15)$$

dove i fattori sono:

$$D = \begin{bmatrix} |\lambda| & 0 \\ 0 & |\lambda| \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \quad (1.16)$$

I fattori D ed R inducono sui vettori di R^2 una dilatazione di ampiezza $|\lambda|$ e una rotazione di ampiezza angolare θ .

Ovviamente M^k induce una dilatazione di ampiezza $|\lambda|^k$ e una rotazione di ampiezza angolare $(k\theta)$.

Dalle (1.15) e (1.16) segue che:

$$M^k = D^k R^k = |\lambda|^k \begin{bmatrix} \cos(k\theta) & \sin(k\theta) \\ -\sin(k\theta) & \cos(k\theta) \end{bmatrix}$$

Inoltre, i modi elementari reali equivalenti, relativi alla coppia di autovalori complessi coniugati $\sigma \pm j\omega$, sono dati dalle seguenti successioni:

$$\begin{aligned} &|\lambda_i|^k \cos(k\theta_i), k|\lambda_i|^k \cos(k\theta_i), \dots, \frac{k^{\mu-1}}{(\mu-1)!} |\lambda_i|^k \cos(k\theta_i) \\ &|\lambda_i|^k \sin(k\theta_i), k|\lambda_i|^k \sin(k\theta_i), \dots, \frac{k^{\mu-1}}{(\mu-1)!} |\lambda_i|^k \sin(k\theta_i) \end{aligned}$$

con $i = 1, \dots, h$ dove h è il numero delle coppie di autovalori complessi coniugati $\sigma \pm j\omega$.
Ci saranno h modi elementari reali equivalenti.

Riassumendo si ha, quindi, che i modi reali, nel caso in cui h coppie di autovalori siano complesse coniugate, sono pari alle successioni seguenti:

$$|\lambda_i|^k \cos(k\theta_i), k|\lambda_i|^k \cos(k\theta_i), \dots, \frac{k^{\mu-1}}{(\mu-1)!} |\lambda_i|^k \cos(k\theta_i)$$

$$|\lambda_i|^k \cos(k\theta_i), k|\lambda_i|^k \cos(k\theta_i), \dots, \frac{k^{\mu-1}}{(\mu-1)!} |\lambda_i|^k \cos(k\theta_i)$$

$$\lambda_j^k, k\lambda_j^k, \dots, \frac{k^{\mu-1}}{(\mu-1)!} \lambda_j^k$$

con $i = 1, 2, \dots, h$ ed $j = 2h + 1, \dots, r$ dove r è il numero di autovalori distinti della matrice F e μ è la molteplicità del singolo autovalore delle successioni (ovvero o λ_i o λ_j).

1.1.3: SISTEMI LINEARI, TEMPO-INVARIANTI E A TEMPO CONTINUO

Si consideri il legame ingresso-stato in forma implicita per i sistemi a tempo continuo:

$$\dot{x}(t) = Fx(t) + Gu(t) \quad (1.17)$$

Per rendere esplicito questo legame devo determinare la struttura delle soluzioni della (1.17) a partire dalla conoscenza dello stato in un istante iniziale $x(t_0)$ e della funzione d'ingresso successivamente a tale istante $u(t > t_0)$.

Analogamente ai sistemi discreti, per la proprietà di tempo-invarianza, non è restrittivo considerare come istante iniziale $t = 0$.

Inoltre per la linearità il valore dello stato in ogni istante risulta essere pari alla somma dei termini di evoluzione libera e di evoluzione forzata:

$$x(t) = x_l(t) + x_f(t)$$

1.1.3.1: EVOLUZIONE LIBERA DELLO STATO

Per $u(\cdot) = 0$, l'evoluzione libera dello stato è la soluzione dell'equazione vettoriale, differenziale del primo ordine, seguente:

$$\dot{x}(t) = Fx(t) \quad (1.18)$$

corrispondente ad un fissato stato iniziale $x(0)$, dove $x(t) \in R^n$ e $F \in R^{n \times n}$.

L'equazione (1.18) corrisponde ad un sistema di n equazioni differenziali, lineari e scalari del primo ordine nelle incognite $x_1(\cdot), x_2(\cdot), \dots, x_n(\cdot)$.

Un insieme di funzioni vettoriali $v_1(\cdot), v_2(\cdot), \dots, v_n(\cdot)$ soluzione della (1.18) è un INSIEME FONDAMENTALE DI SOLUZIONI se le funzioni vettoriali $v_i(\cdot)$, $i = 1, 2, \dots, n$ sono linearmente indipendenti.

NB: Le n funzioni vettoriali $v_1(\cdot), \dots, v_n(\cdot)$ sono LINEARMENTE INDIPENDENTI se non esiste alcuna loro combinazione lineare con coefficienti non tutti nulli che sia identicamente nulla. In altre parole suddette funzioni sono linearmente indipendenti se:

$$\alpha_1 v_1(t) + \dots + \alpha_n v_n(t) = 0 \quad \forall t \implies \alpha_i = 0, \quad \forall i = 1, \dots, n$$

Per ottenere un insieme fondamentale di soluzioni è sufficiente considerare la n -upla di soluzioni corrispondenti ad n stati iniziali linearmente indipendenti.

Ogni soluzione della (1.18) è esprimibile come combinazione lineare di un insieme fondamentale di soluzioni.

Si consideri l'insieme fondamentale delle soluzioni $\phi_1(\cdot), \dots, \phi_n(\cdot)$ corrispondenti alle condizioni iniziali:

$$\begin{aligned}
e_1 &= [1, 0, \dots, 0]^T \\
e_2 &= [0, 1, \dots, 0]^T \\
&\dots \\
e_n &= [0, 0, \dots, 1]^T
\end{aligned}$$

Per linearità, allo stato iniziale

$$x(0) = [x_1(0), \dots, x_n(0)]^T = x_1(0)e_1 + \dots + x_n(0)e_n$$

corrisponde la soluzione

$$\begin{aligned}
x_i(t) &= x_1(0)\phi_1(t) + x_2(0)\phi_2(t) + \dots + x_n(0)\phi_n(t) \\
&= \phi(t)x(0), \quad t \geq 0
\end{aligned}$$

con matrice di transizione di stato la seguente:

$$\phi(t) = [\phi(t), \dots, \phi(t)]$$

La matrice di transizione di stato soddisfa l'equazione differenziale matriciale:

$$\dot{\phi}(t) = F\phi(t) \quad \text{con} \quad \phi(0) = I \quad (1.19)$$

Per dimostrare questa equazione basta esprimere la $\phi(t)$ nella forma $\phi(t) = [\phi(t), \dots, \phi(t)]$ e derivare ogni colonna per ottenere $\dot{\phi}(t)$ ricordandosi che le $\phi_i(\cdot)$, $i = 1, \dots, n$ sono le soluzioni della equazione $\dot{x}(t) = Fx(t)$ e quindi $\dot{\phi}(t) = F\phi(t)$.

Una proprietà importante della matrice di transizione di stato $\phi(t)$ è la seguente:

$$\exists \phi^{-1}(t) \quad \forall t$$

ovvero la matrice di transizione di stato $\phi(t)$ è invertibile per ogni istante t .

Infatti supponiamo per assurdo che, in corrispondenza ad un istante τ , la matrice $\phi(\tau)$ sia singolare. Ciò implicherebbe l'esistenza di un vettore $v \neq 0$ tale che:

$$\phi(\tau) \cdot v = 0$$

Ma dato che:

$$x_i(t) = \phi(t)x(0), \quad t \geq 0$$

$$\text{per } x(0) = v \implies x_i(t) = \phi(t) \cdot v = 0 \quad (1.20)$$

$$\text{Se si assume, invece, } x(0) = 0 \implies x_i(\tau) = \phi(\tau) \cdot 0 = 0 \quad (1.21)$$

Tuttavia, per l'unicità delle soluzioni dei sistemi di equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti, le equazioni (1.20) e (1.21) sono in contrapposizione dato che le soluzioni corrispondenti alle condizioni iniziali $x(0) = v$ e $x(0) = 0$ assumerebbero in τ lo stesso valore.

Giungendo, quindi, a questo assurdo abbiamo dimostrato che $\phi(t)$ è invertibile per ogni istante t .

Per calcolare $\phi(t)$, si ricorre alla soluzione dell'equazione matriciale (1.19):

$$\dot{\phi}(t) = F\phi(t), \quad t \geq 0, \quad \phi(0) = I$$

e non alla determinazione delle singole $\phi_i(\cdot)$ risolvendo n volte l'equazione $\dot{x}(t) = Fx(t)$.

È possibile usare delle TRASFORMAZIONI di SIMILARITÀ sulla matrice F in modo da ricondurre la soluzione della (1.19) a quella di un numero limitato di equazioni matriciali di cui è nota la struttura delle soluzioni.

Difatti, sia T una matrice che riduce F in forma diagonale a blocchi, in particolare in forma di Jordan.

Dunque $\forall F \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\exists T$ (COMPLESSA) NON SINGOLARE $n \times n$ con T matrice di cambio base nello spazio di stato tale che:

$$\bar{F} = T^{-1}FT = J = \begin{bmatrix} J_1 & & & 0 \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & J_r \end{bmatrix}$$

con:

$$J_e = \begin{bmatrix} \lambda_e & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_e & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \\ \cdot & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_e \end{bmatrix} \quad \text{MINIBLOCCO di JORDAN}$$

Dalla (1.19), posto

$$\bar{\phi}(t) = T^{-1}\phi(t)T$$

si ha:

$$\begin{aligned} \dot{\bar{\phi}}(t) &= T^{-1}\dot{\phi}(t)T = T^{-1}F\phi(t)T = (T^{-1}FT)(T^{-1}\phi(t)T) = (T^{-1}FT)\bar{\phi}(t) \\ &= \bar{F}\bar{\phi}(t) \quad \text{con} \quad \bar{\phi}(0) = I \end{aligned}$$

Dunque si è ricavato:

$$\dot{\bar{\phi}}(t) = \bar{F}\bar{\phi}(t), \quad \bar{\phi}(0) = I \quad (1.22)$$

Partizionando la matrice $\bar{\phi}(\cdot)$ in modo conforme alla \bar{F} , tutti i suoi blocchi non diagonali sono nulli $\forall t$ in quanto sono soluzioni di equazioni differenziali lineari omogenee con condizioni iniziali nulle.

L'equazione (1.22) si riduce così ad r equazioni differenziali, matriciali, indipendenti, di ordine corrispondente a quello dei blocchi di \bar{F} .

Nel caso in cui i blocchi diagonali siano miniblocchi di Jordan, le soluzioni di queste equazioni hanno strutture tipiche e sono esprimibili in forma chiusa.

Per esaminare in dettaglio, le proprietà delle soluzioni della (1.19):

$$\dot{\phi}(t) = F\phi(t), \quad t \geq 0, \quad \phi(0) = I$$

conviene, inizialmente, riferirsi ad una soluzione di validità generale espressa in forma di sviluppo in serie.

È immediato (applicando il teorema di derivazione per serie) che la somma della serie di potenze a coefficienti matriciali, convergente $\forall t$,

$$\phi(t) = I + Ft + F^2 \frac{t^2}{2!} + \dots + F^k \frac{t^k}{k!} + \dots \quad (1.23)$$

sia soluzione della (1.19).

Data la somiglianza formale della (1.23) con la serie esponenziale scalare, si sceglie di indicare, per pura analogia la somma della (1.23) con il simbolo e^{Ft} oppure $\exp(Ft)$ chiamandola matrice esponenziale mentre il secondo membro della (1.23) si chiama serie esponenziale.

L'evoluzione libera di stato del sistema è quindi esprimibile nella forma:

$$x_l(t) = e^{Ft} x(0) \quad (1.24)$$

PROPRIETÀ della MATRICE ESPONENZIALE:

- 1) $\forall t_1, t_2 \longrightarrow e^{Ft_1} e^{Ft_2} = e^{F(t_1+t_2)} = e^{Ft_2} e^{Ft_1}$
- 2) $e^{Ft} e^{\bar{F}t}, e^{\bar{F}t} e^{Ft}, e^{(F+\bar{F})t}$ coincidono $\forall t$ se e solo se $F\bar{F} = \bar{F}F$ ovvero se e solo se F ed \bar{F} commutano.

Per provarlo si ricorre al principio di identità delle serie di potenze.

Se $F\bar{F} \neq \bar{F}F$ gli sviluppi in serie:

$$e^{Ft} e^{\bar{F}t} = I + (F + \bar{F})t + \frac{1}{2}(F^2 + 2F\bar{F} + \bar{F}^2)t^2 + \dots$$

$$e^{\bar{F}t} e^{Ft} = I + (\bar{F} + F)t + \frac{1}{2}(\bar{F}^2 + 2\bar{F}F + F^2)t^2 + \dots$$

$$e^{(F+\bar{F})t} = I + (F + \bar{F})t + \frac{1}{2}(F^2 + F\bar{F} + \bar{F}F + \bar{F}^2)t^2 + \dots$$

Differiscono già nei termini del secondo ordine mentre se $F\bar{F} = \bar{F}F$ i termini di ogni ordine sono coincidenti.

- 3) $(e^{Ft})^{-1} = e^{-Ft}$

Infatti $I = e^0 = e^{Ft-Ft} = e^{Ft} \cdot e^{-Ft} \longrightarrow (e^{Ft})^{-1} = e^{-Ft}$

$$4) \quad e^{F^T t} = (e^{Ft})^T$$

5) Se v è autovettore di F relativo all'autovalore λ allora è anche autovalore di e^{Ft} relativo all'autovalore di $e^{\lambda t}$ per ogni t

Dalla $Fv = \lambda v \implies F^t v = \lambda^t v$ da cui segue:

$$(e^{Ft})v = \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{F^k}{k!} t^k \right) v = \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\lambda t)^k}{k!} \right) v = (e^{\lambda t})v$$

$$6) \quad \frac{d}{dt} e^{Ft} = F e^{Ft}$$

$$7) \quad T^{-1} \exp(Ft) T = \exp(T^{-1} F t T)$$

Per provarlo si ricorre allo sviluppo in serie:

$$\begin{aligned} \exp(T^{-1} F t T) &= I + T^{-1}(Ft)T + \frac{(T^{-1} F t T)^2}{2!} + \dots \\ &= I + T^{-1}(Ft)T + \frac{(T^{-1} F t T)(T^{-1} F t T)}{2!} + \dots \\ &= T^{-1}T + T^{-1}(Ft)T + T^{-1} \frac{(Ft)^2}{2!} T + \dots \\ &= T^{-1} \exp(Ft) T \end{aligned}$$

8) Se F è diagonale, $F = \text{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$, allora e^{Ft} è diagonale e risulta essere:

$$e^{Ft} = \text{diag}\{e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}, \dots, e^{\lambda_n t}\}$$

9) Se F è diagonale a blocchi, $F = \text{diag}\{F_1, F_2, \dots, F_r\}$, allora e^{Ft} è diagonale a blocchi e risulta essere:

$$e^{Ft} = \text{diag}\{e^{F_1 t}, e^{F_2 t}, \dots, e^{F_r t}\}$$

10) Se F è triangolare a blocchi, allora e^{Ft} è triangolare e si ha:

$$\exp\left(\begin{bmatrix} F_{11} & * & \dots & * & \\ & F_{22} & & \cdot & \\ & & & \cdot & \\ & & & \cdot & * \\ 0 & & & & F_{rr} \end{bmatrix} t \right) = \begin{bmatrix} \exp F_{11} t & * & \dots & * & \\ & \exp F_{22} t & & \cdot & \\ & & & \cdot & \\ & & & \cdot & * \\ 0 & & & & \exp F_{rr} t \end{bmatrix}$$

dove * indica i blocchi la cui struttura non è definita a priori.

11) Se J è un miniblocco di Jordan di ordine i , si ha:

$$\begin{aligned}
\exp(Jt) &= \exp\left(\begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ & \lambda & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \\ \cdot & & & \dots & 1 \\ 0 & & & \dots & \lambda \end{bmatrix} t \right) \\
&= \begin{bmatrix} e^{\lambda t} & te^{\lambda t} & \dots & \dots & \frac{t^{i-1}}{(i-1)!} e^{\lambda t} \\ & e^{\lambda t} & te^{\lambda t} & \dots & \dots \\ & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & & \dots & \dots & te^{\lambda t} \\ & & & \dots & e^{\lambda t} \end{bmatrix} \\
&= e^{\lambda t} \begin{bmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2!} & \dots & \frac{t^{i-1}}{(i-1)!} \\ & 1 & t & \dots & \frac{t^{i-2}}{(i-2)!} \\ & & 1 & \dots & \dots \\ & & & \dots & t \\ & & & & 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Per la verifica si esprime J nella forma:

$$J = (\lambda I + N)$$

dove N è la matrice nilpotente considerata precedentemente ovvero un miniblocco di Jordan di dimensione i relativo all'autovalore nullo.

$$N = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \\ \cdot & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

Poiché le matrici λI ed N commutano, si ha:

$$e^{Jt} = e^{\lambda t} e^{Nt}$$

dove e^{Nt} è la matrice $\text{diag}\{e^{\lambda t} e^{\lambda t} \dots e^{\lambda t}\}$ dove $e^{\lambda t}$ è ripetuto i volte.

Per la nilpotenza di N si ottiene:

$$e^{Nt} = I + Nt + \frac{N^2 t^2}{2!} + \dots + \frac{N^{i-1} t^{i-1}}{(i-1)!}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2!} & \cdots & \frac{t^{i-1}}{(i-1)!} \\ & 1 & t & \cdots & \frac{t^{i-2}}{(i-2)!} \\ & & 1 & \cdots & \cdots \\ & & & \cdots & t \\ & & & & 1 \end{bmatrix}$$

12) Se M è un blocco diagonale reale di Jordan relativo agli autovalori $\sigma \pm j\omega$ si ha:

$$\exp(Mt) = \exp\left(\begin{bmatrix} \sigma & \omega \\ -\omega & \sigma \end{bmatrix} t\right) = e^{\sigma t} \begin{bmatrix} \cos\omega t & \sin\omega t \\ -\sin\omega t & \cos\omega t \end{bmatrix}$$

Per la verifica si osservi che σI e $\Delta = \begin{bmatrix} 0 & \omega \\ -\omega & 0 \end{bmatrix}$ commutano:

$$\sigma I \cdot \Delta = \Delta \cdot \sigma I$$

$$\begin{bmatrix} \sigma & 0 \\ 0 & \sigma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \omega \\ -\omega & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \omega \\ -\omega & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma & 0 \\ 0 & \sigma \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & \sigma\omega \\ -\sigma\omega & \sigma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \sigma\omega \\ -\sigma\omega & \sigma \end{bmatrix}$$

e perciò:

$$e^{Mt} = e^{\sigma t} e^{\Delta t} = e^{\sigma t} e^{\Delta t}$$

Ricorrendo allo sviluppo in serie di $e^{\Delta t}$ e ricordando la struttura degli sviluppi in serie delle funzioni $\sin(\omega t)$ e $\cos(\omega t)$ si ottiene:

$$e^{\Delta t} = \begin{bmatrix} \cos\omega t & \sin\omega t \\ -\sin\omega t & \cos\omega t \end{bmatrix}$$

OSSERVAZIONE 1: Una conseguenza della proprietà 7 è la possibilità di calcolare l'esponenziale della matrice F quando si sappia calcolare l'esponenziale di una matrice simile ad F .

In particolare, se F è diagonalizzabile, si può usare la proprietà 8 altrimenti, se F non è diagonalizzabile ma riducibile in forma canonica di Jordan (complessa o reale), si possono usare le proprietà 9 e 10.

Gli esponenziali dei miniblocchi di Jordan, calcolati in (11) e (12), forniscono in forma chiusa la struttura tipica delle soluzioni per gli r sistemi indipendenti di equazioni differenziali matriciali nei quali si scompone l'equazione (1.19).

Si sottolinea, però, che il calcolo degli autovalori ed autovettori generalizzati di grandi matrici è numericamente più oneroso del ricorso a procedure iterative di calcolo della matrice esponenziale che prescindono dal passaggio attraverso la forma di Jordan.

La forma di Jordan rimane, comunque, molto interessante dal punto di vista concettuale.

Difatti, quando F è in forma di Jordan, la dinamica è descrivibile in modo molto semplice giustapponendo le evoluzioni di sistemi elementari (uno per ogni miniblocco di Jordan) e le

proprietà strutturali (raggiungibilità, osservabilità e stabilità interna) sono legate alla natura e al numero di tali sistemi elementari.

OSSERVAZIONE 2: Dalle proprietà viste si evince come le operazioni sulle matrici esponenziali abbiano forti analogie con quelle sulle funzioni esponenziali scalari. La proprietà 2 rappresenta la differenza più importante.

1.1.3.2: EVOLUZIONE FORZATA DELLO STATO

L'evoluzione forzata dello stato è la soluzione dell'equazione (1.17) a partire da uno stato iniziale nullo $x(0) = 0$.

Tale soluzione è esprimibile mediante la matrice di transizione $exp(Ft)$ ed è data dalla:

$$x_f(t) = \int_0^t e^{F(t-\sigma)} Gu(\sigma) d\sigma \quad (1.25)$$

Verifichiamo ora la validità di quest'ultima equazione.

Applicando la formula di derivazione sotto il segno di integrale si ha:

$$\begin{aligned} \dot{x}_f(t) &= Gu(t) + \int_0^t \frac{\partial}{\partial t} e^{F(t-\sigma)} Gu(\sigma) d\sigma \\ &= Gu(t) + F \int_0^t e^{F(t-\sigma)} Gu(\sigma) d\sigma \\ &= Gu(t) + Fx_f(t) \end{aligned}$$

Quindi $x_f(\cdot)$ soddisfa la (1.17) e, poiché $x_f(0) = 0$, per l'unicità della soluzione essa rappresenta l'evoluzione forzata del sistema.

Sovrapponendo l'evoluzione libera (1.24) e l'evoluzione forzata (1.25), si ottiene l'evoluzione dello stato in corrispondenza ad uno stato iniziale $x(0) = x_0$ e ad un ingresso $u(\cdot)$:

$$x(t) = x_l(t) + x_f(t) = e^{Ft} x_0 + \int_0^t e^{F(t-\sigma)} Gu(\sigma) d\sigma \quad (1.26)$$

Se $t_0 = \tau \neq 0$, si ha:

$$x(t) = x_l(t) + x_f(t) = e^{F(t-\tau)} x_0 + \int_\tau^t e^{F(t-\sigma)} Gu(\sigma) d\sigma \quad (1.27)$$

OSSERVAZIONE:

Dato che la matrice esponenziale è invertibile $\forall t$, i sistemi continui sono reversibili.

Dalla (1.26) utilizzando la proprietà 3) si ha:

$$x_0 = e^{-Ft}x(t) - \int_0^t e^{-F\sigma}Gu(\sigma)d\sigma$$

Dalla mappa di uscita:

$$y(t) = Hx(t) + Du(t)$$

utilizzando la (1.26), si ottiene:

$$\begin{aligned}y(t) &= He^{Ft}x_0 + \int_0^t He^{F(t-\sigma)}Gu(\sigma)d\sigma + Du(t) \\ &= y_l(t) + y_f(t)\end{aligned}$$

con:

$$\begin{aligned}y_l(t) &= Hx_l(t) \\ y_f(t) &= H_f(t) + Du(t)\end{aligned}$$

1.1.4: RAPPRESENTAZIONE IN s DEI SISTEMI LINEARI E CONTINUI

Si consideri un sistema lineare, invariante e continuo:

$$\dot{x}(t) = Fx(t) + Gu(t), \quad x(0) = x_0 \quad (1.28)$$

$$y(t) = Hx(t) + Du(t) \quad (1.29)$$

L'evoluzione dello stato è pari a:

$$x(t) = e^{Ft}x_0 + \int_0^t e^{F(t-\sigma)}Gu(\sigma)d\sigma \quad (1.30)$$

mentre l'evoluzione dell'uscita risulta essere:

$$y(t) = He^{Ft}x_0 + \int_0^t e^{F(t-\sigma)}Gu(\sigma)d\sigma + Du(t)$$

Nell'ipotesi che l'ingresso u , definito nell'intervallo $[0, +\infty)$, sia \mathcal{L} -trasformabile ovvero che:

$$\exists \mathcal{L}(u(t)) = U(s)$$

all'equazione differenziale (1.28) corrisponde l'equazione algebrica:

$$sX(s) - x_0 = FX(s) + Gu(s)$$

dove con $X(s) = \mathcal{L}(x(t))$ per $t \in [0, +\infty)$ ovvero $X(s)$ è la trasformata del vettore $x(\cdot)$ sull'intervallo $[0, +\infty)$.

Se $Y(s) = \mathcal{L}(y(t))$ ovvero se $Y(s)$ è la trasformata dell'uscita, all'equazione (1.29) corrisponde:

$$Y(s) = HX(s) + DU(s)$$

Quindi si ha che:

$$\begin{aligned} X(s) &= \mathcal{L}(e^{Ft}x_0) + \mathcal{L}\left(\int_0^t e^{F(t-\sigma)}Gu(\sigma)d\sigma\right) \\ &= (sI - F)^{-1}x_0 + (sI - F)^{-1}GU(s) \end{aligned} \quad (1.31)$$

ovvero gli addendi del secondo membro di (1.31) sono la \mathcal{L} -trasformata dei 2 addendi del secondo membro di (1.30).

Ciò si verifica facilmente notando che:

$$\mathcal{L}(e^{Ft}) = (sI - F)^{-1}$$

e ricordando l'unicità della trasformata di Laplace e applicando il teorema sulla trasformata di un integrale di convoluzione.

Se $u(t) = 0 \rightarrow U(s) = 0$ ovvero se l'ingresso è identicamente nullo, il sistema evolve liberamente e si ha:

$$X(s) = (sI - F)^{-1}x_0 \quad (1.32)$$

Se $x_0 = 0$ ovvero se lo stato iniziale è nullo, si ha:

$$X(s) = (sI - F)^{-1}GU(s) \quad (1.33)$$

espressione che rappresenta l'evoluzione forzata.

Analogamente per l'uscita si ottiene:

$$\begin{aligned} Y(s) &= H(sI - F)^{-1}x_0 + [H(sI - F)^{-1}G + D]U(s) \\ &= Y_l(s) + Y_f(s) \end{aligned} \quad (1.34)$$

con $Y_l(s)$ l'uscita in evoluzione libera e $Y_f(s)$ l'uscita in evoluzione forzata.

La matrice $m \times r$ data da:

$$W(s) = H(sI - F)^{-1}G + D$$

è razionale propria ed è detta MATRICE DI TRASFERIMENTO del sistema.

Si esprima ora $adj(sI - F)$ e $det(sI - F)$ nella forma:

$$\begin{aligned} adj(sI - F) &= N_0 + N_1s + \dots + N_{n-1}s^{n-1} \\ det(sI - F) &= \alpha_0 + \alpha_1s + \dots + \alpha_{n-1}s^{n-1} + s^n \end{aligned}$$

Da (1.32) otteniamo che l'evoluzione libera dello stato soddisfa la seguente equazione

$$(\alpha_0 + \alpha_1s + \dots + s^n)X(s) = (N_0 + N_1s + \dots + N_{n-1}s^{n-1})x_0 \quad (1.35)$$

poiché:

$$\begin{aligned} X(s) &= (sI - F)^{-1}x_0 \\ &= \frac{adj(sI - F)}{det(sI - F)}x_0 \end{aligned}$$

$$det(sI - F) \cdot X(s) = adj(sI - F) \cdot x_0$$

$$(\alpha_0 + \alpha_1s + \dots + s^n)X(s) = (N_0 + N_1s + \dots + N_{n-1}s^{n-1})x_0$$

Poiché la \mathcal{L}^{-1} -trasformata del secondo membro di (1.35) è una funzione identicamente nulla per $t > 0$, otteniamo le seguenti equazioni differenziali omogenee:

$$\begin{aligned} \alpha_0x(t) + \alpha_1\frac{dx(t)}{dt} + \dots + \frac{d^n x(t)}{dt^n} &= 0, \quad t > 0 \\ \alpha_0y(t) + \alpha_1\frac{dy(t)}{dt} + \dots + \frac{d^n y(t)}{dt^n} &= 0, \quad t > 0 \end{aligned}$$

In REGIME FORZATO dalla (1.33) si ricava la seguente:

$$(\alpha_0 + \alpha_1 s + \dots + s^n)X(s) = (N_0 + N_1 s + \dots + N_{n-1} s^{n-1})GU(s)$$

e, assumendo che la funzione $u(\cdot)$ sia derivabile almeno $n - 1$ volte, si ottiene per $t > 0$ l'equazione differenziale non omogenea:

$$\alpha_0 x(t) + \alpha_1 \frac{dx(t)}{dt} + \dots + \frac{d^n x(t)}{dt^n} = N_0 G u(t) + \dots + N_{n-1} G \frac{d^{n-1} u(t)}{dt^{n-1}} \quad (1.36)$$

e per l'uscita y (assumendo per semplicità $D = 0$) si ha:

$$\alpha_0 y(t) + \alpha_1 \frac{dy(t)}{dt} + \dots + \frac{d^n y(t)}{dt^n} = H N_0 G u(t) + \dots + H N_{n-1} G \frac{d^{n-1} u(t)}{dt^{n-1}} \quad (1.37)$$

Applicando il principio di sovrapposizione, le equazioni (1.36) e (1.37) diventano valide anche quando $x_0 \neq 0$ ovvero anche quando lo stato iniziale è non nullo.

Esiste la possibilità di ridurre l'ordine delle equazioni differenziali quando intervengono cancellazioni tra $\det(sI - F)$ e $H \text{adj}(sI - F)G$

Si noti infine che l'equazione (1.34), per $D = 0$ ed $x_0 = 0$ (o anche per $x_0 \neq 0$ visto che $\mathcal{L}^{-1}(\text{cost}) = 0$), diviene:

$$Y(s) = H(sI - F)^{-1}GU(s) = W(s) \cdot U(s)$$

1.1.5: SISTEMI ALGEBRICAMENTE EQUIVALENTI

Quando si scrivono le equazioni di un sistema lineare, si fa implicitamente riferimento ad una scelta preliminare di basi negli spazi U , X ed Y .

Tale scelta è, a priori, arbitraria anche se, in molti casi, suggerita dalla struttura fisica dell'oggetto che si vuole descrivere.

Sia e_1, \dots, e_n la base nello spazio di stato X rispetto a cui il sistema lineare è descritto dalle equazioni:

$$\begin{aligned} x(t+1) &= Fx(t) + Gu(t) \\ y(t) &= Hx(t) + Du(t) \end{aligned} \quad (1.38)$$

Supponiamo di adottare in X una nuova base v_1, \dots, v_n .

Ciascuno dei vettori v_j è esprimibile come combinazione lineare dei vettori e_i (e viceversa) ovvero:

$$v_j = \sum_{i=1}^n t_{ij} e_i, \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (1.39)$$

Se si definisce T la matrice invertibile avente come elementi t_{ij} , si ottiene il seguente legame tra le basi:

$$[v_1 \dots v_n] = [e_1 \dots e_n] T \quad (1.40)$$

Sia $x = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n]^T$ la rappresentazione del vettore di stato rispetto alla base e_1, \dots, e_n e sia $\bar{x} = [\bar{x}_1 \ \bar{x}_2 \ \dots \ \bar{x}_n]^T$ la rappresentazione del vettore di stato rispetto alla base v_1, \dots, v_n .

Si può quindi scrivere:

$$\bar{x} = T^{-1}x \quad (1.41)$$

L'equazione (1.41) appena scritta è conseguenza diretta dell'uguaglianza:

$$\begin{aligned} [e_1 \ \dots \ e_n] \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} &= [v_1 \ \dots \ v_n] \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \vdots \\ \bar{x}_n \end{bmatrix} \\ &= [e_1 \ \dots \ e_n] T \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \vdots \\ \bar{x}_n \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\implies x = T\bar{x} \implies \bar{x} = T^{-1}x$$

Ricordando le equazioni (1.38), si ottengono le equazioni del sistema rispetto alla nuova base in X :

$$\begin{aligned}\bar{x}(t+1) &= T^{-1}x(t+1) = T^{-1}FT\bar{x}(t) + T^{-1}Gu(t) \\ y(t) &= HT\bar{x}(t) + Du(t)\end{aligned}\tag{1.42}$$

Definendo:

$$\begin{aligned}\bar{F} &= T^{-1}FT \\ \bar{G} &= T^{-1}G \\ \bar{H} &= HT\end{aligned}\tag{1.43}$$

si ha il seguente sistema:

$$\begin{aligned}\bar{x}(t+1) &= \bar{F}\bar{x}(t) + \bar{G}u(t) \\ y(t) &= \bar{H}\bar{x}(t) + Du(t)\end{aligned}\tag{1.44}$$

che presenta la stessa struttura delle equazioni (1.38).

Due sistemi (F, G, H, D) e $(\bar{F}, \bar{G}, \bar{H}, \bar{D})$ si dicono **ALGEBRICAMENTE EQUIVALENTI** se valgono le equazioni:

$$\begin{aligned}\bar{F} &= T^{-1}FT \\ \bar{G} &= T^{-1}G \\ \bar{H} &= HT\end{aligned}$$

Essi possono essere, quindi, considerati lo stesso sistema riferito a basi diverse nello spazio di stato

CONSEGUENZA:

Due sistemi algebricamente equivalenti hanno la stessa matrice di trasferimento $W(z)$.

Infatti si ha:

$$\begin{aligned}\Sigma &= (F, G, H, D) \quad \longrightarrow \quad \tilde{\Sigma} = (T^{-1}FT, T^{-1}G, HT, D) \\ \tilde{W}(z) &= \bar{H}(zI - F)^{-1}\bar{G} + D \\ &= (HT)[zI - (T^{-1}FT)]^{-1}(T^{-1}G) + D \\ &= (HT)[zT^{-1}IT - (T^{-1}FT)]^{-1}(T^{-1}G) + D \\ &= (HT)[T^{-1}(zI - F)T]^{-1}(T^{-1}G) + D \\ &= H(TT^{-1})(zI - F)^{-1}(TT^{-1})G + D \\ &= H(zI - F)^{-1}G + D \\ &= W(z)\end{aligned}$$

Dove, nel caso in cui A , B e C siano invertibili, si è sfruttata la proprietà:

$$(ABC)^{-1} = C^{-1}B^{-1}A^{-1}$$

Quanto affermato in questo paragrafo vale anche per i SISTEMI CONTINUI.

Dato:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Fx(t) + Gu(t) \\ y(t) &= Hx(t) + Du(t)\end{aligned}$$

si definisca:

$$\begin{aligned}\tilde{x}(t) &= T^{-1}x(t) \\ \dot{\tilde{x}}(t) &= T^{-1}\dot{x}(t)\end{aligned}$$

ottenendo quindi:

$$\begin{aligned}T^{-1}\dot{x}(t) &= T^{-1}F(TT^{-1})x(t) + T^{-1}Gu(t) \\ y(t) &= H(TT^{-1})x(t) + Du(t)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{x}}(t) &= T^{-1}FT\tilde{x}(t) + T^{-1}Gu(t) \\ y(t) &= HT\tilde{x}(t) + Du(t)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{x}}(t) &= \tilde{F}\tilde{x}(t) + \tilde{G}u(t) \\ y(t) &= \tilde{H}\tilde{x}(t) + Du(t)\end{aligned}$$

OSSERVAZIONE: Due sistemi algebricamente equivalenti hanno la stessa matrice di trasferimento $W(z)$ ma due sistemi aventi la stessa matrice di trasferimento $W(z)$ possono non essere algebricamente simili.

1.2: PUNTI DI EQUILIBRIO, STABILITÀ E LINEARIZZAZIONE

Nella descrizione del comportamento di un sistema dinamico è importante disporre di informazioni di carattere “qualitativo” riguardanti le caratteristiche dell’evoluzione del sistema per $t \rightarrow +\infty$ e la struttura dell’insieme delle traiettorie nell’intorno di un punto di equilibrio.

In questa sezione si discuteranno i problemi di analisi della stabilità sia per il caso continuo che per il caso discreto.

La necessità di ricorrere, in molte situazioni concrete, a modelli descritti da mappe non lineari rende la trattazione varia ma complessa.

Soltanto in certi casi la linearizzazione è in grado di fornire risposte attendibili mentre, in altri, è necessario affrontare i problemi in modo diretto e le soluzioni, quando ottenibili, sono spesso complicate e “molto strane”.

I limiti di validità dei procedimenti di linearizzazione che introdurremo in questo paragrafo e il loro carattere essenzialmente locale vanno sempre tenuti presenti quando si applicheranno tecniche di regolazione a modelli lineari che rappresentino approssimazioni di processi fisici non lineari.

In tutta questa sezione ci si riferirà a **MODELLI DI STATO DI UN SISTEMA TEMPO-INVARIANTE AUTONOMO** (i.e. senza ingresso) **A TEMPO DISCRETO**:

$$x(t+1) = f(x(t)) \quad (1.45)$$

OPPURE A TEMPO CONTINUO:

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) \quad (1.46)$$

Dato lo STATO INIZIALE $x(0) = x_0$, nel caso discreto la mappa di transizione in un passo (1.45) individua univocamente tutti gli stati successivi.

Nel caso continuo si assumerà, sempre che la funzione f sia continua e che siano verificate ulteriori ipotesi strutturali tali da garantire che la soluzione di (1.46) passante per x_0 all’istante $t = 0$ sia unica.

La funzione che associa ad ogni istante t lo stato raggiunto dal sistema in quell’istante si dice **MOVIMENTO** o **EVOLUZIONE DI STATO DEL SISTEMA** ed è dato da:

$$\begin{aligned} x(\cdot) : N \rightarrow X : t \rightarrow x(t) \text{ caso DISCRETO} \\ R_+ \rightarrow X : t \rightarrow x(t) \text{ caso CONTINUO} \end{aligned}$$

L’immagine del movimento, ovvero il sottoinsieme dello spazio di stato X costituito dagli stati descritti, per $t \geq 0$, partendo dallo stato iniziale assegnato si dice **TRAIETTORIA (positiva)** od **ORBITA (positiva) DEL SISTEMA con inizio in $x(0) = x_0$** ed è data da:

$$\gamma := \{x : x = x(t), \forall t \geq 0\}$$

1.2.1: EQUILIBRIO E STABILITÀ DELL'EQUILIBRIO NEI SISTEMI AUTONOMI

DEFINIZIONE 1.1: Uno stato x_e è punto di equilibrio (o punto fisso) del sistema discreto autonomo (1.45) o continuo autonomo (1.46) se, qualora lo stato iniziale del sistema sia $x(0) = x_e$, risulta esser vero $x(t) = x_e \forall t \geq 0$

Nel CASO DISCRETO x_e è punto di equilibrio se e solo se $f(x_e) = x_e$.

Nel CASO CONTINUO, la CONDIZIONE $f(x_e) = 0$ è NECESSARIA per garantire che x_e sia PUNTO di EQUILIBRIO e risulta ANCHE SUFFICIENTE se l'equazione differenziale (1.46) ammette una soluzione unica in corrispondenza ad ogni stato iniziale assegnato.

La definizione 1.1 si estende ai SISTEMI NON AUTONOMI:

$$\begin{aligned} x(t+1) &= \tilde{f}(x(t), u(t)) \\ \dot{x}(t) &= \tilde{f}(x(t), u(t)) \end{aligned} \tag{1.47}$$

controllati da un INGRESSO COSTANTE $u(t) = \bar{u}, \forall t$.

Fissato il valore \bar{u} , definiamo $\forall x \in X$ la funzione $v : X \rightarrow X$ ponendo:

$$v(\cdot) := \tilde{f}(\cdot, \bar{u}) : x \rightarrow \tilde{f}(x, \bar{u})$$

Andiamo, quindi, a considerare l'evoluzione di stato dei sistemi autonomi seguenti:

$$\begin{aligned} x(t+1) &= v(x(t)) \quad \text{caso DISCRETO} \\ \dot{x}(t) &= v(x(t)) \quad \text{caso CONTINUO} \end{aligned} \tag{1.48}$$

a partire da uno stato iniziale $x(0) = x_0$ la quale coincide con quella dei sistemi (1.47) sollecitati dall'ingresso costante \bar{u} e con medesimo stato iniziale.

Quindi si dirà che x_e è STATO di EQUILIBRIO per i sistemi non autonomi (1.47), relativamente all'ingresso costante $u(t) = \bar{u} \forall t$ se esso è stato di equilibrio per i corrispondenti sistemi autonomi (1.48).

In termini intuitivi la nozione di STABILITÀ di un PUNTO di EQUILIBRIO x_e richiede che il movimento del sistema soddisfi le seguenti condizioni:

- un "piccolo" scostamento dello stato iniziale $x(0)$ del sistema dall'equilibrio x_e determina una traiettoria "perturbata" i cui punti sono tutti "prossimi" ad x_e ;
- l'intorno di x_e entro il quale è contenuta la traiettoria perturbata può essere reso arbitrariamente piccolo pur di ridurre convenientemente l'entità dello scostamento dello stato iniziale $x(0)$ dallo stato di equilibrio x_e .

Tali condizioni sono formalizzate nella seguente:

DEFINIZIONE 1.2: Sia x_e uno stato di equilibrio per il sistema autonomo discreto (1.45) o per il sistema autonomo continuo (1.46).

Diremo che x_e è STATO di EQUILIBRIO STABILE se, $\forall \varepsilon > 0, \varepsilon \in \mathbb{R}, \exists \delta > 0, \delta \in \mathbb{R}$ tale che, se $\|x(0) - x_e\| < \delta$, allora gli stati $x(t)$ della traiettoria con origine in $x(0)$ soddisfano $\forall t \geq 0$ la disuguaglianza: $\|x(t) - x_e\| < \varepsilon$.

La verifica della stabilità dell'equilibrio in x_e richiede di:

1. fissare un arbitrario intorno sferico (o nel caso monodimensionale un intervallo) di raggio $\varepsilon > 0$ comunque piccolo, centrato nel punto di equilibrio x_e ;
2. provare che in corrispondenza di x_e esiste un secondo intorno sferico, centrato nel punto di equilibrio e contenuto nel primo, tale che ogni movimento del sistema con inizio nel secondo intorno rimanga tutto confinato all'interno del primo.

Il concetto di CONVERGENZA dell'EQUILIBRIO è indipendente da quello di stabilità e si riferisce al fatto che un punto di equilibrio x_e al divergere di t funga da "attrattore" asintotico per ogni movimento del sistema che abbia inizio in uno stato $x(0)$ abbastanza prossimo ad x_e .

DEFINIZIONE 1.3: Sia x_e uno stato di equilibrio per il sistema autonomo discreto (1.45) o per il sistema autonomo continuo (1.46).

L'equilibrio in x_e è CONVERGENTE se $\exists \delta > 0, \delta \in \mathbb{R}$ tale che, se $\|x(0) - x_e\| < \delta$, allora per $t \rightarrow +\infty$ lo stato $x(t)$ tende ad x_e , ovvero se: $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = x_e$

La definizione di stabilità assicura che si possa ridurre arbitrariamente il raggio ε dell'intorno sferico che confina la traiettoria del sistema, pur di ridurre convenientemente il raggio δ dell'intorno di x_e in cui può trovarsi lo stato iniziale.

