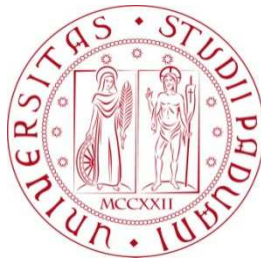


Università degli Studi di Padova
Dipartimento di Scienze Statistiche
Corso di Laurea Magistrale in
Scienze Statistiche



**Le Scelte Intertemporalì di Consumo
delle Famiglie Italiane**

Relatore Prof. Guglielmo Weber
Dipartimento di Scienze Economiche e Aziendali "Marco Fanno"

Laureando: Alessandro Moro
Matricola N. 1035050

Anno Accademico 2012/2013

Vita, si uti scias, longa est
(Seneca, *De brevitae vitae*)

Indice

Introduzione	9
Capitolo I: I modelli di scelta intertemporale e l'equazione di Eulero	13
1.1 Dalla teoria keynesiana ai modelli di scelta intertemporale	13
1.2 Un semplice modello con due periodi in condizione di certezza	15
1.3 Un esempio chiarificatore	19
1.4 Scelte intertemporali di consumo in condizioni di incertezza	20
1.5 L'equazione di Eulero e il modello equivalente al caso di certezza	23
1.6 L'equazione di Eulero con risparmio precauzionale	25
1.7 Perché scegliere una funzione di utilità CRRA?	29
1.8 L'equazione di Eulero con variabili socio-demografiche	30
1.9 L'importanza dell'equazione di Eulero e dei suoi parametri	31
Capitolo II: Metodi di stima GMM per l'equazione di Eulero	35
2.1 Stima GMM dell'equazione di Eulero	35
2.2 Stima dell'equazione di Eulero in forma log-linearizzata	37
2.3 Stimatori GMM per dati affetti da errori di misura	39
2.4 Perché usare dati microeconomici per stimare l'equazione di Eulero?	41
2.5 La critica di Chamberlain	43

Capitolo III: I dati e le variabili	45
3.1 L'Indagine sui bilanci delle famiglie italiane della Banca d'Italia	45
3.2 La definizione delle principali variabili	48
3.3 <i>Time aggregation</i> del tasso di interesse	50
Capitolo IV: Le stime GMM	53
4.1 La stima dell'equazione di Eulero log-linearizzata	53
4.2 La stima dell'equazione di Eulero in forma non lineare	62
4.3 Il problema dei vincoli di liquidità	71
4.4 Test di eccesso di sensibilità	82
4.5 Le implicazioni empiriche della critica di Chamberlain	86
4.6 L'equazione di Eulero per i soli consumi alimentari	89
Capitolo V: Eterogeneità nei parametri di preferenza intertemporale	93
5.1 Come introdurre eterogeneità nei parametri di preferenza intertemporale	93
5.2 Un nuovo tipo di stimatore	102
5.2.1 La simulazione dei dati	103
5.2.2 La definizione dei parametri ausiliari	105
5.2.3 La distribuzione delle preferenze intertemporali	108
Conclusione	117
Appendice econometrica	123
A.1 Il Metodo Generalizzato dei Momenti	123
A.2 Sotto-identificazione e identificazione debole nel caso lineare	126
A.3 Lo stimatore GMM-CUE	129
A.4 Valori critici di Stock e Yogo (2005)	130
A.5 Un programma per implementare lo stimatore SRE in R	134
Bibliografia	141

Introduzione

La stima dei parametri di allocazione intertemporale rappresenta il cuore della tesi. Questo tema ha assunto un'importanza via via crescente nel corso degli anni, da quando i modelli di scelte intertemporali proposti da Modigliani e Brumberg (1954) e da Friedman (1957) hanno messo in luce le criticità della teoria keynesiana del consumo.

L'affermazione del modello del ciclo di vita e della teoria del reddito permanente ha posto l'esigenza di stimare i parametri che regolano le scelte di consumo e di risparmio delle famiglie e di testare le implicazioni empiriche delle nuove teorie.

A partire dall'articolo di Hall (1978), questa esigenza si è tradotta nello studio e nella stima di quella che può essere definita la relazione fondamentale dei modelli di scelta intertemporale: l'equazione di Eulero.

Diverse tecniche econometriche sono state e continuano ad essere proposte per raggiungere tale scopo: dalla stima dell'equazione di Eulero log-linearizzata, passando per la definizione di stimatori per l'equazione di Eulero non lineare capaci di tenere in considerazione la presenza di errori di misura nel consumo, fino alle nuove metodologie di stima che si avvalgono di simulazioni.

La novità di questo studio risiede nell'applicazione di questi stimatori a un campione di famiglie italiane tratto dall'Indagine sui bilanci delle famiglie della Banca d'Italia. Infatti, gran parte della letteratura empirica sulla stima dell'equazione di Eulero si basa su dati e fonti campionarie anglo-sassoni. Il nostro studio, invece, ci ha permesso di reperire stime, con buone proprietà statistiche e in linea con la letteratura internazionale, per l'Italia dei principali

parametri che spiegano le scelte intertemporali: il fattore di sconto e l'elasticità di sostituzione intertemporale.

La tesi si articola nel seguente modo. Il primo capitolo presenta il modello del ciclo vitale, la teoria del reddito permanente, la nozione di risparmio precauzionale, la derivazione dell'equazione di Eulero ed illustra l'importanza di tale relazione nei vari ambiti della teoria economica.

Il secondo capitolo descrive l'applicazione del Metodo Generalizzato dei Momenti (GMM) alla stima dell'equazione di Eulero, sia nella sua versione log-linearizzata sia in quella non lineare. In particolare, si considera il problema della presenza di errori di misura nel consumo e la rilevanza che tale problematica riveste per la consistenza delle stime. Vengono presentati, inoltre, stimatori che tengono esplicitamente in considerazione la presenza di errori di misura e che, quindi, sono in grado di ripristinare le usuali buone proprietà asintotiche dello stimatore.

Il terzo capitolo offre una rapida descrizione delle principali caratteristiche dell'Indagine sui bilanci delle famiglie italiane e delle variabili impiegate nella stima dell'equazione di Eulero: in particolare, ci si sofferma sulla tematica dell'aggregazione temporale del tasso di interesse da impiegare nella fase di stima.

Il quarto capitolo è totalmente dedicato alla stima GMM dei parametri di allocazione intertemporale basata sul nostro campione: vengono presentati i risultati della stima per l'equazione di Eulero nella forma log-linearizzata e per quella non lineare; inoltre, si considerano diverse scelte del tasso di interesse e si valuta l'importanza della restrizione del campione alle sole famiglie potenzialmente meno soggette a vincoli di liquidità. Oltre a tutto questo, si affronta il tema dell'eccesso di sensibilità del consumo alla crescita attesa del reddito, la problematica legata alla rilevanza di disporre di un campione che copra un vasto arco temporale e, per ultima, la stima dell'equazione di Eulero per i soli consumi alimentari.

Nel quinto e ultimo capitolo, si studiano diversi modi per introdurre eterogeneità nei parametri di preferenza intertemporale, in particolare facendoli variare con il titolo di studio del capofamiglia. Inoltre, viene presentato un nuovo metodo di stima, chiamato *Synthetic Residual Estimation* (SRE), che si basa sulla simulazione diretta dell'andamento del consumo familiare e che sceglie come

stima dei parametri quei valori che rendono l'andamento dei consumi simulati il più vicino possibile a quello dei consumi realmente osservati.

Infine, nella conclusione vengono ricapitolati i principali risultati ai quali siamo pervenuti mentre nell'appendice econometrica si accenna brevemente alla stima GMM in generale, alla problematica degli strumenti deboli e ai metodi di inferenza più robusti in presenza di identificazione debole del modello.

Capitolo I

I modelli di scelta intertemporale e l'equazione di Eulero

1.1 Dalla teoria keynesiana ai modelli di scelta intertemporale

Fino ai primi anni '50, la teoria delle scelte di consumo prevalente nell'ambito degli studi macroeconomici era quella ispirata dalla "legge psicologica fondamentale" formulata da Keynes. Uno degli aspetti fondamentali di tale teoria era la relazione che legava il consumo al solo reddito disponibile corrente, ovvero era esclusa ogni forma di dinamica intertemporale: veniva completamente trascurato il ruolo del risparmio nell'incrementare il livello futuro del consumo, così come si assumeva che il comportamento passato non influenzasse il livello corrente del consumo.

Negli anni '50 furono proposti due modelli basati sull'ottimizzazione intertemporale che cercarono di superare le limitazioni imposte dalla teoria keynesiana.

Il primo di questi fu il modello del ciclo vitale di Modigliani e Brumberg (1954): secondo tale modello le famiglie risparmiano per far fronte a cadute prevedibili del reddito, tra le quali la più importante è quella che gli individui subiscono quando escono dal mercato del lavoro.

Le ipotesi più significative che stanno alla base del modello del ciclo vitale sono l'orizzonte di pianificazione finito e il comportamento egoistico dei

consumatori, cioè essi presentano un comportamento che non tiene in considerazione il benessere delle successive generazioni.

L'altro modello fondamentale è rappresentato dalla teoria del reddito permanente di Friedman (1957). Secondo tale approccio, gli individui pongono il consumo pari al valore atteso dei propri redditi correnti e futuri, opportunamente scontati mediante il tasso di interesse.

L'ipotesi del modello del reddito permanente è che l'orizzonte di pianificazione del consumatore è infinito, ovvero gli individui sono altruisti e nel massimizzare la propria utilità tengono in considerazione il benessere degli eredi. Il modello, quindi, invece di considerare le scelte del singolo consumatore, considera quelle di una dinastia.

Un'altra differenza tra i due modelli è rappresentata dalla natura dei redditi futuri del consumatore: certa per il modello del ciclo di vita; stocastica per il modello del reddito permanente.

Tuttavia, pur partendo da ipotesi profondamente diverse, i due modelli presentano alcuni aspetti comuni: entrambi adottano un approccio microeconomico, considerando un consumatore che massimizza la propria utilità soggetta a un vincolo di bilancio intertemporale; entrambi pervengono alla conclusione che il consumo sia una funzione delle risorse disponibili al consumatore nell'arco della sua esistenza; entrambi concordano nel ritenere che shock inattesi al reddito vengano incorporati nel risparmio invece che nel consumo.

Infine, se negli anni '50 sono state poste le basi per lo studio teorico delle scelte di consumo e risparmio intertemporali, è negli anni '70, a partire dall'articolo di Hall (1978), che si incomincia ad analizzare e a stimare l'equazione di Eulero, ovvero la condizione del primo ordine nel problema di ottimizzazione dinamica.

L'analisi dell'equazione di Eulero viene effettuata, inizialmente, per testare empiricamente le implicazioni dei modelli teorici e, successivamente, per stimare i parametri che determinano le preferenze intertemporali dei consumatori.

1.2 Un semplice modello con due periodi in condizione di certezza

Iniziamo con un semplice modello in cui un consumatore vive per due periodi senza incertezza riguardo ai redditi futuri. Supponiamo che egli disponga all'inizio del primo periodo di una sola attività finanziaria a_0 , percepisca un reddito da lavoro y_0 , e decida un livello di consumo di beni non durevoli c_0 . Quanto viene risparmiato nel primo periodo può essere trasferito al secondo periodo ricevendo un tasso di interesse r . Allo stesso tasso il consumatore può anche indebitarsi, cioè assumiamo l'ipotesi di mercati di capitali perfetti. Nel secondo periodo, il consumatore riceve un reddito certo y_1 e decide il livello di consumi c_1 .

Con questi dati, siamo in grado di definire il vincolo di bilancio dinamico del consumatore:

$$(1.1) \quad a_{t+1} = (1 + r)(a_t + y_t + c_t)$$

Per $t = 0, 1$. Tale vincolo afferma che la ricchezza in un dato periodo è pari alla somma della ricchezza e del reddito del periodo precedente alla quale viene sottratto il consumo, sempre del periodo precedente. Tale quantità viene trasferita nel periodo successivo incrementata in base agli interessi maturati. Poiché il vincolo di bilancio dinamico non garantisce che il consumatore non si indebiti per un ammontare che non sarà in grado di restituire, è necessario porre una condizione terminale, ovvero $a_2 \geq 0$. Assumendo che le eredità non abbiano alcun beneficio per il consumatore, egli porrà $a_2 = 0$.

Risolvendo all'indietro il vincolo di bilancio dinamico, si ottiene quello che viene definito il vincolo di bilancio intertemporale:

$$(1.2) \quad c_0 + \frac{c_1}{(1 + r)} = a_0 + y_0 + \frac{y_1}{(1 + r)}$$

Questo vincolo afferma che la somma scontata dei consumi presenti e futuri deve eguagliare la somma scontata delle risorse presenti e future. La somma del reddito corrente e del reddito futuro scontato viene anche definita capitale umano.

Scritto il vincolo al quale il consumatore deve sottostare, definiamo adesso le preferenze del consumatore riguardo alla scelta di quanto consumare in

ciascuno dei due periodi mediante una funzione di utilità $u(c_0, c_1)$. Ipotizziamo che tale funzione sia concava e che l'utilità marginale del consumo sia positiva e decrescente. Inoltre, imponiamo che la funzione di utilità sia additiva e separabile nel tempo. In questo modo, possiamo scrivere:

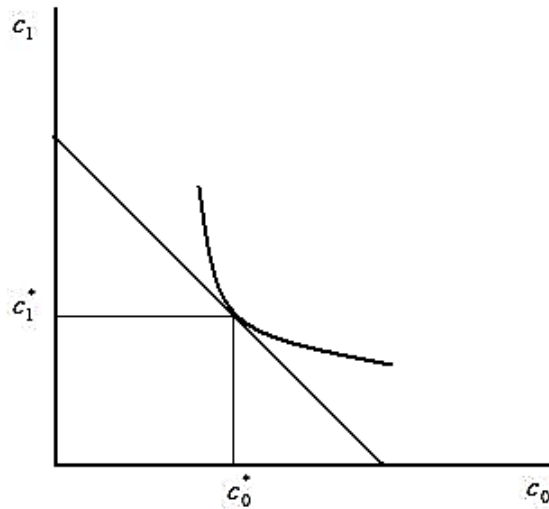
$$(1.3) \quad u(c_0, c_1) = u(c_0) + \frac{u(c_1)}{1 + \delta}$$

Con $\frac{\partial u(\cdot)}{\partial c_j} > 0$ e $\frac{\partial^2 u(\cdot)}{\partial c_j^2} < 0$, per $j = 0, 1$. Dove $\delta \in [0, 1]$ è definito come il tasso di preferenza intertemporale e misura il grado di impazienza del consumatore. Il problema del consumatore si riduce quindi a massimizzare (1.3) sul vincolo (1.2). Graficamente¹ il problema può essere rappresentato nel piano (c_0, c_1) . Il vincolo di bilancio è una retta con inclinazione negativa pari a $-(1 + r)$. Quest'ultimo termine rappresenta, in valore assoluto, il prezzo del consumo nel primo periodo espresso nei termini del consumo nel secondo periodo: infatti, se il consumatore consuma una unità di consumo nel primo periodo, rinuncia a consumare $(1 + r)$ unità nel secondo periodo.

Invece, le preferenze del consumatore corrispondono ad un fascio di curve di indifferenza: a ognuna è associata un determinato valore dell'utilità e man mano che ci si allontana dall'origine l'utilità cresce. La pendenza di una curva di indifferenza, in valore assoluto, può essere interpretata come la quantità di consumo futuro che si deve dare al consumatore per farlo rinunciare a un'unità di consumo corrente: essa corrisponde quindi al saggio marginale di sostituzione (SMS) tra il consumo nel primo periodo e quello nel secondo. L'equilibrio si trova nel punto di tangenza tra il vincolo di bilancio e la curva di indifferenza tangente al vincolo e, dunque, in equilibrio si ha che $1 + r = SMS$.

¹ I grafici di Figura 1.1 e 1.2 sono tratti dalla relazione finale per la Laurea Triennale dello stesso autore di questo testo: Moro, Alessandro. 2011. *Gli Effetti della Grande Recessione su Consumo e Risparmio delle Famiglie Italiane*.

Figura 1.1



Per risolvere analiticamente il problema di massimizzazione scriviamo la funzione Lagrangiana da massimizzare:

$$(1.4) \quad \max_{c_0, c_1} L = u(c_0) + \frac{u(c_1)}{1 + \delta} + \lambda \left(a_0 + y_0 + \frac{y_1}{(1 + r)} - c_0 - \frac{c_1}{(1 + r)} \right)$$

Da cui otteniamo le condizioni di primo ordine:

$$(1.5) \quad u'(c_0) = \lambda \quad \text{e} \quad u'(c_1) \frac{1+r}{1+\delta} = \lambda$$

Tali condizioni ci permettono di ottenere l'equazione di Eulero:

$$(1.6) \quad u'(c_0) = \frac{1+r}{1+\delta} u'(c_1)$$

L'equazione di Eulero è la relazione che descrive l'andamento del consumo nel tempo, cioè la relazione di equilibrio tra consumo corrente e consumo futuro che massimizza l'utilità. In particolare, a tale riguardo, si distinguono tre casi:

1. $r > \delta$: se il tasso di interesse, ovvero l'incentivo del consumatore a risparmiare e a posticipare il consumo, è superiore al tasso di preferenza intertemporale, che corrisponde all'incentivo ad anticipare il consumo, allora $c_0 < c_1$;

2. $r < \delta$: se il tasso di interesse è inferiore al tasso di preferenza intertemporale, allora il consumatore preferisce anticipare il consumo e $c_0 > c_1$;
3. $r = \delta$: i due incentivi si equivalgono e il consumo sarà costante, ovvero $c_0 = c_1$.

Mettendo a sistema l'equazione di Eulero con il vincolo di bilancio intertemporale si può calcolare la funzione del consumo che è del tipo:

$$(1.7) \quad c_0^* = f(r, W) \text{ e } c_1^* = g(r, W)$$

Dove $W = a_0 + y_0 + \frac{y_1}{(1+r)}$ indica la ricchezza del consumatore lungo il ciclo di vita. A differenza della funzione di consumo keynesiana, in cui l'unica variabile determinante a spiegare il consumo è il reddito disponibile corrente, in questa nuova funzione di consumo concorrono a spiegare il livello del consumo l'insieme della ricchezza e dei redditi percepiti nel corso della vita attualizzati secondo il tasso di interesse.

È importante notare che l'equazione di Eulero rappresenta una condizione di ottimo che deriva dalla condizione del primo ordine del problema di massimizzazione del consumatore. Essa, dunque, non è la soluzione del problema che invece è rappresentata dalla funzione di consumo.

Ora esaminiamo come i livelli ottimi di consumo variano al variare delle variabili esogene.

Ad esempio, un incremento della ricchezza disponibile lungo il ciclo vitale W , muove il vincolo di bilancio verso l'alto e questo provoca un aumento sia del consumo corrente sia del consumo futuro.

L'effetto del tasso di interesse sul livello del consumo del primo periodo, invece, è incerto se il consumatore risparmia nel primo periodo. Infatti, in generale il tasso di interesse ha tre effetti sul consumo:

1. se il consumatore risparmia nel primo periodo, un aumento del tasso di interesse aumenta il reddito da capitale nel secondo periodo, che porta ad aumentare sia il consumo corrente che quello futuro (effetto reddito);

2. un aumento del tasso di interesse aumenta il prezzo del consumo nel primo periodo e questo è un incentivo a sostituire consumo corrente con consumo futuro (effetto sostituzione);
3. infine, un aumento del tasso di interesse riduce il valore corrente del capitale umano e questo comporta una riduzione dei consumi in entrambi i periodi (effetto capitale umano o effetto ricchezza).

L'effetto sostituzione e l'effetto ricchezza tendono a ridurre il consumo corrente mentre l'effetto reddito tende ad aumentarlo: dunque, l'effetto del tasso di interesse sul consumo corrente è ambiguo. Per capire quale delle due forze prevalga e sotto quali condizioni è necessario assumere una funzione per le preferenze intertemporali. Se, invece, il consumatore si indebita nel primo periodo, anche l'effetto reddito tende a ridurre il consumo presente perché il debitore dovrà pagare maggiori interessi: quindi se il consumatore si indebita un incremento del tasso di interesse riduce il consumo corrente.

Si noti, tuttavia, che l'effetto di un incremento del tasso di interesse sul tasso di crescita del consumo non è mai negativo: l'equazione di Eulero mostra come, al crescere del tasso di interesse, cresca l'incentivo a posticipare il consumo e quindi il tasso di crescita del consumo aumenta.

1.3 Un esempio chiarificatore

In questo paragrafo cercheremo di esemplificare i concetti introdotti precedentemente specificando una particolare forma per le preferenze intertemporali che ritornerà più volte in questo lavoro.

Assumiamo che la funzione di utilità del consumatore sia di tipo isoelastico o con avversione relativa al rischio costante (CRRA, *Constant relative risk aversion*): $u(c_t) = \frac{c_t^{1-\gamma}-1}{1-\gamma}$, dove $\gamma > 0$ è il coefficiente di avversione relativa al rischio. Per continuità si definisce $u(c_t) = \ln c_t$ quando $\gamma = 1$: in quest'ultimo caso si parla di utilità logaritmica.

L'equazione di Eulero in questo diviene:

$$(1.8) \quad \left(\frac{c_1}{c_0}\right)^{-\gamma} \frac{1+r}{1+\delta} = 1$$

Applicando la trasformazione logaritmica alla (1.8) otteniamo:

$$(1.9) \quad \ln c_1 - \ln c_0 \approx \frac{1}{\gamma} (r - \delta)$$

Dove abbiamo utilizzato l'approssimazione $\ln(1+x) \approx x$. Il reciproco dell'avversione al rischio misura la sensibilità del tasso di crescita del consumo, ovvero il lato sinistro della (1.9), rispetto a variazioni del tasso di interesse. Questa sensibilità viene definita elasticità di sostituzione intertemporale.

Esplicitando c_1 dalla (1.8) e sostituendo l'espressione nel vincolo di bilancio intertemporale si ottiene la seguente funzione di consumo:

$$(1.10) \quad c_0^* = \frac{1}{\left[1 + (1+r)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} \left(\frac{1}{1+\delta} \right)^{\frac{1}{\gamma}} \right]} W$$

La derivata del consumo corrente rispetto al tasso di interesse è pari a:

$$(1.11) \quad \frac{\partial c_0^*}{\partial r} = \left\{ \frac{\left(\frac{\gamma-1}{\gamma} \right) (1+r)^{\frac{1-2\gamma}{\gamma}} \left(\frac{1}{1+\delta} \right)^{\frac{1}{\gamma}}}{\left[1 + (1+r)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} \left(\frac{1}{1+\delta} \right)^{\frac{1}{\gamma}} \right]^2} \right\} W$$

Pertanto, se $\gamma < 1$ un incremento del tasso di interesse riduce il consumo corrente, cioè l'effetto sostituzione e l'effetto capitale umano dominano l'effetto reddito; viceversa se $\gamma > 1$ un incremento del tasso di interesse aumenta il consumo corrente, cioè prevale l'effetto reddito; infine, se $\gamma = 1$ il consumo corrente è insensibile a variazioni del tasso di interesse.

1.4 Scelte intertemporali di consumo in condizione di incertezza

In questo paragrafo ci occuperemo della derivazione dell'equazione di Eulero nell'ambito delle scelte intertemporali di consumo in condizioni di incertezza.

Consideriamo un consumatore che nel periodo t intende massimizzare il valore atteso dell'utilità per un numero finito di periodi. Tale consumatore è sottoposto a due fonti d'incertezza rappresentate dalla aleatorietà dei redditi e dei tassi di interesse futuri che, dunque, vengono trattati come variabili casuali.

L'obiettivo del consumatore, nell'ipotesi di funzione di utilità additiva e separabile nel tempo e tra stati di natura², risulta dunque essere:

$$(1.12) \quad \max_{c_t \dots c_T} E \left[\sum_{\tau=0}^{T-t} \frac{1}{(1+\delta)^\tau} u(c_{t+\tau}) | I_t \right]$$

Soggetto al vincolo di bilancio dinamico:

$$(1.13) \quad a_{t+\tau+1} = (1+r_{t+\tau+1})(a_{t+\tau} + y_{t+\tau} + c_{t+\tau})$$

per $\tau = 0, 1, \dots, T-t$. Nelle espressioni precedenti, $u(\cdot)$ rappresenta la funzione di utilità istantanea, assunta essere concava e con derivata prima positiva e decrescente; $\delta \in [0, 1]$ è il tasso di preferenza intertemporale e misura il grado di impazienza del consumatore; $a_{t+\tau}$ è la ricchezza del consumatore misurata all'inizio del periodo $t+\tau$; $r_{t+\tau}$ è il tasso d'interesse reale tra il periodo $t+\tau-1$ e il periodo $t+\tau$ al quale il consumatore può prendere e dare a prestito; infine, $y_{t+\tau}$ e $c_{t+\tau}$ rappresentano rispettivamente il reddito percepito dal consumatore e il consumo di beni non durevoli nel periodo $t+\tau$. Il valore atteso della funzione di utilità è condizionato all'insieme informativo del periodo t e l'ottimizzazione intertemporale avviene su un numero finito di periodi, da t a T , che possiamo pensare come riferiti alla vita residua del consumatore.

Perché il problema sia ben definito dobbiamo anche imporre la seguente condizione terminale:

$$(1.14) \quad a_{T+1} \geq 0$$

Tale condizione risulta chiaramente soddisfatta con il segno di eguaglianza dato che le eredità non producono alcun incremento di utilità. Inoltre, il vincolo di bilancio dinamico vale solo *ex post*: dopo che le variabili casuali si sono realizzate

² Tale ipotesi comporta che $U(c_t, \dots, c_T) = \sum_{\tau=0}^{T-t} u_{t+\tau}(c_{t+\tau})$.

il vincolo vale esattamente mentre all'inizio del periodo è possibile solo calcolare delle aspettative sulle variabili che lo determinano.

Il problema può essere risolto ricorrendo al metodo della programmazione dinamica definendo la seguente funzione valore:

$$(1.15) \quad V_t(a_t) = \max_{c_t \dots c_T} E \left[\sum_{\tau=0}^{T-t} \frac{1}{(1+\delta)^\tau} u(c_{t+\tau}) | I_t \right]$$

Quest'ultima espressione rappresenta l'utilità attesa massima che il consumatore percepisce dalla sequenza ottimale di consumi corrispondente alla dotazione iniziale di ricchezza a_t , che risulta essere la variabile di stato del problema. Sfruttando l'equazione di Bellman, il problema multiperiodale può essere scomposto in una serie di problemi biperiodali ricorsivi:

$$(1.16) \quad \begin{aligned} V_t(a_t) &= \max_{c_t, a_{t+1}} u(c_t) + (1+\delta)^{-1} E[V_{t+1}(a_{t+1}) | I_t] \\ &= \max_{c_t} u(c_t) + (1+\delta)^{-1} E[V_{t+1}((1+r_{t+1})(a_t + y_t - c_t)) | I_t] \end{aligned}$$

L'ultima equazione mette in evidenza come il consumatore scelga il valore ottimale del consumo nel periodo corrente formulando delle aspettative sui redditi e i tassi di interesse futuri. Derivando la (1.16) rispetto alla variabile c_t , otteniamo la condizione del primo ordine:

$$(1.17) \quad u'(c_t) - (1+\delta)^{-1} E[(1+r_{t+1}) V'_{t+1}(a_{t+1}) | I_t] = 0$$

Il termine $V'_{t+1}(a_{t+1})$ non è tuttavia osservabile. Supponiamo allora che $c_t(a_t)$ sia la soluzione del problema (1.16) e, quindi, sia tale che:

$$(1.18) \quad V_t(a_t) = u[c_t(a_t)] + (1+\delta)^{-1} E\{[V_{t+1}((1+r_{t+1})(a_t + y_t - c_t(a_t)))] | I_t\}$$

Derivando la (1.18) rispetto ad a_t e utilizzando l'espressione (1.17) abbiamo:

$$(1.19) \quad V'_t(a_t) = (1+\delta)^{-1} E[(1+r_{t+1}) V'_{t+1}(a_{t+1}) | I_t]$$

Combinando poi la (1.19) con la (1.17), si ottiene quella che viene definita la condizione dell'involuppo, ovvero l'utilità marginale della ricchezza coincide con l'utilità marginale del consumo:

$$(1.20) \quad V'_t(a_t) = u'(c_t) \quad \forall t$$

Quest'ultima equazione ci permette di riscrivere la (1.17) e di ottenere l'equazione di Eulero:

$$(1.21) \quad u'(c_t) = (1 + \delta)^{-1} E[(1 + r_{t+1})u'(c_{t+1})|I_t]$$

Tale equazione esprime la condizione di ottimo intertemporale e descrive l'evoluzione dinamica dell'utilità marginale del consumo: il consumatore sceglie il livello di consumo corrente in modo che l'utilità marginale nel periodo t sia pari al valore atteso dell'utilità marginale del periodo $t + 1$ opportunamente corretta per il tasso di interesse e per il tasso di preferenza intertemporale, che rappresentano rispettivamente l'incentivo a posticipare e ad anticipare il consumo nel tempo.

1.5 L'equazione di Eulero e il modello equivalente al caso di certezza

Oltre alle ipotesi fatte in precedenza, imponiamo ora che la funzione di utilità istantanea sia quadratica: $u(c_t) = ac_t - \frac{b}{2} c_t^2$.

Inoltre, per semplicità, supponiamo che il tasso di interesse sia noto e costantemente pari al tasso di preferenza intertemporale. Sotto queste restrizioni l'equazione (1.21) si semplifica:

$$(1.22) \quad E(c_{t+1}|I_t) = c_t \text{ ovvero } c_{t+1} = c_t + \varepsilon_{t+1} \text{ con } E(\varepsilon_{t+1}|I_t) = 0$$

Sotto queste assunzioni, dunque, il consumo segue un processo stocastico *random walk* (Hall, 1978): *ex ante* il miglior previsore del consumo futuro è il consumo corrente mentre, *ex post*, il consumo varia solo per effetto dell'errore di previsione. La (1.22) mette bene in evidenza il concetto espresso da Modigliani e Brumberg (1954) circa il fatto che il consumatore tenda a mantenere costante il livello del consumo nel tempo.

In questo caso particolare, sotto le assunzioni imposte, è possibile trovare una soluzione esplicita per il livello del consumo. Infatti, si consideri il valore atteso del vincolo di bilancio intertemporale, ottenuto a partire dal vincolo di bilancio dinamico (1.13) per sostituzioni successive:

$$(1.23) \quad \sum_{\tau=0}^{T-t} \frac{E(c_{t+\tau}|I_t)}{(1+r)^\tau} = a_t + \sum_{\tau=0}^{T-t} \frac{E(y_{t+\tau}|I_t)}{(1+r)^\tau}$$

Per la relazione (1.22) si ha che: $E(c_{t+\tau}|I_t) = c_t \forall \tau$. Inoltre, assumiamo che l'orizzonte di vita del consumatore T tenda ad infinito.³ Questo ci porta a riscrivere la (1.23) come:

$$(1.24) \quad c_t \sum_{\tau=0}^{\infty} \frac{1}{(1+r)^\tau} = a_t + \sum_{\tau=0}^{\infty} \frac{E(y_{t+\tau}|I_t)}{(1+r)^\tau}$$

Sfruttando le proprietà della serie geometrica, riusciamo a determinare la seguente funzione di consumo (Flavin, 1981):

$$(1.25) \quad c_t = \frac{r}{1+r} \left[a_t + \sum_{\tau=0}^{\infty} \frac{E(y_{t+\tau}|I_t)}{(1+r)^\tau} \right] \equiv E(y_t^P|I_t)$$

Quest'ultima relazione mette in luce una delle più importanti implicazioni del modello, evidenziata per la prima volta da Friedman (1957), e cioè come il consumo sia pari al valore atteso condizionato del reddito permanente, definito come la somma della ricchezza e dei redditi correnti e futuri scontati moltiplicata per il tasso di interesse:⁴ il consumatore, quindi, consuma solo quel flusso di risorse che mantiene inalterato il valore della ricchezza nel tempo.

Inoltre, è importante osservare come il consumo dipenda solo dal valore atteso condizionato delle risorse future mentre gli altri momenti della distribuzione dei redditi non hanno alcuna influenza: il consumatore, pertanto, si comporta come se le quantità future fossero completamente note e, per questa ragione, il modello viene definito come equivalente al caso di certezza.

³ È in questo punto che la teoria del reddito permanente di Friedman si discosta maggiormente da quella del ciclo vitale di Modigliani e Brumberg. L'ipotesi di orizzonte infinito si giustifica se si considera una dinastia di consumatori nella quale ognuno di essi, nel massimizzare la funzione obiettivo, tiene conto anche del benessere della propria discendenza. La condizione terminale del problema di massimizzazione in questo caso diventa: $\lim_{t \rightarrow \infty} a_t(1+r)^{-t} = 0$

⁴ La divisione per $1+r$ è dovuta al fatto che il tasso di interesse viene percepito per ipotesi nel periodo successivo e quindi è necessario attualizzarlo di un periodo.

La derivazione della funzione di consumo permette di dare una interpretazione strutturale del termine di errore dell'equazione di Eulero (1.22): infatti, prendendo la differenza prima di (1.25) otteniamo:

$$(1.26) \quad c_t - c_{t-1} = \varepsilon_t = \frac{r}{1+r} \left[\sum_{\tau=0}^{\infty} \frac{E(y_{t+\tau}|I_t) - (y_{t+\tau}|I_{t-1})}{(1+r)^\tau} \right]$$

La (1.26) mostra come le variazioni nel consumo siano dovute esclusivamente alle variazioni delle aspettative sui redditi futuri: se nuove informazioni inducono il consumatore a variare le proprie aspettative rispetto a quelle formulate nel periodo precedente allora vi è una variazione dei consumi nel tempo; se le aspettative non cambiano, viceversa, il consumo rimane costante.

1.6 L'equazione di Eulero con risparmio precauzionale

Nel paragrafo precedente abbiamo visto come, assumendo una funzione di utilità quadratica, il consumo sia una funzione lineare dei valori attesi condizionati delle risorse future mentre non dipenda da momenti di ordine superiore. Tuttavia, questo risultato sembra essere irrealistico perché presuppone che un individuo, nello scegliere il livello corrente di consumo, non tenga minimamente conto della variabilità dei redditi futuri.

Invece, sembrerebbe maggiormente ragionevole il comportamento di un consumatore che, a fronte di una maggiore variabilità del reddito (e quindi del consumo) futuro, preferisca ridurre il consumo corrente per proteggersi dal maggiore rischio. In letteratura un simile consumatore viene definito come prudente e questo tipo di risparmio viene detto risparmio precauzionale, perché non è motivato da una diminuzione del valore atteso del reddito futuro ma da un aumento delle sua variabilità. La condizione matematica che deve rispettare una funzione di utilità per ammettere prudenza è che la sua derivata terza sia positiva $u'''(c) > 0$, condizione chiaramente non soddisfatta dalla funzione di utilità quadratica.

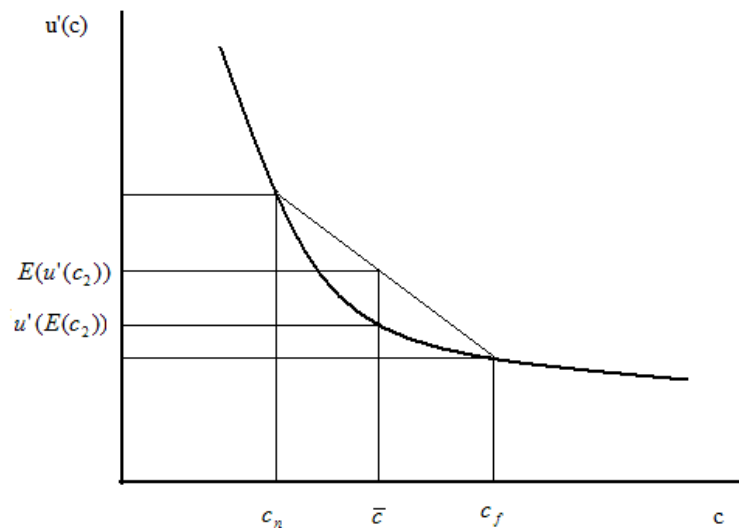
Per capire perché tale condizione debba essere soddisfatta immaginiamo un consumatore che vive due periodi, 1 e 2. Poniamo che $r = \delta$, per semplicità. Supponiamo inoltre che ci siano due scenari: nel primo scenario, il consumatore

ha un livello di consumo certo nel secondo periodo pari a \bar{c} ; nel secondo scenario, il consumatore può consumare, sempre nel secondo periodo, un ammontare $c_f > \bar{c}$ con probabilità $\frac{1}{2}$ oppure $c_n < \bar{c}$ con probabilità complementare. Sia inoltre $\bar{c} = \frac{c_f + c_n}{2}$. L'ipotesi fatta sulla derivata terza implica che:

$$(1.27) \quad u'(\bar{c}) = u'[E(c_2)] < E[u'(c_2)] = \frac{u'(c_f) + u'(c_n)}{2}$$

Questa condizione si può intuire anche dal seguente grafico.

