

**UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI
DI PADOVA**



DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA DELL'INFORMAZIONE

CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA BIOMEDICA

MODELLIZZAZIONE DINAMICA DI UN SISTEMA ACQUAPONICO

Relatore: Prof. Sandro Zampieri

Laureando: Ermanno Di Sopra

ANNO ACCADEMICO 2021 – 2022

Data di laurea 20/09/2022

INTRODUZIONE

Per acquaponica si intende la fusione dei metodi di produzione idroponico e di acquacoltura, per la produzione di pesci e piante all'interno dello stesso mezzo di produzione. Si tratta di un sistema idraulico che incanala l'acqua reflua dalla vasca dei pesci (acquacoltura) verso i letti idroponici nei quali si sviluppano le piante, che ne assorbono i nutrienti purificando contemporaneamente l'acqua che può essere perciò reimmessa nell'ambiente di allevamento.

I costituenti, di facile reperibilità, sono vasche, pompe, sistemi di filtraggio, substrati inerti per la coltivazione fuori suolo, che possono essere minerali (es. LECA, perlite, pomice, polistirolo, lana di roccia) o organici, elementi flottanti per il sostegno delle colture che sviluppano le radici direttamente in acqua, circuiti in cui viene fatta circolare l'acqua (sistema Nutrient Film Technique, NTF) sui quali si inseriscono piccoli contenitori per la coltivazione delle piante, o addirittura non essere presenti in quanto la soluzione nutritiva può essere vaporizzata direttamente sulle radici (coltivazione aereoaponica). I pesci allevati possono essere di acqua dolce o salata, a seconda del tipo di vegetale coltivato, e possono essere specie di interesse alimentare, ornamentale o di conservazione della specie. Le piante coltivate possono essere altrettanto diverse, dagli ortaggi a foglia o a frutto, ad alghe scoperte di recente utili come superalimenti e nell'integrazione alimentare, ma anche specie di interesse per altri settori, come la canapa per utilizzo tessile.

La tecnologia acquaponica attira il nostro interesse a livello emotivo per l'eleganza della ricreazione al suo interno dei cicli di nutrienti tipici di un ecosistema reale, di cui riassume la ciclicità dei reagenti e dei prodotti e l'autosussistenza dei meccanismi di riciclo naturale. Essa appare come un'evoluzione futuristica e smart di un settore, quello agricolo, che dalla sua invenzione ha permesso ai cacciatori raccoglitori di separarsi dalla catena alimentare e di sostenere popolazioni sempre maggiori, ma che ora più che mai appare vicino ai suoi limiti fisici. Lo spazio naturale sempre più ridotto dall'avanzare dei campi coltivati, l'aumento della densità di produzione di impianti arretrati tramite l'utilizzo di fertilizzanti e antibiotici che riducono nel caso migliore l'appetibilità al consumatore, nel caso peggiore la salubrità dell'alimento e in ogni caso (ciò vale in particolare per grandi impianti agricoli) l'impatto ambientale di acque

di scolo inquinate e impossibili da smaltire in toto, ma anche la tendenza storica, dettata dalla disponibilità, di consumare carni rosse in misura semplicemente assurda rispetto a quanto il mondo e il nostro organismo sarebbero in grado di sostenere, sembrano trovare in un sistema produttivo acquaponico una soluzione quasi magica. Lo spazio è quello del volume dell'acqua utilizzato, che può essere distribuito sia orizzontalmente che verticalmente, attraverso un'impiantistica modulare che anzi è in grado di trarne vantaggio sfruttando il normale flusso di acqua da una quota maggiore a una inferiore per limitare il numero di pompe (e il conseguente costo energetico), mentre il sistema a ricircolo permette un risparmio idrico elevatissimo, e quindi un uso maggiormente ottimizzato di acqua che è una risorsa che ora siamo chiamati a riscoprire come semplicemente fondamentale dallo scioglimento dei ghiacciai che già adesso ma purtroppo anche in futuro, anzi quasi certamente con maggiore intensità e frequenza, causa e causerà siccità anomale anche in zone che storicamente non sono state toccate e sulle quali la nostra produzione di alimenti anche per il sostenimento di zone meno produttive si è basata.

Oltre al risparmio di questa fondamentale risorsa, il sistema chiuso permette un confinamento degli inquinanti, evitando perlomeno un rilascio immediato nell'ambiente e in generale un ambiente più facilmente controllabile e isolato da patogeni (pur mantenendo la facilità di circolazione delle malattie degli allevamenti intensivi) che possono compromettere la produzione rendendo necessaria una soluzione farmacologica, con le problematiche sopra esposte, mentre il tipo di alimenti prodotti, vegetali e animali acquatici, ha un'impronta di carbonio inferiore rispetto a quella di animali più in alto nella catena trofica, possiede un profilo nutrizionale più bilanciato e adatto a essere il fondamento della dieta, oltre a ovviare alle problematiche del reperimento attuale come il sovrasfruttamento degli ecosistemi acquatici e l'accumulo di metalli pesanti e microplastiche negli stessi.

A livello di analogia con altre tecnologie, è stato dimostrato interesse anche per l'applicazione delle soluzioni nutritive nella coltivazione in vitro di cellule, utilizzabili nella medicina rigenerativa e a fini di ricerca.

Abbiamo finora elencato tutti i vantaggi che a livello concettuale e qualitativo attirano il nostro interesse. Nonostante ciò, dall'idea astratta alla realizzazione e gestione il passaggio è arduo. Si tratta di una tecnologia delicata, che vede nella difficoltà di gestione e nei costi di avviamento le sue principali problematiche, per via della tendenza di disturbi anche piccoli ad amplificarsi e sommarsi con esiti potenzialmente catastrofici, come conseguenza di difetti di progettazione o nel regime di funzionamento.

In questa tesi, perciò, ci poniamo l'obiettivo di studiare le modellizzazioni matematiche che descrivono i principali fenomeni concorrenti al funzionamento di un sistema acquaponico

a doppio ricircolo, come le dinamiche dei sistemi compartimentali e delle popolazioni di organismi. Questi temi verranno trattati individualmente, cercando di evidenziare i punti di contatto dei diversi sistemi, legami che tuttavia non verranno descritti da una relazione matematica precisa, per via dei tempi e delle conoscenze disponibili per una tesi triennale. Lo scopo che ci poniamo sarà quindi la comprensione il più possibile approfondita dei sottosistemi dell'impianto reale, sperando di maturare col tempo questi due concetti (di metabolismo e di trasporto) in una modellizzazione unica valida per un grande numero di sistemi biologici, che si possa concretizzare nella progettazione di impianti funzionanti e funzionali in grado di rispondere al problema della stabilità e della predizione che questa e altre promettenti tecnologie pongono.

I. DECOUPLED AQUAPONIC SYSTEM

Allo scopo di mantenere l'oggetto di questa tesi il più chiaro e concreto possibile, abbiamo deciso di basarci su una reale tipologia di impianto, al fine di evadere da considerazioni qualitative e fondare i nostri approfondimenti in maniera contestuale e motivata, oltre al vantaggio della disponibilità, entro i limiti di interpretazione, di dati empirici per meglio comprendere l'entità dei processi in gioco. Sulla topografia scelta è stato svolto già da altri autori un tentativo di modellizzazione dinamica, tentativo riuscito tramite strumenti più avanzati di quelli a nostra disposizione, tanto da rendere l'interpretazione talvolta abbastanza oscura.

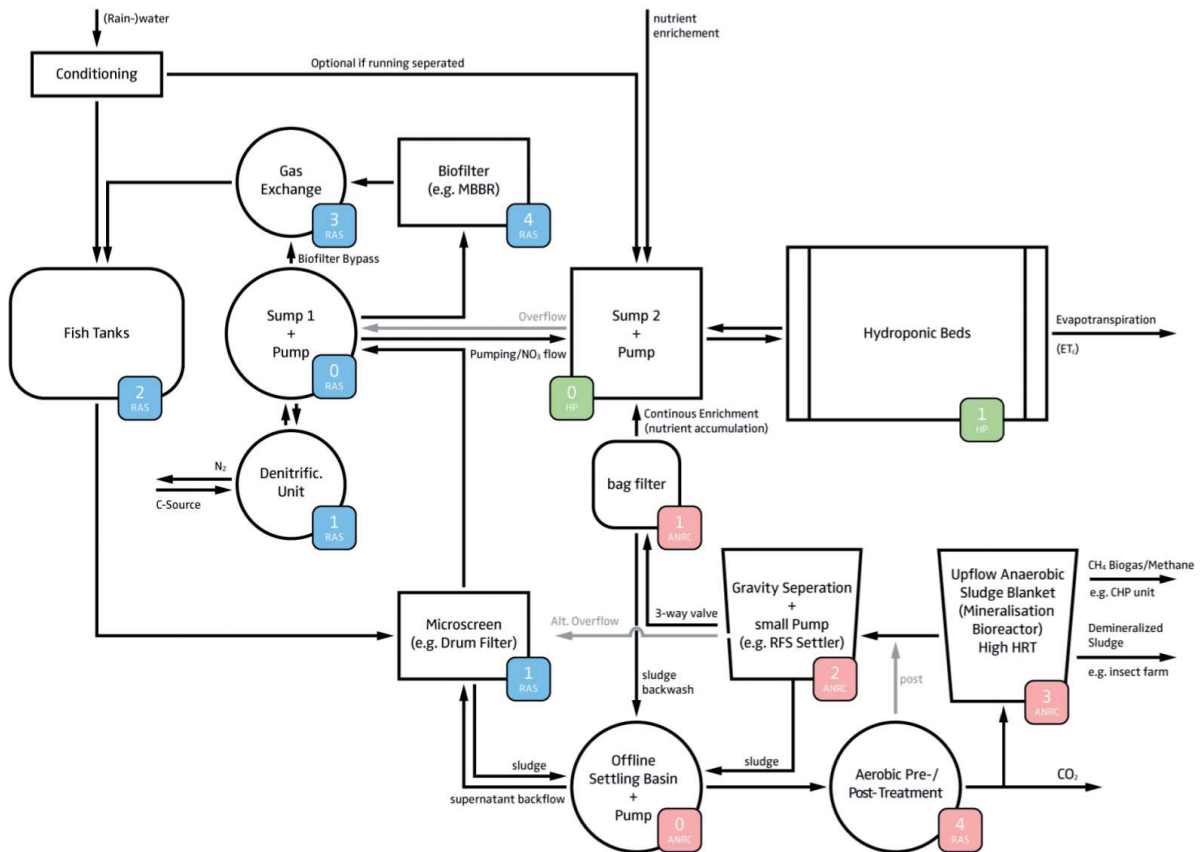
Il lavoro da cui partiamo è descritto in un articolo di libero accesso reso disponibile dal servizio di biblioteca online MDPI che si occupa della raccolta e distribuzione di articoli di questo tipo, scritto da Simon Goddek, Carlos Alberto Espinal, Boris Delaide, Mohamed Haissam Jijakli, Zala Schmautz, Sven Wuertz e Karel J. Keesman, intitolato *Navigating towards Decoupled Aquaponic Systems: A System Dynamics Design Approach*. La modellizzazione del sistema è stata svolta grazie al software di modeling AnyLogic, tramite flowcharts e Causal Loop Diagram (CLD) (strumenti non approfonditi nel percorso triennale, probabilmente corrispettivi più avanzati o specifici dei sistemi di calcolo Matlab e Simulink), e si riferisce a un sistema acquaponico disaccoppiato (Decoupled AquaPonic System, DAPS).