La convergenza dell'equilibrio, invece, non comporta che, riducendo il raggio $\delta > 0$ dell'intorno di x_e nel quale ha inizio il movimento, si possa ridurre a piacere il raggio ε dell'intorno di x_e che confina la traiettoria.

In questo caso, però, lo scostamento dei punti $x(t)$ dallo stato di equilibrio x_e si riduce arbitrariamente pur di prendere t convenientemente grande.

Quando stabilità e convergenza coesistono, si parla di stabilità asintotica dell'equilibrio.

DEFINIZIONE 1.4: Sia x_e uno stato di equilibrio per il sistema autonomo discreto (1.45) o per il sistema autonomo continuo (1.46).

L'equilibrio in x_e è ASINTOTICAMENTE STABILE se è stabile e convergente.

OSSERVAZIONE: La convergenza dell'equilibrio è stata definita come una proprietà di carattere "locale". Essa sussiste in corrispondenza a perturbazioni sufficientemente piccole dallo stato di equilibrio, confinate entro un intorno di x_e del quale interessa affermarne l'esistenza ma non precisarne l'ampiezza.

Quando è importante conoscere quale sia il dominio di attrazione di x_e , ossia l'insieme di tutti i punti dello spazio di stato X a partire dai quali il movimento converge ad x_e , si ha un PROBLEMA di STABILITÀ "IN GRANDE"!

In particolare si dirà che lo stato di equilibrio x_e è ASINTOTICAMENTE GLOBALMENTE STABILE (o asintoticamente stabile in grande) se è stabile e se ogni evoluzione del sistema converge ad x_e per $t \rightarrow +\infty$.

I problemi di stabilità in grande sono, solitamente, più complicati di quelli stabilità locale. Fanno eccezione i problemi relativi ai sistemi lineari, nei quali, le proprietà locali sono equivalenti a quelle globali.

1.2.2: STABILITÀ DEI SISTEMI LINEARI

Nel caso dei sistemi lineari, la determinazione degli stati di equilibrio e l'analisi della loro stabilità e convergenza sono riconducibili rispettivamente a questioni di algebra lineare e di analisi modale.

L'insieme X_e degli stati di equilibrio è un sottospazio dello spazio di stato X .

Per un sistema discreto $x(t+1) = Fx(t)$ si ha:

$$X_e = \{x : x = Fx\} = \{x : (F - I_n)x = 0\} = \ker(F - I_n)$$

Oltre all'origine, che è sempre uno stato di equilibrio, ci sono altri stati di equilibrio se e solo se la matrice $F - I_n$ è singolare.

Se si indica con U_1 l'autospazio relativo all'autovalore $\lambda_1 = 1$, in questo caso, il sottospazio dei punti di equilibrio coincide con l'autospazio U_1 della matrice F e ha quindi dimensione pari alla molteplicità geometrica dell'autovalore $\lambda_1 = 1$

$$(F - \lambda_1 I)x = 0 \rightarrow (F - I)x = 0$$

Per un sistema continuo $\dot{x}(t) = Fx(t)$ risulta, invece:

$$X_e = \{x : Fx = 0\} = \ker F$$

Quando la matrice F è singolare, ci sono stati di equilibrio diversi dall'origine e il sottospazio $X_e = U_0$ ha dimensione uguale alla molteplicità geometrica dell'autovalore $\lambda = 0$.

Dunque si riassume quanto segue:

$$\Sigma_c : x(t) = Fx(t)$$

$$\Sigma_d : x(t+1) = Fx(t)$$

DEFINIZIONE 1.5: x_e è punto di equilibrio ad ingresso nullo (per Σ_c o Σ_d) se, qualora il sistema parta dallo stato $x(0) = x_e$ allora $x(t) = x_e \forall t \geq 0$

$$\Leftrightarrow x(t) = x_e \forall t \geq 0 \text{ è soluzione di } \Sigma_c \text{ o } \Sigma_d$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 = Fx_e & \text{se } \Sigma_c \longrightarrow X_e = \{x : Fx = 0\} = \ker F \\ x_e = Fx_e & \text{se } \Sigma_d \longrightarrow (F - I_n)x = 0 \longrightarrow X_e = \{x : x = Fx\} = \ker(F - I_n) \end{cases}$$

L'evoluzione libera di un sistema lineare, continuo o discreto, è espressa da una relazione del tipo:

$$x(t) = \Phi(t)x(0)$$

con:

$$\begin{aligned} \Phi(t) &= e^{Ft} && \text{caso CONTINUO} \\ \Phi(t) &= F^t && \text{caso DISCRETO} \end{aligned}$$

La proposizione seguente riassume i fatti fondamentali circa la stabilità e la convergenza dei punti di equilibrio di un sistema lineare.

PROPOSIZIONE 1.1: *In un sistema lineare autonomo:*

1. *Se il sistema ha uno stato di equilibrio convergente, questo è necessariamente lo stato zero e nessun altro stato può essere di equilibrio ovvero $X_e = \{0\}$.*
2. *L'equilibrio nell'origine è convergente se e solo se, nel caso continuo, la matrice F ha tutti autovalori con parte reale negativa oppure, nel caso discreto, la matrice F ha tutti autovalori con modulo minore di 1.*
3. *L'eventuale convergenza dell'equilibrio nell'origine è globale.*
4. *Se il sistema possiede un punto di equilibrio stabile, ogni altro punto di equilibrio ha la medesima proprietà.*
5. *L'equilibrio nell'origine è stabile se e solo se, nel caso continuo, la matrice F ha tutti autovalori con parte reale non positiva e gli autovalori a parte reale nulla sono radici semplici del suo polinomio minimo oppure, nel caso discreto, la matrice F , ha tutti autovalori con modulo non superiore ad 1 e gli autovalori a modulo unitario sono radici semplici del suo polinomio minimo.*
6. *Se l'origine è punto di equilibrio convergente, allora esso è anche stabile e quindi asintoticamente stabile.*

Si osserva che questa proposizione mostra come l'analisi della stabilità dell'origine sia sufficiente, nel caso di sistemi lineari, per conoscere il comportamento del sistema in tutti gli (eventuali) altri punti di equilibrio.

Per questa ragione si è soliti parlare di stabilità di un sistema lineare, intendendo riferirsi con ciò alla stabilità dell'origine.

1.2.3: STABILITÀ DEI SISTEMI CONTINUI: il metodo diretto di Lyapunov

Il metodo diretto di Lyapunov, o secondo metodo di Lyapunov, serve per ottenere risultati riguardanti la stabilità e la convergenza di uno stato di equilibrio x_e senza ricorrere alla soluzione dell'equazione di stato.

Il nome "secondo metodo" risale a Lyapunov il quale usò il termine "primo metodo" per i procedimenti in cui si considerano soluzioni esplicite dell'equazione differenziale o dell'equazione alle differenze.

Nel "secondo metodo" l'analisi della stabilità viene effettuata impiegando, oltre all'equazione di stato, opportune funzioni scalari definite sullo spazio di stato dette *FUNZIONI di LYAPUNOV*. I criteri di stabilità (o di instabilità) si riducono all'analisi del segno di queste funzioni e delle loro derivate (o dei loro incrementi nel caso discreto) lungo le traiettorie del sistema.

Per semplicità conviene considerare come stato di equilibrio l'origine, situazione questa a cui è possibile ricondursi sempre tramite una traslazione degli assi coordinati.

NOZIONE di FUNZIONE DEFINITA POSITIVA (nell'origine)

DEFINIZIONE 1.6: Sia $W \subseteq X = R^n$ un insieme aperto contenente l'origine.

Una funzione continua $V : W \rightarrow R : x \rightarrow V(x)$ è:

- *semidefinita positiva (s.d.p.)* se $V(0) = 0$ ed \exists un intorno $W' \subseteq W$ dell'origine in cui V assume valori non negativi;
- *definita positiva (d.p.)* se è semidefinita positiva e se esiste un intorno $W' \subseteq W$ dell'origine in cui essa si annulla solamente in 0;
- *(semi)definita negativa ((s.)d.n.)* se $-V$ è (semi)definita positiva.

Nel seguito si supporrà che W' coincida con W eventualmente restringendo l'aperto W .

Molto importanti per le applicazioni sono le forme quadratiche definite o semidefinite positive.

Una matrice simmetrica $P \in R^{n \times n}$ si dice:

(SEMI)DEFINITA POSITIVA se la forma quadratica associata:

$$V(x) = V(x_1, x_2, \dots, x_n) = x^T P x = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i p_{ij} x_j$$

è una funzione (semi)definita positiva.

oppure

(SEMI)DEFINITA NEGATIVA se $-P$ è (semi)definita positiva (ovvero se è (semi)definita positiva la forma $-V$).

NB: Si ricordi che una matrice simmetrica P è definita positiva se e solo se sono positivi i minori principali "annidati":

$$p_{11} > 0, \det \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix} > 0, \det \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{bmatrix} > 0, \dots, \det(P) > 0$$

mentre è semidefinita positiva se e solo se sono non negativi tutti i minori principali, ovvero tutti i determinanti delle sottomatrici ottenute sopprimendo nella matrice P un ugual numero di righe e colonne aventi lo stesso indice.

Considerando il sistema (1.46):

$$\dot{x}(t) = f(x(t))$$

si supponga f continua.

Sia $W \subseteq X$ un aperto sul quale è definita una funzione scalare continua con le sue derivate prime ovvero la “funzione energia” seguente:

$$V: W \rightarrow R: x \rightarrow V(x) \quad (1.49)$$

e sia il suo gradiente pari a:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \text{grad}V = \left[\frac{\partial V}{\partial x_1} \quad \frac{\partial V}{\partial x_2} \quad \dots \quad \frac{\partial V}{\partial x_n} \right]$$

Associamo a (1.46) e (1.49) la funzione a valori scalari seguente che risulta essere continua in W per le ipotesi fatte:

$$\dot{V}: W \rightarrow R: x \rightarrow \frac{\partial V}{\partial x} f(x) = \frac{\partial V}{\partial x_1} f_1(x) + \frac{\partial V}{\partial x_2} f_2(x) + \dots + \frac{\partial V}{\partial x_n} f_n(x) \quad (1.50)$$

Se $x(\cdot)$ è soluzione dell'equazione (1.46), la funzione composta:

$$\left\{ V(x(\cdot)): R_+ \rightarrow R: t \rightarrow x(t) \rightarrow V(x) \right\}$$

associa all'istante t il valore di V nello stato $x(t)$, ossia fornisce al variare di t i valori di V “visti” da un osservatore che si muove solidalmente con il punto $x(t)$. Si trova:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} V(x(t)) &= \frac{\partial V}{\partial x_1} \dot{x}_1(t) + \frac{\partial V}{\partial x_2} \dot{x}_2(t) + \dots + \frac{\partial V}{\partial x_n} \dot{x}_n(t) \\ &= \frac{\partial V}{\partial x_1} f_1(x(t)) + \frac{\partial V}{\partial x_2} f_2(x(t)) + \dots + \frac{\partial V}{\partial x_n} f_n(x(t)) \\ &= \dot{V}(x(t)) \end{aligned}$$

Quindi si è appena ottenuto il seguente risultato:

$$\frac{d}{dt} V(x(t)) = \dot{V}(x(t))$$

La funzione \dot{V} in (1.50), valutata in corrispondenza dello stato $x(t)$ raggiunto dal sistema all'istante t , fornisce il valore della derivata rispetto al tempo della funzione $V(x(t))$ lungo la traiettoria di (1.46).

Il calcolo di tale derivata non richiede la determinazione preliminare della traiettoria e quindi della soluzione di (1.46).

Si enunciano ora i due principali criteri di stabilità per i sistemi continui.

PROPOSIZIONE 1.2: CRITERIO DI STABILITÀ DI LYAPUNOV

Sia $x = 0$ punto di equilibrio per il sistema (1.46) e sia $V : W \rightarrow R$ una funzione continua con le sue derivate prime in un intorno W dell'origine e lì definita positiva.

Se la funzione $\dot{V} : W \rightarrow R$ è semi-definita negativa, allora l'origine è punto di equilibrio stabile.

Se la funzione $\dot{V} : W \rightarrow R$ è definita negativa, allora l'origine è punto di equilibrio asintoticamente stabile.

NB: Una funzione V soddisfacente le ipotesi del criterio di stabilità di Lyapunov è detta FUNZIONE DI LYAPUNOV per il sistema (1.46).

PROPOSIZIONE 1.3: CRITERIO DI STABILITÀ DI KRASOWSKII

Sia $x = 0$ punto di equilibrio per il sistema (1.46).

Si supponga che in un intorno W dell'origine la funzione $V : W \rightarrow R$, continua con le sue derivate prime, sia definita positiva e che la funzione $\dot{V} : W \rightarrow R$ sia semidefinita negativa.

Se il più grande insieme invariante contenuto in $\mathcal{N} = \{x \in W : \dot{V}(x) = 0\}$ coincide con l'origine, ovvero se ogni traiettoria con inizio in $\mathcal{N} - \{0\}$ non è contenuta interamente in \mathcal{N} , allora $x = 0$ risulta essere punto di equilibrio asintoticamente stabile.

Si noti come il criterio di Krasowskii costituisca un raffinamento del criterio di Lyapunov in quanto consente di verificare la convergenza (e quindi la stabilità asintotica) dell'equilibrio nei casi in cui il criterio di Lyapunov riesce a garantire soltanto la stabilità.

OSSERVAZIONE: Tenendo valide le altre ipotesi del criterio di stabilità di Lyapunov se l'insieme $\mathcal{N} = \{x : \dot{V}(x) = 0\}$ contiene traiettorie perturbate con inizio in una sfera arbitrariamente piccola centrata in 0, allora l'equilibrio in 0 è stabile ma non convergente.

DIMOSTRAZIONE: Infatti un movimento, con inizio in $x(0) \neq 0$ la cui traiettoria sia contenuta in \mathcal{N} , soddisfa $\forall t \geq 0$ la condizione:

$$V(x(t)) = V(x(0)) = k > 0$$

Per la continuità di V , \exists un intorno sferico dell'origine $S(0,r)$, $r > 0$ in cui vale $V(x) < k$. Poiché la traiettoria del sistema rimane esterna a tale intorno, la convergenza dell'origine non è possibile.

INTEGRAZIONE: INSIEMI INVARIANTI

Si definisce insieme \mathcal{N} invariante (o positivamente invariante) un insieme tale che:

se $x_0 \in \mathcal{N} \implies \forall t \geq 0, x(t) \in \mathcal{N}$.

In parole povere un insieme invariante è un'insieme dal quale, una volta dentro, non si può più uscire.

Il termine "positivamente" invariante indica precisa soltanto che ci si riferisce a tempi positivi ovvero successivi all'istante iniziale.

Accanto ai criteri di stabilità sono stati messi a punto criteri che forniscono condizioni sufficienti per l'instabilità dell'equilibrio.

PROPOSIZIONE 1.4: CRITERIO DI INSTABILITÀ DI LYAPUNOV

Sia $x = 0$ punto di equilibrio per il sistema (1.46) e si supponga che:

1. in un intorno aperto W dell'origine sia definita una funzione $V : W \rightarrow \mathbb{R}$, continua con le sue derivate prime, nulla nell'origine e tale che l'origine sia punto di accumulazione per l'insieme dei punti:

$$\mathcal{P} = \{x : x \in W, V(x) > 0\}$$

in cui V assume valori positivi;

2. \dot{V} è definita positiva.

Allora l'equilibrio in $x = 0$ non è stabile.

PROPOSIZIONE 1.5: CRITERIO DI INSTABILITÀ DI CETAEV

Sia $x = 0$ punto di equilibrio per il sistema (1.46) e sia A un aperto la cui frontiera contenga l'origine: $0 \in \partial A$.

Si supponga inoltre che, in un intorno W dell'origine, sia definita e continua con le sue derivate prime una funzione $V : W \rightarrow \mathbb{R}$ che soddisfi le seguenti ipotesi:

- i) V e \dot{V} assumono valori positivi in $W \cap A$;
- ii) V è nulla sull'intersezione $\partial A \cap W$ fra la frontiera di A e W e, quindi, in particolare $V(0) = 0$.

Allora $x = 0$ non è punto di equilibrio stabile.

1.2.4: STABILITÀ DEI SISTEMI DISCRETI: il metodo diretto di Lyapunov

Per estendere il metodo diretto di Lyapunov ad un sistema discreto (1.45):

$$x(t + 1) = f(x(t))$$

avente l'origine come punto di equilibrio, si supponrà che l'intorno W dell'origine nel quale è definita la funzione $V : W \rightarrow R$ sia invariante rispetto ad f (cioè tale che $f(W) \subseteq W$) o che almeno la porzione di traiettoria che ci interessa si svolga entro W .

Ciò consente di definire in W (o almeno lungo la traiettoria) la funzione:

$$\Delta V : W \rightarrow R : x \rightarrow V(f(x)) - V(x) \quad (1.51)$$

Se la successione $(x(t))_{t \in N}$ rappresenta la soluzione di (1.45),

$$V(x(\cdot)) : N \rightarrow R : t \rightarrow V(x(t)) \quad (1.52)$$

fornisce la successione dei valori di V visti "lungo la traiettoria" del sistema.

Quindi:

$$\begin{aligned} \Delta V(x(t)) &= V(f(x(t))) - V(x(t)) \\ &= V(x(t + 1)) - V(x(t)) \end{aligned}$$

rappresenta la differenza fra due valori consecutivi di (1.52) ovvero l'incremento di $V(x(\cdot))$ in $[t, t + 1]$.

NB: Se f e V sono funzioni continue, allora anche ΔV è continua.

Si enunciano ora i principali criteri di stabilità e instabilità per i sistemi discreti.

PROPOSIZIONE 1.6: CRITERIO DI STABILITÀ DI LYAPUNOV

Sia $x = 0$ punto di equilibrio per il sistema discreto (1.45), con f continua, e sia $V : W \rightarrow R$ una funzione continua in un intorno W dell'origine e ivi definita positiva.

Se la funzione $\Delta V : W \rightarrow R$ è semidefinita negativa allora l'equilibrio nell'origine è stabile.

Se la funzione $\Delta V : W \rightarrow R$ è definita negativa allora l'equilibrio nell'origine è asintoticamente stabile.

PROPOSIZIONE 1.7: CRITERIO DI STABILITÀ DI KRASOWSKII

Sia $x = 0$ punto di equilibrio per il sistema discreto (1.45), con f continua, e sia $V : W \rightarrow R$ una funzione continua in un intorno W dell'origine e ivi definita positiva.

Se la funzione $\Delta V : W \rightarrow R$ è semidefinita negativa e se l'insieme $\mathcal{N} = \{x \in W : \Delta V(x) = 0\}$ non contiene traiettorie perturbate, ovvero se ogni traiettoria con inizio in $\mathcal{N} - \{0\}$ non è inclusa in \mathcal{N} , allora l'origine risulta essere punto di equilibrio asintoticamente stabile.

PROPOSIZIONE 1.8: CRITERIO DI INSTABILITÀ DI LYAPUNOV

Sia $x = 0$ punto di equilibrio per il sistema discreto (1.45), con f continua, e sia $V : W \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua in un intorno W dell'origine e nulla nell'origine.

Se l'origine è punto di accumulazione per l'insieme dei punti nei quali $V > 0$ e se ΔV è definita positiva, allora l'equilibrio nell'origine non è stabile.

NB: I due ultimi teoremi enunciati sono l'estensione ai sistemi discreti di quanto visto per i sistemi continui, ma si noti che il criterio di instabilità di Cetaev non si estende ai sistemi discreti.

1.2.5: ANALISI DELLA STABILITÀ COL METODO DI LINEARIZZAZIONE

CASO CONTINUO: LINEARIZZAZIONE

Si consideri il seguente sistema continuo non lineare:

$$\Sigma_c : \begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \\ y(t) = h(x(t)) \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}_+$$

Sia x_e punto di equilibrio ad ingresso costante \bar{u} con ciò intendendo che:

$$\begin{aligned} x(0) = x_e \\ u(t) = \bar{u} \quad \forall t \geq 0 \end{aligned} \quad \implies \quad x(t) = x_e \quad \forall t \geq 0$$

condizione che si verifica se e solo se $0 = f(x_e, \bar{u})$.

Si avrà quindi:

$$\implies y_e = h(x_e) \quad \text{costante} \quad \forall t \geq 0$$

Ora ci si pone il problema di studiare il comportamento del sistema quando stato iniziale e ingresso sono ottenuti applicando una piccola perturbazione allo stato di equilibrio e al relativo ingresso:

$$\begin{aligned} x(0) = x_e + \delta x(0) \\ u(t) = \bar{u} + \delta u(t) \end{aligned} \quad \longrightarrow ? \longrightarrow \quad \begin{aligned} x(t) \quad \forall t \geq 0 \\ y(t), \quad \forall t \geq 0 \end{aligned}$$

dove $\delta x(t)$ e $\delta u(t)$ sono piccoli scostamenti.

Definendo:

$$\begin{aligned} \delta x(t) &:= x(t) - x_e \\ \delta u(t) &:= u(t) - \bar{u} \end{aligned}$$

si ha:

$$\begin{aligned} \delta \dot{x}(t) &= \frac{d}{dt}[\delta x(t)] = \frac{d}{dt}[x(t) - x_e] = \frac{d}{dt}x(t) = \dot{x}(t) = \\ &= f(x(t), u(t)) = f(x_e + \delta x(t), \bar{u} + \delta u(t)) \end{aligned}$$

$$= f(x_e, \bar{u}) + \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x=x_e, u=\bar{u}} \delta x + \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{x=x_e, u=\bar{u}} \delta u + O(\sqrt{||\delta x||^2 + ||\delta u||^2})$$

dove l'ultima espressione si è ottenuta tramite lo sviluppo in serie di Taylor attorno ad (x_e, \bar{u}) e dove si nota che il termine $O(\sqrt{||\delta x||^2 + ||\delta u||^2})$ è trascurabile rispetto agli altri.

Ricordandosi che:

$$f(x_e, \bar{u}) = 0$$

si ottiene quindi:

$$\delta \dot{x}(t) = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x=x_e, u=\bar{u}} \delta x(t) + \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{x=x_e, u=\bar{u}} \delta u(t)$$

Definendo allora:

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x=x_e, u=\bar{u}} := F$$

$$\left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{x=x_e, u=\bar{u}} := G$$

dove F e G sono le matrici jacobiane, si ottiene:

$$\begin{aligned} \delta \dot{x}(t) &= \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x=x_e, u=\bar{u}} \delta x(t) + \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{x=x_e, u=\bar{u}} \delta u(t) \\ &= F \delta x(t) + G \delta u(t) \end{aligned}$$

Riguardo all'uscita, invece usando sempre lo sviluppo in serie di Taylor, si ha:

$$\begin{aligned} y(t) &= y_e + \delta y(t) = h(x_e + \delta x(t)) \\ &= h(x_e) + \left. \frac{\partial h}{\partial x} \right|_{x=x_e} \delta x(t) + O(\sqrt{||\delta x||^2}) \end{aligned}$$

Definendo:

$$\delta y(t) := y(t) - y_e$$

si ha:

$$\delta y(t) = \left. \frac{\partial h}{\partial x} \right|_{x=x_e} \delta x(t) = H \delta x(t)$$

dove abbiamo definito:

$$\left. \frac{\partial h}{\partial x} \right|_{x=x_e} := H$$

Riassumendo si è passati da un sistema continuo non lineare al seguente sistema linearizzato:

$$\Sigma_{lin} : \begin{cases} \delta \dot{x}(t) = F \delta x(t) + G \delta u(t) \\ \delta y(t) = H \delta x(t) \end{cases}$$

che descrive la dinamica degli scostamenti di stato ed uscita rispetto ai valori all'equilibrio, assumendo che lo scostamento in ingresso δu sia piccolo.

Si consideri ora la forma quadratica

$$V(x) = x^T P x$$

funzione di Lyapunov per sistemi non lineari che ammettono:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Fx(t) + Gu(t) \\ x(t+1) &= Fx(t) + Gu(t) \end{aligned}$$

come equazioni di linearizzazione attorno ad un punto di equilibrio.

In questi casi lo studio della stabilità dell'equilibrio di un sistema non lineare può essere ricondotto a quello della stabilità di un sistema lineare.

PROPOSIZIONE 1.9: CRITERIO RIDOTTO DI LYAPUNOV: CASO CONTINUO

Si supponga che, nel sistema non lineare autonomo continuo $\dot{x}(t) = f(x(t))$, la funzione f sia continua con le sue derivate prime e che l'origine sia punto di equilibrio, i.e. $f(0) = 0$.

Si ha che:

- i) se nel sistema $\dot{x}(t) = Fx(t)$, ottenuto per linearizzazione di $\dot{x}(t) = f(x(t))$ nell'intorno dell'origine, gli autovalori della matrice jacobiana F hanno parte reale negativa, allora l'origine è punto di equilibrio asintoticamente stabile per il sistema non lineare $\dot{x}(t) = f(x(t))$;
- ii) se almeno uno degli autovalori di F ha parte reale positiva, allora l'origine non è punto di equilibrio stabile per il sistema non lineare $\dot{x}(t) = f(x(t))$.

Il criterio ridotto non copre il caso in cui gli autovalori della matrice jacobiana F appartengano tutti al semipiano sinistro chiuso del piano complesso e alcuni di essi appartengano all'asse immaginario.

In questo caso, il carattere di stabilità del sistema linearizzato è individuato dalla molteplicità delle radici immaginarie del polinomio $\Delta_F(s)$ ma la stabilità dell'equilibrio del sistema non lineare non è correlata in alcun modo con quella del sistema linearizzato.

Il criterio ridotto di Lyapunov si estende ai sistemi discreti in modo del tutto analogo al caso continuo per i quali si riporta, ora, anche la linearizzazione.

CASO DISCRETO: LINEARIZZAZIONE

Si consideri il seguente sistema discreto non lineare:

$$\Sigma_d: \begin{cases} x(t+1) = f(x(t), u(t)) \\ y(t) = h(x(t)) \end{cases} \quad t \in \mathbb{Z}_+$$

Sia x_e punto di equilibrio ad ingresso costante \bar{u} con ciò intendendo che:

$$\begin{aligned} x(0) = x_e \\ u(t) = \bar{u} \quad \forall t \geq 0 \end{aligned} \implies x(t) = x_e \quad \forall t \geq 0$$

Si avrà quindi:

$$\begin{aligned} \implies x_e &= f(x_e, \bar{u}) \\ y_e &= h(x_e) \quad \text{costante} \quad \forall t \geq 0 \end{aligned}$$

Analogamente al caso continuo, ci si pone il problema di studiare il comportamento del sistema quando stato iniziale e ingresso sono ottenuti applicando una piccola perturbazione allo stato di equilibrio e al relativo ingresso:

$$\begin{aligned} x(0) = x_e + \delta x(0) \\ u(t) = \bar{u} + \delta u(t) \end{aligned} \longrightarrow ? \longrightarrow \begin{aligned} x(t) \quad \forall t \geq 0 \\ y(t), \quad \forall t \geq 0 \end{aligned}$$

dove $\delta x(t)$ e $\delta u(t)$ sono piccoli scostamenti.

Definendo:

$$\begin{aligned} \delta x(t) &:= x(t) - x_e \\ \delta u(t) &:= u(t) - \bar{u} \end{aligned}$$

si ha:

$$\begin{aligned}
\delta x(t+1) &= x(t+1) - x_e = f(x(t), u(t)) - x_e = \\
&= f(x_e + \delta x(t), \bar{u} + \delta u(t)) - x_e \\
&= f(x_e, \bar{u}) + \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x=x_e, u=\bar{u}} \delta x(t) + \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{x=x_e, u=\bar{u}} \delta u(t) + O(\sqrt{||\delta x(t)||^2 + ||\delta u(t)||^2}) - x_e
\end{aligned}$$

dove l'ultima espressione si è ottenuta tramite lo sviluppo in serie di Taylor attorno ad (x_e, \bar{u}) e dove si nota che il termine $O(\sqrt{||\delta x(t)||^2 + ||\delta u(t)||^2})$ è trascurabile rispetto agli altri.

Ricordandosi che:

$$f(x_e, \bar{u}) = x_e$$

si ottiene quindi:

$$\delta x(t+1) = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x=x_e, u=\bar{u}} \delta x(t) + \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{x=x_e, u=\bar{u}} \delta u(t)$$

Definendo allora:

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x=x_e, u=\bar{u}} := F$$

$$\left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{x=x_e, u=\bar{u}} := G$$

dove F e G sono le matrici jacobiane calcolate nel punto di equilibrio ad ingresso costante, si ottiene:

$$\begin{aligned}
x(t+1) &= \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x=x_e, u=\bar{u}} \delta x(t) + \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{x=x_e, u=\bar{u}} \delta u(t) \\
&= F\delta x(t) + G\delta u(t)
\end{aligned}$$

Riguardo all'uscita, invece usando sempre lo sviluppo in serie di Taylor, si ha:

$$y(t) = y_e + \delta y(t) = h(x_e + \delta x(t))$$

$$= h(x_e) + \frac{\partial h}{\partial x} \Big|_{x=x_e} \delta x(t) + O(\sqrt{\|\delta x(t)\|^2})$$

Definendo:

$$\delta y(t) := y(t) - y_e$$

si ha:

$$\delta y(t) = \frac{\partial h}{\partial x} \Big|_{x=x_e} \delta x(t) = H \delta x(t)$$

dove abbiamo definito:

$$\frac{\partial h}{\partial x} \Big|_{x=x_e} := H$$

Riassumendo si è passati da un sistema discreto non lineare al seguente sistema linearizzato:

$$\Sigma_{lin} : \begin{cases} \delta x(t+1) = F \delta x(t) + G \delta u(t) \\ \delta y(t) = H \delta x(t) \end{cases}$$

che descrive la dinamica degli scostamenti di stato ed uscita rispetto ai valori all'equilibrio, assumendo che lo scostamento in ingresso δu sia piccolo.

PROPOSIZIONE 1.10: CRITERIO RIDOTTO DI LYAPUNOV: CASO DISCRETO

Si supponga che nel sistema non lineare autonomo discreto $x(t+1) = f(x(t))$, la funzione f sia continua con le sue derivate prime e l'origine sia punto di equilibrio.

Si ha che:

- i) se nel sistema $x(t+1) = Fx(t)$ ottenuto per linearizzazione di $x(t+1) = f(x(t))$ nell'intorno dell'origine, gli autovalori della matrice jacobiana F hanno modulo minore di 1, allora l'origine è punto di equilibrio asintoticamente stabile per il sistema non lineare $x(t+1) = f(x(t))$;
- ii) se almeno uno degli autovalori di F ha modulo maggiore di 1, allora l'origine non è punto di equilibrio stabile per il sistema non lineare $x(t+1) = f(x(t))$.

Se si restringe l'attenzione ai sistemi del primo ordine, il metodo di linearizzazione può essere applicato a situazioni più generali (in quanto non viene più richiesta la continuità della derivata prima nel punto di equilibrio ma basta verificarne il valore).

D'altra parte, nei casi critici in cui la considerazione del valore della derivata non sia sufficiente per decidere, è possibile ottenere dei criteri di stabilità che tengano conto delle derivate successive di f nel punto di equilibrio come viene precisato nella proposizione seguente.

PROPOSIZIONE 1.11: STABILITÀ DEI SISTEMI DISCRETI DEL PRIMO ORDINE

Si supponga che nel sistema discreto del primo ordine $x(t + 1) = f(x(t))$ la funzione f sia nulla nell'origine e possenga derivate fino al terzo ordine.

- Se $f'(0) = 1$ allora:
 - 1) $f''(0) \neq 0$ implica l'instabilità dell'equilibrio nell'origine;
 - 2) $f''(0) = 0$ e $f'''(0) > 0$ implicano l'instabilità dell'equilibrio nell'origine;
 - 3) $f''(0) = 0$ e $f'''(0) < 0$ implicano l'asintotica stabilità dell'equilibrio nell'origine;
- Se $f'(0) = -1$ allora
 - 1) $f'''(0) > -\frac{3}{2}f''(0)^2$ implica l'asintotica stabilità dell'equilibrio nell'origine;
 - 2) $f'''(0) < -\frac{3}{2}f''(0)^2$ implica l'instabilità dell'equilibrio nell'origine.

PROPOSIZIONE 1.12: STABILITÀ DEI SISTEMI CONTINUI DEL PRIMO ORDINE

Si consideri un sistema continuo del primo ordine:

$$\dot{x}(t) = f(x(t))$$

con f dotato di derivata terza continua e con:

$$f(0) = f'(0) = 0$$

Si ha che:

- i) se $f''(0) \neq 0$, allora l'origine non è un punto di equilibrio stabile;
- ii) se $f''(0) = 0$ e se $f'''(0) > 0$, allora l'origine non è un punto di equilibrio stabile;
- iii) se $f''(0) = 0$ e se $f'''(0) < 0$, allora l'origine è punto di equilibrio asintoticamente stabile.

Ricapitolando, si consideri la coppia di equilibrio (x_e, \bar{u}) .

PROPOSIZIONE 1.13:

Sia x_e punto di equilibrio di

$$\Sigma_c : \begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \\ y(t) = h(x(t)) \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}_+$$

in corrispondenza a $u(t) = \bar{u}$ e sia:

$$\Sigma_{lin} : \begin{cases} \delta \dot{x}(t) = F \delta x(t) + G \delta u(t) \\ \delta y(t) = H \delta x(t) \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}_+$$

il corrispondente sistema ottenuto per linearizzazione.

x_e è punto di equilibrio asintoticamente stabile per Σ_c se la matrice jacobiana F ha solo autovalori a parte reale negativa ovvero, se Σ_{lin} è asintoticamente stabile, allora x_e è punto di equilibrio asintoticamente stabile per Σ_c .

Se, però, la matrice jacobiana F ha almeno un autovalore a parte reale positiva, allora Σ_c non ha x_e come punto di equilibrio asintoticamente stabile.

Infine, se F non ha autovalori a parte reale positiva ma ha autovalori a parte reale nulla, la linearizzazione non mi può portare a dimostrare nulla.

OSSERVAZIONE: I risultati di questo teorema possono essere facilmente estesi ai sistemi a tempo discreto prendendo in considerazione gli autovalori λ della matrice F con $Re(\lambda) < 1$; $Re(\lambda) = 1$; $Re(\lambda) > 1$.

1.3: SISTEMI A SEGNALI CAMPIONATI

Si consideri il modello di stato a tempo continuo descritto dalle seguenti equazioni:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Fx(t) + Gu(t) \\ y(t) &= Hx(t) \end{aligned} \quad t \geq 0$$

e sia $T > 0$ il PASSO di CAMPIONAMENTO,

Ipotezziamo che:

- i) $u(t) = u_k \quad \forall t \in [kT, (k+1)T]$
- ii) le uscite vengano prelevate solo agli istanti:
 $kT, k \in \mathbb{Z}$
 $k \geq 0$

Allora si ha la seguente espressione dello stato al tempo $(k+1)T$ in funzione dello stato al tempo kT e dell'ingresso nell'intervallo $[kT, (k+1)T]$:

$$\begin{aligned} x[(k+1)T] &= e^{FT} x[kT] + \int_{kT}^{(k+1)T} e^{F[(k+1)T-\tau]} Gu(\tau) d\tau \\ &= e^{FT} x[kT] + \left[\int_{kT}^{(k+1)T} e^{F[(k+1)T-\tau]} G d\tau \right] \cdot u_k \\ &= e^{FT} x[kT] + \left[\int_0^T e^{F\tau} G d\tau \right] \cdot u_k \\ &= \tilde{F}x[kT] + \tilde{G}u_k \end{aligned}$$

con:

$$\begin{aligned} \tilde{F} &= e^{FT} \\ \tilde{G} &= \int_0^T e^{F\tau} G d\tau \end{aligned}$$

Definendo:

$$\begin{aligned} x[kT] &= \tilde{x}(k) \quad \longrightarrow \quad \tilde{x}(k+1) = x[(k+1)T] \\ \tilde{u}(k) &= u_k \end{aligned}$$

si ottiene:

$$\tilde{x}(k+1) = \tilde{F}\tilde{x}(k) + \tilde{G}\tilde{u}(k)$$

Dunque, tramite il campionamento, si è passati da un sistema a tempo continuo a uno a segnali campionati e, quindi, a tempo discreto.

1.4: OSSERVABILITÀ E RIVELABILITÀ

Il concetto di osservabilità si riferisce alla possibilità di determinare lo stato iniziale di un sistema a partire dai dati di ingresso e uscita in una certa finestra temporale.

Tale concetto è particolarmente importante nei problemi di controllo dove si richiede di conoscere, istante per istante, il valore dello stato.

Non sempre le variabili di stato sono misurabili e la proprietà di osservabilità è strettamente legata alla realizzazione di algoritmi in grado di fornire stime dello stato in tempo reale.

La determinazione del valore dello stato in un certo istante t può essere affrontata come un problema di osservabilità quando i dati di cui si dispone si riferiscono a tempi successivi a t .

Sia F la matrice del modello di stato a tempo discreto:

$$\begin{aligned}x(t + 1) &= Fx(t) + Gu(t) \\ y(t) &= Hx(t)\end{aligned}$$

con:

$$\dim(x) = n$$

1.4.1: OSSERVABILITÀ

In generale lo stato all'istante iniziale $x(0)$ non è mai noto.

La variabile di stato $x(t)$ non è sempre facile da conoscere. Per capire come controllare il sistema bisogna capire come valutare il valore dello stato senza averlo.

La possibilità di osservare lo stato applicando un ingresso $u(t)$ e misurando l'uscita $y(t)$ mi fa capire da quali informazioni si possa ricavare lo stato iniziale.

DEFINIZIONE 1.7: DEFINIZIONE DI OSSERVABILITÀ

Il modello di stato

$$\begin{aligned}x(t + 1) &= Fx(t) + Gu(t) \\ y(t) &= Hx(t)\end{aligned}$$

(ovvero la coppia (F, H)), viene detto osservabile se $\exists [0, T]$, $T > 0$, tale che la conoscenza di:

$$\begin{aligned}u(t), \quad t \in [0, T] \\ y(t), \quad t \in [0, T]\end{aligned}$$

permette di determinare univocamente $x(0)$.

È immediato osservare che la precedente definizione di osservabilità è equivalente a una delle seguenti caratterizzazioni:

I. $\exists [0, T]$, $T > 0$, tale che la conoscenza di:

$$\begin{aligned}u(t) &= 0 \\ y(t) &= y_l(t) \quad t \in [0, T]\end{aligned}$$

permette di determinare univocamente $x(0)$;

II. La matrice di osservabilità ha rango pieno cioè $\mathcal{O}_n = \begin{bmatrix} H \\ HF \\ \vdots \\ HF^{n-1} \end{bmatrix}$ ha rango n ;

III. CRITERIO PBH DI OSSERVABILITÀ: $\text{rank} \begin{bmatrix} zI - F \\ - - - \\ H \end{bmatrix} = n \quad \forall z \in \mathbb{C}$;

III. $\text{ker}[\mathcal{O}_n] = \text{ker} \begin{bmatrix} H \\ HF \\ \vdots \\ HF^{n-1} \end{bmatrix} = [0]$;

IV. $\forall \lambda_1 \dots \lambda_n \in \mathbb{C}, \exists L \text{ t.c. } \sigma(F + LH) = (\lambda_1 \dots \lambda_n)$

ovvero esiste una matrice L tale che lo spettro di $F + LH$ è proprio pari a $\lambda_1 \dots \lambda_n$.

Si fornisce, ora, un possibile modo per determinare la condizione iniziale $x(0)$ dall'evoluzione libera d'uscita $y_l(t)$ su un intervallo sufficientemente lungo, ad esempio $[0, n - 1]$.

Si supponga di avere un sistema osservabile e di disporre dei valori dell'uscita in evoluzione libera $y_l(t)$ per $t \in [0, n - 1]$.

Avendo:

$$\begin{bmatrix} y_l(0) \\ y_l(1) \\ \vdots \\ y_l(n-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H \\ HF \\ \vdots \\ HF^{n-1} \end{bmatrix} x(0)$$

dove

$$\begin{bmatrix} H \\ HF \\ \vdots \\ HF^{n-1} \end{bmatrix} = \mathcal{O}_n$$

è la matrice di OSSERVABILITÀ del modello di stato considerato avente:

$$\text{rank}[\mathcal{O}_n] = n$$

Per ipotesi, si ha che:

$$\mathcal{O}_n^T \begin{bmatrix} y_l(0) \\ y_l(1) \\ \vdots \\ y_l(n-1) \end{bmatrix} = \mathcal{O}_n^T \mathcal{O}_n x(0)$$

da cui, essendo $\mathcal{O}_n^T \mathcal{O}_n$ NON SINGOLARE, si ottiene:

$$x(0) = (\mathcal{O}_n^T \mathcal{O}_n)^{-1} \mathcal{O}_n^T \begin{bmatrix} y_l(0) \\ y_l(1) \\ \vdots \\ y_l(n-1) \end{bmatrix}$$

Ecco, quindi, mostrato uno dei possibili modi per determinare univocamente la condizione $x(0)$ osservando l'evoluzione libera d'uscita $y_l(t)$ per $t \in [0, n-1]$.

Si enuncia, infine, la seguente proposizione:

PROPOSIZIONE 1.14: Se la coppia (F, H) è osservabile, la matrice $\mathcal{O}_n = \begin{bmatrix} H \\ HF \\ \vdots \\ HF^{n-1} \end{bmatrix}$ ha rango n

ovvero la matrice $\mathcal{O}_n^T \mathcal{O}_n$ ha rango n ovvero $\sum_{t=0}^{+\infty} (F^T)^t H^T H F^t$ ha rango n ed è SIMMETRICA E DEFINITA POSITIVA.

1.4.2: RIVELABILITÀ

La rivelabilità è correlata all'osservabilità: si tratta sempre di una proprietà del modello di stato ma più debole di quest'ultima.

Se osservo $y_i(t)$ per $t \in [0, n - 1]$, NON riesco a determinare $x(0)$ UNIVOCAMENTE, TUTTAVIA:

- se $B = [v_1 \dots v_N]$ è una base di autovettori o autovettori generalizzati di F , base per R^n
- se $v_1 \dots v_r$ sono autovettori o autovettori generalizzati di F relativi ad autovalori λ_i con $|\lambda_i| < 1$
- se $v_{r+1} \dots v_n$ sono autovettori o autovettori generalizzati di F relativi ad autovalori λ_i con $|\lambda_i| \geq 1$

ALLORA si ha:

$$\forall x(0) = (\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_r v_r) + (\alpha_{r+1} v_{r+1} + \alpha_{r+2} v_{r+2} + \dots + \alpha_n v_n)$$

e la RILEVABILITÀ determina univocamente SOLTANTO

$$\alpha_{r+1} v_{r+1} + \alpha_{r+2} v_{r+2} + \dots + \alpha_n v_n$$

ovvero si "perde" soltanto la componente di stato iniziale che genera una porzione di $x_i(t)$ ed $y_i(t)$ che sta convergendo a zero.