Figura 1.2



Ma, data l'equazione di Eulero $E[u'(c_2)] = u'(c_1)$, si ha che nel secondo scenario, quello caratterizzato da variabilità del consumo futuro, il consumatore sceglie un livello di consumo nel primo periodo inferiore a quello che sceglierebbe se si trovasse nel primo contesto, quello caratterizzato da un consumo futuro certo. Invece, nel modello equivalente al caso di certezza, in cui abbiamo ipotizzato una funzione di utilità quadratica e, quindi, caratterizzata da una derivata terza nulla, il movente precauzionale è assente, pur essendo il consumatore avverso al rischio (derivata seconda negativa): infatti, con una simile funzione di utilità il consumatore sceglierebbe lo stesso livello di consumo in entrambi gli scenari.

Uno dei modi per ricavare l'equazione di Eulero mettendo in luce il ruolo del risparmio precauzionale è quello di formulare ipotesi specifiche sulla funzione di utilità e sulla distribuzione dei consumi e dei tassi di interesse futuri.

Come Hansen e Singleton (1983) supponiamo che la funzione di utilità istantanea sia di tipo isoelastico (CRRA): $u(c_t) = \frac{c_t^{1-\gamma}-1}{1-\gamma}$, dove γ , come abbiamo visto, è il coefficiente di avversione relativa al rischio. L'equazione di Eulero in questo caso diviene:

$$(1.28) \quad E \left[\left(\frac{c_{t+1}}{c_t} \right)^{-\gamma} \frac{1+r_{t+1}}{1+\delta} \middle| I_t \right] = 1$$

Supponiamo, inoltre, che la distribuzione congiunta del tasso di crescita del consumo e del tasso di interesse, condizionata all'insieme d'informazione dell'istante t , sia:

$$(1.29) \quad \begin{pmatrix} \Delta \ln c_{t+1} \\ \ln(1+r_{t+1}) \end{pmatrix} \middle| I_t \sim N \left[\begin{pmatrix} \mu_c \\ \mu_r \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} \sigma_c^2 & \sigma_{cr} \\ \sigma_{cr} & \sigma_r^2 \end{pmatrix} \right]$$

Riscriviamo la (1.28) come:

$$(1.30) \quad E \{ \exp[-\gamma \Delta \ln c_{t+1} + \ln(1+r_{t+1}) - \ln(1+\delta)] \middle| I_t \} \\ = \exp \left[-\gamma \mu_c + \mu_r + \frac{1}{2} \gamma^2 \sigma_c^2 + \frac{1}{2} \sigma_r^2 - \gamma \sigma_{cr} - \ln(1+\delta) \right] = 1$$

Dove, nel secondo passaggio, abbiamo usato il fatto che, se $X \sim N(\mu; \sigma^2)$ allora $E(e^X) = \exp[\mu + \frac{1}{2}\sigma^2]$. Prendendo poi i logaritmi dell'equazione (1.30) e considerando l'approssimazione $\ln(1+x) \approx x$, otteniamo l'equazione di Eulero in forma log-linearizzata:

$$(1.31) \quad E(\Delta \ln c_{t+1} \middle| I_t) = \frac{1}{\gamma} (E(r_{t+1} \middle| I_t) - \delta) + \frac{\gamma}{2} \text{var}_t(\Delta \ln c_{t+1} - \frac{1}{\gamma} r_{t+1})$$

Il primo termine del membro di destra della relazione (1.31) cattura l'effetto del tasso di interesse atteso sul tasso di crescita del consumo. Il coefficiente che misura questo effetto, ovvero la derivata prima del tasso di crescita del consumo rispetto al tasso di interesse atteso, viene definito elasticità di sostituzione intertemporale e, come conseguenza della assunzione di funzione di utilità additiva e separabile nel tempo e tra stati di natura, è pari al reciproco del

coefficiente di avversione relativa al rischio γ .⁵ Inoltre, si noti che quando il tasso di interesse atteso, che rappresenta l'incentivo a posticipare il consumo, è maggiore del tasso di preferenza intertemporale, che rappresenta al contrario l'incentivo ad anticipare il consumo, allora ci si attende un tasso di crescita positivo del consumo. Il secondo termine, invece, coglie l'effetto del risparmio precauzionale: infatti, un aumento dell'incertezza, misurato da un incremento della varianza condizionata del tasso di crescita del consumo, comporta un tasso di crescita del consumo più elevato poiché l'individuo consuma meno nel periodo corrente e di più in quello futuro.

Caballero (1990) è riuscito ad ottenere una soluzione in forma chiusa per il consumo in presenza di risparmio precauzionale.

Le assunzioni alla base del modello sono un orizzonte di pianificazione finito, una funzione di utilità con avversione assoluta al rischio costante (CARA, *Constant absolute risk aversion*) $u(c_t) = -\frac{e^{-\alpha c_t}}{\alpha}$, dove α è il parametro di avversione assoluta, e un processo stocastico *random walk* per il reddito. Inoltre, per semplicità si pone il tasso di preferenza intertemporale e il tasso di interesse entrambi pari a zero.

Sotto tali assunzioni e l'ulteriore ipotesi di normalità delle innovazioni al reddito, l'equazione di Eulero diviene:

$$(1.32) \quad c_{t+1} = c_t + \frac{\alpha\sigma^2}{2} + \varepsilon_{t+1}$$

⁵ L'ipotesi di additività e separabilità tra tempi e tra stati di natura presuppone che l'utilità marginale del consumo in un determinato istante e in un determinato stato di natura non sia influenzata dal consumo in ogni altro istante o stato. Questo implica che l'incentivo a sostituire tra periodi, misurato dall'elasticità di sostituzione intertemporale, e l'incentivo a sostituire tra stati di natura, misurato dall'avversione al rischio, dipendono dalla concavità della stessa funzione di utilità: di conseguenza, un consumatore avverso al rischio e, quindi, poco disposto a sostituire consumo tra stati di natura avrà anche una bassa elasticità di sostituzione intertemporale, cioè sarà poco disposto a sostituire il consumo nei diversi periodi.

Sostituendo tale espressione nel vincolo di bilancio dinamico, otteniamo una espressione per la funzione di consumo:

$$(1.33) \quad c_t = \frac{a_t}{T-t} + y_t - \frac{\alpha(T-t-1)\sigma^2}{4}$$

La (1.33) mostra come, in assenza di incertezza sui redditi futuri ($\sigma^2 = 0$), il livello del consumo dovrebbe risultare pari alla somma dei primi due termini, che rappresentano il reddito permanente. Invece, il terzo termine della (1.33) coglie la riduzione del consumo dovuta alla variabilità del reddito e questa riduzione è tanto più grande quanto più il consumatore è giovane e avverso al rischio: pertanto, nella prima fase del ciclo vitale il consumatore risparmia per far fronte al maggiore rischio; mentre, nella seconda fase, quando il rischio è meno forte, consuma le risorse accumulate precedentemente.

1.7 Perché scegliere una funzione di utilità CRRA?

In gran parte della letteratura sull'equazione di Eulero vengono assunte delle preferenze con avversione relativa al rischio costante. In questo paragrafo cercheremo di fornire alcune brevi argomentazioni sul perché è opportuno considerare una funzione di utilità CRRA.

Il primo motivo è di natura analitica, in quanto, specificando una funzione di utilità di tipo CRRA per il problema di massimizzazione del consumatore, si ottengono delle condizioni del primo ordine che risultano essere log-lineari nel consumo.

Il secondo motivo, invece, è di natura teorica e legato alle implicazioni per le scelte di portafoglio degli agenti. Infatti, se assumessimo che un investitore abbia delle preferenze con avversione assoluta al rischio costante (CARA), ricaveremmo che l'ammontare ottimo da investire in titoli rischiosi è indipendente dalla ricchezza dell'investitore e questa conclusione sarebbe del tutto irrealistica. Analogamente, perverremmo ad una conclusione implausibile se scegliessimo una funzione di utilità di tipo quadratico, poiché essa implica che l'ammontare ottimo da investire in titoli rischiosi sia decrescente nella ricchezza. Al contrario, la funzione di utilità con avversione relativa al rischio costante implica che

l'ammontare ottimo sia crescente nella ricchezza dell'investitore e, dunque, comporta delle conclusioni più realistiche e conformi al comportamento reale degli investitori.

Infine, il terzo motivo è di natura empirica: in un articolo recente, Chiappori e Paiella (2011), utilizzando dati di *panel* sulla ricchezza finanziaria, mostrano che l'avversione relativa al rischio è costante, supportando in questo modo la specificazione di preferenze di tipo CRRA.

1.8 L'equazione di Eulero con variabili socio-demografiche

Nei paragrafi precedenti abbiamo assunto che l'utilità del consumatore dipenda esclusivamente dal livello dei consumi. Questa ipotesi risulta, tuttavia, particolarmente restrittiva se ci proponiamo di studiare le scelte di consumo e risparmio delle famiglie. Infatti, possiamo immaginare che il livello di utilità che una famiglia trae da un certo livello di consumo dipenda dalle caratteristiche socio-demografiche e dalla composizione della famiglia medesima. Lo stesso si può affermare per quanto riguarda le variabili che descrivono la partecipazione al mercato del lavoro e, specularmente, la disponibilità di tempo libero: ad esempio, quando un membro della famiglia lavora deve affrontare una serie di spese legate al lavoro, come l'acquisto di servizi di trasporto, che impattano sul livello complessivo dei consumi familiari.

Tutte queste variabili, dunque, possono incidere nell'allocazione intertemporale del consumo e, per tenerne conto, dobbiamo modificare la funzione di utilità sin qui utilizzata. Un modo semplice di procedere è quello di considerare, analogamente a quanto fatto in Attanasio e Weber (1995), una funzione di utilità istantanea del tipo:

$$(1.34) \quad u(c_t, z_t) = u(c_t)\phi(z_t, \theta)$$

Dove abbiamo assunto che l'utilità dei consumi venga moltiplicata per una funzione di un insieme di variabili socio-demografiche z_t . Variazioni in questa funzione possono essere assimilate a un fattore di sconto variabile nel tempo.

Un simile approccio equivale a modellare le preferenze circa le scelte di consumo condizionatamente ai valori ottimali di altre variabili, come le scelte di lavoro e le variazioni demografiche, che, invece, non vengono modellate direttamente.

Se assumiamo per l'utilità del consumo delle preferenze di tipo CRRA e poniamo $\phi(\mathbf{z}_t, \boldsymbol{\theta}) = \exp(\mathbf{z}'_t \boldsymbol{\theta})$, allora l'equazione di Eulero diviene:

$$(1.35) \quad E \left[\left(\frac{c_{t+1}}{c_t} \right)^{-\gamma} \frac{1 + r_{t+1}}{1 + \delta} \exp(\Delta \mathbf{z}'_{t+1} \boldsymbol{\theta}) | I_t \right] = 1$$

Inoltre, se assumiamo che la distribuzione congiunta condizionata all'insieme di informazione corrente del tasso di crescita del consumo e del tasso di interesse sia normale, possiamo derivare la versione log-linearizzata della (1.35):

$$(1.36) \quad E(\Delta \ln c_{t+1} | I_t) = \frac{1}{\gamma} (E(r_{t+1} | I_t) - \delta) + \Delta \mathbf{z}'_{t+1} \boldsymbol{\phi} + \frac{\gamma}{2} \text{var}_t(\Delta \ln c_{t+1} - \frac{1}{\gamma} r_{t+1})$$

La (1.36) mostra come le variazioni nelle variabili demografiche possano aiutare a prevedere il tasso di crescita del consumo: ad esempio, se una famiglia prevede un incremento nel numero dei propri membri o nel numero dei percettori di reddito, allora ci si aspetta un incremento nel tasso di crescita del consumo familiare; viceversa, una riduzione del numero di componenti o dei percettori di reddito potrebbe comportare una riduzione del tasso di crescita del consumo.

1.9 L'importanza dell'equazione di Eulero e dei suoi parametri

In questo paragrafo cercheremo di argomentare sull'importanza dell'equazione di Eulero e della stima dei suoi parametri attraverso due esempi.

Il primo di questi esempi si riferisce all'ambito macroeconomico e riguarda il modello neo-keynesiano sviluppato da Clarida, Galí e Gertler (1999). Tale modello dinamico di equilibrio economico generale si propone di derivare la condotta ottimale di politica monetaria in un contesto caratterizzato da shock stocastici di domanda e di offerta, in cui gli agenti economici, ovvero le famiglie e le imprese, formulano delle aspettative razionali sui valori futuri di inflazione e *output gap*.

In un simile scenario, le equazioni che descrivono il sistema economico derivano proprio dal problema di ottimizzazione del consumatore e dell'impresa. La prima di queste equazioni è la curva IS:

$$(1.37) \quad x_t = E(x_{t+1}|I_t) - \varphi[i_t - E(\pi_{t+1}|I_t)] + g_t$$

Dove x_t rappresenta l'*output gap*, ovvero la differenza tra il logaritmo del reddito e il logaritmo del suo livello potenziale $x_t = y_t - \bar{y}_t$, i_t il tasso di interesse nominale deciso dalla Banca Centrale, π_{t+1} il livello di inflazione e, infine, g_t uno shock di domanda. Inoltre, φ misura proprio l'elasticità di sostituzione intertemporale.

Questa relazione deriva dalla log-linearizzazione dell'equazione di Eulero. Infatti, ponendo il reddito pari al consumo aggregato più la spesa pubblica $Y_t = C_t + G_t$, possiamo riscrivere l'equazione di Eulero in forma log-linearizzata come:

$$(1.38) \quad y_t - e_t = -\varphi[i_{t+1} - E(\pi_{t+1}|I_t)] + E[y_{t+1} - e_{t+1}|I_t]$$

Dove $e_t = -\ln(1 - \frac{G_t}{Y_t})$. L'espressione (1.38) è esattamente pari alla (1.37) considerando che $g_t = E[\Delta\bar{y}_{t+1} - \Delta e_{t+1}|I_t]$.

La seconda relazione, chiamata curva di Phillips, deriva invece dal processo di massimizzazione del profitto dell'impresa ed è pari a:

$$(1.39) \quad \pi_t = \beta E(\pi_{t+1}|I_t) + \lambda x_t + u_t$$

In cui u_t rappresenta lo shock di offerta.

Ci rimane soltanto da definire la funzione di perdita intertemporale che il banchiere centrale si prefigge di minimizzare: egli ha due obiettivi, ovvero la stabilizzazione dell'inflazione e dell'*output gap*, e per raggiungerli può muovere il tasso di interesse corrente e cercare di influenzare le aspettative degli agenti sui tassi di interesse futuri. La funzione obiettivo viene così formalizzata:

$$(1.40) \quad \min_{(i_{t+i})_{i=0}^{\infty}} E \left[\sum_{i=0}^{\infty} \beta^i (\pi_{t+i}^2 + \alpha x_{t+i}^2) | I_t \right]$$

Soggetta ai vincoli (1.37) e (1.39). L'obiettivo ideale del banchiere centrale è pertanto porre l'inflazione a zero e il reddito al suo livello potenziale. Il parametro α misura il peso relativo che viene attribuito all'obiettivo del reddito rispetto a quello dell'inflazione.

Nell'ipotesi di discrezionalità, ovvero nell'ipotesi che il banchiere centrale non sia vincolato alle promesse circa le future mosse di politica monetaria, si dimostra che la funzione di reazione ottimale della Banca Centrale agli shock del sistema economico risulta:

$$(1.41) \quad i_t^{ottimo} = \phi_\pi E(\pi_{t+1}|I_t) + \frac{1}{\phi} g_t$$

La relazione (1.41) mostra chiaramente che la variazione ottimale del tasso di interesse che il banchiere centrale deve implementare al fine di contrastare e neutralizzare completamente gli effetti di uno shock di domanda dipende dal reciproco dell'elasticità di sostituzione intertemporale. È quindi cruciale ottenere una buona stima di tale parametro se si vogliono contrastare efficacemente innovazioni sul lato della domanda.

Il secondo esempio sull'importanza dell'equazione di Eulero è tratto dall'ambito finanziario. Si consideri un consumatore che deve affrontare un problema di ottimizzazione intertemporale analogo a quello affrontato all'inizio del capitolo, in cui, però, deve scegliere come allocare il proprio risparmio tra un titolo non rischioso che offre un rendimento sicuro r_{t+1}^f e J attività finanziarie rischiose con rendimento r_{t+1}^j , con $j = 1, 2, \dots, J$. Si dimostra, in questo caso, che l'equazione di Eulero (1.21) deve valere per il titolo privo di rischio e per ogni attività rischiosa:

$$(1.42) \quad u'(c_t) = (1 + \delta)^{-1} E[(1 + r_{t+1}^f)u'(c_{t+1})|I_t]$$

$$(1.43) \quad u'(c_t) = (1 + \delta)^{-1} E[(1 + r_{t+1}^j)u'(c_{t+1})|I_t]$$

Dall'uguaglianza delle espressioni (1.42) e (1.43) si deriva l'espressione:

$$(1.44) \quad E[(r_{t+1}^j - r_{t+1}^f)u'(c_{t+1})|I_t] = 0.$$

Inoltre, utilizzando la relazione $E(XY) = Cov(X, Y) + E(X)E(Y)$, si ottiene:

$$(1.45) \quad E(r_{t+1}^j | I_t) - r_{t+1}^f = - \frac{\text{Cov}[r_{t+1}^j, u'(c_{t+1}) | I_t]}{E[u'(c_{t+1}) | I_t]}$$

La relazione (1.45) è l'equazione fondamentale del *Consumption Capital Asset Pricing Model* (CCAPM). Il membro di sinistra dell'ultima relazione è il premio che il consumatore richiede per detenere la j -esima attività rischiosa. Il membro di destra, invece, è una misura della relazione tra rendimento dell'attività rischiosa e utilità marginale del consumo futuro. L'espressione (1.45) è molto importante perché stabilisce che il consumatore chiede un premio per il rischio positivo per le attività rischiose che hanno una covarianza negativa con l'utilità marginale del consumo futuro e che, quindi, offrono un rendimento elevato quando il consumo è elevato e basso quando il consumo è basso: in altre parole, le attività rischiose devono fornire rendimenti più elevati in termini attesi rispetto al titolo privo di rischio perché non danno rendimenti elevati quando ce ne sarebbe più bisogno, ovvero quando il consumo è basso.

Capitolo II

Metodi di stima GMM per l'equazione di Eulero

2.1 Stima GMM dell'equazione di Eulero

In questo capitolo ci proponiamo di delineare i diversi metodi utilizzati per stimare l'equazione di Eulero con dati di *panel* e di specificare le condizioni sotto le quali è possibile ottenere delle stime consistenti dei parametri che regolano le preferenze intertemporali.

Immaginiamo quindi di disporre di un campione di famiglie indicizzate da $i = 1, \dots, N$ e osservate per un numero di periodi, che può variare da famiglia a famiglia, indicizzati da $t = 1, \dots, T_i$.

Prima di procedere oltre, è necessario specificare il tipo di preferenze intertemporali. In letteratura usualmente viene scelta la funzione di utilità CRRA⁶ per descrivere l'utilità istantanea. Come abbiamo già visto, in questo caso l'equazione di Eulero diviene:

$$(2.1) \quad E \left[\left(\frac{c_{i,t+1}}{c_{i,t}} \right)^{-\gamma} (1 + r_{t+1}) \beta | I_{i,t} \right] = 1$$

⁶ Si veda il paragrafo 1.7 per un riepilogo delle motivazioni che portano a specificare una funzione di utilità di tipo CRRA.

Dove $\beta = \frac{1}{1+\delta}$ viene definito fattore di sconto intertemporale. L'equazione (2.1) fornisce un insieme di condizioni di ortogonalità in quanto stabilisce che una particolare combinazione dei dati è incorrelata con l'informazione disponibile all'agente al tempo t . Questa osservazione ci porta a considerare il Metodo Generalizzato dei Momenti (GMM) come naturale per ottenere stime consistenti dei parametri di interesse (β, γ) . Infatti, dato un vettore $\omega_{i,t} \in I_{i,t}$, si ha che:

$$(2.2) \quad E \left\{ \left[\left(\frac{c_{i,t+1}}{c_{i,t}} \right)^{-\gamma} (1 + r_{t+1})\beta - 1 \right] \omega_{i,t} \right\} = 0$$

In questo caso basterebbero due strumenti, come una costante e il tasso di interesse ritardato, per identificare il modello e stimare i parametri. Inoltre, qualora si disponesse di un vettore di strumenti di dimensione maggiore di due, si potrebbe testare la validità del modello attraverso un test di sovraidentificazione di Hansen.

Tuttavia, il problema della stima dell'equazione di Eulero in forma non lineare nasce dalla possibile presenza di errori di misura nel consumo. Infatti, riscriviamo la (2.1) nel seguente modo:

$$(2.3) \quad \left(\frac{c_{i,t+1}}{c_{i,t}} \right)^{-\gamma} (1 + r_{t+1})\beta = \varepsilon_{i,t+1}$$

Dove $\varepsilon_{i,t+1}$ è un errore di previsione incorrelato con l'informazione disponibile al tempo t e tale che $E(\varepsilon_{i,t+1} | I_{i,t}) = 0$. Se il consumo è soggetto a un errore di misura moltiplicativo, si ha che il consumo osservato è pari a: $c_{i,t}^o = c_{i,t} \eta_{i,t}$. Riscrivendo la (2.3) in termini di consumi osservati, si ottiene:

$$(2.4) \quad \left(\frac{c_{i,t+1}^o}{c_{i,t}^o} \right)^{-\gamma} (1 + r_{t+1})\beta = \varepsilon_{i,t+1} \left(\frac{\eta_{i,t+1}}{\eta_{i,t}} \right)^{-\gamma}$$

Pertanto, anche se l'errore di misura è indipendente all'errore di previsione, il valore atteso condizionato del secondo membro non è più uguale ad uno:

$$(2.5) \quad E \left[\varepsilon_{i,t+1} \left(\frac{\eta_{i,t+1}}{\eta_{i,t}} \right)^{-\gamma} \middle| I_{i,t} \right] = E[\varepsilon_{i,t+1} | I_{i,t}] E \left[\left(\frac{\eta_{i,t+1}}{\eta_{i,t}} \right)^{-\gamma} \middle| I_{i,t} \right] \\ = \eta_{i,t}^\gamma E[\eta_{i,t+1}^{-\gamma} | I_{i,t}] \neq 1$$

Questo risultato comporta che la stima del fattore di sconto intertemporale β e del parametro di avversione relativa al rischio γ risultino inconsistenti poiché la loro stima è basata su condizioni di ortogonalità non valide.

Nei prossimi paragrafi tratteremo diversi metodi che permettano di recuperare la proprietà della consistenza delle stime GMM.

2.2 Stima dell'equazione di Eulero in forma log-linearizzata

Uno dei modi per ovviare al problema di errori di misura moltiplicativi è quello di linearizzare la (2.4) attraverso la trasformazione logaritmica. Questa operazione come abbiamo visto nella derivazione dell'equazione (1.31), sotto le ipotesi che la distribuzione congiunta condizionata all'insieme informativo corrente del tasso di crescita del consumo e del tasso di interesse sia normale, conduce alla seguente relazione:

$$(2.6) \quad \begin{aligned} \Delta \ln c_{i,t+1}^o &= \psi + \frac{1}{\gamma} \ln(1 + r_{t+1}) + \Delta \ln \eta_{i,t+1} + \frac{\gamma}{2} \text{var}_t \left[\Delta \ln c_{i,t+1} - \frac{1}{\gamma} \ln(1 + r_{t+1}) \right] + v_{i,t+1} \\ &= \alpha + \frac{1}{\gamma} \ln(1 + r_{t+1}) + \xi_{i,t+1} \end{aligned}$$

L'equazione (2.6) può essere stimata consistentemente con uno stimatore a variabili strumentali o GMM se l'errore di misura risulta incorrelato ed è possibile reperire strumenti per il tasso di interesse che non correlino con il momento condizionato⁷ presente nel termine d'errore (Attanasio e Low, 2004).

La presenza del momento condizionato di ordine due ha indotto alcuni autori, come Carroll (2001), a ritenere impraticabile la stima dell'equazione di Eulero in forma log-linearizzata per la mancanza di strumenti validi incorrelati con tale termine: infatti, se il momento condizionato non è costante, il termine di errore include le innovazioni di tale termine e queste ultime potrebbero correlare con gli strumenti che usualmente vengono impiegati nella stima dell'equazione di Eulero.

⁷ In generale, e quindi non sotto l'ipotesi specifica di distribuzione congiunta normale del tasso di crescita del consumo e del tasso di interesse, il termine d'errore della relazione (2.6) contiene anche i momenti condizionati di ordine superiore al secondo.

Attanasio e Low (2004) dimostrano, attraverso studi di simulazione, che, al contrario, la stima dell'equazione di Eulero in forma log-linearizzata conduce a delle stime consistenti dell'elasticità di sostituzione intertemporale per la maggior parte dei valori plausibili dei parametri di preferenza intertemporale, a patto di disporre di un campione che copra un arco temporale sufficientemente ampio.

È importante notare che con questo approccio è possibile identificare l'elasticità di sostituzione intertemporale ma non il fattore di sconto poiché esso è contenuto nel termine costante insieme al valore atteso non condizionato della varianza condizionata:

$$(2.7) \quad \alpha = \frac{1}{\gamma} \ln \beta + \frac{\gamma}{2} E \left\{ \text{var}_t \left[\Delta \ln c_{i,t+1} - \frac{1}{\gamma} \ln(1 + r_{t+1}) \right] \right\}$$

Il motivo per il quale il tasso di interesse risulta endogeno e, di conseguenza, è necessario utilizzare un approccio a variabili strumentali è che nella stima dell'equazione di Eulero utilizziamo il tasso di interesse realizzato *ex post* in luogo del tasso di interesse atteso, che andrebbe invece impiegato come mostra la relazione (1.31): questo implica che l'innovazione che causa il discostamento del tasso di interesse realizzato rispetto alla sua aspettativa e che correla chiaramente con il tasso *ex post* venga introdotta nel termine d'errore.

Un'altra interpretazione, più economica, del perché strumentiamo il tasso di interesse è quella fornita da Hall (1988). Il consumatore formula delle aspettative razionali sul tasso di interesse futuro e questo implica che l'aspettativa sia una funzione delle variabili conosciute dall'agente nel momento in cui decide il livello del consumo corrente: di conseguenza, questa interpretazione porta a stimare l'equazione di Eulero utilizzando come strumenti le variabili che determinano l'aspettativa sul tasso di interesse futuro.

Infine, è opportuno considerare che a causa della presenza dell'errore di misura del consumo il termine d'errore della (2.6) risulta autocorrelato: nell'ipotesi più favorevole, ossia che $\ln \eta_{i,t}$ sia un *white noise*, il termine d'errore può essere descritto da un processo stocastico a media mobile di primo ordine. La presenza dell'errore di misura comporta che qualsiasi funzione del consumo osservato al tempo t non sia uno strumento valido. Inoltre, l'autocorrelazione del termine d'errore impone la necessità di correggere gli *standard error*: una

possibile soluzione è data dall'utilizzo di errori standard robusti rispetto alla presenza di *clustering*, che risultano validi in presenza di autocorrelazione di qualsiasi forma degli errori riferiti alla stessa unità statistica. In più, gli errori standard impiegati sono anche robusti rispetto alla possibile presenza di eteroschedasticità nel termine d'errore.

2.3 Stimatori GMM per dati affetti da errori di misura

Per risolvere il problema degli errori di misura del consumo, un'alternativa alla log-linearizzazione dell'equazione di Eulero viene offerta dagli stimatori GMM proposti da Alan, Attanasio e Browning (2009). La derivazione di tali stimatori si basa sulle seguenti assunzioni:

1. per ogni famiglia, l'errore di misura del consumo è stazionario e indipendente da ogni altra variabile, inclusi i valori ritardati dell'errore di misura, gli errori di previsione, i livelli di consumo e i tassi di interesse;⁸
2. per ogni famiglia, l'errore di misura è log-normale con la stessa varianza tra le diverse famiglie.⁹

Seguendo inoltre i lavori di Ventura (1994) e Chioda (2004), definiamo l'insieme informativo $I_{i,t}^*$, formato da tutte le variabili al tempo t , con l'esclusione del consumo al tempo t , e dai livelli ritardati del consumo e delle altre variabili: questa ridefinizione è necessaria perché, come abbiamo visto, il consumo osservato corrente correla con l'errore di misura contemporaneo. Sotto l'assunzione 1, possiamo riscrivere le relazioni (2.5) in questo modo:

⁸ Come gli stessi autori fanno notare, l'assunzione di indipendenza, sebbene standard in letteratura, può essere criticata perché, ad esempio, è possibile che le famiglie più povere abbiano una idea più chiara delle proprie spese rispetto a quelle più ricche. Anche l'ipotesi di stazionarietà può risultare problematica se si considera che le famiglie possono riferire con maggiore accuratezza le proprie spese quanto più esse permangono nel campione. Si noti, tuttavia, come tali stimatori non impongano che la media dell'errore di misura sia unitaria o che sia la stessa per tutte le famiglie.

⁹ L'ipotesi di log-normalità dell'errore di misura è criticabile poiché, come mostrano Battistin, Miniaci e Weber (2003) per l'indagine SHIW del 1995, la distribuzione dei consumi non durevoli è affetta da problemi di arrotondamento e di *heaping*.

$$(2.8) \quad E \left[\varepsilon_{i,t+1} \left(\frac{\eta_{i,t+1}}{\eta_{i,t}} \right)^{-\gamma} \middle| I_{i,t}^* \right] = E[\varepsilon_{i,t+1} | I_{i,t}^*] E \left[\left(\frac{\eta_{i,t+1}}{\eta_{i,t}} \right)^{-\gamma} \middle| I_{i,t}^* \right] = \\ = E \left[\left(\frac{\eta_{i,t+1}}{\eta_{i,t}} \right)^{-\gamma} \right] = \kappa$$

Dove la prima eguaglianza è dovuta all'ipotesi di indipendenza tra gli errori di misura e l'errore di previsione mentre la seconda all'indipendenza tra le variabili appartenenti all'insieme informativo $I_{i,t}^*$ e gli errori di misura.¹⁰ Inoltre, la stazionarietà dei processi garantisce che il valore atteso degli errori di misura non dipenda da t .

Se imponiamo anche l'assunzione 2, ovvero che $\ln \eta_t \sim N(\mu, \nu)$, allora abbiamo anche che:

$$(2.9) \quad \kappa = E \left[\left(\frac{\eta_{i,t+1}}{\eta_{i,t}} \right)^{-\gamma} \right] = \exp(\gamma^2 \nu)$$

Gli autori considerano anche l'equazione di Eulero che lega il consumo al tempo t con quello al tempo $t+2$:

$$(2.10) \quad \left(\frac{c_{i,t+2}^o}{c_{i,t}^o} \right)^{-\gamma} (1 + r_{t+1})(1 + r_{t+2})\beta^2 = \varepsilon_{i,t+1}\varepsilon_{i,t+2} \left(\frac{\eta_{i,t+2}}{\eta_{i,t}} \right)^{-\gamma}$$

Anche per la (2.10) vale:

$$(2.11) \quad \kappa = E \left[\left(\frac{\eta_{i,t+2}}{\eta_{i,t}} \right)^{-\gamma} \right] = \exp(\gamma^2 \nu)$$

Ora abbiamo tutte le relazioni necessarie per definire tre stimatori GMM capaci di tenere in considerazione gli errori di misura del consumo. Infatti, sotto l'ipotesi 1 e sotto l'ulteriore restrizione che κ sia costante tra le famiglie possiamo stimare $\{\beta, \gamma, \kappa\}$ utilizzando le seguenti quantità:¹¹

¹⁰ L'indipendenza deriva dalla ridefinizione dell'insieme informativo, che esclude il consumo al tempo t , e dall'assunzione 1.

¹¹ Gli autori non hanno dato un nome a questa procedura. Per comodità nel seguito ci riferiremo a questo stimatore con il nome di GMM-K per sottolineare che non impone

$$(2.12) \quad u_{i,t+1}^1 = \left(\frac{c_{i,t+1}^o}{c_{i,t}^o} \right)^{-\gamma} (1 + r_{t+1})\beta - \kappa$$

$$u_{i,t+2}^2 = \left(\frac{c_{i,t+2}^o}{c_{i,t}^o} \right)^{-\gamma} (1 + r_{t+1})(1 + r_{t+2})\beta^2 - \kappa$$

Invece, sotto le assunzioni 1 e 2 possiamo utilizzare uno stimatore GMM per stimare i parametri $\{\beta, \gamma, \nu\}$ basato su:

$$(2.13) \quad u_{i,t+1}^1 = \left(\frac{c_{i,t+1}^o}{c_{i,t}^o} \right)^{-\gamma} (1 + r_{t+1})\beta - \exp(\gamma^2 \nu)$$

$$u_{i,t+2}^2 = \left(\frac{c_{i,t+2}^o}{c_{i,t}^o} \right)^{-\gamma} (1 + r_{t+1})(1 + r_{t+2})\beta^2 - \exp(\gamma^2 \nu)$$

L'ultimo stimatore viene definito GMM-LN. Per entrambi questi stimatori una costante e un opportuno strumento forniscono quattro condizioni di ortogonalità per identificare i rispettivi tre parametri. Infine, possiamo ricavare il terzo stimatore, denominato stimatore GMM-D, dato dalla differenza delle equazioni che compongono la (2.12):

$$(2.14) \quad \zeta_{i,t+2} = \left[\left(\frac{c_{i,t+1}^o}{c_{i,t}^o} \right)^{-\gamma} (1 + r_{t+1})\beta \right] - \left[\left(\frac{c_{i,t+2}^o}{c_{i,t}^o} \right)^{-\gamma} (1 + r_{t+1})(1 + r_{t+2})\beta^2 \right]$$

Questo stimatore si basa sulla sola ipotesi 1 e non dipende dai parametri della distribuzione dell'errore di misura. La maggiore robustezza dello stimatore GMM-D ha un costo legato alla minore precisione in quanto la (2.14) è una sorta di doppia differenziazione.

2.4 Perché usare dati microeconomici per stimare l'equazione di Eulero?

Sino ad ora, abbiamo delineato delle procedure di stima presupponendo di avere un campione *panel* di famiglie. In questo paragrafo cercheremo di argomentare sul perché è importante utilizzare dati microeconomici sul consumo,

una specifica distribuzione all'errore di misura ma si basa sull'ipotesi di omogeneità del termine κ .

ad esempio delle famiglie, invece di utilizzare aggregati macroeconomici derivati dalla contabilità nazionale.

I primi lavori sulla stima dell'equazione di Eulero (si veda ad esempio Hall, 1988) facevano uso infatti di dati aggregati e le stime puntuali dell'elasticità di sostituzione intertemporale che venivano calcolate risultavano negative o prossime allo zero e statisticamente non significative.

Attanasio e Weber (1993, 1995) mostrano che queste stime irrealisticamente basse dell'elasticità possono essere dovute al processo di aggregazione che caratterizza i dati di contabilità nazionale. Infatti, stimare l'equazione di Eulero log-linearizzata su questi dati equivale a considerare una aggregazione dei consumi familiari del tipo:

$$(2.15) \quad \ln\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N c_{i,t+1}\right) - \ln\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N c_{i,t}\right) = \alpha^* + \sigma^* \ln(1 + r_{t+1}) + \xi_{t+1}^*$$

Invece, la (2.6) mostra che un'aggregazione corretta dovrebbe essere:

$$(2.16) \quad \frac{1}{N}\sum_{i=1}^N \ln c_{i,t+1} - \frac{1}{N}\sum_{i=1}^N \ln c_{i,t} = \alpha + \sigma \ln(1 + r_{t+1}) + \frac{1}{N}\sum_{i=1}^N \xi_{i,t+1}$$

Dal confronto tra queste due espressioni, si evince chiaramente che $\sigma = \frac{1}{\gamma} \neq \sigma^*$.