Questo sistema disaccoppiato è stato scelto per ovviare ad uno degli svantaggi più insidiosi della tecnologia acquaponica a ricircolo unico, ossia la necessità di raggiungere un compromesso fra la specie di pianta e di pesce prodotto, per via della scarsità dei gradi di libertà delle composizioni delle due soluzioni nutritive nelle due vasche causata dalla reimmissione diretta nella vasca dei pesci dell'acqua appena filtrata dalle piante. Questo riduce l'efficienza di un tradizionale impianto a ricircolo (Single Water Process Loop) comparato alla somma di un sistema per l'allevamento di pesce e uno per la coltura di piante rispettivamente [3]. Ricercatori e progettisti hanno perciò volto i loro sforzi all'implementazione di un design mirato al controllo indipendente di ogni unità, che si compone di sistemi di ricircolo controllabili nella loro singolarità: un sistema che garantisca questo livello di controllo è appunto il DAPS, di cui è stato recentemente presentato un modello da Kloas e colleghi [4], che conta come elementi costitutivi un sistema

RAS (Recirculating Aquaculture System, costituito da vasche di allevamento dei pesci e dal suo sistema di ricircolo) e un'unità idroponica in due circoli d'acqua individuali collegati da una valvola unidirezionale, dove la perdita di acqua traspirata dal raccolto viene rimpiazzata dal flusso d'acqua proveniente dal ricircolo del pesce, alimentato da acqua piovana. Si mira perciò all'ottenimento di un alto grado di autosufficienza, raggiunto grazie al dimensionamento delle unità RAS in rapporto alla sezione idroponica, reso necessario dall'importanza della quantità di acqua traspirata dal raccolto, che determina il rimpiazzo e la qualità dell'acqua nella RAS oltre che il sostentamento nutrizionale delle piante (che può essere integrato da eventuali aggiunte di nutrienti). Inoltre, Goddek [5] ha mostrato che la digestione anaerobica dei fanghi di pesce aumenta la crescita delle piante, donando disponibilità di nutrienti (fosforo, potassio, manganese, ferro e zolfo) che numerosi autori [1, 2, 6, 8-10] hanno riscontrato a livelli bassi nei sistemi a singolo ricircolo. È tuttavia l'azoto a essere considerato il più importante macronutriente per la crescita di vegetali (storicamente, in parte secondo una visione errata), i cui livelli possono essere controllati tramite lo scambio di acqua, l'assorbimento da parte delle piante e le reazioni red-ox da parte di batteri (il sistema contiene un'unità denitrificatrice e un biofiltro proprio a questo scopo). L'azoto è presente per la maggior parte in forma disciolta e tende ad accumularsi, mentre numerosi micronutrienti sono stati riscontrati unicamente nei biosolidi originati dalle feci e dal cibo non ingerito dai pesci. Proprio da queste considerazioni, oltre che da studi condotti da Neto e Ostrensky [7], che stimano il carico di nutrienti e di scarti prodotto da una vasca per la produzione di tilapia, lo studio trova degna di approfondimento in maniera inedita (in quanto non sono noti altri esempi di sistemi DAPS composti da più di due parti) l'inclusione di una terza unità funzionale volta alla remineralizzazione del fango derivato dalla RAS, l'unità ANRC (Anaerobic Nutrient Remineralization Component), anch'essa dotata di un sistema di ricircolo interno. Questa organizzazione, similmente a una catena alimentare, rappresenta in diverse unità funzionali livelli trofici diversi come produttori autotrofi (piante), consumatori eterotrofi (pesci, molluschi o crostacei) e decompositori (unità di remineralizzazione) e permette la creazione di sistemi di ricircolo individuali ma comunicanti, e il conseguente fine controllo dei flussi di nutrienti tra una parte e l'altra, incrementando l'efficienza e riducendo gli sprechi. Ciò è ovviamente importante in quanto lo sviluppo degli organismi avviene in maniera ottimale quando le concentrazioni di nutrienti si trovano entro range specie-specifici, chiamati concentrazioni fitness, che l'articolo riporta per le specie di interesse, come mostrato nella tabella che segue.

Sub-System	Species/Type	pH	EC (mS·cm ⁻¹) or Salinity	Optimal Temp (°C)	Ammonia (mg·L ⁻¹)	Dissolved Oxygen (ml·L ⁻¹)	Hardness (CaCO ₃ in mg·L ⁻¹)
RAS	<i>Oreochromis niloticus</i> (Nile tilapia)	7–9	salinity: <15‰	29.5 ; 27–30	<0.1 N-NH ₄	Optimal: 5.0	
	<i>Oncorhynchus mykiss</i> (Rainbow trout)	6.5–8.5	salinity: <26‰	15	<0.0125 N-NH ₃	~100%	>200 ; 10–400
	<i>Clarias gariepinus</i> (Catfish)	7	salinity: 0‰–4‰ ; <4‰–6‰; optimum 0.5‰	25–30 ; 28	<2.5 N-NH ₃	Optimal: 5–6	>20–30
	<i>Sander lucioperca</i> , syn. <i>Stizostedion lucioperca</i> (Pike-Perch)	6.5–9.2		27–28	<0.40 TAN	>50%	
Bio filter	<i>Nitrobacter</i>	7.5 ; 7.8		20–30 ; 24–25		>1	
	<i>Nitrospira</i>	8.3		29–31 ; 30–35			
	<i>Nitrosomonas</i>	7.8		20–30			
Hydroponics	<i>Lactuca sativa</i> (Lettuce)	5.5–6.5	1–2 mS/cm	21–25	<10 N-NH ₄		
	<i>Lycopersicon esculentum</i> (Tomato)	6.3–6.5	>2.5 reduces yield	18–24			
Digester	Upflow Anaerobic Sludge Blanket reactor (UASB)	7.4		35		~0	

Ci occupiamo ora della descrizione di ogni serbatoio funzionale al sistema, riportato in figura:



A ogni serbatoio è associato un numero, il quale indica la quota geodetica dello stesso: ciò permette di identificare i collegamenti nei quali è necessario l'uso di una pompa, ossia quelli che portano da una quota bassa a una alta, mentre negli altri casi il flusso è imposto dalla gravità.

1) VASCHE DEI PESCI

Si tratta delle vasche per l'acquacoltura che contengono i pesci, che insieme al filtro a tamburo, alla tanica 1, al biofiltro e all'unità denitrificatrice forma il complesso di ricircolo RAS. Le

concentrazioni di nutrienti al suo interno devono rispettare parametri specie-specifici, riportati nell'articolo per l'*Oreochromis niloticus* (tilapia del Nilo), l'*Onchorhynchus mykiss* (trota arco-baleno), il *Clarias gariepinus* (pesce gatto) e il *Sander lucioperca* (lucio), e che abbiamo riportato nella tabella precedente.

I pesci inoltre operano la trasformazione primaria dell'azoto nel sistema, digerendo il mangime e trasudano infatti ammoniaca come prodotto secondario tossico del catabolismo delle proteine. Inoltre, le loro feci e il cibo non ingerito formano la parte di solidi sospesi, che poi verrà drenata a formare il fango. Come nella maggior parte delle trasformazioni trattate in questa tesi, considereremo la produzione di fango ed ammoniaca direttamente proporzionali alla quantità di reagente (mangime), ma la costante di proporzionalità dipenderà in qualche modo dallo stato (fase di sviluppo e numero di individui) della popolazione degli animali.