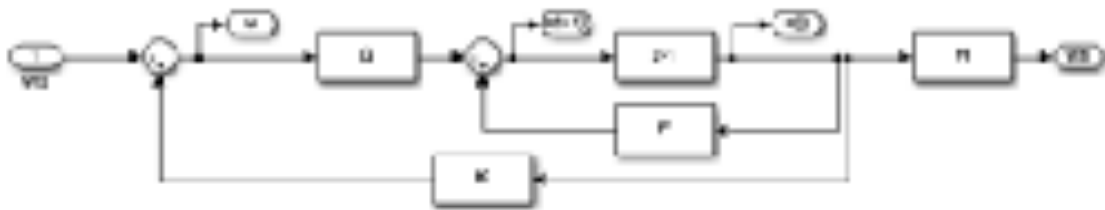
1.5: SISTEMI DI STATO: RETROAZIONE DALLO STATO E STABILIZZAZIONE

Assumiamo che il nostro sistema di stato a tempo discreto sia descritto dalle seguenti equazioni:

$$\Sigma: \begin{aligned} x(t+1) &= Fx(t) + Gu(t) \\ y(t) &= Hx(t) \end{aligned}$$

Supponiamo che il sistema sia stabilizzabile e sia:

$$u(t) = v(t) + Kx(t) \implies \text{CONTROLLORE STATICO (IN RETROAZIONE DALLO STATO)}$$



Il sistema retroazionato sarà, quindi; Σ_k :

$$u(t) = v(t) + Kx(t)$$

$$x(t+1) = Fx(t) + G(v(t) + Kx(t))$$

$$\Sigma_k: x(t+1) = (F + GK)x(t) + Gv(t)$$

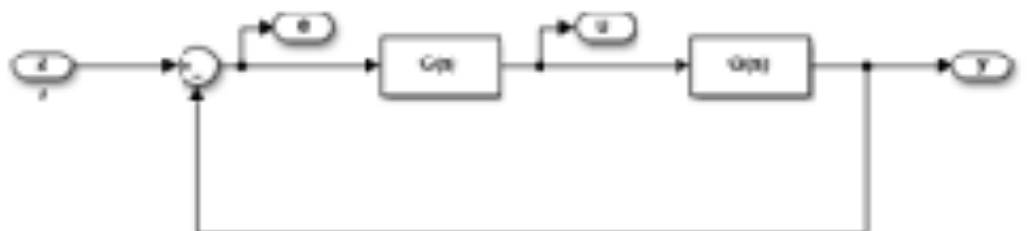
DEFINIZIONE 1.8: K è un CONTROLLORE STABILIZZANTE se rende il sistema retroazionato Σ_k ASINTOTICAMENTE STABILE ovvero se $(F + GK)$ è ASINTOTICAMENTE STABILE cioè se $\forall \lambda \in \sigma(F + GK) \implies |\lambda| < 1$

Il sistema Σ è STABILIZZABILE se $\exists K$ t.c. $(F + GK)$ è ASINTOTICAMENTE STABILE

OSSERVAZIONE:

Si ricordi che avendo un modello I/O si ha il seguente schema di retroazione:

RETROAZIONE PER MODELLI I/O



con:

$r(t)$ = segnale di riferimento

$y(t)$ = uscita

$e(t)$ = errore : $e(t) = r(t) - y(t)$

$u(t)$ = ingresso

Con un modello I/O si deve necessariamente andare a retroazionare l'uscita $y(t)$.

Nei sistemi di stato si va, invece, a retroazionare lo stato $x(t)$.

Questa è la differenza tra i Controlli classici e la Teoria dei Sistemi.

Capitolo 2

ELEMENTI DI TEORIA DEL CONTROLLO OTTIMO

Poiché il Model Predictive Control, che si andrà a studiare nel seguente capitolo, sfrutta il controllo ottimo su orizzonte finito per sistemi a tempo discreto, si presenta qui una breve introduzione solo su tale tipologia di controllo ottimo.

2.1: INTRODUZIONE

Le metodologie di controllo ottimo consentono, almeno in linea di principio, di esprimere direttamente nel dominio del tempo le specifiche sulla dinamica di un sistema anche non lineare, caratterizzando l'ingresso da applicare come quello che rende minimo (o massimo) un opportuno indice di costo (o qualità).

Una volta impostato il problema in questi termini, la teoria del controllo ottimo fornisce strumenti analitici per calcolare, direttamente o con procedimenti numerici, l'ingresso ottimo e in alcuni casi per realizzare tale ingresso come retroazione dallo stato.

Gli ingredienti di un problema di controllo ottimo sono quindi essenzialmente tre:

- i) il modello del sistema;
- ii) i vincoli sulle variabili di stato e di ingresso;
- iii) l'indice da minimizzare (o da massimizzare) scegliendo una opportuna funzione di ingresso.

Più nel dettaglio si ha che:

- i) la maggior parte delle tecniche di controllo disponibili fa riferimento a modelli di stato, sia lineari che non lineari
- ii) per quanto riguarda i vincoli, essi possono essere di natura diversa ed esprimibili, nei casi più comuni, come limiti sulle ampiezze dei segnali di ingresso e delle variabili interne nel corso dell'evoluzione o come specifiche sul valore finale delle variabili di stato. Questi vincoli caratterizzano, per ogni problema, l'insieme degli ingressi che si considerano ammissibili nel senso che all'interno di tale insieme ammissibile dovrà essere determinata la soluzione ottima.
- iii) infine, per quantificare la bontà del comportamento di un sistema in corrispondenza ai vari ingressi ammissibili, si ricorre all'introduzione di un indice, rappresentato in generale da un funzionale che ad ogni ingresso ammissibile associa un numero reale. La struttura dell'indice dipende dall'obiettivo che ci si prefigge di raggiungere risolvendo il problema di ottimo e tiene conto degli aspetti della dinamica del sistema che caratterizzano l'andamento delle variabili in gioco e il loro peso relativo. Esempi di indici derivano da valutazioni di tipo energetico e corrispondono alla determinazione di ingressi che consentono di raggiungere un obiettivo preassegnato utilizzando in modo ottimale la risorsa disponibile (per esempio il combustibile). In altri casi gli indici forniscono, per ogni ingresso applicato al sistema, una valutazione dei corrispondenti costi o benefici economici e/o di altri vantaggi (biologici, ecologici, sociali, etc.) non strettamente quantificabili in termini economici. Nella gestione di risorse naturali (pesca, boschi, etc.) le equazioni di stato esprimono la dinamica delle specie sfruttate e l'indice da massimizzare tiene conto sia del profitto economico sia della sopravvivenza della specie. Altre volte l'indice è rappresentato dalla lunghezza dell'intervallo temporale necessario a raggiungere un obiettivo e l'ingresso ottimo è quello che rende minima tale lunghezza.

Si va quindi ad esaminare il caso di sistemi lineari (discreti) con un indice costituito da un funzionale quadratico.

Per questi sistemi ci si occuperà del problema della regolazione, ovvero di determinare una legge di controllo ottimo che riporti il sistema nello stato di riferimento ogni volta che, a causa di un disturbo, lo stato subisca una perturbazione.

La legge di controllo ottimo può essere realizzata tramite una retroazione dallo stato ottenendo così i vantaggi caratteristici di tale struttura.

2.2: CONTROLLO OTTIMO SU INTERVALLO FINITO DEI SISTEMI DISCRETI

Uno dei contesti più studiati nella teoria del controllo ottimo è quello in cui l'aggiornamento delle variabili di stato viene descritto da equazioni lineari e gli indici di costo sono di tipo quadratico.

Le ragioni di tale interesse sono di tipo tecnico in quanto per questa classe di problemi si è in grado di fornire esplicitamente le soluzioni sotto forma di leggi di controllo con struttura di reazione lineare dallo stato.

D'altra parte, i risultati relativi al caso lineare possono essere applicati anche al caso di sistemi non lineari, per determinare le variazioni da apportare ad una legge di controllo ottima già determinata, qualora si perturbi la dinamica del sistema.

Consideriamo un modello di stato lineare a tempo discreto:

$$x(t + 1) = Fx(t) + Gu(t) \quad (2.1)$$

Supponiamo che sia assegnato lo stato iniziale: $x(0) = x_0$ (2.2)

e che non vi siano vincoli sui valori delle funzioni di ingresso.

Il problema che ci poniamo è quello di trovare un ingresso $u(\cdot)$ che, agendo nell'intervallo $[0, T]$, renda minimo l'indice di costo (o funzione obiettivo)

$$J(u, x_0) = \sum_{t=0}^{T-1} [x^T(t)Qx(t) + u^T(t)Ru(t)] + x^T(T)Sx(T) \quad (2.3)$$

con:

Q, S = matrici $n \times n$ simmetriche e semidefinite positive.

R = matrice $m \times m$ simmetrica e definita positiva.

Dato x_0 , il funzionale $J(\cdot, x_0)$ associa univocamente ad ogni successione di ingresso $u(\cdot)$ un numero non negativo: infatti, per ogni istante iniziale e per ogni successione di ingresso, tramite la (2.1) otteniamo una ben definita evoluzione di stato $x(\cdot)$ che inserita nella (2.3) insieme ad $u(\cdot)$, determina il valore di J .

Interpretando, quindi, J come un funzionale definito sull'insieme delle successioni di ingresso $u(\cdot)$ e sull'insieme delle evoluzioni di stato $x(\cdot)$, il problema di ottimo può essere visto come il problema di minimizzare J con $x(\cdot)$ ed $u(\cdot)$ vincolati da (2.1) e (2.2).

A proposito della struttura di J , i due addendi che lo compongono tengono conto di due aspetti che giocano nella valutazione del comportamento del sistema in $[0, T]$.

L'addendo $x^T(T)Sx(T)$ rappresenta il costo dovuto allo scostamento dello stato finale del sistema dallo stato zero mentre l'addendo $\sum_{t=0}^{T-1} [x^T(t)Qx(t) + u^T(t)Ru(t)]$ rappresenta il costo dovuto allo scostamento dallo zero degli stati intermedi e il costo dovuto all'energia spesa per il controllo.

La diversità dei vincoli strutturali imposti su R e su Q (con R definita positiva e Q solo semidefinita positiva) può suscitare qualche perplessità e richiedere una giustificazione.

E' ovvio che, per garantire al costo J valori non negativi, è sufficiente supporre che la matrice R sia semidefinita positiva.

In tal caso, avendo i vincoli su R , Q ed S la stessa natura, la formulazione del problema godrebbe di maggiore uniformità nei dati e il problema stesso sarebbe posto in un ambito più generale. Tuttavia l'ipotesi che R sia semidefinita positiva complicherebbe in modo notevole la trattazione con il solo vantaggio di coprire situazioni nelle quali si attribuisca peso nullo a taluni ingressi o a particolari combinazioni lineari degli ingressi.

D'altra parte non è conveniente rinforzare il vincolo su Q imponendo che essa sia definita positiva.

Infatti in molti casi l'indice a cui ci si intende riferire coinvolge soltanto ingressi ed uscite ed è del tipo:

$$J(u, x_0) = \sum_{t=0}^{T-1} [y^T(t)Vy(t) + u^T(t)Ru(t)] + y^T(T)Wy(T)$$

Con:

$$\begin{aligned} u(t) &= \text{ingressi} \\ x(t) &= \text{stato} \\ y(t) &= \text{uscita} \end{aligned}$$

Se il sistema è strettamente proprio, sostituendo $y(t) = Hx(t)$ si perviene ad un indice che ha la struttura (2.3) e nel quale:

$$\begin{aligned} Q &= H^T V H \\ S &= H^T W H \end{aligned}$$

possono essere semidefinite positive anche se V e W sono definite positive.

DIM: Partiamo da

$$J(u, x_0) = \sum_{t=0}^{T-1} [y^T(t)Vy(t) + u^T(t)Ru(t)] + y^T(T)Wy(T)$$

e sfruttiamo l'identità'

$$y(t) = Hx(t)$$

ottenendo

$$J(u, x_0) = \sum_{t=0}^{T-1} [x^T(t)H^T V H x(t) + u^T(t)Ru(t)] + x^T(T)H^T W H x(T) =$$

$$= \sum_{t=0}^{T-1} [x^T(t)Qx(t) + u^T(t)Ru(t)] + x^T(T)Sx(T)$$

Va infine notato che, nella maggior parte dei casi, la scelta di un indice di tipo quadratico, anziché di indici più generali, ha come motivazione fondamentale quella che, in questo caso, la soluzione ottima può essere espressa come una legge in retroazione lineare statica dallo stato.

Spesso la individuazione delle matrici di peso Q , R ed S a partire da specifiche sulla dinamica del sistema non è immediata ma è il risultato di un procedimento iterativo basato su una scelta iniziale delle matrici e su successive correzioni apportate a seguito della verifica delle soluzioni ottimali che si ottengono.

Per lo sviluppo dei calcoli che portano a determinare la successione di controllo ottimo, conviene esprimere l'indice J nella forma matriciale seguente:

$$J(u, x_0) = \sum_{t=0}^{T-1} [u^T(t) \ x^T(t)] \begin{bmatrix} R & 0 \\ 0 & Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(t) \\ x(t) \end{bmatrix} + x^T(T)Sx(T) \quad (2.4)$$

Si consideri ora una successione di matrici $M(0), M(1), \dots, M(T) \in R^{n \times n}$ tale per cui valga:

$$x^T(T)M(T)x(T) = x^T(0)M(0)x(0) + \sum_{t=0}^{T-1} [x^T(t+1)M(t+1)x(t+1) - x^T(t)M(t)x(t)]$$

da cui segue:

$$0 = x^T(0)M(0)x(0) - x^T(T)M(T)x(T) + \sum_{t=0}^{T-1} [x^T(t+1)M(t+1)x(t+1) - x^T(t)M(t)x(t)]$$

Si sostituisca, ora, l'espressione di $x(t+1)$ data dalla (2.1) nell'identità appena scritta ottenendo:

$$0 = x^T(0)M(0)x(0) - x^T(T)M(T)x(T) + \sum_{t=0}^{T-1} [(x^T(t)F^T + u^T(t)G^T)M(t+1)(Fx(t) + Gu(t)) - x^T(t)M(t)x(t)]$$

da cui segue:

$$0 = x^T(0)M(0)x(0) - x^T(T)M(T)x(T) + \sum_{t=0}^{T-1} [(x^T(t)F^T M(t+1)Fx(t) + u^T(t)G^T M(t+1)Fx(t) + x^T(t)F^T M(t+1)Gu(t) + u^T(t)G^T M(t+1)Gu(t) - x^T(t)M(t)x(t)]$$

ottenendo la seguente equazione in forma matriciale:

$$0 = x^T(0)M(0)x(0) - x^T(T)M(T)x(T) + \sum_{t=0}^{T-1} [u^T(t) \ x^T(t)] \begin{bmatrix} G^T M(t+1)G & G^T M(t+1)F \\ F^T M(t+1)G & F^T M(t+1)F - M(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(t) \\ x(t) \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

Sommando membro a membro la (2.4) e la (2.5), si perviene alla seguente espressione dell'indice:

$$J(u, x_0) = x_0^T M(0)x_0 + x^T(T)(S - M(T))x(T) + \sum_{t=0}^{T-1} [u^T(t) \ x^T(t)] \begin{bmatrix} R + G^T M(t+1)G & G^T M(t+1)F \\ F^T M(t+1)G & Q + F^T M(t+1)F - M(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(t) \\ x(t) \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

Questa è un'espressione dell'indice che vale indipendentemente dalla successione $M(0), M(1), \dots, M(T) \in R^{n \times n}$.

Si andrà ora a sfruttare questo grado di libertà per sostituire nella (2.6) una successione opportuna $M(0), M(1), \dots, M(T) \in R^{n \times n}$ che faccia assumere a J una forma più adatta per risolvere il problema di minimo.

La costruzione di tale successione si baserà sul Lemma seguente, il quale fornisce alcune proprietà di carattere algebrico relative alle matrici F, G, P, Q, R, S precedentemente introdotte.

LEMMA: Si consideri la successione di matrici $M(0), M(1), \dots, M(T) \in R^{n \times n}$ definita dalla relazione ricorsiva all'indietro:

$$M(t) = Q + F^T M(t+1)F - F^T M(t+1)G[R + G^T M(t+1)G]^{-1}G^T M(t+1)F \quad (2.7)$$

con condizione finale

$$M(T) = S.$$

Le matrici della successione sono simmetriche e semidefinite positive.

L'equazione (2.7) viene chiamata equazione di Riccati alle differenze (RDE).

Sostituendo nell'espressione (2.6) dell'indice J la successione di matrici definita dalla (2.7) otteniamo:

$$J(u, x_0) = x_0^T M(0)x_0 + x^T(T)(S - M(T))x(T) + \sum_{t=0}^{T-1} [u^T(t) \ x^T(t)] \begin{bmatrix} R + G^T M(t+1)G & G^T M(t+1)F \\ F^T M(t+1)G & Q + F^T M(t+1)F - M(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(t) \\ x(t) \end{bmatrix} \\ = x_0^T M(0)x_0 + \sum_{t=0}^{T-1} [u^T(t) \ x^T(t)] \cdot \begin{bmatrix} R + G^T M(t+1)G & G^T M(t+1)F \\ F^T M(t+1)G & F^T M(t+1)G[R + G^T M(t+1)G]^{-1}G^T M(t+1)F \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(t) \\ x(t) \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

Le matrici $(m + n) \times (m + n)$ che compaiono nella sommatoria possono essere fattorizzate nella forma:

$$\begin{bmatrix} R + G^T M(t + 1)G \\ F^T M(t + 1)G \end{bmatrix} [R + G^T M(t + 1)G]^{-1} [R + G^T M(t + 1) \mid G^T M(t + 1)F]$$

che, sostituita nella (2.8), fornisce la seguente espressione per J:

$$J(u, x_0) = x_0^T M(0)x_0 + \sum_{t=0}^{T-1} [[(R + G^T M(t + 1)G)u(t) + G^T M(t + 1)Fx(t)]^T \cdot [R + G^T M(t + 1)G]^{-1} [(R + G^T M(t + 1)G)u(t) + G^T M(t + 1)Fx(t)]] \quad (2.9)$$

Essendo le matrici $R + G^T M(t + 1)G$ definite positive, $\forall t$, l'addendo t-esimo della (2.9) è non negativo e si annulla se e solo se risulta:

$$u(t) = - [R + G^T M(t + 1)G]^{-1} G^T M(t + 1)Fx(t) \quad (2.10)$$

Quando tutti gli addendi della sommatoria sono nulli, ovvero quando per $t = 0, 1, \dots, T - 1$ l'ingresso $u(t)$ è dato dalla (2.10), si ottiene il valore minimo di J in quanto i valori degli addendi della sommatoria, per ingressi $u(t)$ diversi da (2.10), sarebbero positivi (essendo le matrici $R + G^T M(t + 1)G$ definite positive) e quindi $J(u, x_0)$ assumerebbe valori maggiori rispetto al suo valore minimo espresso dalla forma quadratica seguente:

$$J(u, x_0)_{min} = x_0^T M(0)x_0$$

E' importante notare che la (2.10) fornisce la legge di controllo ottimo nella forma:

$$u(t) = - K(t)x(t) \quad (2.11)$$

con matrice di reazione la seguente:

$$K(t) = [R + G^T M(t + 1)G]^{-1} G^T M(t + 1)F$$

ovvero come:

REAZIONE DALLO STATO VARIANTE NEL TEMPO.

Una volta calcolata la successione delle matrici $M(0), M(1) \dots M(T)$ e quindi la successione delle matrici di retroazione $K(0), K(1) \dots K(T - 1)$, l'equazione $u(t) = - K(t)x(t)$ e l'equazione di aggiornamento di stato:

$$\begin{aligned} x(t + 1) &= Fx(t) + Gu(t) \\ y(t) &= Hx(t) \end{aligned}$$

permettono di determinare esplicitamente la successione di ingresso $u(0), u(1) \dots u(T-1)$ che minimizza J .

OSSERVAZIONE: Il procedimento che è stato descritto prima non rappresenta l'unico modo di risolvere il problema di ottimo che ci siamo posti.

Un modo alternativo consiste nell'esprimere gli stati $x(1), x(2) \dots x(T)$ in funzione dello stato iniziale x_0 , che si suppone assegnato, e dei valori di ingresso incogniti $u(0), u(1) \dots u(T-1)$:

$$\begin{aligned}x(1) &= Fx_0 + Gu(0) \\x(2) &= F^2x_0 + FG u(0) + Gu(1) \\&\dots\end{aligned}\tag{2.12}$$

Sostituendo le (2.12) nell'espressione dell'indice, questo risulta dipendere dalle mT variabili scalari $u_i(t)$ costituenti la successione d'ingresso.

Annullando le derivate di J rispetto a tali variabili, si può allora determinare la successione che minimizza l'indice.

Questo procedimento porta ad implementare la legge di controllo ottimo in catena aperta.

Tuttavia questa implementazione del controllo ottimo in catena aperta è svantaggiosa rispetto al controllo in retroazione poiché nel controllo ottimo in catena aperta eventuali perturbazioni (che modificano lo stato del sistema durante l'intervallo $[0, T]$) non influiscono nella determinazione dell'ingresso cosa che, invece, avviene quando si ricorre alla (2.11):

$$u(t) = -K(t)x(t)$$

la quale fornisce, negli istanti successivi all'istante τ in cui si è verificata la perturbazione, l'ingresso ottimo relativo alla nuova dinamica in $[\tau, T]$.

Va inoltre notato che il calcolo dell'ingresso ottimo attraverso l'annullamento delle derivate di J è applicabile soltanto se mT è molto piccolo ed in ogni caso deve essere rifatto integralmente per ogni scelta dello stato iniziale.

NB: L'espressione "controllo ottimo su intervallo finito" equivale a dire "controllo ottimo ad orizzonte finito".

Capitolo 3

MODEL PREDICTIVE CONTROL

3.1: INTRODUZIONE

In questo capitolo verranno presentati i principi di base del Model Predictive Control (MPC). L'MPC è una famiglia di algoritmi che ha avuto un enorme impatto industriale negli ultimi 30 anni. Al giorno d'oggi sono disponibili diversi algoritmi di controllo MPC commerciali e l'MPC rappresenta la metodologia di controllo avanzato più largamente usata nell'industria di processo.

Le più importanti caratteristiche dell'MPC (che lo rendono flessibile ed adatto ad un largo numero di applicazioni) sono la possibilità di:

- i) formulare il problema del controllo come un problema di ottimizzazione dove si possono considerare diversi obiettivi;
- ii) includere esplicitamente nella formulazione del problema di controllo i vincoli di stato e di ingresso;
- iii) sintetizzare il controllore su modelli di processo derivati empiricamente tramite semplici prove sperimentali con risposte a gradino o risposte impulsive.

Gli ingredienti principali di un algoritmo MPC sono:

- i) un modello di processo, solitamente a tempo discreto;
- ii) vincoli di ingressi, di uscite e di stato;
- iii) una funzione di costo J definita su un orizzonte temporale finito $[t, t + T]$;
- iv) un algoritmo di ottimizzazione;
- v) il così detto **ALGORITMO RH** (ovvero il RECEDING HORIZON ALGORITHM) che si enuncia come segue: Ad ogni istante temporale t , basandosi sulle informazioni di processo disponibili, si risolve il problema di ottimizzazione rispetto alla sequenza di controllo futuro $[u(t), \dots, u(t + T - 1)]$ e si applica solo il suo primo elemento $u^0(t)$. Quindi, all'istante di tempo successivo $t + 1$, si risolve un nuovo problema di ottimizzazione sull'orizzonte di predizione T nell'intervallo finito $[t + 1, t + T]$ basandosi sulle informazioni di processo disponibili al tempo $t + 1$.

Si noti che, grazie all'utilizzo di questa strategia, si ottiene una legge di controllo tempo-invariante anche se il problema di ottimizzazione a orizzonte finito viene risolto ad ogni istante di tempo t e sarebbe quindi tempo-variante (vedi il paragrafo 3.2 per la spiegazione).

Nel seguito di questo terzo capitolo verranno introdotti alcuni concetti generali e algoritmi MPC di base seguendo le linee guida della teoria del controllo ottimo.

Si descriveranno, infine, un certo numero di estensioni e approcci industriali e lo sviluppo di algoritmi MPC che garantiscano proprietà stabilizzanti.

3.2: MPC PER SISTEMI LINEARI NELLA FORMA DELLO SPAZIO DI STATO

Si consideri il sistema:

$$\begin{aligned}x(t+1) &= Fx(t) + Gu(t) \\ y(t) &= Hx(t)\end{aligned}$$

dove:

$x \in R^n$ è lo stato e si assume che sia misurabile
 $u \in R^r$ è la variabile di ingresso ovvero la variabile di controllo
 $y \in R^m$ è la variabile di uscita.

Il problema di ottimizzazione consiste nel valutare, ad ogni istante temporale t , la sequenza di controllo $u(t), u(t+1), \dots, u(t+T-1)$ che minimizza la funzione di costo quadratica (ad orizzonte finito):

$$\begin{aligned}J(x(t), u(\cdot), t) &= \sum_{i=0}^{T-1} [x^T(t+i)Qx(t+i) + u^T(t+i)Ru(t+i)] + x^T(t+T)Sx(t+T) \\ &= \sum_{i=0}^{T-1} (\|x(t+i)\|_Q^2 + \|u(t+i)\|_R^2) + \|x(t+T)\|_S^2\end{aligned}\quad (3.1)$$

dove:

$$\begin{aligned}Q &= Q' \geq 0 \\ R &= R' > 0 \\ S &= S' \geq 0\end{aligned}$$

sono matrici di dimensioni adatte.

Nel caso dell'MPC, T è un intero positivo solitamente chiamato ORIZZONTE DI PREDIZIONE.

3.2.1: SOLUZIONE AD ANELLO CHIUSO

La soluzione del problema (non vincolato) di stato è dato dalla legge di controllo ottimo tempo-variante

$$u^0(t+i) = -K(i)x(t+i), \quad i = 0, 1, \dots, T-1 \quad (3.2)$$

dove:

$$K(i) = (R + G^T M(i+1)G)^{-1} G^T M(i+1)F$$

con $M(i)$ la soluzione dell'equazione alle differenze di Riccati:

$$M(i) = Q + F^T M(i+1)F - [F^T M(i+1)G(R + G^T M(i+1)G)^{-1} G^T M(i+1)F]$$

con condizione al contorno: $M(T) = S$ dove T rappresenta l'orizzonte di predizione.

L'equazione (3.2) rappresenta una legge di controllo in retroazione statica dal momento che la variabile di controllo $u(t + i)$ dipende dallo stato al tempo $t + i$: $x(t + 1)$.

In virtù dell'algoritmo RH sopra esposto, solo il primo elemento della sequenza di controllo ottimo futura viene applicato cosicché la legge di controllo MPC diventa una legge di retroazione dallo stato e tempo-invariante poiché, all'istante temporale t , si considera solo il primo valore ovvero quello per $i = 0$ pari a:

$$u^{MPC}(t) = -K(0)x(t)$$

All'istante di tempo successivo $t + 1$, si risolve un nuovo problema di ottimizzazione sull'orizzonte di predizione N nell'intervallo finito $[t + 1, t + T]$, basandosi sulle informazioni di processo disponibili al tempo $t + 1$, considerando sempre solo il primo valore della nuova sequenza di controllo ottimo futura ovvero quello per $i = 0$.

3.2.2: SOLUZIONE AD ANELLO APERTO

La soluzione del problema di ottimizzazione (3.1) può anche essere ricavata ricordando che la soluzione del modello di stato al tempo " $t + i$ " assumendo come istante iniziale t è pari a:

$$x(t + i) = F^i x(t) + \sum_{j=0}^{i-1} F^{i-j-1} G u(t + j), \quad i > 0$$

Ponendo

$$X(t) = \begin{bmatrix} x(t+1) \\ x(t+2) \\ \vdots \\ x(t+T-1) \\ x(t+T) \end{bmatrix}; \quad \mathcal{F} = \begin{bmatrix} F \\ F^2 \\ \vdots \\ F^{T-1} \\ F^T \end{bmatrix};$$

$$U(t) = \begin{bmatrix} u(t) \\ u(t+1) \\ \vdots \\ u(t+T-2) \\ u(t+T-1) \end{bmatrix}; \quad \mathcal{G} = \begin{bmatrix} G & 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 \\ FG & G & 0 & \cdot & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdot & \vdots & \vdots \\ F^{T-2}G & F^{T-3}G & F^{T-4}G & \cdot & G & 0 \\ F^{T-1}G & F^{T-2}G & F^{T-3}G & \cdot & FG & G \end{bmatrix}$$

segue che

$$X(t) = \mathcal{F}x(t) + \mathcal{G}U(t) \tag{3.3}$$

Infine introduciamo le matrici con N blocchi sulla diagonale:

$$\mathcal{Q} = \begin{bmatrix} Q & 0 & \cdot & 0 & 0 \\ 0 & Q & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdot & Q & 0 \\ 0 & 0 & \cdot & 0 & S \end{bmatrix}; \quad \mathcal{R} = \begin{bmatrix} R & 0 & \cdot & 0 & 0 \\ 0 & R & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdot & R & 0 \\ 0 & 0 & \cdot & 0 & R \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

Definiamo:

$$\bar{J}(x(t), U(t), t) = X^T(t)\mathcal{Q}X(t) + U^T(t)\mathcal{R}U(t)$$

e osserviamo che J e \bar{J} differiscono per lo stato al tempo t che però non si può scegliere e che diventa, quindi, un costo fisso.

Quindi si può affermare che i valori degli indici J e \bar{J} sono diversi ma che il valore di u che minimizza J e \bar{J} è il medesimo, ovvero:

$$\arg\left(\min_{u(\cdot)} J(x(t), u(\cdot), t)\right) = \arg\left(\min_{U(t)} \bar{J}(x(t), U(t), t)\right)$$

L'uguaglianza dell'argomento è, infatti, garantita dal fatto che il termine $\|x(\cdot)\|_{\mathcal{Q}}^2$ in:

$$J(x(t), u(\cdot), t) = \sum_{i=0}^{T-1} (\|x(t+i)\|_{\mathcal{Q}}^2 + \|u(t+i)\|_{\mathcal{R}}^2) + \|x(t+T)\|_S^2$$

non dipende da $u(t+j)$, $j \geq 0$, termine questo che può, quindi, essere trascurato.

Ora, poiché $\mathcal{Q} = \mathcal{Q}^T$ (essendo $Q = Q^T$ ed $S = S^T$) e poiché $(ABC \dots XYZ) = Z^T Y^T X^T \dots C^T B^T A^T$, ricordando la (3.3), segue che:

$$\begin{aligned} \bar{J}(x(t), U(t), t) &= (\mathcal{F}x(t) + \mathcal{G}U(t))^T \mathcal{Q} (\mathcal{F}x(t) + \mathcal{G}U(t)) + U^T(t)\mathcal{R}U(t) \\ &= x^T(t)\mathcal{F}^T \mathcal{Q} \mathcal{F} x(t) + 2x^T(t)\mathcal{F}^T \mathcal{Q} \mathcal{G} U(t) + U^T(t)[\mathcal{G}^T \mathcal{Q} \mathcal{G} + \mathcal{R}]U(t) \end{aligned}$$

Si tratta di una forma quadratica definita positiva (poiché $\mathcal{R} > 0$).

La sequenza di controllo ottimo risultante $U^o(t)$ è:

$$U^o(t) = -(\mathcal{G}^T \mathcal{Q} \mathcal{G} + \mathcal{R})^{-1} \mathcal{G}^T \mathcal{Q} \mathcal{F} x(t)$$

Inoltre definendo:

$$\mathcal{K} = (\mathcal{G}^T \mathcal{Q} \mathcal{G} + \mathcal{R})^{-1} \mathcal{G}^T \mathcal{Q} \mathcal{F} = \begin{bmatrix} \mathcal{K}(0) \\ \mathcal{K}(1) \\ \vdots \\ \mathcal{K}(T-1) \end{bmatrix}, \quad \mathcal{K}(i) \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

è possibile scrivere:

$$U^0(t) = - \begin{bmatrix} \mathcal{K}(0) \\ \mathcal{K}(1) \\ \vdots \\ \mathcal{K}(T-1) \end{bmatrix} x(t)$$

oppure:

$$u^0(t+i) = - \mathcal{K}(i)x(t), \quad i = 0, 1, \dots, T-1 \quad (3.5)$$

Per questo motivo la legge di controllo (3.5) risulta in una soluzione in catena aperta (almeno per $i > 0$).

Inoltre, applicando l'algoritmo RH, si ottiene, anche in questo caso, una legge di controllo in retroazione dello stato:

$$u^{MPC}(t) = - \mathcal{K}(0)x(t)$$

3.2.3: GESTIONE DEI VINCOLI SULLO STATO, SULL'INGRESSO E SULL'USCITA

La principale differenza tra gli approcci ad anello aperto e ad anello chiuso è che, nel primo caso, la presenza di vincoli su stato, ingresso e uscita può essere facilmente inclusa nel problema di ottimizzazione.

Nel seguito sarà assunto che gli ingressi futuri, gli stati e/o le uscite soddisfino i seguenti vincoli:

$$u_m \leq u(t+i) \leq u_M, \quad i = 0, \dots, T-1$$

$$x_m \leq x(t+i) \leq x_M, \quad i = 0, \dots, T$$

$$y_m \leq y(t+i) \leq y_M, \quad i = 0, \dots, T$$

dove le disequazioni sui vettori devono essere considerate elemento per elemento.

Definendo i seguenti vettori, ottenuti dal concatenamento di T elementi vettoriali,

$$U_m = \begin{bmatrix} u_m \\ u_m \\ \vdots \\ u_m \end{bmatrix}, \quad U_M = \begin{bmatrix} u_M \\ u_M \\ \vdots \\ u_M \end{bmatrix}, \quad X_m = \begin{bmatrix} x_m \\ x_m \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix}, \quad X_M = \begin{bmatrix} x_M \\ x_M \\ \vdots \\ x_M \end{bmatrix}$$

$$Y_m = \begin{bmatrix} y_m \\ y_m \\ \vdots \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}, \quad Y_M = \begin{bmatrix} y_M \\ y_M \\ \vdots \\ \vdots \\ y_M \end{bmatrix}, \quad Y(t) = \begin{bmatrix} y(t+1) \\ y(t+2) \\ \vdots \\ y(t+T-1) \\ y(t+T) \end{bmatrix}$$

il problema di ottimizzazione ad orizzonte finito può essere riformulato come:

$$\min_{U(t)} \bar{J}(x(t), U(t), t) = (\mathcal{F}x(t) + \mathcal{G}U(t))^T \mathcal{Q}(\mathcal{F}x(t) + \mathcal{G}U(t)) + U^T(t) \mathcal{R}U(t)$$

con i seguenti vincoli:

$$\begin{aligned} X_m &\leq X(t) = \mathcal{F}x(t) + \mathcal{G}U(t) \leq X_M \\ U_m &\leq U(t) \leq U_M \\ Y_m &\leq Y(t) \leq Y_M \end{aligned}$$

dove $Y(t)$ si trova immediatamente da $X(t)$ ricordandosi della legge di uscita:

$$y(t) = Hx(t) \implies Y(t) = HX(t)$$

Questo problema di ottimizzazione vincolato non ammette una soluzione esplicita ma può essere facilmente risolto tramite i metodi di programmazione quadratica (QP).

3.3: ALGORITMI MPC INDUSTRIALI

La formulazione di base dell'MPC prima introdotta verrà ora estesa per far fronte a problemi di inseguimento e per essere applicata a sistemi affetti da disturbi.

3.3.1: INSEGUIMENTO DEI SEGNALI DI RIFERIMENTO E TRATTAZIONE DEI DISTURBI

Consideriamo il sistema descritto da:

$$\begin{aligned}x(t+1) &= Fx(t) + Gu(t) + Cv(t) \\y(t) &= Hx(t) + v(t)\end{aligned}$$

dove si ha che il disturbo $v \in R^l$ viene assunto noto all'istante di tempo corrente t e anche, in caso, sull'orizzonte di predizione futuro.

L'obiettivo è quello di inseguire, con la variabile di uscita y , un segnale di riferimento y^o nell'orizzonte di predizione futuro.

A questo scopo si noti che:

$$\begin{aligned}x(t+i) &= F^i x(t) + \sum_{j=0}^{i-1} F^{i-j-1} [Gu(t+j) + Cv(t+j)] \\y(t+i) &= Hx(t+i) + v(t+i) \quad \text{con } i > 0 \quad (i = 1, 2, \dots, T)\end{aligned}$$

La funzione di costo quadratica che deve essere minimizzata dovrà includere un termine che pesa la variabile di errore futuro ovvero:

$$J(x(t), u(\cdot), t) = \sum_{i=0}^{T-1} \left(\frac{\|y^o(t+i) - y(t+i)\|_Q^2}{Q} + \|u(t+i)\|_R^2 \right) + \frac{\|y^o(t+T) - y(t+T)\|_S^2}{S}$$

dove:

$$\begin{aligned}Q &= Q^T \geq 0 \\R &= R^T > 0 \\S &= S^T \geq 0\end{aligned}$$

sono matrici simmetriche, semidefinite o definite positive, di dimensioni adatte.

Basandosi sulla precedente formula è possibile scrivere:

$$\begin{aligned}y(t+i) &= Hx(t+i) + v(t+i) \\&= H \left[F^i x(t) + \sum_{j=0}^{i-1} F^{i-j-1} (Gu(t+j) + Cv(t+j)) \right] + Iv(t+i)\end{aligned}$$

$$= [HF^i]x(t) + \left[\sum_{j=0}^{i-1} HF^{i-j-1}Gu(t+j) \right] + [Lv(t+i) + \sum_{j=0}^{i-1} HF^{i-j-1}Cv(t+j)]$$

ovvero si ha:

$$Y(t) = \mathcal{F}_c x(t) + \mathcal{G}_c U(t) + \mathcal{C}_c V(t)$$

con:

$$Y(t) = \begin{bmatrix} y(t+1) \\ y(t+2) \\ \vdots \\ y(t+T-1) \\ y(t+T) \end{bmatrix}; \quad U(t) = \begin{bmatrix} u(t) \\ u(t+1) \\ \vdots \\ u(t+T-2) \\ u(t+T-1) \end{bmatrix}; \quad V(t) = \begin{bmatrix} d(t) \\ d(t+1) \\ \vdots \\ d(t+T-2) \\ d(t+T-1) \\ d(t+T) \end{bmatrix};$$

$$\mathcal{F}_c = \begin{bmatrix} HF \\ HF^2 \\ \vdots \\ HF^{T-1} \\ HF^T \end{bmatrix}; \quad \mathcal{G}_c = \begin{bmatrix} HG & 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 \\ HFG & HG & 0 & \cdot & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdot & \vdots & \vdots \\ HF^{T-2}G & HF^{T-3}G & HF^{T-4}G & \cdot & HG & 0 \\ HF^{T-1}G & HF^{T-2}G & HF^{T-3}G & \cdot & HFG & HG \end{bmatrix};$$

$$\mathcal{C}_c = \begin{bmatrix} HL & I & 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 \\ HFL & HL & I & \cdot & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdot & \vdots & \vdots & \vdots \\ HF^{T-2}L & HF^{T-3}L & HF^{T-4}L & \cdot & HL & I & 0 \\ HF^{T-1}L & HF^{T-2}L & HF^{T-3}L & \cdot & HFL & HL & I \end{bmatrix}$$

Ora ponendo:

$$Y^o(t) = \begin{bmatrix} y^o(t+1) \\ y^o(t+2) \\ \vdots \\ y^o(t+T-1) \\ y^o(t+T) \end{bmatrix}$$

e, definendo le matrici \mathcal{Q} ed \mathcal{R} come in (3.4), si ottiene:

$$\arg\left(\min_{u(\cdot)} J(x(t), u(\cdot), t)\right) = \arg\left(\min_{U(t)} \bar{J}(x(t), U(t), t)\right)$$

dove:

$$\bar{J}(x(t), U(t), t) = (Y^o(t) - Y(t))^T \mathcal{Q} (Y^o(t) - Y(t)) + U^T(t) \mathcal{R} U(t) \quad (3.6)$$

oppure, dato che $Y(t) = \mathcal{F}_c x(t) + \mathcal{G}_c U(t) + \mathcal{C}_c V(t)$, si ha:

$$\bar{J}(x(t), U(t), t) = [Y^o(t) - \mathcal{F}_c x(t) - \mathcal{G}_c U(t) - \mathcal{E}_c V(t)]^T Q [Y^o(t) - \mathcal{F}_c x(t) - \mathcal{G}_c U(t) - \mathcal{E}_c V(t)] + U^T(t) \mathcal{R} U(t)$$

Questa funzione di costo deve essere minimizzata rispetto ai valori futuri del controllo $U(t+i)$, $i \geq 0$ e possibilmente con vincoli adatti su X, U, Y .

Si noti comunque che $\bar{J}(x(t), U(t), t)$ dipende dai segnali di riferimento futuri Y^o e dai disturbi V che sono spesso non noti.

In questi casi, solitamente, si assume che:

$$\begin{aligned} y^o(t+i) &= y^o(t) \\ v(t+i) &= v(t) \end{aligned}$$

3.3.2: RILASSAMENTO DEI VINCOLI

Quando l'indice di costo (3.6) deve essere minimizzato sotto i vincoli sulla variabile di controllo U o sull'uscita Y tali che:

$$\begin{aligned} U_m &\leq U(t) \leq U_M \\ Y_m &\leq Y(t) \leq Y_M \end{aligned}$$

può succedere che non esista una soluzione fattibile per via della presenza dei disturbi. Per questa ragione è più conveniente attenuare i vincoli di uscita includendo nel problema di ottimizzazione opportune variabili di lasco (*slack variables*).

Per semplicità, nel seguito della trattazione, si userà una sola variabile di lasco ϵ e il problema verrà enunciato come segue:

$$\min_{U(\cdot), \epsilon} \left[(Y^o(t) - Y(t))^T Q (Y^o(t) - Y(t)) + U^T(t) \mathcal{R} U(t) + \rho \epsilon \right]$$

soggetto a:

$$\begin{aligned} U_m &\leq U(t) \leq U_M \\ Y_m - \epsilon \mathbf{1} &\leq Y(t) \leq Y_M + \epsilon \mathbf{1} \\ \epsilon &\geq 0 \end{aligned}$$

dove:

$$\mathbf{1}^T = [1 \ 1 \ \dots \ 1]$$

e con ρ scelto SUFFICIENTEMENTE ALTO in modo tale da garantire che l'ottimo sia pari a $\epsilon = 0$ quando una soluzione fattibile esiste.

3.4: MPC PER SISTEMI NON LINEARI

Fino ad ora si sono considerati solo sistemi lineari. Comunque sia, le principali linee guida del MPC possono essere usate per controllare anche i sistemi non lineari nella forma:

$$x(t + 1) = f(x(t), u(t))$$

L'indice di costo da minimizzare può essere una generica funzione non lineare dello stato x e delle variabili di controllo u sull'orizzonte di predizione T .