I due autori utilizzano dati cross-sezionali ripetuti su famiglie americane e inglesi e creano degli pseudo-panel aggregando i dati sulle famiglie in base alla coorte di nascita del capofamiglia. Il vantaggio di disporre di dati microeconomici è quello di poter controllare direttamente il processo di aggregazione. Successivamente, essi mostrano come una aggregazione errata come quella della (2.15) causa la presenza di una forte autocorrelazione nel termine d'errore, con il conseguente rifiuto delle usuali restrizioni di sovraidentificazione da parte del test di Sargan; inoltre, come nei precedenti studi la stima dell'elasticità risulta bassa e non significativa. Al contrario, aggregando correttamente i dati secondo la (2.16), il test di Sargan non rifiuta le restrizioni di sovraidentificazione e la stima dell'elasticità risulta decisamente più grande.

2.5 La critica di Chamberlain

Un altro aspetto importante, che bisogna tenere in considerazione nella stima dell'equazione di Eulero, è l'utilizzo di un campione che copra un arco temporale significativo: questo punto è stato considerato per la prima volta da Chamberlain (1984). Infatti, si consideri nuovamente l'espressione che sta alla base della stima GMM:

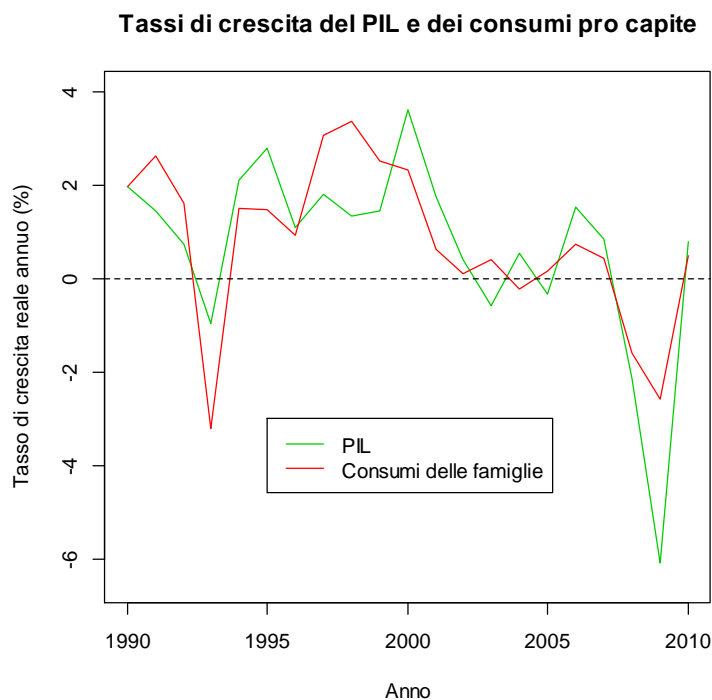
$$(2.17) \quad E \left[\left(\frac{c_{i,t+1}}{c_{i,t}} \right)^{-\gamma} (1 + r_{t+1}) \beta \mid I_{i,t} \right] = 1$$

Tale relazione fornisce le condizioni di ortogonalità tra una particolare trasformazione dei dati e le variabili conosciute dal consumatore al tempo t che permettono di stimare i parametri di interesse. La (2.17) implica anche che le deviazioni tra il valore realizzato del termine entro parentesi quadre e il membro di sinistra della relazione siano, in media, zero. Tuttavia, è necessario sottolineare come la media sia nulla lungo la dimensione temporale: non c'è ragione di credere, senza assunzioni aggiuntive, che il valore atteso sia zero, per ogni fissato periodo, lungo la dimensione cross-sezionale. In ogni periodo, infatti, vi possono essere degli shock macroeconomici che influenzano le aspettative di tutti gli agenti, facendole divergere dal valore nullo. Al contrario, considerando un vasto arco temporale, le aspettative valgono zero: gli shock aggregati in taluni periodi possono risultare positivi, in altri negativi, ma, in media, si annullano.

Questo non significa, come osservano Meghir e Weber (1996), che la dimensione temporale rilevante per la stima dell'equazione di Eulero sia il numero di periodi in cui ciascuna unità statistica viene osservata. Infatti, ciò che conta è l'estensione temporale complessiva dell'intero campione: tale risultato è motivato dal fatto che, in fase di stima, viene calcolata la media su tutti gli individui per ciascun periodo e la media delle medie valutata lungo il periodo coperto dal campione.

In particolare, il nostro campione utilizza le indagini riferite agli anni 1989-2010: anche se il primo periodo e, talvolta, il secondo vengono persi a causa del calcolo degli strumenti ritardati, riusciamo comunque a coprire un arco temporale abbastanza esteso.

Figura 2.1



Un altro aspetto importante, affinché la media temporale degli shock aggregati sia nulla, è quello di riuscire a comprendere nell'orizzonte di osservazione diverse fasi del ciclo economico. Nel nostro caso, come emerge dal grafico in figura 2.1 dei tassi di crescita reali annui del Prodotto Interno Lordo italiano e della spesa per consumi delle famiglie,¹² entrambi *pro capite*, dal 1990 al 2010, riusciamo a considerare le seguenti fasi: una espansione dal 1989 al 1992; una forte riduzione del PIL e dei consumi *pro capite* nel 1993; una nuova fase di crescita dal 1994 al 2002; una fase di bassa crescita del PIL e dei consumi *pro capite* tra il 2003 e il 2007; infine, l'inizio della grande recessione nel 2008, che prosegue anche nel 2009 e 2010.

¹² Ambedue le serie storiche sono di fonte ISTAT e risultano reperibili all'indirizzo: <http://dati.istat.it/>

Capitolo III

I dati e le variabili

3.1 L'Indagine sui bilanci delle famiglie italiane della Banca d'Italia

In questo capitolo cercheremo di descrivere i dati impiegati nella fase di stima dell'equazione di Eulero. In particolare, questo paragrafo si propone di delineare gli aspetti più importanti dell'Indagine sui bilanci delle famiglie italiane della Banca d'Italia (in inglese SHIW, *Survey on Household Income and Wealth*)¹³, dalla quale abbiamo tratto le informazioni sui consumi, i redditi e le caratteristiche socio-demografiche del campione di famiglie *panel* impiegate nella fase successiva di stima del modello.

L'Indagine della Banca d'Italia sui bilanci delle famiglie italiane è un'indagine campionaria che contiene informazioni su consumo, reddito, ricchezza e composizione socio-demografica di un campione di famiglie italiane. L'indagine è stata condotta a cadenza annuale dal 1965 al 1987, ad eccezione del 1985. Dal 1987 l'indagine viene condotta ogni due anni, ad eccezione dell'anno 1997, nel quale l'indagine non è stata effettuata, ed è ripresa nel 1998. Fino al 1984 la dimensione campionaria era di circa 4,000 famiglie mentre a partire dal 1986 di circa 8,000.

¹³ I dati sono reperibili all'indirizzo: <http://www.bancaditalia.it/statistiche/indcamp/bilfait>

Il disegno di campionamento dell'indagine prevede una procedura di selezione a due stadi: le unità di primo stadio sono i comuni mentre quelle di secondo stadio sono le famiglie. Prima di procedere all'estrazione delle unità di primo stadio, si attua una stratificazione: i comuni vengono suddivisi in base alla regione e alla classe di ampiezza demografica, ovvero vengono classificati in comuni fino a 20,000 abitanti, fra 20,000 e 40,000 abitanti e oltre 40,000 abitanti.

All'interno di ogni strato, i comuni nei quali effettuare le interviste sono selezionati includendo automaticamente tutti quelli con popolazione superiore ai 40.000 abitanti (definiti comuni autorappresentativi) ed estraendo i comuni rimanenti con una modalità di selezione che assegna ai comuni di maggiore dimensione una probabilità più elevata di essere inclusi nel campione (PPS, *Probability Proportional to Size*). In una seconda fase, per ciascun comune selezionato, le famiglie da intervistare vengono estratte casualmente dalle liste anagrafiche.

Fino al 1987 l'indagine è stata effettuata sulla base di rilevazioni indipendenti nel tempo ed è quindi possibile ottenere solo dati sezionali ripetuti. Invece, dal 1989, è stato introdotto uno schema di campionamento che prevede la presenza nel campione di una quota di famiglie già intervistate in precedenti indagini, ovvero le famiglie *panel*.

Il questionario utilizzato nella rilevazione si struttura in diversi moduli: si compone di una parte in cui vengono chieste informazioni di base che riguardano tutte le famiglie intervistate e di vari allegati con domande su aspetti più specifici che riguardano solo una parte delle famiglie coinvolte.

La rilevazione dei dati viene effettuata in prevalenza con l'aiuto del *computer* (CAPI, *Computer-Assisted Personal Interviewing*). Con questa metodologia le informazioni vengono raccolte presso le famiglie mediante un questionario elettronico, che permette di azionare una serie di controlli consentendo di risolvere, in presenza della famiglia, eventuali incoerenze. Le cause delle incoerenze possono essere diverse: l'intervistato può avere problemi di comprensione della domanda, di memoria o reticenza nel fornire dati percepiti come riservati; l'intervistatore, invece, può digitare in maniera erronea la risposta o riportare valori in un'unità di misura diversa da quella prevista dal questionario.

Tabella 3.1

Distribuzione delle famiglie per numero di occasioni

Numero di occasioni	Numero di famiglie	Percentuale
1	37,820	73.3
2	5,713	11.1
3	2,841	5.5
4	1,990	3.9
5	1,028	2.0
6	723	1.4
7	623	1.2
8	179	0.3
9	193	0.4
10	321	0.6
11	146	0.3
Totale	51,577	100

Le restanti interviste vengono realizzate con un questionario cartaceo (PAPI, *Paper-And-pencil Personal Interviewing*) e successivamente trasferite su supporto elettronico dalla società di rilevazione.

Purtroppo anche questa indagine statistica è affetta dal problema delle mancate interviste, che costituiscono un problema in quanto i segmenti di popolazione meno disposti a partecipare sono sottorappresentati. Tuttavia, il tasso di partecipazione all'indagine è decisamente più alto tra le famiglie panel: ad esempio, nel 2010 il tasso di partecipazione complessivo era al 52.7%, scendeva al 35% per le famiglie non *panel* e saliva all'82.7% per le famiglie *panel*.

In questo lavoro vengono utilizzati i dati sulla componente *panel* presenti nelle indagini relative agli anni 1989, 1991, 1993, 1995, 1998, 2000, 2002, 2004, 2006, 2008, 2010: il salto di tre anni tra il 1995 e il 1998 causa il fatto che disponiamo di un campione *panel* non equispaziato nel tempo, questione di cui dovremo tenere conto in fase di stima.

La tabella 3.1 illustra la distribuzione delle famiglie, nel campione preso in esame, in base al numero di volte in cui vengono osservate e mostra come la componente cross-sezionale sia preponderante e come il *panel* non sia bilanciato. Naturalmente, solo le famiglie osservate per un numero di volte sufficiente a calcolare le variazioni che compongono l'equazione di Eulero e i ritardi necessari per costruire le variabili strumentali vengono impiegate nella fase di stima.

3.2 La definizione delle principali variabili

In questo paragrafo ci si prefigge di dare una descrizione delle principali variabili impiegate nella fase di stima del modello.

Come più volte affermato le stime si basano su un campione *panel* di famiglie. È opportuno quindi precisare il significato di famiglia in questo contesto. Secondo l'indagine della Banca d'Italia per famiglia si intende “l'insieme di persone conviventi che, indipendentemente dai legami di parentela, provvede al soddisfacimento dei bisogni mettendo in comune tutto o parte del reddito percepito dai suoi componenti”.¹⁴

Inoltre, è opportuno definire più chiaramente una delle variabili principali di questo lavoro: il consumo familiare. I modelli teorici di scelte intertemporali presentati nel primo capitolo si riferiscono al consumo di beni non durevoli e “un bene si definisce non durevole se fornisce servizi solo nel periodo in cui viene acquistato”.¹⁵ Nell'indagine, per quantificare il consumo di beni non durevoli, all'intervistato viene richiesto di stabilire la spesa per tutti i consumi, in beni alimentari e non alimentari, escludendo gli acquisti di oggetti preziosi, mezzi di trasporto, mobili, oggetti di arredamento, elettrodomestici e apparecchi vari, gli assegni per alimenti e i contributi in denaro, le donazioni, la manutenzione straordinaria per la propria abitazione, le rate di mutui ipotecari, i premi pagati per l'assicurazione vita e i premi pagati per la pensione integrativa. A questo ammontare vengono poi sommati le integrazioni non monetarie e gli affitti imputati.

Un'altra variabile rilevante è data dal reddito disponibile netto, definito come la somma del reddito da lavoro dipendente, del reddito da lavoro autonomo, delle pensioni e dei trasferimenti netti, del reddito da capitale.

¹⁴ Banca d'Italia. 2012. *Supplementi al Bollettino Statistico. Indagini Campionarie. I Bilanci delle Famiglie Italiane nell'Anno 2010*. N. 6, anno XXII, pag. 7.

¹⁵ Jappelli, Tullio, e Luigi Pistaferri. 2000. *Risparmio e Scelte Intertemporali*. Bologna, Il Mulino, pag. 137.

Sia la spesa per consumi di beni non durevoli che il reddito disponibile netto sono stati deflazionati utilizzando l'indice NIC, ovvero l'Indice dei prezzi al consumo per l'intera collettività, di fonte ISTAT.¹⁶

Nel seguito saranno inoltre considerate altre variabili riferite alla condizione socio-economica delle famiglie: in particolare, il numero di componenti adulti, dove abbiamo classificato come adulto un componente con età maggiore o uguale ai 18 anni di età; il numero di bambini, che al contrario coglie il numero di componenti con età strettamente inferiore ai 18 anni; e il numero di percettori di reddito della famiglia.

Un'altra componente importante dell'equazione di Eulero è data dal tasso di interesse reale che rappresenta il prezzo del consumo corrente in termini di consumo futuro. Per misurare il tasso di interesse reale abbiamo utilizzato il rendimento dei Buoni Ordinari del Tesoro (BOT) con scadenza 12 mesi,¹⁷ al quale abbiamo sottratto il tasso di inflazione misurato con l'indice NIC. Il tasso di interesse dei BOT viene calcolato come media ponderata, sulla base delle quantità assegnate, dei tassi di aggiudicazione alle aste di emissione mensili, al lordo della trattenuta fiscale.¹⁸

Nella stima dell'Equazione di Eulero abbiamo utilizzato due diversi metodi di aggregazione temporale della serie storica mensile del tasso di interesse: il primo, descritto in dettaglio nel prossimo paragrafo, si basa sul calcolo del tasso

¹⁶ La serie storica mensile dell'indice NIC viene pubblicata dall'ISTAT nei vari numeri del *Bollettino Mensile di Statistica* ed è disponibile all'indirizzo: <http://dati.istat.it/>

¹⁷ La serie storica mensile dei rendimenti dei BOT a diverse scadenze viene pubblicata dalla Banca d'Italia nei vari numeri dei *Supplementi al Bollettino Statistico. Indicatori Monetari e Finanziari. Mercato Finanziario* e risulta disponibile all'indirizzo: http://www.bancaditalia.it/statistiche/stat_mon_cred_fin/banc_fin

¹⁸ Ai sensi dell'art. 1 del D.P.R. 19 settembre 1986 n. 556, recante Modifiche al regime delle esenzioni dalle imposte sul reddito, convertito con modificazioni nella Legge 17 novembre 1986 n. 719, gli interessi sui titoli emessi successivamente al 20 settembre 1986 sono assoggettati a una ritenuta erariale pari al 6,25% per i titoli emessi prima del 31 agosto 1987 e del 12.5% per i titoli emessi dopo tale data. Poiché l'imposta del 12.5% si è mantenuta inalterata per tutto il periodo campionario preso in esame, abbiamo deciso di utilizzare i rendimenti lordi dei BOT.

di interesse reale mensile, definito come la differenza tra il rendimento nominale mensile del titolo e l'inflazione mensile, che viene poi aggregato a livello annuale in base a una relazione desunta dal problema di ottimizzazione dinamica del consumatore; il secondo, invece, calcola semplicemente il tasso di interesse reale annuale del titolo, come differenza tra il rendimento nominale annuale dei BOT e l'inflazione annuale, derivata calcolando le variazioni annuali dell'indice NIC.

La differenza teorica tra questi due approcci risiede nel fatto che il primo metodo di aggregazione temporale presuppone che il consumatore riveda le scelte di consumo a cadenza mensile mentre il secondo metodo assume che le decisioni di consumo vengano riviste annualmente.

Infine, si è cercato di stimare l'equazione di Eulero per i soli consumi alimentari, definiti come la spesa in generi alimentari nei supermercati o in negozi analoghi e la spesa per i pasti consumati regolarmente fuori casa: in questo caso, il consumo di beni alimentari e il reddito disponibile sono stati deflazionati con l'indice NIC specifico per i beni alimentari; anche il tasso di interesse reale è stato ricalcolato come la differenza tra il tasso di interesse nominale dei BOT a 12 mesi e l'inflazione dei soli beni alimentari.

3.3 Time aggregation del tasso di interesse

L'Indagine sui bilanci delle famiglie italiane ci permette di disporre di informazioni sul consumo annuale del campione di famiglie mentre disponiamo di una serie storica mensile del tasso di interesse reale. Si rende, quindi, necessaria una aggregazione annuale del tasso di interesse che sia consistente con l'ottimizzazione intertemporale dei consumi. Una simile *time aggregation* è fornita da Hall (1988).

Infatti, si supponga di disporre solamente del consumo annuale nell'anno t , indicato con c_t . Supponiamo di conoscere la realizzazione mensile del tasso di interesse: $r_{t,m}$, dove t indica l'anno e m il mese. Tuttavia, non conosciamo il livello di consumo mensile scelto dalla famiglia: $c_{t,m}$. Ogni mese il consumo evolverebbe secondo la relazione:

$$(3.1) \quad \Delta \ln c_{t,m+1} = \alpha + \frac{1}{\gamma} r_{t,m+1} + \varepsilon_{t,m+1}$$

Dove abbiamo utilizzato l'approssimazione $\ln(1 + r_{t,m}) \approx r_{t,m}$. A partire da questa relazione, Hall dimostra che la variazione nel consumo annuale è paria a:

$$(3.2) \quad \Delta \ln c_{t+1} = \frac{1}{12} \sum_{m=1}^{12} (m-1) \left(\alpha + \frac{1}{\gamma} r_{t,m} + \varepsilon_{t,m} \right) \\ + \frac{1}{12} \sum_{m=1}^{12} (12-m+1) \left(\alpha + \frac{1}{\gamma} r_{t+1,m} + \varepsilon_{t+1,m} \right)$$

Quindi, l'equazione di Eulero a livello annuale risulta essere:

$$(3.3) \quad \Delta \ln c_{t+1} = \alpha + \frac{1}{\gamma} r_{t+1} + \varepsilon_{t+1}$$

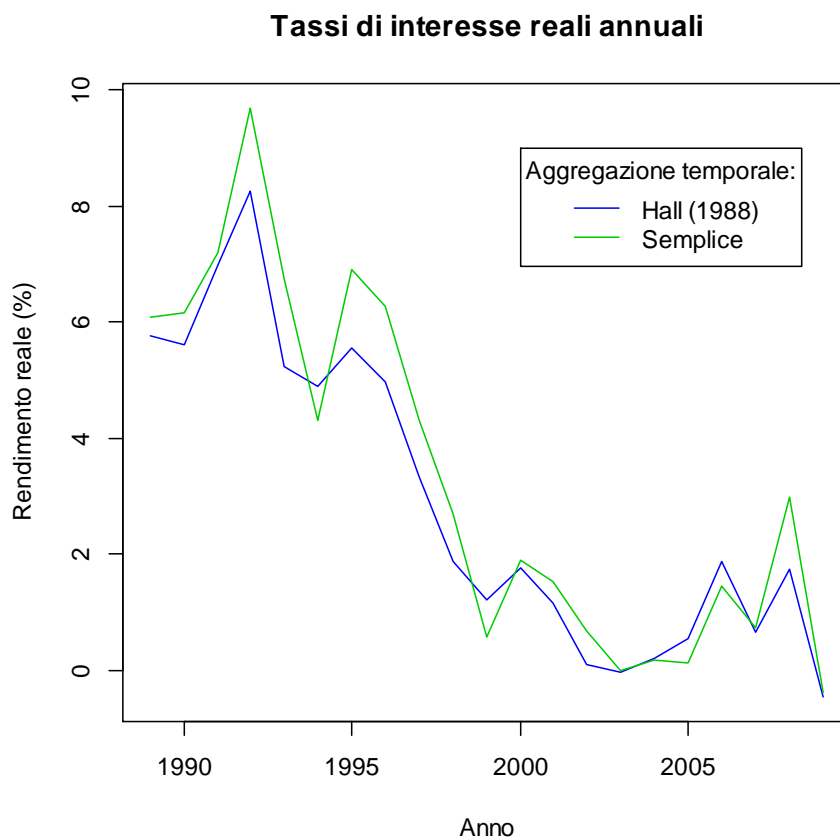
Dove:

$$(3.4) \quad r_{t+1} = \frac{1}{12} \left[\sum_{m=1}^{12} (m-1) r_{t,m} + \sum_{m=1}^{12} (12-m+1) r_{t+1,m} \right]$$

$$(3.5) \quad \varepsilon_{t+1} = \frac{1}{12} \left[\sum_{m=1}^{12} (m-1) \varepsilon_{t,m} + \sum_{m=1}^{12} (12-m+1) \varepsilon_{t+1,m} \right]$$

La relazione (3.4) mostra che il tasso di interesse che lega il consumo dell'anno t con quello dell'anno $t+1$ è una somma ponderata dei tassi di interesse mensili dei due anni. Invece, la relazione (3.5) mette in evidenza come il termine d'errore annuale dipenda sia dagli errori mensili dell'anno $t+1$ ma anche da quelli dell'anno t , adducendo un altro motivo per il quale il termine d'errore dell'equazione di Eulero possa presentare autocorrelazione del primo ordine, oltre a quello, già esaminato, riguardante l'eventuale presenza di errori di misura nel consumo.

Figura 3.1



Il grafico presentato nella figura 3.1 mostra l'applicazione della *time aggregation* proposta da Hall (1988) alla nostra serie storica del tasso di interesse dei Bot a 12 mesi (linea blu). Come affermato nel precedente paragrafo, oltre a stimare l'equazione di Eulero con il tasso di interesse aggregato in base all'ottimizzazione dinamica del consumatore, si è considerato anche il tasso di interesse reale annuale, calcolato semplicemente come differenza tra il tasso di interesse nominale annuale dei BOT a 12 mesi e l'inflazione annuale. Quest'ultimo tasso è rappresentato in figura dalla linea verde. Come si può vedere, le due serie storiche del rendimento hanno una dinamica temporale simile e questo comporterà solo delle piccole differenze nelle stime dei parametri di preferenza intertemporale.

Capitolo IV

Le stime GMM

4.1 La stima dell'equazione di Eulero log-linearizzata

In questo capitolo ci proponiamo di stimare con i dati dell'Indagine sui bilanci delle famiglie italiane della Banca d'Italia l'equazione di Eulero, prima nella sua versione log-linearizzata e poi in quella non lineare.

Come abbiamo scritto più volte, disponiamo di un campione *panel* di famiglie osservate a cadenza di due anni tra il 1989 e il 1995, poi abbiamo una discontinuità di tre anni tra il 1995 e il 1998 e, infine, ritorniamo ad avere osservazioni ogni due anni tra il 1998 e il 2010. Inoltre, il numero di volte in cui osserviamo ciascuna unità statistica varia da famiglia a famiglia: ovvero, abbiamo un campione *panel* non bilanciato.

Supponendo che il consumo sia affetto da errori di misura, l'equazione di Eulero nel nostro contesto diviene:

$$(4.1) \quad \left(\frac{c_{i,t+l}^o}{c_{i,t}^o} \right)^{-\gamma} (1+r_{t+1})(1+r_{t+2})(1+r_{t+3})^{d_{1995,t}} \beta^{(2+d_{1995,t})} \exp(\Delta \mathbf{z}'_{i,t+l} \boldsymbol{\theta}) \\ = \varepsilon_{i,t+1} \varepsilon_{i,t+2} \varepsilon_{i,t+3}^{d_{1995,t}} \left(\frac{\eta_{i,t+l}}{\eta_{i,t}} \right)^{-\gamma}$$

Dove, per la maggior parte degli indici e delle variabili, il riferimento è alla simbologia introdotta nei precedenti capitoli. Rimangono da definire il pedice l e la variabile *dummy* $d_{1995,t}$:

$$(4.2) \quad l = \begin{cases} 3 & \text{se } t = 1995 \\ 2 & \text{se } t \neq 1995 \end{cases}$$

$$(4.3) \quad d_{1995,t} = \begin{cases} 1 & \text{se } t = 1995 \\ 0 & \text{se } t \neq 1995 \end{cases}$$

La log-linearizzazione della (4.1) ci conduce alla seguente espressione:

$$(4.4) \quad \Delta \ln c_{i,t+l}^o = \alpha + \varphi d_{1995,t} + \frac{1}{\gamma} \ln(1 + r_{t,t+l}) + \Delta \mathbf{z}'_{i,t+l} \boldsymbol{\phi} + \xi_{i,t+l}$$

Dove:

$$(4.5) \quad \Delta x_{i,t+l} = \begin{cases} x_{i,t+3} - x_{i,t} & \text{se } t = 1995 \\ x_{i,t+2} - x_{i,t} & \text{se } t \neq 1995 \end{cases}$$

$$(4.6) \quad (1 + r_{t,t+l}) = \begin{cases} (1 + r_{1996})(1 + r_{1997})(1 + r_{1998}) & \text{se } t = 1995 \\ (1 + r_{t+1})(1 + r_{t+2}) & \text{se } t \neq 1995 \end{cases}$$

La relazione (4.4) è sufficientemente flessibile da potersi adattare alle irregolarità del nostro campione ma la sua notazione è complessa e di difficile gestione. Pertanto, si rende necessaria una semplificazione: consideriamo t non un indicatore degli anni, bensì un indicatore delle indagini disponibili. In quest'ottica, $t+1$ indica non l'anno successivo ma l'indagine immediatamente successiva. In questo modo possiamo semplificare la relazione (4.4) in questo modo:

$$(4.7) \quad \Delta \ln c_{i,t+1}^o = \alpha + \varphi d_{1995,t} + \frac{1}{\gamma} \ln(1 + r_{t+1}) + \Delta \mathbf{z}'_{i,t+1} \boldsymbol{\phi} + \xi_{i,t+1}$$

In questa espressione, si sottintende che le variazioni sono calcolate su indagini successive che distano temporalmente tra loro di due anni, tranne nel periodo 1995-1998 in cui la variazione è calcolata su due indagini successive separate da tre anni. Analogo discorso per il tasso di interesse, che è un tasso di interesse biennale, ad eccezione del periodo 1995-1998 in cui è un tasso di interesse triennale. La *dummy* temporale è pari a uno proprio quando si considera la variazione 1995-1998.

Dopo varie ricerche di specificazione, si è deciso di includere nel vettore $\Delta \mathbf{z}_{i,t+1}$ la variazione del numero degli adulti, la variazione del numero di bambini

e la variazione del numero di percettori di reddito.¹⁹ Le prime due variabili colgono variazioni demografiche della famiglia e le abbiamo trattate come esogene: abbiamo cioè assunto che tali variabili siano completamente prevedibili. Una simile assunzione viene fatta, ad esempio, anche da Attanasio e Weber (1993) e da Alan, Attanasio e Browning (2009). Inserendo la variazione nei percettori di reddito, invece, si spera di cogliere variazioni nell'offerta di lavoro delle famiglie. Quest'ultima variabile l'abbiamo trattata come endogena: l'endogeneità può dipendere dalla non completa prevedibilità della variazione a causa di shock inattesi che possono far variare l'offerta di lavoro (assunzioni, licenziamenti, ecc.); oppure dal fatto che l'offerta di lavoro può essere considerata come una variabile di scelta determinata simultaneamente al livello del consumo.

Per quanto riguarda il tasso di interesse, invece, abbiamo scelto di utilizzare all'inizio il rendimento ottenuto dalla *time aggregation* descritta nel capitolo precedente.

La tabella 4.1 a pag. 58 mostra le stime dell'equazione di Eulero, ottenute utilizzando uno stimatore GMM a due passi²⁰ e considerando diversi insiemi di strumenti addizionali: in particolare, in colonna (1) si è utilizzato il tasso di interesse reale e il tasso di crescita del reddito disponibile ritardati di due periodi,²¹ il numero di percettori di reddito ritardati di due e tre periodi; in colonna (2) il tasso di interesse reale e il tasso di crescita del consumo ritardati di due periodi, il numero di percettori di reddito ritardati di due e tre periodi; in colonna (3) il tasso di interesse reale e il numero di percettori di reddito ritardati di due e tre periodi. Queste variabili strumentali sono quelle che vengono impiegate solitamente in letteratura.

¹⁹ Abbiamo anche provato a sostituire questa variabile con la variazione del numero di percettori di reddito da lavoro ma i risultati rimangono sostanzialmente invariati.

²⁰ Risultati simili si ottengono utilizzando lo stimatore 2SLS. Inoltre, per quanto riguarda la procedura GMM a due passi impiegata, si rimanda all'Appendice Econometrica per una descrizione più dettagliata.

²¹ Per un ritardo di due periodi si intende l'utilizzo di strumenti rilevati due indagini prima, cioè un ritardo di quattro o cinque anni a seconda che ci sia o meno la discontinuità del periodo 1995-1998.

Il ritardo di due periodi è stato scelto in quanto il test di Hansen rifiuta la validità degli strumenti al ritardo uno: ciò può essere dovuto, come abbiamo visto, alla presenza di errori di misura nel consumo o alla *time aggregation* del tasso di interesse, che causano la presenza di autocorrelazione del primo ordine nell'errore dell'equazione, oppure perché gli strumenti correlano con i momenti condizionati di ordine maggiore o uguale a due presenti nel termine d'errore.

Invece, come si può vedere dai valori della tabella, il test di Hansen²² non rifiuta l'ipotesi nulla di validità delle restrizioni di sovraidentificazione a un qualsiasi livello di significatività convenzionale nelle stime di colonna (1) e (3). Fa eccezione il test in colonna (2), in cui abbiamo utilizzato come strumento addizionale il tasso di crescita del consumo ritardato di due periodi, per il quale l'ipotesi nulla non viene rifiutata solo ad un livello di significatività prefissato dell'1%.

In queste specificazioni, sia il tasso di interesse che la variazione dei percettori di reddito sono strumentati. Quindi, per verificare l'ipotesi di debolezza o meno degli strumenti abbiamo utilizzato una generalizzazione del test F del primo stadio costituita dalla statistica di Kleibergen e Paap (2006), che viene utilizzata quando il numero di endogene è superiore ad uno. Tale statistica, robusta rispetto alla presenza di eteroschedasticità e correlazione entro i *cluster*, viene confrontata con i valori critici tabulati da Stock e Yogo (2005). Nel nostro caso, il valore della statistica risulta elevato²³ se confrontato con tali soglie e, pertanto, sembrerebbe non esserci un problema di debolezza degli strumenti.

Se guardiamo alle stime in colonna (3), più affidabili secondo i valori delle statistiche F e del test di Hansen, la stima dell'elasticità di sostituzione intertemporale è pari a 0.843 con un errore standard di 0.221. Tale risultato è in

²² Sia il test di Hansen che gli errori standard delle stime tengono conto della possibile correlazione tra le osservazioni riferite alla stessa famiglia e dell'eventuale presenza di eteroschedasticità nel termine d'errore dell'equazione di Eulero.

²³ Il valore alto della statistica F è probabilmente imputabile alla forte correlazione che c'è tra il tasso di interesse e i suoi ritardi dovuta al metodo di aggregazione temporale che abbiamo utilizzato, descritto nel precedente capitolo, oppure alla forte persistenza dei tassi di interesse.

linea con quelli ottenuti da Attanasio e Weber (1993, 1995) su dati inglesi e americani tratti, rispettivamente, dalla *Family Expenditure Survey* (FES) e dalla *Consumer Expenditure Survey* (CEX).

Poiché si potrebbe obiettare che anche le variazioni demografiche possano essere legate a variabili di scelta determinate simultaneamente al livello del consumo o possano non essere completamente prevedibili, abbiamo anche stimato il modello strumentando tali variabili²⁴ con il numero ritardato di due periodi di adulti e bambini. I risultati sono presentati in tabella 4.2 a pag. 59 e, come si può vedere, non cambiano di molto: in particolare, l'unico cambiamento che si può facilmente evincere è la non significatività della variazione dei bambini e la maggiore significatività della variazione dei percettori di reddito. Tuttavia, la stima del parametro di maggiore interesse, ovvero l'elasticità di sostituzione intertemporale, rimane sostanzialmente invariata.

Inoltre, si è cercato di capire se i risultati ottenuti sono robusti rispetto a cambiamenti nella definizione del tasso di interesse. Per valutare tale questione, si è sostituito il tasso di rendimento impiegato sino ad ora, aggregato secondo la relazione che deriva dal problema di ottimo intertemporale del consumatore, con il tasso di rendimento che si ricava più semplicemente dalla sottrazione dal tasso di interesse nominale annuale dei BOT dell'inflazione annuale misurata con l'indice NIC.

Strumentando con le stesse variabili addizionali della tabella 4.1 il tasso di interesse e la variazione nel numero dei percettori, si ottengono i risultati riportati in tabella 4.3 a pag. 60.

Analogamente a prima, gli strumenti di colonna (1) e (3) risultano validi ed informativi mentre la validità delle restrizioni di sovraidentificazione della colonna (2) non viene rifiutata solo ad un livello dell'1%.

La stima dell'elasticità di sostituzione intertemporale risulta leggermente più bassa, attorno a 0.7. Tale valore è comunque molto ragionevole da un punto di vista economico e in linea con le stime presenti in letteratura.

²⁴ Anche Attanasio e Weber (1995) utilizzano una procedura nella quale tutte le variabili dell'equazione di Eulero vengono strumentate, comprese le variazioni demografiche.

Nella tabella 4.4 a pag. 61, si presentano le stime ottenute strumentando anche le variazioni nelle variabili demografiche, aggiungendo all'insieme degli strumenti addizionali il numero di adulti e di bambini ritardati di due periodi.

In linea con quanto ottenuto precedentemente, la variazione del numero di bambini perde significatività se strumentata mentre la variazione dei percettori di reddito risulta maggiormente significativa. La stima dell'elasticità di sostituzione intertemporale rimane pressoché invariata.

Tabella 4.1

Equazione di Eulero log-linearizzata

Aggregazione temporale di Hall (1988) del tasso di interesse

	(1)	(2)	(3)
	$\Delta lnc_{i,t+1}$	$\Delta lnc_{i,t+1}$	$\Delta lnc_{i,t+1}$
$\ln(1 + r_{t+1})$	0.872*** (0.219)	0.875*** (0.221)	0.843*** (0.221)
$\Delta nperc_{i,t+1}$	0.0903* (0.0514)	0.0571 (0.0502)	0.0884* (0.0514)
$\Delta adulti_{i,t+1}$	0.0805** (0.0317)	0.101*** (0.0311)	0.0821*** (0.0317)
$\Delta bambini_{i,t+1}$	0.0885*** (0.0221)	0.101*** (0.0217)	0.0889*** (0.0221)
$d_{1995,t}$	-0.181*** (0.0289)	-0.182*** (0.0291)	-0.178*** (0.0291)
<i>costante</i>	0.00371 (0.00500)	0.00481 (0.00507)	0.00450 (0.00505)
Osservazioni	14,123	14,174	14,175
R-quadro	0.048	0.048	0.048
Test di Hansen (p-value)	4.604 (0.10008)	7.729 (0.02097)	1.511 (0.21904)
<i>Kleibergen-Paap rk Wald F statistic</i>	31.226	33.077	42.380

*** p<0.01, ** p<0.05, * p<0.1

Stima GMM a due passi con errori standard robusti in presenza di *clustering* ed eteroschedasticità.

Variabili endogene: $\ln(1 + r_{t+1})$, $\Delta nperc_{i,t+1}$.

Strumenti colonna (1): $\Delta adulti_{i,t+1}$, $\Delta bambini_{i,t+1}$, $d_{1995,t}$, *costante*, r_{t-1} , $\Delta \ln y_{i,t-1}$, $nperc_{i,t-1}$, $nperc_{i,t-2}$.