2) FILTRO A TAMBURO

Come esplicito nella precedente descrizione dell'impianto, il sistema è costituito da vari ricircoli indipendenti, seppur connessi, tra cui uno volto alla remineralizzazione del fango dei pesci per garantire un ulteriore grado di riciclo dei nutrienti, il sistema Anaerobic Nutrient Remineralization Component (ANRC). È quindi necessario un componente che separi il fango dall'acqua circolante nel ricircolo RAS e che lo convogli nel complesso ANRC. Nel sistema in esame questa funzione è svolta da un filtro a tamburo (drum filter), un sistema di filtraggio attivo molto utilizzato nella filtrazione dei solidi sospesi nelle acque reflue. Si tratta essenzialmente di un tubo di materiale permeabile tenuto a pressione minore di quella all'esterno del cilindro e in rotazione: ciò permette un deposito sulla superficie esterna del cilindro mentre l'acqua viene filtrata verso l'interno. Una lama stacca i solidi dopo ogni giro, consentendo la separazione. Senza entrare troppo nello specifico, considereremo in prima approssimazione che il rendimento di questo processo sia pari a 1 e che quindi il blocco separi nel complesso ANRC tutto il fango prodotto dai pesci.

3) TANICA 1

Serbatoio di volume del ricircolo RAS, riceve acqua dal filtro a tamburo e ne invia alla tanica 2 e al complesso del biofiltro. Può ricevere acqua dalla tanica 2 per troppopieno, ossia se il volume presente nella tanica 2 eccede una certa soglia. In questa trattazione non accenneremo tuttavia a meccanismi di questo tipo.

4) BIOFILTRO

Nonostante il mantenimento di livelli adeguati di azoto sia un requisito fondamentale alla nutrizione delle piante nel sistema, concentrazioni elevate di ammoniaca risultano tossiche per i pesci. Ecco allora che si presenta la necessità di mantenere i livelli di ammoniaca perlomeno nel ricircolo del pesce entro valori accettabili. Questa funzione viene espletata tramite un componente, appunto il biofiltro, che permetta l'ossidazione (si tratta di una reazione aerobica, che necessita di ossigeno: il flusso d'acqua viene fatto gorgogliare in atmosfera subito prima di entrare nel filtro) dell'ammoniaca prima in nitriti e in nitrati poi, più tollerati dagli animali acquatici. Abbiamo riportato le massime concentrazioni per tilapia dalla tabella precedente, che risultano pari a 2.9 mg/L per l'ammoniaca, 0.5-1 mg/L per i nitriti e 100-200 mg/L per i nitrati (si noti che l'intermezzo della reazione, i nitriti, sono più tossici dell'ammoniaca per i pesci). Queste reazioni vengono catalizzate da due diverse popolazioni di batteri che risiedono nel biofiltro, *Nitrosomonas* e *Nitrobacter*, che ossidano rispettivamente l'ammoniaca in nitriti e i nitriti in nitrati. Alla luce di ciò, è fondamentale applicare un modello di popolazione per questi batteri, tanto più che la trasformazione di ammoniaca in nitriti è cinque volte più rapida di quella di nitriti in nitrati. Questo aspetto genera il fenomeno che in acquariofilia è noto come *picco dei nitriti*, che avviene ogniqualvolta il carico organico subisca delle brusche variazioni. Essendo i nitriti più pericolosi per i pesci dell'ammoniaca stessa, questo può generare un transitorio a rischio per la specie ittica allevata, almeno finché la popolazione di *Nitrobacter* non cresce, in virtù dell'accumulo di nitriti, compensando la maggiore velocità di *Nitrosomonas*. Ovviamente ciò fa sì che il rendimento del reattore sia strettamente legato alle popolazioni delle due specie batteriche.

5) UNITA' DENITRIFICATRICE

Si tratta essenzialmente dell'opposto del biofiltro, ossia un reattore riducente i nitrati, che permette un controllo dall'alto delle specie chimiche contenenti azoto il cui equilibrio è così fondamentale per l'intero sistema. In condizioni anaerobiche batteri appartenenti ai generi *Achromobacter*, *Bacillus*, *Micrococcus*, *Pseudomonas*, *Spirillum* usano come accettore finale della respirazione anaerobica lo ione nitrato invece dell'ossigeno, producendo azoto elementare, ossido di diazoto e ioni nitrito e ammonio, se riforniti di una fonte di carbonio. Ciò causa una riduzione della quantità totale di azoto circolante, legata all'emissione all'esterno di specie dell'azoto gassose. Il serbatoio riceve acqua dalla tanica 1 e la reimmette nella stessa. Ciò rende relativamente facile controllare il flusso che scorre nell'unità denificatrice e quindi la quantità di azoto eliminato e gli sprechi di fertilizzante.

6) PRE/POST TRATTAMENTO AEROBICO

Il sistema di digestione anaerobico può essere completato da un trattamento aerobico, che nella simulazione svolta nell'articolo non viene preso in considerazione, ma è riportato nello schema. Nonostante lo svantaggio della perdita di nutrienti dovuto alla crescita batterica, può essere utilizzato per aumentare la concentrazione di CO₂ nella serra o per produrre biogas che può essere bruciato per alimentare le pompe e migliorare il bilancio energetico dell'intero sistema, a seconda che preceda (pre) o segua (post) rispettivamente la digestione anaerobica.

7) UPFLOW ANAEROBIC SLUDGE BLANKET

Si tratta del principale reattore del complesso ANRC, il cui scopo è la remineralizzazione dei nutrienti contenuti nei biosolidi che compongono il fango di pesce. Si tratta di un'interessante aggiunta al sistema acquaponico disaccoppiato, pur essendo specificato nell'articolo che non sia mai stato incluso in un progetto effettivo, poiché numerosi autori hanno osservato in sistemi a singolo ricircolo bassi livelli di fosforo (P), potassio, magnesio, manganese, ferro, e zolfo [1, 2, 6, 8-10], nutrienti riscontrati nel bilancio di massa stimato da Neto e Ostresky [7] riguardante il carico di nutrienti in uscita dal complesso RAS. Nelle simulazioni in ogni caso è considerato il fosforo, in quanto è una risorsa esauribile [11] e può quindi essere considerato limitante alla crescita delle piante nonostante la disponibilità di azoto. L'unità remineralizzante è chiamata UASB (Upflow Anaerobic Sludge Blanket), lavora in condizioni anaerobiche e con tempi di ritenzione elevati (per la migliore efficienza di digestione è stato osservato un tempo di dieci giorni), e insieme a un sistema di ricircolo del fango, il trattamento anaerobico e vari filtri necessari per ridurre la quantità di solidi sospesi nell'effluente forma il blocco di ricircolo ANRC.

8) TANICA 2

Si tratta della tanica in diretta comunicazione con i letti idroponici, che riceve acqua e nutrienti dalla tanica 1 del complesso RAS e dall'effluente del sistema ANRC. Da qui possono essere inoltre immesse eventuali integrazioni nutritive per il raccolto nel caso il sistema non riesca a essere pienamente autosufficiente. Il flusso tra la tanica e i letti idroponici può svilupparsi in un verso o nell'altro, attraverso un controllo pulsatile o un meccanismo di troppopieno.

9) LETTI IDROPONICI

Trattasi dell'area di coltura, che può essere composta da substrati minerali inerti (perlite, lana di roccia...) o organici, galleggianti per la coltivazione a radice sospesa o circuiti in cui

viene fatta circolare l'acqua (sistema Nutrient Film Technique, NFT). I nutrienti vengono assorbiti e assimilati dalle piante, in misura dipendente dallo stato del raccolto e della quantità di nutriente, mentre l'acqua assorbita dalle piante viene in seguito traspirata e rilasciata nell'ambiente, a una velocità chiamata nell'articolo Evotranspiration Rate, dipendente oltre che dalla fase di crescita del raccolto anche dall'irradiazione solare e dalla velocità del vento. L'articolo fornisce numerose evidenze sperimentali dell'andamento in funzione del tempo, ma per una caratterizzazione dinamica considereremo anche questa volta il flusso proporzionale alla quantità di acqua immagazzinata nelle piante e dipendente dallo stato delle stesse, anche a seconda delle condizioni ambientali: tale misura è importante in quanto determina la quantità di fluidi che i letti idroponici e quindi la tanica 2 dovrà ricevere dalla somma di RAS e ANRC.

L'articolo fornisce inoltre delle tabelle per le concentrazioni ottimali di nutrienti per la crescita della lattuga, che abbiamo riportato nelle pagine precedenti. Per una modellizzazione ulteriore a quella trattata, potremmo considerare la crescita della lattuga massima quando i valori si dovessero trovare entro questi limiti, nulla o ridotta altrimenti (considerazioni simili valgono per la crescita del pesce).

Riferimenti bibliografici

1. Rakocy, J.E. *Aquaponics-Integrating Fish and Plant Culture*; Wiley-Blackwell: Hoboken, NJ, USA, 2012; pp. 344-386.
2. Graber, A.; Junge, R. *Aquaponic systems: Nutrient recycling from fish wastewater by vegetable production*. *Desalination* 2009, 246, pp. 147-156.
3. Goddek, S.; Delaide, B.; Mankasingh, U.; Ragnarsdottir, K.; Jijakli, H.; Thorarinsdottir, R. *Challenges of Sustainable and commercial aquaponics*. *Sustainability* 2015, 7, pp. 4199-4224.
4. Kloas, W.; Groß, R.; Baganz, D.; Graupner, J.; Monsees, H.; Schmidt, U.; Staaks, G.; Suhl, J.; Tschirner, M.; Wittstock, B.; et al. *A new concept for aquaponic systems to improve sustainability, increase productivity, and reduce environmental impacts*. *Aquac. Environ. Interact.* 2015, 7, pp. 179-192.
5. Goddek, S. *Three-loop Aquaponics Systems: Chances and challenges*. In Proceedings of the International Conference on Aquaponics Research Matters, Ljubljana, Slovenia, 22 March 2016.
6. Licamele, J.D. *Biomass Production and Nutrient Dynamics in an Aquaponics System*. Ph.D. Thesis, University of Arizona, Tucson, AZ, USA, 2009.
7. Neto, R.M.; Ostrensky, A. *Nutrient load estimation in the waste of Nile tilapia *Oreochromis niloticus* (L.) reared in cages in tropical climate conditions*. *Aquac. Res.* 2013, 46, pp. 1309-1322.
8. Adler, P.R.; Summerfelt, S.T.; Glenn, D.M.; Takeda, F. *Evaluation of the effect of a conveyor production strategy on lettuce and basil productivity and phosphorus removal from aquaculture wastewater*. In Proceedings

of the Second International Conference on Recycling the Resource Ecological Engineering for Wastewater Treatment, Waedenswil-Zurich, Switzerland, 18-22 September 1995; Staudenmann, J., Schönborn, A., Et-
nier, C., Eds.; Trans Tech Publications: Waedenswil-Zurich, Switzerland, 1996; pp. 131-136.