Il problema di ottimizzazione può quindi essere formulato come segue:

$$\min_{u(t)} J = \sum_{j=1}^{T-1} l(x(t + j), u(t + j))$$

dove $l(x, u)$ è una funzione, non lineare, scelta dal progettista e si ricorda che il problema di ottimizzazione può includere vincoli sullo stato e sul controllo.

Questo problema può essere risolto numericamente tramite algoritmi di ottimizzazione iterativi che richiedono la simulazione del sistema ad ogni iterazione.

Difatti, nel caso non lineare, non si potranno mai ricavare formule esplicite nemmeno nel caso di problemi di controllo non vincolati.

3.4.1: MPC A TEMPO CONTINUO

In molte applicazioni industriali, l'MPC viene usato per controllare modelli non lineari a tempo continuo nella forma:

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$$

Si assume che la legge di controllo sia costante a tratti della forma:

$$u(t) = u(k\tau), \quad t \in [k\tau, (k + 1)\tau]$$

dove τ è il periodo di campionamento adottato e k è l'indice di tempo discreto corrispondente al tempo di campionamento $k\tau$.

Ora ponendo:

$$U(k) = \begin{bmatrix} u(k\tau) \\ u(k\tau + \tau) \\ \vdots \\ u(k\tau + T\tau - \tau) \end{bmatrix}$$

il problema di ottimizzazione può essere formulato come segue:

$$\min_{U(k)} J = \int_{k\tau}^{k\tau+T\tau} l(x(\nu), u(\nu)) d\nu$$

dove l è la funzione non lineare delle variabili di stato e delle variabili di controllo scelta dal progettista e si ricorda che il problema in esame può essere soggetto ai vincoli dovuti alle dinamiche del sistema e ai possibili vincoli sullo stato e sulle variabili di controllo.

Anche in questo caso si ricorre unicamente a soluzioni numeriche attraverso algoritmi di ottimizzazioni iterativi.

3.5: ALGORITMI MPC E STABILITÀ

In questo paragrafo si descriveranno alcune formulazioni per MPC che garantiscano la stabilità ad anello chiuso.

Per semplicità si considererà solo il problema di regolazione dello stato e si assumerà che lo stato sia misurabile.

Consideriamo il seguente sistema controllato descritto da:

$$x(t + 1) = f(x(t), u(t)) \quad (3.7)$$

dove:

$$\begin{aligned} f(x, u) &\text{ è differenziabile con continuità rispetto ai suoi argomenti} \\ f(0,0) &= 0 \end{aligned}$$

mentre lo stato x e l'ingresso u devono soddisfare i seguenti vincoli:

$$x \in X, \quad u \in U \quad (3.8)$$

dove X ed U sono insiemi chiusi e limitati che includono l'origine.

Per il sistema (3.7) si assume esser nota la seguente LEGGE DI CONTROLLO AUSILIARIA:

$$u = \kappa_a(x) \quad (3.9)$$

soddisfacente:

$$\kappa_a(0) = 0$$

e si assuma di prendere in considerazione un insieme positivamente invariante $X_f \subset X$ che includa l'origine (si veda la definizione 3.1) e tale che, per il sistema ad anello chiuso

$$x(t + 1) = f(x(t), \kappa_a(x(t)))$$

assumere $x(\bar{t}) \in X_f$ implichi:

$$\begin{aligned} x(t) &\in X_f, \quad t \geq \bar{t} \\ u(t) &= \kappa_a(x(t)) \in U, \quad t \geq \bar{t} \end{aligned}$$

In altre parole, dato uno stato iniziale $x(\bar{t}) \in X_f$, l'evoluzione dello stato di un sistema ad anello chiuso trovato con la legge di controllo ausiliaria, rimane in X_f e i vincoli su stato e ingresso (3.8) sono, quindi, soddisfatti (poichè $X_f \subset X$).

DEFINIZIONE 3.1:

Si consideri che l'ingresso $u(\cdot)$ soddisfi la legge di controllo ausiliaria:

$$u(t) = \kappa_a(x(t))$$

soddisfacente la condizione:

$$\kappa_a(0) = 0$$

in modo che il complessivo sistema ad anello chiuso:

$$x(t+1) = f(x(t), \kappa_a(x(t)))$$

sia autonomo.

Si definisce quindi un insieme invariante (o positivamente invariante) X_f per il sistema autonomo considerato, un insieme tale per cui se $x(0) \in X_f \Rightarrow \forall t \geq 0 \quad x(t) \in X_f$.

Si noti che il termine "positivamente" precisa solo il fatto che l'insieme è invariante per tempi successivi all'istante iniziale considerato.

Si consideri, ora, il problema di calcolare al tempo t la sequenza di controllo

$$u(t), u(t+1), \dots, u(t+T-1)$$

che minimizza la funzione di costo ad orizzonte finito:

$$J(x(t), u(\cdot), t) = \sum_{i=0}^{T-1} (\|x(t+i)\|_Q^2 + \|u(t+i)\|_R^2) + V_f(x(t+T)) \quad (3.10)$$

Tale problema di minimizzazione è soggetto a:

$$x(t+1) = f(x(t), u(t))$$

e ai vincoli:

$$\begin{aligned} x(t+i) \in X, \quad u(t+i) \in U \quad \text{con } i = 0, \dots, T-1 \\ x(t+T) \in X_f \end{aligned}$$

Nella funzione di costo (3.10), V_f è il termine di penalizzazione finale e soddisfa le condizioni:

$$\begin{aligned} V_f(x) &\geq 0 \\ V_f(0) &= 0 \end{aligned}$$

mentre le matrici Q ed R sono simmetriche e definite positive ovvero:

$$\begin{aligned} Q &= Q' > 0 \\ R &= R' > 0 \end{aligned}$$

dove la matrice Q viene assunta definita positiva (e non semidefinita positiva) per semplicità.

Dalla soluzione del problema di ottimizzazione a orizzonte finito, usando l'algoritmo RH, si ottiene la seguente legge di controllo tempo-invariante, implicita e a retroazione dallo stato:

$$u = \kappa^{MPC}(x) \quad (3.11)$$

Supponiamo, ora, che $J^o(x(t), t)$ sia il valore ottimo della funzione di costo al tempo t sull'intervallo $[t, t + T]$ e si assuma che J^o sia una funzione continua dei suoi argomenti.

A questo punto, sotto le ipotesi precedenti, può essere verificato il seguente teorema:

TEOREMA 3.1: Se, $\forall x \in X_f$ vale la seguente disuguaglianza:

$$V_f(f(x(t), \kappa_a(x(t))) - V_f(x(t)) + \left(\|x(t)\|_Q^2 + \|\kappa_a(x(t))\|_R^2 \right) \leq 0 \quad (3.12)$$

allora l'origine $x = 0$ è un punto di equilibrio asintoticamente stabile per il sistema ad anello chiuso ottenuto con la legge di controllo MPC (3.11).

PROVA:

La soluzione del problema di ottimizzazione, al generico istante temporale t , è data da:

$$U^o(t) = [u_t^o(t) \quad u_t^o(t+1) \quad \dots \quad u_t^o(t+T-2) \quad u_t^o(t+T-1)]$$

e definiamo $J^o(x(t), t)$ il valore ottimo della funzione di costo associata.

Si noti, inoltre, che, poiché $Q = Q' > 0$, $R = R' > 0$ e poiché $V_f(x) \geq 0$, $V_f(0) = 0$ si ha che:

$$J^o(x(t), t) \geq 0$$

In accordo con l'algoritmo RH, applicando il primo campione della sequenza di controllo $u_t^o(t)$, all'istante temporale successivo lo stato sarà:

$$x^o(t+1) = f(x(t), u_t^o(t))$$

Applicando la parte rimanente della sequenza di controllo ottimo $U^o(t)$, si vorrebbe ottenere:

$$x^o(t+T) \in X_f$$

così che, al tempo $t+1$, la sequenza di controllo:

$$\tilde{U}(t+1) = [u_t^o(t+1) \quad u_t^o(t+2) \quad \dots \quad u_t^o(t+T-1) \quad \kappa_a(x(t+T))]$$

risulterebbe essere un'opzione ammissibile per il problema di ottimizzazione a partire dal tempo $t+1$.

Tuttavia, la funzione di costo $\tilde{J}(x^o(t+1), t+1)$ corrispondente alla sequenza $\tilde{U}(t+1)$ non è quella a priori ottima per il problema di controllo ottimo formulato al tempo $t+1$ che sarebbe $J^o(x^o(t+1), t+1)$ per cui vale la seguente disuguaglianza:

$$J^o(x^o(t+1), t+1) \leq \tilde{J}(x^o(t+1), t+1) \quad (3.13)$$

visto che $J^o(x^o(t+1), t+1)$ rappresenta la soluzione minima ovvero ottima per il problema di controllo ottimo formulato al tempo $t+1$.

Dall'equazione (3.10), considerando tutti i termini di J , segue che:

$$\begin{aligned}
\tilde{J}(x^o(t+1), t+1) - J^o(x(t), t) &= \sum_{i=0}^{T-2} (\|x^o(t+1+i)\|_Q^2 + \|u^o(t+1+i)\|_R^2) + \\
&\quad + (\|x^o(t+T)\|_Q^2 + \|\kappa_a(x^o(t+T))\|_R^2) + V_f(x^o(t+1+T)) - \\
&\quad - (\|x(t)\|_Q^2 + \|\kappa^{MPC}(x(t))\|_R^2) - V_f(x^o(t+T)) - \\
&\quad - \sum_{i=1}^{T-1} (\|x^o(t+i)\|_Q^2 + \|u^o(t+i)\|_R^2) \\
&= - (\|x(t)\|_Q^2 + \|\kappa^{MPC}(x(t))\|_R^2) + \\
&\quad + V_f\left(f\left(x^o(t+T), \kappa_a(x^o(t+T))\right)\right) - V_f(x^o(t+T)) + \\
&\quad + \left(\|x^o(t+T)\|_Q^2 + \|\kappa_a(x^o(t+T))\|_R^2\right)
\end{aligned}$$

Quindi si ha che:

$$\begin{aligned}
\tilde{J}(x^o(t+1), t+1) - J^o(x(t), t) &= - (\|x(t)\|_Q^2 + \|\kappa^{MPC}(x(t))\|_R^2) + \\
&\quad + V_f\left(f\left(x^o(t+T), \kappa_a(x^o(t+T))\right)\right) - V_f(x^o(t+T)) + \\
&\quad + \left(\|x^o(t+T)\|_Q^2 + \|\kappa_a(x^o(t+T))\|_R^2\right)
\end{aligned}$$

Tuttavia ricordandosi che:

$$J^o(x^o(t+1), t+1) \leq \tilde{J}(x^o(t+1), t+1)$$

segue, in virtù dell'ipotesi (3.12), che:

$$\begin{aligned}
J^o(x^o(t+1), t+1) - J^o(x(t), t) &\leq \tilde{J}(x^o(t+1), t+1) - J^o(x^o(t), t) = \\
&= - (\|x(t)\|_Q^2 + \|\kappa^{MPC}(x(t))\|_R^2) + V_f\left(f\left(x^o(t+T), \kappa_a(x^o(t+T))\right)\right) - \\
&\quad - V_f(x^o(t+T)) + \left(\|x^o(t+T)\|_Q^2 + \|\kappa_a(x^o(t+T))\|_R^2\right) \\
&\leq - (\|x(t)\|_Q^2 + \|\kappa^{MPC}(x(t))\|_R^2) \leq 0
\end{aligned}$$

Quindi si è visto come la condizione sufficiente (3.12) garantisca :

$$J^o(x^o(t+1), t+1) - J^o(x(t), t) \leq - (\|x(t)\|_Q^2 + \|\kappa^{MPC}(x(t))\|_R^2) \leq 0$$

dove l'uguaglianza $-(\|x(t)\|_Q^2 + \|\kappa^{MPC}(x(t))\|_R^2) = 0$ si ha solo per $x(t) = 0$ poiché $Q > 0$.

Per finire, si fa notare come la funzione di costo $J^o(x(t), t)$ sia una funzione di Lyapunov per il sistema ad anello chiuso con legge di controllo MPC in quanto valgono i seguenti punti:

- $J^o(x(t), t) \geq 0$ in virtù di quanto verificato prima e $J^o(x(t), t) = 0 \Leftrightarrow x = 0$
- $J^o(x(t), t)$ è una funzione quadratica di x poiché vale :
$$J(x(t), u(\cdot), t) = \sum_{i=0}^{T-1} (\|x(t+i)\|_Q^2 + \|u(t+i)\|_R^2) + V_f(x(t+T))$$
- $J^o(x(t+1), t) \leq J^o(x(t), t)$ in virtù di quanto verificato poco prima.

Dunque, dato che $\Delta J^o = J^o(x(t+1), t) - J^o(x(t), t)$ è, quindi, definita negativa, per il criterio di stabilità di Lyapunov per i sistemi discreti, l'origine $x = 0$ è un punto di equilibrio asintoticamente stabile per il sistema ad anello chiuso ottenuto con la legge di controllo MPC (3.11).

Prima di introdurre uno degli svariati algoritmi specifici per la scelta del termine di penalizzazione finale V_f e del vincolo finale X_f che soddisfi la condizione (3.12), si esplicitano due osservazioni.

OSSERVAZIONE A: Il precedente risultato di stabilità si basa sull'ipotesi che la funzione di costo ottimale sia decrescente. Per garantire questa proprietà, si noti che non è necessario determinare ad ogni istante di tempo t la sequenza ottima $U^o(t)$ che minimizzi (3.10) ma è sufficiente calcolare una sequenza:

$$\bar{U}(t) = [\bar{u}_t(t) \quad \bar{u}_t(t+1) \quad \dots \quad \bar{u}_t(t+T-2) \quad \bar{u}_t(t+T-1)]$$

tale che:

$$\bar{J}(x(t), t) \leq \tilde{J}(x(t), t)$$

dove $\bar{J}(x(t), t)$ e $\tilde{J}(x(t), t)$ sono i valori degli indici di costo corrispondenti, rispettivamente, alle sequenze $\bar{U}(t)$ e $\tilde{U}(t)$ con:

$$\tilde{U}(t) = [u_{t-1}^o(t) \quad u_{t-1}^o(t+1) \quad \dots \quad u_{t-1}^o(t+T-2) \quad \kappa_a(x(t+T-1))]$$

Questo è molto importante dal punto di vista computazionale dal momento che rende evidente come non sia necessario calcolare la soluzione ottima ad ogni istante.

Viene, piuttosto, richiesto di determinare una soluzione migliorando quella data da $\tilde{U}(t)$.

OSSERVAZIONE B: L'uso della legge di controllo MPC $u = \kappa^{MPC}(x)$ permette di aumentare la regione di stabilità della legge di controllo ausiliaria e migliora la sua performance.

Difatti, a prescindere dalla scelta di V_f ed X_f e una volta provato che le condizioni del precedente teorema siano soddisfatte, chiamando $X^{MPC}(T)$ il massimo insieme positivamente invariante associato al sistema ad anello chiuso con legge di controllo MPC (3.11) ed orizzonte di predizione T , dove $x \in X$ ed $\kappa^{MPC}(x) \in U$, si ottengono i seguenti risultati:

1. $X^{MPC}(T+1) \supseteq X^{MPC}(T)$ cioè la dimensione di X^{MPC} aumenta con T ;
2. $X^{MPC}(T) \supseteq X_f$ poiché la legge di controllo ausiliaria $u = \kappa_a(x)$ è una soluzione ammissibile;
3. esiste un valore \bar{T} tale che $X^{MPC}(\bar{T}) \supseteq \bar{X}_f$ dove \bar{X}_f è il massimo insieme positivamente invariante, a priori sconosciuto, associato alla legge di controllo ausiliaria $u = \kappa_a(x)$

3.5.1: VINCOLO DI STATO FINALE NULLO

Il metodo basato sul “vincolo di stato finale nullo” è caratterizzato dalle scelte seguenti:

$$\kappa_a(x) = 0 \quad (3.14)$$

$$X_f = \{0\} \quad (3.15)$$

$$V_f = 0 \quad (3.16)$$

cioè si richiede che lo stato alla fine dell’orizzonte finito T sia nell’origine.

Dall’assunzione $f(0,0) = 0$ segue che X è un insieme positivamente invariante per il sistema ad anello chiuso con la legge di controllo ausiliaria (3.14) e $\kappa_a(x)$ soddisfa anche i vincoli sull’ingresso.

Inoltre, dal momento che il termine di penalizzazione finale è nullo in conseguenza della (3.16), la condizione (3.12) è soddisfatta (con l’uguaglianza) cosicché, in virtù del teorema 3.1, la stabilità asintotica dell’origine è provata.

Questo approccio, sebbene concettualmente molto semplice, è interessante soprattutto per i sistemi lineari, dove soddisfare il vincolo di uguaglianza finale (3.15) è più semplice.

Più in generale, se il sistema controllato è non lineare, soddisfare il vincolo di uguaglianza finale può essere numericamente molto difficile in un numero finito di iterazioni, anche senza qualunque limitazione sulle variabili di ingresso, situazione in cui sono necessari altri approcci.

Capitolo 4

EXTENDED STATE SPACE MODEL PREDICTIVE CONTROL

4.1: INTRODUZIONE

Si presenta, in questo capitolo, un metodo di soluzione per l'MPC lineare.

L'identificazione è l'insieme dei metodi e degli algoritmi che consentono di analizzare i dati per ottenere un certo modello.

Il modello così individuato potrà essere utile ad esempio per risolvere problemi di controllo oppure per eseguire delle previsioni sulle variabili del modello stesso.

I problemi che si incontrano durante l'identificazione sono fondamentalmente suddivisibili in 3 classi:

1. stima dei parametri di un modello noto;
2. stima di un segnale non misurabile;
3. costruzione di un modello a partire dai dati e mediante un procedimento a scatola chiusa.

In sostanza quindi non si conosce il meccanismo che regola i dati, ma si vuole ottenere un modello del sistema.

Talvolta questo approccio viene adottato pur conoscendo il meccanismo che regola i dati, ad esempio, quando si cerca di risolvere un problema di controllo che, altrimenti, risulterebbe troppo complesso. In quest'ultimo caso si utilizzerà, quindi, il modello esatto solo per eseguire delle simulazioni mentre l'analisi verrà eseguita sulla base di un modello semplificato.

Si ricorda che per modellistica si intende la costruzione di un modello, eseguita tramite le leggi fisiche che ne governano i fenomeni a partire dalla descrizione delle sue parti costituenti.

La modellistica è quindi il classico modo tramite il quale è possibile costruire un modello.

L'identificazione, invece, consiste nella stima dei parametri incerti del modello o nella stima dei segnali ignoti o nella costruzione del modello eseguita a partire dai dati anziché dallo studio delle parti che costituiscono il sistema modellato e delle leggi che lo governano.

Il principio base per l'identificazione è di tipo predittivo: un modello è buono se ci fornisce delle buone predizioni.

La teoria della predizione è perciò un concetto preliminare necessario per poter parlare di identificazione.

Nel metodo, che considereremo in questo quarto capitolo, si definiscono due orizzonti temporali:

1. un orizzonte T per la predizione delle uscite y future chiamato semplicemente ORIZZONTE DI PREDIZIONE;
2. un orizzonte J per l'immagazzinamento degli ingressi u e delle uscite y nel passato chiamato ORIZZONTE DI IDENTIFICAZIONE.

Il nuovo orizzonte J definisce le sequenze di uscite e ingressi passate, le quali possono essere usate per stimare il modello o anche solo lo stato presente del processo.

Il modello non è noto e la stima dell'uscita nella finestra temporale T sarà trovata tramite opportuni modelli di predizione.

Tale metodo viene, di solito, chiamato EMPC ovvero EXTENDED STATE SPACE MODEL PREDICTIVE CONTROL (MPC nello spazio di stato esteso).

Si noti, poi, che il metodo EMPC può essere definito, come si vedrà nei prossimi paragrafi, tramite alcune matrici in modo da semplificare i calcoli.

L'algoritmo EMPC rappresenta, quindi, un semplice approccio alternativo che evita l'esplicita ricostruzione dello stato.

L'algoritmo EMPC non richiede la soluzione delle equazioni di Riccati e si basa sui risultati ottenuti col metodo di identificazione a sottospazi (SID) per sistemi lineari presentato da Di Ruscio in [3].

I vantaggi di usare il metodo SID per modellare l'MPC è data dall'inclusione di un nuovo orizzonte di identificazione J per l'MPC.

4.2: PREMESSE

4.2.1: DESCRIZIONE DEL SISTEMA

Consideriamo un processo descritto da un modello nello spazio di stato lineare, a tempo discreto e tempo-invariante:

$$x(t+1) = Fx(t) + Gu(t) + Cv(t) \quad (4.1)$$

$$y(t) = Hx(t) + Du(t) + Ev(t) \quad (4.2)$$

dove:

$t \in \mathbb{Z}_+$ è l'istante di tempo discreto considerato;

$x(t) \in \mathbb{R}^n$ è il vettore di stato all'istante t ;

$u(t) \in \mathbb{R}^r$ è il vettore dell'ingresso all'istante t ;

$v(t) \in \mathbb{R}^l$ è il vettore del disturbo all'istante t ;

$y(t) \in \mathbb{R}^m$ è il vettore delle uscite all'istante t .

In questo capitolo, per semplificare la trattazione, verranno considerati unicamente sistemi strettamente propri rispetto al segnale di controllo (ovvero con $D = 0$).

Si noti poi che, a livello strutturale, non sussiste alcuna differenza tra gli ingressi $u(t)$ e gli ingressi esterni $v(t)$ presenti nelle equazioni (4.1) e (4.2) ovvero sia $u(t)$ che $v(t)$ saranno trattati come ingressi seppure i secondi siano disturbi.

Si assume inoltre che (F, H) sia osservabile e che (F, G) sia controllabile.

Un'alternativa, al modello (4.1)-(4.2) considerato è quella di usare un modello ARMA che, nel caso a tempo discreto, può essere scritto come

$$y(t+1) = \mathcal{F}y_{t-n_f+1|n_f} + \mathcal{G}u_{t-n_g+1|n_g} + \mathcal{C}v_{t-n_c+1|n_c} \quad (4.3)$$

dove abbiamo usato la definizione seguente:

$$y_{i|j} = [y^T(i) \ y^T(i+1) \ \dots \ y^T(i+j-1)]^T \in \mathbb{R}^{jm} \quad (4.4)$$

che si riferisce ad un vettore esteso di output.

Per chiarezza di esposizione si esplicitano i termini scritti in forma compatta nel modello (4.3):

$$y_{t-n_f+1|n_f} = \begin{bmatrix} y(t-n_f+1) \\ y(t-n_f+2) \\ \vdots \\ y(t) \end{bmatrix}; \quad u_{t-n_g+1|n_g} = \begin{bmatrix} u(t-n_g+1) \\ u(t-n_g+2) \\ \vdots \\ u(t) \end{bmatrix}; \quad v_{t-n_c+1|n_c} = \begin{bmatrix} v(t-n_c+1) \\ v(t-n_c+2) \\ \vdots \\ v(t) \end{bmatrix}$$

Di solito le matrici $\mathcal{F} \in \mathbb{R}^{m \times n_f m}$, $\mathcal{G} \in \mathbb{R}^{m \times n_g r}$, $\mathcal{C} \in \mathbb{R}^{m \times n_c l}$, presenti nel modello (4.3), sono supposte costanti ma non note e possono essere calcolate tramite un processo di identificazione per il quale si rimanda alla fonte [14] citata in bibliografia.

Nel seguito supporremo che questa operazione sia già stata eseguita e di conoscere, quindi, le suddette matrici.

Si noti che tutti i modelli ARMA, rappresentati dal modello (4.3), possono essere ricondotti al modello nello spazio di stato dato dalle equazioni (4.1) e (4.2).

In questo capitolo considereremo solamente sistemi deterministici.

4.2.2: DEFINIZIONI

Dato il modello di stato (4.1) -(4.2) si enunciano alcune definizioni utili in questo capitolo.

DEFINIZIONE 4.1: In accordo con il paragrafo (1.4.1) sull'osservabilità del capitolo 1, la matrice di osservabilità \mathcal{O}_i per la coppia (F, H) relativa all'intervallo temporale discreto $[0, i - 1]$ è definita da:

$$\mathcal{O}_i = \begin{bmatrix} H \\ HF \\ \vdots \\ HF^{i-1} \end{bmatrix} \in R^{im \times n} \quad (4.5)$$

dove i indica il numero dei blocchi delle righe.

DEFINIZIONE 4.2: La matrice di raggiungibilità invertita \mathcal{E}_i^d per la coppia (F, G) è definita come:

$$\mathcal{E}_i^d := [F^{i-1}G \ F^{i-2}G \ \dots \ G] \in R^{n \times ir} \quad (4.6)$$

dove i indica il numero dei blocchi di colonne.

DEFINIZIONE 4.3: La matrice di raggiungibilità invertita \mathcal{E}_i^s per la coppia (F, C) è definita come:

$$\mathcal{E}_i^s := [F^{i-1}C \ F^{i-2}C \ \dots \ C] \in R^{n \times il}$$

DEFINIZIONE 4.4: La matrice del blocco triangolare inferiore di Toeplitz \mathcal{H}_i^d per la terna (F, G, H) è data da:

$$\mathcal{H}_i^d := \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ HG & 0 & \dots & 0 \\ HFG & HG & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ HF^{i-2}G & HF^{i-3}G & \dots & HG \end{bmatrix} \in R^{im \times (i-1)r} \quad (4.7)$$

Si ricorda che, affinché il modello di stato sia raggiungibile in i passi, la matrice di raggiungibilità \mathcal{E}_i^d deve avere rango pieno e che, affinché il sistema di stato sia osservabile in i passi, la matrice di osservabilità \mathcal{O}_i deve avere rango pieno

Si definisca ora:

$$\Delta u(t) = u(t) - u(t - 1)$$

e si consideri:

$$u_{t|T} := \begin{bmatrix} u(t) \\ u(t+1) \\ \vdots \\ u(t+T-1) \end{bmatrix}$$

$$\Delta u_{t|T} := \begin{bmatrix} \Delta u_t \\ \Delta u_{t+1} \\ \vdots \\ \Delta u_{t+T-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u(t) - u(t-1) \\ u(t+1) - u(t) \\ \vdots \\ u(t+T-1) - u(t+T-2) \end{bmatrix}$$

$$u_{t|T} = \begin{bmatrix} u(t) \\ u(t+1) \\ \vdots \\ u(t+T-1) \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} I_r & 0_r & 0_r & \dots & 0_r \\ I_r & I_r & 0_r & \dots & 0_r \\ & & & \ddots & \\ I_r & I_r & I_r & \dots & I_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(t) - u(t-1) \\ u(t+1) - u(t) \\ \vdots \\ u(t+T-1) - u(t+T-2) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} I_r \\ I_r \\ \vdots \\ I_r \end{bmatrix} u(t-1)$$

$$= S \cdot \Delta u_{t|T} + P_r \cdot u(t-1)$$

Dunque abbiamo ottenuto la seguente equazione:

$$u_{t|T} = S \cdot \Delta u_{t|T} + P_r \cdot u(t-1) \quad (4.8)$$

dove:

$$S = \begin{bmatrix} I_r & 0_r & 0_r & \dots & 0_r \\ I_r & I_r & 0_r & \dots & 0_r \\ & & & \ddots & \\ I_r & I_r & I_r & \dots & I_r \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^{Lr \times Lr} \quad (4.9)$$

$$P_r = \begin{bmatrix} I_r \\ I_r \\ \vdots \\ I_r \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^{Lr \times r}; \quad (4.10)$$

e dove con I_r , si intende la matrice identità di dimensione $r \times r$ ovvero $I_r = \mathbf{1}^{r \times r}$ mentre

con 0 si intende la matrice nulla di dimensione $r \times r$ ovvero $0_r = \mathbf{0}^{r \times r}$.

4.2.3: MODELLO NELLO SPAZIO DI STATO ESTESO (ESSM)

PROPOSIZIONE 4.1: Ipotizzando che la coppia (F, H) sia osservabile, un modello lineare (4.1) e (4.2), oppure (4.3), può essere descritto tramite un ESSM (modello nello spazio di stato esteso) di ordine T :

$$y_{t+1|T} = \tilde{F}_T y_{t|T} + \tilde{G}_T u_{t|T} + \tilde{C}_T v_{t|T+1} \quad (4.11)$$

dove T è definito come orizzonte di predizione in modo che $T \geq T_{min}$ dove T_{min} [nel caso del modello nello spazio di stato descritto da (4.1) e (4.2)] è definito da:

$$T_{min} := \begin{cases} n - \text{rank}(H) + 1 & \text{se } \text{rank}(H) < n \\ 1 & \text{se } \text{rank}(H) \geq n \end{cases}$$

Si garantisca inoltre che T sia pari, almeno, all'indice di osservabilità i ovvero al più piccolo valore di i tale che $\text{rank}(\mathcal{O}_i) = n$ dove \mathcal{O}_i è la matrice di osservabilità per la coppia (F, H) relativa all'intervallo temporale discreto $[0, i - 1]$.

Analogamente all'equazione (4.4) si definiscono il vettore di uscita estesa $y_{t|T}$ e i vettori di ingresso estesi $u_{t|T}$ e $v_{t|T+1}$.

Le matrici presenti in (4.11), nel caso del modello lineare nello spazio di stato descritto da (4.1) e (4.2), sono date da:

$$\tilde{F}_T := \mathcal{O}_T F (\mathcal{O}_T^T \mathcal{O}_T)^{-1} \mathcal{O}_T^T \quad (4.12)$$

$$\tilde{G}_T := [\mathcal{O}_T G \mid \mathcal{H}_T^d] - \tilde{F}_T [\mathcal{H}_T^d \mid 0_{Tm \times r}] \quad (4.13)$$

$$\tilde{C}_T := [\mathcal{O}_T C \mid \mathcal{H}_T^s] - \tilde{F}_T [\mathcal{H}_T^s \mid 0_{Tm \times l}] \quad (4.14)$$

dove:

$$\tilde{F}_T \in \mathbb{R}^{Tm \times Tm}, \quad \tilde{G}_T \in \mathbb{R}^{Tm \times Tr}, \quad \tilde{C}_T \in \mathbb{R}^{Tm \times (T+1)l}$$

Il modello ARMA (4.3) può essere formulato direttamente come nell'equazione (4.11) usando le formule (4.20), (4.21), (4.22) e (4.23), successivamente esposte, se vale la condizione:

$$T \geq \max(n_f, n_g, n_c)$$

DIMOSTRAZIONE RIDOTTA:

Si assuma, per semplicità, che $C = 0$, $E = 0$ ovvero che agisca soltanto $u(t)$ e non $v(t)$ e si ricordi che, per ipotesi, vale $D = 0$.

Avendo, inoltre, garantito, che T sia pari, almeno, all'indice di osservabilità i ovvero al più piccolo valore di i tale che $\text{rank}(\mathcal{O}_i) = n$, possiamo dire che la matrice di osservabilità in T passi, \mathcal{O}_T , abbia rango n .

Si avrà quindi:

$$\begin{aligned}x(t+1) &= Fx(t) + Gu(t) \\ y(t) &= Hx(t)\end{aligned}$$

Si consideri, ora, l'espressione di:

$$y_{t+1|T} = \begin{bmatrix} y(t+1) \\ y(t+2) \\ \vdots \\ y(t+T) \end{bmatrix}$$

Si avrà quindi:

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} y(t+1) \\ y(t+2) \\ \vdots \\ y(t+T) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} Hx(t+1) \\ Hx(t+2) \\ \vdots \\ Hx(t+T) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} HFx(t) + HGu(t) \\ HFx(t+1) + HGu(t+1) \\ \vdots \\ HFx(t+T-1) + HGu(t+T-1) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} HFx(t) + HFu(t) \\ HF^2x(t) + HFGu(t) + HGu(t+1) \\ HF^3x(t) + HF^2Gu(t) + HFGu(t+1) + HGu(t+2) \\ \vdots \\ HF^Tx(t) + HF^{T-1}Gu(t) + \dots + HGu(t+T-1) \end{bmatrix} \\ &= [\mathcal{O}_T] Fx(t) + [\mathcal{O}_T] Gu(t) + \begin{bmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 \\ HG & 0 & \dots & \dots \\ HFG & HG & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ HF^{T-1}G & \dots & \dots & HG \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(t+1) \\ u(t+2) \\ u(t+3) \\ \dots \\ u(t+T-1) \end{bmatrix} \\ &= \mathcal{O}_T Fx(t) + \mathcal{O}_T Gu(t) + \mathcal{H}_T^d u_{t+1|T-1} \\ &= \mathcal{O}_T Fx(t) + [\mathcal{O}_T G \mid \mathcal{H}_T^d] u_{t|T}\end{aligned}$$

Si è ottenuta, quindi, la seguente espressione:

$$y_{t+1|T} = \mathcal{O}_T Fx(t) + [\mathcal{O}_T G \mid \mathcal{H}_T^d] u_{t|T} \quad (4.15)$$

D'altra parte si ha, anche, che:

$$\begin{aligned}
y_{t|T} &= \begin{bmatrix} y(t) \\ y(t+1) \\ \vdots \\ y(t+T-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Hx(t) \\ Hx(t+1) \\ \vdots \\ Hx(t+T-1) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} Hx(t) \\ HFx(t) + HGu(t) \\ \vdots \\ HF^{T-1}x(t) + HF^{T-2}Gu(t) + \dots + HGu(t+T-1) \end{bmatrix} \\
&= [\mathcal{O}_T]x(t) + [\mathcal{H}_T^d \mid 0]u_{t|T}
\end{aligned}$$

Si è ottenuta, quindi, la seguente espressione:

$$y_{t|T} = \mathcal{O}_T x(t) + [\mathcal{H}_T^d \mid 0] u_{t|T} \quad (4.16)$$

Ora, se $T > \min\{p : \text{rank } \mathcal{O}_p = n\} = T_{\min}$ (ovvero se \mathcal{O}_T ha rango pieno di colonna), ciò implica che $\mathcal{O}_T^T \mathcal{O}_T$ è non singolare e dall'equazione appena ricavata segue che:

$$\mathcal{O}_T^T y_{t|T} = \mathcal{O}_T^T \mathcal{O}_T x(t) + \mathcal{O}_T^T [\mathcal{H}_T^d \mid 0] u_{t|T}$$

da cui si ottiene:

$$x(t) = (\mathcal{O}_T^T \mathcal{O}_T)^{-1} \mathcal{O}_T^T y_{t|T} - (\mathcal{O}_T^T \mathcal{O}_T)^{-1} \mathcal{O}_T^T [\mathcal{H}_T^d \mid 0] u_{t|T} \quad (4.17)$$

Sostituendo quest'ultima espressione in:

$$y_{t+1|T} = \mathcal{O}_T F x(t) + [\mathcal{O}_T G \mid \mathcal{H}_T^d] u_{t|T}$$

si ottiene:

$$y_{t+1|T} = \mathcal{O}_T F (\mathcal{O}_T^T \mathcal{O}_T)^{-1} \mathcal{O}_T^T y_{t|T} - \mathcal{O}_T F (\mathcal{O}_T^T \mathcal{O}_T)^{-1} \mathcal{O}_T^T [\mathcal{H}_T^d \mid 0] u_{t|T} + [\mathcal{O}_T G \mid \mathcal{H}_T^d] u_{t|T} \quad (4.18)$$

e quindi si ha infine:

$$y_{t+1|T} = \tilde{F}_T y_{t|T} + \tilde{G}_T u_{t|T} \quad (4.19)$$

con:

$$\tilde{F}_T := \mathcal{O}_T F (\mathcal{O}_T^T \mathcal{O}_T)^{-1} \mathcal{O}_T^T$$

$$\tilde{G}_T := [\mathcal{O}_T G \mid \mathcal{H}_T^d] - \tilde{F}_T [\mathcal{H}_T^d \mid 0_{Tm \times r}]$$

La dimostrazione con $C \neq 0$ ed $E \neq 0$ è soltanto più complicata ma segue lo stesso ragionamento.

L'importanza dell'ESSM per il Model Predictive Control è dato dal fatto che l'ESSM fornisce un metodo semplice e generale per creare un modello di predizione a partire da un modello lineare.

La matrice di transizione \tilde{F}_T dell'ESSM ha n autovalori coincidenti con quelli della matrice F mentre i rimanenti $Tm - n$ autovalori sono nulli.
Vediamo come questo risultato si dimostra ricorrendo ad una trasformazione di similitudine (4.12).

AUTOVALORI DI $\tilde{F}_L \in R^{Tm \times Tm}$

$$\begin{aligned}
 \det[sI_{Tm} - \tilde{F}_T] &= s^{Tm} \cdot \det[I_{Tm} - s^{-1}\tilde{F}_T] \\
 &= s^{Tm} \cdot \det[I_{Tm} - s^{-1}\mathcal{O}_T F (\mathcal{O}_T^T \mathcal{O}_T)^{-1} \mathcal{O}_T^T] \\
 &= s^{Tm} \cdot \det[I_n - s^{-1}F (\mathcal{O}_T^T \mathcal{O}_T)^{-1} \mathcal{O}_T^T \mathcal{O}_T] \\
 &= s^{Tm} \cdot \det[I_n - s^{-1}F] \\
 &= s^{Tm-n} \cdot [sI_n - F]
 \end{aligned}$$

Quindi si avrà:

$$\sigma(\tilde{F}_T) = \sigma(F) \cup \{0 \dots 0\}$$

dove l'insieme degli zeri contiene $Tm - n$ zeri.

Consideriamo, ora, un ESSM di ordine J definito come segue:

$$y_{t+1|J} = \tilde{F}_J y_{t|J} + \tilde{G}_J u_{t|J} + \tilde{C}_J v_{t|J+1} \quad (4.20)$$

dove J viene detto ORIZZONTE DI IDENTIFICAZIONE.

Allora un ESSM di ordine T definito come segue:

$$y_{t+1|T} = \tilde{F}_T y_{t|T} + \tilde{G}_T u_{t|T} + \tilde{C}_T v_{t|T+1}$$

dove:

$$T_{min} < J < T$$

sarà descritto dalle seguenti matrici:

$$\tilde{F}_T = \begin{bmatrix} 0_{(T-J)m \times m} & I_{(T-J)m \times (T-1)m} \\ 0_{Jm \times (T-J)m} & \tilde{F}_J \end{bmatrix} \quad (4.21)$$

$$\tilde{G}_T = \begin{bmatrix} 0_{(T-J)m \times Tr} \\ 0_{Jm \times (T-J)r} \quad \tilde{G}_J \end{bmatrix} \quad (4.22)$$

$$\tilde{C}_T = \begin{bmatrix} 0_{(T-J)m \times (T+1)l} \\ 0_{Jm \times (T-J)l} \quad \tilde{C}_J \end{bmatrix} \quad (4.23)$$

SPIEGAZIONE:

Si supponga di aver definito \tilde{F}_J , \tilde{G}_J e \tilde{C}_J come in (4.12), (4.13) e (4.14) utilizzando J al posto di T e si supponga di considerare $T_{min} < J < T$.

Si ottiene allora:

$$y_{t+1|J} = \tilde{F}_J y_{t|J} + \tilde{G}_J u_{t|J} + \tilde{C}_J v_{t|J+1}$$

da cui segue:

$$y_{t+(T-J)+1|J} = \tilde{F}_J y_{t+(T-J)|J} + \tilde{G}_J u_{t+(T-J)|J} + \tilde{C}_J v_{t+(T-J)|J+1}$$

dove:

$$y_{t+(T-J)+1|J} = \begin{bmatrix} y(t+T-J+1) \\ \vdots \\ y(t+T) \end{bmatrix}$$

e quindi si ha che:

$$y_{t+1|T} = \begin{bmatrix} y(t+1) \\ \vdots \\ \frac{y(t+T-J)}{y(t+T-J+1)} \\ \vdots \\ y(t+T) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0_{(T-J)m \times m} & I_{(T-J)m \times (T-1)m} \\ 0_{Jm \times (T-J)m} & \tilde{F}_J \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y(t) \\ \vdots \\ \frac{y(t+T-J-1)}{y(t+T-J)} \\ \vdots \\ y(t+J-1) \end{bmatrix} +$$

$$+ \begin{bmatrix} 0_{(T-J)m \times Tr} \\ 0_{Jm \times (T-J)r} \quad \tilde{G}_J \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(t) \\ \vdots \\ \frac{u(t+T-J-1)}{u(t+T-J)} \\ \vdots \\ u(t+J-1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0_{(T-J)m \times (T+1)l} \\ 0_{Jm \times (T-J)l} \quad \tilde{C}_J \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v(t) \\ \vdots \\ \frac{v(t+T-J-1)}{v(t+T-J)} \\ \vdots \\ v(t+J) \end{bmatrix}$$

dove chiamando:

$$\tilde{F}_T = \begin{bmatrix} 0_{(T-J)m \times m} & I_{(T-J)m \times (T-1)m} \\ 0_{Jm \times (T-J)m} & \tilde{F}_J \end{bmatrix}$$

$$\tilde{G}_T = \begin{bmatrix} 0_{(T-J)m \times Tr} \\ 0_{Jm \times (T-J)r} & \tilde{G}_J \end{bmatrix}$$

$$\tilde{C}_T = \begin{bmatrix} 0_{(T-J)m \times (T+1)l} \\ 0_{Jm \times (T-J)l} & \tilde{C}_J \end{bmatrix}$$

ci si riconduce all'equazione dell'ESSM di ordine T :

$$y_{t+1|T} = \tilde{F}_T y_{t|T} + \tilde{G}_T u_{t|T} + \tilde{C}_T v_{t|T+1}$$

4.3: MODELLI DI PREDIZIONE

La scelta di un predittore, o modello di predizione, si basa su un criterio di ottimalità che, di solito, corrisponde alla minimizzazione dell'errore atteso associato all'uso del predittore stesso.

In condizioni generali tale errore può essere misurato da una funzione non negativa detta funzione di perdita la quale è nulla solo se il valore predetto è esattamente uguale alla realizzazione del valore della grandezza in esame, ovvero se l'errore di predizione è nullo, mentre in tutti gli altri casi la funzione di perdita sarà non negativa.

A partire da quanto evidenziato nel paragrafo 4.1, si va ora a cercare dei modelli di predizione utili ai prossimi capitoli.