Strumenti colonna (2): $\Delta adulti_{i,t+1}$, $\Delta bambini_{i,t+1}$, $d_{1995,t}$, *costante*, r_{t-1} , $\Delta lnc_{i,t-1}$, $nperc_{i,t-1}$, $nperc_{i,t-2}$.

Strumenti colonna (3): $\Delta adulti_{i,t+1}$, $\Delta bambini_{i,t+1}$, $d_{1995,t}$, *costante*, r_{t-1} , $nperc_{i,t-1}$, $nperc_{i,t-2}$.

Tabella 4.2

Equazione di Eulero log-linearizzata

Aggregazione temporale di Hall (1988) del tasso di interesse

	(1)	(2)	(3)
	$\Delta \ln c_{i,t+1}$	$\Delta \ln c_{i,t+1}$	$\Delta \ln c_{i,t+1}$
$\ln(1 + r_{t+1})$	0.872*** (0.218)	0.860*** (0.221)	0.838*** (0.221)
$\Delta nperc_{i,t+1}$	0.0914*** (0.0277)	0.0845*** (0.0278)	0.0937*** (0.0280)
$\Delta adulti_{i,t+1}$	0.0756*** (0.0181)	0.0751*** (0.0184)	0.0739*** (0.0183)
$\Delta bambini_{i,t+1}$	0.0122 (0.0243)	0.00720 (0.0243)	0.0110 (0.0243)
$d_{1995,t}$	-0.185*** (0.0289)	-0.186*** (0.0291)	-0.182*** (0.0292)
<i>costante</i>	-0.000527 (0.00513)	-0.000541 (0.00516)	0.000201 (0.00516)
Osservazioni	14,123	14,174	14,175
R-quadro	0.043	0.043	0.043
Test di Hansen (<i>p-value</i>)	4.090 (0.1294)	7.669 (0.0216)	1.002 (0.3168)
<i>Kleibergen-Paap rk</i>	57.736	59.425	70.340
<i>Wald F statistic</i>			

*** p<0.01, ** p<0.05, * p<0.1

Stima GMM a due passi con errori standard robusti in presenza di *clustering* ed eteroschedasticità.

Variabili endogene: $\ln(1 + r_{t+1})$, $\Delta nperc_{i,t+1}$, $\Delta adulti_{i,t+1}$, $\Delta bambini_{i,t+1}$.

Strumenti colonna (1): *costante*, $d_{1995,t}$, r_{t-1} , $\Delta \ln y_{i,t-1}$, $nperc_{i,t-1}$, $nperc_{i,t-2}$, $adulti_{i,t-1}$, $bambini_{i,t-1}$.

Strumenti colonna (2): *costante*, $d_{1995,t}$, r_{t-1} , $\Delta \ln c_{i,t-1}$, $nperc_{i,t-1}$, $nperc_{i,t-2}$, $adulti_{i,t-1}$, $bambini_{i,t-1}$.

Strumenti colonna (3): *costante*, $d_{1995,t}$, r_{t-1} , $nperc_{i,t-1}$, $nperc_{i,t-2}$, $adulti_{i,t-1}$, $bambini_{i,t-1}$.

Tabella 4.3

Equazione di Eulero log-linearizzata

Aggregazione temporale semplice del tasso di interesse

	(1)	(2)	(3)
	$\Delta \ln c_{i,t+1}$	$\Delta \ln c_{i,t+1}$	$\Delta \ln c_{i,t+1}$
$\ln(1 + r_{t+1})$	0.726*** (0.238)	0.725*** (0.241)	0.687*** (0.241)
$\Delta nperc_{i,t+1}$	0.0888* (0.0515)	0.0551 (0.0503)	0.0870* (0.0515)
$\Delta adulti_{i,t+1}$	0.0814** (0.0318)	0.102*** (0.0312)	0.0829*** (0.0318)
$\Delta bambini_{i,t+1}$	0.0892*** (0.0221)	0.102*** (0.0217)	0.0895*** (0.0221)
$d_{1995,t}$	-0.187*** (0.0376)	-0.187*** (0.0380)	-0.181*** (0.0380)
<i>costante</i>	0.00416 (0.00626)	0.00536 (0.00636)	0.00532 (0.00634)
Osservazioni	14,123	14,174	14,175
R-quadro	0.050	0.050	0.049
Test di Hansen (<i>p-value</i>)	4.619 (0.0993)	7.957 (0.0187)	1.532 (0.2159)
<i>Kleibergen-Paap rk Wald F statistic</i>	31.072	32.910	42.166

*** p<0.01, ** p<0.05, * p<0.1

Stima GMM a due passi con errori standard robusti in presenza di *clustering* ed eteroschedasticità.

Variabili endogene: $\ln(1 + r_{t+1})$, $\Delta nperc_{i,t+1}$.

Strumenti colonna (1): $\Delta adulti_{i,t+1}$, $\Delta bambini_{i,t+1}$, $d_{1995,t}$, *costante*, r_{t-1} , $\Delta \ln y_{i,t-1}$, $nperc_{i,t-1}$, $nperc_{i,t-2}$.

Strumenti colonna (2): $\Delta adulti_{i,t+1}$, $\Delta bambini_{i,t+1}$, $d_{1995,t}$, *costante*, r_{t-1} , $\Delta \ln c_{i,t-1}$, $nperc_{i,t-1}$, $nperc_{i,t-2}$.

Strumenti colonna (3): $\Delta adulti_{i,t+1}$, $\Delta bambini_{i,t+1}$, $d_{1995,t}$, *costante*, r_{t-1} , $nperc_{i,t-1}$, $nperc_{i,t-2}$.

Tabella 4.4
Equazione di Eulero log-linearizzata
Agregazione temporale semplice del tasso di interesse

	(1)	(2)	(3)
	$\Delta \ln c_{i,t+1}$	$\Delta \ln c_{i,t+1}$	$\Delta \ln c_{i,t+1}$
$\ln(1 + r_{t+1})$	0.728*** (0.238)	0.713*** (0.241)	0.683*** (0.241)
$\Delta nperc_{i,t+1}$	0.0922*** (0.0277)	0.0851*** (0.0278)	0.0946*** (0.0280)
$\Delta adulti_{i,t+1}$	0.0741*** (0.0180)	0.0735*** (0.0184)	0.0723*** (0.0183)
$\Delta bambini_{i,t+1}$	0.00852 (0.0243)	0.00339 (0.0244)	0.00716 (0.0243)
$d_{1995,t}$	-0.191*** (0.0376)	-0.191*** (0.0380)	-0.185*** (0.0381)
<i>costante</i>	-0.000428 (0.00638)	-0.000339 (0.00643)	0.000702 (0.00644)
Osservazioni	14,123	14,174	14,175
R-quadro	0.044	0.044	0.044
Test di Hansen (<i>p-value</i>)	4.074 (0.1304)	7.926 (0.0190)	1.000 (0.3174)
<i>Kleibergen-Paap rk Wald F statistic</i>	57.637	59.308	70.213

*** p<0.01, ** p<0.05, * p<0.1

Stima GMM a due passi con errori standard robusti in presenza di *clustering* ed eteroschedasticità.

Variabili endogene: $\ln(1 + r_{t+1})$, $\Delta nperc_{i,t+1}$, $\Delta adulti_{i,t+1}$, $\Delta bambini_{i,t+1}$.

Strumenti colonna (1): *costante*, $d_{1995,t}$, r_{t-1} , $\Delta \ln y_{i,t-1}$, $nperc_{i,t-1}$, $nperc_{i,t-2}$, $adulti_{i,t-1}$, $bambini_{i,t-1}$.

Strumenti colonna (2): *costante*, $d_{1995,t}$, r_{t-1} , $\Delta \ln c_{i,t-1}$, $nperc_{i,t-1}$, $nperc_{i,t-2}$, $adulti_{i,t-1}$, $bambini_{i,t-1}$.

Strumenti colonna (3): *costante*, $d_{1995,t}$, r_{t-1} , $nperc_{i,t-1}$, $nperc_{i,t-2}$, $adulti_{i,t-1}$, $bambini_{i,t-1}$.

4.2 La stima dell'equazione di Eulero in forma non lineare

In assenza di errori di misura del consumo si potrebbe applicare la stima GMM direttamente all'equazione di Eulero in forma non lineare. Nel nostro caso, tale stimatore si baserebbe sulla seguente relazione:

$$(4.8) \quad E \left[\left(\frac{c_{i,t+l}^o}{c_{i,t}^o} \right)^{-\gamma} (1+r_{t+1})(1+r_{t+2})(1+r_{t+3})^{d_{1995,t}} \beta^{(2+d_{1995,t})} \exp(\Delta \mathbf{z}'_{i,t+l} \boldsymbol{\theta}) \middle| I_t \right] = 1$$

Invece, in presenza di errori di misura, una procedura di stima basata sulla (4.8) produce stime inconsistenti dei parametri di preferenza intertemporale. Per ritrovare la proprietà della consistenza dobbiamo utilizzare gli stimatori proposti da Alan, Attanasio e Browning (2009), che abbiamo descritto nel capitolo precedente. Per poter applicare tale procedura di stima ai nostri dati dobbiamo esplicitare l'equazione di Eulero che lega il consumo tra t e $t+2$ e tra t e $t+4$,²⁵ ovvero le seguenti relazioni:

$$(4.9) \quad \left(\frac{c_{i,t+l}^o}{c_{i,t}^o} \right)^{-\gamma} (1+r_{t+1})(1+r_{t+2})(1+r_{t+3})^{d_{1995,t}} \beta^{(2+d_{1995,t})} \exp(\Delta \mathbf{z}'_{i,t+l} \boldsymbol{\theta}) \\ = \varepsilon_{i,t+1} \varepsilon_{i,t+2} \varepsilon_{i,t+3}^{d_{1995,t}} \left(\frac{\eta_{i,t+l}}{\eta_{i,t}} \right)^{-\gamma}$$

$$(4.10) \quad \left(\frac{c_{i,t+l^*}^o}{c_{i,t}^o} \right)^{-\gamma} \prod_{j=1}^4 (1+r_{t+j}) (1+r_{t+5})^{(d_{1993,t}+d_{1995,t})} \beta^{(4+d_{1993,t}+d_{1995,t})} \exp(\Delta^* \mathbf{z}'_{i,t+l^*} \boldsymbol{\theta}) \\ = \prod_{j=1}^4 \varepsilon_{i,t+j} \varepsilon_{i,t+5}^{(d_{1993,t}+d_{1995,t})} \left(\frac{\eta_{i,t+l^*}}{\eta_{i,t}} \right)^{-\gamma}$$

Nelle quali, rimangono da definire le seguenti quantità:

$$(4.11) \quad l^* = \begin{cases} 5 & \text{se } t = 1993 \text{ oppure } t = 1995 \\ 4 & \text{se } t \neq 1993 \text{ e } t \neq 1995 \end{cases}$$

$$(4.12) \quad d_{1993,t} = \begin{cases} 1 & \text{se } t = 1993 \\ 0 & \text{se } t \neq 1993 \end{cases}$$

$$(4.13) \quad \Delta^* x_{i,t+l^*} = \begin{cases} x_{i,t+5} - x_{i,t} & \text{se } t = 1993 \text{ oppure } t = 1995 \\ x_{i,t+4} - x_{i,t} & \text{se } t \neq 1993 \text{ e } t \neq 1995 \end{cases}$$

²⁵ In alcuni casi tra t e $t+3$ e tra t e $t+5$ a causa del salto di tre anni nel periodo 1995-1998.

Sulla base delle relazioni (4.9) e (4.10) possiamo calcolare gli stimatori GMM che tengono conto degli errori di misura nel consumo. In particolare, lo stimatore GMM-K si basa sulle quantità:

$$(4.14) \quad u_{i,t+l}^1 = \left(\frac{c_{i,t+l}^o}{c_{i,t}^o} \right)^{-\gamma} (1+r_{t+1})(1+r_{t+2})(1+r_{t+3})^{d_{1995,t}} \beta^{(2+d_{1995,t})} \exp(\Delta \mathbf{z}'_{i,t+l} \boldsymbol{\theta}) - \kappa$$

$$u_{i,t+l}^2 = \left(\frac{c_{i,t+l}^o}{c_{i,t}^o} \right)^{-\gamma} \prod_{j=1}^4 (1+r_{t+j})(1+r_{t+5})^{(d_{1993,t}+d_{1995,t})} \beta^{(4+d_{1993,t}+d_{1995,t})} \exp(\Delta^* \mathbf{z}'_{i,t+l} \boldsymbol{\theta}) - \kappa$$

Lo stimatore GMM-LN pone nelle precedenti espressioni $\kappa = \exp(\gamma^2 \nu)$ mentre lo stimatore GMM-D considera la differenza dei due termini della (4.14).

Anche in questi caso, adottiamo la semplificazione della notazione introdotta nel paragrafo precedente, ovvero indichiamo con t non l'anno ma l'indagine disponibile. In questo caso possiamo riscrivere le relazioni nella (4.14) come:

$$(4.15) \quad u_{i,t+1}^1 = \left(\frac{c_{i,t+1}^o}{c_{i,t}^o} \right)^{-\gamma} (1+r_{t+1}) \beta^{(2+d_{1995,t})} \exp(\Delta \mathbf{z}'_{t+1} \boldsymbol{\theta}) - \kappa$$

$$u_{i,t+2}^2 = \left(\frac{c_{i,t+2}^o}{c_{i,t}^o} \right)^{-\gamma} (1+r_{t+1})(1+r_{t+2}) \beta^{(4+d_{1993,t}+d_{1995,t})} \exp(\Delta^* \mathbf{z}'_{t+2} \boldsymbol{\theta}) - \kappa$$

Dove i tassi di interesse sono calcolati su due anni, tranne nel periodo 1995-1998 in cui vengono calcolati su tre anni. Le due *dummy* $d_{1993,t}$ e $d_{1995,t}$ sono uguali a uno quando si considera l'indagine 1993 e 1995, rispettivamente. Infine, le variazioni delle variabili sono calcolate su indagini successive che distano temporalmente di due anni, ad eccezione del periodo 1995-1998 in cui si considera una variazione triennale; per le variazioni con l'asterisco, invece, ci si riferisce a variazioni calcolate su indagini distanti quattro anni, tranne nei casi delle variazioni di cinque anni calcolate sui periodi 1993-1998 e 1995-2000.

Nella tabella 4.5 a pag. 67 riportiamo le stime dell'equazione di Eulero in forma non lineare utilizzando il tasso di interesse proposto da Hall (1988).²⁶ In colonna (1) è presente la stima GMM che non considera la presenza di errori di misura. Gli strumenti utilizzati comprendono il tasso di interesse al tempo t , la

²⁶ Pur considerando il tasso di interesse reale derivato da Hall (1988), assumiamo che l'ottimizzazione del consumatore avvenga a cadenza annuale.

variazione²⁷ del numero di adulti e di bambini tra il tempo t e $t+1$, il numero di percettori al tempo t e $t-1$. Tuttavia, pur utilizzando strumenti teoricamente validi, il test di Hansen rifiuta la validità delle restrizioni di sovraidentificazione: ciò può essere dovuto all'errore di specificazione legato al non aver considerato gli errori di misura nel consumo.

Nelle colonne (2) e (3) sono presentate le stime, rispettivamente, GMM-LN e GMM-K. Per entrambi gli stimatori, gli strumenti impiegati per la prima equazione sono il tasso di interesse al tempo t e la variazione del numero di adulti e del numero di bambini tra il tempo t e il tempo $t+1$; per la seconda equazione, invece, gli strumenti sono la variazione del numero di adulti e di bambini tra il tempo t e il tempo $t+1$ e il numero dei percettori di reddito al tempo t . Il test di Hansen non rifiuta l'ipotesi nulla a un qualsiasi livello convenzionale prefissato di significatività.

Infine, in colonna (3) sono riportati i risultati per lo stimatore GMM-D. Gli strumenti utilizzati sono il tasso di interesse al tempo $t-1$, la variazione del numero di adulti e di bambini tra il tempo t e il tempo $t+1$, il numero di percettori al tempo t e $t-1$. Anche in questo caso, il test di Hansen non rifiuta le restrizioni di sovraidentificazione.

Se guardiamo alle stime in colonna (2) notiamo che la varianza dell'errore di misura è statisticamente diversa da zero a segnalare la presenza di errori di misura nel consumo anche nei nostri dati. A conferma di ciò, anche le stime in colonna (3): si rifiuta a un livello del 5% l'ipotesi che il termine κ sia pari a uno, come nella stima GMM classica. Non tenendo conto della presenza di errori di misura si ottiene una stima inconsistente del fattore di sconto intertemporale, che, infatti, risulta molto più bassa in colonna (1) rispetto alle stime delle altre colonne. Analogo discorso per il parametro γ : la stima dell'avversione relativa al rischio è più bassa in colonna (1) rispetto alle stime di colonna (2) e (3).

²⁷ Anche Alan, Attanasio e Browning (2009) utilizzano la variazione delle variabili demografiche come strumenti, assumendo che siano completamente prevedibili.

Come ci aspettavamo, le stime in colonna (4) sono imprecise a causa della natura dello stimatore che, sostanzialmente, consiste in una doppia differenziazione.²⁸

In tabella 4.6 a pag. 68, invece, abbiamo presentato gli stessi stimatori ma cambiando l'insieme degli strumenti: in tutte le colonne, invece di utilizzare le variazioni del numero di adulti e di bambini tra il tempo t e il tempo $t+1$, si è utilizzato il numero di adulti e di bambini al tempo t . Questa scelta permette di stimare in modo più preciso l'avversione relativa al rischio e il fattore di sconto intertemporale, come si può vedere dalla significativa riduzione dell'errore standard, e di tenere in considerazione la possibile endogeneità delle variabili demografiche.

Come prima, i risultati più affidabili sono quelli in colonna (2) o (3): possiamo pertanto affermare che la stima dell'avversione relativa al rischio è pari a 1.886 con un errore standard di 0.362; mentre la stima del fattore di sconto intertemporale è pari a 0.987, con un errore standard di 0.003.

Una simile stima dell'avversione relativa al rischio implica, sotto l'ipotesi di funzione di utilità additiva tra periodi e stati di natura, una valutazione dell'elasticità di sostituzione intertemporale pari a 0.530 con un errore standard di 0.102, quindi inferiore a quella stimata nel contesto della log-linearizzazione dell'equazione di Eulero.

Le stime in tabella 4.6 non si discostano molto da quelle ottenute da Alan, Attanasio e Browning (2009) con dati tratti dal *Panel Study of Income Dynamics* (PSID).

Analogamente a quanto fatto nel paragrafo precedente, in tabella 4.7 a pag. 69 cerchiamo di capire se i risultati sono robusti al cambiamento del tasso di interesse: sostituiamo quindi il tasso di rendimento aggregato temporalmente secondo Hall (1988) con il tasso di rendimento reale annuo dei BOT.

Le stime sono analoghe a quelle della Tabella 4.5 per quanto riguarda la stima dell'avversione relativa al rischio e del fattore di sconto intertemporale.

²⁸ Tuttavia, bisogna considerare anche la più bassa numerosità campionaria dovuta all'utilizzo di strumenti ritardati di un periodo in più, necessari per la sovraidentificazione del modello.

In tabella 4.8 a pag. 70 si riportano, invece, le stime ottenute utilizzando gli strumenti nei livelli anziché nelle differenze. In base a tali risultati, la stima dell'avversione relativa al rischio è pari a 1.906, con un errore standard di 0.342, mentre la stima del fattore di sconto intertemporale è pari a 0.983, con un errore standard di 0.003. Una simile valutazione del parametro γ implica una stima dell'elasticità di sostituzione intertemporale di 0.525, con un errore standard di 0.094.

In conclusione possiamo affermare che, in analogia con quanto succedeva per la stima dell'equazione di Eulero log-linearizzata, il cambiamento del tasso di interesse genera un aumento molto piccolo della stima dell'avversione al rischio (nel caso log-lineare comportava una riduzione dell'elasticità di sostituzione intertemporale) e una leggera riduzione nella stima del fattore di sconto. Tuttavia, tali variazioni sono talmente contenute da permetterci di affermare che i risultati sono robusti al cambiamento del tasso di interesse.

Inoltre, possiamo considerare la stima dell'elasticità di sostituzione intertemporale ottenuta con lo stimatore GMM-LN o GMM-K più affidabile di quelle ottenute stimando l'equazione di Eulero in forma log-linearizzata: infatti, tali stimatori tengono esplicitamente in considerazione la presenza degli errori di misura ed evitano gli inconvenienti legati all'errore di approssimazione generato dalla log-linearizzazione.

Tabella 4.5

Equazione di Eulero non lineare

Aggregazione temporale di Hall (1988) del tasso di interesse

	(1)	(2)	(3)	(4)
	GMM	GMM-LN	GMM-K	GMM-D
γ	1.553*** (0.373)	2.374*** (0.677)	2.370*** (0.680)	1.512 (0.935)
$1/\gamma$ ²⁹	0.644*** (0.155)	0.421*** (0.120)	0.422*** (0.121)	0.661 (0.409)
β	0.927*** (0.0297)	0.991*** (0.00934)	0.990*** (0.00929)	0.974*** (0.00922)
$\Delta adulti_{i,t+l}$	0.175*** (0.0616)	0.307** (0.129)	0.306** (0.129)	0.0994 (0.177)
$\Delta bambini_{i,t+l}$	0.163*** (0.0526)	0.298** (0.129)	0.297** (0.129)	-0.0976 (0.215)
$\Delta nperc_{i,t+l}$	0.0592** (0.0300)	0.0940 (0.0611)	0.0940 (0.0608)	0.149 (0.315)
ν		0.0694*** (0.00996)		
κ			1.476*** (0.405)	
Osservazioni	22,219	21,168	21,168	13,348
Test di Hansen (<i>p-value</i>)	43.9747 (0.0000)	0.343726 (0.8421)	0.343203 (0.8423)	1.87978 (0.1704)

*** p<0.01, ** p<0.05, * p<0.1

Stima GMM a due passi con errori standard robusti in presenza di *clustering* ed eteroschedasticità.

Strumenti colonna (1): *costante*, r_t , $\Delta adulti_{i,t+1}$, $\Delta bambini_{i,t+1}$, $nperc_{i,t}$, $nperc_{i,t-1}$.

Strumenti colonna (2): per la prima equazione, *costante*, r_t , $\Delta adulti_{i,t+1}$, $\Delta bambini_{i,t+1}$;

per la seconda equazione, *costante*, $\Delta adulti_{i,t+1}$, $\Delta bambini_{i,t+1}$, $nperc_{i,t}$.

Strumenti colonna (3): per la prima equazione, *costante*, r_t , $\Delta adulti_{i,t+1}$, $\Delta bambini_{i,t+1}$;

per la seconda equazione, *costante*, $\Delta adulti_{i,t+1}$, $\Delta bambini_{i,t+1}$, $nperc_{i,t}$.

Strumenti colonna (4): *costante*, r_{t-1} , $\Delta adulti_{i,t+1}$, $\Delta bambini_{i,t+1}$, $nperc_{i,t}$, $nperc_{i,t-1}$.

²⁹ Presentiamo in tabella la stima dell'elasticità di sostituzione intertemporale per una più immediata interpretazione dei risultati. Inoltre, riportiamo anche l'errore standard, ottenuto con il metodo delta, per facilitare il calcolo dell'intervallo di confidenza.

Tabella 4.6

Equazione di Eulero non lineare

Aggregazione temporale di Hall (1988) del tasso di interesse

	(1) GMM	(2) GMM-LN	(3) GMM-K	(4) GMM-D
γ	1.743*** (0.494)	1.886*** (0.362)	1.886*** (0.362)	1.933 (1.640)
$1/\gamma$	0.574*** (0.162)	0.530*** (0.102)	0.530*** (0.102)	0.517 (0.439)
β	0.911*** (0.0435)	0.987*** (0.00315)	0.987*** (0.00315)	0.975*** (0.0227)
$\Delta adulti_{i,t+l}$	0.286* (0.158)	0.240*** (0.0682)	0.240*** (0.0682)	0.118 (0.112)
$\Delta bambini_{i,t+l}$	0.190 (0.145)	0.196*** (0.0642)	0.196*** (0.0642)	0.0668 (0.102)
$\Delta nperc_{i,t+l}$	0.0381 (0.0299)	0.0850*** (0.0230)	0.0850*** (0.0230)	0.207 (0.406)
ν		0.0641*** (0.00382)		
κ			1.256*** (0.120)	
Osservazioni	22,219	21,168	21,168	13,348
Test di Hansen (p-value)	30.1119 (0.0000)	3.85128 (0.1458)	3.87603 (0.1440)	1.24094 (0.2653)

*** p<0.01, ** p<0.05, * p<0.1

Stima GMM a due passi con errori standard robusti in presenza di *clustering* ed eteroschedasticità.

Strumenti colonna (1): *costante*, r_t , $adulti_{i,t}$, $bambini_{i,t}$, $nperc_{i,t}$, $nperc_{i,t-1}$.

Strumenti colonna (2): per la prima equazione, *costante*, r_t , $adulti_{i,t}$, $bambini_{i,t}$;

per la seconda equazione, *costante*, $adulti_{i,t}$, $bambini_{i,t}$, $nperc_{i,t}$.

Strumenti colonna (3): per la prima equazione, *costante*, r_t , $adulti_{i,t}$, $bambini_{i,t}$;

per la seconda equazione, *costante*, $adulti_{i,t}$, $bambini_{i,t}$, $nperc_{i,t}$.

Strumenti colonna (4): *costante*, r_{t-1} , $adulti_{i,t}$, $bambini_{i,t}$, $nperc_{i,t}$, $nperc_{i,t-1}$.

Tabella 4.7

Equazione di Eulero non lineare

Aggregazione temporale semplice del tasso di interesse

	(1) GMM	(2) GMM-LN	(3) GMM-K	(4) GMM-D
γ	1.466*** (0.394)	2.359*** (0.674)	2.355*** (0.676)	1.257* (0.678)
$1/\gamma$	0.682*** (0.184)	0.424*** (0.121)	0.425*** (0.122)	0.796* (0.429)
β	0.930*** (0.0292)	0.987*** (0.00905)	0.987*** (0.00901)	0.972*** (0.00840)
$\Delta adulti_{i,t+l}$	0.163*** (0.0621)	0.305** (0.129)	0.304** (0.129)	0.0886 (0.140)
$\Delta bambini_{i,t+l}$	0.154*** (0.0529)	0.297** (0.127)	0.296** (0.127)	-0.102 (0.136)
$\Delta nperc_{i,t+l}$	0.0563** (0.0281)	0.0924 (0.0600)	0.0924 (0.0598)	0.112 (0.222)
ν		0.0691*** (0.00992)		
κ			1.467*** (0.397)	
Osservazioni	22,219	21,168	21,168	13,348
Test di Hansen (p-value)	53.8048 (0.0000)	0.213231 (0.8989)	0.213591 (0.8987)	0.742308 (0.3889)

*** p<0.01, ** p<0.05, * p<0.1

Stima GMM a due passi con errori standard robusti in presenza di *clustering* ed eteroschedasticità.

Strumenti colonna (1): *costante*, r_t , $\Delta adulti_{i,t+1}$, $\Delta bambini_{i,t+1}$, $nperc_{i,t}$, $nperc_{i,t-1}$.

Strumenti colonna (2): per la prima equazione, *costante*, r_t , $\Delta adulti_{i,t+1}$, $\Delta bambini_{i,t+1}$;

per la seconda equazione, *costante*, $\Delta adulti_{i,t+1}$, $\Delta bambini_{i,t+1}$, $nperc_{i,t}$.

Strumenti colonna (3): per la prima equazione, *costante*, r_t , $\Delta adulti_{i,t+1}$, $\Delta bambini_{i,t+1}$;

per la seconda equazione, *costante*, $\Delta adulti_{i,t+1}$, $\Delta bambini_{i,t+1}$, $nperc_{i,t}$.

Strumenti colonna (4): *costante*, r_{t-1} , $\Delta adulti_{i,t+1}$, $\Delta bambini_{i,t+1}$, $nperc_{i,t}$, $nperc_{i,t-1}$.

Tabella 4.8

Equazione di Eulero non lineare

Aggregazione temporale semplice del tasso di interesse

	(1) GMM	(2) GMM-LN	(3) GMM-K	(4) GMM-D
γ	1.601*** (0.541)	1.906*** (0.342)	1.906*** (0.342)	2.281 (1.652)
$1/\gamma$	0.625*** (0.211)	0.525*** (0.094)	0.525*** (0.094)	0.438 (0.318)
β	0.920*** (0.0431)	0.983*** (0.00321)	0.983*** (0.00321)	0.967*** (0.0265)
$\Delta adulti_{i,t+l}$	0.247* (0.149)	0.248*** (0.0665)	0.248*** (0.0665)	0.0878 (0.245)
$\Delta bambini_{i,t+l}$	0.169 (0.129)	0.208*** (0.0638)	0.208*** (0.0638)	0.0780 (0.161)
$\Delta nperc_{i,t+l}$	0.0393* (0.0234)	0.0816*** (0.0235)	0.0816*** (0.0235)	0.322 (0.588)
ν		0.0640*** (0.00387)		
κ			1.262*** (0.116)	
Osservazioni	22,219	21,168	21,168	13,348
Test di Hansen (<i>p-value</i>)	40.5155 (0.0000)	2.53263 (0.2819)	2.54625 (0.2800)	0.007664 (0.9302)

*** p<0.01, ** p<0.05, * p<0.1

Stima GMM a due passi con errori standard robusti in presenza di *clustering* ed eteroschedasticità.

Strumenti colonna (1): *costante*, r_t , $adulti_{i,t}$, $bambini_{i,t}$, $nperc_{i,t}$, $nperc_{i,t-1}$.

Strumenti colonna (2): per la prima equazione, *costante*, r_t , $adulti_{i,t}$, $bambini_{i,t}$;

per la seconda equazione, *costante*, $adulti_{i,t}$, $bambini_{i,t}$, $nperc_{i,t}$.

Strumenti colonna (3): per la prima equazione, *costante*, r_t , $adulti_{i,t}$, $bambini_{i,t}$;

per la seconda equazione, *costante*, $adulti_{i,t}$, $bambini_{i,t}$, $nperc_{i,t}$.

Strumenti colonna (4): *costante*, r_{t-1} , $adulti_{i,t}$, $bambini_{i,t}$, $nperc_{i,t}$, $nperc_{i,t-1}$.

4.3 Il problema dei vincoli di liquidità

Uno dei problemi che riguarda la stima dell'equazione di Eulero è la possibile presenza di famiglie soggette a vincoli di liquidità, ovvero famiglie non in grado di prendere a prestito la quantità desiderata di risorse.

Questa situazione implica una soluzione d'angolo nel problema di ottimizzazione del consumatore: per questa ragione l'equazione di Eulero non vale con il segno di eguaglianza. Infatti, in presenza di vincoli all'indebitamento attivi si ha:

$$(4.16) \quad E \left[\beta(1 + r_{t+1}) \frac{u'(c_{t+1})}{u'(c_t)} | I_t \right] < 1$$

Questo perché il consumatore vorrebbe indebitarsi e aumentare il consumo corrente ma non lo può fare: per questo l'utilità marginale corrente è più elevata rispetto al caso in cui il vincolo non fosse operativo.

Per queste ragioni, si è scelto di ripetere le stime precedenti su una parte del campione, ovvero solo sulle famiglie con un capofamiglia³⁰ con età compresa tra 26 e 70 anni nell'arco temporale coperto dal nostro campione. Tale operazione è stata fatta per eliminare delle famiglie, come quelle estremamente giovani o anziane, che potenzialmente possono essere sottoposte a vincoli di liquidità. Questi vincoli potrebbero sorgere, per i più giovani, a causa dell'alta volatilità ed incertezza del loro reddito; per i più anziani, a causa delle imperfezioni nel mercato dei vitalizi.

Tale operazione è stata fatta, ad esempio, da Attanasio e Weber (1993, 1995), restringendo l'attenzione solo a quelle coorti di famiglie che probabilmente sono meno soggette a dei vincoli di liquidità operativi.

I risultati sono riportati, utilizzando il tasso di interesse proposto da Hall (1988) e strumentando solo la variazione nel numero di percettori oltre al tasso di rendimento, in tabella 4.9 a pag. 73.

Anche in queste stime, gli strumenti appaiono validi ed informativi: come si può vedere, anche l'insieme di strumenti di colonna (2), che solitamente

³⁰ Per capofamiglia si intende colui che in sede di intervista si è dichiarato il maggiore responsabile dell'economia familiare.

presentava un basso *p-value* nel test di Hansen, in questo caso non vede rifiutate le restrizioni di sovraidentificazione ad un livello del 5%.

La stima puntuale dell'elasticità di sostituzione intertemporale, considerando che l'errore standard aumenta leggermente, risulta sostanzialmente invariata.

In modo analogo a quanto fatto precedentemente, consideriamo il tasso di interesse reale annuale aggregato in modo semplice. I risultati sono riportati nella tabella 4.10 a pag. 74.

In questo caso sembra esserci una riduzione più significativa nella stima dell'elasticità di sostituzione intertemporale che, tuttavia, rimane in un *range* di valori ragionevoli da un punto di vista economico. A tal proposito, si consideri il lavoro di Scholz, Seshadri e Khitatrakun (2006), nel quale gli autori cercano di capire quanto bene il modello del ciclo vitale riesca a predire il comportamento di risparmio delle famiglie americane: come benchmark assumono un valore dell'elasticità di sostituzione intertemporale pari a 0.33 ma trovano dei risultati migliori ponendola pari a 0.67.

Come ulteriore prova di robustezza dei risultati, abbiamo provato a strumentare la variazione nelle variabili demografiche: questa operazione comporta la maggiore significatività delle variazioni nel numero di adulti e nei percettori di reddito e la perdita di significatività della variazione nel numero di bambini. Tuttavia, la stima dell'elasticità di sostituzione intertemporale, che rappresenta il parametro di interesse, non si modifica sostanzialmente.

I risultati per il tasso di rendimento proposto da Hall (1988) e per il tasso di interesse aggregato normalmente vengono riportati, rispettivamente, in tabella 4.11 e 4.12 a pag. 75-76.

Tabella 4.9
Equazione di Eulero log-linearizzata
Famiglie di età 26-70 anni
Aggregazione temporale di Hall (1988) del tasso di interesse

	(1) $\Delta \ln c_{i,t+1}$	(2) $\Delta \ln c_{i,t+1}$	(3) $\Delta \ln c_{i,t+1}$
$\ln(1 + r_{t+1})$	0.802*** (0.265)	0.818*** (0.266)	0.779*** (0.267)
$\Delta nperc_{i,t+1}$	0.116** (0.0538)	0.0748 (0.0510)	0.108** (0.0536)
$\Delta adulti_{i,t+1}$	0.0480 (0.0311)	0.0720** (0.0296)	0.0532* (0.0310)
$\Delta bambini_{i,t+1}$	0.0582*** (0.0222)	0.0737*** (0.0213)	0.0607*** (0.0223)
$d_{1995,t}$	-0.176*** (0.0346)	-0.178*** (0.0346)	-0.174*** (0.0348)
<i>costante</i>	0.00605 (0.00630)	0.00777 (0.00637)	0.00695 (0.00638)
Osservazioni	8,955	8,993	8,993
R-quadro	0.034	0.041	0.036
Test di Hansen (<i>p-value</i>)	3.900 (0.14227)	5.082 (0.07878)	1.285 (0.25705)
<i>Kleibergen-Paap rk Wald F statistic</i>	25.486	27.209	34.091

*** p<0.01, ** p<0.05, * p<0.1

Stima GMM a due passi con errori standard robusti in presenza di *clustering* ed eteroschedasticità.

Variabili endogene: $\ln(1 + r_{t+1})$, $\Delta nperc_{i,t+1}$.

Strumenti colonna (1): $\Delta adulti_{i,t+1}$, $\Delta bambini_{i,t+1}$, $d_{1995,t}$, *costante*, r_{t-1} , $\Delta \ln y_{i,t-1}$, $nperc_{i,t-1}$, $nperc_{i,t-2}$.

Strumenti colonna (2): $\Delta adulti_{i,t+1}$, $\Delta bambini_{i,t+1}$, $d_{1995,t}$, *costante*, r_{t-1} , $\Delta \ln c_{i,t-1}$, $nperc_{i,t-1}$, $nperc_{i,t-2}$.