9. Roosta, H.R.; Hamidpour, M. *Effects of foliar application of some macro- and micro-nutrients on tomato plants in aquaponic and hydroponic systems*. *Sci. Hortic. (Amst.)* 2011, 129, pp. 396-402.
10. Savidov, N.A.; Hutchings, E.; Rakocy, J.E. *Fish and plant production in a recirculating aquaponic system: A new approach to sustainable agriculture in Canada*. *Acta Hortic.* 2007, 742, pp. 209-222.
11. Sverdrup, H.U.; Ragnarsdottir, K.V. *Challenging the planetary boundaries II: Assessing the sustainable global population and phosphate supply, using a systems dynamics assessment model*. *Appl. Geochem.* 2011, 26, pp. 307-310.

II. SISTEMI DI FLUSSO DINAMICO

da *Lectures of Network System*

Per prevedere quale sarà l'andamento dei livelli dei vari nutrienti nei serbatoi del sistema acquaponico, in risposta al mangime immesso, ma anche al flusso imposto dalle pompe, è utile avere comprensione della classe di modelli dinamici per la descrizione di processi caratterizzati dalle leggi della conservazione della massa e da flussi tra unità chiamate compartimenti. Si tratta di sistemi dalle numerose applicazioni in ingegneria, dalle reti di distribuzione di gas, acqua ed energia, ma anche sistemi per lo scambio di dati, di comunicazione e in generale reti logistiche. È possibile descrivere tali sistemi sia a tempo discreto che nel continuo, con ovvie limitazioni nell'applicazione di modelli continui a sistemi reali. Noi consideriamo come esempio una versione semplificata dello schema a ricircolo illustrato nel capitolo precedente, dove ogni serbatoio riportato interagisce con il suo comunicante attraverso flussi di sostanze nutritive (nel nostro caso sono di interesse i composti dell'azoto, il fango, l'acqua e il fosforo). Ogni nodo del sistema di flusso dinamico, noto come compartimento, funziona come elemento di accumulo per il particolare nutriente (consideriamo ogni serbatoio come N serbatoi per gli N nutrienti in esso contenuti, come se si trattasse di serbatoi separati).

I compartimenti comunicano l'un l'altro e si scambiano materiale attraverso flussi, indicati da linee che collegano compartimenti comunicanti. Oppure i compartimenti possono essere collegati all'esterno, per esempio per quanto riguarda la portata di mangime in input nella vasca dei pesci o le specie azotate gassose rilasciate dall'unità denitrificatrice.

MODELLI A TEMPO CONTINUO

Dati N compartimenti interconnessi, denominiamo $Q_i(t)$ la quantità di nutriente presente nel compartimento i all'istante t , $f_{i,j}$ (flow rate) la costante di proporzionalità (se supponiamo la relazione lineare) che lega la quantità di nutriente nel compartimento sorgente al flusso che si instaura tra un compartimento i e un compartimento j , che sarà dipendente dalle dimensioni (larghezza dei serbatoi e resistenza dei condotti) del sistema secondo le note leggi dell'idraulica, e U_i eventuale supplemento non negativo di nutriente immesso nel contenitore i (es. mangime, ma anche eventuali integrazioni di nutrienti per i letti idroponici, o flusso imposto dalle pompe). Per la definizione data agli $f_{i,j}$, notiamo che il serbatoio i -esimo eroga al

serbatoio j all'istante t una quantità di nutriente pari a $f_{i,j}Q_j(t)$. Da un bilancio di massa, è facile osservare che la variazione di quantità del nutriente nel serbatoio i -esimo all'istante t è data da:

$$Q_i'(t) = \sum_{j=1, j \neq i}^N (f_{j,i} \cdot Q_j(t) - f_{i,j} \cdot Q_i(t)) - f_{i,0} \cdot Q_i(t) + U_i$$

Dove il simbolo $Q_i'(t)$ indica la derivata di $Q_i(t)$ e dove con $f_{i,0}$ intendiamo il flow rate che lega la quantità in i al flusso che si instaura tra in serbatoio e l'esterno del sistema. Per rendere più compatta la trattazione, è conveniente raggruppare gli $f_{i,j}$ in una matrice (*flow rate matrix*) F appartenente alle matrici $N \times N$ con elementi reali maggiori o uguali a zero.

In questa matrice ogni posizione i,j ha come elemento il flow rate del flusso che si instaura tra il serbatoio i e il serbatoio j , e gli elementi sulla diagonale di indice ii sono posti uguali a zero per convenzione, poiché si riferiscono al flusso che si instaura tra un serbatoio e se stesso.

Definiamo inoltre la *matrice Laplaciana*

$$L = \text{diag}(F \cdot \mathbf{1}_N) - F$$

che è la matrice data dalla differenza della matrice diagonale che ha come elementi sulla diagonale la somma della riga corrispondente della matrice F , maggiori di zero, e la matrice F cambiata di segno, quindi con tutti elementi minori o uguali a zero: la matrice così ottenuta avrà perciò sulla diagonale tutti elementi positivi (se l' i -elemento fosse nullo, la somma dei flow rate e quindi tutti i flow rate della riga corrispondente della matrice F sarebbero nulli, e quindi il compartimento i -esimo non scambierebbe materiale con gli altri e potrebbe quindi essere ignorato), e fuori dalla diagonale elementi negativi o nulli. Inoltre, la somma degli elementi di ogni riga di L è uguale a zero. Osserviamo inoltre che vale

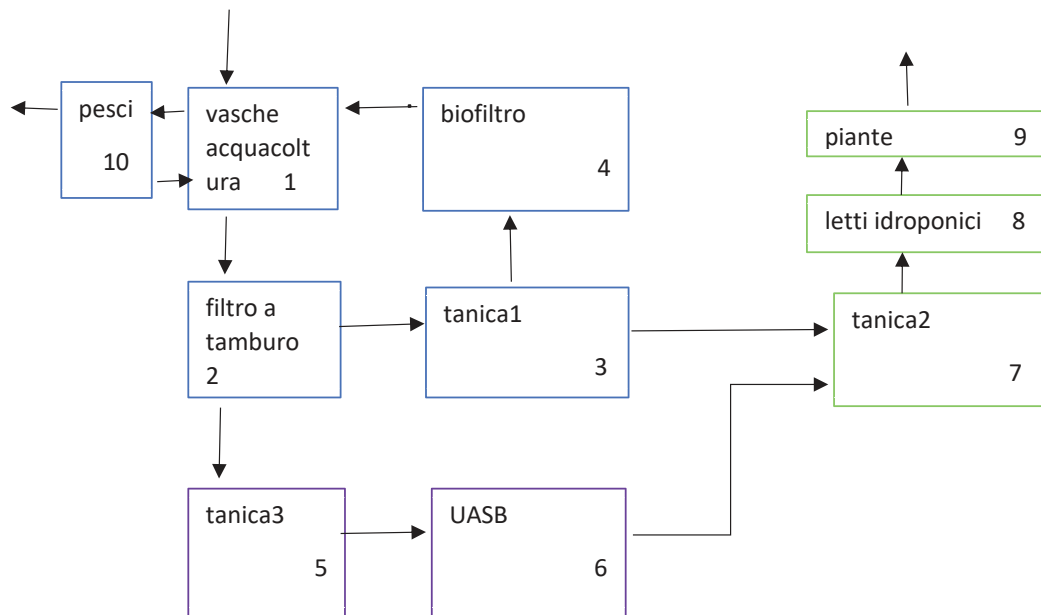
$$\sum_{j=1, j \neq i}^N (f_{j,i} \cdot Q_j(t) - f_{i,j} \cdot Q_i(t)) = (-L^T \cdot Q)_i$$

Definendo infine la *matrice compartimentale* C come $C = -L^T - \text{diag}(f_0)$, ottenuta sottraendo agli elementi sulla diagonale della matrice L trasposta e cambiata di segno i flow rate dei flussi tra il sistema e l'esterno (ottenendo quindi valori negativi sulla diagonale e valori positivi fuori, oltre che somme per colonne minori o uguali a zero), possiamo descrivere il sistema di flusso dinamico a tempo continuo come

$$Q'(t) = C \cdot Q(t) + U$$

Il fatto che gli elementi fuori dalla diagonale della matrice C siano tutti non negativi la rende riconducibile alla famiglia di matrici nota come *matrici di Metzler*. Anche il fatto che le somme per colonne siano non positive è un aspetto importante per comprenderne le proprietà.