In particolare i risultati della proposizione 4.2 e della proposizione 4.6 saranno usati nell'applicazione per le turbine eoliche dei capitoli 6 e 7

4.3.1: MODELLI DI PREDIZIONE IN FUNZIONE DELLE VARIABILI DI PROCESSO

A partire dalla conoscenza del vettore degli ingressi passati, presenti e futuri $u_{t-J+1|J-1+T}$ sulla finestra temporale $[t - J + 1, t + T - 1]$, del vettore delle uscite passate e presenti $y_{t-J+1|J}$ sulla finestra temporale $[t - J + 1, t]$ e del vettore dei disturbi passati, presenti e futuri $v_{t-J+1|J+T}$ sull'intera finestra temporale $[t - J + 1, t + T]$, definiamo il seguente modello di predizione al fine di stimare il vettore delle uscite future $y_{t+1|T}$ sulla finestra temporale $[t + 1, t + T]$:

$$y_{t+1|T} = p_T(t) + B_T u_{t|T} \quad (4.24)$$

PROPOSIZIONE 4.2:

Si consideri il modello nello spazio di stato dato dalle seguenti equazioni:

$$\begin{aligned} x(t+1) &= Fx(t) + Gu(t) + Cv(t) \\ y(t) &= Hx(t) + Ev(t) \end{aligned}$$

Il termine $p_T(t)$ è dato da:

$$p_T(t) = \mathcal{O}_T F^J \mathcal{O}_J^t y_{t-J+1|J} + \beta_T^s v_{t-J+1|J+T} + P_T u_{t-J+1|J-1} \quad (4.25)$$

dove la matrice:

$$\mathcal{O}_J^t = (\mathcal{O}_J^T \mathcal{O}_J)^{-1} \mathcal{O}_J^T$$

è la pseudo-inversa di Moore-Penrose di \mathcal{O}_J .

Il termine $p_T(t)$ è noto una volta noto il vettore delle uscite passate e presenti $y_{t-J+1|J}$ sulla finestra temporale $[t - J + 1, t]$ e una volta noto il vettore degli ingressi passati $u_{t-J+1|J-1}$ sulla

finestra temporale $[t - J + 1, t - 1]$ e una volta noto il vettore dei disturbi passati, presenti e futuri $v_{t-J+1|J+T}$ sull'intera finestra temporale $[t - J + 1, t + T]$.

Il termine $p_T(t)$ può essere, infatti, interpretato come la risposta del processo autonoma [ovvero la risposta data dall'uscita $y(t + 1)$ che si otterrebbe ponendo a zero gli ingressi presenti e futuri $u_{t|T}$ in (4.24)].

Si prenda in considerazione la terna di matrici (F, G, H) e si definiscano le seguenti matrici:

$$\begin{aligned} B_T &= [\mathcal{O}_T G \mid \mathcal{H}_T^d] \in R^{Tm \times Tr} \\ P_T &= \mathcal{O}_T F \mathcal{C}_{T-1}^d - \mathcal{O}_T F^J \mathcal{O}_J^t \mathcal{H}_J^d \in R^{Tm \times (J-1)r} \end{aligned} \quad (4.26)$$

La matrice β_T^s in (4.25) sarà data da:

$$\beta_T^s = [\mathcal{O}_T (\mathcal{C}_J^s - F^J \mathcal{O}_J^t \mathcal{H}_J^s) \mathcal{H}_T^s] \in R^{Tm \times (J+T)l} \quad (4.27)$$

Se necessario si può esprimere β_T^s nella forma a blocchi $\beta_T^s = [P_T^s \mid B_T^s]$ dove la sottomatrice P_T^s è correlata ai disturbi passati mentre la sottomatrice B_T^s è correlata ai disturbi presenti e futuri come segue:

$$\begin{aligned} B_T^s &= [\mathcal{O}_T C - \mathcal{O}_T F^J \mathcal{O}_J^t A_J^s \mathcal{H}_T^s] \\ P_T^s &= \mathcal{O}_T F \mathcal{C}_{J-1}^s - \mathcal{O}_T F^J \mathcal{O}_J^t \mathcal{H}_J^s(:, 1 : (J-1)l) \end{aligned}$$

dove A_J^s è l'ultimo J -esimo blocco di colonne della matrice \mathcal{H}_J^s

DIMOSTRAZIONE:

Dall'equazione (4.15) ricavata nella dimostrazione ridotta della Proposizione 4.1 si ha:

$$\begin{aligned} y_{t+1|T} &= \mathcal{O}_T F x(t) + [\mathcal{O}_T G \mid \mathcal{H}_T^d] u_{t|T} \\ &= \mathcal{O}_T F x(t) + B_T u_{t|T} \\ &= p_T(t) + B_T u_{t|T} \end{aligned}$$

Vogliamo ora ottenere una predizione di $p_T(t) = \mathcal{O}_T F x(t)$ basata sulla conoscenza di y , u e v nelle finestre temporali:

$$\begin{aligned} [t - J + 1, t] & \quad \text{per } y \\ [t - J + 1, t + T] & \quad \text{per } v \\ [t - J + 1, t - 1] & \quad \text{per } u \end{aligned}$$

In realtà, che l'espressione:

$$p_T(t) = \mathcal{O}_T F^J (\mathcal{O}_J^T \mathcal{O}_J)^{-1} \mathcal{O}_J^T y_{t-J+1|J+T}$$

$$\begin{aligned}
& + [\mathcal{O}_T(\mathcal{E}_J^s - F^J(\mathcal{O}_J^T \mathcal{O}_J)^{-1} \mathcal{O}_J^T \mathcal{H}_J^s) \mid \mathcal{H}_T^s] v_{t-J+1|J+T} + \\
& + [\mathcal{O}_T F \mathcal{E}_{J-1}^d - \mathcal{O}_T F^J (\mathcal{O}_J^T \mathcal{O}_J)^{-1} \mathcal{O}_J^T \mathcal{H}_J^d] u_{t-J+1|J-1}
\end{aligned}$$

sia proprio quella che devo prevedere per lo stimatore al fine di minimizzare:

$$\|y_{t-J+1|J} - \hat{y}_{t-J+1|J}\|_F^2$$

è quanto verrà provato nella dimostrazione della Proposizione 4.6.

Invece per la dimostrazione dell'espressione dei due blocchi di $\beta_T^s = [P_T^s \mid F_T^s]$ con:

$$B_T^s = [\mathcal{O}_T C - \mathcal{O}_T F^J \mathcal{O}_J^T A_J^s \mathcal{H}_T^s]$$

$$P_T^s = \mathcal{O}_T F \mathcal{E}_{J-1}^s - \mathcal{O}_T F^J \mathcal{O}_J^T \mathcal{H}_J^s (:, 1 : (J-1)t)$$

si rimanda all'articolo [3] citato in bibliografia.

PROPOSIZIONE 4.3:

Si consideri l'ESSM dato dalle seguenti equazioni:

$$y_{t+1|T} = \tilde{F}_T y_{t|T} + \tilde{G}_T u_{t|T} + \tilde{C}_T v_{t|T+1}$$

$$y_{t+1|J} = \tilde{F}_J y_{t|J} + \tilde{G}_J u_{t|J} + \tilde{C}_J v_{t|J+1} \quad \text{con } T_{min} < J < T \quad \text{e}$$

$$\tilde{F}_T = \begin{bmatrix} 0_{(T-J)m \times m} & I_{(T-J)m \times (T-1)m} \\ 0_{Jm \times (T-J)m} & \tilde{F}_J \end{bmatrix}$$

$$\tilde{G}_T = \begin{bmatrix} 0_{(T-J)m \times Tr} \\ 0_{Jm \times (T-J)r} & \tilde{G}_J \end{bmatrix}$$

$$\tilde{C}_T = \begin{bmatrix} 0_{(T-J)m \times (T+1)l} \\ 0_{Jm \times (T-J)l} & \tilde{C}_J \end{bmatrix}$$

Considerato il modello di predizione (4.24):

$$y_{t+1|T} = p_T(t) + B_T u_{t|T}$$

il termine $p_T(t)$ è dato da:

$$p_T(t) = \tilde{F}_T^T y_{t-T+1|T} + \beta_T^s v_{t-T+1|2T} + P_T u_{t-T+1|T-1} \quad (4.28)$$

Si consideri ora la doppia di matrici dell'ESSM $(\tilde{F}_T, \tilde{G}_T)$.

Viene ora descritta una procedura per definire le matrici del modello di predizione B_T e P_T dalle matrici dell'ESSM.

Si definiscano, innanzitutto, le matrici della risposta impulsiva di stato W_i

$$W_i := \tilde{F}_T^{i-1} \tilde{G}_T \in R^{Tm \times Tr} \quad (4.29)$$

La predizione degli ingressi futuri può essere espressa ricorrendo a matrici i cui blocchi si ottengono da opportune sottomatrici delle matrici W_i della risposta impulsiva (4.29).

Si introduce ora la scomposizione a valore singolo della matrice di Hankel che fornisce un metodo per calcolare la realizzazione minima nello spazio di stato per, ad esempio, un modello ARMA (per il quale si rimanda all'Appendice A.3).

Si definisca un blocco dato dalla matrice troncata di Hankel a partire dalle matrici della risposta impulsiva W_i definite in (4.29) per $i = 1, \dots, T$ come segue:

$$\begin{bmatrix} W_1 \\ W_2 \\ \vdots \\ W_T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_{1,1} & W_{1,2} & \dots & W_{1,T} \\ W_{2,1} & W_{2,2} & \dots & W_{2,T} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ W_{T,1} & W_{T,2} & \dots & W_{T,T} \end{bmatrix} \quad (4.30)$$

con sottomatrici $W_{i,j} \in R^{Tm \times r}$.

La matrice B_T viene valutata grazie alla parte destra superiore della matrice troncata di Hankel (4.30) includendo anche la diagonale principale a blocchi nel modo seguente.

Il blocco $B(1,1)$ di B_T è dato dalla somma delle sottomatrici sulla diagonale a blocchi principale della matrice troncata di Hankel ovvero:

$$B(1,1) = W_{1,1} + W_{2,2} + W_{3,3} + \dots + W_{T,T}$$

Il secondo blocco $B(1,2)$ di B_T , invece, è pari alla somma delle sottomatrici della prima diagonale a blocchi sopra la diagonale principale della matrice troncata di Hankel e così via fino al blocco $B(T, T)$ dato dalla sottomatrice destra più alta di (4.30) ovvero:

$$\begin{aligned} B(1,2) &= W_{1,2} + W_{2,3} + W_{3,4} + \dots + W_{T-1,T} \\ &\vdots \\ B(T,T) &= W_{1,T} \end{aligned}$$

Dunque l' i -esimo blocco $B(1,i)$ della matrice B_T sarà dato da:

$$B(1,i) = \sum_{j=1}^{T-i+1} W_{j,j+i-1} \quad \forall i = 1, \dots, T \quad (4.31)$$

I blocchi della matrice P_T si costruiscono grazie alla parte sinistra inferiore della matrice troncata di Hankel (4.30).

Il primo blocco $P(1,1)$ di P_T è dato dalla sottomatrice sinistra più bassa di (4.30) cioè da $W_{T,1}$ ovvero:

$$P(1,1) = W_{T,1}$$

Il secondo blocco di P_T è pari alla somma delle sottomatrici della diagonale a blocchi sopra la sottomatrice sullo spigolo in basso a sinistra $W_{T,1}$ ovvero:

$$P(1,2) = W_{T-1,1} + W_{T,2}$$

L' i -esimo blocco $P(1,i)$ della matrice P_T sarà, quindi, dato da:

$$P_{1,i} = \sum_{j=1}^i W_{j+T-i,j} \quad \forall i = 1, \dots, T-1 \quad (4.32)$$

Data la coppia di matrici dell'ESSM $(\tilde{F}_T, \tilde{C}_T)$, la matrice β_T^S presente in (4.28) si valuta nel modo seguente.

Si definiscano le matrici:

$$\Lambda_i := \tilde{F}_T^{i-1} \tilde{C}_T \in R^{Tm \times (T+1)l} \quad (4.33)$$

e si definisca il seguente blocco della matrice troncata di Hankel a partire dalle matrici Λ_i definite in (4.33) per $i = 1, \dots, T$ come segue:

$$\begin{bmatrix} \Lambda_1 \\ \Lambda_2 \\ \vdots \\ \Lambda_T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Lambda_{1,1} & \Lambda_{1,2} & \dots & \Lambda_{1,T} & \Lambda_{1,T+1} \\ \Lambda_{2,1} & \Lambda_{2,2} & \dots & \Lambda_{2,T} & \Lambda_{2,T+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \Lambda_{T,1} & \Lambda_{T,2} & \dots & \Lambda_{T,T} & \Lambda_{T,T+1} \end{bmatrix} \quad (4.34)$$

Allora abbiamo:

$$\beta_L^S = [P_T^S \quad B_T^S] \quad (4.35)$$

$$B_T^S = [B^S(1,1) \dots B^S(1,i) \dots B^S(1,T) \quad B^S(1,T+1)] \quad (4.36)$$

$$P_T^S = [P^S(1,1) \dots P^S(1,i) \dots P^S(1,T-1)] \quad (4.37)$$

dove gli i -esimi blocchi presenti in B_T^S e P_T^S sono dati [in analogia con le formule (4.31) e (4.32)] da:

$$B^S(1,i) = \sum_{j=1}^{T-i+1} \Lambda_{i,j+i-1} \quad \forall i = 1, \dots, T+1 \quad (4.38)$$

$$P^S(1,i) = \sum_{j=1}^i \Lambda_{j+T-i,j} \quad \forall i = 1, \dots, T-1 \quad (4.39)$$

Per la dimostrazione della Proposizione 4.3 si rimanda all'articolo [3] citato in bibliografia.

Si è quindi illustrato un metodo per estrarre le matrici di risposta impulsiva HF^iG per il sistema a partire dalle matrici di ESSM $(\tilde{F}_T, \tilde{G}_T)$.

Dunque, questo risultato può essere usato per calcolare una realizzazione minima nello spazio di stato per, ad esempio, un modello ARMA (per il quale si rimanda all'Appendice A.3).

4.3.2: MODELLI DI PREDIZIONE IN FUNZIONE DELLE VARIAZIONI DELLE VARIABILI DI PROCESSO

Si definisca, quindi, il seguente modello di predizione:

$$y_{t+1|T} = p_T^\Delta(t) + B_T^\Delta u_{t|T} \quad (4.40)$$

dove:

B_T^Δ è una matrice triangolare inferiore;

$p_T^\Delta(t)$ può essere interpretata come la risposta del processo autonomo [ovvero del processo che si ottiene ponendo uguali a zero tutte le variabili corrispondenti alle variazioni future degli ingressi $u_{t|T}$ in (4.40)].

PROPOSIZIONE 4.4:

Sia dato l'SSM descritto dalle seguenti equazioni:

$$\begin{aligned} x(t+1) &= Fx(t) + Gu(t) + Cv(t) \\ y(t) &= Hx(t) + Ev(t) \end{aligned}$$

Allora si ha che vale il modello di predizione (4.40) dove:

$$p_T^\Delta(t) = p_T(t) + B_T P_r u(t-1)$$

$$B_T^\Delta = B_T S$$

DIMOSTRAZIONE: Si sostituisca quanto segue nell'equazione (4.24):

$$u_{t|T} = S \cdot \Delta u_{t|T} + P_r \cdot u(t-1)$$

$$S = \begin{bmatrix} I_r & 0_r & 0_r & \cdots & 0_r \\ I_r & I_r & 0_r & \cdots & 0_r \\ & & & \ddots & \\ I_r & I_r & I_r & \cdots & I_r \end{bmatrix} \in R^{Lr \times Lr}$$

$$P_r = \begin{bmatrix} I_r \\ I_r \\ \vdots \\ I_r \end{bmatrix} \in R^{Lr \times r}$$

ottenendo:

$$\begin{aligned} y_{t+1|T} &= p_T(t) + B_T u_{t|T} \\ &= p_T(t) + B_T (S \Delta u_{t|T} + P_r u(t-1)) \\ &= (p_T(t) + B_T P_r u(t-1)) + (B_T S) \Delta u_{t|L} \\ &= p_T^\Delta(t) + F_T^\Delta u_{t|T} \end{aligned}$$

con:

$$p_T^\Delta(t) = p_T(t) + B_T P_r u(t-1)$$

$$B_T^\Delta = B_T S$$

PROPOSIZIONE 4.5:

Si consideri l'ESSM dato dalle seguenti equazioni:

$$y_{t+1|T} = \tilde{F}_T y_{t|T} + \tilde{G}_T u_{t|T} + \tilde{C}_T v_{t|T+1}$$

$$y_{t+1|J} = \tilde{F}_J y_{t|J} + \tilde{G}_J u_{t|J} + \tilde{C}_J v_{t|J+1} \quad \text{con } T_{min} < J < T \quad \text{e}$$

$$\tilde{F}_T = \begin{bmatrix} 0_{(T-J)m \times m} & I_{(T-J)m \times (T-1)m} \\ 0_{Jm \times (T-J)m} & \tilde{F}_J \end{bmatrix}$$

$$\tilde{G}_T = \begin{bmatrix} 0_{(T-J)m \times Tr} \\ 0_{Jm \times (T-J)r} & \tilde{G}_J \end{bmatrix}$$

$$\tilde{C}_T = \begin{bmatrix} 0_{(T-J)m \times (T+1)l} \\ 0_{Jm \times (T-J)l} & \tilde{C}_J \end{bmatrix}$$

Considerato il modello di predizione (4.40):

$$y_{t+1|T} = p_T^\Delta(t) + B_T^\Delta u_{t|T}$$

il termine $p_T^\Delta(t)$ è dato da:

$$p_T^\Delta(t) = y_{t-T+1|T} + \left(\sum_{i=1}^T \tilde{F}_T^i \right) \Delta y_{t-T+1|T} + \beta_T^S \Delta v_{t-T+1|2T} + P_T \Delta u_{t-T+1|T-1} \quad (4.41)$$

Si consideri ora la doppia di matrici dell'ESSM $(\tilde{F}_T, \tilde{G}_T)$ e si definisca:

$$W_i := \sum_{j=1}^i \tilde{F}_T^{j-1} \tilde{G}_T \in R^{Tm \times Tr} \quad (4.42)$$

La procedura per calcolare B_T^Δ e P_T è la stessa di quella presentata nella Proposizione 4.2 ma con W_i data dalla (4.42) invece che dalla (4.29).

Dunque si avrà che il blocco della matrice troncata di Hankel è dato da:

$$\begin{bmatrix} W_1 \\ W_2 \\ \vdots \\ W_T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_{1,1} & W_{1,2} & \dots & W_{1,T} \\ W_{2,1} & W_{2,2} & \dots & W_{2,T} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ W_{T,1} & W_{T,2} & \dots & W_{T,T} \end{bmatrix}$$

mentre l' i -esimo blocco $B^\Delta(1,i)$ della matrice B_T^Δ sarà dato da:

$$B^\Delta(1,i) = \sum_{j=1}^{T-i+1} W_{j,j+i-1} \quad \forall i = 1, \dots, T$$

e l' i -esimo blocco $P(1,i)$ della matrice P_T sarà, quindi, dato da:

$$P(1,i) = \sum_{j=1}^i W_{j+T-i,j} \quad \forall i = 1, \dots, T-1$$

Data la coppia di matrici dell'ESSM $(\tilde{F}_T, \tilde{C}_T)$, la matrice β_T^S presente in (4.41) si valuta secondo la stessa procedura presentata nella Proposizione 4.2 ma avendo Λ_i data dalla seguente (4.43) invece che dalla (4.33).

Si definiscano, quindi, le matrici:

$$\Lambda_i := \sum_{j=1}^i \tilde{F}_T^{j-1} \tilde{C}_T \in R^{Tm \times (T+1)l} \quad (4.43)$$

e si definisca il seguente blocco della matrice troncata di Hankel a partire dalle matrici Λ_i definite in (4.43) per $i = 1, \dots, T$ come segue:

$$\begin{bmatrix} \Lambda_1 \\ \Lambda_2 \\ \vdots \\ \Lambda_T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Lambda_{1,1} & \Lambda_{1,2} & \dots & \Lambda_{1,T} & \Lambda_{1,T+1} \\ \Lambda_{2,1} & \Lambda_{2,2} & \dots & \Lambda_{2,T} & \Lambda_{2,T+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \Lambda_{T,1} & \Lambda_{T,2} & \dots & \Lambda_{T,T} & \Lambda_{T,T+1} \end{bmatrix}$$

Allora abbiamo:

$$\beta_T^s = [P_T^s \ B_T^s]$$

$$B_T^s = [B^s(1,1) \ \dots \ B^s(1,i) \ \dots \ B^s(1,T) \ B^s(1,T+1)]$$

$$P_T^s = [P^s(1,1) \ \dots \ P^s(1,i) \ \dots \ P^s(1,T-1)]$$

dove gli i -esimi blocchi presenti in B_T^s e P_T^s sono dati da:

$$B^s(1,i) = \sum_{j=1}^{T-i+1} \Lambda_{i,j+i-1} \quad \forall i = 1, \dots, T+1$$

$$P^s(1,i) = \sum_{j=1}^i \Lambda_{j+T-i,j} \quad \forall i = 1, \dots, T-1$$

Per la dimostrazione della Proposizione 4.5 si rimanda all'articolo [3] citato in bibliografia.

4.3.3: ANALISI DEL PREDITTORE

Si consideri il modello nello spazio di stato dato dalle seguenti equazioni:

$$\begin{aligned}x(t+1) &= Fx(t) + Gu(t) + Cv(t) \\y(t) &= Hx(t) + Ev(t)\end{aligned}$$

Si noti che non è presente un'espressione esplicita per la stima dello stato presente $\hat{x}(t)$ nel predittore descritto dalle seguenti equazioni:

$$\begin{aligned}y_{t+1|T} &= p_T(t) + B_T u_{t|T} \\p_T(t) &= \mathcal{O}_T F^J \mathcal{O}_J^t y_{t-J+1|J} + \beta_T^s v_{t-T+1|J+T} + P_T u_{t-J+1|J-1} \\ \mathcal{O}_J^t &= (\mathcal{O}_J^T \mathcal{O}_J)^{-1} \mathcal{O}_J^T \\ B_T &= [\mathcal{O}_T G \mid \mathcal{H}_T^d] \in \mathbb{R}^{Tm \times Tr} \\ P_T &= \mathcal{O}_T F \mathcal{C}_{T-1}^d - \mathcal{O}_T F^J \mathcal{O}_J^t \mathcal{H}_J^d \in \mathbb{R}^{Tm \times (J-1)r}\end{aligned}$$

Nella proposizione seguente verrà mostrato come entrambe queste due strategie prevedano in ugual modo che lo stato corrente eguagli una stima ai minimi quadrati.

Il seguente teorema dimostra anche le equazioni (4.24), (4.25), (4.26) e (4.27) del modello di predizione presentato nella Proposizione 4.2.

Per semplicità, nel seguito, verrà ommesso l'ingresso esterno $v(\cdot)$ e verrà considerato solo il caso del modello di predizione in funzione delle variabili del processo presentato nel paragrafo 4.3.1.

PROPOSIZIONE 4.6:

Le predizioni $y_{t+1|T}$ ottenute usando:

$$\begin{aligned}x(t+1) &= Fx(t) + Gu(t) \\y(t) &= Hx(k)\end{aligned}$$

eguagliano le predizioni $y_{t+1|T}$ ottenute usando:

$$\begin{aligned}y_{t+1|T} &= p_T(t) + B_T u_{t|T} \\p_T(t) &= \mathcal{O}_T F^J \mathcal{O}_J^t y_{t-J+1|J} + \beta_T^s v_{t-T+1|J+T} + P_T u_{t-J+1|J-1} \\ \mathcal{O}_J^t &= (\mathcal{O}_J^T \mathcal{O}_J)^{-1} \mathcal{O}_J^T \\ B_T &= [\mathcal{O}_T G \mid \mathcal{H}_T^d] \in \mathbb{R}^{Tm \times Tr} \\ P_T &= \mathcal{O}_T F \mathcal{C}_{T-1}^d - \mathcal{O}_T F^J \mathcal{O}_J^t \mathcal{H}_J^d \in \mathbb{R}^{Tm \times (J-1)r}\end{aligned}$$

se la stima dello stato corrente viene valutata usando:

$$\hat{x}(t) = \arg \min_{x(t)} V \quad (4.44)$$

dove:

$$V = \frac{1}{2} \|y_{t-J+1|J} - \hat{y}_{t-J+1|J}\|_E^2 \quad (4.45)$$

con $J \geq T_{min}$ e con $\hat{y}_{t-J+1|J}$ il vettore delle uscite del modello corrente e passato.

DIMOSTRAZIONE: La seguente dimostrazione si divide in tre parti.

PARTE 1: DERIVAZIONE DELLA CONDIZIONE DI EQUIVALENZA

Innanzitutto deriviamo un'espressione per il predittore $y_{t+1|T}$.

Si consideri il seguente predittore di M passi in avanti:

$$x(t+M) = F^M x(t) + [F^{M-1}G \mid \dots \mid FG \mid G] \begin{bmatrix} u(t) \\ u(t+1) \\ \vdots \\ u(t+M-1) \end{bmatrix}$$

ovvero:

$$x(t+M) = F^M x(t) + \mathcal{C}_M^d u_{t|M} \quad (4.46)$$

dove:

$$\mathcal{C}_M^d = [F^{M-1}G \mid \dots \mid FG \mid G]$$

Dalle equazioni:

$$\begin{aligned} x(t+1) &= Fx(t) + Gu(t) \\ y(t) &= Hx(t) \end{aligned}$$

$$\mathcal{O}_i = \begin{bmatrix} H \\ HF \\ \vdots \\ HF^{i-1} \end{bmatrix} \in R^{im \times n}$$

$$\mathcal{H}_i^d := \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ HG & 0 & \dots & 0 \\ HFG & HG & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ HF^{i-2}G & HF^{i-3}G & \dots & HG \end{bmatrix} \in R^{im \times (i-1)r}$$

ricordando le equazioni (4.15) e la prima delle equazioni (4.26) si ottiene:

$$y_{t+1|T} = \mathcal{O}_T F x(t) + B_T u_{t|T}$$

e ricordando l'equazione (4.24) seguente:

$$y_{t+1|T} = p_T(t) + B_T u_{t|T}$$

si ha che queste due predizioni appena enunciate di $y_{t+1|T} = \begin{bmatrix} y(t+1) \\ y(t+2) \\ \dots \\ y(t+T) \end{bmatrix}$ sono equivalenti se e

solo se:

$$p_T(t) = \mathcal{O}_T F x(t)$$

Dalla equazione (4.25) della Proposizione 4.2 si sa che:

$$p_T(t) = \mathcal{O}_T F^J \mathcal{O}_J^t y_{t-J+1|J} + P_T u_{t-J+1|J-1}$$

con:

$$\mathcal{O}_J^t = (\mathcal{O}_J^T \mathcal{O}_J)^{-1} \mathcal{O}_J^T$$

per cui segue che:

$$p_T(t) = \mathcal{O}_T F^J (\mathcal{O}_J^T \mathcal{O}_J)^{-1} \mathcal{O}_J^T y_{t-J+1|T} + P_T u_{t-J+1|J-1}$$

e dato che vale la seconda delle equazioni (4.26) ovvero:

$$P_T = \mathcal{O}_T F \mathcal{C}_{J-1}^d - \mathcal{O}_T F^J (\mathcal{O}_J^T \mathcal{O}_J)^{-1} \mathcal{O}_J^T \mathcal{H}_J^d$$

si ottiene:

$$p_T(t) = \mathcal{O}_T F^J (\mathcal{O}_J^T \mathcal{O}_J)^{-1} \mathcal{O}_J^T y_{t-J+1|J} + [\mathcal{O}_T F \mathcal{C}_{J-1}^d - \mathcal{O}_T F^J (\mathcal{O}_J^T \mathcal{O}_J)^{-1} \mathcal{O}_J^T \mathcal{H}_J^d] u_{t-J+1|J-1} \quad (4.47)$$

PARTE 2: STIMA AI MINIMI QUADRATI

Dunque ricordandosi dell'equazione (4.16) ricavata in precedenza:

$$y_{t|T} = \mathcal{O}_T x(t) + [\mathcal{H}_T^d \mid 0] u_{t|T}$$

si ha che:

$$\begin{aligned} y_{t-J+1|J} &= \mathcal{O}_J x(t-J+1) + [\mathcal{H}_J^d \mid 0] u_{t-J+1|J} \\ &= \mathcal{O}_J x(t-J+1) + \mathcal{H}_J^d u_{t-J+1|J-1} \end{aligned} \quad (4.48)$$

La condizione:

$$y_{t-J+1|J} = \hat{y}_{t-J+1|J}$$

definisce il problema ai minimi quadrati, dove si ricorda che $V = \frac{1}{2} \|y_{t-J+1|J} - \hat{y}_{t-J+1|J}\|_E^2$

Esplicitando, ora, dalla (4.48) $x(t - J + 1)$ ottengo:

$$x(t - J + 1) = \mathcal{O}_J^T [y_{t-J+1|J} - \mathcal{H}_J^d u_{t-J+1|J-1}]$$

Inoltre se si definisce:

$$\hat{x}(t) = (\mathcal{O}_J^T \mathcal{O}_J)^{-1} x(t)$$

moltiplicando l'equazione appena trovata per $(\mathcal{O}_J^T \mathcal{O}_J)^{-1}$, si ottiene:

$$(\mathcal{O}_J^T \mathcal{O}_J)^{-1} x(t - J + 1) = (\mathcal{O}_J^T \mathcal{O}_J)^{-1} \mathcal{O}_J^T [y_{t-J+1|J} - \mathcal{H}_J^d u_{t-J+1|J-1}]$$

e quindi si ha che:

$$\hat{x}(t - J + 1) = (\mathcal{O}_J^T \mathcal{O}_J)^{-1} \mathcal{O}_J^T [y_{t-J+1|J} - \mathcal{H}_J^d u_{t-J+1|J-1}] \quad (4.49)$$

Infine ricordandosi dell'espressione del predittore (4.46) ricavata all'inizio di questa dimostrazione, si ottiene:

$$\begin{aligned} \hat{x}(t) = \hat{x}_{t-J+1+(J-1)} &= F^{J-1} \hat{x}(t - J + 1) + [F^{J-2}G \mid \dots \mid FG \mid G] \begin{bmatrix} u(t - J + 1) \\ \vdots \\ u(t - 1) \end{bmatrix} \\ &= F^{J-1} \hat{x}(t - J + 1) + \mathcal{C}_{J-1}^d u_{t-J+1|J-1} \\ &= F^{J-1} (\mathcal{O}_J^T \mathcal{O}_J)^{-1} \mathcal{O}_J^T [y_{t-J+1|J} - \mathcal{H}_J^d u_{t-J+1|J-1}] + \mathcal{C}_{J-1}^d u_{t-J+1|J-1} \end{aligned}$$

La stima ai minimi quadrati $\hat{x}(t)$ fornisce chiaramente un minimo per la funzione V poiché:

$$\frac{d^2 V}{dx_{t-J+1}^2} = \mathcal{O}_J^T \mathcal{O}_J$$

è una matrice definita positiva avendo \mathcal{O}_J rango pieno di colonne.

PARTE 3: CONCLUSIONE

Usando ora la stima ai minimi quadrati $\hat{x}(t)$ appena ricavata, si garantisce che la condizione di equivalenza sia soddisfatta.

Infatti, se si premoltiplica $\hat{x}(t)$ per $\mathcal{O}_T F$, si trova:

$$\mathcal{O}_T F \hat{x}(t) = \mathcal{O}_T F^J (\mathcal{O}_J^T \mathcal{O}_J)^{-1} \mathcal{O}_J^T y_{t-J+1|J} + [\mathcal{O}_T F \mathcal{C}_{J-1}^d - \mathcal{O}_T F^J (\mathcal{O}_J^T \mathcal{O}_J)^{-1} \mathcal{O}_J^T \mathcal{H}_J^d] u_{t-J+1|J-1}$$

che è esattamente l'espressione (4.47) ovvero vale condizione di equivalenza $p_T(t) = \mathcal{O}_T F x(t)$ se e solo se essa viene valutata tramite la stima dello stato corrente $\hat{x}(t)$ poiché abbiamo appena provato che vale:

$$\mathcal{O}_T F \hat{x}(t) = p_T(t)$$

4.4: ALGORITMO MPC DI BASE

4.4.1: L'OBBIETTIVO DEL CONTROLLO

La funzione di costo a tempo discreto può essere scritta nella seguente forma matriciale:

$$J_t = (y_{t+1|T} - r_{t+1|T})^T Q (y_{t+1|T} - r_{t+1|T}) + \Delta u_{t|T}^T R \Delta u_{t|T} + u_{t|T}^T P u_{t|T}$$

dove:

$r_{t+1|T}$ è il vettore delle traiettorie di riferimento future;

$y_{t+1|T}$ è il vettore delle uscite future;

$\Delta u_{t|T}$ è il vettore delle variazioni degli ingressi futuri;

$u_{t|T}$ è il vettore degli ingressi futuri;

Q , R e P sono le matrici, dei pesi, diagonali a blocchi.

Algoritmi MPC lineari diversi sono basati su modelli di processo lineare diversi ma tutti questi algoritmi usano un modello di predizione avente la stessa struttura.

L'unica differenza nel modello di predizione usato dai diversi algoritmi è dato dal termine di risposta autonomo $p_T(t)$ definito dall'equazione (4.24) o dal termine di risposta autonomo $p_T^\Delta(t)$ definito dall'equazione (4.40).

È stato, inoltre, presentato un algoritmo per calcolare un modello di predizione a partire da modelli lineari diversi.

L'algoritmo EMPC può essere derivato direttamente da un modello lineare nello spazio di stato o da un qualunque modello lineare attraverso le matrici dell'ESSM \tilde{F}_T , \tilde{G}_T e \tilde{C}_T .

Queste matrici possono essere costruite direttamente a partire da un modello lineare nello spazio di stato oppure da un modello ARMA.

Per questo motivo, l'ESSM può essere visto come il modello unificante per il controllo predittivo basato su un modello lineare.

Per una trattazione più completa dell'EMPC con il calcolo esplicito delle variabili del controllo ottimo o delle variazioni delle variabili del controllo ottimo, si rimanda all'articolo [3] citato in bibliografia.

Capitolo 5

TURBINE EOLICHE

5.1 INTRODUZIONE

L'energia eolica è una delle risorse energetiche rinnovabili maggiormente in crescita al mondo.

Dal momento che le turbine eoliche sono strutture di grandi dimensioni, “flessibili” e “rumorose”, esse presentano svariati problemi di controllo i quali, se risolti, porterebbero a ridurre notevolmente il costo dell'energia eolica.

L'era moderna delle turbine eoliche iniziò a partire dal 1970 quando si incominciarono ad usare turbine eoliche ad asse orizzontale con due o tre pale.

Le turbine eoliche più moderne operano a velocità variabile con la velocità che cambia in continuazione in risposta a raffiche di vento e/o a pause nel caso in cui la velocità del vento sia troppo elevata o non sia sufficiente alla produzione di energia eolica.

Per questo tipo di turbine, aumentare l'efficienza e ridurre i carichi fornisce importanti benefici.

Le incertezze del modello fisico della turbina limitano, tuttavia, l'efficienza dell'immagazzinamento di energia eolica di una turbina a velocità variabile.

Le leggi di controllo richiedono, quindi, di conoscere bene le proprietà aerodinamiche cosicché le turbine a velocità variabile possano ottimizzare l'immagazzinamento di energia.

Controllare questa tipologia di turbine al fine di ottimizzare la produzione dell'energia eolica e ridurre, quindi, il costo, rimane, a tutt'oggi, una sfida aperta.

Il controllo delle turbine eoliche si pone, quindi, l'obiettivo di far operare la turbina entro un intervallo di valori di progetto ovvero di:

- mantenere la velocità rotazionale entro un dato intervallo;
- mettere in assetto di yaw la turbina e mantenere tale assetto entro un dato intervallo;
- mantenere la potenza generata in uscita entro un dato intervallo;
- azionare o interrompere il funzionamento della turbina qualora necessario.

Inoltre, il sistema di controllo mira ad assicurare una data potenza in uscita e a massimizzare tale potenza alle velocità del vento più basse.

Per limitare, poi, la potenza alle velocità del vento più alte, viene usata una delle seguenti strategie:

1. regolazione dello stallo;
2. regolazione dell'angolo di beccheggio (pitch);
3. controllo dell'assetto di imbardata (yaw).

Una moderna turbina eolica ha svariati livelli di sistemi di controllo.

Al livello più alto, un controllore di supervisione monitora la turbina e il vento (tramite ad esempio tecniche LIDAR) per determinare quando la velocità del vento sia sufficiente per azionare la turbina e quando, a causa di venti troppo forti (raffiche o “gusts”), la turbina debba essere spenta per motivi di sicurezza.

Al livello intermedio c'è il controllo della turbina che include il controllo del momento torcente del generatore, il controllo dell'angolo di pitch della pala e il controllo dell'angolo di yaw.

Il controllo del momento torcente del generatore determina il valore del momento torcente da estrarre dalla turbina.

Il momento torcente estratto sarà opposto al momento aerodinamico fornito dal vento e regolerà, così, in modo indiretto la velocità della turbina.



Figura 5.1: Esempio di Turbina eolica.
CART3 al NWTC a Golden, Colorado, USA.

Il controllo dell'angolo di pitch delle pale e il controllo del momento torcente del generatore agiscono in modo rapido, se paragonati alla costante di tempo della velocità del rotore, e in modo dipendente dagli attuatori di pitch e dal tipo di generatore e delle elettroniche di potenza.

Il controllo dell'angolo di yaw ruota la capsula che contiene l'asse orizzontale della turbina in modo da puntarla nella direzione del vento ma è più lento rispetto al controllo del momento torcente del generatore e al controllo dell'angolo di pitch delle pale, motivo per cui il controllo dell'angolo di yaw è di minor interesse ingegneristico.

Al livello più basso del controllo ci sono il generatore interno, le elettroniche di potenza e i controllori dell'attuatore di pitch che operano a velocità più alte rispetto a quelle del controllo al livello della turbina.

Questi controllori sono basati su un modello "black box" rispetto al controllo al livello della turbina intendendo con ciò che il controllo a livello della turbina fornisce a questi controllori solo le specifiche da raggiungere e che tra i due livelli di controllo non ci sono altre interazioni. Ad esempio, i controllori del generatore e delle elettroniche di potenza regolano le variabili del generatore e delle elettroniche di potenza per raggiungere il desiderato momento torcente del generatore determinato dal controllo al livello della turbina.

Si ricordi, infine, come il controllo al livello più basso dipenda dalle tipologie di generatore e di elettroniche di potenza mentre questo non avviene nel caso del controllo a livello della turbina.

Nel seguito noi ci concentreremo solo sul controllo al livello della turbina.

Nel seguente paragrafo si presenta il modello usato nel controllo dell'angolo di pitch collettivo tramite MPC di una turbina eolica a 3 pale (argomento trattato nel capitolo 6).

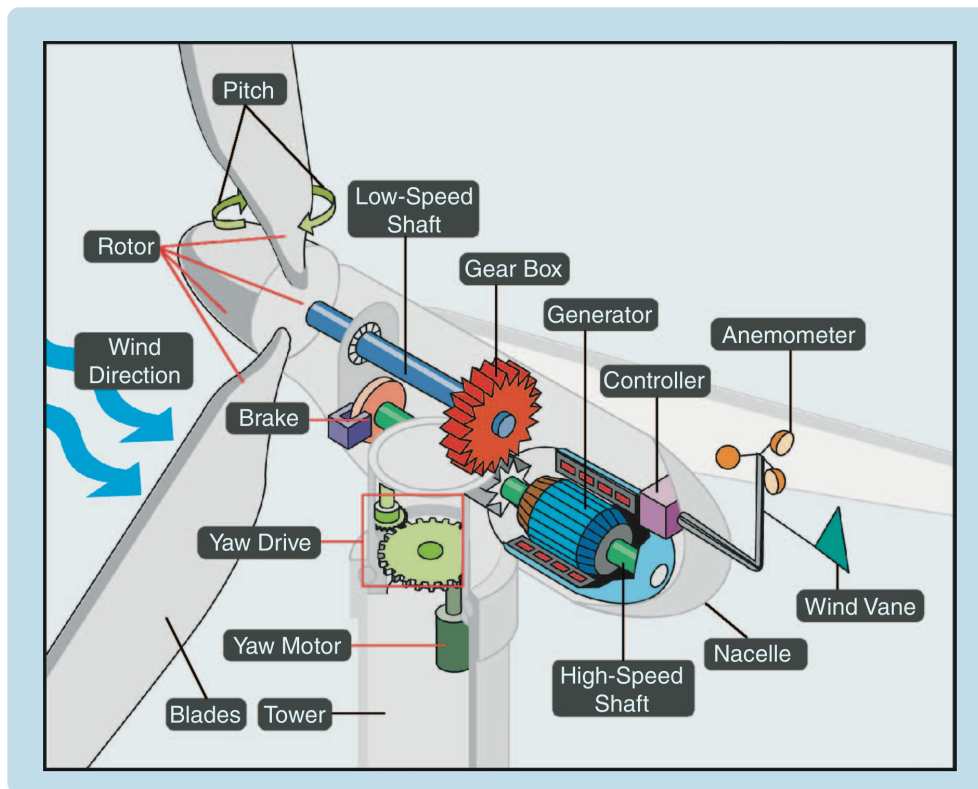


Figura 5.2: Componenti principali di un turbina “upwind” a 3 pale.

5.2 MODELLAZIONE

Modellare una turbina eolica è un argomento fortemente interdisciplinare in quanto è necessario utilizzare un modello aeroelastico per descrivere il comportamento delle pale e il BEM (Blade Elementum Moment) per stimare i carichi agenti sulle pale.

Al fine di simulare il comportamento strutturale della pala è utile adottare, inoltre, un modello agli elementi finiti della pala (FEM).

Solitamente, quindi, per descrivere le turbine eoliche si usano modelli estremamente complicati che accoppiano la dinamica strutturale con l'aerodinamica.

Tuttavia questi modelli risultano troppo complicati per poter essere utilizzati per implementare un controllo di tipo MPC, motivo per cui si è scelto di adottare un modello di turbina eolica semplificato.

Il modello di turbina eolica semplificato, adottato in questa tesi e' quello proposto in [5], [6] e [7] e consisterà di un modello aerodinamico non lineare, un modello meccanico lineare di trasmissione più un modello “torre+pala” a due gradi di libertà e un semplice modello di attuatore del pitch.

AERODINAMICA: Il momento aerodinamico M_A e la spinta F_A agenti sul rotore vengono espressi dalle seguenti formule tramite il coefficiente adimensionale del momento aerodinamico c_M e il coefficiente adimensionale della spinta aerodinamico c_T :

$$M_A = \frac{1}{2} \rho \pi R_r^3 v_e^2 c_M(\lambda, \theta) = \frac{1}{2} \rho A_r R_r v_e^2 c_M(\lambda, \theta)$$

$$F_A = \frac{1}{2} \rho \pi R_r^2 v_e^2 c_T(\lambda, \theta) = \frac{1}{2} \rho A_r v_e^2 c_T(\lambda, \theta)$$

con λ il rapporto delle velocità al tip pari a:

$$\lambda = \frac{\omega_r R_r}{v_e} = \frac{v_r}{v_e}$$

dove:

v_r è la velocità tangenziale al tip della pala del rotore pari a $v_r = \omega_r R_r$

ω_r è la velocità angolare del rotore

R_r è il raggio del rotore la cui sezione è $A_r = \pi R^2$

v_e è la velocità del vento effettiva al tip nel piano del rotore

θ è l'angolo di pitch collettivo.