Strumenti colonna (3): $\Delta adulti_{i,t+1}$, $\Delta bambini_{i,t+1}$, $d_{1995,t}$, *costante*, r_{t-1} , $nperc_{i,t-1}$, $nperc_{i,t-2}$.

Tabella 4.10
Equazione di Eulero log-linearizzata
Famiglie di età 26-70 anni
Aggregazione temporale semplice del tasso di interesse

	(1) $\Delta \ln c_{i,t+1}$	(2) $\Delta \ln c_{i,t+1}$	(3) $\Delta \ln c_{i,t+1}$
$\ln(1 + r_{t+1})$	0.618** (0.291)	0.638** (0.291)	0.589** (0.293)
$\Delta nperc_{i,t+1}$	0.117** (0.0540)	0.0743 (0.0511)	0.108** (0.0537)
$\Delta adulti_{i,t+1}$	0.0478 (0.0312)	0.0724** (0.0296)	0.0530* (0.0311)
$\Delta bambini_{i,t+1}$	0.0582*** (0.0223)	0.0742*** (0.0213)	0.0607*** (0.0223)
$d_{1995,t}$	-0.174*** (0.0455)	-0.177*** (0.0455)	-0.170*** (0.0458)
<i>costante</i>	0.00774 (0.00783)	0.00934 (0.00793)	0.00890 (0.00793)
Osservazioni	8,955	8,993	8,993
R-quadro	0.035	0.042	0.037
Test di Hansen (<i>p-value</i>)	3.957 (0.1383)	5.311 (0.0703)	1.324 (0.2499)
<i>Kleibergen-Paap rk Wald F statistic</i>	25.317	27.047	33.884

*** p<0.01, ** p<0.05, * p<0.1

Stima GMM a due passi con errori standard robusti in presenza di *clustering* ed eteroschedasticità.

Variabili endogene: $\ln(1 + r_{t+1})$, $\Delta nperc_{i,t+1}$.

Strumenti colonna (1): $\Delta adulti_{i,t+1}$, $\Delta bambini_{i,t+1}$, $d_{1995,t}$, *costante*, r_{t-1} , $\Delta \ln y_{i,t-1}$, $nperc_{i,t-1}$, $nperc_{i,t-2}$.

Strumenti colonna (2): $\Delta adulti_{i,t+1}$, $\Delta bambini_{i,t+1}$, $d_{1995,t}$, *costante*, r_{t-1} , $\Delta \ln c_{i,t-1}$, $nperc_{i,t-1}$, $nperc_{i,t-2}$.

Strumenti colonna (3): $\Delta adulti_{i,t+1}$, $\Delta bambini_{i,t+1}$, $d_{1995,t}$, *costante*, r_{t-1} , $nperc_{i,t-1}$, $nperc_{i,t-2}$.

Tabella 4.11
Equazione di Eulero log-linearizzata
Famiglie di età 26-70 anni
Aggregazione temporale di Hall (1988) del tasso di interesse

	(1) $\Delta \ln c_{i,t+1}$	(2) $\Delta \ln c_{i,t+1}$	(3) $\Delta \ln c_{i,t+1}$
$\ln(1 + r_{t+1})$	0.826*** (0.262)	0.816*** (0.265)	0.795*** (0.265)
$\Delta nperc_{i,t+1}$	0.0755** (0.0320)	0.0628** (0.0320)	0.0747** (0.0325)
$\Delta adulti_{i,t+1}$	0.0798*** (0.0204)	0.0793*** (0.0209)	0.0776*** (0.0208)
$\Delta bambini_{i,t+1}$	0.0211 (0.0297)	0.0131 (0.0299)	0.0159 (0.0298)
$d_{1995,t}$	-0.183*** (0.0345)	-0.183*** (0.0348)	-0.180*** (0.0348)
<i>costante</i>	0.00322 (0.00676)	0.00304 (0.00682)	0.00352 (0.00681)
Osservazioni	8,955	8,993	8,993
R-quadro	0.037	0.036	0.036
Test di Hansen (<i>p-value</i>)	3.838 (0.1468)	4.419 (0.1098)	0.942 (0.3318)
<i>Kleibergen-Paap rk Wald F statistic</i>	37.521	38.919	45.260

*** p<0.01, ** p<0.05, * p<0.1

Stima GMM a due passi con errori standard robusti in presenza di *clustering* ed eteroschedasticità.

Variabili endogene: $\ln(1 + r_{t+1})$, $\Delta nperc_{i,t+1}$, $\Delta adulti_{i,t+1}$, $\Delta bambini_{i,t+1}$.

Strumenti colonna (1): *costante*, $d_{1995,t}$, r_{t-1} , $\Delta \ln y_{i,t-1}$, $nperc_{i,t-1}$, $nperc_{i,t-2}$, $adulti_{i,t-1}$, $bambini_{i,t-1}$.

Strumenti colonna (2): *costante*, $d_{1995,t}$, r_{t-1} , $\Delta \ln c_{i,t-1}$, $nperc_{i,t-1}$, $nperc_{i,t-2}$, $adulti_{i,t-1}$, $bambini_{i,t-1}$.

Strumenti colonna (3): *costante*, $d_{1995,t}$, r_{t-1} , $nperc_{i,t-1}$, $nperc_{i,t-2}$, $adulti_{i,t-1}$, $bambini_{i,t-1}$.

Tabella 4.12
Equazione di Eulero log-linearizzata
Famiglie di età 26-70 anni
Aggregazione temporale semplice del tasso di interesse

	(1) $\Delta \ln c_{i,t+1}$	(2) $\Delta \ln c_{i,t+1}$	(3) $\Delta \ln c_{i,t+1}$
$\ln(1 + r_{t+1})$	0.644** (0.287)	0.635** (0.291)	0.606** (0.291)
$\Delta nperc_{i,t+1}$	0.0766** (0.0321)	0.0635** (0.0321)	0.0758** (0.0326)
$\Delta adulti_{i,t+1}$	0.0784*** (0.0204)	0.0779*** (0.0208)	0.0762*** (0.0208)
$\Delta bambini_{i,t+1}$	0.0169 (0.0298)	0.00866 (0.0299)	0.0117 (0.0298)
$d_{1995,t}$	-0.182*** (0.0452)	-0.182*** (0.0456)	-0.177*** (0.0457)
<i>costante</i>	0.00438 (0.00832)	0.00421 (0.00841)	0.00500 (0.00840)
Osservazioni	8,955	8,993	8,993
R-quadro	0.038	0.037	0.037
Test di Hansen (<i>p-value</i>)	3.858 (0.1453)	4.621 (0.0992)	0.947 (0.3304)
<i>Kleibergen-Paap rk Wald F statistic</i>	37.429	38.822	45.169

*** p<0.01, ** p<0.05, * p<0.1

Stima GMM a due passi con errori standard robusti in presenza di *clustering* ed eteroschedasticità.

Variabili endogene: $\ln(1 + r_{t+1})$, $\Delta nperc_{i,t+1}$, $\Delta adulti_{i,t+1}$, $\Delta bambini_{i,t+1}$.

Strumenti colonna (1): *costante*, $d_{1995,t}$, r_{t-1} , $\Delta \ln y_{i,t-1}$, $nperc_{i,t-1}$, $nperc_{i,t-2}$, $adulti_{i,t-1}$, $bambini_{i,t-1}$.

Strumenti colonna (2): *costante*, $d_{1995,t}$, r_{t-1} , $\Delta \ln c_{i,t-1}$, $nperc_{i,t-1}$, $nperc_{i,t-2}$, $adulti_{i,t-1}$, $bambini_{i,t-1}$.

Strumenti colonna (3): *costante*, $d_{1995,t}$, r_{t-1} , $nperc_{i,t-1}$, $nperc_{i,t-2}$, $adulti_{i,t-1}$, $bambini_{i,t-1}$.

Sino a questo punto si è visto cosa cambia nella stima dell'equazione di Eulero log-linearizzata se si restringe il campione alle unità con capofamiglia di età compresa tra i 26 e i 70 anni. Ora esaminiamo i risultati di questa scelta nell'ambito della stima dell'equazione di Eulero non lineare.

Considerando le variazioni demografiche come esogene e il tasso di interesse aggregato secondo la relazione che deriva dall'ottimizzazione intertemporale si ottengono i risultati riportati in tabella 4.13 a pag. 78: le stime rimangono in linea con quelle ottenute sul campione completo.

Invece, sostituendo nell'insieme degli strumenti la variazione delle variabili demografiche con il livello delle medesime ritardato di un periodo, si ottengono i risultati di tabella 4.14 a pag. 79. Le stime ottenute con lo stimatore GMM-LN implicano una valutazione puntuale dell'elasticità di sostituzione intertemporale pari a 0.508 con un errore standard di 0.086.

Quello che si nota, rispetto alle stime effettuate sul campione completo, è che l'utilizzo di strumenti nelle differenze o nei livelli conduce a stime dei parametri di preferenza intertemporale con un livello di precisione analogo.

Se si cambia la definizione del tasso di interesse otteniamo i risultati presentati nelle tabelle 4.15 e 4.16 a pag. 80-81, rispettivamente con l'utilizzo come strumenti delle variabili demografiche nelle differenze e nei livelli. Anche in questo caso, i risultati in termini di stime e di precisione sono analoghi. I risultati dello stimatore GMM-LN di tabella 4.16 comportano una stima puntuale dell'elasticità di sostituzione intertemporale pari a 0.531, con un errore standard di 0.082.

Complessivamente, per quanto riguarda sia la stima dell'equazione di Eulero in forma log-linearizzata sia in forma non lineare, le stime dei parametri di preferenza intertemporale non cambiano sostanzialmente in seguito al restringimento del campione alle sole famiglie nell'intervallo di età considerato.

Tabella 4.13
Equazione di Eulero non lineare
Famiglie di età 26-70 anni
Aggregazione temporale di Hall (1988) del tasso di interesse

	(1) GMM	(2) GMM-LN	(3) GMM-K	(4) GMM-D
γ	1.431*** (0.264)	2.102*** (0.367)	2.102*** (0.367)	1.489 (1.398)
$1/\gamma$	0.699*** (0.129)	0.476*** (0.083)	0.476*** (0.083)	0.672 (0.631)
β	0.934*** (0.0197)	0.984*** (0.00507)	0.984*** (0.00507)	0.972*** (0.0142)
$\Delta adulti_{i,t+l}$	0.136*** (0.0389)	0.248*** (0.0687)	0.248*** (0.0687)	-0.0402 (0.247)
$\Delta bambini_{i,t+l}$	0.124*** (0.0297)	0.222*** (0.0571)	0.222*** (0.0571)	-0.0782 (0.351)
$\Delta nperc_{i,t+l}$	0.0400 (0.0278)	0.0494 (0.0502)	0.0494 (0.0502)	0.211 (0.419)
ν		0.0624*** (0.00400)		
κ			1.317*** (0.136)	
Osservazioni	14,523	13,780	13,780	8,426
Test di Hansen (p-value)	32.5495 (0.0000)	0.005437 (0.9973)	0.005437 (0.9973)	1.02543 (0.3112)

*** p<0.01, ** p<0.05, * p<0.1

Stima GMM a due passi con errori standard robusti in presenza di *clustering* ed eteroschedasticità.

Strumenti colonna (1): *costante*, r_t , $\Delta adulti_{i,t+1}$, $\Delta bambini_{i,t+1}$, $nperc_{i,t}$, $nperc_{i,t-1}$.

Strumenti colonna (2): per la prima equazione, *costante*, r_t , $\Delta adulti_{i,t+1}$, $\Delta bambini_{i,t+1}$;

per la seconda equazione, *costante*, $\Delta adulti_{i,t+1}$, $\Delta bambini_{i,t+1}$, $nperc_{i,t}$.

Strumenti colonna (3): per la prima equazione, *costante*, r_t , $\Delta adulti_{i,t+1}$, $\Delta bambini_{i,t+1}$;

per la seconda equazione, *costante*, $\Delta adulti_{i,t+1}$, $\Delta bambini_{i,t+1}$, $nperc_{i,t}$.

Strumenti colonna (4): *costante*, r_{t-1} , $\Delta adulti_{i,t+1}$, $\Delta bambini_{i,t+1}$, $nperc_{i,t}$, $nperc_{i,t-1}$.

Tabella 4.14
Equazione di Eulero non lineare
Famiglie di età 26-70 anni
Aggregazione temporale di Hall (1988) del tasso di interesse

	(1) GMM	(2) GMM-LN	(3) GMM-K	(4) GMM-D
γ	1.556*** (0.334)	1.969*** (0.333)	1.969*** (0.333)	1.513 (0.931)
$1/\gamma$	0.643*** (0.138)	0.508*** (0.086)	0.508*** (0.086)	0.661 (0.406)
β	0.923*** (0.0273)	0.981*** (0.00502)	0.981*** (0.00502)	0.980*** (0.0108)
$\Delta adulti_{i,t+l}$	0.200** (0.0848)	0.207*** (0.0599)	0.207*** (0.0599)	0.115* (0.0598)
$\Delta bambini_{i,t+l}$	0.0937 (0.0699)	0.120** (0.0589)	0.120** (0.0589)	0.0481 (0.0709)
$\Delta nperc_{i,t+l}$	0.0312 (0.0235)	0.0627** (0.0285)	0.0627** (0.0284)	0.0739 (0.112)
ν		0.0620*** (0.00377)		
κ			1.272*** (0.109)	
Osservazioni	14,523	13,780	13,780	8,426
Test di Hansen (<i>p-value</i>)	25.9985 (0,0000)	0.771103 (0.6801)	0.771103 (0.6801)	0.15343 (0.6953)

*** p<0.01, ** p<0.05, * p<0.1

Stima GMM a due passi con errori standard robusti in presenza di *clustering* ed eteroschedasticità.

Strumenti colonna (1): *costante*, r_t , $adulti_{i,t}$, $bambini_{i,t}$, $nperc_{i,t}$, $nperc_{i,t-1}$.

Strumenti colonna (2): per la prima equazione, *costante*, r_t , $adulti_{i,t}$, $bambini_{i,t}$;
per la seconda equazione, *costante*, $adulti_{i,t}$, $bambini_{i,t}$, $nperc_{i,t}$.

Strumenti colonna (3): per la prima equazione, *costante*, r_t , $adulti_{i,t}$, $bambini_{i,t}$;
per la seconda equazione, *costante*, $adulti_{i,t}$, $bambini_{i,t}$, $nperc_{i,t}$.

Strumenti colonna (4): *costante*, r_{t-1} , $adulti_{i,t}$, $bambini_{i,t}$, $nperc_{i,t}$, $nperc_{i,t-1}$.

Tabella 4.15
Equazione di Eulero non lineare
Famiglie di età 26-70 anni
Aggregazione temporale semplice del tasso di interesse

	(1) GMM	(2) GMM-LN	(3) GMM-K	(4) GMM-D
γ	1.398*** (0.271)	1.976*** (0.315)	1.976*** (0.315)	1.649 (1.161)
$1/\gamma$	0.716*** (0.139)	0.506*** (0.081)	0.506*** (0.081)	0.607 (0.427)
β	0.933*** (0.0195)	0.980*** (0.00430)	0.980*** (0.00430)	0.968*** (0.0170)
$\Delta adulti_{i,t+l}$	0.131*** (0.0388)	0.230*** (0.0588)	0.230*** (0.0588)	-0.103 (0.278)
$\Delta bambini_{i,t+l}$	0.122*** (0.0298)	0.206*** (0.0483)	0.206*** (0.0483)	-0.0182 (0.426)
$\Delta nperc_{i,t+l}$	0.0381 (0.0269)	0.0475 (0.0439)	0.0475 (0.0439)	0.295 (0.405)
ν		0.0615*** (0.00373)		
κ			1.271*** (0.103)	
Osservazioni	14,523	13,780	13,780	8,426
Test di Hansen (p-value)	32.5379 (0.0000)	0.015261 (0.9924)	0.015261 (0.9924)	0.0175 (0.8948)

*** p<0.01, ** p<0.05, * p<0.1

Stima GMM a due passi con errori standard robusti in presenza di *clustering* ed eteroschedasticità.

Strumenti colonna (1): *costante*, r_t , $\Delta adulti_{i,t+1}$, $\Delta bambini_{i,t+1}$, $nperc_{i,t}$, $nperc_{i,t-1}$.

Strumenti colonna (2): per la prima equazione, *costante*, r_t , $\Delta adulti_{i,t+1}$, $\Delta bambini_{i,t+1}$;
per la seconda equazione, *costante*, $\Delta adulti_{i,t+1}$, $\Delta bambini_{i,t+1}$, $nperc_{i,t}$.

Strumenti colonna (3): per la prima equazione, *costante*, r_t , $\Delta adulti_{i,t+1}$, $\Delta bambini_{i,t+1}$;
per la seconda equazione, *costante*, $\Delta adulti_{i,t+1}$, $\Delta bambini_{i,t+1}$, $nperc_{i,t}$.

Strumenti colonna (4): *costante*, r_{t-1} , $\Delta adulti_{i,t+1}$, $\Delta bambini_{i,t+1}$, $nperc_{i,t}$, $nperc_{i,t-1}$.

Tabella 4.16
Equazione di Eulero non lineare
Famiglie di età 26-70 anni
Aggregazione temporale semplice del tasso di interesse

	(1) GMM	(2) GMM-LN	(3) GMM-K	(4) GMM-D
γ	1.504*** (0.346)	1.885*** (0.292)	1.884*** (0.292)	1.063** (0.507)
$1/\gamma$	0.665*** (0.153)	0.531*** (0.082)	0.531*** (0.082)	0.940** (0.449)
β	0.923*** (0.0271)	0.978*** (0.00450)	0.978*** (0.00450)	0.980*** (0.00413)
$\Delta adulti_{i,t+l}$	0.188** (0.0827)	0.199*** (0.0530)	0.199*** (0.0530)	0.0917** (0.0418)
$\Delta bambini_{i,t+l}$	0.0945 (0.0660)	0.123** (0.0531)	0.123** (0.0531)	0.0574 (0.0408)
$\Delta nperc_{i,t+l}$	0.0294 (0.0222)	0.0580** (0.0264)	0.0580** (0.0264)	0.0421 (0.0560)
ν		0.0613*** (0.00363)		
κ			1.243*** (0.0874)	
Osservazioni	14,523	13,780	13,780	8,426
Test di Hansen (<i>p-value</i>)	27.5577 (0.0000)	0.760976 (0.6835)	0.760972 (0.6835)	0.200629 (0.6542)

*** p<0.01, ** p<0.05, * p<0.1

Stima GMM a due passi con errori standard robusti in presenza di *clustering* ed eteroschedasticità.

Strumenti colonna (1): *costante*, r_t , $adulti_{i,t}$, $bambini_{i,t}$, $nperc_{i,t}$, $nperc_{i,t-1}$.

Strumenti colonna (2): per la prima equazione, *costante*, r_t , $adulti_{i,t}$, $bambini_{i,t}$;
per la seconda equazione, *costante*, $adulti_{i,t}$, $bambini_{i,t}$, $nperc_{i,t}$.

Strumenti colonna (3): per la prima equazione, *costante*, r_t , $adulti_{i,t}$, $bambini_{i,t}$;
per la seconda equazione, *costante*, $adulti_{i,t}$, $bambini_{i,t}$, $nperc_{i,t}$.

Strumenti colonna (4): *costante*, r_{t-1} , $adulti_{i,t}$, $bambini_{i,t}$, $nperc_{i,t}$, $nperc_{i,t-1}$.

4.4 Test di eccesso di sensibilità

L'equazione di Eulero viene stimata, oltre che per ottenere stime dei parametri di preferenza intertemporale, anche per sottoporre a verifica empirica le ipotesi alla base della teoria delle scelte intertemporali e del modello del ciclo di vita.

Uno dei test più comunemente effettuati è quello dell'eccesso di sensibilità del tasso di crescita del consumo rispetto al tasso di crescita atteso del reddito. Infatti, la teoria delle scelte intertemporali afferma che nessuna variabile nota al tempo t , e quindi neanche cambiamenti attesi del reddito, dovrebbe aiutare a prevedere la crescita del consumo tra t e $t+1$, in quanto tale informazione dovrebbe già essere utilizzata dal consumatore nello scegliere il livello del consumo al tempo t .

Quindi, una volta inserite nell'equazione di Eulero le variabili socio-demografiche e una volta strumentato il tasso di crescita del reddito disponibile,³¹ quest'ultima variabile non dovrebbe risultare significativa.

La tabella 4.17 a pag. 84 mostra i risultati per il nostro campione: le variabili strumentate sono il tasso di interesse, il tasso di crescita del reddito e la variazione nel numero di percettori del reddito; gli strumenti aggiuntivi utilizzati in tutte le specificazioni sono il tasso di interesse ritardato di due periodi, il numero di percettori di reddito ritardato di due periodi e delle variabili dicotomiche che indicano la condizione professionale contemporanea del capofamiglia. Queste ultime comprendono una variabile per i lavoratori dipendenti, che abbiamo posto come *baseline*, una per i lavoratori autonomi, una per i disoccupati, una per i pensionati, una per le casalinghe e, infine, una per indicare tutte le rimanenti condizioni non professionali. L'utilizzo di queste variabili è motivato dal fatto che il tasso di crescita ritardato del reddito, strumento solitamente presente nei test sull'eccesso di sensibilità condotti in altri studi, si è rilevato uno strumento debole nel nostro caso.³² Inoltre, ci si attende che

³¹ Il tasso di crescita del reddito viene strumentato perché bisogna considerare l'aspettativa sulla variazione del reddito formulata dagli agenti al tempo t .

³² Infatti, utilizzando come strumenti aggiuntivi il tasso di interesse ritardato di due periodi, il numero di percettori ritardato di due e tre periodi, il numero di adulti ritardato

queste variabili correlino con il tasso di crescita del reddito: ad esempio, un lavoratore autonomo dovrebbe attendersi una variazione diversa da quella di un lavoratore dipendente, in quanto il secondo può contare su una maggiore stabilità del proprio reddito.

In colonna (1) e (2) abbiamo stimato con una procedura GMM a due passi l'equazione di Eulero log-linearizzata con il tasso di crescita del reddito familiare disponibile. In particolare, in colonna (1) abbiamo mostrato che, non condizionandoci alla variazione del numero di percettori di reddito, il coefficiente del tasso di crescita del reddito risulta significativo: questo rigetto delle implicazioni del modello del ciclo di vita era tipico dei primi articoli che si occupavano del test di eccesso di sensibilità senza considerare le variazioni nelle variabili socio-demografiche e, segnatamente, la variazione nei percettori di reddito. La specificazione in colonna (2) mostra, invece, che l'inserimento della variazione nel numero di percettori di reddito rende non significativo il coefficiente del tasso di crescita del reddito, rigettando quindi l'ipotesi di eccesso di sensibilità.

Poiché il valore della statistica F di Kleibergen e Paap (2006) sembra essere al limite della soglia che definisce la debolezza o meno degli strumenti impiegati³³ e per saggiare la robustezza dei nostri risultati, abbiamo stimato l'equazione di Eulero con lo stimatore GMM-CUE, che ha la proprietà di fornire stime robuste in presenza di identificazione debole del modello: le colonne (3) e (4) mostrano le stime in assenza e in presenza, rispettivamente, della variazione nel numero di percettori di reddito.

Le conclusioni rimangono sostanzialmente invariate: la significatività del tasso di crescita del reddito sembra cogliere variazioni intervenute nel numero dei

di due periodi e il tasso di crescita del reddito ritardato di due periodi si ottiene una statistica F di Kleibergen e Paap (2006) pari a 1.44.

³³ Ad esempio, considerando come criterio per definire debole un insieme di strumenti una distorsione relativa dello stimatore IV rispetto a quello OLS al massimo del 10%, il valore critico tabulato da Stock e Yogo (2005) è 8.50. Il valore della statistica F nel nostro caso è 9.01. Tuttavia, bisogna considerare che i valori critici che stiamo impiegando sono stati calcolati nell'ipotesi di errori indipendenti e identicamente distribuiti mentre nel nostro caso presentano *clustering*.

perceptor di reddito; al contrario, quando quest'ultime vengono inserite nell'equazione, sembra non esserci più alcuna traccia di eccesso di sensibilità.

Risultati analoghi si ottengono se, invece di considerare il tasso di interesse aggregato temporalmente secondo Hall (1988), si considera il tasso annuale reale dei BOT. Le stime sono riprodotte in tabella 4.18 a pag. 85.

Tabella 4.17
Test di eccesso di sensibilità
Aggregazione temporale di Hall (1988) del tasso di interesse

	(1) GMM-2S	(2) GMM-2S	(3) CUE	(4) CUE
$\ln(1 + r_{t+1})$	0.731*** (0.123)	0.721*** (0.127)	0.732*** (0.124)	0.721*** (0.128)
$\Delta \ln y_{i,t+1}$	0.220*** (0.0539)	0.125 (0.0806)	0.214*** (0.0539)	0.106 (0.0816)
$\Delta nperc_{i,t+1}$		0.0921 (0.0564)		0.104* (0.0569)
$\Delta adulti_{i,t+1}$	0.0786*** (0.0148)	0.0478** (0.0242)	0.0801*** (0.0148)	0.0458* (0.0244)
$\Delta bambini_{i,t+1}$	0.0733*** (0.0113)	0.0573*** (0.0152)	0.0742*** (0.0113)	0.0564*** (0.0153)
$d_{1995,t}$	-0.178*** (0.0173)	-0.175*** (0.0178)	-0.178*** (0.0173)	-0.174*** (0.0179)
<i>costante</i>	0.00552 (0.00357)	0.00500 (0.00368)	0.00557 (0.00357)	0.00501 (0.00371)
Osservazioni	21,093	21,093	21,093	21,093
R-quadro	0.174	0.129	0.173	0.117
Test di Hansen (<i>p-value</i>)	10.216 (0.0694)	7.026 (0.1345)	10.210 (0.0695)	6.944 (0.1389)
<i>Kleibergen-Paap rk Wald F statistic</i>	10.900	9.006	10.900	9.006

*** p<0.01, ** p<0.05, * p<0.1

Errori standard robusti in presenza di *clustering* ed eteroschedasticità.

Variabili endogene: $\ln(1 + r_{t+1})$, $\Delta \ln y_{i,t+1}$, $\Delta nperc_{i,t+1}$.

Strumenti: $\Delta adulti_{i,t+1}$, $\Delta bambini_{i,t+1}$, $d_{1995,t}$, r_{t-1} , $nperc_{i,t-1}$, $autonomo_{i,t}$, $disoccupato_{i,t}$, $pensionato_{i,t}$, $casalinga_{i,t}$, $altre\ condizioni\ non\ professionali_{i,t}$.

Tabella 4.18

Test di eccesso di sensibilità

Aggregazione temporale semplice del tasso di interesse

	(1) GMM-2S	(2) GMM-2S	(3) CUE	(4) CUE
$\ln(1 + r_{t+1})$	0.650*** (0.135)	0.644*** (0.138)	0.651*** (0.135)	0.645*** (0.139)
$\Delta \ln y_{i,t+1}$	0.219*** (0.0539)	0.125 (0.0804)	0.213*** (0.0539)	0.105 (0.0815)
$\Delta nperc_{i,t+1}$		0.0916 (0.0563)		0.104* (0.0569)
$\Delta adulti_{i,t+1}$	0.0789*** (0.0148)	0.0481** (0.0242)	0.0804*** (0.0148)	0.0461* (0.0244)
$\Delta bambini_{i,t+1}$	0.0735*** (0.0113)	0.0575*** (0.0152)	0.0744*** (0.0113)	0.0566*** (0.0153)
$d_{1995,t}$	-0.189*** (0.0218)	-0.186*** (0.0224)	-0.189*** (0.0218)	-0.185*** (0.0226)
<i>costante</i>	0.00508 (0.00441)	0.00448 (0.00453)	0.00513 (0.00441)	0.00447 (0.00457)
Osservazioni	21,093	21,093	21,093	21,093
R-quadro	0.175	0.130	0.173	0.117
Test di Hansen (<i>p-value</i>)	10.449 (0.0635)	7.275 (0.1220)	10.441 (0.0637)	7.185 (0.1264)
<i>Kleibergen-Paap rk Wald F statistic</i>	10.887	9.039	10.887	9.039

*** p<0.01, ** p<0.05, * p<0.1

Errori standard robusti in presenza di *clustering* ed eteroschedasticità.

Variabili endogene: $\ln(1 + r_{t+1})$, $\Delta \ln y_{i,t+1}$, $\Delta nperc_{i,t+1}$.

Strumenti: $\Delta adulti_{i,t+1}$, $\Delta bambini_{i,t+1}$, $d_{1995,t}$, r_{t-1} , $nperc_{i,t-1}$, $autonomo_{i,t}$, $disoccupato_{i,t}$, $pensionato_{i,t}$, $casalinga_{i,t}$, *altre condizioni non professionali* $_{i,t}$.

4.5 Le implicazioni empiriche della critica di Chamberlain

In questo paragrafo cerchiamo di mostrare come peggiorano le stime dell'equazione di Eulero se si dispone unicamente di un campione con poca estensione temporale.

A tal scopo, riduciamo il nostro campione alle sole osservazioni che vanno dal 1995 al 2010: questa scelta equivale a stimare l'equazione di Eulero solo sui dati dal 2000 al 2010 poiché le prime osservazioni vengono perse per la costruzione dei tassi di crescita e degli strumenti ritardati.

In questo esercizio, consideriamo solo il caso del tasso di interesse definito come la differenza tra il tasso nominale annuale dei BOT e l'inflazione misurata con l'indice NIC.

Le stime dell'equazione di Eulero log-linearizzata, ottenute strumentando solo il tasso di interesse e la variazione dei percettori di reddito, sono presentate in tabella 4.19 a pag. 87.

Come si può vedere, pur disponendo di circa 10,000 osservazioni e di strumenti validi ed informativi, le stime dell'elasticità di sostituzione intertemporale risultano essere imprecise.

La ragione teorica che sta alla base di questi risultati è che la dimensione temporale complessiva del campione è limitata. I nostri stimatori, invece, si basano proprio sull'assunto che le aspettative valgano lungo la dimensione temporale, che deve, dunque, essere abbastanza estesa.

Analoghi risultati se si considera il caso degli stimatori non lineari. Assumendo le variazioni nelle variabili demografiche come esogene, si ottengono i risultati di tabella 4.20 a pag. 88.

I primi problemi emergono considerando il test di Hansen: se si guardano le colonne (2) e (3), si può osservare come strumenti che nelle precedenti stime erano risultati validi e leciti anche sul piano teorico, visto che appartengono all'insieme informativo corrente, vengono rigettati dal test.

Le stime dell'avversione relativa al rischio appaiono, almeno nelle prime tre colonne, irrealisticamente basse. Migliori appaiono, invece, le stime del fattore di sconto intertemporale, che risultano realistiche e in linea con le precedenti stime.

Lo stimatore GMM-D, presentato in colonna (4), seppure più impreciso degli altri, sembra fornire le stime puntuali migliori, ovvero dotate di un maggiore senso economico, dei parametri di preferenza intertemporale.

Tabella 4.19
Equazione di Eulero log-linearizzata
Anni 2000-2010
Aggregazione temporale semplice del tasso di interesse

	(1) $\Delta \ln c_{i,t+1}$	(2) $\Delta \ln c_{i,t+1}$	(3) $\Delta \ln c_{i,t+1}$
$\ln(1 + r_{t+1})$	0.579 (0.852)	0.577 (0.855)	0.475 (0.854)
$\Delta nperc_{i,t+1}$	0.0933 (0.0661)	0.0523 (0.0640)	0.0855 (0.0651)
$\Delta adulti_{i,t+1}$	0.0773* (0.0423)	0.104** (0.0411)	0.0829** (0.0417)
$\Delta bambini_{i,t+1}$	0.0978*** (0.0293)	0.113*** (0.0285)	0.0986*** (0.0289)
<i>costante</i>	0.00665 (0.0152)	0.00774 (0.0153)	0.00871 (0.0153)
Osservazioni	9,961	10,000	10,000
R-quadro	0.043	0.043	0.043
Test di Hansen (<i>p-value</i>)	1.591 (0.4513)	6.415 (0.0405)	0.007 (0.9356)
<i>Kleibergen-Paap rk Wald F statistic</i>	22.103	23.920	31.109

*** p<0.01, ** p<0.05, * p<0.1

Stima GMM a due passi con errori standard robusti in presenza di *clustering* ed eteroschedasticità.

Variabili endogene: $\ln(1 + r_{t+1})$, $\Delta nperc_{i,t+1}$.

Strumenti colonna (1): $\Delta adulti_{i,t+1}$, $\Delta bambini_{i,t+1}$, $d_{1995,t}$, *costante*, r_{t-1} , $\Delta \ln y_{i,t-1}$, $nperc_{i,t-1}$, $nperc_{i,t-2}$.

Strumenti colonna (2): $\Delta adulti_{i,t+1}$, $\Delta bambini_{i,t+1}$, $d_{1995,t}$, *costante*, r_{t-1} , $\Delta \ln c_{i,t-1}$, $nperc_{i,t-1}$, $nperc_{i,t-2}$.

Strumenti colonna (3): $\Delta adulti_{i,t+1}$, $\Delta bambini_{i,t+1}$, $d_{1995,t}$, *costante*, r_{t-1} , $nperc_{i,t-1}$, $nperc_{i,t-2}$.

Tabella 4.20
Equazione di Eulero non lineare
Anni 2000-2010
Aggregazione temporale semplice del tasso di interesse

	(1) GMM	(2) GMM-LN	(3) GMM-K	(4) GMM-D
γ	0.319*** (0.0697)	0.800** (0.311)	0.806** (0.314)	2.299*** (0.551)
$1/\gamma$	3.136*** (0.686)	1.249** (0.485)	1.241** (0.484)	0.435*** (0.104)
β	0.991*** (0.000544)	0.997*** (0.00285)	0.998*** (0.00287)	0.981*** (0.0179)
$\Delta adulti_{i,t+l}$	0.0406*** (0.00955)	0.0901** (0.0367)	0.0905** (0.0371)	-0.245 (0.329)
$\Delta bambini_{i,t+l}$	0.0353*** (0.00843)	0.0950** (0.0373)	0.0956** (0.0378)	0.336 (0.797)
$\Delta nperc_{i,t+l}$	0.00482 (0.00496)	0.0398* (0.0211)	0.0404* (0.0213)	0.574** (0.269)
ν		0.0918*** (0.0200)		
κ			1.061*** (0.0359)	
Osservazioni	16,294	16,294	16,294	10,000
Test di Hansen (<i>p-value</i>)	2.79707 (0.0944)	62.5939 (0.0000)	51.6999 (0.0000)	0.399024 (0.5276)

*** p<0.01, ** p<0.05, * p<0.1

Stima GMM a due passi con errori standard robusti in presenza di *clustering* ed eteroschedasticità.

Strumenti colonna (1): *costante*, r_t , $\Delta adulti_{i,t+1}$, $\Delta bambini_{i,t+1}$, $nperc_{i,t}$, $nperc_{i,t-1}$.

Strumenti colonna (2): per la prima equazione, *costante*, r_t , $\Delta adulti_{i,t+1}$, $\Delta bambini_{i,t+1}$;

per la seconda equazione, *costante*, $\Delta adulti_{i,t+1}$, $\Delta bambini_{i,t+1}$, $nperc_{i,t}$.

Strumenti colonna (3): per la prima equazione, *costante*, r_t , $\Delta adulti_{i,t+1}$, $\Delta bambini_{i,t+1}$;

per la seconda equazione, *costante*, $\Delta adulti_{i,t+1}$, $\Delta bambini_{i,t+1}$, $nperc_{i,t}$.

Strumenti colonna (4): *costante*, r_{t-1} , $\Delta adulti_{i,t+1}$, $\Delta bambini_{i,t+1}$, $nperc_{i,t}$, $nperc_{i,t-1}$.

4.6 L'equazione di Eulero per i consumi alimentari

Sino ad ora abbiamo stimato l'equazione di Eulero per i consumi non durevoli. In questo paragrafo concentreremo la nostra attenzione sul solo consumo di beni alimentari.

Come già affermato, la spesa in generi alimentari e il reddito sono stati deflazionati utilizzando l'indice NIC specifico per i beni alimentari. Anche il tasso di interesse reale è stato calcolato utilizzando l'inflazione dei soli beni alimentari.