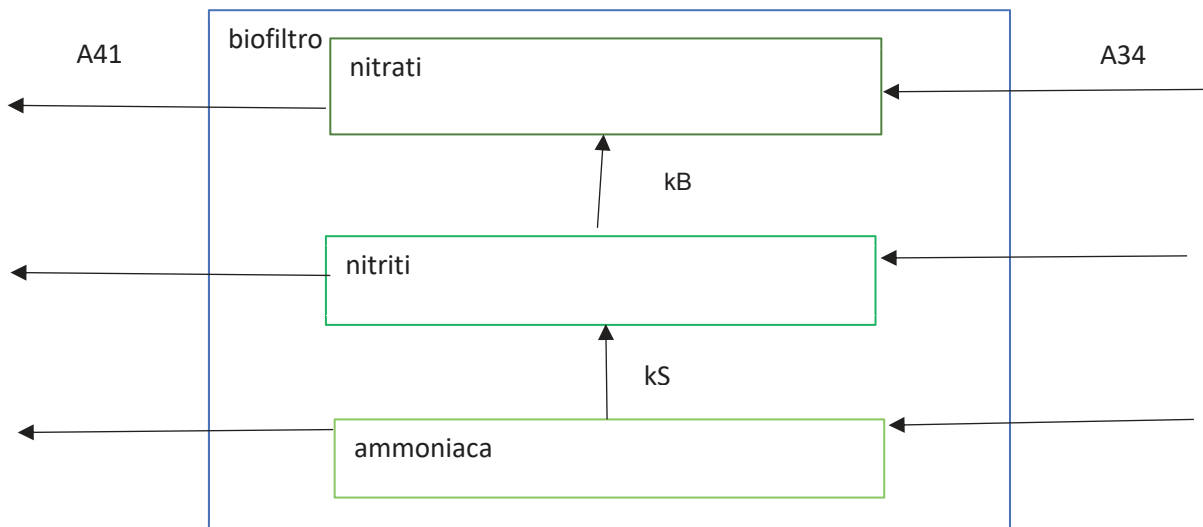
Per esempio, riportiamo la matrice compartmentale che descrive il flusso d'acqua (considerazioni simili valgono anche per gli altri nutrienti, a meno di fattori di produzione o reazione che approfondiremo successivamente: tuttavia l'acqua scorre in ogni parte del sistema nella stessa forma: la sua matrice sarà perciò archetipica rispetto ai flussi idraulici da un compartimento fisico all'altro) in una versione semplificata del DAPS, che riportiamo qui sotto:



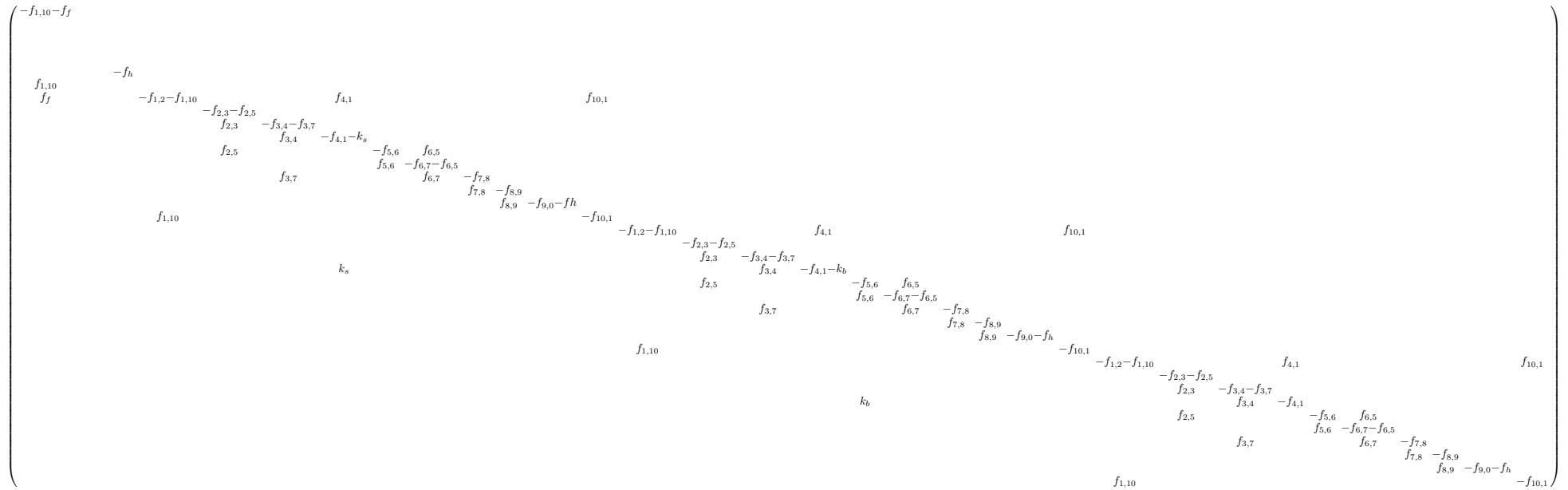
Numeriamo i compartimenti e chiamiamo $Q_{1,i}$ la quantità dell' i -esimo nutriente nella vasca di acquacoltura, $Q_{2,i}$ nel filtro a tamburo, $Q_{3,i}$ nella tanica1, $Q_{4,i}$ nel biofiltro, $Q_{5,i}$ nella tanica 3, $Q_{6,i}$ nell'UASB, $Q_{7,i}$ nella tanica2, $Q_{8,i}$ nei letti idroponici, $Q_{9,i}$ nelle piante e $Q_{10,i}$ nei pesci. Chiamiamo $f_{i,j}$ il flow rate del flusso dal serbatoio i al serbatoio j , e denominiamo inoltre $f_{9,0}$ il flow rate del flusso di evotraspirazione dipendente dalla radiazione solare incidente e dal numero di piante. Con queste premesse, ordiniamo gli $f_{i,j}$ come illustrato in precedenza e otteniamo la matrice compartmentale C per il flusso dinamico dell'acqua nel sistema che riportiamo:

$$\begin{pmatrix} -f_{1,2}-f_{1,10} & & & f_{4,1} & & & & & & f_{10,1} \\ & -f_{2,3}-f_{2,5} & & & & & & & & \\ & f_{2,3} & -f_{3,4}-f_{3,7} & & & & & & & \\ & & f_{3,4} & -f_{4,1} & & & & & & \\ & f_{2,5} & & & -f_{5,6} & f_{6,5} & & & & \\ & & & & f_{5,6} & -f_{6,7}-f_{6,5} & & & & \\ & & & f_{3,7} & & f_{6,7} & -f_{7,8} & & & \\ & & & & & & f_{7,8} & -f_{8,9} & & \\ & & & & & & & f_{8,9} & -f_{9,0} & \\ f_{1,10} & & & & & & & & & -f_{10,1} \end{pmatrix}$$

Osserviamo come la matrice sia effettivamente di Metzler. Questa forma della matrice delle specie dell'azoto è molto simile a quella dell'acqua, poiché diffondono in forma disciolta nell'intero sistema, con due differenze sostanziali; la prima differenza consiste nel fatto che i nutrienti si accumulano nelle piante, mentre nei pesci invece si accumula mangime, anche se producono ammoniaca in funzione di quanto mangime contengono con flow rate f_f , per poi essere esportati nell'ambiente esterno tramite raccolta, con flow rate f_h dipendente dal tempo. La seconda differenza è causata dall'attività del biofiltro, sede dell'ossidazione dell'ammoniaca. Nel suddetto compartimento infatti i serbatoi di ammoniaca, nitriti e nitrati (ricordiamo che consideriamo le quantità di X nutrienti presenti nel serbatoio i -esimo come se lo stesso fosse X serbatoi separati) sono comunicanti l'uno con l'altro con un flow rate che non ha questa volta significato idraulico. Questo è piuttosto dipendente dalla costante di reazione della conversione di ammoniaca in nitriti e nitriti in nitrati, e dal numero di batteri che risiedono nel biofiltro e che catalizzano la suddetta reazione (ricordiamo come il primo e il secondo step della serie di reazioni vengano catalizzati da due specie batteriche diverse, *Nitrosomonas* e *Nitrobacter*), secondo lo schema riportato qui sotto:



Questo lega la quantità di nitriti nel filtro a quella di ammoniaca, e quella di nitrati a quella di nitriti: la matrice avrà perciò elementi "esterni" alla forma 10×10 che descrive la semplice diffusione da un compartimento all'altro, e per tenere conto delle 10 quantità delle 4 specie nei vari compartimenti sarà necessaria una matrice 40×40 strutturata come segue:



Gli elementi di reazione e di produzione che differenziano il ciclo dell'azoto sono presenti, oltre ai flow rate idraulici comuni alla matrice dell'acqua, con la notazione di k_a flow rate dipendente dalla costante di equilibrio della prima reazione, k_b flow rate della seconda, e f_f flow rate di conversione del cibo dai pesci in ammoniaca (non è tuttavia riportato il contributo dei pesci alla produzione di fango, con flow rate f_s . Questa lacuna verrà rievdenziata dopo la matrice del fango; per quanto riguarda la matrice precedente l'unica differenza sarà la presenza di un termine di scomparsa $-f_s$ nell'elemento sulla diagonale $-f_i$ che descrive la scomparsa del cibo dai pesci). I flow rate di ingresso nei compartimenti di piante e animali dipendono dal nutriente in esame ma si è scelto di riportarli con lo stesso nome per semplicità, indicando la sola direzione del flusso.

Possiamo ora collegare le matrici in modo da ottenere una matrice 70×70 : ordinando il vettore delle quantità di nutrienti nei vari serbatoi (variabili di stato del sistema) con le prime 10 componenti indicanti la quantità di acqua nei 10 serbatoi, le seconde 10 di cibo, le terze 10 di ammoniaca, le quarte 10 di nitriti, le quinte 10 di nitati, le seste 10 di fango e le settime 10 di fosforo possiamo sostanzialmente posizionare le 3 matrici già ottenute lungo la diagonale della matrice, completandola con elementi uguali a zero:

water	0	0
0	N	0
0	Matrice 40×40 di zeri, con come elemento alla riga 1 e alla colonna 10 f_s	Sludge & P

La rappresentiamo come matrice 3×3 , pur sapendo che la prima colonna e la prima riga sono 10 colonne e 10 righe, le seconde sono 40 colonne e 40 righe, mentre le terze sono 20 colonne e 20 righe. La matrice ottenuta è ancora di Metzler. Approfondiremo ora le proprietà di questa famiglia di matrici.