ρ è la densità dell'aria.

Si noti come questo modello aerodinamico sia non lineare.

MODELLO MECCANICO: Il modello meccanico considerato consiste di un modello di rotore, un modello di attuatore del pitch e un modello "torre+pala" a due gradi di libertà.

DINAMICHE STRUTTURALI: La trasmissione è modellata come un unico corpo rigido avente inerzia rotazionale J_r su cui agisce il momento aerodinamico M_A e il momento torcente del generatore M_G :

$$J_r \dot{\omega}_r = M_A(\omega, \theta, v) - n_G M_G$$

dove n_G è il rapporto del riduttore.

Il moto a prua e a poppa della torre e la flessione fuori-piano del rotore sono stati modellati come un sistema oscillatorio di due masse accoppiate con la forza aerodinamica F_A agente sul rotore (come mostrato nella figura 5.3).

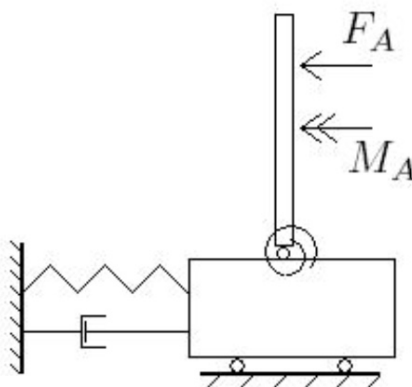


Figura 5.3: Modello meccanico della turbina eolica

Dal momento che, in questa tesi, si considererà solo il controllo dell'angolo di "pitch collettivo", si è scelto di trattare l'intero rotore a tre pale come un unico corpo rigido dotato di un singolo grado di libertà invece di trattare le tre pale individualmente.

Il sistema "torre+pale" sarà accoppiato con le dinamiche della trasmissione principale attraverso la velocità del vento effettiva.

Qualora la torre o le pale si muovessero, la velocità del vento vista dal rotore cambierebbe e diventerebbe, quindi, esprimibile come la velocità effettiva seguente:

$$v_e = v_0 - v_{tower\ top} - \alpha v_{blade\ tip}$$

dove:

v_0 è la velocità del vento a flusso libero nella direzione longitudinale mediata sull'area del rotore;

α è la costante adimensionale di scala che collega la velocità al tip della pala nella direzione fuori dal piano del rotore al cambio della velocità sull'intera lunghezza (span) della pala.

Si noti come questo modello meccanico sia lineare.

MODELLO DELL'ATTUATORE: Gli attuatori dell'angolo di pitch collettivo sono modellati come un sistema del secondo ordine avente limitazioni sulla velocità.

Il modello finale ha, quindi, i seguenti 7 stati:

1. Velocità rotazionale del rotore $x_1 = \omega_r$
2. Angolo collettivo di pitch $x_2 = \theta$
3. Velocità collettiva di pitch $x_3 = \dot{\theta}$
4. Spostamento longitudinale in cima alla torre $x_4 = x_{tower\ top}$
5. Spostamento collettivo del rotore $x_5 = x_{blade\ tip}$
6. Velocità longitudinale in cima alla torre $x_6 = v_{tower\ top}$
7. Velocità collettiva del rotore $x_7 = v_{blade\ tip}$

dove 5 e 7 si spiegano in quanto si è scelto di considerare il rotore con le sue tre pale come un'unico corpo rigido.

La velocità del vento effettiva nel piano del rotore diventa quindi pari a:

$$v_e = v - x_6 - \alpha x_7$$

Il modello meccanico porta, dunque, alle seguenti equazioni:

$$\dot{x}_1 = \frac{1}{J_r} (M_A - n_G M_G)$$

$$\dot{x}_2 = x_3$$

$$\dot{x}_3 = -\omega_{p,0}^2 x_2 - 2\omega_{p,0}\zeta_p x_3 + \omega_{p,0}^2 \theta_c$$

$$\dot{x}_4 = x_6$$

$$\dot{x}_5 = x_7$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_6 \\ \dot{x}_7 \end{bmatrix} = \mathbf{M}^{-1} \left[\mathbf{F}F_A - \mathbf{K} \begin{bmatrix} x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} - \mathbf{D} \begin{bmatrix} x_6 \\ x_7 \end{bmatrix} \right]$$

dove l'ultima equazione matriciale deriva da:

$$\mathbf{M} \begin{bmatrix} \dot{x}_6 \\ \dot{x}_7 \end{bmatrix} + \mathbf{D} \begin{bmatrix} x_6 \\ x_7 \end{bmatrix} + \mathbf{K} \begin{bmatrix} x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \mathbf{F} \cdot F_A$$

con:

θ_c l'angolo di pitch collettivo di comando

$(\omega_{p,0}, \zeta_p)$ i parametri dell'attuatore di pitch modellato come un sistema del II ordine

$(\mathbf{M}, \mathbf{D}, \mathbf{K}, \mathbf{F})$ le matrici che definiscono la dinamica delle pale e della torre.

Infine, inserendo il momento del generatore M_G e l'angolo di pitch di comando θ_c nel vettore delle variabili di controllo u , l'intero modello può essere rappresentato nella forma standard:

$$\dot{x} = f(x, u, v)$$

dove:

x è il vettore di stato

u è il vettore degli ingressi

v è il vettore dei disturbi (che sono comunque sempre ingressi).

Questo modello semplificato sarà usato nel prossimo capitolo dove si analizzerà l'applicazione dell'MPC per le turbine eoliche.

Capitolo 6

MODEL PREDICTIVE CONTROL PER LE TURBINE EOLICHE

6.1: INTRODUZIONE

In questo capitolo presentiamo un possibile Model Predictive Control per la zona a pieno carico operativo di una turbina eolica controllata tramite la regolazione dell'angolo di pitch.

Il controllore, che esamineremo, sarà basato su un modello di processo semplificato che incorporerà lo smorzamento della torre nel controllore della velocità principale.

Si troverà che il controllore risultante funzionerà meglio rispetto al classico controllore di base.

Inoltre, se si riuscirà a prevedere, tramite opportune tecniche, una stima delle velocità del vento di qualche secondo in avanti rispetto all'istante temporale corrente, questi valori potranno essere incorporati direttamente nell'MPC e forniranno un significativo miglioramento portando ad una riduzione sia dei carichi estremi che dei carichi a fatica.

Come si è visto nei capitoli precedenti, l'MPC è un moderno metodo di controllo il cui principio di base consiste nell'usare il modello del processo al fine di predire la traiettoria di uscita su un orizzonte finito in ogni punto del campionamento fornendo lo stato corrente e le informazioni sull'ingresso dopo aver stimato lo stato. Tale informazione sarà, quindi, usata per calcolare la traiettoria di ingresso del controllo futuro come soluzione di un problema di ottimizzazione.

L'MPC offre svariati vantaggi per il controllo delle turbine eoliche:

- come nella maggior parte dei metodi di controllo ottimo, l'MPC può essere impostato direttamente in base alle "quantità rilevanti" aggiustando i pesi usati per la funzione obiettivo;
- può trattare i problemi MIMO (Multiple-input/Multiple-output);
- anche nel caso di metodi MPC lineari, un modello fisico non lineare del processo può essere gestito in maniera diretta andando a linearizzare periodicamente il modello fisico non lineare di partenza senza dover ricorrere necessariamente all'utilizzo di metodi MPC non lineari;
- i vincoli possono essere inclusi direttamente;

Nei prossimi paragrafi verrà presentata un'applicazione dell'MPC lineare al problema di controllo delle turbine eoliche e per finire si enunceranno alcune considerazioni riguardanti l'utilizzo di un MPC non lineare per le turbine eoliche.

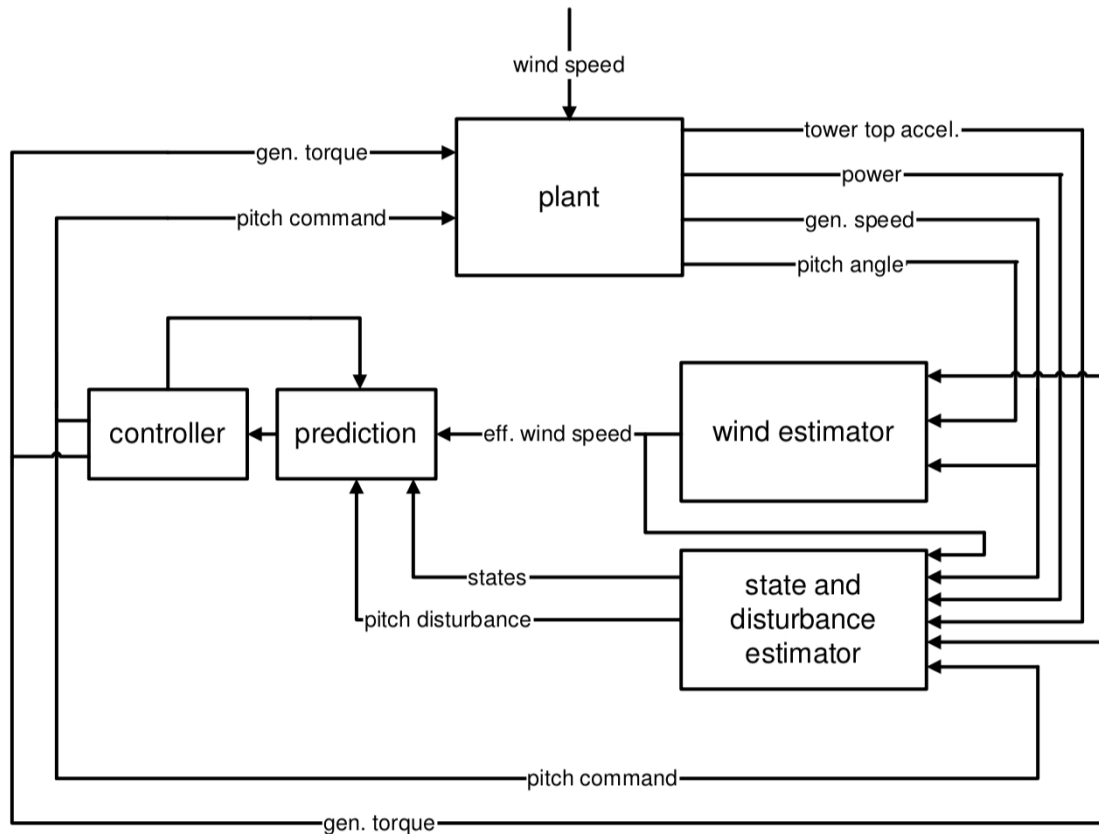


Figura 6.1: Struttura del controllo

6.2: PROGETTAZIONE DEL CONTROLLO

6.2.1: STIMA

Come modello fisico del processo, si usa quello presentato nel paragrafo 5.2 del capitolo 5. Il modello risultante a 7 stati avrà, quindi, 3 ingressi dati da:

1. il comando di pitch;
2. il comando del momento torcente;
3. la velocità del vento (la quale può essere vista come ingresso esterno o disturbo).

Si noti che sono misurabili soltanto:

- la velocità del generatore;
- la potenza del generatore;
- l'angolo di pitch effettivo;
- l'accelerazione longitudinale in cima alla torre.

Tutti gli altri stati, così' come la velocità del vento, necessitano di essere stimati poiché non misurabili.

Si rimanda all'articolo [5] citato in bibliografia per le spiegazioni esaustive e si riportano, ora, solo i risultati finali.

La velocità del vento viene stimata usando un filtro esteso di Kalman mentre per la stima dello stato si usa un filtro lineare di Kalman.

Per la stima dello stato e il controllo dello stato, le aerodinamiche non lineari vengono linearizzate attorno ad un punto operativo ad una velocità del vento pari a 17m/s.

La stima dello stato viene, quindi, aumentata tramite lo stato di disturbo dell'angolo di pitch. Questo stato di disturbo è necessario per fornire un controllo libero di compensazione nell'MPC come descritto in [10]. In pratica, lo stato di disturbo dell'angolo di pitch può essere visto come l'angolo di pitch addizionale necessario per cancellare la discrepanza tra il momento aerodinamico torcente predetto dal modello lineare e la realtà del modello a pieno ordine non lineare.

La figura 6.1 mostra la struttura del controllore risultante.

6.2.2: CONTROLLORE

Per la descrizione dell'MPC ci si riferirà a quanto esposto nel capitolo 4.

Essendo t l'istante corrente ed essendo T l'orizzonte di predizione, $y_{t+1|T}$ e $\Delta u_{t|T}$ sono, rispettivamente, i vettori delle uscite del processo future e le variazioni degli ingressi futuri su finestre temporali di lunghezza T .

Il controllore cerca di minimizzare la funzione obiettivo quadratica lineare J_t soggetta al modello e ai vincoli ad ogni istante discreto del controllore.

Si cerca il $\min_{u_{t|T}} J_t$, $J_t = (y_{t+1|T} - r_{t+1|T})^T Q (y_{t+1|T} - r_{t+1|T}) + \Delta u_{t|T}^T R \Delta u_{t|T}$

tale che:

$$x(t+1) = Fx(t) + Gu(t) + Cv(t)$$

$$y(t) = Hx(t) + Du(t) + Ev(t)$$

$$u_{t|T}^{min} \leq u_{t|T} \leq u_{t|T}^{max}$$

$$\Delta u_{t|T}^{min} \leq \Delta u_{t|T} \leq \Delta u_{t|T}^{max}$$

$$y_{t+1|T}^{min} \leq y_{t+1|T} \leq y_{t+1|T}^{max}$$

dove $r_{t+1|T}$ indica la traiettoria di riferimento futura.

I pesi Q ed R vanno scelti in accordo con gli obiettivi di controllo desiderati.

Le uscite future $y_{t+1|T}$ possono essere separate in due parti, come visto nel Capitolo 4, secondo il seguente modello predittivo:

$$y_{t+1|T} = p_T(t) + B_T u_{t|T}$$

dove:

$p_t(t)$ rappresenta la risposta del processo autonoma (ovvero la risposta ottenuta ponendo a zero gli ingressi futuri $u_{t|T}$);

$B_T u_{t|T}$ rappresenta, invece, l'effetto degli ingressi del controllo futuro sulle uscite.

La predizione di $p_t(t)$ e la matrice B_T si calcolano in base alle equazioni (4.25), (4.26) e (4.27) enunciate nel Capitolo 4 (dove avevamo considerato J come orizzonte di identificazione) ovvero:

$$p_T(t) = \mathcal{O}_T F^J \mathcal{O}_J^t y_{t-J+1|J} + \beta_T^s v_{t-J+1|J+T} + P_T u_{t-J+1|J-1}$$

$$\mathcal{O}_J^t = (\mathcal{O}_J^T \mathcal{O}_J)^{-1} \mathcal{O}_J^T$$

$$B_T = [\mathcal{O}_T G \mid \mathcal{H}_T^d] \in R^{Tm \times Tr}$$

$$P_T = \mathcal{O}_T F \mathcal{C}_{T-1}^d - \mathcal{O}_T F^J \mathcal{O}_J^t \mathcal{H}_J^d \in R^{Tm \times (J-1)r}$$

$$\beta_T^s = [\mathcal{O}_T (\mathcal{C}_J^s - F^J \mathcal{O}_J^t \mathcal{H}_J^s) \mathcal{H}_T^s] \in R^{Tm \times (J+T)l}$$

Si sottolinea che, nel caso in cui non sia presente alcuna informazione sui disturbi futuri, essi saranno assunti costanti.

Inoltre, se nessun vincolo è presente, allora esiste una soluzione in forma chiusa del problema di ottimizzazione sopra enunciato dato dalla seguente equazione:

$$u_{t|T} = - (R + B_T^T Q B_T)^{-1} (B_T^T Q (p_T(t) - r_{t+1|T}))$$

per la quale si rimanda all'articolo [5] citato in bibliografia.

Se, invece, sono presenti vincoli, il problema di ottimizzazione non ammette una soluzione in forma chiusa ma va risolto tramite opportuni algoritmi iterativi.

6.3: RISULTATI DELLE SIMULAZIONI

L'articolo [5] riporta i risultati per un MPC implementato nel caso di una turbina eolica di 3MW di potenza a velocità variabile, controllata tramite la regolazione dell'angolo di pitch per la zona operativa a pieno carico.

Il comportamento non lineare del sistema è stato simulato, computazionalmente al calcolatore, tramite un apposito tool aerodinamico chiamato FLEX5.

Come controllore di base con cui confrontare i risultati, si è scelto un controllore PID dell'angolo di pitch con uno smorzatore PI della torre.

L'MPC descritto, invece, è stato implementato usando un intervallo di campionamento di 100ms e $T = 50$ cioè con una predizione di 5 secondi in avanti.

Per motivi di chiarezza, i risultati presentati in [5] si riferiscono al caso non vincolato con una velocità media di 17m/s e una intensità di turbolenza del 14%.

Inoltre, si sottolinea che, quando si valutano le prestazioni di un controllore di una turbina eolica in operazioni a pieno carico, si ha un comportamento accoppiato tra:

- l'attività di pitch;
- la regolazione della velocità del generatore;
- i carichi sulla torre coinvolti.

Migliorare le prestazioni rispetto ad uno di questi obiettivi, di solito, viene fatto a discapito di uno o più degli altri.

Il comportamento della turbina è stato simulato con una larga varietà di pesi Q ed R per i carichi sulla torre, per la velocità del generatore e per la velocità del pitch.

I carichi sulla torre sono dati come carichi di danno equivalente nella direzione longitudinale alla base sulla torre $DEL(MyTB)$ mentre il controllo della velocità ω_g è stato valutato come una deviazione standard della velocità angolare del generatore [ovvero $std(\omega_g)$].

La figura 6.2, per una data velocità media del vento costante pari a $v = 17m/s$, riporta in ordinata i carichi sulla torre $DEL(MyTB)$ normalizzati rispetto al relativo carico $DEL(MyTB)_{base}$ che si ha per il controllore di base e riporta in ascissa la deviazione standard std della velocità angolare del generatore ω_g normalizzata rispetto alla relativa grandezza $std(\omega_g)_{base}$ che si ha per il controllore di base.

Quindi, sia i carichi di danno equivalente che la deviazione standard della velocità del generatore vengono mostrati in figura 6.2 con i loro valori normalizzati rispetto ai valori delle medesime grandezze che si otterrebbero nel caso del controllore di base.

Inoltre, nella figura 6.2, vengono riportati solo i risultati che presentano un livello di attività di pitch (ovvero di deviazione standard della velocità di pitch) simile al caso del controllore di base.

Scegliendo, tra tutti i pesi Q ed R usati per la simulazione del comportamento della turbina, soltanto i pesi che corrispondono ai punti sperimentali misurati, il comportamento della velocità può essere tracciato in relazione ai carichi sulla torre senza interessare l'attività di pitch.

Selezionando un diverso livello di attività di pitch, l'intera curva verrà traslata come segue:

- un'attività di pitch, ammissibilmente più alta, sposterà tutti i punti verso l'angolo in basso a sinistra della figura 6.2 e permetterà di migliorare sia il controllo della velocità che i carichi sulla torre;
- un livello di attività di pitch più basso traslerà la curva verso l'angolo in alto a destra.

La curva, passando attraverso la zona vicina all'angolo in basso a sinistra della figura 6.2, suggerisce che l'MPC sia leggermente più efficiente del controllore di base poiché è possibile osservare, con lo stesso valore di attività di pitch, un controllo della velocità migliore e carichi sulla torre più bassi.

Per la spiegazione, nel dettaglio, di queste considerazioni si rimanda all'articolo [5] citato in bibliografia.

In questo caso le prestazioni sono state valutate soltanto ad una velocità media del vento pari a 17m/s che è la stessa che abbiamo usato per linearizzare il modello.

Si precisa, infatti, che per questo primo di tipo di controllo la velocità del vento è stata, per semplicità, supposta costante e pari, proprio, a 17m/s in quanto non nota.

Infine, grazie all'intrinseca robustezza dell'approccio del compensatore dei disturbi, un singolo controllore lineare per l'intero intervallo operativo a pieno carico può rappresentare un'opzione fattibile per il controllo libero di compensazione, come anche usare pochi punti di linearizzazione.

In altri termini, la compensazione per la non linearità del modello migliorerà le prestazioni sia nel caso in esame sia nel caso di condizioni turbolente nelle quali il controllore opererà ad una distanza significativa dal punto di linearizzazione per la maggior parte del tempo.

Per maggiori approfondimenti su questi argomenti si rimanda alle fonti [11] e [12] citate in bibliografia.

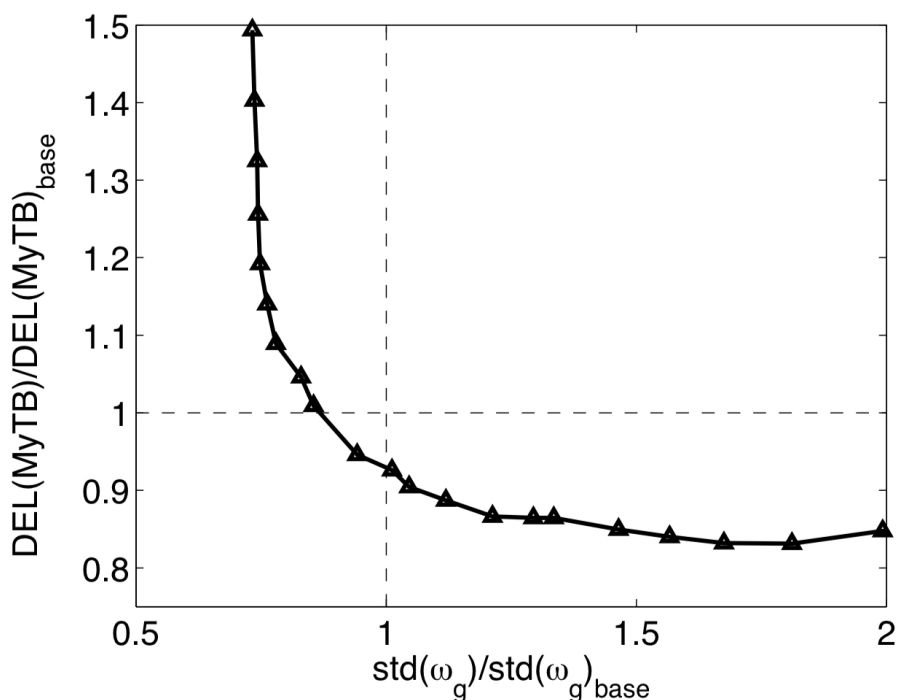


Figura 6.2: Curva dell'andamento per una velocità media del vento $v = 17\text{m/s}$ dei carichi sulla torre $\text{DEL}(\text{MyTB})$ in funzione della velocità angolare ω_g del generatore espressa in deviazione standard std entrambi normalizzate rispetto alle stesse variabili per un controllore di base

6.4: PREDIZIONE DELLA VELOCITÀ DEL VENTO

Il miglioramento delle prestazioni del controllo attraverso la predizione della futura velocità del vento viene chiamato talvolta “preview control”.

A questo scopo, per misurare il campo della velocità in arrivo, si possono usare tecniche LIDAR (ovvero Light Detection and Ranging) le quali permettono di misurare la velocità del vento in arrivo prima che il vento interagisca con il rotore della turbina eolica.

Queste misurazioni in anticipo del vento (“preview wind measurements”) possono essere usate in alcuni sistemi di controllo in avanti progettati proprio per ridurre i carichi sulla turbina.

Si precisa che, dal campo di velocità in arrivo così misurato, saranno estrapolati solo determinati valori in modo da permettere il loro utilizzo con il modello a parametri concentrati presentato nel capitolo 5.

Per maggiori dettagli sulle tecniche LIDAR si rimanda alla fonte [13] citata in bibliografia.

Ad ogni modo, anche senza misurazioni addizionali, il vento futuro può essere predetto da misurazioni passate sotto certe condizioni.

In letteratura si trovano almeno due approcci: uno che usa una spline cubica combinata con un filtro IRR, in un modello a tempo continuo, al fine di predire la velocità del vento per svariati secondi in avanti e un’altro che usa un modello di vento autoregressivo, in un modello a tempo discreto, al fine di predire l’effettiva velocità del vento per svariati passi in avanti.

Al fine di dimostrare i benefici di misurare o predire la velocità del vento svariati secondi prima, si assuma una perfetta predizione della velocità del vento (ovvero senza alcun errore di predizione).

Nell’equazione del modello predittivo si assuma di conoscere gli ingressi del vento futuro invece di considerarlo costante e si includa direttamente nella formulazione del controllo ottimo la conoscenza del comportamento del vento nel futuro.

6.4.1: FATICA

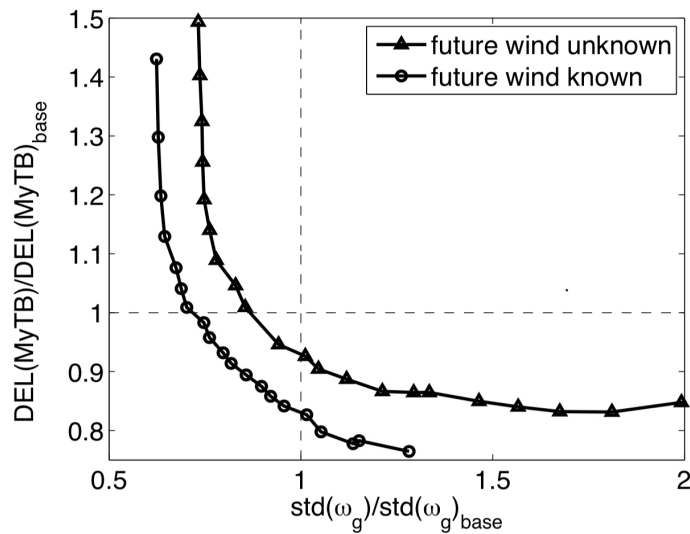


Figura 6.3: Confronto tra le curve di andamento dei carichi sulla torre $DEL(MyTB)$ in funzione della velocità angolare ω_g del generatore espressa in deviazione standard std entrambi normalizzate rispetto alle stesse variabili per un controllore di base nel caso di vento futuro noto (“MPC preview”) e nel caso di vento futuro incognito (MPC).

La figura 6.3 riporta in ordinata i carichi sulla torre $DEL(MyTB)$, normalizzati rispetto al relativo carico $DEL(MyTB)_{base}$ che si ha per il controllore di base, e riporta in ascissa la deviazione standard std della velocità rotazionale del generatore ω_g , normalizzata rispetto alla relativa grandezza $std(\omega_g)_{base}$ che si ha per il controllore di base, e confronta le curve degli andamenti di queste grandezze sia per i casi con che per i casi senza la conoscenza della velocità del vento futuro ovvero, rispettivamente, per i casi “MPC preview” ed MPC.

Analogamente alla figura 6.2, vengono mostrati, in figura 6.3, soltanto i risultati che presentano un livello di attività di pitch (ovvero di deviazione standard della velocità di pitch) simile al caso del controllore di base.

La curva delle grandezze presentate in figura 6.2, ottenute con l’“MPC preview” (ovvero conoscendo la velocità del vento futura), sta significativamente sotto la curva delle grandezze ottenute con l’MPC senza l’informazione della velocità del vento futura.

Perciò è possibile migliorare le prestazioni del controllo senza aumentare l’attività di pitch in quanto la curva ottenuta tramite l’“MPC preview” si avvicina di più all’angolo in basso a sinistra del grafico di figura 6.2 che rappresenta la zona ottimale in quanto lì, con lo stesso valore di attività di pitch, si può osservare un controllo della velocità migliore e carichi sulla torre più bassi.

Per esempio si possono scegliere i pesi Q ed R in modo tale da ridurre i DELs della torre del 17% il che corrisponde ad un aumento della vita della torre di oltre il 100%.

6.4.2: CARICHI ESTREMI

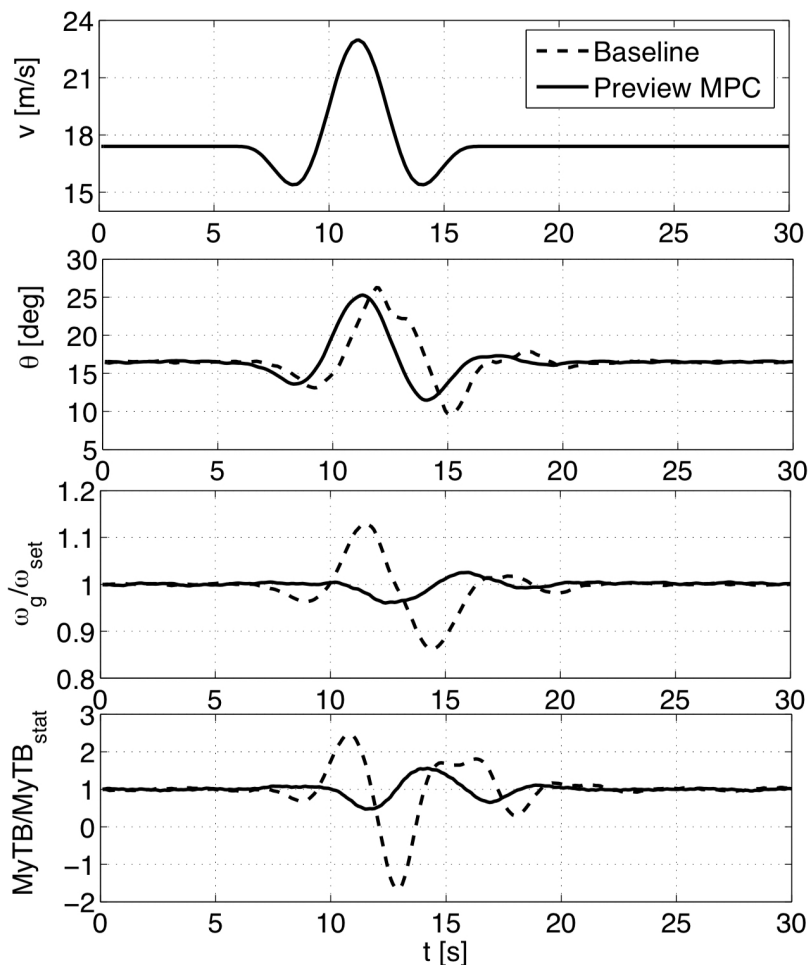


Figura 6.4: Curve di risposta ad una raffica di vento (del tipo “cappello messicano”) per un controllore di base e per un controllore “MPC preview”.

La velocità angolare del generatore ω_g e il momento flettente alla base della torre $MyTB$ sono normalizzati rispetto ai loro valori stazionari.

Il più importante vantaggio del “preview control” è la riduzione dei carichi estremi in presenza di raffiche di vento.

Si riportano, nel grafico 6.4 con una linea continua, i risultati per un “MPC preview” implementato seguendo il modello di predizione presentato nel paragrafo 6.2.2 nel caso di una turbina eolica di 3MW di potenza a velocità variabile, controllata tramite la regolazione dell’angolo di pitch per la zona operativa a pieno carico.

Come controllore di base con cui confrontare i risultati, si è scelto il solito controllore PID dell’angolo di pitch con uno smorzatore PI della torre e i relativi risultati sono stati riportati con una linea tratteggiata.

Viene riportato, in figura 6.4, l’andamento temporale della velocità del vento v in m/s per una raffica di vento del tipo “cappello messicano”, l’andamento temporale dell’angolo di pitch θ in gradi, l’andamento temporale della velocità angolare ω_g del generatore e l’andamento temporale del momento flettente alla base della torre $MyTB$, dove la velocità angolare del generatore ω_g e il

momento flettente alla base della torre $MyTB$ sono normalizzati rispetto ai loro valori stazionari, rispettivamente ω_{set} e $MyTB_{stat}$. Sempre nella medesima figura vengono confrontati, per la stessa raffica di vento del tipo “cappello messicano” considerata, l’andamento dell’angolo di pitch θ , l’andamento della velocità angolare del generatore ω_g e l’andamento del momento flettente alla base della torre $MyTB$ per il caso del controllore di base e per il caso del controllore “MPC preview”.

La massima deviazione della velocità del generatore si riduce dal 13% al 2.5% mentre il massimo momento flettente alla base della torre viene ridotto da quasi il 140% al 60% rispetto al livello stazionario.

Dal grafico dell’angolo di pitch risulta chiaro che il comportamento dell’angolo di pitch ottenuto con il controllore “MPC preview” non si discosta molto da quello ottenuto con il controllore di base. Sia il massimo angolo di pitch che la velocità di pitch per il controllore “MPC preview” sono simili a quelli del controllore di base.

Si nota inoltre come l’andamento temporale dell’angolo di pitch ottenuto con il controllore “MPC preview” sia anticipato di circa un secondo rispetto all’andamento temporale dell’angolo di pitch ottenuto per il controllore di base.

Quanti di questi miglioramenti teorici, dati dall’ “MPC preview”, possano essere realizzati con le misurazioni attuali rimane, ad oggi, una questione aperta.

Si noti però che, seppur siano riportati, in questo capitolo, solo i grafici ottenuti per la zona operativa a pieno carico, questo tipo di “preview control” può anche essere usato nella zona operativa a velocità variabile. Infatti qualunque turbina eolica presenta sia una zona operativa a pieno carico che una zona operativa a velocità variabile la quale diventa importante nel caso di accensioni e spegnimenti molto rapidi della turbina per via, ad esempio, di raffiche di vento improvvise.

Inoltre, se il campo del vento in arrivo fosse noto, la traiettoria di riferimento della velocità del generatore potrebbe essere impostata ai valori di velocità richiesti per il raggiungimento di una produzione di potenza ottima e in tal modo si potrebbe giungere potenzialmente all’aumento di produzione di potenza.

Dunque, concludendo, è stato presentato un possibile controllore MPC lineare per le turbine eoliche.

I risultati, mostrati nel paragrafo 6.3, ci dicono che si ha un piccolo miglioramento nelle prestazioni del controllo ottenute usando un controllore MPC lineare rispetto a quelle che si avrebbero usando un controllore di base poiché è possibile osservare, con lo stesso valore di attività di pitch, un controllo della velocità migliore e carichi sulla torre più bassi rispetto al controllore di base.

Si è, poi, esaminata la possibilità di tener conto nell’MPC dell’evoluzione futura del vento per la formulazione del controllo (tecnica che prende il nome di “preview control”).

Ipotizzando di conoscere perfettamente il vento futuro, si possono migliorare notevolmente le prestazioni del controllore sia rispetto ai carichi a fatica nel caso di operazioni a pieno carico sia rispetto a carichi estremi nel caso di raffiche (“GUSTS”).

6.5: MPC NON LINEARE PER LE TURBINE EOLICHE

Come riportato da A. Körber e R. King in [6], si può verificare che un modello MPC non lineare presenta prestazioni soltanto leggermente migliori rispetto ai modelli MPC lineari o basati sulla linearizzazione del processo, sia per operazioni a pieno carico che per operazioni a carico parziale.

Questo indica che l'MPC lineare riesce a controllare in modo ampiamente sufficiente la dinamica della turbina ad una data velocità media del vento.

Dunque l'utilizzo di un Model Predictive Control non lineare per le turbine eoliche non è giustificato, dal momento che non riesce a garantire un sufficiente miglioramento rispetto all'MPC lineare, il quale fornisce già prestazioni migliori rispetto al classico controllore PID, e dal momento che un qualsiasi metodo MPC non lineare è computazionalmente molto oneroso.

CONTROLLO COMBINATO IN AVANTI E IN RETROAZIONE DI UNA TURBINA EOLICA USANDO UN MPC CON VINCOLI SULLO STATO

7.1: INTRODUZIONE

In quest'ultimo capitolo verrà presentata un'applicazione dell'MPC alle turbine eoliche per il problema del controllo dell'angolo di pitch collettivo e per il problema del controllo del momento torcente.

Il controllore applicato sarà in grado di includere le informazioni sulla velocità del vento in arrivo attraverso, ad esempio, misure LIDAR (ovvero Light Detection And Ranging).

Inoltre sarà presentato un metodo per includere i vincoli sul vettore di stato della turbina nella formulazione del problema (come ad esempio i vincoli sulla velocità del rotore) anche in presenza di disturbi non misurati.

Tramite un approccio di simulazione computazionale saranno valutati gli effetti sia del "preview control" che dell'inclusione dei vincoli sullo stato per 3 diversi casi ovvero in:

1. condizioni operative nominali;
2. presenza di raffiche di vento;
3. situazioni di perdita di carico nella griglia.

Si troverà che il "preview control" fornisce significativi miglioramenti sia in condizioni operative nominali sia in presenza di raffiche di vento.

Inoltre si troverà anche come l'inclusione dei vincoli sullo stato nella formulazione dell'MPC possa essere usata per evitare spegnimenti dovuti alla violazione del limite di velocità massimo o per controllare la turbina quando necessiti, effettivamente, di funzionare ad un ridotto livello del momento torcente del generatore.

Il Model Predictive Control (MPC) è un metodo di controllo che usa l'ottimizzazione per calcolare una traiettoria di controllo futura basandosi sul modello del processo e sulle informazioni sull'ingresso e sullo stato corrente.

L'MPC, poiché risolve un nuovo problema di ottimizzazione ad ogni passo temporale, richiede uno sforzo computazionale elevato.

Tuttavia, grazie al miglioramento delle potenze computazionali disponibili per i sistemi di controllo in tempo reale, l'MPC è diventato applicabile anche a "sistemi veloci" quali le turbine eoliche.

Probabilmente la caratteristica più distintiva dell'MPC è la possibilità di includere esplicitamente i vincoli nel problema del controllo. Difatti il problema del controllo delle turbine eoliche è intrinsecamente vincolato. Per esempio, le velocità di pitch sono, di solito, limitate dalla potenza massima dei motori di pitch mentre la potenza delle elettroniche limita le massime derivate del momento torcente del generatore disponibili.

Esistono, tuttavia, anche "limiti difficili" su alcune delle variabili controllate come la velocità del generatore. Ad esempio, velocità del rotore troppo alte possono danneggiare la turbina e sono, quindi, presenti sistemi di sicurezza che spengono l'intera turbina qualora la velocità superi una certa soglia. Qualunque tipo di controllore venga impiegato è quindi cruciale mantenere la velocità al di sotto di questi valori di trigger.

Usando l'MPC si possono includere questi vincoli sullo stato direttamente nella formulazione del problema e il controllore, pur essendo vincolato, non perderà il suo funzionamento ottimale.

L'inclusione dei vincoli porta a diversi vantaggi nelle situazioni in cui le turbine sono soggette, ad esempio, ad eventi quali le raffiche di vento o lo spegnimento in caso di carichi estremi.

Perciò l'obiettivo principale di questo capitolo è quello di illustrare come l'inclusione esplicita dei vincoli e il controllo combinato in avanti e in retroazione dell'MPC possano migliorare le prestazioni della turbina.

Infatti una delle possibilità più promettenti per migliorare le prestazioni del controllo delle turbine eoliche è di far lavorare in parallelo al controllore in retroazione un controllore in avanti basato sulla velocità del vento in arrivo misurata, ad esempio, tramite sistemi LIDAR montati sulla turbina.

Usando l'MPC, questo tipo di controllo che sfrutta la predizione delle velocità del vento in arrivo (chiamato "preview control") può essere facilmente integrato nel controllore in retroazione senza aggiungere alcuna complessità in più, in modo che il suo funzionamento ottimale e l'inclusione dei vincoli non vengano persi qualora si usi un controllore combinato in avanti e in retroazione.

7.2: IL PROBLEMA DEL CONTROLLO

Il controllore di una turbina eolica presenta obiettivi di controllo multipli e di solito consta di svariati controllori singoli progettati indipendentemente come un controllore della velocità e della potenza e un controllore dell'angolo di pitch individuale (con ciò intendendo della singola pala), dello smorzamento della torre e dello smorzamento della trasmissione.

Grazie alla sua diretta formulazione MIMO, l'MPC potrebbe essere usato per combinare tutti questi controllori individuali in un unico ambiente di lavoro.

Il controllore considerato in questo capitolo non includerà il controllo dell'angolo di pitch individuale o il controllo dello smorzamento della trasmissione.

Il controllo dell'angolo di pitch individuale di solito agisce su specifici sensori come i sensori di carico sulla pala e ha differenti obiettivi di controllo e poche interazioni con il problema di controllo della velocità principale nel relativo intervallo di frequenza. Inoltre può essere trattato come problema disaccoppiato dal controllo principale di pitch, come mostrato in [18] e [19]. Includerlo nella formulazione dell'MPC vorrebbe dire unicamente aumentare la dimensione del modello e la complessità del problema senza offrire abbastanza benefici per i nostri obiettivi di controllo. Sia l'MPC che il "preview control" per il problema del controllo dell'angolo individuale di pitch non saranno, quindi, più considerati nel seguito grazie al loro effetto disaccoppiato.

Lo smorzamento della trasmissione di solito interessa un intervallo di frequenze diverso rispetto al controllo della velocità e richiederebbe velocità di campionamento proibitive per un'implementazione MPC.

Inoltre, questo ultimo capitolo si concentrerà solo sulla regione a pieno carico operativo poiché i miglioramenti delle prestazioni ottenibili nelle operazioni a carico parziale sarebbero comunque piccoli come mostrato in [6].

Comunque sia, molti dei risultati che otterremo potranno essere facilmente applicati anche ad operazioni di carico parziale in quanto il modello rimarrà ugualmente valido con l'unica differenza data dal fatto che, nelle operazioni a carico parziale, l'angolo di pitch sarà vincolato ad assumere un valore fissato e che il punto operativo della velocità sarà variabile.

7.2.1: IL CONTROLLO IN AVANTI

Il controllo della velocità e della potenza delle classiche turbine eoliche si basa soltanto sulle misure della velocità del generatore.

Dal punto di vista dei sistemi di controllo, le fluttuazioni della velocità del vento agiscono come disturbo e si necessita, quindi, di un controllore ad anello chiuso per compensarle.

Comunque è anche possibile includere direttamente azioni di controllo basate su questo disturbo che prendono il nome di "controllo in avanti del disturbo".

Il controllo in avanti può essere molto efficace per migliorare le prestazioni del controllo, specialmente se il disturbo può essere misurato. Ulteriori miglioramenti possono essere ottenuti se il disturbo viene predetto in avanti nel tempo.

In genere, per usare il controllo in avanti, bisogna risolvere due questioni separate: la prima è data da quanto l'informazione sul disturbo (nel nostro caso la velocità del vento) possa essere ottenuta in modo adatto al controllo mentre la seconda questione è data da quanto questa informazione possa essere usata in modo efficace per migliorare le prestazioni del controllo.

7.2.2: MISURE DELLA VELOCITÀ DEL VENTO

Negli ultimi anni, le tecniche LIDAR sono emerse come uno dei più comuni ed usati principi di misurazione della velocità del vento per le turbine eoliche.

In modo particolare, la possibilità di misurare la velocità del vento ad una distanza di svariate migliaia di metri e la possibilità di misurare non solo in un punto dello spazio ma di coprire tutta la superficie o persino un volume hanno dimostrato quanto queste tecniche LIDAR siano estremamente adatte per le applicazioni incentrate sulla produzione dell'energia eolica.