L'utilizzo dei consumi alimentari è problematico sul piano teorico in quanto implica la separabilità nella funzione di utilità del consumatore del consumo dei beni alimentari dagli altri beni non durevoli. Tuttavia, in molti studi empirici, soprattutto quelli che utilizzano l'indagine *Panel Study of Income Dynamics* (PSID), vengono impiegate le spese in generi alimentari, adducendo la motivazione che la stima dell'equazione di Eulero in un simile contesto fornisca comunque un limite inferiore all'elasticità di sostituzione intertemporale per gli altri beni non durevoli.

I risultati per quanto riguarda l'equazione di Eulero log-linearizzata sono presentati in tabella 4.21 a pag. 90. Nell'ottenere tali risultati, si è utilizzato il tasso di interesse proposto da Hall (1988) e sono stati strumentati il tasso di interesse e la variazione nel numero di percettori di reddito.

Come era lecito attendersi, la stima puntuale dell'elasticità di sostituzione intertemporale del consumo di beni alimentari risulta più bassa di quella per l'insieme dei beni non durevoli: questo risultato è motivato dal fatto che i generi alimentari sono un bene necessario e quindi sono poco sostituibili tra periodi e poco sensibili alle variazioni del tasso di interesse. Inoltre, la stima dell'elasticità di sostituzione intertemporale è molto imprecisa e non si rifiuta l'ipotesi di nullità di tale parametro a un qualsiasi livello di significatività convenzionale.

Considerando il tasso di interesse reale calcolato come differenza tra il tasso nominale annuo e l'inflazione annua, le stime non presentano forti cambiamenti. I risultati sono illustrati in tabella 4.22 a pag. 91. In particolare, la stima puntuale dell'elasticità di sostituzione intertemporale risulta ancora più piccola e decisamente non significativa.

In questo lavoro, si è cercato di ottenere delle stime dell'equazione di Eulero in forma non lineare per i soli consumi alimentari. Tuttavia, tutti gli stimatori GMM impiegati, con diversi insiemi di strumenti addizionali, non sono riusciti a raggiungere la convergenza o, qualora la convergenza sia stata raggiunta, hanno fornito stime irrealistiche dell'avversione relativa al rischio e degli altri parametri del modello.

Tabella 4.21
Equazione di Eulero log-linearizzata
Consumi alimentari
Aggregazione temporale di Hall (1988) del tasso di interesse

	(1) $\Delta \ln c_{i,t+1}$	(2) $\Delta \ln c_{i,t+1}$	(3) $\Delta \ln c_{i,t+1}$
$\ln(1 + r_{t+1})$	0.442 (0.393)	0.433 (0.397)	0.432 (0.396)
$\Delta nperc_{i,t+1}$	0.0629 (0.0652)	0.0429 (0.0631)	0.0615 (0.0650)
$\Delta adulti_{i,t+1}$	0.163*** (0.0407)	0.177*** (0.0394)	0.165*** (0.0406)
$\Delta bambini_{i,t+1}$	0.150*** (0.0277)	0.158*** (0.0268)	0.150*** (0.0275)
$d_{1995,t}$	-0.142** (0.0596)	-0.139** (0.0602)	-0.141** (0.0601)
<i>costante</i>	-0.0103 (0.00768)	-0.00964 (0.00775)	-0.0101 (0.00773)
Osservazioni	14,114	14,152	14,166
R-quadro	0.053	0.053	0.053
Test di Hansen (<i>p-value</i>)	0.848 (0.6543)	2.741 (0.2540)	0.004 (0.9510)
<i>Kleibergen-Paap rk Wald F statistic</i>	31.241	33.989	42.394

*** p<0.01, ** p<0.05, * p<0.1

Stima GMM a due passi con errori standard robusti in presenza di *clustering* ed eteroschedasticità.

Variabili endogene: $\ln(1 + r_{t+1})$, $\Delta nperc_{i,t+1}$.

Strumenti colonna (1): $\Delta adulti_{i,t+1}$, $\Delta bambini_{i,t+1}$, $d_{1995,t}$, *costante*, r_{t-1} , $\Delta \ln y_{i,t-1}$, $nperc_{i,t-1}$, $nperc_{i,t-2}$.

Strumenti colonna (2): $\Delta adulti_{i,t+1}$, $\Delta bambini_{i,t+1}$, $d_{1995,t}$, *costante*, r_{t-1} , $\Delta \ln c_{i,t-1}$, $nperc_{i,t-1}$, $nperc_{i,t-2}$.

Strumenti colonna (3): $\Delta adulti_{i,t+1}$, $\Delta bambini_{i,t+1}$, $d_{1995,t}$, *costante*, r_{t-1} , $nperc_{i,t-1}$, $nperc_{i,t-2}$.

Tabella 4.22
Equazione di Eulero log-linearizzata
Consumi alimentari
Aggregazione temporale semplice del tasso di interesse

	(1) $\Delta \ln c_{i,t+1}$	(2) $\Delta \ln c_{i,t+1}$	(3) $\Delta \ln c_{i,t+1}$
$\ln(1 + r_{t+1})$	0.195 (0.410)	0.175 (0.414)	0.172 (0.413)
$\Delta nperc_{i,t+1}$	0.0636 (0.0653)	0.0435 (0.0632)	0.0625 (0.0651)
$\Delta adulti_{i,t+1}$	0.163*** (0.0407)	0.176*** (0.0395)	0.164*** (0.0406)
$\Delta bambini_{i,t+1}$	0.150*** (0.0277)	0.158*** (0.0269)	0.150*** (0.0276)
$d_{1995,t}$	-0.113 (0.0740)	-0.108 (0.0747)	-0.110 (0.0745)
<i>costante</i>	-0.00625 (0.00946)	-0.00529 (0.00955)	-0.00572 (0.00952)
Osservazioni	14,114	14,152	14,166
R-quadro	0.054	0.053	0.053
Test di Hansen (<i>p-value</i>)	0.790 (0.6737)	2.864 (0.2388)	0.000 (0.9899)
<i>Kleibergen-Paap rk Wald F statistic</i>	31.094	33.807	42.197

*** p<0.01, ** p<0.05, * p<0.1

Stima GMM a due passi con errori standard robusti in presenza di *clustering* ed eteroschedasticità.

Variabili endogene: $\ln(1 + r_{t+1})$, $\Delta nperc_{i,t+1}$.

Strumenti colonna (1): $\Delta adulti_{i,t+1}$, $\Delta bambini_{i,t+1}$, $d_{1995,t}$, *costante*, r_{t-1} , $\Delta \ln y_{i,t-1}$, $nperc_{i,t-1}$, $nperc_{i,t-2}$.

Strumenti colonna (2): $\Delta adulti_{i,t+1}$, $\Delta bambini_{i,t+1}$, $d_{1995,t}$, *costante*, r_{t-1} , $\Delta \ln c_{i,t-1}$, $nperc_{i,t-1}$, $nperc_{i,t-2}$.

Strumenti colonna (3): $\Delta adulti_{i,t+1}$, $\Delta bambini_{i,t+1}$, $d_{1995,t}$, *costante*, r_{t-1} , $nperc_{i,t-1}$, $nperc_{i,t-2}$.

Capitolo V

Eterogeneità nei parametri di preferenza intertemporale

5.1 Come introdurre eterogeneità nei parametri di preferenza intertemporale

In questo capitolo cercheremo di implementare diversi metodi per introdurre eterogeneità nei parametri di preferenza intertemporale.

In particolare, in questo paragrafo, modificheremo la specificazione dell'equazione di Eulero introdotta nei capitoli precedenti per permettere al coefficiente di avversione relativa al rischio e al fattore di sconto di variare tra due diversi gruppi di famiglie: le famiglie con un capofamiglia con un alto livello di istruzione e quelle con un capofamiglia con un basso livello di istruzione.

Dopo varie ricerche di specificazione, abbiamo deciso di classificare come famiglie con un basso livello di istruzione quelle il cui capofamiglia non presenta alcun titolo di istruzione oppure possiede un titolo di scuola elementare o media inferiore. Al contrario, abbiamo classificato come famiglie con un alto livello di istruzione quelle il cui capofamiglia possiede un titolo di istruzione pari o al diploma di scuola media superiore o a un diploma di laurea o a un titolo *post lauream*.

Formalmente, consideriamo una nuova espressione per l'equazione di Eulero, contemplando anche la possibilità della presenza di errori di misura nel consumo:

$$(5.1) \quad \left(\frac{c_{i,t+1}^o}{c_{i,t}^o} \right)^{-(\gamma_0 + \gamma_1 E_i)} (1 + r_{t+1})(\beta_0 + \beta_1 E_i) = \varepsilon_{i,t+1} \left(\frac{\eta_{i,t+1}}{\eta_{i,t}} \right)^{-(\gamma_0 + \gamma_1 E_i)}$$

Dove E_i è una variabile dicotomica che prende il valore unitario per le famiglie con un alto livello di istruzione.

Ridefiniamo nuovamente l'insieme informativo $I_{i,t}^*$, formato da tutte le variabili al tempo t , con l'esclusione del consumo al tempo t , e dai livelli ritardati del consumo e delle altre variabili. Sotto l'ipotesi che l'errore di misura sia indipendente da ogni altra variabile,³⁴ il valore atteso condizionato del secondo membro della (5.1) risulta essere pari a:

$$(5.2) \quad E \left[\varepsilon_{i,t+1} \left(\frac{\eta_{i,t+1}}{\eta_{i,t}} \right)^{-(\gamma_0 + \gamma_1 E_i)} \mid I_{i,t}^*, E_i = e_i \right] = \\ = E[\varepsilon_{i,t+1} \mid I_{i,t}^*, E_i = e_i] E \left[\left(\frac{\eta_{i,t+1}}{\eta_{i,t}} \right)^{-(\gamma_0 + \gamma_1 E_i)} \mid I_{i,t}^*, E_i = e_i \right] = \\ = E \left[\left(\frac{\eta_{i,t+1}}{\eta_{i,t}} \right)^{-(\gamma_0 + \gamma_1 E_i)} \mid E_i = e_i \right] = \kappa_0 + \kappa_1 e_i$$

Dove e_i vale 0 o 1 e dove abbiamo parametrizzato con κ_0 il valore atteso per le famiglie con un basso livello di istruzione mentre con κ_1 la differenza tra il valore atteso per le famiglie con un alto livello di istruzione e il valore atteso per quelle con un basso livello di istruzione. Inoltre, se assumiamo anche che l'errore di misura abbia distribuzione log-normale, con la stessa varianza ν nei due gruppi di famiglie, la (5.2) diviene:

$$(5.3) \quad E \left[\left(\frac{\eta_{i,t+1}}{\eta_{i,t}} \right)^{-(\gamma_0 + \gamma_1 E_i)} \mid E_i = e_i \right] = \exp[(\gamma_0 + \gamma_1 e_i)^2 \nu]$$

³⁴ Si veda il capitolo II per una rassegna più precisa delle assunzioni fatte per quanto riguarda gli errori di misura del consumo.

Ora abbiamo definito tutte le quantità necessarie per sviluppare in questo contesto gli stimatori GMM che considerano gli errori di misura nel consumo. In particolare, lo stimatore GMM-K utilizza le seguenti relazioni:

$$(5.4) \quad u_{i,t+1}^1 = \left(\frac{c_{i,t+1}^o}{c_{i,t}^o} \right)^{-(\gamma_0 + \gamma_1 e_i)} (1 + r_{t+1})(\beta_0 + \beta_1 e_i) - (\kappa_0 + e_i \kappa_1)$$

$$u_{i,t+2}^2 = \left(\frac{c_{i,t+2}^o}{c_{i,t}^o} \right)^{-(\gamma_0 + \gamma_1 e_i)} (1 + r_{t+1})(1 + r_{t+2})(\beta_0 + \beta_1 e_i)^2 - (\kappa_0 + e_i \kappa_1)$$

Grazie alla (5.3) è facile ottenere lo stimatore GMM-LN, che si basa sull'ipotesi di errori di misura log-normali:

$$(5.5) \quad u_{i,t+1}^1 = \left(\frac{c_{i,t+1}^o}{c_{i,t}^o} \right)^{-(\gamma_0 + \gamma_1 e_i)} (1 + r_{t+1})(\beta_0 + \beta_1 e_i) - \exp[(\gamma_0 + \gamma_1 e_i)^2 \nu]$$

$$u_{i,t+2}^2 = \left(\frac{c_{i,t+2}^o}{c_{i,t}^o} \right)^{-(\gamma_0 + \gamma_1 e_i)} (1 + r_{t+1})(1 + r_{t+2})(\beta_0 + \beta_1 e_i)^2 - \exp[(\gamma_0 + \gamma_1 e_i)^2 \nu]$$

È importante sottolineare in che cosa questi due stimatori si differenziano in questo contesto. Lo stimatore GMM-K assume che il valore atteso condizionato del secondo membro della (5.1) sia differente per le famiglie con un basso livello di istruzione rispetto a quelle con un elevato livello di istruzione ma che sia omogeneo all'interno di questi due gruppi. Anche lo stimatore GMM-LN prevede una differenza tra i due gruppi ma questa è dovuta esclusivamente al diverso parametro di avversione al rischio. È in questo punto che i due stimatori si differenziano: infatti, lo stimatore GMM-K è più flessibile nel senso che è in grado di contemplare il caso in cui i due gruppi di famiglie abbiano lo stesso parametro di avversione relativa al rischio ma due diversi valori attesi condizionati, ad esempio perché la varianza dell'errore di misura è differente nei due gruppi.

Infine, riconsideriamo lo stimatore GMM-D che opera una differenziazione dei due termini che compongono la (5.4), ottenendo:

$$(5.6) \quad \zeta_{i,t+2} = \left[\left(\frac{c_{i,t+1}^o}{c_{i,t}^o} \right)^{-(\gamma_0 + \gamma_1 e_i)} (1 + r_{t+1})(\beta_0 + \beta_1 e_i) \right] - \left[\left(\frac{c_{i,t+2}^o}{c_{i,t}^o} \right)^{-(\gamma_0 + \gamma_1 e_i)} (1 + r_{t+1})(1 + r_{t+2})(\beta_0 + \beta_1 e_i)^2 \right]$$

Analogamente a quanto svolto nel capitolo IV, per applicare gli stimatori appena definiti ai nostri dati, è necessario considerare che la distanza temporale tra due osservazioni è, generalmente, di due anni e utilizzare delle variabili dicotomiche che correggano opportunamente l'esponente del fattore di sconto ogni volta che viene coinvolta la variazione triennale 1995-1998.

La tabella 5.1 di pag. 97 illustra i risultati ottenuti impiegando il tasso di interesse proposto da Hall (1988). In colonna (1), lo stimatore GMM che non tiene conto della presenza di errori di misura nel consumo segnala un effetto negativo dell'istruzione sul fattore di sconto intertemporale. Tuttavia, è necessario considerare che tale stimatore stima in maniera inconsistente i parametri del fattore di sconto intertemporale in presenza di errori di misura: il rifiuto delle restrizioni di sovraidentificazione in colonna (1) e la significatività della varianza dell'errore di misura in colonna (2) sembrano indicare che gli errori di misura sono presenti nei nostri dati.

Lo stimatore GMM-LN sembra indicare che le famiglie più istruite abbiano un fattore di sconto intertemporale più alto rispetto a quello delle famiglie meno istruite. Al contrario, gli stimatori GMM-K e GMM-D sembrano non segnalare nessun effetto significativo dell'istruzione sul fattore di sconto.

Infine, nessun stimatore sembra rilevare una differenza significativa tra i parametri di avversione relativa delle famiglie più istruite e quelle con un più basso livello di istruzione. Inoltre, lo stimatore GMM-K mostra che anche i valori attesi condizionati sono omogenei nei due gruppi di famiglie.

Si possono trarre conclusioni del tutto analoghe considerando il tasso di interesse reale annuale dei titoli di Stato aggregato in modo semplice. I risultati sono riportati in tabella 5.2 a pag. 98.

Tabella 5.1
Equazione di Eulero non lineare
Parametri γ e β eterogenei

Aggregazione temporale di Hall (1988) del tasso di interesse

		(1)	(2)	(3)	(4)
		GMM	GMM-LN	GMM-K	GMM-D
γ	<i>costante</i>	1.335* (0.771)	1.708*** (0.593)	1.697*** (0.609)	1.930 (2.267)
	<i>alta istruzione_i</i>	1.160 (0.778)	0.332 (0.482)	0.342 (0.489)	-0.0298 (1.135)
β	<i>costante</i>	0.944*** (0.0508)	0.986*** (0.00304)	0.985*** (0.00312)	0.971*** (0.0480)
	<i>alta istruzione_i</i>	-0.120* (0.0700)	0.00742* (0.00450)	0.00838 (0.00698)	0.0136 (0.0387)
Variabili Socio- Demografiche	$\Delta adulti_{i,t+1}$	0.340* (0.197)	0.228*** (0.0809)	0.228*** (0.0832)	0.122 (0.324)
	$\Delta bambini_{i,t+1}$	0.229 (0.199)	0.175** (0.0780)	0.174** (0.0795)	0.0826 (0.205)
	$\Delta nperc_{i,t+1}$	-0.00209 (0.0518)	0.0818*** (0.0276)	0.0804*** (0.0283)	0.204 (0.777)
ν	<i>costante</i>		0.0650*** (0.00390)		
κ_0	<i>costante</i>			1.204*** (0.168)	
κ_1	<i>costante</i>			0.111 (0.139)	
	Osservazioni	22,219	21,168	21,168	13,348
	Test di Hansen (<i>p-value</i>)	8.504 (0.0142)	1.74825 (0.4172)	1.68208 (0.1946)	Esattamente Identificato

*** p<0.01, ** p<0.05, * p<0.1

Stima GMM a due passi con errori standard robusti in presenza di *clustering* ed eteroschedasticità.

Strumenti colonna (1): *costante*, r_t , $adulti_{i,t}$, $adulti_{i,t-1}$, $bambini_{i,t}$, $bambini_{i,t-1}$, $nperc_{i,t}$, $nperc_{i,t-1}$, *alta istruzione_i*.

Strumenti colonna (2): per la prima equazione, *costante*, r_t , $adulti_{i,t}$, $bambini_{i,t}$, *alta istruzione_i*;
per la seconda equazione, *costante*, $adulti_{i,t}$, $bambini_{i,t}$, $nperc_{i,t}$, *alta istruzione_i*.

Strumenti colonna (3): per la prima equazione, *costante*, r_t , $adulti_{i,t}$, $bambini_{i,t}$, *alta istruzione_i*;
per la seconda equazione, *costante*, $adulti_{i,t}$, $bambini_{i,t}$, $nperc_{i,t}$, *alta istruzione_i*.

Strumenti colonna (4): *costante*, r_{t-1} , $adulti_{i,t}$, $bambini_{i,t}$, $nperc_{i,t}$, $nperc_{i,t-1}$, *alta istruzione_i*.

Tabella 5.2
Equazione di Eulero non lineare
Parametri γ e β eterogenei
Aggregazione temporale semplice del tasso di interesse

		(1)	(2)	(3)	(4)
		GMM	GMM-LN	GMM-K	GMM-D
γ	<i>costante</i>	1.366* (0.780)	1.792*** (0.475)	1.808*** (0.463)	1.560** (0.690)
	<i>alta istruzione_i</i>	1.162 (0.760)	0.233 (0.438)	0.221 (0.434)	-0.902 (2.719)
β	<i>costante</i>	0.939*** (0.0525)	0.982*** (0.00332)	0.982*** (0.00351)	0.975*** (0.00794)
	<i>alta istruzione_i</i>	-0.121* (0.0704)	0.00784* (0.00445)	0.00793 (0.00681)	0.0116 (0.00916)
Variabili Socio- Demografiche	$\Delta adults_{i,t+1}$	0.355* (0.215)	0.240*** (0.0728)	0.242*** (0.0730)	0.171* (0.100)
	$\Delta bambini_{i,t+1}$	0.252 (0.216)	0.196*** (0.0721)	0.198*** (0.0722)	0.150 (0.120)
	$\Delta nperc_{i,t+1}$	-0.00609 (0.0545)	0.0799*** (0.0264)	0.0801*** (0.0273)	0.0647 (0.132)
ν	<i>costante</i>		0.0648*** (0.00402)		
κ_0	<i>costante</i>			1.236*** (0.144)	
κ_1	<i>costante</i>			0.0701 (0.143)	
Osservazioni		22,219	21,168	21,168	13,348
Test di Hansen (<i>p-value</i>)		15.3999 (0.0005)	1.44582 (0.4853)	1.46061 (0.2268)	Esattamente Identificato

*** p<0.01, ** p<0.05, * p<0.1

Stima GMM a due passi con errori standard robusti in presenza di *clustering* ed eteroschedasticità.

Strumenti colonna (1): *costante*, r_t , $adulti_{i,t}$, $adulti_{i,t-1}$, $bambini_{i,t}$, $bambini_{i,t-1}$, $nperc_{i,t}$, $nperc_{i,t-1}$, *alta istruzione_i*.

Strumenti colonna (2): per la prima equazione, *costante*, r_t , $adulti_{i,t}$, $bambini_{i,t}$, *alta istruzione_i*;
per la seconda equazione, *costante*, $adulti_{i,t}$, $bambini_{i,t}$, $nperc_{i,t}$, *alta istruzione_i*.

Strumenti colonna (3): per la prima equazione, *costante*, r_t , $adulti_{i,t}$, $bambini_{i,t}$, *alta istruzione_i*;
per la seconda equazione, *costante*, $adulti_{i,t}$, $bambini_{i,t}$, $nperc_{i,t}$, *alta istruzione_i*.

Strumenti colonna (4): *costante*, r_{t-1} , $adulti_{i,t}$, $bambini_{i,t}$, $nperc_{i,t}$, $nperc_{i,t-1}$, *alta istruzione_i*.

Le considerazioni riportate sopra ci spingono a considerare delle specificazioni più vincolate, imponendo l'omogeneità del parametro di avversione relativa al rischio e dei valori attesi condizionati ma permettendo al fattore di sconto intertemporale di variare nei due gruppi di famiglie. I risultati vengono mostrati nelle tabelle 5.3 e 5.4 a pag. 100-101, rispettivamente impiegando il tasso di interesse di Hall (1988) e il tasso di interesse reale annuale dei BOT.

Lo stimatore GMM che non tiene in considerazione gli errori di misura del consumo non evidenzia alcuna differenza nei fattori di sconto dei due gruppi di famiglie. Invece, gli stimatori GMM-LN e GMM-K sembrano indicare che le famiglie più istruite abbiano un fattore di sconto intertemporale significativamente più elevato rispetto alle famiglie con un basso livello di istruzione: dunque le persone più istruite sembrano essere più pazienti rispetto a quelle meno istruite, in analogia con quanto riportato in altri studi empirici, ad esempio Alan e Browning (2010). Inoltre, tali stimatori confermano, ancora una volta, la presenza di errori di misura nel consumo e, dunque, le stime in colonna (1) risultano inconsistenti.

Infine, lo stimatore GMM-D non rileva la presenza di una differenza significativa tra i due fattori di sconto ma questo risultato è probabilmente imputabile alla scarsa precisione dello stimatore.

Quindi, possiamo concludere che, in base alle stime più affidabili presentate nelle colonne (2) e (3), sembra esserci una differenza significativa nei fattori di sconto intertemporali tra le famiglie più istruite e quelle con un più basso livello di istruzione. Invece, non è riscontrabile alcuna differenza significativa nei parametri di avversione relativa al rischio e, conseguentemente, nelle elasticità di sostituzione intertemporale. È possibile che quest'ultima conclusione sia anche dovuta alla maggiore difficoltà nello stimare l'avversione relativa al rischio rispetto al fattore di sconto intertemporale.

Tabella 5.3
Equazione di Eulero non lineare
Parametro β eterogeneo

Aggregazione temporale di Hall (1988) del tasso di interesse

		(1)	(2)	(3)	(4)
		GMM	GMM-LN	GMM-K	GMM-D
γ	<i>costante</i>	1.752*** (0.371)	1.894*** (0.358)	1.890*** (0.359)	1.929 (1.945)
β	<i>costante</i>	0.909*** (0.0329)	0.984*** (0.00343)	0.984*** (0.00341)	0.970*** (0.0377)
	<i>alta istruzione_i</i>	0.00361 (0.00470)	0.00843** (0.00393)	0.00841** (0.00392)	0.0134 (0.0357)
Variabili Socio- Demografiche	$\Delta adults_{i,t+1}$	0.297** (0.118)	0.240*** (0.0679)	0.239*** (0.0678)	0.113 (0.135)
	$\Delta bambini_{i,t+1}$	0.223* (0.116)	0.204*** (0.0646)	0.203*** (0.0644)	0.0761 (0.0946)
	$\Delta nperc_{i,t+1}$	0.0369 (0.0288)	0.0856*** (0.0229)	0.0855*** (0.0229)	0.213 (0.501)
ν	<i>costante</i>		0.0642*** (0.00382)		
κ	<i>costante</i>			1.258*** (0.120)	
	Osservazioni	22,219	21,168	21,168	13,348
	Test di Hansen (<i>p-value</i>)	48.2495 (0.0000)	3.80257 (0.2836)	3.77839 (0.2864)	0.391309 (0.5316)

*** p<0.01, ** p<0.05, * p<0.1

Stima GMM a due passi con errori standard robusti in presenza di *clustering* ed eteroschedasticità.

Strumenti colonna (1): *costante*, r_t , $adults_{i,t}$, $adults_{i,t-1}$, $bambini_{i,t}$, $bambini_{i,t-1}$, $nperc_{i,t}$, $nperc_{i,t-1}$, *alta istruzione_i*.

Strumenti colonna (2): per la prima equazione, *costante*, r_t , $adults_{i,t}$, $bambini_{i,t}$, *alta istruzione_i*;
per la seconda equazione, *costante*, $adults_{i,t}$, $bambini_{i,t}$, $nperc_{i,t}$, *alta istruzione_i*.

Strumenti colonna (3): per la prima equazione, *costante*, r_t , $adults_{i,t}$, $bambini_{i,t}$, *alta istruzione_i*;
per la seconda equazione, *costante*, $adults_{i,t}$, $bambini_{i,t}$, $nperc_{i,t}$, *alta istruzione_i*.

Strumenti colonna (4): *costante*, r_{t-1} , $adults_{i,t}$, $bambini_{i,t}$, $nperc_{i,t}$, $nperc_{i,t-1}$, *alta istruzione_i*.

Tabella 5.4
Equazione di Eulero non lineare
Parametro β eterogeneo
Aggregazione temporale semplice del tasso di interesse

		(1)	(2)	(3)	(4)
		GMM	GMM-LN	GMM-K	GMM-D
γ	<i>costante</i>	1.652*** (0.384)	1.910*** (0.339)	1.906*** (0.339)	1.393 (0.882)
β	<i>costante</i>	0.914*** (0.0318)	0.981*** (0.00349)	0.981*** (0.00348)	0.976*** (0.0107)
	<i>alta istruzione_i</i>	0.00353 (0.00421)	0.00852** (0.00395)	0.00850** (0.00394)	0.00681 (0.00844)
Variabili Socio- Demografiche	$\Delta adulti_{i,t+1}$	0.272** (0.109)	0.248*** (0.0661)	0.247*** (0.0660)	0.119** (0.0479)
	$\Delta bambini_{i,t+1}$	0.206* (0.105)	0.217*** (0.0640)	0.216*** (0.0638)	0.0918* (0.0513)
	$\Delta nperc_{i,t+1}$	0.0381 (0.0247)	0.0817*** (0.0234)	0.0816*** (0.0233)	0.117 (0.145)
ν	<i>costante</i>		0.0641*** (0.00386)		
κ	<i>costante</i>			1.262*** (0.115)	
	Osservazioni	22,219	21,168	21,168	13,348
	Test di Hansen (<i>p-value</i>)	57.0952 (0.0000)	2.58006 (0.4610)	2.56653 (0.4634)	.395262 (0.5295)

*** p<0.01, ** p<0.05, * p<0.1

Stima GMM a due passi con errori standard robusti in presenza di *clustering* ed eteroschedasticità.

Strumenti colonna (1): *costante*, r_t , $adulti_{i,t}$, $adulti_{i,t-1}$, $bambini_{i,t}$, $bambini_{i,t-1}$, $nperc_{i,t}$, $nperc_{i,t-1}$, *alta istruzione_i*.

Strumenti colonna (2): per la prima equazione, *costante*, r_t , $adulti_{i,t}$, $bambini_{i,t}$, *alta istruzione_i*;
per la seconda equazione, *costante*, $adulti_{i,t}$, $bambini_{i,t}$, $nperc_{i,t}$, *alta istruzione_i*.

Strumenti colonna (3): per la prima equazione, *costante*, r_t , $adulti_{i,t}$, $bambini_{i,t}$, *alta istruzione_i*;
per la seconda equazione, *costante*, $adulti_{i,t}$, $bambini_{i,t}$, $nperc_{i,t}$, *alta istruzione_i*.

Strumenti colonna (4): *costante*, r_{t-1} , $adulti_{i,t}$, $bambini_{i,t}$, $nperc_{i,t}$, $nperc_{i,t-1}$, *alta istruzione_i*.

5.2 Un nuovo tipo di stimatore

In questo paragrafo presentiamo, per completezza, un nuovo tipo di stimatore proposto da Alan e Browning (2010) per la stima dei parametri di preferenza intertemporale, chiamato SRE (*Synthetic Residual Estimation*).

Questa nuova procedura di stima, che appartiene alla classe più ampia degli stimatori *Simulated Minimum Distance* (SMD), presenta diversi aspetti innovativi: infatti, essa si basa sulla modellazione diretta degli errori di previsione e permette di considerare parametri di allocazione intertemporale eterogenei. Tuttavia, tale stimatore non risulta esente da alcune criticità che verranno messe in risalto nei prossimi paragrafi.

In sostanza, tale procedura si basa sulla definizione di un vettore di J statistiche, che vengono chiamate parametri ausiliari. Il vettore viene calcolato sui dati campionari e viene indicato con il simbolo λ^D . Inoltre, si specifica un modello parametrico per generare campioni analoghi a quello osservato. Su questi dati simulati vengono calcolati nuovamente i parametri ausiliari, indicati con $\lambda^S(\theta)$, dove θ indica il vettore dei parametri.

Infine, i parametri vengono stimati in modo da minimizzare la distanza, pesata con una matrice $J \times J$ positiva definita, tra i parametri ausiliari campionari e quelli calcolati sui campioni simulati:

$$(5.7) \quad \min_{\theta} (\lambda^S(\theta) - \lambda^D)' W (\lambda^S(\theta) - \lambda^D)$$

I parametri in totale sono 15. Nel seguito, indichiamo con μ parametri di posizione, con ϕ parametri di dispersione, con ω parametri che regolano la dipendenza tra le variabili e con π parametri legati alle probabilità. I parametri legati alle aspettative sono $(\phi_{\varepsilon 1}, \phi_{\varepsilon 2}, \omega, \pi)$; quelli legati alla distribuzione iniziale del consumo sono (μ_1, ϕ_1) ; quelli legati al fattore di sconto sono $(\mu_\beta, \phi_\beta, \omega_{\beta 1})$ e quelli legati alla avversione relativa al rischio sono $(\mu_\gamma, \phi_\gamma, \omega_{\gamma\beta}, \omega_{\gamma 1})$; infine, gli ultimi due parametri regolano la posizione e la variabilità dell'errore di misura nel consumo (μ_m, ϕ_m) .

5.2.1 La simulazione dei dati

Gli autori mostrano, attraverso studi di simulazioni effettuati per diversi valori dei parametri di preferenza intertemporale, che gli errori di previsione seguono un processo che può ben essere approssimato da una mistura di due variabili log-normali. Inoltre, gli errori di previsione esibiscono la chiara presenza di eteroschedasticità condizionale. Sfruttando questi risultati, si possono generare direttamente gli errori di previsione.

Immaginiamo, dunque, di disporre di un campione *panel* bilanciato di famiglie indicizzate da $i = 1, \dots, N$ e osservate per un certo numero di periodi, indicizzati da $t = 1, \dots, T$. Generiamo un vettore di quattro variabili indipendenti tra di loro e indipendenti tra le famiglie e nel tempo: $(v_{i,t}^1, v_{i,t}^2, v_{i,t}^3, v_{i,t}^4) \forall i, t$, dove $v_{i,t}^1, v_{i,t}^2$ e $v_{i,t}^4$ sono normali standard mentre $v_{i,t}^3$ è uniforme $[0,1]$. Definiamo due termini legati alle varianze: $\sigma_k^2 = \exp(\phi_{\varepsilon k})$ per $k = 1, 2$. Inoltre, all'istante 0 , definiamo due errori:

$$(5.8) \quad \varepsilon_{i,0}^k = \exp\left[-\frac{\ln(1+\sigma_k^2)}{2} + \sqrt{\ln(1+\sigma_k^2)}v_{i,0}^k\right], \text{ per } k = 1, 2.$$

Per costruzione, questi errori sono log-normali con media unitaria. Inoltre, costruiamo una mistura di questi errori utilizzando il seguente parametro:

$$(5.9) \quad d_{i,0} = \Phi[50(v_{i,0}^3 - \pi)]$$

Dove abbiamo utilizzato la funzione di ripartizione della normale standard. Questo indicatore "lisciato", che viene impiegato per facilitare l'ottimizzazione, controlla se la i -esima famiglia estrae l'errore di previsione dalla prima o dalla seconda distribuzione, ovvero si ha che:

$$(5.10) \quad \varepsilon_{i,0} = d_{i,0}\varepsilon_{i,0}^1 + (1 - d_{i,0})\varepsilon_{i,0}^2$$

Questi errori del periodo 0 vengono impiegati per definire i successivi errori, dal periodo 1 al periodo T . Per $t \geq 1$, infatti, definiamo ricorsivamente le seguenti quantità:

$$(5.11) \quad \sigma_{k,i,t}^2 = \exp[\phi_{\varepsilon k} + \omega(\varepsilon_{i,t-1} - 1)], \text{ per } k = 1, 2.$$

Questi termini governano le varianze degli errori di previsione e sono capaci di catturarne l'eteroschedasticità condizionale. Come prima, costruiamo due componenti di errore e il parametro di mistura:

$$(5.12) \quad \varepsilon_{i,t}^k = \exp\left[-\frac{\ln(1+\sigma_{k,i,t}^2)}{2} + \sqrt{\ln(1+\sigma_{k,i,t}^2)}v_{i,t}^k\right], \text{ per } k = 1, 2.$$

$$(5.13) \quad d_{i,t} = \Phi[50(v_{i,t}^3 - \pi)]$$

Infine, possiamo calcolare gli errori di previsione come:

$$(5.14) \quad \varepsilon_{i,t} = d_{i,t}\varepsilon_{i,t}^1 + (1 - d_{i,t})\varepsilon_{i,t}^2$$

Questi errori sono una mistura di log-normali, hanno media unitaria ed eteroschedasticità condizionale. Essi catturano, dunque, le caratteristiche individuate dagli studi di simulazione degli errori di previsione. Essi sono detti anche residui sintetici e danno il nome alla procedura. La loro utilità sta nel fatto che permettano di simulare i dati senza dover specificare un modello completo con reddito, tassi di interesse e altri shock stocastici.

Ora dobbiamo simulare il livello del consumo iniziale e i parametri di preferenza intertemporale. Per fare tutto questo, generiamo per ogni famiglia un vettore di tre variabili normali standard indipendenti tra di loro: (a_i, b_i, g_i) . Assumiamo che il consumo nel primo periodo abbia una distribuzione log-normale e lo simuliamo in questo modo:

$$(5.15) \quad c_{i,1} = \exp[\mu_1 + \exp(\phi_1)a_i]$$

Gli autori restringono gli intervalli di valori ammissibili per il fattore di sconto e l'avversione relativa al rischio a $[0.8, 1]$ e $[1, 15]$, rispettivamente. Questa scelta viene motivata con l'intenzione di evitare instabilità numeriche nell'ottimizzazione.