MATRICI DI METZLER

Riportiamo la definizione, pur avendola anticipata, di matrice di Metzler:

Definizione 1.1: Matrice di Metzler

Una matrice $M \in \mathbb{R}^{N \times N}$ a elementi reali, con dimensione maggiore di 2, è detta di Metzler se gli elementi fuori dalla diagonale sono non negativi.

Definizione 1.2: Grafo associato

Definiamo inoltre il grafo associato alla matrice di Metzler come il grafo di N nodi, senza ripiegamenti dello stesso nodo, dove ogni coppia (i, j) con $i \neq j$ è un ramo con peso $m_{i,j}$ se e solo se $M_{i,j} > 0$.

Osservazione 1.1

M è di Metzler se e solo se esiste uno scalare $\eta > 0$ tale che $M + \eta \cdot I_N$ ha tutti elementi non negativi.

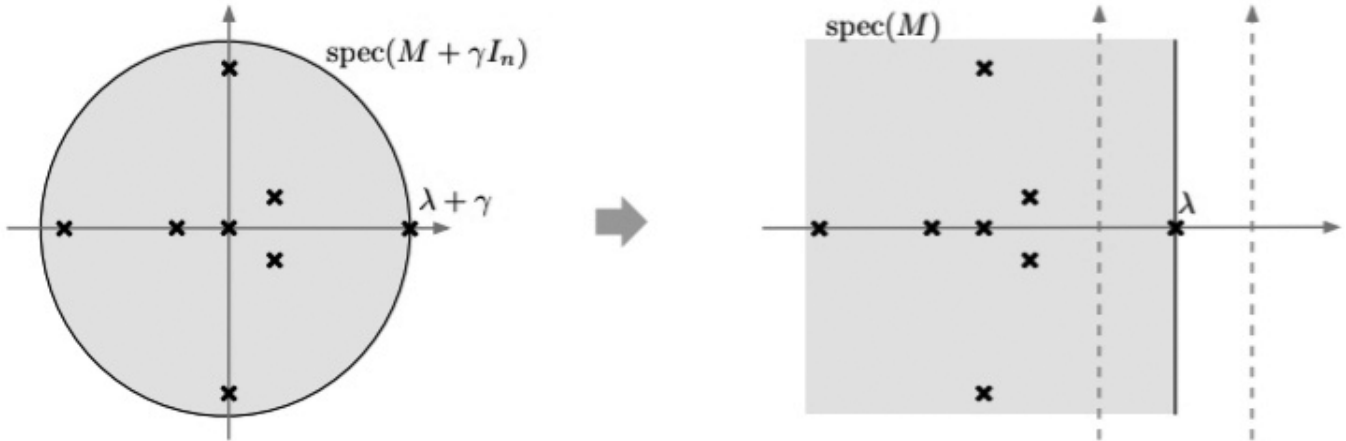
Osservazione 1.2

Se L è una matrice Laplaciana, allora $-L$ è matrice di Metzler con somma delle righe uguale a zero.

Teorema 1.1 : Teorema di Perron-Frobenius per le matrici di Metzler

Se M è di Metzler, allora:

- i) Esiste un autovalore reale λ che ha parte reale maggiore o uguale a quella di ogni altro autovalore μ .
- ii) Gli autovettori destro e sinistro di λ possono essere selezionati non negativi.



Per una matrice di Metzler, l'autovettore dominante è uguale all'ascissa spettrale $\alpha(M)$.

Il teorema è consistente con le caratteristiche delle matrici Laplaciane. Specificamente, è dimostrabile che se L è Laplaciana, $-L$ è di Metzler con autovalore dominante $\lambda = 0$. Successivamente, daremo condizioni necessarie e sufficienti per avere λ strettamente minore di zero: infatti, dal corso di Fondamenti di Automatica sappiamo che se la matrice di stato di un sistema (in questo caso la matrice compartimentale C) ha tutti autovalori a parte reale negativa, questo implica che i modi del sistema siano tendenti a zero per tempi infiniti, e ciò permette importanti considerazioni riguardo la sua stabilità.

Teorema 1.2: Teorema di Metzler Hurwitz

Per matrici M di Metzler, le successive affermazioni sono equivalenti

- i) M è di Hurwitz
- ii) M è invertibile e $-M^{-1} \geq 0$
- iii) per ogni $b > 0$, esiste un unico $x^* \geq 0_n$ che risolve $M \cdot x^* + b = 0_n$ (x^* è punto di equilibrio per il sistema, in quanto rende la variazione di ogni variabile di stato del sistema pari a zero).

**PROPRIETÀ ALGEBRICHE E GRAFICHE
DEI SISTEMI LINEARI DI FLUSSO DINAMICO**

In questa sezione studiamo le proprietà algebriche e spettrali delle matrici compartimentali. Iniziamo con alcune definizioni di teoria dei grafi: nel grafo compartimentale, un sottoinsieme S di compartimenti si dice:

- i) outflow-connected se esiste un cammino diretto da ogni compartimento di S all'ambiente, cioè a un compartimento j con un outflow rate $f_{0,j}$ maggiore di zero.
- ii) inflow-connected se esiste un cammino diretto dall'ambiente ad ogni compartimento di S , cioè da un compartimento i con un inflow u_i positivo.
- iii) una trappola se non vi sono collegamenti diretti da alcuni compartimenti di S all'ambiente

o ad altri compartimenti fuori da S, e

iv) una trappola semplice è una trappola senza trappole al suo interno.

Ovviamente un sistema può essere outflow connected se e solo se non contiene trappole: il sistema acquaponico preso in esame è outflow e inflow connected per l'acqua, ma piante e pesci funzionano come trappole per i nutrienti.

Definizione 1.3 Sistemi lineari di flusso dinamico

Un sistema lineare di flusso dinamico di N compartimenti è una tripletta (F, f_0, u) di elementi definiti come:

- i) una matrice $N \times N$ non negativa $F=(f_{i,j})_{i,j}$ con i,j che assumono valori da 1 a N con elementi sulla diagonale pari a zero, detta matrice dei flow rate,
- ii) un vettore $f_0 \geq 0_N$ chiamato vettore degli outflow rate, e
- iii) un vettore $u \geq 0_N$ chiamato vettore degli inflow.

È facile osservare quindi che, per come è stato definito il nostro sistema acquaponico, si tratta di un sistema lineare di flusso dinamico. Tutte le considerazioni sulle trasformazioni della matrice dei flow rate che la trasformano nella matrice compartimentale che è di Metzler e che soddisfa $Q' = C \cdot Q + u$ continuano quindi a valere.

Teorema 1.3 Teoria algebrica dei grafi e sistemi di flusso dinamico

Consideriamo il sistema lineare di flusso dinamico (F, f_0, u) con C matrice compartimentale e grafo compartimentale G_f . Allora:

- i) ogni autovalore di C è uguale a zero o ha parte reale negativa;
- ii) le seguenti affermazioni sono equivalenti:
 - a) C è di Hurwitz,
 - b) Non ci sono trappole, quindi il sistema è outflow connected, e
 - c) ogni sorgente di G_f è outflow connected;
- iii) se C non è di Hurwitz, allora 0 è semisemplice con molteplicità uguale al numero di trappole semplici (cioè il numero di pozzi di G_f che non sono outflow connected).

Nel nostro sistema, le piante sono ben 4 trappole semplici: fungono da trappola per le 3 specie dell'azoto e per il fosforo, mentre i tessuti dei pesci fungono da trappola per il cibo. È anche giusto osservare, tuttavia, come la raccolta di piante e pesci rendono i nutrienti intrappolati collegati all'ambiente, seppur in modo non continuo.

Il sistema in questo senso non ha trappole, e quindi C può essere di Hurwitz e il sistema stabile. Per omogeneizzare la notazione del flusso di raccolta con gli altri flow rate, possiamo anche ipotizzare un flow rate di raccolta f_h , che intuitivamente sarà molto più piccolo rispetto ai flow rate idraulici e delle reazioni, oppure un flow rate variabile nel tempo a seconda dei cicli di crescita e di raccolta. Questo apre considerazioni sull'importanza della raccolta e quindi della manutenzione sulla stabilità dell'intero sistema.

PROPRIETÀ DINAMICHE DEI SISTEMI LINEARI DI FLUSSO DINAMICO

Consideriamo il sistema lineare di flusso dinamico (F, f_0, u) con matrice compartmentale C e grafo compartmentale G_f . Assumendo che il sistema abbia almeno una trappola, definiamo il sistema compartmentale ridotto $(F_{rd}, f_{0,rd}, u_{rd})$ come segue: rimuovendo tutte le trappole semplici da G_f e ridefinendo i rami verso il compartimento rimosso come rami di outflow verso l'ambiente. Ora osserviamo i risultati riguardo il comportamento asintotico del sistema:

Teorema 1.4

Il sistema in esame ha i seguenti possibili comportamenti asintotici:

i) se il sistema è outflow connected, allora C è invertibile, e ogni soluzione tende esponenzialmente all'unico punto di equilibrio $q^* = -C^{-1} \geq 0_n$, e per l' i -esimo compartimento abbiamo $q_i^* > 0$ se e solo se l' i -esimo compartimento è collegato ad un inflow positivo.

ii) se il sistema contiene una o più trappole semplici, allora:

a) il sistema compartmentale ridotto è outflow connected e tende perciò al punto di equilibrio definito precedentemente, con le specifiche del sistema ridotto e non di quello di partenza;

b) ogni trappola semplice H contiene massa non decrescente nel tempo. Se H è collegato a un inflow positivo, allora la massa in H cresce linearmente col tempo. Altrimenti, la massa in H converge asintoticamente a un multiplo scalare dell'autovettore destro corrispondente all'autovalore 0 della submatrice compartmentale per H (elemento del nucleo della matrice ridotta).