Mentre all'inizio le tecniche LIDAR sono state considerate solo per valutare in modo più accurato un sito o per validare una curva di potenza, oggi esistono diversi studi che focalizzano l'attenzione su come le misure LIDAR possano essere usate come potenziali ingressi di controllo.

7.2.3: MPC PER LE TURBINE EOLICHE

In letteratura si trovano svariati studi sulla potenziale applicazione dell'MPC alle turbine eoliche sia per il caso "non preview" che per il caso "preview".

Nel capitolo 6 è stato discusso un MPC lineare per le turbine eoliche concludendo con alcune osservazioni sul non opportuno utilizzo dell'MPC non lineare in quanto non giustificato nel nostro caso.

In questo settimo ed ultimo capitolo verrà presentato un controllo avanzato ottenuto combinando un controllo in avanti e un controllo in retroazione per le turbine eoliche tramite l'utilizzo di un MPC con vincoli robusti sullo stato.

7.3: IL MODELLO DELLA TURBINA

in generale per valutare la dinamica della turbina vengono usati software specializzati come FLEX5 i quali accoppiano le problematiche strutturali con quelle aerodinamiche.

Questi modelli, tuttavia, sono troppo complessi per essere implementati in uno schema MPC.

Perciò, anche in questo capitolo come nel capitolo 6, si userà un modello semplificato a parametri concentrati che segue in larga parte quello presentato nel paragrafo 5.2.

Questo modello semplificato consta di un modello della dinamica strutturale lineare e di un modello dell'attuatore accoppiati con un modello aerodinamico non lineare.

L'unica differenza rispetto al modello del paragrafo 5.2 è data dal fatto che, ora, invece dell'angolo di pitch di comando θ_C e del momento torcente del generatore di comando $M_{G,C}$, verranno usate le derivate di questi (ovvero $\dot{\theta}_C$ e $\dot{M}_{G,C}$) come ingressi per il sistema, in modo da gestire i vincoli su queste derivate come semplici limiti sulle variabili di controllo dell'MPC. Si ha quindi che:

$$u = (\dot{M}_{G,C}, \dot{\theta}_C)^T$$

ed il modello che considereremo avrà nove variabili di stato date da:

1. Velocità rotazionale del rotore $x_1 = \omega_r$
2. Angolo collettivo di pitch $x_2 = \theta$
3. Velocità collettiva di pitch $x_3 = \dot{\theta}$
4. Accelerazione collettiva di pitch $x_4 = \ddot{\theta}$
5. Spostamento longitudinale in cima alla torre $x_5 = x_{tower\ top}$
6. Spostamento collettivo del rotore $x_6 = x_{blade\ tip}$
7. Velocità longitudinale in cima alla torre $x_7 = \dot{x}_{tower\ top}$
8. Velocità collettiva del rotore $x_8 = \dot{x}_{blade\ tip}$
9. Momento torcente del generatore $x_9 = M_G$

le cui equazioni di stato sono date da:

$$\dot{x}_1 = \frac{1}{J_r} (M_A - n_G x_9)$$

$$\dot{x}_2 = x_3$$

$$\dot{x}_3 = x_4$$

$$\dot{x}_4 = -\omega_{p,0}^2 x_3 - 2\omega_{p,0}\zeta_p x_4 + \omega_{p,0}^2 \dot{\theta}_c$$

$$\dot{x}_5 = x_7$$

$$\dot{x}_6 = x_8$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_7 \\ \dot{x}_8 \end{bmatrix} = \mathbf{M}^{-1} \left[\mathbf{F}F_A - \mathbf{K} \begin{bmatrix} x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} - \mathbf{D} \begin{bmatrix} x_7 \\ x_8 \end{bmatrix} \right]$$

$$\dot{x}_9 = \dot{M}_{G,C}$$

(7.1)

dove:

J_r è il momento di inerzia del rotore

n_G è il rapporto di trasmissione

$(\omega_{p,0}, \zeta_p)$ sono i parametri dell'attuatore di pitch, modellato come un sistema del secondo ordine

$(\mathbf{M}, \mathbf{D}, \mathbf{K}, \mathbf{F})$ sono le matrici del sistema che definiscono la dinamica delle pale e del modello della torre a due gradi di libertà.

Il momento torcente aerodinamico M_A e la spinta F_A agenti sul rotore vengono espressi dalle seguenti formule tramite il coefficiente adimensionale del momento aerodinamico c_M e il coefficiente adimensionale della spinta aerodinamica c_T :

$$\begin{aligned} M_A &:= \frac{1}{2} \rho \pi R_r^3 v_e^2 c_M(\lambda, \theta) \\ F_A &:= \frac{1}{2} \rho \pi R_r^2 v_e^2 c_T(\lambda, \theta) \end{aligned} \quad (7.2)$$

con λ il rapporto delle velocità al tip pari a:

$$\lambda = \frac{\omega_r R_r}{v_e} = \frac{v_r}{v_e}$$

dove:

v_r è la velocità tangenziale al tip della pala del rotore pari a $v_r = \omega_r R_r$,

ω_r è la velocità angolare del rotore

R_r è il raggio del rotore la cui sezione è $A_r = \pi R^2$

v_e è la velocità del vento effettiva al tip nel piano del rotore

θ è l'angolo di pitch collettivo.

ρ è la densità dell'aria

Il coefficiente adimensionale del momento aerodinamico c_M e il coefficiente adimensionale della spinta aerodinamica c_T sono funzioni del rapporto delle velocità al tip λ e dell'angolo di pitch collettivo θ .

Qualora la torre o le pale si muovessero, la velocità del vento vista dal rotore cambierebbe e diventerebbe, quindi, esprimibile come la velocità effettiva seguente:

$$\begin{aligned} v_e &= v_0 - v_{tower\ top} - a v_{blade\ tip} \\ &= v_0 - x_7 - a x_8 \end{aligned}$$

dove:

v_0 è la velocità del vento a flusso libero nella direzione longitudinale mediata sull'area del rotore;

a è la costante adimensionale di scala che collega la velocità al tip della pala nella direzione fuori dal piano del rotore al cambio della velocità sull'intera lunghezza (span) della pala.

In questo capitolo assumeremo come uscite unicamente la velocità rotazionale del rotore x_1 , la velocità longitudinale in cima all torre x_7 e la potenza elettrica data da $n_G x_1 x_9$ cosicché sarà valida la seguente equazione:

$$y := h(x, u, v) = (x_1 \ x_7 \ n_G x_1 x_9)^T \quad (7.3)$$

7.4: MPC

Come nei capitoli precedenti, si considera una formulazione dell'MPC per sistemi a tempo discreto.

Se indichiamo con t il passo all'istante di tempo discreto corrente, allora $y(t)$ è il valore dell'uscita y al passo temporale t e il vettore $y_{t|T}$ viene definito come il vettore che include tutti i valori di y compresi tra i passi temporali t e $t + T$ ovvero:

$$y_{t|T} := \left(y(t)^T \ y(t+1)^T \ \dots \ y(t+T)^T \right)^T \quad (7.4)$$

Il vettore dello stato $x_{t|T}$ e il vettore del disturbo $v_{t|T}$ sono definiti, in modo concorde a $y_{t|T}$, come segue:

$$x_{t|T} := \left(x(t)^T \ x(t+1)^T \ \dots \ x(t+T)^T \right)^T$$

$$v_{t|T} := \left(v(t)^T \ v(t+1)^T \ \dots \ v(t+T)^T \right)^T$$

Si sottolinea che, in base alle definizioni appena date, si dirà che $y_{t|T} < z_{t|T}$ se varrà la condizione

$$y(t+i) < z(t+i) \quad \forall i = 0, \dots, T \quad (7.5)$$

7.4.1: LA FORMULAZIONE DEL PROBLEMA

Ad ogni passo temporale, il controllore calcola la sequenza degli ingressi futuri $u_{t|T}$ risolvendo un problema di ottimizzazione e di essa, in accordo con l'algoritmo RH del capitolo 3, solo il primo ingresso $u(t)$ sarà applicato al processo ovvero:

$$u^{MPC}(t) = u(t)$$

Per semplicità si assume che nessun ritardo temporale compaia nel calcolo di $u(t)$.

La funzione obiettivo per il problema di minimizzazione è data dalla solita somma quadratica degli ingressi $u_{t|T}$ e degli scostamenti delle uscite del processo $y_{t+1|T}$ rispetto ad una data traiettoria di riferimento $r_{t+1|T}$ sull'orizzonte di predizione T .

Le somme vengono pesate usando le matrici Q ed R ovvero si avrà:

$$\min_{u_{t|T}} J_t, \quad J_t = \left(y_{t+1|T} - r_{t+1|T} \right)^T Q \left(y_{t+1|T} - r_{t+1|T} \right) + u_{t|T}^T R u_{t|T} + V_f(x(t+T-1)) \quad (7.6)$$

dove il termine V_f è il termine di penalizzazione finale visto nel paragrafo 3.5 ovvero è un termine addizionale che penalizza lo stato finale.

Inoltre il problema di ottimizzazione appena enunciato è soggetto alla seguenti equazioni esprimenti la dinamica del sistema:

$$x(t+1) = f(x(t), u(t), v(t))$$

$$y(t) = h(x(t), u(t), v(t)) \quad (7.7)$$

con i seguenti limiti sui comandi del controllore:

$$u_{t|T}^{min} \leq u_{t|T} \leq u_{t|T}^{max} \quad (7.8)$$

e con i seguenti vincoli sullo stato e i seguenti vincoli finali:

$$\begin{aligned} F_c x_{t+1|T} &\leq g_c \\ F_{tc} x(t+T+1) &\leq g_{tc} \end{aligned} \quad (7.9)$$

che saranno descritti in modo più approfondito nei paragrafi 7.4.3 e 7.4.6.

7.4.2: LINEARIZZAZIONE

Le equazioni di stato e di uscita, nel problema di ottimizzazione, sono date dalle equazioni (7.1), (7.2) e (7.3) e sono funzioni non lineari, ragion per cui il problema di ottimizzazione sarà non lineare. Sebbene esistano controllori MPC non lineari (NMPC) applicati anche a “sistemi veloci” quali le turbine, l’uso di NMPC aumenta significativamente sia la complessità del metodo che l’onere computazionale rispetto ad un MPC lineare senza migliorarne notevolmente le prestazioni nel caso delle turbine eoliche, come già esposto nel paragrafo 6.5 del capitolo 6.

Quindi, anche in questo caso, si userà un MPC lineare che sfrutti una linearizzazione continua dei modelli non lineari.

Ad ogni passo temporale t , a partire da (7.1) e (7.3), si deriverà un modello lineare nello spazio di stato dato da:

$$\begin{aligned} \delta \dot{x} &= F_t \delta x + G_t \delta u + C_t \delta v \\ \delta y &= H_t \delta x \end{aligned} \quad (7.10)$$

con F_t , G_t , C_t ed H_t le matrici Jacobiane date da:

$$\begin{aligned} F_t &= \left. \frac{\delta f}{\delta x} \right|_{x=x_{e_t}, u=\bar{u}_t, v=\bar{v}_t} & G_t &= \left. \frac{\delta f}{\delta u} \right|_{x=x_{e_t}, u=\bar{u}_t, v=\bar{v}_t} & C_t &= \left. \frac{\delta f}{\delta v} \right|_{x=x_{e_t}, u=\bar{u}_t, v=\bar{v}_t} \\ H_t &= \left. \frac{\delta h}{\delta x} \right|_{x=x_{e_t}, u=\bar{u}_t, v=\bar{v}_t} \end{aligned}$$

Il pedice t usato per le matrici F , G , C ed H serve ad indicare che queste matrici cambieranno ad ogni step temporale.

La linearizzazione viene fatta attorno al punto di equilibrio ad ingresso costante $x_{e_t} = x_0(v_0)$ determinato in corrispondenza alla stima (o in alternativa alla misura) della velocità del vento v_0 , assunta costante.

Il valore a regime per la velocità del rotore sarà dato semplicemente da:

$$\omega_{r,0}(v_0) = \omega_{r,0} \quad (7.11)$$

mentre il momento torcente a regime del generatore può essere calcolato come segue:

$$M_{G,0} = \frac{P_0}{\omega_{r,0} n_G} \quad (7.12)$$

Conoscendo la velocità del rotore e il momento torcente del generatore, si può calcolare l'angolo di pitch a regime θ_{ss} , che serve per bilanciare il momento aerodinamico torcente con il momento torcente del generatore, risolvendo, numericamente per θ_{ss} , la seguente equazione:

$$\frac{P_0}{\omega_{r,0}} = M_A(v_0, \omega_{r,0}, \theta_{ss})$$

Conoscendo $\theta_0(v_0)$, il valore a regime della spinta aerodinamica $F_{A,ss} = F_A(v_0, \omega_{r,0}, \theta_{ss})$ può essere calcolato usando gli spostamenti della torre e del rotore a regime (rispettivamente $x_{tower\ top, 0}$ e $x_{blade\ tip, 0}$) come segue:

$$\begin{bmatrix} x_{tower\ top, 0} \\ x_{blade\ tip, 0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{5, 0} \\ x_{6, 0} \end{bmatrix} = \mathbf{K}^{-1} \mathbf{F} F_{A,ss} \quad (7.13)$$

Tutti gli altri stati rimanenti avranno valori a regime nulli.

Quindi il vettore degli stati a regime per una data velocità del vento in ingresso v_0 è dato da:

$$x_{e_t} = x_0(v_0) = \left(\omega_{r,0} \quad \theta_{ss} \quad 0 \quad 0 \quad \mathbf{K}^{-1} \mathbf{F} F_{A,ss} \quad 0 \quad 0 \quad \frac{P_0}{\omega_{r,0} n_G} \right)^T \quad (7.14)$$

Infatti, dato un modello della turbina eolica del tipo:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(x(t), u(t), v(t)) \\ y(t) &= h(x(t)) \end{aligned}$$

si decide di adottare un passo di campionamento T compatibile con la velocità della dinamica delle variabili in gioco e con la capacità di calcolo.

$\forall t \in \mathbb{Z}_+$ si considereranno:

$$\begin{aligned} \bar{u}_t &= u(tT) \\ \bar{v}_t &= v(tT) \end{aligned}$$

assumendo di poterli conoscere (almeno con un errore di misura inferiore ad una data tolleranza).

Si determinerà il punto di equilibrio x_{e_t} in corrispondenza a tali ingressi attraverso le uguaglianze:

$$\begin{aligned} x_{e_t}: \quad 0 &= f(x_{e_t}, \bar{u}_t, \bar{v}_t) \\ y_{e_t} &= h(x_{e_t}) \end{aligned}$$

Si linearizzerà, quindi, attorno ad $(x_{e_t}, \bar{u}_t, \bar{v}_t)$ assumendo:

$$\begin{aligned} \delta x &= x - x_{e_t} \\ \delta u &= u - \bar{u}_t \\ \delta v &= v - \bar{v}_t \\ \delta y &= y - y_{e_t} \end{aligned}$$

ed ottenendo:

$$\begin{aligned}\delta\dot{x} &= F_t\delta x + G_t\delta u + C_t\delta v \\ \delta y &= H_t\delta x\end{aligned}$$

con F_t , G_t , C_t ed H_t le matrici Jacobiane date da:

$$\begin{aligned}F_t &= \left. \frac{\delta f}{\delta x} \right|_{x=x_{e_t}, u=\bar{u}_t, v=\bar{v}_t} & G_t &= \left. \frac{\delta f}{\delta u} \right|_{x=x_{e_t}, u=\bar{u}_t, v=\bar{v}_t} & C_t &= \left. \frac{\delta f}{\delta v} \right|_{x=x_{e_t}, u=\bar{u}_t, v=\bar{v}_t} \\ H_t &= \left. \frac{\delta h}{\delta x} \right|_{x=x_{e_t}, u=\bar{u}_t, v=\bar{v}_t}\end{aligned}$$

SISTEMA DISCRETIZZATO (INTERPOLATORE DI ORDINE ZERO)

Per semplicità di notazione i vettori di ingresso, stato e uscita saranno indicati con x , u e v invece di δx , δu e δv indicando, quindi, con x , u e v le variazioni di tali vettori rispetto al punto di linearizzazione.

Le matrici del sistema discreto \mathcal{F}_t , \mathcal{G}_t , \mathcal{C}_t e \mathcal{H}_t si troveranno discretizzando il modello del sistema a tempo continuo linearizzato tramite il metodo di “interpolazione di ordine zero” (ovvero “zero-order holder”) ad ogni passo di campionamento t del controllore.

Si avrà, quindi, che:

$$x[(t+1)T] = e^{F_t T} x[tT] + \int_0^T e^{F_t(T-\tau)} G_t \bar{u}_t d\tau + \int_0^T e^{F_t(T-\tau)} C_t \bar{v}_t d\tau$$

ottenendo il seguente sistema discretizzato (anche noto come “a segnali campionati”):

$$\begin{aligned}x(t+1) &= \mathcal{F}_t x(t) + \mathcal{G}_t u(t) + \mathcal{C}_t v(t) \\ y(t) &= \mathcal{H}_t x(t)\end{aligned}\tag{7.15}$$

dove le matrici del sistema discreto sono date da:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_t &:= e^{F_t T}; & \mathcal{G}_t &:= \int_0^T e^{F_t \tau} G_t d\tau; & \mathcal{C}_t &:= \int_0^T e^{F_t \tau} C_t d\tau \\ \mathcal{H}_t &:= H_t\end{aligned}$$

7.4.3: STABILITÀ

Una ben nota proprietà del metodo di controllo MPC lineare, come presentato nel paragrafo 3.5, è data dal fatto che la stabilità viene garantita indipendentemente dalla scelta dell’orizzonte di predizione ma unicamente scegliendo il termine di penalizzazione finale $V_f(x(t+T+1))$ e i vincoli F_{tc} e g_{tc} .

In alternativa la stabilità può anche essere ottenuta usando un orizzonte di predizione sufficientemente ampio il quale, di solito, va scelto almeno dell’ordine del tempo di assestamento del processo.

Nel nostro caso scegliamo un’espressione del termine di penalizzazione finale con le stesse matrici di peso P_t usate nella formulazione dell’MPC data da:

$$V_f(x(t + T + 1)) = \frac{1}{2} x^T(t + T + 1) P_t x(t + T + 1) \quad (7.16)$$

dove la matrice P_t viene calcolata ad ogni passo temporale t risolvendo l'equazione algebrica di Riccati (ARE) discreta associata all'MPC.

Dunque la scelta della matrice P_t che pesa il termine di penalizzazione finale V_f si determina attraverso la soluzione della stessa equazione algebrica di Riccati discreta associata all'MPC ovvero associata a $(\mathcal{F}_t, \mathcal{G}_t)$ con indici di costo Q ed R .

Il vincolo finale è scelto in modo tale da essere un sottoinsieme del massimo insieme invariante di controllo dal momento che il massimo insieme è definito da un numero troppo grande di disequazioni che ne rendono impossibile l'implementazione.

Inoltre, per via della non linearità del processo, il massimo insieme ammissibile varia con il punto operativo e i vincoli finali necessiterebbero, quindi, di essere aggiornati ad ogni istante temporale. Invece, il termine di penalizzazione finale viene scelto come un iper-cuboide nello spazio di stato a 9 dimensioni il quale rappresenta un sottoinsieme dei massimi insiemi ammissibili delle uscite per tutte le velocità del vento possibili.

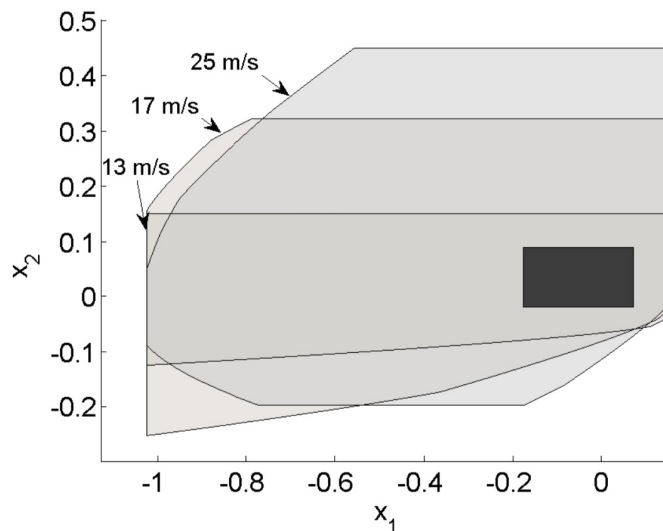


Figura 7.1: Porzione $x_1 - x_2$ del vincolo finale selezionato (area nera) e massimi insiemi ammissibili (aree grigie) per tre differenti velocità del vento. L'insieme finale selezionato è un sottoinsieme dei massimi insiemi ammissibili calcolati per le tre differenti velocità del vento.

La figura esemplificativa 7.1 mostra i massimi insiemi ammissibili di uscita per tre velocità del vento differenti e l'insieme del vincolo finale scelto nella porzione $x_1 - x_2$ (velocità vs angolo di pitch) dello spazio di stato dove il massimo insieme di controllo invariante viene calcolato attraverso l'algoritmo 3.1 presentato in [15].

In questa figura 7.1, i vincoli sono stati considerati solo per la massima velocità del rotore e per la velocità di pitch.

Il massimo insieme ammissibile necessiterebbe di essere calcolato per un numero infinito di punti operativi ma, in questo caso, si adotta l'assunzione per cui, se l'insieme scelto è un sottoinsieme del massimo insieme per un certo numero di punti operativi (ad esempio per tutte le velocità del vento che assumono valori interi), questo è accettabile per tutti i punti operativi.

7.4.4: IL PROGRAMMA QUADRATICO (QP)

Il sistema linearizzato e discretizzato (7.15) viene usato per formulare il problema di controllo ottimo da risolvere (7.6) ovvero:

$$\min_{u_{t|T}} J_t, \quad J_t = (y_{t+1|T} - r_{t+1|T})^T Q (y_{t+1|T} - r_{t+1|T}) + u_{t|T}^T R u_{t|T} + \frac{1}{2} x^T(t+T+1) P_t x(t+T+1)$$

dove $r_{t+1|T}$ è la traiettoria di riferimento nella finestra temporale $[t+1, t+T+1]$

Questo problema di ottimizzazione può essere convertito in un problema di programmazione quadratica (QP) dato da:

$$\begin{aligned} \min_{u_{t|T}} J_t, \quad J_t &:= u_{t|T}^T Q u_{t|T} + c_t^T u_{t|T} \\ t.c. \quad F_{iq,t} u_{t|T} &\leq g_{iq,t} \end{aligned} \quad (7.17)$$

il quale può essere risolto usando degli appositi risolutori QP per il calcolo della traiettoria degli ingressi futuri $u_{t|T}$.

Si noti, inoltre, che, a causa dello schema di linearizzazione descritto nel paragrafo 7.4.2 e a causa dell'uso esplicito della traiettoria dei disturbi $v_{t|T}$, bisognerà ricalcolare ad ogni passo temporale t i termini Q , c_t , $F_{iq,t}$ e $g_{iq,t}$.

Per convertire il problema di ottimizzazione (7.6) nel problema in forma quadratica QP (7.17) si utilizzano delle opportune matrici di manipolazione per i metodi MPC lineari per le quali si rimanda alla fonte [16] riportata in bibliografia.

7.4.5: IL CONTROLLO IN AVANTI

Dal momento che si considerano esplicitamente i disturbi futuri, il controllore descritto include, nello schema di retroazione, una componente di disturbo in avanti.

In generale, la traiettoria dei disturbi futuri non è nota ed è disponibile solo una stima della effettiva velocità del vento all'istante corrente ovvero \tilde{v}_0 .

In questo caso si assume che la velocità del vento rimanga costante per tutto l'intero orizzonte di predizione.

Ad ogni modo, se è disponibile l'informazione del vento in arrivo tramite, ad esempio, tecniche LIDAR e se tale informazione viene usata per il calcolo del disturbo corrente $v(t)$ e della traiettoria dei disturbi futuri $v_{t+1|T}$, il controllore diventerà un "MPC preview" in quanto considererà l'effetto dei cambiamenti della velocità del vento futura.

In questo ultimo capitolo, quando si considererà il "preview control", si assumeranno perfette misurazioni $v_{t|T}$ della velocità del vento all'istante corrente e negli istanti futuri nel piano del rotore per un flusso medio di vento ovvero si assumeranno misurazioni $v_{t|T}$ esenti da errori di misurazione.

Tuttavia, nei sistemi reali, ci sarà sempre un errore di misurazione che farà peggiorare le prestazioni del controllore.

Comunque ci si aspetterà che la componente in avanti del controllore migliori le prestazioni del controllore fintantoché l'informazione sul vento in arrivo fornisca delle informazioni in più rispetto all'assunzione di tenere la velocità del vento costante.

7.4.6: VINCOLI ROBUSTI SULLO STATO

La maggior parte degli studi sull'uso dell'MPC per il controllo delle turbine eoliche considera soltanto vincoli sul controllo.

Questi rappresentano tipicamente limitazioni date dall'hardware sugli attuatori come il massimo momento torcente e la velocità di pitch.

Il maggior beneficio di includere esplicitamente questi vincoli nella formulazione del problema è dato dal fatto che un controllore che non tiene conto di queste limitazioni e che semplicemente satura le variabili attuate perderà il suo funzionamento ottimale nel caso in cui sia stato progettato usando qualche forma di controllo ottimo ed inoltre la stabilità non potrà essere garantita.

Ci sono, comunque, anche vincoli sullo stato nel problema di controllo delle turbine eoliche.

Una delle caratteristiche più degne di nota è data dal fatto che il generatore non potrà superare una certa soglia di sicurezza critica.

Perciò molte turbine disconnetteranno il generatore e inizieranno una procedura di frenata se si raggiungerà tale soglia.

Volendo evitare questi spegnimenti, il controllore dovrà assicurare che la soglia critica non venga mai raggiunta durante l'operazione, cosa che si traduce in un vincolo sullo stato della velocità del

rotore del tipo: $x_1 \leq \omega_{max, load}$

Tale vincolo potrebbe essere direttamente implementato nell'MPC in modo simile a quanto si fa per i vincoli sul controllo. Differentemente dal vincolo sul controllo, però, non può essere garantito che il vincolo non sia violato nel caso di errori di modellazione o in presenza di disturbi sconosciuti presenti e futuri.

Per esempio, se la turbina sarà soggetta ad una raffica a gradino la quale, nel caso in cui il vincolo sullo stato sia stato omissso, porterebbe la velocità del rotore sopra questa determinata soglia, allora includere tale vincolo nell'ottimizzazione corrisponderà a trovare una traiettoria che arriverà al limite del vincolo.

Ora, se la velocità del vento corrente o la velocità del vento futura ad un dato punto nell'orizzonte di predizione sarà anche leggermente più alta di quanto si era assunto per il controllore, la velocità del generatore aumenterà oltre il valore di soglia e violerà il vincolo.

Se si assume che la velocità del vento futura rimanga costante sull'orizzonte di predizione, si può chiaramente vedere che, a causa della natura stocastica del vento, questa condizione sarà incontrata di frequente e il vincolo sarà violato.

Anche se le velocità del vento future saranno misurate, ci saranno sempre degli errori di misura che comporteranno la violazione del vincolo da parte del rotore.

Volendo rendere l'uso dei vincoli di stato utile ai fini del controllo, il controllore necessiterà di essere irrobustito cosicché i vincoli sullo stato e sul controllo non saranno violati in presenza di disturbi non noti.

Il metodo che si usa per irrobustire il controllore è quello basato su un "controllore robusto tube-based" che sfrutti il modello di disturbo additivo descritto da Rawlings e Mayne in [17].

In questo capitolo, si considererà solo la gestione robusta del limite di velocità massima ma il metodo potrà anche essere esteso per includere qualunque altro tipo di vincolo lineare sullo stato. Inoltre, soltanto l'irrobustimento contro i disturbi incogniti verrà considerato mentre gli errori di modellazione e di stima saranno ignorati.

Questo può essere giustificato grazie al fatto che l'incertezza sul vento futuro è di svariati ordini di grandezza superiore rispetto all'incertezza sul modello e, quindi, domina completamente il comportamento del sistema complessivo.

Se volessimo includere l'incertezza sul modello, che di solito assume la forma di un'incertezza parametrica, essa potrebbe, comunque, essere trasformata, in molti casi, in un disturbo additivo equivalente come dimostrato da Rawlings e Mayne in [17].

Con il modello corrente, alcuni stati, cioè gli stati correlati all'attuatore di pitch e al momento torcente del generatore, non sono affetti dalla velocità del vento e i vincoli su questi stati possono, quindi, essere implementati direttamente senza la necessità di irrobustimento.

Il concetto base del "controllore robusto tube-based" sta nell'assunzione che un disturbo non noto ma limitato stia agendo sul processo. Mentre i disturbi effettivi sono incogniti sul controllore e non possono essere inclusi nel modello di predizione, è, invece, possibile calcolare o approssimare il massimo effetto che questo disturbo può avere sulla traiettoria in uscita predetta basata sulle limitazioni del disturbo.

Basandosi su questo massimo effetto, il problema di controllo può allora essere modificato facendo sì che i vincoli siano rispettati per tutte le possibili sequenze di disturbi.

7.4.6.1: DISTURBO ADDITTIVO

Si assume che un disturbo additivo agisca sul processo. Come descritto, solo lo scostamento tra la velocità del vento ipotizzata e quella effettiva viene considerato come disturbo cosicché il modello del sistema diventa:

$$\begin{aligned} x(t+1) &= \mathcal{F}_t x(t) + \mathcal{G}_t u(t) + \mathcal{C}_t v(t) + \mathcal{C}_t v_d(t) \\ y(t) &= \mathcal{H}_t x(t) \end{aligned} \quad (7.18)$$

dove v_d è la velocità del vento non misurata.

Questa velocità del vento non misurata racchiude sia l'errore di misura che l'errore di predizione. In modo simile alle velocità del vento future, il vettore di velocità del vento non noto è definito da:

$$v_{d,t|T} = (v_{d,t} \ v_{d,t+1} \ \dots \ v_{d,t+T})^T \quad (7.19)$$

A causa dei disturbi non misurati, la traiettoria di stato effettiva differirà dalla traiettoria nominale assunta dal controllore.

La traiettoria reale è data dalla somma della risposta non forzata del sistema $x_{f,t+1|T}$ la quale è una funzione dello stato corrente e della traiettoria di disturbo nota, dell'effetto delle uscite del controllore $u_{t|T}$ e della componente della traiettoria di stato dovuta ai disturbi non noti data da:

$$x_{d,t+1|T} = \mathcal{C}_p v_{d,t|T}$$

con:

$$\mathcal{C}_p = \begin{bmatrix} \mathcal{C}_t & 0 & \dots & 0 \\ \mathcal{F}_t \mathcal{C}_t & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathcal{F}_t^{T-1} \mathcal{C}_t & \mathcal{F}_t^{T-2} \mathcal{C}_t & \dots & \mathcal{C}_t \end{bmatrix} \quad (7.20)$$

Dunque $x_{d,t+1|T}$ è una componente puramente forzata in cui il vettore di ingresso $v_{d,t|T}$ è sconosciuto.

Si avrà quindi che:

$$x_{t+1|T} = x_{t+1|T}^{nom} + x_{d,t+1|T} \quad (7.21)$$

A causa della natura dell'algoritmo RH, l'MPC reagirà alle deviazioni dello stato causate dai disturbi non misurati futuri.

L'effetto del controllo ad anello chiuso viene incluso usando la matrice di predizione modificata $\mathcal{C}_{K,p}$ tale che:

$$x_{d,t+1|T} = \mathcal{C}_{K,p} v_{d,t|T} \quad (7.22)$$

Il quale si ottiene modificando la (7.20) in modo da usare una matrice di stato che includa l'effetto della retroazione:

$$\mathcal{F}_{K_t} := \mathcal{F}_t - \mathcal{G}_t K_t \quad (7.23)$$

dove la matrice K_t è la matrice di retroazione corrispondente all'MPC non vincolato.

Infatti se sto agendo sotto l'effetto di un controllo in retroazione tramite una matrice K_t , la matrice \mathcal{F}_t va sostituita con la matrice $\mathcal{F}_{K_t} := \mathcal{F}_t - \mathcal{G}_t K_t$ dove K_t è la matrice di retroazione dallo stato ottenuta risolvendo l'MPC in assenza di disturbi.

Dal momento che la traiettoria di disturbo $v_{d,t|T}$ non è nota, sarà incognita anche la traiettoria dello stato dovuto al disturbo risultante ovvero $x_{d,t|T}$.

È comunque possibile approssimare i limiti su queste traiettorie dello stato di disturbo.

Qui, verrà fatta l'assunzione che le traiettorie di disturbo siano limitate da un massimo errore di misura:

$$v_{d,t} \leq v_d^{max} \quad (7.24)$$

e che la "massima traiettoria di stato" sia causata dal massimo errore di misura introdotto ad ogni istante durante l'orizzonte di predizione e costante sul resto dell'orizzonte di predizione

$$x_{d,t+1|T}^{max} := \max \left(\mathcal{C}_{K,p} v_{d,t|T}^j \right), \quad j = 0, \dots, T$$

$$v_{d,t+i}^j := \begin{cases} 0, & i < j \\ v_d^{max}, & i \geq j \end{cases} \quad (7.25)$$

ovvero abbiamo stimato $x_{d,t+1|T}^{max}$ nel modo seguente:

$$x_{d,t+1|T}^{max} = \max_{j \in [0, T]} \begin{bmatrix} \mathcal{C}_t & 0 & \dots & 0 \\ \mathcal{F}_t \mathcal{C}_t & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathcal{F}_t^{T-1} \mathcal{C}_t & \mathcal{F}_t^{T-2} \mathcal{C}_t & \dots & \mathcal{C}_t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ v_d^{max} \\ \vdots \\ v_d^{max} \end{bmatrix}$$

dove nel vettore $v_{d,t|T}^j$ ci sono tanti zeri quanti sono gli indici i tali che $i < j$ e tanti v_d^{max} quanti sono gli indici i tali che $i \geq j$.

La traiettoria risultante ottenuta in corrispondenza a questi limiti sullo stato è mostrata in figura 7.2(a) per lo stato x_1 . Questa assunzione può essere motivata dalla scelta di un vincolo sullo stato che riguardi unicamente la velocità del rotore e dalla conoscenza del fatto che la legge ingresso-uscita che lega la velocità del vento alla velocità del rotore ha la caratteristica di un sistema del primo ordine passa basso.

Se si considerano vincoli diversi sullo stato, approssimare le traiettorie di stato corrispondenti al peggior disturbo possibile diventa più complicato.

Un modo per approssimare le traiettorie di stato corrispondenti al peggior disturbo possibile usa le simulazioni Monte Carlo.

Il comportamento del sistema viene simulato per un gran numero di potenziali traiettorie di disturbo e la traiettoria di stato corrispondente al peggior disturbo possibile viene scelta in modo da includere tutte o la maggior parte delle traiettorie simulate. Questo è illustrato nella figura 7.2(b)

dove sono tracciate 200 traiettorie di x_1 ottenute dalle simulazioni con 200 traiettorie di disturbo casualmente scelte e si può osservare in tale figura che tutte le traiettorie di stato rientrano nei limiti assunti.

Per la generazione delle traiettorie di disturbo, si era assunto soltanto che valesse (7.24).

In generale, più condizioni verranno poste sulle traiettorie potenziali di disturbo come i limiti sulla velocità o come ipotesi sul contenuto in frequenza, più stringenti possono essere scelte le traiettorie di stato limitanti, il che sarà essenziale per l'imposizione dei vincoli sugli stati più oscillatori come il moto della torre.

Sotto questa assunzione, si può facilmente vedere che tutte le possibili traiettorie dello stato per effetto del disturbo cadranno entro i limiti inferiori e superiori assunti:

$$-x_{d,t+1|T}^{max} \leq x_{d,t+1|T} \leq x_{d,t+1|T}^{max} \quad (7.26)$$

La traiettoria di stato corrispondente al peggior disturbo possibile definisce allora anche il massimo scostamento tra la traiettoria di stato nominale e quella di stato effettiva:

$$\begin{aligned} x_{t+1|T} &= x_{t+1|T}^{nom} + x_{d,t+1|T} \\ x_{t+1|T}^{nom} - x_{d,t+1|T}^{max} &< x_{t+1|T} < x_{t+1|T}^{nom} + x_{d,t+1|T}^{max} \end{aligned} \quad (7.27)$$

La traiettoria di stato corrispondente al peggior disturbo possibile può essere trovata a partire dalla definizione di un tubo limitante all'esterno che racchiuda l'insieme di tutte le possibili traiettorie di stato.

Questo tubo è centrato sulla traiettoria nominale come mostrato in figura 7.3.

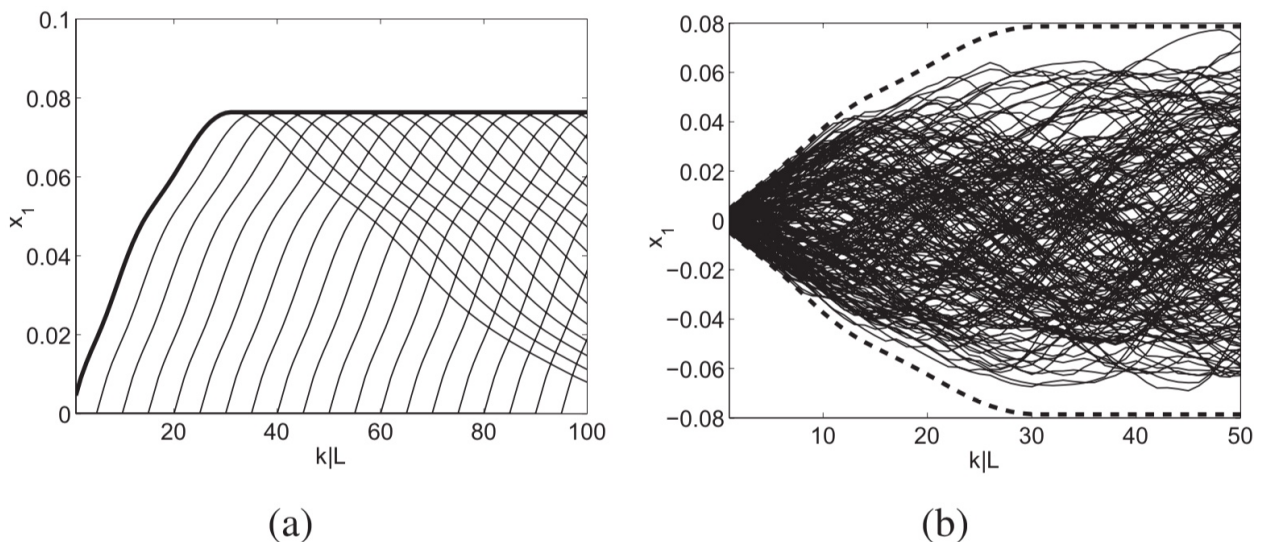
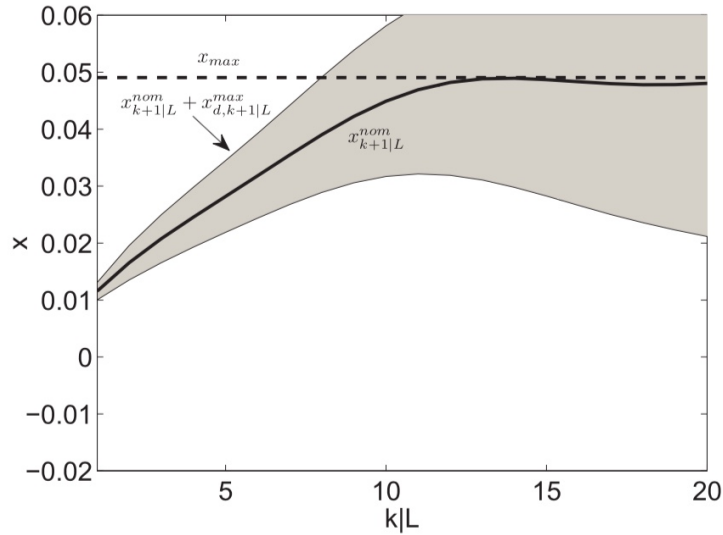
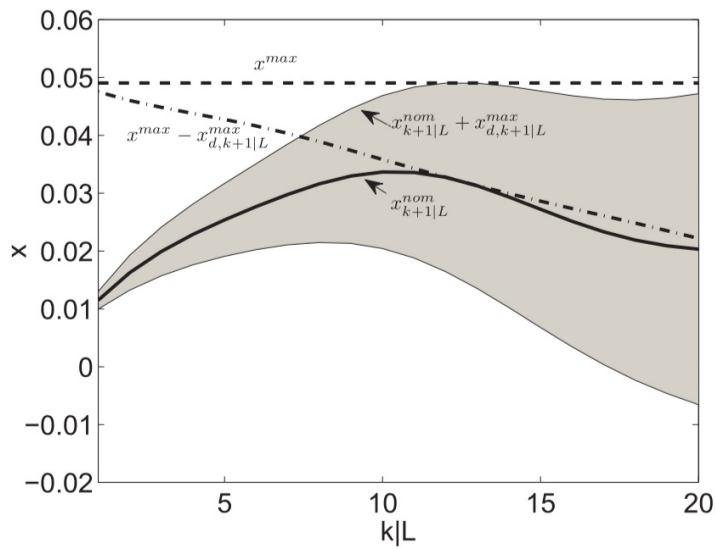


Figura 7.2: Limiti approssimati sulle traiettorie dello stato di disturbo:

- (a) le traiettorie dello stato x_1 (linee sottili) ottenute a partire dall'introduzione di un errore di misurazione a differenti istanti e traiettoria limitante x_1 (linea spessa);
- (b) traiettorie di stato x_1 (linea solida) ottenute a partire da da 200 traiettorie di disturbo casuali e traiettoria limitante (linea tratteggiata)



(a)



(b)

Figura 7.3: Effetto del vincolo basato sul tubo stringente sulla traiettoria dello stato predetto:
 (a) senza vincoli stringenti
 (b) con vincoli stringenti

7.4.6.2: MODIFICA DEL CONTROLLORE

L'obiettivo principale del controllore robusto è quello di garantire che i vincoli dello stato non siano violati in presenza di disturbi non noti.

In altre parole, è necessario assicurare che la traiettoria effettiva $x_{t+1|T}$ non superi il valore massimo x^{max} qualunque sia la sequenza di disturbi non noti:

$$x_{t+1|T} = x_{t+1|T}^{nom} + x_{d,t+1|T} < x^{max} \quad (7.28)$$

Comunque, dal momento che nel calcolo della traiettoria nominale si considerano solo i disturbi misurati, sarà assicurato solo che:

$$x_{t+1|T}^{nom} < x^{max} \quad (7.29)$$

Inoltre, si può chiaramente vedere che, se il limite superiore dei vincoli per il problema di controllo nominale viene ristretto a $x^{max} - x_{d,t+1|T}^{max}$ allora si avrà che:

$$\begin{aligned} x_{t+1|T}^{nom} &< x^{max} - x_{d,t+1|T}^{max} \\ \Rightarrow x_{t+1|T} &= x_{t+1|T}^{nom} + x_{d,t+1|T} < x^{max} \end{aligned} \quad (7.30)$$

come $x_{d,t+1|T} < x_{d,t+1|T}^{max}$ per tutte le possibili sequenze di disturbo $v_{d,t|T}$.