Inoltre, si permette ai parametri di preferenza intertemporale di correlare tra di loro e con il livello di consumo iniziale. Infatti, essi sono definiti come:

$$(5.16) \quad \beta_i = 0.8 + 0.2 \left\{ \frac{\exp[\mu_\beta + \exp(\phi_\beta)b_i + \omega_{\beta 1}\ln(c_{i,1})]}{1 + \exp[\mu_\beta + \exp(\phi_\beta)b_i + \omega_{\beta 1}\ln(c_{i,1})]} \right\}$$

$$(5.17) \quad \gamma_i = 1 + 14 \left\{ \frac{\exp[\mu_\gamma + \omega_{\beta\gamma} b_i + \exp(\phi_\gamma) g_i + \omega_{\gamma 1} \ln(c_{i,1})]}{1 + \exp[\mu_\gamma + \omega_{\beta\gamma} b_i + \exp(\phi_\gamma) g_i + \omega_{\gamma 1} \ln(c_{i,1})]} \right\}$$

Una volta definiti i parametri di allocazione intertemporale, abbiamo tutti gli elementi per costruire l'evoluzione del consumo per ogni famiglia. Per farlo invertiamo l'equazione di Eulero in questo modo:

$$(5.18) \quad c_{i,t} = c_{i,t-1} \left[\frac{\varepsilon_{i,t}}{\beta_i(1+r_t)} \right]^{-\frac{1}{\gamma_i}}$$

Ora, introduciamo errori di misura nel consumo e assumiamo che la natura di questi errori sia moltiplicativa e che siano distribuiti come variabili log-normali aventi varianza specifica per ogni famiglia. Per fare ciò, generiamo per ogni famiglia una nuova normale standard, che indichiamo con m_i , che ci permette di definire le seguenti deviazioni standard:

$$(5.19) \quad \xi_i = \exp[\mu_m + \exp(\phi_m) m_i]$$

Costruiamo, quindi, gli errori di misura del consumo con le variabili $v_{i,t}^4$ che abbiamo descritto all'inizio del paragrafo:

$$(5.20) \quad \kappa_{i,t} = \exp(\xi_i v_{i,t}^4)$$

Infine, definiamo il consumo realmente osservato come:

$$(5.21) \quad c_{i,t}^o = c_{i,t} \kappa_{i,t}$$

Questa variabile sarà quella effettivamente utilizzata nel prossimo stadio per calcolare i parametri ausiliari.

5.2.2 La definizione dei parametri ausiliari

Gli autori scelgono di costruire $J = 24$ statistiche dei dati $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_{24})$, definite parametri ausiliari, che verranno impiegate nel calcolo del criterio (5.7). Tali statistiche non sono stime consistenti dei parametri di interesse

ma servono a dare una descrizione sintetica della distribuzione congiunta del tasso di crescita del consumo e del tasso di interesse.

I primi due parametri ausiliari sono la media e la deviazione standard dei consumi iniziali:

$$(5.22) \quad \lambda_1 = \text{media}[\ln(c_{i,1}^o)] \text{ e } \lambda_2 = \text{std}[\ln(c_{i,1}^o)]$$

Per la definizione dei due successivi parametri, bisogna calcolare in ogni anno la mediana e la differenza tra il terzo e il primo quartile della distribuzione del logaritmo del consumo e regredire i T valori ottenuti su una costante e un trend con OLS:

$$(5.23) \quad \lambda_3 = 100 \cdot \text{trend della mediana}$$

$$(5.24) \quad \lambda_4 = 100 \cdot \text{trend dello scarto interquartile (iqr)}$$

Poi, per ogni famiglia, si regredisce il tasso di crescita del consumo sul tasso di interesse, sempre con OLS:

$$(5.25) \quad \Delta \ln c_{i,t}^o = \zeta_{0,i} + \zeta_{1,i} r_t + u_{i,t}$$

Con i residui della (5.25) $\hat{u}_{i,t}$ si calcolano le seguenti deviazioni standard e i seguenti coefficienti di correlazione: $\varphi_i = \text{std}(\hat{u}_{i,t})$ e $\varsigma_i = \text{corr}(\hat{u}_{i,t}, \hat{u}_{i,t-1})$. Possiamo così definire altri otto parametri ausiliari:

$$(5.26) \quad \lambda_5 = \text{mediana}(\hat{\zeta}_{0,i}) \text{ e } \lambda_6 = \text{iqr}(\hat{\zeta}_{0,i})$$

$$(5.27) \quad \lambda_7 = \text{mediana}(\hat{\zeta}_{1,i}) \text{ e } \lambda_8 = \text{iqr}(\hat{\zeta}_{1,i})$$

$$(5.28) \quad \lambda_9 = \text{media}(\varphi_i) \text{ e } \lambda_{10} = \text{std}(\varphi_i)$$

$$(5.29) \quad \lambda_{11} = \text{media}(\varsigma_i) \text{ e } \lambda_{12} = \text{std}(\varsigma_i)$$

I prossimi parametri ausiliari si basano sui trend τ_i e sulle deviazioni standard v_i dei tassi di crescita del consumo, specifici per ogni famiglia:

$$(5.30) \quad \lambda_{13} = \text{media}(\tau_i) \text{ e } \lambda_{14} = \text{std}(\tau_i)$$

$$(5.31) \quad \lambda_{15} = \text{media}(v_i) \text{ e } \lambda_{16} = \text{std}(v_i)$$

$$(5.32) \quad \lambda_{17} = \text{corr}(\tau_i, v_i)$$

Definendo la media temporale del logaritmo del consumo specifica per ogni famiglia ψ_i , possiamo calcolare le prossime due statistiche come:

$$(5.33) \quad \lambda_{18} = \text{corr}(\tau_i, \psi_i) \text{ e } \lambda_{19} = \text{corr}(v_i, \psi_i)$$

Per catturare le caratteristiche dell'errore di previsione si effettua la seguente regressione con i minimi quadrati ordinari su tutto il campione:

$$(5.34) \quad \Delta \ln c_{i,t}^0 = \alpha_0 + \alpha_1 r_t + e_{i,t}$$

Prendendo i residui della (5.34) $\hat{e}_{i,t}$ si calcolano altri tre parametri ausiliari:

$$(5.35) \quad \lambda_{20} = \text{std}(\hat{e}_{i,t}), \lambda_{21} = \text{asimmetria}(\hat{e}_{i,t}) \text{ e } \lambda_{22} = \text{curtosi}(\hat{e}_{i,t})$$

Infine, per descrivere l'eteroschedasticità condizionale, si calcola la seguente regressione, sempre con OLS:

$$(5.36) \quad (\hat{e}_{i,t})^2 = \vartheta_0 + \vartheta_1 \hat{e}_{i,t-1} + \rho_{i,t}$$

Tale regressione ausiliaria permette di definire gli ultimi due parametri ausiliari:

$$(5.37) \quad \lambda_{23} = \hat{\vartheta}_0 \text{ e } \lambda_{24} = \hat{\vartheta}_1$$

Calcolando questi parametri sui dati reali e su quelli simulati è possibile ricavare tutte le quantità necessarie per la (5.7). Infatti, λ^D rappresenta il calcolo dei parametri ausiliari sui dati osservati mentre λ^S è una media dei parametri ausiliari calcolati su R repliche pseudo-casuali del campione osservato. Minimizzando la differenza pesata di tali quantità si ottengono le stime di θ .

5.2.3 La distribuzione delle preferenze intertemporali

In questo paragrafo presentiamo i risultati dello stimatore SRE per i nostri dati. A causa della complessità computazionale, ci siamo limitati ad applicare tale stimatore a un sottoinsieme delle nostre famiglie: ovvero, ci siamo ristretti al campione di famiglie *panel* osservate tra il 1998 e il 2010. Il nostro campione è così formato da 1088 famiglie, ciascuna osservata per 7 occasioni: si tratta, quindi, di un campione *panel* bilanciato.

Il criterio che abbiamo minimizzato per reperire le stime dei parametri è il seguente:

$$(5.38) \quad \min_{\theta} \sum_{j=1}^{24} (\lambda_j^D - \lambda_j^S(\theta))^2$$

Che equivale al criterio (5.7) ponendo la matrice dei pesi pari alla matrice identica. Per calcolare $\lambda_j^S(\theta)$ abbiamo simulato otto campioni pseudo-casuali, su ognuno di essi abbiamo calcolato i parametri ausiliari e, infine, abbiamo preso la media aritmetica degli otto valori ottenuti.

Inoltre, per controllare per l'effetto delle variazioni nelle variabili demografiche, abbiamo calcolato per ogni famiglia il consumo per adulto equivalente: ovvero, abbiamo impiegato una scala di equivalenza che attribuisce un peso unitario al primo adulto, un peso pari a 0.8 per ogni altro adulto e un peso di 0.25 per ogni bambino. Questa scelta equivale a considerare una famiglia con una funzione di utilità il cui argomento è dato dal consumo *pro capite*, modificato in base alla scala di equivalenza.

Il tasso di interesse impiegato è quello ottenuto dalla differenza tra il rendimento annuale nominale dei BOT e l'inflazione annuale misurata con l'indice NIC.

La tabella 5.5 riporta le stime puntuali dei parametri del modello. Uno degli svantaggi di questo stimatore è che non disponiamo della matrice di varianze e covarianze, nemmeno asintotica, dello stimatore e, quindi, risulta complicato fornire delle misure di precisione delle stime: infatti, anche Alan e Browning (2010) riportano soltanto le stime puntuali dei parametri.

Tabella 5.5
Stima dei parametri del modello

Distribuzione	Parametro	Stima
Errori di previsione	$\phi_{\varepsilon 1}$	-1.50892000
	$\phi_{\varepsilon 2}$	-2.09020066
	ω	2.29199641
	π	1.11394065
Consumo iniziale	μ_1	8.74931055
	ϕ_1	-0.59640978
Fattore di sconto	μ_β	0.14367507
	ϕ_β	-4.99974661
	$\omega_{\beta 1}$	1.08641966
Avversione al rischio	μ_γ	-13.49514287
	$\omega_{\beta\gamma}$	-0.02938872
	ϕ_γ	-0.92953460
	$\omega_{\gamma 1}$	1.38344323
Errori di misura	μ_m	-1.52177552
	ϕ_m	-1.45035777

Nella tabella 5.6 di pag. 112, invece, vengono riportati i parametri ausiliari calcolati sul campione osservato e quelli calcolati sui campioni simulati. Come si può vedere da tali risultati, riusciamo ad ottenere dei valori dei parametri ausiliari nei campioni simulati molto vicini a quelli del campione osservato. Il valore finale del criterio, una volta minimizzato, è 0.08063798.

I parametri stimati della tabella 5.5 non sono di immediata interpretazione. Per comprendere le implicazioni delle stime del modello per i parametri di preferenza intertemporale è opportuno osservare la distribuzione dell'avversione relativa al rischio e del fattore di sconto intertemporale nei nostri otto campioni simulati. Le figure 5.1 e 5.2 a pag. 113 mostrano, rispettivamente, la distribuzione dell'avversione relativa al rischio e del fattore di sconto intertemporale per le famiglie simulate. Le figure 5.3 e 5.4 a pag. 114 rappresentano le stesse distribuzioni lisciate.

La distribuzione dell'avversione relativa al rischio risulta asimmetrica: la media è 4.228; il primo quartile è pari a 2.724; la mediana è 3.797; infine, il terzo quartile risulta pari a 5.325. Pertanto, sembra esserci una forte eterogeneità nell'avversione relativa al rischio. Al contrario, la distribuzione del fattore di

sconto intertemporale risulta essere poco variabile e concentrata presso valori prossimi all'unità.

I valori ottenuti per l'avversione relativa al rischio sembrano essere ragionevoli, anche se la media e la mediana sono più elevate rispetto alle stime puntuali ottenute con lo stimatore GMM. Anche i valori del fattore di sconto intertemporale sono più elevati delle corrispondenti stime GMM.

I nostri risultati si discostano sostanzialmente da quelli ottenuti dagli ideatori di questo stimatore, soprattutto per quanto riguarda la distribuzione dell'avversione relativa al rischio: infatti, Alan e Browning (2010) applicando lo stimatore SRE ai dati del *Panel Study of Income Dynamics* (PSID) per il periodo 1974-1987 ottengono un valore mediano dell'avversione relativa al rischio pari a 6.2 per le famiglie meno istruite e un valore di 8.4 per quelle più istruite. Tuttavia, tali valori sembrano essere irrealisticamente alti, anche perché, utilizzando la stessa fonte campionaria e lo stesso periodo, Alan, Attanasio e Browning (2009) ottengono una stima dell'avversione al rischio per l'intero campione di 1.45, con un errore standard di 0.27, utilizzando lo stimatore GMM-LN. Riguardo all'alto valore riscontrato nelle stime dell'avversione al rischio, Alan e Browning (2010) si limitano ad osservare che le stime ottenute con questo stimatore, seppure calcolate a partire da dati sui consumi delle famiglie, sono più vicine a quelle che si ottengono utilizzando dati basati sulla ricchezza o sulle scelte di portafoglio: infatti, in letteratura, le stime dell'avversione al rischio basate sui consumi variano tra 1 e 3, mentre quelle basate sulla ricchezza o sulle scelte di allocazione di portafoglio variano tra 4 e 18.

La distribuzione dell'avversione relativa al rischio implicata dalle nostre stime SRE risulta vicina a quelle ottenute utilizzando questionari che chiedono ai rispondenti la loro disponibilità a pagare per una ipotetica lotteria. Ad esempio, Guiso e Paiella (2006), sfruttando una simile domanda contenuta nel questionario dell'Indagine sui bilanci delle famiglie italiane della Banca d'Italia, trovano grande variabilità nell'avversione relativa al rischio: stimano una avversione al rischio mediana di 4.8 e trovano che il 90% della distribuzione sia compreso tra 2.2 e 10. Invece, Eisenhauer e Ventura (2003), utilizzando gli stessi dati ma tenendo conto dell'ambiguità della domanda, che ha un forte impatto sulle stime, trovano dei valori medi attorno a 8.6.

Tuttavia, nonostante tutte queste considerazioni, la questione circa la discrepanza tra la stima GMM dell'avversione relativa al rischio e quella ottenuta considerando il valore medio o mediano della distribuzione implicata dalle stime SRE rimane aperta. È possibile che essa sia dovuta all'eccessiva pretesa dello stimatore SRE di poter ricavare l'intera distribuzione del coefficiente di avversione relativa al rischio e, sotto l'ipotesi di separabilità delle preferenze tra stati di natura e tra periodi, dell'elasticità di sostituzione intertemporale. Questo obiettivo, infatti, può essere considerato troppo ambizioso in quanto è già complicato ottenere una stima puntuale dell'elasticità di sostituzione intertemporale a causa della poca variabilità del tasso di interesse; a maggior ragione, dunque, dovrebbe risultare problematica l'identificazione dell'intera distribuzione di tale parametro. Inoltre, la validità delle stime SRE si basa su una serie numerosa di ipotesi circa la distribuzione degli errori di previsione, la distribuzione del consumo iniziale e quella degli errori di misura, che difficilmente sono riscontrabili nei dati reali. Per tutte queste ragioni, siamo inclini a ritenere le stime GMM del fattore di sconto e dell'elasticità di sostituzione intertemporale più affidabili di quelle ottenute tramite lo stimatore SRE.

Tabella 5.6
Valore dei parametri ausiliari

Parametri	Dati osservati	Dati simulati
λ_1	8.763578690	8.7518201557
λ_2	0.485327606	0.6016841080
λ_3	1.650391306	1.6071208793
λ_4	-0.352647901	-0.2791759639
λ_5	0.031570655	0.0256257440
λ_6	0.278447481	0.2725827047
λ_7	0.394155306	0.1721505860
λ_8	13.694086479	13.6979060036
λ_9	0.301898458	0.3216217239
λ_{10}	0.152222280	0.1519762967
λ_{11}	-0.488645424	-0.5400664084
λ_{12}	0.373119782	0.3338903777
λ_{13}	-0.002460936	-0.0000396088
λ_{14}	0.016469897	0.0159525573
λ_{15}	0.335825594	0.3502405662
λ_{16}	0.158140810	0.1554898290
λ_{17}	0.035162520	0.0187285812
λ_{18}	-0.106178086	-0.0592463718
λ_{19}	-0.069170307	-0.0666603838
λ_{20}	0.347172844	0.3572378868
λ_{21}	0.004644555	0.0169607998
λ_{22}	0.078860149	0.1223001122
λ_{23}	0.117587014	0.1271108233
λ_{24}	-0.015105937	-0.0436932564

Figura 5.1

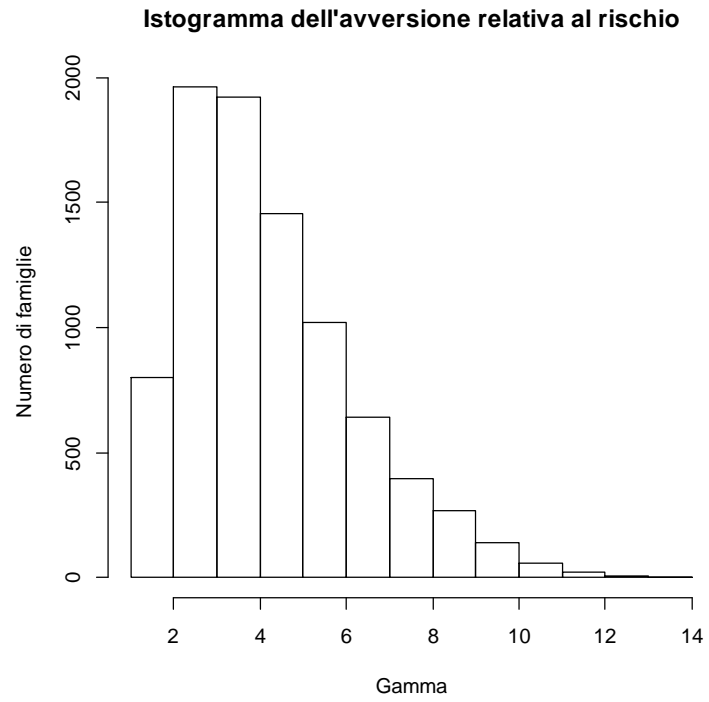


Figura 5.2

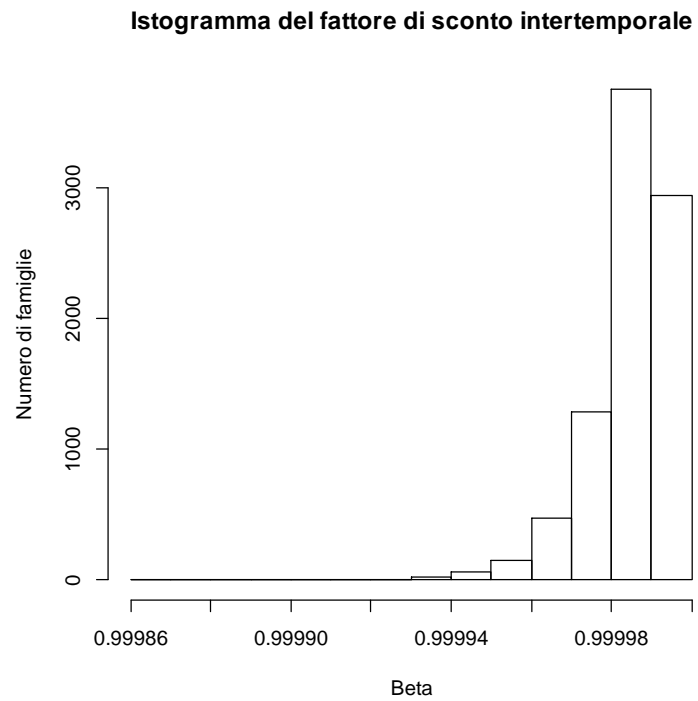


Figura 5.3

Distribuzione lisciata dell'avversione relativa al rischio

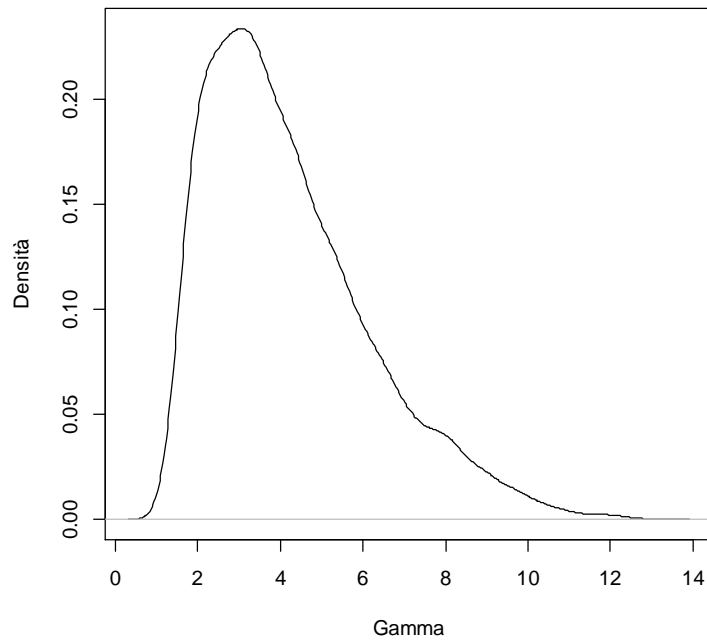
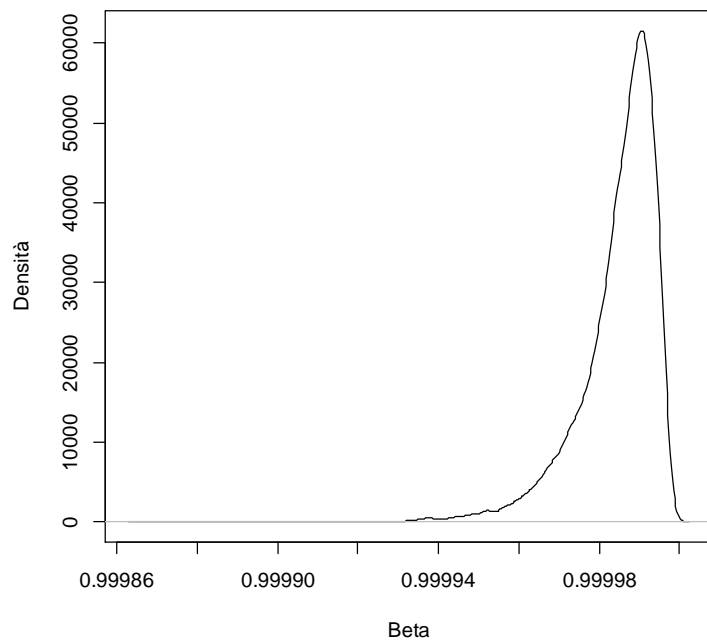


Figura 5.4

Distribuzione lisciata del fattore di sconto intertemporale



Conclusione

In questa tesi ci siamo posti l'obiettivo di ottenere delle stime consistenti per l'Italia dei principali parametri di preferenza intertemporale: il fattore di sconto e l'elasticità di sostituzione intertemporale. A tal fine, abbiamo stimato l'equazione di Eulero, sia nella sua versione log-linearizzata sia in quella non lineare, considerando un campione *panel* di famiglie tratto dall'Indagine sui bilanci delle famiglie italiane condotta dalla Banca d'Italia. In particolare, il nostro campione è costituito da famiglie osservate a cadenza biennale, ad eccezione di una discontinuità di tre anni nel periodo 1995-1998, e copre un arco temporale che inizia nel 1989 e finisce nel 2010.

Il problema principale che sorge dall'utilizzo di dati campionari microeconomici sui consumi è costituito dal fatto che i consumi familiari sono generalmente affetti da errori di misura e questo causa l'inconsistenza delle stime GMM (*Generalized Method of Moments*) dell'equazione di Eulero in forma non lineare.

Una possibile soluzione per questa problematica è rappresentata dalla log-linearizzazione dell'equazione di Eulero, che rende possibile la stima dell'elasticità di sostituzione intertemporale. Tuttavia, tale procedura ha diversi inconvenienti, tra i quali l'impossibilità di stimare il fattore di sconto intertemporale e la potenziale inconsistenza quando gli strumenti correlano con l'errore di approssimazione generato dalla log-linearizzazione.

Un'alternativa alla log-linearizzazione è offerta dagli stimatori GMM per l'equazione di Eulero in forma non lineare che tengono esplicitamente in considerazione la presenza di errori di misura moltiplicativi nel consumo. Questi

stimatori permettono di ottenere stime consistenti del fattore di sconto e dell'elasticità di sostituzione intertemporale nel caso di errori di misura stazionari, serialmente indipendenti e indipendenti dalle altre variabili del modello, tra le quali l'errore di previsione, il livello del consumo e il tasso di interesse.

Infine, una terza via per la stima dei parametri di preferenza intertemporale è rappresentata dallo stimatore SRE (*Synthetic Residual Estimation*) che appartiene alla classe SMD (*Simulated Minimum Distance*). Tale stimatore, oltre ad essere robusto in presenza di errori di misura con le caratteristiche sopra enunciate, permette di considerare preferenze eterogenee tra le famiglie.

Per quanto concerne le variabili impiegate nella fase di stima, una delle componenti fondamentali dell'equazione di Eulero è il tasso di interesse reale. Per il calcolo di questa variabile, abbiamo utilizzato il rendimento dei Buoni Ordinari del Tesoro (BOT) a 12 mesi e l'inflazione misurata con l'Indice dei prezzi al consumo per l'intera collettività (NIC). Abbiamo anche prestato attenzione alla *time aggregation* del tasso di interesse: infatti, l'indagine ci permette di avere informazioni sul consumo annuale del campione di famiglie mentre disponiamo di una serie storica mensile del tasso di interesse. Inizialmente, abbiamo considerato l'aggregazione temporale proposta da Hall (1988), che calcola il tasso di interesse reale annuale in base a una relazione derivata dal problema di ottimizzazione dinamica di un consumatore che rivede le scelte di consumo a cadenza mensile. Successivamente, abbiamo calcolato il tasso di interesse reale annuale come semplice differenza tra il tasso di interesse nominale annuale dei BOT e l'inflazione annuale misurata con l'indice NIC.

Inoltre, poiché consideriamo dati sulle famiglie e non sugli individui, è opportuno condizionarci a una serie di variabili socio-demografiche che contribuiscono a spiegare l'evoluzione dei consumi familiari: per questa ragione, in fase di stima GMM, abbiamo deciso di includere nell'equazione di Eulero la variazione del numero di adulti, la variazione del numero di bambini e la variazione del numero di percettori di reddito; quando questa operazione è risultata non fattibile, come nel caso dello stimatore SRE, abbiamo calcolato il consumo per adulto equivalente.

Dato che le famiglie vengono osservate ogni due anni ma vi è una discontinuità triennale nel periodo 1995-1998, abbiamo dovuto impiegare

variabili temporali dicotomiche per aggiustare opportunamente la costante nella versione log-linearizzata dell'equazione di Eulero e l'esponente del fattore di sconto intertemporale nella versione non lineare.

Applicando le differenti tecniche econometriche sopra descritte, abbiamo ottenuto diverse stime dei parametri di preferenza intertemporale. Cercheremo ora di ricapitarle e di trarre qualche conclusione.

La stima dell'equazione di Eulero in forma log-linearizzata ci ha permesso di stimare l'elasticità di sostituzione intertemporale. La stima puntuale che abbiamo ottenuto risulta essere pari a 0.843, utilizzando il tasso di interesse aggregato secondo Hall (1988), e pari a 0.687, utilizzando il tasso di interesse reale semplice. L'errore standard delle stime si attesta attorno a 0.221 e a 0.241, rispettivamente.

Stimando, invece, l'equazione di Eulero in forma non lineare e considerando la presenza degli errori di misura, si ottiene una stima puntuale dell'elasticità di sostituzione intertemporale pari a 0.530, per il tasso aggregato secondo Hall, e a 0.525, impiegando l'aggregazione temporale semplice, con un errore standard rispettivamente pari a 0.102 e 0.094.³⁵

Se si restringe il campione alle solo famiglie il cui capofamiglia si trova in un'età compresa tra i 26 e i 70 anni, quindi potenzialmente meno soggette ai vincoli di liquidità, le differenze tra le due metodologie di stima si riducono. Infatti, l'equazione di Eulero stimata in forma log-linearizzata fornisce una stima puntuale dell'elasticità di sostituzione intertemporale di 0.779, con un errore standard pari a 0.267, per il tasso di Hall (1988) ma si riduce a 0.589 per il tasso reale semplice, con un errore standard pari a 0.293. Le stime dell'elasticità nella forma non lineare rimangono vicine a quelle calcolate sul campione completo, variando da 0.508 per il tasso di Hall a 0.531 per il tasso aggregato in modo semplice, con un errore standard rispettivamente pari a 0.086 e a 0.082.

Riassumendo, quindi, le stime puntuali dell'elasticità di sostituzione intertemporale ottenute con i vari metodi GMM sono concentrate tra 0.5 e 0.9 e,

³⁵ I risultati della stima dell'equazione di Eulero in forma non lineare presentati nella conclusione si riferiscono allo stimatore che nel testo è indicato con la sigla GMM-LN. Infatti, tale stimatore, che assume anche la log-normalità dell'errore di misura, è quello che fornisce i risultati migliori in termini di precisione delle stime.

pertanto, i differenti metodi di stima dell'equazione di Eulero forniscono risultati sostanzialmente analoghi. Le stime più affidabili, comunque, risultano essere quelle ottenute dallo stimatore GMM dell'equazione di Eulero in forma non lineare che tiene conto della presenza di errori di misura nel consumo e che stima in maniera precisa l'elasticità di sostituzione intertemporale attorno a un valore di 0.5 con un errore standard di 0.1. Inoltre, è importante sottolineare come questi risultati siano robusti rispetto al cambiamento del tasso di interesse e al restringimento del campione alle sole famiglie potenzialmente meno soggette a vincoli di liquidità operativi.

Invece, per quanto riguarda il fattore di sconto intertemporale, che, come abbiamo ricordato, rappresenta un parametro identificabile soltanto in un contesto di stima dell'equazione di Eulero in forma non lineare, i risultati sono meno variabili. Le stime puntuali sono pari a 0.987 per il tasso di Hall (1988) e a 0.983 per il tasso aggregato in modo semplice. In entrambi i casi, l'errore standard risulta essere pari a 0.003. Inoltre, il restringimento del campione alle sole famiglie il cui capofamiglia si trova in un'età compresa tra i 26 e i 70 anni ha un impatto trascurabile sulle stime puntuali e sulla loro precisione. È interessante notare come la stima del fattore di sconto intertemporale risulti precisa e inferiore a uno e robusta a cambiamenti nel tasso di interesse e al restringimento del campione.

Inoltre, si è allargata l'analisi considerando possibili forme di eterogeneità dei parametri di preferenza intertemporale: abbiamo analizzato le possibili differenze nell'elasticità di sostituzione intertemporale e nel fattore di sconto tra le famiglie che presentano un alto livello di istruzione e quelle con un basso livello. I risultati GMM sembrano indicarci l'assenza di eterogeneità relativamente al primo di questi parametri. Al contrario, alcuni stimatori rilevano una differenza significativa per quanto riguarda il fattore di sconto intertemporale: ovvero sembra che le famiglie più istruite siano maggiormente pazienti rispetto a quelle che presentano un basso livello di istruzione.

Impiegando, invece, la procedura di stima SRE, che permette una eterogeneità nei parametri di preferenza intertemporale non collegata a variabili osservate, si ricava una distribuzione del fattore di sconto intertemporale poco variabile tra le famiglie e molto concentrata su valori prossimi a uno; la

distribuzione dell'elasticità di sostituzione intertemporale, invece, presenta un valore mediano di 0.263 e risulta molto eterogenea tra gli individui. Riguardo a quest'ultimo parametro, quindi, i risultati divergono rispetto a quelli ottenuti nei capitoli precedenti, in quanto il valore mediano dell'elasticità di sostituzione intertemporale implicato dalle stime SRE risulta più basso delle corrispondenti stime ottenute con gli stimatori GMM. Poiché la validità delle stime SRE si basa su una serie numerosa di ipotesi circa la distribuzione degli errori di previsione, la distribuzione del consumo iniziale e quella degli errori di misura, che difficilmente sono riscontrabili nei dati reali, siamo portati a ritenere che le stime GMM siano più affidabili. Tuttavia, nonostante le sue criticità, lo stimatore SRE apre interessanti prospettive sulla stima di parametri di preferenza intertemporale eterogenei nella popolazione.

Appendice

econometrica

A.1 Il Metodo Generalizzato dei Momenti

Supponiamo di disporre di un campione di individui indicizzati da $i = 1, \dots, N$ e di dover stimare un vettore di k parametri $\boldsymbol{\theta}$. Disponiamo, inoltre, di q funzioni del tipo $\mathbf{z}_{i,j}u_{i,j}(\boldsymbol{\theta})$, per $j = 1, \dots, q$, dove $\mathbf{z}_{i,j}$ è un vettore $m_j \times 1$ di variabili strumentali specifiche per la funzione j . Definiamo anche $m = m_1 + \dots + m_q$.³⁶

Supponiamo che tali funzioni siano continue e possiedano momento primo finito per ogni valore del parametro $\boldsymbol{\theta}$. Imponiamo anche che esista un unico valore del parametro, che indichiamo con $\boldsymbol{\theta}_0$, tale che $E[\mathbf{z}_{i,j}u_{i,j}(\boldsymbol{\theta}_0)] = 0 \forall j$. Quest'ultima viene definita condizione di identificabilità.

Possiamo riscrivere più compattamente questa serie di condizioni sui momenti come $E[\mathbf{Z}_i \mathbf{u}_i(\boldsymbol{\theta}_0)] = 0$, dove:

³⁶ Questa notazione ci permette di considerare i casi dello stimatore GMM dell'equazione di Eulero log-linearizzata, dello stimatore GMM dell'equazione di Eulero non lineare che non tiene conto degli errori di misura, dello stimatore GMM-D, i quali hanno una sola equazione e quindi $q = 1$. Tuttavia, in questa notazione rientrano anche i casi dello stimatore GMM-LN e GMM-K che hanno due equazioni, cioè $q = 2$.

$$\mathbf{z}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{z}_{i,1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathbf{z}_{i,2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \mathbf{z}_{i,q} \end{bmatrix} \quad \mathbf{u}_i(\boldsymbol{\theta}) = \begin{bmatrix} u_{i,1}(\boldsymbol{\theta}) \\ \vdots \\ u_{i,q}(\boldsymbol{\theta}) \end{bmatrix}$$

L'analogo campionario delle condizioni sui momenti è $\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mathbf{z}_i \mathbf{u}_i(\boldsymbol{\theta}) = 0$ che rappresenta un sistema di m equazioni in k incognite. Poiché tale quantità non può essere posta esattamente pari a zero se $m > k$, si può cercare di renderla il più possibile vicina a zero.

Pertanto, si definisce la stima con il Metodo Generalizzato dei Momenti (GMM, *Generalized Method of Moments*) il valore $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ che minimizza:

$$(A.1) \quad Q(\boldsymbol{\theta}) = \left[\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mathbf{z}_i \mathbf{u}_i(\boldsymbol{\theta}) \right]' \mathbf{W} \left[\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mathbf{z}_i \mathbf{u}_i(\boldsymbol{\theta}) \right]$$

Dove \mathbf{W} è una matrice $m \times m$ di pesi. La minimizzazione di tale quantità avviene con metodi iterativi.

In questo lavoro si è utilizzata una procedura a due passi che consiste nelle seguenti fasi: specificare una matrice iniziale di pesi che non dipenda dai parametri; minimizzare (A.1) utilizzando tale matrice e ottenere $\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(1)}$; calcolare una matrice dei pesi che dipenda dai parametri utilizzando le stime ottenute nel punto precedente: $\mathbf{W}(\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(1)})$; minimizzare nuovamente (A.1) con la nuova matrice di pesi e ottenere $\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(2)}$.

La matrice iniziale che abbiamo scelto è data da $\mathbf{W} = \boldsymbol{\Lambda}^{-1}$, dove le sotto-matrici di $\boldsymbol{\Lambda}$ sono definite come:

$$(A.2) \quad \boldsymbol{\Lambda}_{r,s} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mathbf{z}_{i,r} \mathbf{z}'_{i,s}$$

Se $r = s$ e la matrice nulla per $r \neq s$. $r = 1, \dots, q$ e $s = 1, \dots, q$.

Poiché disponiamo di un campione *panel*, con osservazioni ripetute sul medesimo individuo, nel secondo passo si è utilizzata come matrice di pesi una matrice robusta in caso di *clustering* ed eteroschedasticità: ovvero, una matrice che è robusta in presenza di correlazione tra le osservazioni che si riferiscono alle

stesse unità statistiche (osservazioni appartenenti allo stesso *cluster*) e robusta all'eteroschedasticità.

Definendo c_g i *cluster*, che nel nostro caso coincidono con le famiglie, con $g = 1, \dots, G$, la nuova matrice $\mathbf{\Lambda}$ diviene:

$$(A.3) \quad \mathbf{\Lambda} = \frac{1}{N} \sum_{g=1}^G \mathbf{q}_g \mathbf{q}_g'$$

Dove $\mathbf{q}_g = \sum_{i \in c_g} \mathbf{z}_i \mathbf{u}_i(\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(1)})$.