Avendo chiarito in che senso il nostro sistema è outflow connected, possiamo quindi calcolare l'unico punto di equilibrio q^* in funzione di ingressi e flow rates, e imporre che le concentrazioni nutritive nelle taniche di pesci e piante corrispondano alle concentrazioni fitness per le specie in esame per massimizzarne il rendimento. Nonostante ciò, la modellizzazione è lungi dall'essere completa, in quanto abbiamo evidenziato la dipendenza dei rendimenti dei bioreattori, ma anche degli assorbimenti di piante e animali dallo stato della popolazione, che si può intendere come semplice numero di individui per i microbi nei reattori, ma che per gli organismi superiori assume connotati anche di fase di sviluppo. Questi parametri sono a loro volta influenzati dalle caratteristiche della soluzione che di volta in volta si viene a formare, ed è quindi chiaro come ci manchi la comprensione della parte più complessa e fluttuante del sistema: gli organismi che esso ospita. Nel prossimo capitolo, proveremo a colmare almeno in parte questa lacuna, approfondendo la classe di modelli matematici che descrive le dinamiche di popolazione.

III. DINAMICHE DI POPOLAZIONE DI LOTKA-VOLTERRA

da *Lectures of Network Systems*

Nel contesto del sistema acquaponico, non si può pensare di avere una comprensione del processo senza aver definito in modo chiaro in che punto e in che modo i sistemi viventi prendono parte nel circolo dei nutrienti. Nel capitolo precedente, pur avendo posto l'attenzione sull'aspetto compartimentale, quasi idraulico del sistema, abbiamo perlomeno cercato di indicare di quali parametri lo stato dei sistemi viventi potesse essere variabile indipendente. Ecco quindi che il flow rate che lega la quantità di ammoniaca trasudata dipende dalla quantità di pesce, così come il flusso di acqua evotraspirata dipende anche dalla superficie fogliare e quindi dalla fase di crescita della verdura, mentre nei bioreattori le serie di reazioni dei batteri nitrificatori dipendono dal numero di individui di due popolazioni batteriche distinte che lavorano in serie. Quindi, può essere utile sviluppare modelli che descrivono le dinamiche che governano la crescita di comunità viventi sia quando ciò sia il fine ultimo della catena di produzione acquaponica, sia quando l'attività biotica influenza in modo attivo e desiderato lo spazio produttivo. Tuttavia, i diversi gruppi viventi possono essere modellizzati secondo schemi diversi: per pesci e piante, individui che subiscono un aumento vistoso di massa e dimensioni durante il loro ciclo vitale, il loro stato potrà essere in buona approssimazione riassunto dalla loro quantità in peso; non è infatti detto che entro il sistema siano abilitati a concludere un ciclo riproduttivo, perlomeno per quanto riguarda gli ortaggi, anche se è possibile che ciò avvenga per i pesci.

In ogni caso la differenza a livello metabolico sia in proporzioni che in valore assoluto tra un avannotto e un pesce adulto è tale da giustificare più una dipendenza dal peso della massa di pesce che dal numero di individui di cui è formata. Con queste ipotesi è facile tener conto dello stato del pesce dalla quantità in peso di mangime che non essendo trasformato in fango o ammoniaca si è accumulato nell'insieme degli organismi.

Per le popolazioni batteriche, tuttavia, ciò è meno valido: gli individui invecchiano poco e si riproducono velocemente, e un approccio di popolazione appare quindi più motivato. In questo capitolo ci occuperemo perciò dello studio delle dinamiche di popolazione descritte da modelli di Lotka-Volterra, uno dei più semplici ma anche dei più utilizzati modelli studiati in matematica ecologica per descrivere l'evoluzione nel tempo di popolazioni interconnesse,

sforzandoci anche in questo caso di indicare perlomeno la presenza di dipendenza nello sviluppo della popolazione di parametri ambientali, definiti dalla parte compartimentale del sistema che abbiamo descritto nel capitolo precedente.

MODELLI A DUE SPECIE

Analizziamo il sistema a due specie di Lotka-Volterra, descritto dalle due equazioni differenziali:

$$x_1' = x_1 \cdot (r_1 + a_{1,1} \cdot x_1 + a_{1,2} \cdot x_2)$$

$$x_2' = x_2 \cdot (r_2 + a_{2,1} \cdot x_1 + a_{2,2} \cdot x_2)$$

che si possono raccogliere in scrittura vettoriale valida per il generico caso di N specie interconnesse:

$$x' = \text{diag}(x) \cdot (A \cdot x + r) := f_{LV}(x)$$

Noi ci riferiremo in primo luogo alle due popolazioni di batteri nitrificatori, *Nitrosomonas* e *Nitrobacter*, perciò cercheremo di dare senso fisico ai sei parametri che caratterizzano il modello ($r_1, r_2, a_{1,1}, a_{1,2}, a_{2,1}, a_{2,2}$) tramite quel contesto: il vettore r è detto rate di crescita intrinseca, misurabile nelle popolazioni isolate, al variare delle condizioni della soluzione nutritiva, quindi per concentrazione di ammoniaca per *Nitrosomonas* e di nitriti per *Nitrobacter*, mentre la matrice $A = (a_{i,j})$ è detta matrice di interazione. Per modellare le risorse limitate assumiamo $r_i > 0$ e $a_{i,i} < 0$.

Il segno di $a_{1,2}$ e $a_{2,1}$ caratterizza casi di interazione differenti come predazione, mutualismo, competizione eccetera. Nel nostro caso, è ragionevole assumere che in realtà *Nitrosomonas* non tragga né vantaggi né svantaggi dalla presenza del secondo batterio che metabolizza i suoi scarti (nonostante entrambe le reazioni siano aerobiche, e quindi le due specie possano teoricamente competere per l'ossigeno. Tuttavia, non essendo l'ossigeno conteggiato in questa trattazione, assumiamo che la soluzione prima del biofiltro venga fatta gorgogliare in atmosfera abbastanza a lungo da garantire ossigenazione ampiamente maggiore del fabbisogno minimo delle due specie microbiche), e possiamo perciò considerare $a_{1,2}=0$. *Nitrobacter* invece trae sicuramente vantaggio dai nitriti prodotti dall'ossidazione precedente, che dipende dalla popolazione di *Nitrosomonas* ma anche dalla concentrazione di ammoniaca che essi hanno trovato disponibile: ecco quindi che $a_{2,1}$ dipende dalla concentrazione di ammoniaca, dipendente dall'intero insieme dei compartimenti. $a_{1,1}$ e $a_{2,2}$ sono invece legati alla capacità portante del sistema, e sono negativi proprio per indicare come al crescere di individui la possibilità di contenerne di nuovi e quindi la spinta all'esplosione demografica risulti ridotta. In questo caso, le risorse ambientali sono le specie dell'azoto che i batteri usano come

sostentamento. Si avrà quindi che $a_{1,1}$ dipende istante per istante dalla concentrazione di ammoniaca, mentre $a_{2,2}$ da quella di nitriti.

Notiamo i seguenti aspetti:

- i) lungo l'asse $x_2=0$, esiste un unico punto di equilibrio (diverso da zero) $x_1^*=-r_1/a_{1,1}$;
- ii) similmente lungo $x_1=0$ esiste un altro unico punto di equilibrio non banale $x_2^*=-r_2/a_{2,2}$
- iii) la curva x_1' nullo è l'insieme dei punti (x_1, x_2) dove $x_1'=0$, cioè la curva nel piano (x_1, x_2) definita da $r_1+a_{1,1}x_1+a_{1,2}x_2=0$: nel nostro caso, essendo $a_{1,2}$ nullo il luogo dei punti è la retta verticale $x_1=-r_1/a_{1,1}$;
- iv) similmente, la curva x_2' nullo è l'insieme dei punti (x_1, x_2) definito da $r_2+a_{2,1}x_1+a_{2,2}x_2=0$: rappresentando x_1 come variabile indipendente, si tratta di una retta della forma $x_2=-(a_{2,1}/a_{2,2})x_1-r_2/a_{2,2}$.

Chiaramente, la curva di x_1' nullo passa per il punto di equilibrio x_1^* , mentre la curva di x_2' nullo passa per x_2^* . Studieremo successivamente il caso di interazione mutualistica, in quanto è il caso con cui meglio possiamo rappresentare l'andamento delle popolazioni batteriche catalizzanti le serie di reazioni.