Dunque se esiste un limite superiore $x_{t+1|T}^{nom} < x^{max}$, basta assicurarsi che:

$$x_{t+1|T}^{nom} < x^{max} - x_{d,t+1|T}^{max}$$

Quanto appena detto è illustrato nella figura 7.3.

In figura 7.3(a) non viene usato un vincolo stringente. Mentre la traiettoria nominale non oltrepassa il limite sullo stato, parti del tubo attorno alle traiettorie di stato effettive giacciono fuori della zona dei valori di stato ammessi.

In figura 7.3(b), i vincoli sono irrobustiti. Questo fa sì che la traiettoria nominale abbia una certa distanza dal limite di stato in modo tale che l'intero tubo delle possibili traiettorie reali giaccia all'interno dell'intervallo dei valori ammessi.

Quando si calcolano le traiettorie di stato dovute ai disturbi tramite l'equazione (7.22), si assume che sul sistema agisca un disturbo non misurato.

Tuttavia usare l'equazione (7.22) è possibile solo se l'azione di controllo addizionale provocata dal disturbo non noto non comporta che il controllore operi ai limiti dei vincoli del controllo. Perciò, non solo i vincoli sullo stato ma anche i vincoli sul controllo per il problema di controllo nominale necessitano di essere irrobustiti ovvero, se esistono limiti sull'ingresso $u_{t+1|T}^{min} \leq u_{t+1|T} \leq u_{t+1|T}^{max}$, essi devono essere irrobustiti cosicché, anche nel caso in cui si incorrerà nella traiettoria di stato corrispondente al peggior disturbo possibile, l'azione di controllo complessiva agirà entro i limiti del controllore dati da:

$$u_{t+1|T}^{min} + Kx_{d,t+1|T}^{max} \leq u_{t+1|T} \leq u_{t+1|T}^{max} - Kx_{d,t+1|T}^{max} \quad (7.31)$$

per la quale si rimanda alla fonte [7] citata in bibliografia.

Questo può essere visto come la richiesta al controllore di tenere un certo margine di controllo cosa che può essere usata per gestire disturbi non previsti. Quanto margine di controllo andrà usato dipenderà dai limiti assunti. Migliori saranno le misure della velocità del vento corrente e potenzialmente di quelle future, più al controllore sarà effettivamente concesso di operare vicino ai suoi limiti nel calcolo della traiettoria di controllo ottimo. Si dovrebbe notare che il vincolo sull'ingresso nel primo istante temporale, ovvero su $u(t)$, non è interessato da ciò. Dal momento che solo questo primo campione temporale sarà effettivamente applicato al processo, questo tipo di vincolo robusto non limiterà l'abilità del controllore di operare ai suoi limiti. Esso diventerà solo più efficace rispetto a potenziali disturbi in istanti futuri.

Bisogna, inoltre, notare che la massima traiettoria di disturbo, che dipende dal modello del sistema linearizzato, necessiterà di essere aggiornata ad ogni istante temporale del controllore.

7.4.6.3: DISTURBO NON MISURATO

La scelta dei limiti sul disturbo non misurato deve compensare sia l'errore di stima che quello di misura e, possibilmente, anche l'errore introdotto dall'assunzione (nel caso "non preview") di una velocità del vento costante (pari al valore all'istante corrente considerato) lungo l'orizzonte di predizione.

In generale non è possibile determinare i vincoli superiori sul disturbo non misurato per tutti gli intervalli operativi e per tutte le condizioni del vento.

Inoltre è probabilmente troppo cautelativo usare, nella realtà, questo peggior disturbo non misurato dal momento che il relativo controllore, anche sotto normali condizioni operative, reagirebbe in modo troppo cauto non garantendo la migliore prestazione.

I valori che specificano il disturbo non misurato assunto dovrebbero, invece, essere visti come un parametro addizionale di messa a punto. Essi, in via implicita, determinano, infatti, la distanza di sicurezza che il controllore deve mantenere sugli effettivi "limiti non misurati" delle variabili di stato.

Per esempio, usando valori grandi, la probabilità che accada una violazione della velocità massima può essere ridotta ma, allo stesso tempo per via dell'ampia zona di sicurezza, il controllore deve tenere le variazioni della velocità del rotore in un intervallo più piccolo il quale richiederà azioni di pitch maggiori e aumenterà i carichi sulla torre.

7.4.6.4: ALGORITMO

Per riassumere la progettazione del controllore, i passi che il controllore deve compiere ad ogni ciclo sono i seguenti:

- 1) ottenere una misurazione o una stima della velocità del vento a flusso libero v_0 e calcolare il punto di linearizzazione in accordo con (7.14);
- 2) linearizzare e discretizzare (7.1) e (7.3) per ottenere delle matrici lineari nello spazio di stato;
- 3) risolvere l'equazione algebrica di Riccati discreta per calcolare il termine di penalizzazione finale V_f
- 4) calcolare le traiettorie per i vincoli sullo stato irrobustito e per i vincoli sul controllo;
- 5) mettere insieme il problema quadratico (7.17) e risolverlo per u_{1T} ;
- 6) applicare il primo ingresso $u(t)$ di u_{1T} al processo e ricominciare con questo ciclo.

7.5: RISULTATI DELLE SIMULAZIONI

Per analizzare le prestazioni del controllore illustrato, si riportano gli esiti delle simulazioni condotte da Körber e King in [7] nelle quali il comportamento della turbina eolica è stato simulato in diverse condizioni ed è stato confrontato con le strategie di controllo base.

Il modello della turbina usata è dato dalla versione a terra della turbina NREL di base ed è stato usato il tool di simulazione aeroelastica FAST.

In modo analogo a quanto descritto nel capitolo 6, i parametri strutturali del modello semplificato introdotti nel paragrafo 7.3 sono stati ottenuti dall'analisi ottimale delle risposte ad anello chiuso per degli ingressi a gradino del vento sfruttando un semplice e veloce controllore PI del pitch. I valori numerici ottenuti sono riportati nella tabella 7.1.

Dal momento che FAST non include un modello di attuatore del pitch, esso viene integrato con il medesimo modello del secondo ordine usato per la progettazione del controllo. Il controllore usa una velocità di campionamento di 10 Hz e usa un orizzonte di predizione di 5s. Si assume che siano misurabili soltanto l'angolo di pitch, il momento torcente del generatore, la velocità del rotore e l'accelerazione della torre. Tutti gli altri stati vengono stimati usando un filtro di Kalman esteso. Nel caso "preview" si assumerà anche che la velocità del vento corrente e futura sia nota senza errori di misura. Anche nel caso "non preview" la velocità del vento verrà stimata usando un filtro esteso di Kalman. Per maggiori delucidazioni su questi argomenti si rimanda alla fonte [20] riportata in bibliografia.

Per i vincoli robusti, invece, si assume che il disturbo non misurato abbia $v_d^{max} = 3.0 \text{ m/s}$ nel caso "non preview" e $v_d^{max} = 0.1 \text{ m/s}$ nel caso "preview". Dal momento che nel caso "preview" si assume di misurare perfettamente la velocità del vento, non sarà incluso nessun disturbo non misurato. Comunque sia, si troverà che includere un piccolo disturbo aiuterà nella gestione del vincolo. Questo è dovuto agli errori di modellazione e di stima presenti anche in questo caso. Il limite di velocità massima è impostato in modo tale che ecceda del 10% la velocità del rotore ovvero $x_1^{max} = 1.1\omega_0$ e la velocità di pitch e del momento torcente sono vincolate rispettivamente ai seguenti valori: $u_1^{max} = 10 \text{ \%}/sM_{G,0}$ e $u_2^{max} = 10^\circ/s$.

Infine, si considererà lo stato che corrisponde all'angolo di pitch sempre maggiore di 0° .

Rotor	$J_r = 40.51 \times 10^6 \text{ kgm}^2$
Pitch actuator	$\omega_{p,0} = 6 \text{ rad/s}, \zeta_p = 0.7$
Structural model	$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & 1.44 \times 10^{-3} \cdot \omega_{T,0}^2 \\ 21.7 \times 10^{-3} \cdot \omega_{0,b}^2 & 1 \end{bmatrix}$ $\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 2\omega_{T,0}\zeta_T & 0 \\ 0 & 2\omega_{B,0}\zeta_B \end{bmatrix}$ $\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \omega_{T,0}^2 & 0 \\ 0 & \omega_{B,0}^2 \end{bmatrix}, \mathbf{F} = \begin{bmatrix} 172.3 \times 10^{-9} \cdot \omega_{T,0}^2 \\ 2.2 \times 10^{-6} \cdot \omega_{B,0}^2 \end{bmatrix}$
with	$\omega_{T,0} = 2.04 \text{ rad/s}, \zeta_T = 0.013$ $\omega_{B,0} = 4.40 \text{ rad/s}, \zeta_B = 0.005$

Tabella 7.1: Valori numerici dei parametri usati per il modello semplificato della turbina

7.5.1: PRODUZIONE DI POTENZA NOMINALE

Per la simulazione delle normali condizioni operative, la turbina sarà soggetta a campi di vento stocastici con una data velocità media del vento e una data intensità di turbolenza.

L'obiettivo principale del controllore è quello di minimizzare le deviazioni della velocità del rotore dal punto operativo e minimizzare i carichi alla base della torre e l'attività di pitch.

La figura 7.4 mostra i risultati di una simulazione in condizione turbolente per una velocità del vento media di 20 m/s e per un'intensità di turbolenza pari al 15%.

Una turbolenza più forte è stata scelta per illustrare l'effetto dei vincoli sullo stato dal momento che, sotto condizioni più standard, la velocità del rotore non raggiunge il limite di velocità massimo indipendentemente dal controllore usato. In questo caso sono stati confrontati quattro differenti controllori: un classico controllore PI, un controllore "MPC non preview" con e senza i vincoli sullo stato e un controllore "MPC preview" vincolato. Il controllore PI è stato impostato in modo da fornire un livello simile di controllo della velocità del vento così come il caso dell'MPC non vincolato. Nel grafico 7.4 si può vedere che entrambi questi due controllori non sono in grado di mantenere la velocità del rotore al di sotto del limite di velocità massima.

Per la maggior parte del tempo, le prestazioni dei due "MPC non preview" è identica. Questo è un risultato atteso dal momento che il vincolo non sarà attivo in determinate situazioni e non influirà nel caso in cui non ci sia nessuna possibilità di superare il limite di velocità massima. Bisogna notare anche che la gestione del vincolo sullo stato non è esatta. Per alcune variazioni della velocità del vento, per le quali anche il controllore non vincolato proverà a limitare la velocità del rotore sotto il limite massimo, il controllore vincolato ridurrà, ancora di più, la velocità del rotore. Questo è dovuto alla scelta dei valori per il disturbo non misurato. Il controllore ridurrà la velocità in modo tale da essere preparato nel caso di una raffica di vento addizionale in arrivo e risulterà avere un livello complessivo leggermente più alto per il controllo della velocità e l'associata attività di pitch (per i quali si veda la tabella 7.2).

Infine, il "controllore preview" sarà in grado di mantenere la velocità del rotore maggiormente in prossimità del punto operativo cosicché non si rischierà di violare il vincolo di velocità del rotore. In questo caso, le variazioni di velocità possono essere ridotte progettando il controllore in modo più aggressivo, cosa vera per quasi tutti i controllori. Tuttavia usare un controllore così aggressivo influenzerà negativamente la prestazione del controllore rispetto, ad esempio, ai carichi sulla torre anche quando non ci sarà pericolo di superare la soglia della velocità massima.

Quindi, al fine di fornire un confronto più sistematico tra i quattro controllori, la tabella 7.2 confronta le chiavi metriche delle prestazioni quali la velocità di pitch $\dot{\theta}$, il carico di danno equivalente DEL per il momento flettente alla base della torre TM_{yt} e la velocità angolare del rotore ω .

Il controllore PI è stato progettato per fornire un livello di controllo della velocità simile al caso "MPC non preview". Di conseguenza, la deviazione standard della velocità del rotore per il controllore PI è molto simile ai valori ottenuti usando i due "MPC non preview". In altri termini, i due "MPC non preview" conducono a carichi sulla torre più bassi. Questa riduzione è dovuta soprattutto alla struttura in retroazione dallo stato dell'MPC. Usando un "controllo preview", i carichi sulla torre possono essere ridotti ulteriormente. Si dovrebbe notare anche che il "controllo preview" raggiunge carichi sulla torre più bassi e porta ad una più fine determinazione del punto operativo di velocità senza usare una maggiore attività di pitch rendendo il controllore più efficiente invece che più aggressivo.

Infine, la tabella 7.2 conferma le osservazioni tratte dalla figura 7.4 ovvero conferma il fatto che aggiungere un vincolo sullo stato, dato dalla velocità del rotore, ha un impatto molto ridotto sulle prestazioni del controllore complessivo ma aiuta significativamente nel mantenere la velocità del rotore al di sotto del limite di velocità massimo. Il fatto che i massimi valori della velocità del rotore vengano ridotti senza una riduzione della deviazione standard pone maggiormente l'attenzione sul fatto che un MPC lineare con vincoli lineari è, in pratica, un controllore non lineare.

	$\text{std} \left(\frac{\omega_r}{\omega_0} \right)$	$\text{std} \left(\frac{\dot{\theta}}{\theta_0} \right)$	$\text{DEL} \left(\frac{TM_{yt}}{TM_{yt,0}} \right)$	$\text{max} \left(\frac{\omega_r}{\omega_0} \right)$
PI	0.038	0.019	0.782	1.121
Unconstrained MPC	0.038	0.026	0.596	1.117
Constrained MPC	0.036	0.027	0.605	1.092
Constrained MPC + preview	0.010	0.020	0.458	1.035

Tabella 7.2: Confronto delle prestazioni metriche per simulazioni di 10 min in condizioni turbolente con una velocità del vento media pari a 20 m/s e con un'intensità di turbolenza del 15%

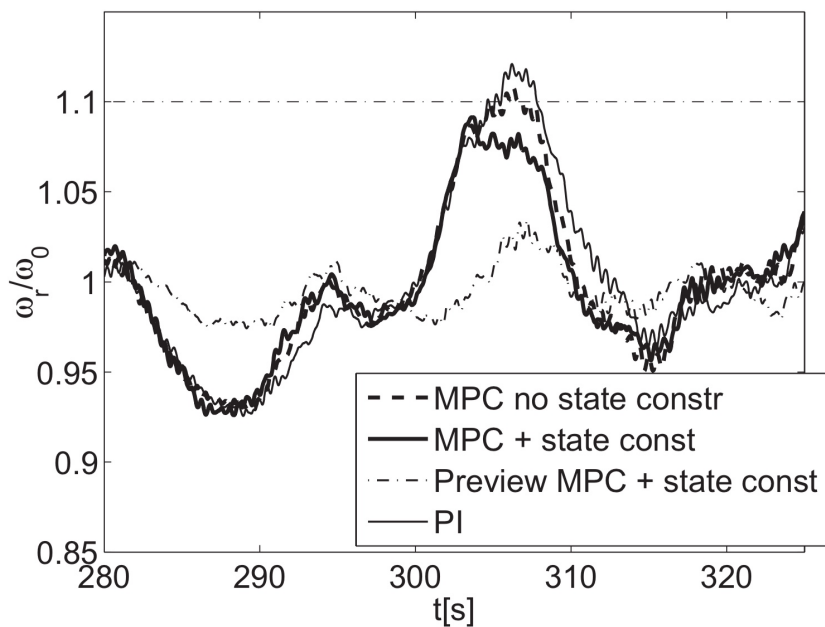


Figura 7.4: Velocità del rotore ottenuta con una simulazione con vento turbolento nel caso di quattro diversi controllori

7.5.2: RAFFICHE DI VENTO

Nel caso di operazioni in condizioni turbolente (le quali rappresentano le normali condizioni operative di produzione di potenza) le prestazioni del controllore durante i casi deterministici di raffiche di vento sono cruciali per la progettazione della turbina eolica. In questo caso, il maggior obiettivo del controllore sarà di ridurre il massimo carico agente durante questi eventi e di mantenere potenzialmente la turbina entro i limiti della zona operativa cosicché non si debba ricorrere al suo spegnimento. La figura 7.5 confronta i quattro controllori, che sono già stati valutati, per un evento di raffiche di vento del tipo “cappello messicano”. La tabella 7.3 mostra i valori massimi risultanti.

Si può vedere che sia il caso MPC non vincolato che il controllore PI portano alla violazione del vincolo di velocità massima. L'MPC vincolato riesce invece a tenere la velocità del rotore al di sotto di questo limite. Se si usa il “preview control”, la turbina inizierà a cambiare l'angolo di pitch molto prima e le variazioni della velocità saranno ridotte di molto cosicché non ci sarà nessun pericolo di superamento della velocità massima.

Confrontando i massimi momenti flettenti risultanti alla base della torre si possono trarre alcune osservazioni.

Come ci si aspettava, il controllore “preview” ridurrà anche il carico sulla torre. I due “MPC non preview” presenteranno carichi massimi sulla torre praticamente identici dal momento che il massimo si verificherà appena il controllore inizierà a vedere il vincolo di stato e il comportamento dei controllori inizierà, quindi, a diversificarsi. In questo caso, usando un vincolo sullo stato, non verrà aumentato il carico sebbene il controllore reagisca in modo molto aggressivo.

Si può, quindi, concludere che, per il caso dato dalle raffiche di vento, l'“MPC preview” fornirà miglioramenti significativi delle prestazioni. Tuttavia, anche senza “misurazioni preview”, l'MPC fornirà benefici in quanto, usando i vincoli sullo stato, si potranno evitare spegnimenti non necessari. Grazie alla sua natura multivariabile e alla sua formulazione fatta tramite il controllo ottimo, l'MPC fornirà prestazioni migliori rispetto a quelle ottenibili con un semplice controllore, anche se i vincoli sullo stato saranno ignorati.

Si dovrebbe notare, inoltre, che usare l'MPC vincolato sullo stato, introdotto in questo capitolo, non può garantire di evitare i fallimenti dovuti al superamento della soglia di velocità massima in tutti i casi di raffiche di vento. Una raffica, infatti, potrà essere così forte da non permettere l'esistenza di soluzioni fattibili: ad esempio anche il funzionamento con i vincoli sullo stato non può impedire al rotore di violare tale limite.

In più, soprattutto nel caso di raffiche di vento, non è possibile includere l'intera velocità del vento futura nel disturbo non misurato assunto per il calcolo del tubo. Nonostante la gestione di un vincolo esatto sullo stato non sia, comunque, possibile con l'“MPC tube-based” qui considerato, verrà di molto ridotta la probabilità di superare il limite dato dalla velocità massima e verranno aumentate le prestazioni del controllore complessive come risulta evidente, anche, dalla valutazione delle prestazioni nel caso di condizioni turbolente.

	$\max \left(\frac{\omega_r}{\omega_0} \right)$	$\max \left(\frac{\theta}{\theta_0} \right)$	$\max \left(\frac{TM_{yt}}{TM_{yt,0}} \right)$
PI	1.169	1.50	2.79
Unconstrained MPC	1.167	1.75	2.81
Constrained MPC	1.098	2.29	2.71
Constrained MPC + preview	1.011	1.47	2.17

Tabella 7.3: Massimi valori della velocità del rotore, dell'angolo di pitch e del momento alla base della torre durante la simulazione di una raffica di vento

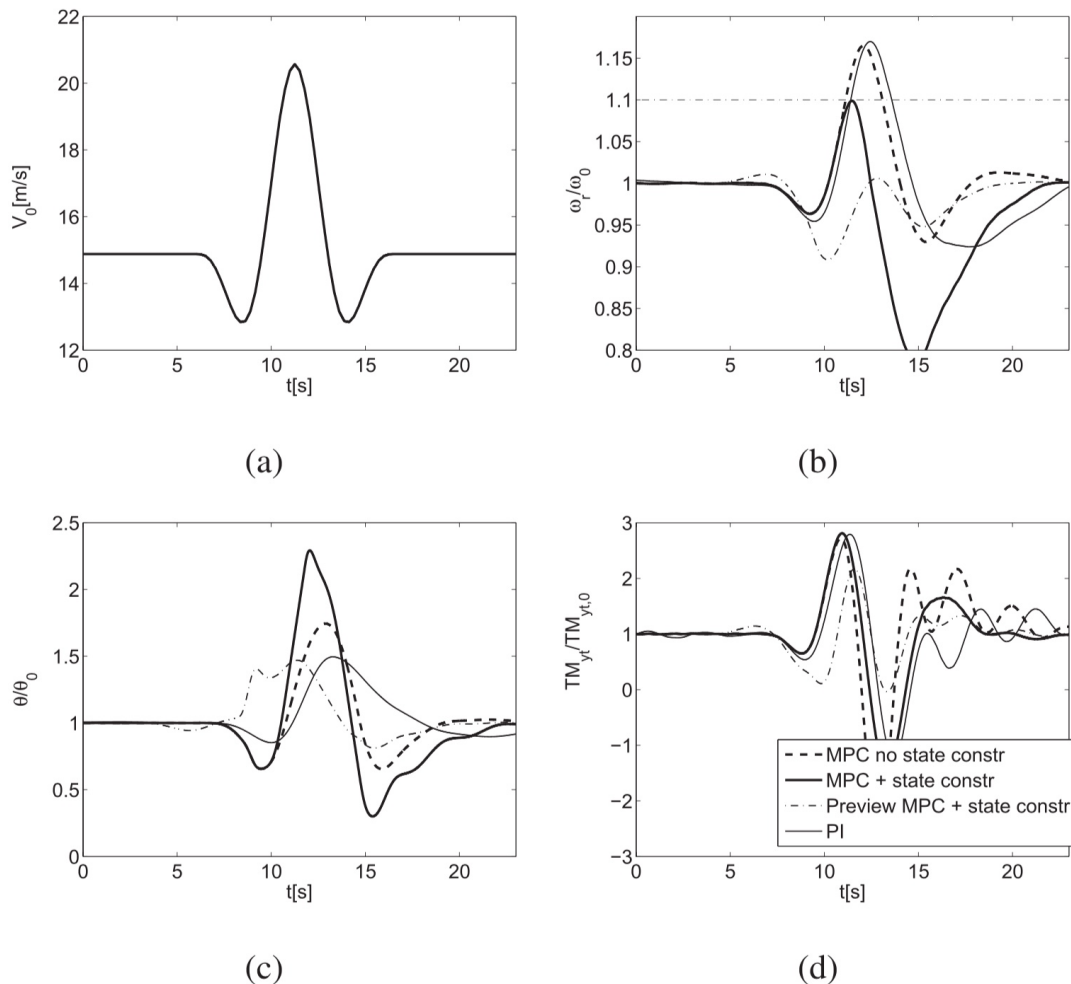


Figura 7.5: Confronto di differenti schemi di controllo per raffiche di vento di tipo cappello messicano ad una velocità del vento media di 15 m/s: a) vento, b) velocità del rotore, c) angolo di pitch, d) momento flettente alla base della torre

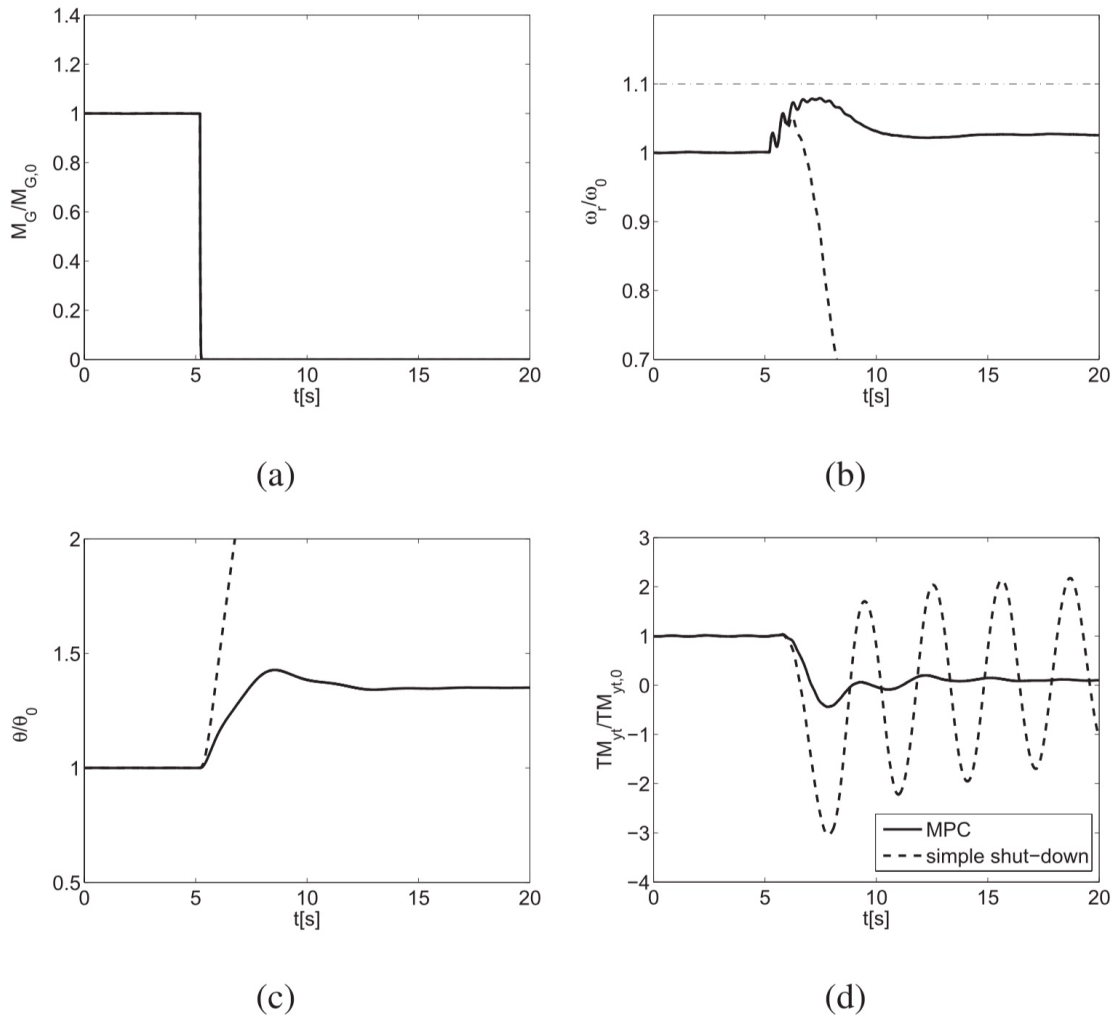


Figura 7.6: Confronto tra l'MPC e una semplice procedura di spegnimento durante un evento di perdita nella griglia per una velocità del vento di 17 m/s: a) vento, b) velocità del rotore, c) angolo di pitch, d) momento flettente alla base della torre

7.5.3: PERDITA NELLA GRIGLIA

La maggior parte dello sviluppo dei controlli per le turbine eoliche è incentrato sul controllo durante la produzione normale di potenza o durante i casi di raffiche di vento deterministiche. L'MPC può, però, essere usato negli eventi di "fallimento". Uno di questi eventi, molto importante per la progettazione di una turbina eolica, è il così detto evento di "perdita nella griglia". A causa di un errore nel circuito elettrico a cui è connessa la turbina, bisognerà disconnettere il generatore dalla griglia e la turbina perderà la capacità di produrre il momento torcente agente contro il momento aerodinamico torcente prodotto dal rotore. Sebbene questo tipo di eventi sia gestito soprattutto a livello di unità di controllo del convertitore, essi pongono anche una sfida per il controllore a livello della turbina e possono portare a carichi meccanici ingenti. Se si incorre in un tale evento, la maggior parte delle turbine sarà semplicemente spenta. Volendo ridurre i carichi durante tali eventi, è comunque preferibile mantenere un controllo ad anello chiuso della turbina anche se il momento del generatore non può più essere usato come attuatore.

Al fine di dimostrare quanto i vincoli dell'MPC sullo stato possano essere usati in un evento di spegnimento, è stato simulato in [7] un evento di perdita nella griglia una volta con l'MPC e una volta con la velocità di pitch fissata ad un valore di 10 deg/s. Una volta che verrà riconosciuta la

perdita nella griglia, lo stato dato dal momento torcente del generatore, i limiti sulla derivata del momento torcente comandato e i pesi usati sull'uscita data dalla potenza saranno imposti pari a zero.

Il controllore non proverà a mantenere la velocità raggiunta senza il momento torcente del generatore e inizierà, perciò, ad aumentare l'angolo di pitch immediatamente. Dal momento che l'MPC non vincolato non è in grado di gestire questa situazione, è stato escluso dal confronto tra i diversi metodi di controllo. Inoltre, dal momento che la velocità del vento, sotto opportune ipotesi, non cambia durante questa situazione, il "preview control" non ha effetto cosicché l'"MPC preview" e l'"MPC non preview" saranno identici e sarà considerato, ora, solo un controllore MPC con un singolo vincolo sullo stato.

Come si può vedere nella figura 7.6, usando l'MPC, la massima velocità del rotore durante l'evento aumenta leggermente oltre il livello ottenibile con semplici spegnimenti ma rimane comunque sotto il vincolo. In altri termini, un aumento più rapido dell'angolo di pitch nel caso del semplice spegnimento causa forti vibrazioni nella torre mentre, quando l'MPC viene usato, il momento flettente alla base della torre non aumenta oltre il suo valore stazionario. Di sicuro, non tutto questo guadagno di prestazione può essere attribuito al solo utilizzo dell'MPC. Più probabilmente è dovuto all'uso di un controllore ad anello chiuso. Comunque sia, l'obiettivo principale di tale controllore di spegnimento ad anello chiuso è di mantenere la velocità del rotore e possibilmente gli stati addizionali (come la deflessione della torre) sotto i livelli di sicurezza critici per un ampio intervallo di condizioni operative e scenari critici (come ad esempio i differenti livelli di momento torcente disponibili), obiettivo difficile da raggiungere usando controllori non MPC.

7.5.4: CAPACITÀ DURANTE IL FUNZIONAMENTO

Nel grafico di figura 7.6, l'MPC è impostato in modo tale da mantenere la velocità del rotore costante. Nel caso di un vero danno alla griglia, la turbina dovrebbe essere fermata dal momento che non produrrà più alcuna potenza. Questo può essere facilmente ottenuto rallentando il punto operativo della velocità nell'MPC ad uno specifico valore dopo che le dinamiche iniziali siano scomparse, operando un'azione di spegnimento più graduale. Comunque sia, controllando la velocità nel punto operativo dopo la perdita nella griglia, si ha anche il vantaggio che, nel caso in cui la griglia sia disponibile nuovamente, la turbina può iniziare a produrre potenza immediatamente. Inoltre, mentre la progettazione della turbina di solito considera una piena perdita di carico nella griglia, gli eventi nella griglia reale sono più complessi e spesso il convertitore è solo obbligato a lavorare a ridotti livelli del momento torcente per pochi secondi. Il tipo di MPC descritto in questo capitolo può anche essere usato per far fronte a questo tipo di eventi e le simulazioni di perdita della griglia, mostrate in figura 7.6, dovrebbero essere viste come il caso estremo di un evento, durante il funzionamento, in cui la turbina necessita di garantire la velocità senza produrre potenza per un lungo periodo di tempo. L'MPC potrà controllare la turbina in modo concorde all'informazione, fornita dall'unità di controllo del convertitore, di quanto momento torcente sia disponibile senza la necessità di spegnimenti nel caso di determinate combinazioni di vincoli sulla potenza e sul momento torcente e dei punti operativi.

7.6: CONCLUSIONI

In quest'ultimo capitolo è stata presentata un'ulteriore applicazione dell'MPC al problema del controllo delle turbine eoliche.

È stato mostrato come l'MPC sia adatto ad integrare nella formulazione del controllo la conoscenza delle velocità del vento future ottenute ad esempio tramite tecniche LIDAR. L'MPC risulta, infatti, estremamente adatto per il "preview control" come si può vedere combinando in un singolo controllore il controllo in avanti e in retroazione in modo tale che tutte le altre caratteristiche dell'MPC, quali, ad esempio, la gestione dei vincoli e la formulazione del controllo ottimo, siano applicabili anche al controllore combinato.

Inoltre è stata analizzata non solo l'inclusione nell'MPC dei vincoli sulle variabili di controllo ma anche dei vincoli sullo stato.

È stato spiegato come includere i vincoli sullo stato richieda un'irrobustimento del controllore dal momento che la velocità del vento futura agisce come un disturbo non noto sul sistema.

Si è, quindi, seguito il metodo per l'irrobustimento basato sull'approccio a "controllo robusto tube-based" presentato da Rawlings e Mayne in [17] includendo, esplicitamente nella formulazione del controllo, il limite di soglia massima della velocità ammissibile per la turbina. Avendo dimostrato l'uso di un unico vincolo sullo stato, il metodo presentato potrebbe essere ampliato includendo altri vincoli addizionali tramite l'approssimazione del tubo di stato limite in modo da rendere tale approccio più competitivo.

Le prestazioni dell'MPC presentato sono state valutate in [7] usando delle simulazioni per un modello aeroelastico a pieno ordine per una turbina eolica, sia nel caso di produzione di potenza nominale sia nel caso di raffiche di vento sia nel caso di perdite di carico nella griglia. I risultati hanno confermato che il "preview control" fornisce un miglioramento significativo delle prestazioni e può condurre alla sostanziale riduzione dei carichi sulla turbina.

È stato anche mostrato come l'MPC con vincoli sullo stato fornisca, in modo particolare, benefici anche nel caso in cui non siano disponibili informazioni sulla velocità del vento in arrivo.

È stato dimostrato che, usando vincoli sullo stato e modificando in modo appropriato la funzione obiettivo del controllore, l'MPC è in grado di gestire non solo le operazioni nominali delle turbine ma anche casi particolari quali raffiche di vento estreme e casi di "perdita nella griglia".

Questo è un primo passo verso un controllo delle turbine eoliche "tollerante agli imprevisti" dove un singolo MPC viene usato per gestire diverse condizioni e scenari che una turbina eolica deve essere in grado di affrontare. Questo tipo di controllore non si concentrerà solo sul ridurre i carichi meccanici della turbina nelle condizioni operative nominali ma minimizzerà anche i carichi durante tali "eventi speciali". Includendo la probabilità di eventi imprevisti direttamente nella progettazione del controllore tramite la scelta dei vincoli sullo stato, si può contribuire a migliorare l'affidabilità dell'intera turbina riuscendo ad allungarne la vita operativa e riducendo gli spegnimenti non necessari.

Si può, perciò, concludere che eventuali studi futuri sull'MPC per le turbine eoliche non dovrebbero limitarsi al "preview control" ma dovrebbero analizzare anche i benefici che le caratteristiche intrinseche dell'MPC stesso possono offrire come, ad esempio, l'inclusione esplicita dei vincoli sullo stato nel controllore.

APPENDICE

A.1: RISPOSTA IMPULSIVA

Consideriamo un sistema SISO descritto dal seguente modello di stato:

$$\begin{aligned}x(t+1) &= Fx(t) + Gu(t) \\ y(t) &= Hx(t) + Du(t)\end{aligned}$$

La matrice di trasferimento sarà quindi:

$$W(z) = H(zI - F)^{-1}G + D = \mathcal{Z}[w(t)] \quad (\text{A.1})$$

dove con $w(t)$ indichiamo la RISPOSTA IMPULSIVA.

RISPOSTA IMPULSIVA:

Considero le seguenti condizioni:

$$\begin{cases} u(t) = \delta(t) : \text{ DELTA di KRONECKER} \\ x(0) = 0 \end{cases}$$

dove $\delta(t)$ in questo caso non è il Delta di Dirac dei sistemi SISO ma il Delta di Kronecker dato da:

$$\delta(t) = \begin{cases} 1 & t = 0 \\ 0 & t \neq 0, \quad t \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \longrightarrow \quad x(1) &= Fx(0) + Gu(0) = G \\ x(2) &= Fx(1) + Gu(1) = FG \quad \text{poiché } u(1) = \delta(1) \text{ e } \delta(1) = 0 \\ &\vdots \\ x(t) &= F^{t-1}G \\ y(t) &= HF^{t-1}G \quad \text{con } t \geq 1 \\ y(0) &= Hx(0) + Du(0) = D \quad \text{poiché } u(0) = \delta(0) = 1 \end{aligned}$$

La risposta dello stato all'impulso $u(t) = \delta(t)$ è:

$$x(t) = F^{t-1}G\delta_{-1}(t-1)$$

Invece la risposta impulsiva (ovvero la risposta forzata dell'uscita all'impulso $u(t) = \delta(t)$) è:

$$y(t) = w(t) = D\delta(t) + HF^{t-1}G\delta_{-1}(t-1)$$

A.2: RISPOSTA AL GRADINO

SISTEMA CONTINUO:

Sia la RISPOSTA IMPULSIVA: $w(t), t \in \mathbb{R}$

La RISPOSTA AL GRADINO è la risposta forzata all'ingresso: $u(t) = \delta_{-1}(t)$

ovvero il seguente prodotto di convoluzione continua:

$$w_{-1}(t) = [w * \delta_{-1}](t) = \int_{-\infty}^{+\infty} w(\tau) \delta_{-1}(t - \tau) d\tau = \int_0^t w(\tau) d\tau$$

SISTEMA DISCRETO:

Sia la RISPOSTA IMPULSIVA: $w(t), t \in \mathbb{Z}$

La RISPOSTA AL GRADINO è la risposta forzata all'ingresso: $u(t) = \delta_{-1}(t) = 1, \forall t \geq 0$
ovvero, analogamente al caso continuo, si avrà:

$$\begin{aligned} w_{-1}(0) &= w(0) \cdot 1 \\ w_{-1}(1) &= w(0) \cdot 1 + w(1) \cdot 1 \\ &\dots \\ w_{-1}(t) &= \sum_{i=0}^t w(i) \end{aligned}$$

A.3: MODELLI ARMA

Il modello ARMA è l'equivalente a tempo discreto del classico modello I/O alle equazioni differenziali dei sistemi SISO dove:

Avendo quindi:

$$y(t) + a_1y(t-1) + \dots + a_ny(t-n) = b_0u(t) + b_1u(t-1) + \dots + b_nu(t-n)$$

tramite la trasformata \mathcal{Z} si ottiene:

$$Y(z) + a_1z^{-1}Y(z) + \dots + a_nz^{-n}Y(z) = b_0U(z) + b_1z^{-1}U(z) + \dots + b_nz^{-n}U(z)$$

Dunque:

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{b_0 + b_1z^{-1} + \dots + b_nz^{-n}}{1 + a_1z^{-1} + \dots + a_nz^{-n}}$$

ESEMPIO:

Si abbia:

$$y(t+1) = -a_{n-1}y(t) - a_{n-2}y(t-1) - \dots - a_0y(t-n+1) + \\ + b_{n-1}u(t) + b_{n-2}u(t-1) + b_{n-3}u(t-2) + \dots + b_0u_{k-n+1}$$

Tramite la trasformata \mathcal{Z} si ottiene quindi:

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{b_{n-1}z^{n-1} + b_{n-2}z^{n-2} + \dots + b_0}{z^n + a_{n-1}z^{n-1} + a_{n-2}z^{n-2} + \dots + a_0}$$

BIBLIOGRAFIA

- [1] M. Bisiacco e M. E. Valcher. "Controlli Automatici". *Ed. Libreria Progetto, Padova*, 2008.
- [2] E. Fornasini e G. Marchesini. "Appunti di Teoria Dei Sistemi". *Ed. Libreria Progetto, Padova*, 2003.
- [3] D. Di Ruscio e B. Foss. "On State Space Model Based Predictive Control". *In Proc. of the 5th IFAC Symposium on Dynamics and Control of Process System, June 8-10, Corfù, Grecia*, pp. 304-309, 1998.
- [4] Martin O. L. Hansen. "Aerodynamics Of Wind Turbines". *Second Edition. Earthscan, London Sterling, VA*, 2008.
- [5] A. Körber e R. King. "Model Predictive Control For Wind Turbines". *In Proc. Eur. Wind Energy Conf.*, pp. 1-7, 2010.
- [6] A. Körber e R. King. "Nonlinear Model Predictive Control Of Wind Turbines". *In Proc. Eur. Wind Energy Conf.*, pp. 1-6, 2011.
- [7] A. Körber e R. King. "Combined Feedback-Feedforward Control of Wind Turbines Using State-Constraint Model Predictive Control". *In IEEE Transactions On Control Systems Tecnology, Vol.21, No.4*, pp. 1117-1128, Luglio 2013.
- [8] L. Magni e R. Scattolini. "Advanced And Multivariable Control". *Pitagora Editrice, Bologna*, pp. 183-210, 2014.
- [9] M. E. Valcher. "Analisi Modale e Stabilità dei Modelli di Stato a Tempo Discreto e a Tempo Continuo". 2017.
- [10] G. Pannocchia e J. B. Rawlings. "Disturbance Model for offset-free model-predictive control". *AIChE Journal*, 2003.
- [11] L.C. Henriksen. "Model predictive control of a wind turbine". *Master's Thesis, Informatics and Mathematical Modelling, Technical University of Denmark, DTU*, 2007.

- [12] A. A. Lumare and K. A. Stol. "Scheduled model predictive control of a wind turbine". In *47th AIAA Aerospace Sciences Meeting Including The New Horizons Forum and Aerospace Exposition, numero AIAA-2009-0480*, 2009.
- [13] E. Simley and L.Y. Pao. "LIDAR Wind Speed Measurements of Evolving Wind Fields". *University of Colorado, Boulder, Colorado, NREL/SR-5000-55516*, Luglio 2012.
- [14] S. Invernizzi. "Identificazione dei Modelli e Analisi dei Dati 1". *Politecnico di Milano*, 2010.
- [15] E. Gilbert and K. Tan. "Linear systems with state and control constraints: The theory and application of maximal output admissible sets". *IEEE Trans. Autom. Control*, vol. 36, no. 9, pp. 1008-1020, Settembre 1991.
- [16] J. Maciejowski. "Predictive Control: With Constraints". *Englewood Cliffs, NJ, USA: Prentice-Hall*, 2002.
- [17] J. Rawlings and D. Mayne. "Model Predictive Control: Theory and Design". *Madison, WI, USA: Nob Hill*, 2009.
- [18] M. Geysler e P. Caselitz. "Individuale blade pitch control design for load reduction on large wind turbines". *Proc. Eur. Wind Energy Conf.*, pp. 82-86, 2007.
- [19] F. Heßand e R. King. "Holistic control of wind turbines". *Proc. Eur. Wind Energy Conf.*, 2012.
- [20] K. Z. Østergaard, P. Brath e J. Stoustrup. "Estimation of effective wind speed". *J. Phys., Conf. Ser.*, vol. 75, no. 1, pp. 012082-1-012082-9, 2007.