Dopo aver definito la procedura GMM e come viene calcolata la stima dei parametri di interesse con questo metodo, definiamo le proprietà asintotiche dello stimatore GMM. Innanzitutto, sotto opportune condizioni, si dimostrano i seguenti risultati:

$$(i) \quad \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mathbf{z}_i \mathbf{u}_i(\boldsymbol{\theta}_0) \xrightarrow{p} \mathbf{0}$$

$$(ii) \quad \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i=1}^N \mathbf{z}_i \mathbf{u}_i(\boldsymbol{\theta}_0) \xrightarrow{d} N(\mathbf{0}; \mathbf{S}_0)$$

Con $\mathbf{S}_0 = \lim_{N \rightarrow \infty} \text{Var} \left[\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i=1}^N \mathbf{z}_i \mathbf{u}_i(\boldsymbol{\theta}_0) \right]$

Dai precedenti comportamenti asintotici si derivano le seguenti proprietà per lo stimatore GMM $\hat{\boldsymbol{\theta}}$:

$$(iii) \quad \hat{\boldsymbol{\theta}} \xrightarrow{p} \boldsymbol{\theta}_0$$

$$(iv) \quad \sqrt{N}(\hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta}_0) \xrightarrow{d} N(\mathbf{0}; \mathbf{V}(\mathbf{W}))$$

Dove

$$\mathbf{V}(\mathbf{W}) = (\mathbf{J}'_0 \mathbf{W} \mathbf{J}_0)^{-1} \mathbf{J}'_0 \mathbf{W} \mathbf{S}_0 \mathbf{W} \mathbf{J}_0 (\mathbf{J}'_0 \mathbf{W} \mathbf{J}_0)^{-1}$$

$$\text{e } \mathbf{J}_0 = \mathbf{J}_0(\boldsymbol{\theta}_0) = \text{plim}_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mathbf{z}_i \frac{\partial \mathbf{u}_i(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}'} \Big|_{\boldsymbol{\theta}=\boldsymbol{\theta}_0}.$$

Lo stimatore GMM efficiente dipende dalla scelta della matrice di pesi \mathbf{W} e si ha quando $\mathbf{W} = \mathbf{S}_0^{-1}$. In questo caso, la matrice di varianze e covarianze asintotica di $\sqrt{N}(\hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta}_0)$ diviene $\mathbf{V}(\mathbf{S}_0^{-1}) = (\mathbf{J}'_0 \mathbf{S}_0^{-1} \mathbf{J}_0)^{-1}$.

Ci rimane da determinare una stima della matrice di varianze e covarianze dello stimatore, necessaria per determinare gli errori standard e per poter fare inferenza sui parametri del modello con intervalli di confidenza e verifiche di ipotesi. Per i nostri dati, caratterizzati da osservazioni ripetute sulle stesse unità statistiche, una stima robusta della matrice di varianze e covarianze dello stimatore GMM è data dalla seguente espressione:

$$(A.4) \quad \widehat{\text{var}}(\hat{\theta}) = \frac{1}{N} \left[\mathbf{J}(\hat{\theta}^{(2)})' \mathbf{W} \mathbf{J}(\hat{\theta}^{(2)}) \right]^{-1} \mathbf{J}(\hat{\theta}^{(2)})' \mathbf{W} \mathbf{S}(\hat{\theta}^{(2)}) \mathbf{W} \mathbf{J}(\hat{\theta}^{(2)}) \left[\mathbf{J}(\hat{\theta}^{(2)})' \mathbf{W} \mathbf{J}(\hat{\theta}^{(2)}) \right]^{-1}$$

Dove $\mathbf{W} = \mathbf{\Lambda}^{-1}$, con $\mathbf{\Lambda}$ data dalla (A.3), $\mathbf{J}(\hat{\theta}^{(2)}) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mathbf{Z}_i \frac{\partial \mathbf{u}_i(\theta)}{\partial \theta'} \Big|_{\theta=\hat{\theta}^{(2)}}$ e $\mathbf{S}(\hat{\theta}^{(2)}) = \frac{1}{N} \sum_{g=1}^G \mathbf{q}_g \mathbf{q}_g'$, con $\mathbf{q}_g = \sum_{i \in c_g} \mathbf{Z}_i \mathbf{u}_i(\hat{\theta}^{(2)})$.

Hansen (1982) ha proposto un test per verificare la validità delle restrizioni di sovraidentificazione pari a:

$$(A.5) \quad H = NQ(\hat{\theta}) \sim \chi_{m-k}^2$$

Dove, nel calcolo di Q , tutte le quantità, compresa la matrice dei pesi, vengono valutate nella stima del secondo passo $\hat{\theta}^{(2)}$.

A.2 Sotto-identificazione e identificazione debole nel caso lineare

Supponiamo di dover stimare un modello lineare del tipo:

$$(A.6) \quad \mathbf{y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}$$

Dove \mathbf{X} è una matrice $N \times R$ di variabili endogene. Facilmente si può generalizzare al caso in cui in \mathbf{X} siano presenti alcune variabili esogene grazie al teorema di Frisch-Waugh-Lovell. Per la stima del vettore di parametri $\boldsymbol{\beta}$ si dispone di una matrice $N \times K$ di variabili strumentali \mathbf{Z} .

In questo caso, è possibile scrivere l'insieme delle regressioni del primo stadio come:

$$(A.7) \quad \mathbf{X} = \mathbf{Z}\boldsymbol{\Pi} + \mathbf{Y}$$

Dove $\mathbf{\Pi}$ è una matrice $K \times R$ di parametri mentre \mathbf{Y} contiene i termini d'errore.

Perché si possa stimare la (A.6) è necessario che $K > R$. Tuttavia questa condizione non è sufficiente. Infatti, deve essere soddisfatta anche la condizione di rango:

$$(A.8) \quad \text{rank}(\mathbf{Q}_{XZ}) = R \text{ con } \mathbf{Q}_{XZ} = E(\mathbf{x}_i \mathbf{z}_i')$$

Questa condizione può essere espressa anche in termini di correlazioni canoniche. Le correlazioni canoniche r_i , $i = 1, \dots, R$, tra \mathbf{X} e \mathbf{Z} rappresentano le correlazioni tra le combinazioni lineari delle colonne di \mathbf{X} e le combinazioni lineari delle colonne di \mathbf{Z} . Ad esempio, nel caso di un solo regressore endogeno e di più variabili strumentali, la correlazione canonica si riduce alla radice dell'R-quadro della regressione del primo stadio della variabile endogena sugli strumenti. Nel caso più generale di molteplici variabili endogene, invece, le correlazioni canoniche al quadrato possono essere calcolate come autovalori della matrice $(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}(\mathbf{X}'\mathbf{Z})(\mathbf{Z}'\mathbf{Z})^{-1}(\mathbf{Z}'\mathbf{X})$. La condizione di rango implica, in questo caso, che tutte le correlazioni canoniche debbano essere significativamente diverse da zero. Se una o più correlazioni canoniche sono nulle, allora il modello è sotto-identificato.

In termini di regressione del primo stadio, la condizione di rango stabilisce che $\text{rank}(\mathbf{\Pi}) = R$. Se il rango è inferiore a R il modello è, di nuovo, sotto-identificato.

Invece, se le variabili strumentali correlano con le variabili endogene ma questa correlazione è molto bassa, allora si parla di strumenti deboli e il modello risulta essere debolmente identificato.

Le conseguenze della sotto-identificazione o della identificazione debole sono importanti: gli stimatori IV divengono inconsistenti, presentano una distorsione pari a quella dello stimatore OLS ma un maggiore errore quadratico medio e le usuali approssimazioni asintotiche perdono di validità. È quindi fondamentale individuare dei test che permettano di stabilire la presenza di strumenti non validi o deboli.

Consideriamo prima il caso della sotto-identificazione. Poiché le matrici \mathbf{Q}_{XZ} e $\mathbf{\Pi}$ non sono direttamente osservabili, è necessario sostituirle con delle loro stime. Quindi, l'ipotesi nulla di sotto-identificazione si riduce a testare il rango di

una matrice: $rank(\hat{Q}_{XZ}) = R - 1$ oppure, equivalentemente, $rank(\hat{\Pi}) = R - 1$.
 Il rifiuto dell'ipotesi nulla implica identificazione del modello.

Cragg e Donald (1993) hanno proposto un test di tipo Wald per saggiare l'ipotesi nulla di sotto-identificazione. Tale statistica può essere riscritta in termini di correlazione canonica come:

$$(A.9) \quad CD = \frac{Nr_R^2}{(1 - r_R^2)} \sim \chi_{K-R+1}^2$$

Dove r_R è la correlazione canonica più piccola. Un simile test è valido nell'ipotesi che gli errori nella (A.7) siano indipendenti e identicamente distribuiti.

Kleibergen e Paap (2006) hanno individuato una statistica, chiamata statistica rk, in grado di superare le problematiche enunciate e di testare il rango di una matrice anche in presenza di errori eteroschedastici, autocorrelati o di *clustering*.

Consideriamo ora il problema della presenza di strumenti deboli, ovvero quando la correlazione tra gli strumenti e le variabili endogene è bassa. È necessario considerare questo tema perché problematiche legate all'utilizzo di procedure IV possono sorgere anche quando le correlazioni di cui abbiamo parlato risultano significative rispetto ai convenzionali livelli di significatività. Quindi, non è sufficiente rigettare l'ipotesi nulla di sotto-identificazione per essere certi di ottenere delle buone stime.

Stock e Yogo (2005) hanno proposto degli aggiustamenti per campioni finiti della statistica di Cragg e Donald (1993) e nuovi valori critici per testare l'ipotesi nulla di strumenti deboli. La nuova statistica, di tipo F, diviene:

$$(A.10) \quad F = \frac{(N - K)}{K} \frac{r_R^2}{(1 - r_R^2)}$$

I valori critici per tale statistica vengono calcolati in base a due criteri rispetto ai quali gli strumenti possono essere definiti deboli. Il primo criterio si basa sul rapporto tra la distorsione dello stimatore IV rispetto a quella dello stimatore OLS: in base a questo criterio uno stimatore IV viene definito debole se la sua distorsione relativa è maggiore di una certa soglia. Il secondo criterio si basa sulla

performance della statistica test di Wald per β . Infatti, se gli strumenti sono deboli il test rifiuta l'ipotesi nulla sui coefficienti troppo spesso. I valori critici si basano, quindi, sulla percentuale di rifiuto reale che il ricercatore è disposto ad accettare quando conduce il test a un livello convenzionale del 5%: in questo senso, gli strumenti si definiscono deboli se la reale percentuale di rifiuti è al di sopra di una certa soglia, quando invece sarebbe dovuta essere al 5%.

L'utilizzo della statistica (A.10) richiede la presenza di errori indipendenti e identicamente distribuiti. Al contrario, se gli errori sono eteroschedastici, autocorrelati o soggetti a *clustering*, è opportuno utilizzare una versione robusta del test F basata sulla statistica rk di Kleibergen e Paap (2006). Tale statistica è stata utilizzata in questo studio ed è riportata nelle tabelle delle stime GMM dell'equazione di Eulero log-linearizzata.

Tuttavia, bisogna fare attenzione quando si confrontano i valori della statistica F rk con i valori critici di Stock e Yogo (2005), poiché questi ultimi sono stati calcolati nell'ipotesi di errori indipendenti e identicamente distribuiti. Nelle tabelle A.1 e A.2 a pag. 131-132, riportiamo alcuni valori critici tabulati da Stock e Yogo (2005) basati, rispettivamente, sul criterio della distorsione relativa e della dimensione effettiva: ad essi bisogna fare riferimento quando si vuole effettuare un confronto con i valori della statistica F rk di Kleibergen e Paap (2006) presenti nelle tabelle delle stime GMM a due passi riportate nel capitolo IV.

A.3 Lo stimatore GMM-CUE

In presenza di strumenti deboli, è possibile utilizzare stimatori che siano meno sensibili al problema dell'identificazione debole che, come abbiamo visto, ha delle conseguenze devastanti sui tradizionali stimatori 2SLS o GMM.

Uno di questi stimatori robusti alla presenza di strumenti deboli è lo stimatore GMM-CUE (*Continuous Updating Estimator*), proposto da Hansen, Heaton e Yaron (1996).

Il problema di minimizzazione che definisce lo stimatore CUE è il seguente:

$$(A.11) \quad Q(\boldsymbol{\theta}) = \left[\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mathbf{z}_i \mathbf{u}_i(\boldsymbol{\theta}) \right]' \mathbf{w}(\boldsymbol{\theta}) \left[\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mathbf{z}_i \mathbf{u}_i(\boldsymbol{\theta}) \right]$$

La differenza rispetto allo stimatore GMM a due passi è nella matrice dei pesi. Infatti, lo stimatore GMM tradizionale calcola nel primo stadio una stima basata su una matrice di pesi che non dipende dai parametri. Nel secondo stadio, calcola una nuova matrice di pesi dipendente dai parametri basandosi sulla stima del primo stadio ed effettua nuovamente la minimizzazione, ottenendo le stime del secondo stadio. Al contrario, per lo stimatore CUE la matrice dei pesi è una funzione del parametro che deve essere stimato e, quindi, il suo calcolo avviene simultaneamente alla stima di $\boldsymbol{\theta}$.

Sebbene l'utilizzo dello stimatore CUE non garantisca alcun guadagno asintotico rispetto agli stimatori 2SLS e GMM, si è visto che tale utilizzo fornisce migliori risultati in campioni finiti, soprattutto in presenza di strumenti deboli. Per questa ragione, quando si impiega lo stimatore CUE è opportuno confrontare i valori critici della statistica F_{rk} di Kleibergen e Paap (2006) con i valori critici calcolati per lo stimatore LIML: infatti, in presenza di errori indipendenti e identicamente distribuiti, lo stimatore CUE e LIML coincidono. In tabella A.3 a pag. 133, si riportano alcuni valori critici tabulati da Stock e Yogo (2005) basati sulla dimensione effettiva del test: a questi, dunque, bisogna fare riferimento quando si considerano i risultati, presenti nel capitolo IV, relativi alle stime CUE.

A.4 Valori critici di Stock e Yogo (2005)

Nelle pagine seguenti si riportano alcuni dei valori critici tabulati da Stock e Yogo (2005) per la verifica dell'ipotesi nulla di debolezza degli strumenti. La simbologia delle tabelle fa riferimento al seguente modello:

$$(A.12) \quad \begin{aligned} \mathbf{y} &= \mathbf{X}_1 \boldsymbol{\beta}_1 + \mathbf{X}_2 \boldsymbol{\beta}_2 + \boldsymbol{\varepsilon} \\ \mathbf{X}_2 &= \mathbf{X}_1 \boldsymbol{\Pi}_1 + \mathbf{Z}_2 \boldsymbol{\Pi}_2 + \boldsymbol{\Upsilon} \end{aligned}$$

Dove \mathbf{X}_1 è una matrice $N \times R_1$ di variabili esogene, \mathbf{X}_2 è una matrice $N \times R_2$ di variabili endogene e, infine, \mathbf{Z}_2 è una matrice $N \times K_2$ di strumenti aggiuntivi.

Tabella A.1

Valori critici di Stock e Yogo (2005)

Per il test di debolezza degli strumenti per lo stimatore 2SLS

Basati sulla distorsione relativa

Livello di significatività del 5%

K_2	$R_2 = 1, g =$				$R_2 = 2, g =$				$R_2 = 3, g =$			
	0.05	0.10	0.20	0.30	0.05	0.10	0.20	0.30	0.05	0.10	0.20	0.30
3	13.91	9.08	6.46	5.39
4	16.85	10.27	6.71	5.34	11.04	7.56	5.57	4.73
5	18.37	10.83	6.77	5.25	13.97	8.78	5.91	4.79	9.53	6.61	4.99	4.30
6	19.28	11.12	6.76	5.15	15.72	9.48	6.08	4.78	12.20	7.77	5.35	4.40
7	19.86	11.29	6.73	5.07	16.88	9.92	6.16	4.76	13.95	8.50	5.56	4.44
8	20.25	11.39	6.69	4.99	17.70	10.22	6.20	4.73	15.18	9.01	5.69	4.46
9	20.53	11.46	6.65	4.92	18.30	10.43	6.22	4.69	16.10	9.37	5.78	4.46
10	20.74	11.49	6.61	4.86	18.76	10.58	6.23	4.66	16.80	9.64	5.83	4.45
11	20.90	11.51	6.56	4.80	19.12	10.69	6.23	4.62	17.35	9.85	5.87	4.44
12	21.01	11.52	6.53	4.75	19.40	10.78	6.22	4.59	17.80	10.01	5.90	4.42
13	21.10	11.52	6.49	4.71	19.64	10.84	6.21	4.56	18.17	10.14	5.92	4.41
14	21.18	11.52	6.45	4.67	19.83	10.89	6.20	4.53	18.47	10.25	5.93	4.39
15	21.23	11.51	6.42	4.63	19.98	10.93	6.19	4.50	18.73	10.33	5.94	4.37

R_2 = numero di endogene incluse nell'equazione strutturale

K_2 = numero di esogene escluse dall'equazione strutturale

g = massima distorsione relativa accettabile dello stimatore IV rispetto allo stimatore OLS

Tabella A.2

Valori critici di Stock e Yogo (2005)

Per il test di debolezza degli strumenti per lo stimatore 2SLS

Basati sulla dimensione effettiva del test di Wald su β_2

Livello di significatività del 5%

K_2	$R_2 = 1, p =$				$R_2 = 2, p =$			
	0.10	0.15	0.20	0.25	0.10	0.15	0.20	0.25
1	16.38	8.96	6.66	5.53
2	19.93	11.59	8.75	7.25	7.03	4.58	3.95	3.63
3	22.30	12.83	9.54	7.80	13.43	8.18	6.40	5.45
4	24.58	13.96	10.26	8.31	16.87	9.93	7.54	6.28
5	26.87	15.09	10.98	8.84	19.45	11.22	8.38	6.89
6	29.18	16.23	11.72	9.38	21.68	12.33	9.10	7.42
7	31.50	17.38	12.48	9.93	23.72	13.34	9.77	7.91
8	33.84	18.54	13.24	10.50	25.64	14.31	10.41	8.39
9	36.19	19.71	14.01	11.07	27.51	15.24	11.03	8.85
10	38.54	20.88	14.78	11.65	29.32	16.16	11.65	9.31
11	40.90	22.06	15.56	12.23	31.11	17.06	12.25	9.77
12	43.27	23.24	16.35	12.82	32.88	17.95	12.86	10.22
13	45.64	24.42	17.14	13.41	34.62	18.84	13.45	10.68
14	48.01	25.61	17.93	14.00	36.36	19.72	14.05	11.13
15	50.39	26.80	18.72	14.60	38.08	20.60	14.65	11.58

R_2 = numero di endogene incluse nell'equazione strutturale

K_2 = numero di esogene escluse dall'equazione strutturale

p = massima dimensione effettiva accettabile del test di Wald su β_2 condotto a un livello del 5%

Tabella A.3

Valori critici di Stock e Yogo (2005)

Per il test di debolezza degli strumenti per lo stimatore LIML

Basati sulla dimensione effettiva del test di Wald su β_2

Livello di significatività del 5%

K_2	$R_2 = 1, p =$				$R_2 = 2, p =$			
	0.10	0.15	0.20	0.25	0.10	0.15	0.20	0.25
1	16.38	8.96	6.66	5.53
2	8.68	5.33	4.42	3.92	7.03	4.58	3.95	3.63
3	6.46	4.36	3.69	3.32	5.44	3.81	3.32	3.09
4	5.44	3.87	3.30	2.98	4.72	3.39	2.99	2.79
5	4.84	3.56	3.05	2.77	4.32	3.13	2.78	2.60
6	4.45	3.34	2.87	2.61	4.06	2.95	2.63	2.46
7	4.18	3.18	2.73	2.49	3.90	2.83	2.52	2.35
8	3.97	3.04	2.63	2.39	3.78	2.73	2.43	2.27
9	3.81	2.93	2.54	2.32	3.70	2.66	2.36	2.20
10	3.68	2.84	2.46	2.25	3.64	2.60	2.30	2.14
11	3.58	2.76	2.40	2.19	3.60	2.55	2.25	2.09
12	3.50	2.69	2.34	2.14	3.58	2.52	2.21	2.05
13	3.42	2.63	2.29	2.10	3.56	2.48	2.17	2.02
14	3.36	2.57	2.25	2.06	3.55	2.46	2.14	1.99
15	3.31	2.52	2.21	2.03	3.54	2.44	2.11	1.96

R_2 = numero di endogene incluse nell'equazione strutturale

K_2 = numero di esogene escluse dall'equazione strutturale

p = massima dimensione effettiva accettabile del test di Wald su β_2 condotto a un livello del 5%

A.5 Un programma per implementare lo stimatore SRE in R³⁷

```
#####  
#Synthetic Residual Estimation  
#####  
  
#Panel bilanciato ed equispaziato (2 anni)  
  
#####  
#Caricamento dati  
#####  
  
library(foreign)  
dati<-read.dta("dati.dta")  
head(dati)  
  
#####  
#Funzione per simulare i dati  
#####  
  
simulo<-function(theta, N, T, rnd){  
  
  phie1<-theta[1]  
  phie2<-theta[2]  
  omega<-theta[3]  
  pi<-theta[4]  
  mu1<-theta[5]  
  phi1<-theta[6]  
  mub<-theta[7]  
  phib<-theta[8]  
  omegab1<-theta[9]  
  mug<-theta[10]  
  omegabg<-theta[11]  
  phig<-theta[12]  
  omegag1<-theta[13]  
  mum<-theta[14]  
  phim<-theta[15]
```

³⁷ R Core Team (2012). *R: A language and environment for statistical computing*.

R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria.

ISBN 3-900051-07-0, URL <http://www.R-project.org/>.

```

eps<-rep(0,N*T)
cstar<-rep(0,N*T)
coss<-rep(0,N*T)
lncn<-rep(0,N*T)
delta_lncn<-rep(0,N*T)
beta_sim<-rep(0,N)
gamma_sim<-rep(0,N)

sigma210=exp(phia1)
sigma220=exp(phia2)

  for(i in 1:N){

    eps_i<-rep(0,T+1)
    cstar_i<-rep(0,T)
    coss_i<-rep(0,T)
    lncn_i<-rep(0,T)
    delta_lncn_i<-rep(0,T)

    v10<-rnorm(1)
    v20<-rnorm(1)
    v30<-runif(1)

    eps10<-exp(-(log(1+sigma210)/2)+v10*sqrt(log(1+sigma210)))
    eps20<-exp(-(log(1+sigma220)/2)+v20*sqrt(log(1+sigma220)))
    d0<-pnorm(50*(v30-pi))
    eps0<-d0*eps10+(1-d0)*eps20
    eps_i[1]<-eps0

    a<-rnorm(1)
    b<-rnorm(1)
    g<-rnorm(1)
    m<-rnorm(1)
    csi<-exp(mu+exp(phi)*m)
    cstar_i[1]<-exp(mu+exp(phi)*a)

  beta<-
  0.8+0.2*(exp(mu+exp(phi)*b+omegab1*log(cstar_i[1]))/(1+exp(mu+exp(phi)*b
  +omegab1*log(cstar_i[1])))

  gamma<-
  1+14*(exp(mu+omegabg*b+exp(phi)*g+omegag1*log(cstar_i[1]))/(1+exp(mu+
  +omegabg*b+exp(phi)*g+omegag1*log(cstar_i[1])))

```

```

beta_sim[i]<-beta
gamma_sim[i]<-gamma

v40<-rnorm(1)
k0<-exp(csi*v40)
coss_i[1]<-cstar_i[1]*k0
lncn_i[1]<-log(coss_i[1])
delta_lncn_i[1]<-NA

for(t in 1:T){
  v1<-rnorm(1)
  v2<-rnorm(1)
  v3<-runif(1)

  sigma21<-exp(phie1 +omega*(eps_i[t]-1))
  sigma22<-exp(phie2 +omega*(eps_i[t]-1))
  eps1<-exp(-(log(1+sigma21)/2)+v1*sqrt(log(1+sigma21)))
  eps2<-exp(-(log(1+sigma22)/2)+v2*sqrt(log(1+sigma22)))
  d<-pnorm(50*(v3-pi))
  eps_i[t+1]<-d*eps1+(1-d)*eps2
}

eps[(1+T*(i-1)):T*i]<-eps_i[2:(T+1)]

for(t in 2:T){
  v4<-rnorm(1)
  k<-exp(csi*v4)
cstar_i[t]<-
cstar_i[t-1]*(eps_i[t+1]/((beta^2)*(1+rnd[t+T*(i-1)])))^(-1/gamma)
  coss_i[t]<-cstar_i[t]*k
  lncn_i[t]<-log(coss_i[t])
  delta_lncn_i[t]<-lncn_i[t]-lncn_i[t-1]
}

cstar[(1+T*(i-1)):T*i]<-cstar_i
coss[(1+T*(i-1)):T*i]<-coss_i
lncn[(1+T*(i-1)):T*i]<-lncn_i
delta_lncn[(1+T*(i-1)):T*i]<-delta_lncn_i
}

```



```

risultati<-list(beta=beta_sim, gamma=gamma_sim, eps=eps, cstar=cstar, coss=coss,
lncn=lncn, delta_lncn=delta_lncn, rnd=rnd)
return(risultati)
}

```

```

#####
#Funzione per calcolare i parametri ausiliari
#####

```

```

lambda_est<-function(N, T, dati){

```

```

lambda<-rep(0,24)

```

```

t_prov<-0:(T-1)

```

```

t<-2*t_prov+1

```

```

t2<-(2*t-1)

```

```

lncn<-matrix(dati$lncn, nrow=T, ncol=N, byrow=F)

```

```

delta_lncn<-matrix(dati$delta_lncn, nrow=T, ncol=N, byrow=F)

```

```

rnd<-matrix(dati$rnd, nrow=T, ncol=N, byrow=F)

```

```

lambda[1]<-mean(lncn[1,])

```

```

lambda[2]<-sqrt(var(lncn[1,]))

```

```

q25<-apply(lncn,1, function(x) quantile(x, probs=0.25 ))

```

```

q50<-apply(lncn,1, function(x) quantile(x, probs=0.5,))

```

```

q75<-apply(lncn,1, function(x) quantile(x, probs=0.75))

```

```

q7525<-q75-q25

```

```

mod1<-lm(q50~t)

```

```

mod2<-lm(q7525~t)

```

```

lambda[3]<-100*summary(mod1)$coef[2]

```

```

lambda[4]<-100*summary(mod2)$coef[2]

```

```

mod_tc<-lm(dati$delta_lncn~dati$rnd)

```

```

res<-mod_tc$resid

```

```

res_matrix<-matrix(res, nrow=(T-1), ncol=N, byrow=F)

```

```

res_new<-rep(0,N*(T-2))

```

```

res_new_1<-rep(0,N*(T-2))

```

```

zeta0<-rep(0,N)

```

```

zeta1<-rep(0,N)

```

```

phi<-rep(0,N)
csi<-rep(0,N)
tau<-rep(0,N)
ni<-rep(0,N)

for(i in 1:N){

mod3<-lm(delta_lncn[,i]~rnd[,i])
zeta0[i]<-summary(mod3)$coef[1]
zeta1[i]<-summary(mod3)$coef[2]
u<-mod3$resid
phi[i]<-sd(u)
csi[i]<-cor(u[-1],u[-(T-1)])

mod4<-lm(delta_lncn[,i]~t2)
tau[i]<-summary(mod4)$coef[2]
ni[i]<-sd(delta_lncn[2:T,i])

res_new[:(1+(T-2)*(i-1)):((T-2)*i)]<-res_matrix[2:(T-1),i]
res_new_1[:(1+(T-2)*(i-1)):((T-2)*i)]<-res_matrix[1:(T-2),i]

}

lambda[5]<-median(zeta0)
lambda[6]<-quantile(zeta0,probs=0.75)-quantile(zeta0,probs=0.25)
lambda[7]<-median(zeta1)
lambda[8]<-quantile(zeta1,probs=0.75)-quantile(zeta1,probs=0.25)
lambda[9]<-mean(phi)
lambda[10]<-sd(phi)
lambda[11]<-mean(csi)
lambda[12]<-sd(csi)
lambda[13]<-mean(tau)
lambda[14]<-sd(tau)
lambda[15]<-mean(ni)
lambda[16]<-sd(ni)
lambda[17]<-cor(tau,ni)

psi<-apply(lncn,2,function(x) mean(x))

lambda[18]<-cor(tau,psi)
lambda[19]<-cor(ni,psi)
lambda[20]<-sd(res)
lambda[21]<-mean((res-mean(res))^3)
lambda[22]<-mean((res-mean(res))^4)

```

```

res_new2<-res_new^2
mod6<-lm(res_new2~res_new_1)

lambda[23]<-summary(mod6)$coef[1]
lambda[24]<-summary(mod6)$coef[2]

return(lambda)
}

#####
#Criterio da minimizzare
#####

criterio<-function(theta, N, T, G, dati){

lambda_matrix<-matrix(0,nrow=24,ncol=G)

set.seed(12345)

for(g in 1:G){
dati_sim<-simulo(theta, N=N, T=T, rnd=dati$rnd)
lambda_matrix[,g]<-lambda_est(N=N, T=T, dati=dati_sim)
}

lambda_bar<-apply(lambda_matrix,1,function(x) mean(x))
lambda<-lambda_est(N=N, T=T, dati=dati)

D=t(lambda-lambda_bar)%*(lambda-lambda_bar)

return(D)
}

#####
#Minimizzazione
#####

p<-c(-1.50892, -0.897530 ,1.34955, 1.11394, 8.76561 ,-0.598257, 0.06882, -5.00011,
0.577887, -12.8030, 0.289047 ,-0.292605 , 1.36661, -1.53459, -1.24207)
ottimo<-optim(p, function(theta) criterio(theta, N=1088, T=7, G=8, dati=dati),
method="BFGS", control=list(trace=6))

```


Bibliografia

Alan, Sule, Orazio P. Attanasio e Martin Browning. 2009. "Estimating Euler Equations with Noisy Data: Two Exact GMM Estimators." *Journal of Applied Econometrics*, 24(2): 309–324.

Alan, Sule, e Martin Browning. 2010. "Estimating Intertemporal Allocation Parameters Using Synthetic Residual Estimation." *Review of Economic Studies*, 77(4): 1231–1261.

Attanasio, Orazio P., e Hamish Low. 2004. "Estimating Euler Equations." *Review of Economic Dynamics*, 7(2): 406–435.

Attanasio, Orazio P., e Guglielmo Weber. 1993. "Consumption Growth, the Interest Rate and Aggregation." *Review of Economic Studies*, 60(3): 631–649.

Attanasio, Orazio P., e Guglielmo Weber. 1995. "Is Consumption Growth Consistent with Intertemporal Optimization? Evidence from the Consumer Expenditure Survey." *Journal of Political Economy*, 103(6): 1121–1157.

Attanasio, Orazio P., e Guglielmo Weber. 2010. "Consumption and Saving: Models of Intertemporal Allocation and Their Implications for Public Policy." *Journal of Economic Literature*, 48(3): 693-751.

Battistin, Erich, Raffaele Miniaci e Guglielmo Weber. 2003. "What Do We Learn from Recall Consumption Data?" *Journal of Human Resources*, 38(2): 354-385.

Baum, Christopher F., Mark E. Schaffer e Steven Stillman. 2007. "Enhanced Routines for Instrumental Variables / Generalized Method of Moments Estimation and Testing." *The Stata Journal*, 7(4): 465-506.

Browning, Martin, e Thomas F. Crossley. 2001. "The Life Cycle Model of Consumption and Saving." *Journal of Economic Perspectives*, 15(3): 3-22.

Browning, Martin, e Annamaria Lusardi. 1996. "Household Saving: Micro Theories and Micro Facts." *Journal of Economic Literature*, 34(4): 1797-1855.

Caballero, Ricardo J. 1990. "Consumption Puzzles and Precautionary Savings." *Journal of Monetary Economics*, 25(1): 113-136.

Carrol, Christopher D. 2001. "Death to the Log-Linearized Consumption Euler Equation! (And very Poor Health to the Second-Order Approximation)." *Advances in Macroeconomics*, 1(1), Article 6.

Chamberlain, Gary. 1984. "Panel Data." In Griliches, Zvi, e Michael D. Intriligator (a cura di), *Handbook of Econometrics*, Vol. II. Amsterdam, North Holland, pagg. 1247-1318.

Chiappori, Pierre André, e Monica Paiella. 2011. "Relative Risk Aversion Is Constant: Evidence from Panel Data." *Journal of the European Economic Association*, 9(6): 1021-1052.

Chioda, Laura. 2004. "Estimating Euler Equations with Measurement Error: a Non-Parametric Approach." Disponibile all'indirizzo:

http://www.princeton.edu/~lchioda/euler_with_measurement_error.pdf.

Clarida, Richard, Jordi Galí, e Mark Gertler. 1999. "The Science of Monetary Policy: a New Keynesian Perspective." *Journal of Economic Literature*, 37(4): 1661–1707.

Cragg, John G., e Stephen G. Donald. 1993. "Testing Identifiability and Specification in Instrumental Variables Models." *Econometric Theory*, 9(2): 222–240.

Eisenhauer, Joseph, e Luigi Ventura. 2003. "Survey Measures of Risk Aversion and Prudence." *Applied Economics*, 35(13): 1477-1484.

Flavin, Marjorie. 1981. "The Adjustment of Consumption to Changing Expectations about Future Income." *Journal of Political Economy*, 89(5): 974–1009.

Friedman, Milton. 1957. *A Theory of the Consumption Function*. Princeton e Oxford, Princeton University Press.

Guiso, Luigi, e Monica Paiella. 2008. "Risk Aversion, Wealth and Background Risk." *Journal of the European Economic Association*, 6(6): 1109-1150.

Hall, Robert E. 1978. "Stochastic Implications of the Life Cycle-Permanent Income Hypothesis: Theory and Evidence." *Journal of Political Economy*, 86(6): 971–987.

Hall, Robert E. 1988. "Intertemporal Substitution in Consumption." *Journal of Political Economy*, 96(2): 339–357.

Hansen, Lars Peter. 1982. "Large Sample Properties of Generalized Method of Moments Estimator." *Econometrica*, 50(4): 1269-1286.

Hansen, Lars Peter, John Heaton e Amir Yaron. 1996. "Finite Sample Properties of Some Alternative GMM Estimators." *Journal of Business and Economic Statistics*, 14(3): 262-280.

Hansen, Lars Peter, e Kenneth J. Singleton. 1983. "Stochastic Consumption, Risk Aversion, and the Temporal Behavior of Asset Returns." *Journal of Political Economy*, 91(2): 249–265.

Jappelli, Tullio e Luigi Pistaferri. 2000. *Risparmio e Scelte Intertemporalì*. Bologna, Il Mulino.

Kleibergen, Frank, e Richard Paap. 2006. "Generalized Reduced Rank Tests Using the Singular Value Decomposition." *Journal of Econometrics*, 133(1): 97–126.

Meghir, Costas, e Guglielmo Weber. 1996. "Intertemporal Nonseparability or Borrowing Restrictions? A Disaggregate Analysis Using a U.S. Consumption Panel." *Econometrica*, 64(5): 1151–1181.

Modigliani, Franco, e Richard Brumberg. 1954. "Utility Analysis and the Consumption Function: an Interpretation of Cross-Section Data." In Kurihara, Kenneth K., (a cura di), *Post Keynesian Economics*. New Brunswick, Rutgers University Press, pagg. 388–436.

Scholz, John Karl, Ananth Seshadri, e Surachai Khitatrakun. 2006. "Are Americans Saving 'Optimally' for Retirement?" *Journal of Political Economy*, 114(4): 607–643.

Stock, James H., Jonathan H. Wright e Motohiro Yogo. 2002. "A Survey of Weak Instruments and Weak Identification in Generalized Method of Moments." *Journal of Business and Economic Statistics*, 20(4): 518-529.

Stock, James H., e Motohiro Yogo. 2005. "Testing for Weak Instruments in Linear IV Regression." In Andrews, Donald W. K., e James H. Stock (a cura di), *Identification and Inference for Econometric Models: Essays in Honor of Thomas Rothenberg*. Cambridge, Cambridge University Press, pagg. 80-108.

Ventura, Eva. 1994. "A Note on Measurement Error and Euler Equations: an Alternative to Log-Linear Approximations." *Economics letters*, 45(3): 305-308.