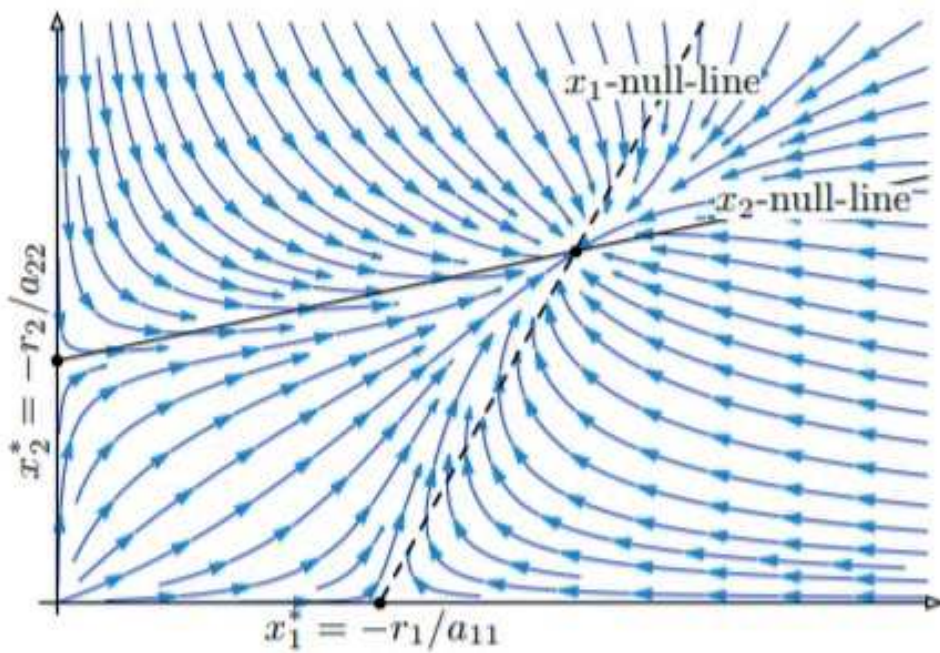
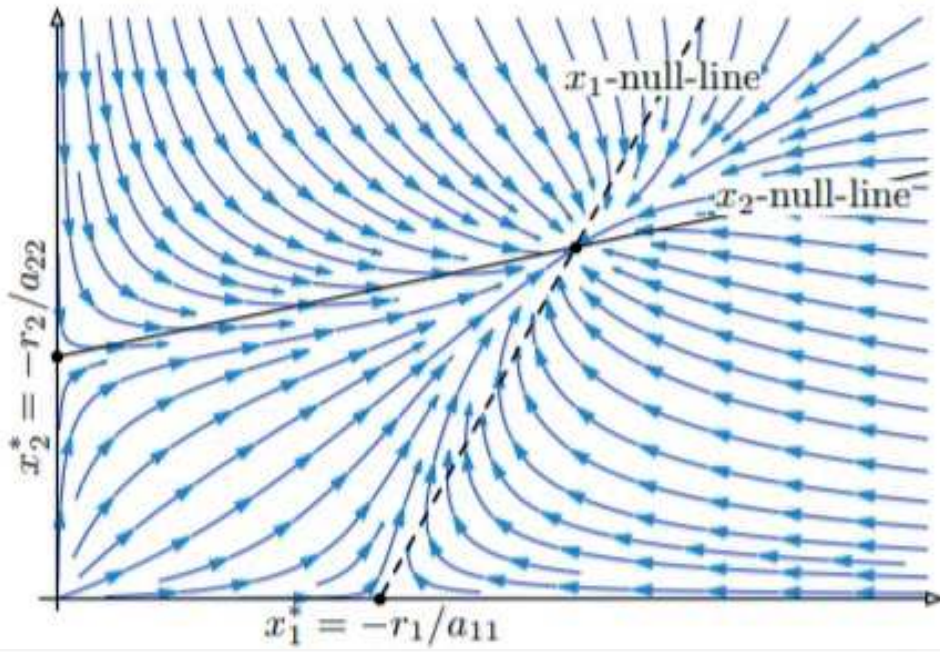
MUTUALISMO

A livello di parametri, l'interazione mutualista è caratterizzata dai coefficienti misti $a_{1,2}$ e $a_{2,1}$ positivi. Nel nostro caso particolare però la prima popolazione batterica non trae vantaggio dalla presenza della seconda, che non produce nutrienti disponibili per la prima ossidazione: siamo perciò in un caso di mutualismo unilaterale in cui una specie risulta indifferente alla presenza o meno dell'altra, dove perciò varrà $a_{1,2}=0$.

LEMMA

Consideriamo il sistema a due specie di Lotka-Volterra di parametri (r_1, r_2) e $(a_{1,1}, a_{1,2}, a_{2,1}, a_{2,2})$. Si assume una relazione mutualistica, cioè con $a_{1,2}$ e $a_{2,1}$ maggiori di zero (si noti che non è detto che il lemma si possa allargare al caso in esame in cui uno dei parametri sia strettamente uguale a zero). Il successivo enunciato afferma: Caso 1: se $a_{1,2}a_{2,1} < a_{1,1}a_{2,2}$, allora esiste un unico punto di equilibrio positivo (x_1^*, x_2^*) , dato da $x^*=-r \cdot A^{-1}$.

E tutte le traiettorie di $R_2 > 0$ convergono ad esso: è il nostro caso, in quanto essendo $a_{1,1}$ e $a_{2,2}$ negativi mentre $a_{1,2}$ è uguale a zero, vale $a_{1,1}a_{2,2} > 0$. Si ricorda però che nelle ipotesi del lemma si vogliono $a_{1,2}$ e $a_{2,1}$ strettamente positivi, per cui è bene trattare il risultato con cautela. Caso 2: se invece $a_{2,1}a_{1,2} > a_{1,1}a_{2,2}$, non esiste punto di equilibrio positivo e tutte le traiettorie in $R_2 > 0$ divergono.



Il punto di equilibrio è dato dall'intersezione delle rette x_1 nullo e x_2 nullo.
 La sua esistenza in forma accettabile (positiva) è dunque possibile se e solo se
 le due rette si intersecano in $R_2 > 0$.

MODELLI COOPERATIVI DI LOTKA-VOLTERRA

Ci concentriamo ora nel caso dei sistemi di Lotka-Volterra con sole interazioni mutualistiche, ossia dove i termini di interazione soddisfano $a_{ij} \geq 0$ per ogni i e per ogni j . Per questi sistemi, per i diverso da j sappiamo:

$$\frac{d}{dx_j}(f_{LV})_i(x) = x_i a_{i,j} \geq 0$$

Perciò la matrice Jacobiana di questi sistemi è di Metzler ovunque in $R \geq 0$. Questi sistemi sono detti cooperativi. Richiamiamo perciò le caratteristiche delle matrici di Metzler già esposte nel capitolo precedente: il teorema di Perron-Frobenius stabilisce l'esistenza di un autovalore dominante, perciò matrici di Metzler con autovalore dominante positivo hanno soluzioni non limitate del sistema di Lotka-Volterra, mentre matrici di Metzler con autovalore dominante negativo (e tasso di crescita intrinseco positivo) hanno un punto di equilibrio globale asintoticamente stabile. Cominciamo con condizioni sufficienti per le evoluzioni non limitate.

LEMMA: EVOLUZIONI NON LIMITATE PER MATRICI DI METZLER INSTABILI

Consideriamo il modello di Lotka-Volterra di matrice di interazione A e tasso di crescita intrinseco r . Se A è matrice di Metzler con autovalore dominante positivo, allora

- i) esistono soluzioni che divergono in tempo finito partendo da $R > 0$, e
- ii) se $r > 0$, allora tutte le soluzioni partendo da $R > 0$ divergono in tempo finito.

TEOREMA CONVERGENZA GLOBALE PER SISTEMI COOPERATIVI DI LOTKA-VOLTERRA

Per i sistemi di Lotka-Volterra di matrice di interazione A e tasso di crescita intrinseco r , assumiamo:

A3) la matrice di interazione A è di Metzler e Hurwitz, e

A4) il tasso di crescita intrinseco è positivo, $r > 0$ allora esiste un unico punto di equilibrio x^* e x^* è globalmente attrattivo in $R_n > 0$.

BIBLIOGRAFIA

- F. Bullo, *Lectures of Network System*, Edition 1.6 (print on demand), gennaio 2022.
- C.A. Espinal, B. Delaide, M. Haissam Jijakli, Z. Schmautz, S. Wuertz, K.J. Keesman, *Navigating towards Decoupled Aquaponic Systems: A System Dynamics Design Approach*, biblioteca online MDPI, 2016.

INDICE

MODELLIZZAZIONE DINAMICA DI UN SISTEMA ACQUAPONICO

3	INTRODUZIONE
7	I. DECOUPLED ACQUAPONIC SYSTEM
9	1) Vasche dei pesci
10	2) Filtro a tamburo
10	3) Tanica 1
11	4) Biofiltro
11	5) Unità denitrificatrice
12	6) Pre/post trattamento aerobico
12	7) Upflow anaerobic sludge blanket
12	8) Tanica 2
12	9) Letti idroponici
13	Riferimenti bibliografici
15	II. SISTEMI DI FLUSSO DINAMICO
15	Modelli a tempo continuo
21	Matrici di Metzler
21	Definizione 1.1 <i>Matrice di Metzler</i>
21	Definizione 1.2 <i>Grafo associato</i>
21	Osservazione 1.1
21	Osservazione 1.2
21	Teorema 1.1 <i>Teorema di Perron-Frobenius per le matrici di Metzler</i>
22	Teorema 1.2 <i>Teorema di Metzler-Hurwitz</i>
22	Proprietà algebriche e grafiche dei sistemi di flusso dinamico
23	Definizione 1.3 <i>Sistemi lineari di flusso dinamico</i>
23	Teorema 1.3 <i>Teoria algebrica dei grafi e sistemi di flusso dinamico</i>
24	Proprietà dinamiche dei sistemi lineari di flusso dinamico
24	Teorema 1.4
25	III. DINAMICHE DI POPOLAZIONE DI LOTKA-VOLTERRA
26	Modelli a due specie
27	Mutualismo
27	Lemma
29	Modelli cooperativi di Lotka-Volterra
29	Lemma evoluzione non limitata per matrici di Metzler instabili
29	Teorema 1.5 <i>Convergenza globale per sistemi cooperativi di Lotka-Volterra</i>
30	BIBLIOGRAFIA

