

# UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA



Facoltà di Ingegneria  
Corso di Laurea specialistica in Ingegneria dell'Automazione

## Sliding Mode Control: an output based approach

**Relatore:** Prof. Bisiacco Mauro

**Laureando:** D'Agostino Massimo

**Matricola:** 586281/IAM

**e-mail:** dagostino.massimo.84@gmail.com

Padova, 16 Luglio 2012

ANNO ACCADEMICO: 2011/2012



# Indice

<b>1</b>	<b>Controllo Sliding Mode</b>	<b>9</b>
1.1	Introduzione al controllo sliding mode . . . . .	10
1.2	Formulazione del problema . . . . .	16
1.3	Proprietà degli Sliding Motion . . . . .	18
1.4	Il problema della raggiungibilità . . . . .	23
1.4.1	Caso single-input . . . . .	24
1.4.2	Strutture di Controllo . . . . .	25
1.4.3	Caso multi-input . . . . .	29
1.5	Metodo del Vettore Unico . . . . .	31
1.5.1	Esistenza e descrizione di uno sliding mode ideale . . . . .	33
<b>2</b>	<b>Progetto della superficie di sliding</b>	<b>37</b>
2.1	Richiami sulla forma normale . . . . .	37
2.2	Metodo del controllo ottimo . . . . .	39
2.3	Il problema del tracking . . . . .	41
2.3.1	Metodo Model-Reference . . . . .	41
2.3.2	Metodo del controllo ad azione integrale . . . . .	45
<b>3</b>	<b>Sliding mode utilizzando i dati di uscita</b>	<b>51</b>
3.1	Formulazione del problema . . . . .	51
3.2	Il caso square system . . . . .	52
3.3	Il caso generale . . . . .	57
3.3.1	Progetto dell'iperpiano . . . . .	57
3.3.2	Sintesi della legge di controllo . . . . .	62
3.4	Metodo model reference utilizzando l'uscita . . . . .	64
<b>4</b>	<b>Stimatori sliding mode</b>	<b>65</b>
4.1	Stimatore di Utkin . . . . .	65
4.2	Stimatore discontinuo . . . . .	67
4.2.1	La forma canonica per lo stimatore . . . . .	68
4.2.2	Condizione di esistenza . . . . .	70

<b>5</b>	<b>Il problema del tracking con i dati di uscita</b>	<b>75</b>
5.1	Descrizione del problema e progetto di uno stimatore . . . . .	75
5.2	Controllore con azione integrale . . . . .	76
5.2.1	Stimatore per sistemi di tipo square . . . . .	77
5.2.2	Legge di controllo con azione integrale e retroazione dallo stato stimato .	77
5.2.3	Analisi della catena chiusa . . . . .	79
5.2.4	Implementazione della legge di controllo . . . . .	86
5.3	Approccio a modello di riferimento . . . . .	88
<b>6</b>	<b>Conclusioni</b>	<b>93</b>

## Ringraziamenti

Ed eccoci giunti alla parte più difficile di tutta la tesi (ad esclusione della burocrazia): i ringraziamenti.

Comincio con ordine dalle persone più importanti di tutte: mamma Valentina e papà Filippo; mia sorella Irene e la nonna Rosina perchè *i loro occhi senza fondo seguono la mia luna*. Senza il loro supporto morale, materiale ed economico niente di tutto questo sarebbe stato possibile. Vi devo tutto.

Un ringraziamento particolare va al prof. Mauro Bisiacco per la costante disponibilità e cortesia avute nei miei confronti; particolarmente preziose sono risultate le sue indicazioni, che mi hanno costantemente guidato nell'elaborazione di questa Tesi.

Ringrazio in modo speciale quelle persone care che la vita mi ha portato via: il nonno Eugenio, il nonno Valentino e la nonna Viola, gli amici Giacomo e Luca. Ovunque essi siano so che continuano a vegliare su di me.

Gli amici lo sanno quanto io sia in debito con tutti loro, per aver *viaggiato, vissuto e riso* assieme. A ringraziare tutti rischio di far uscire un altro capitolo della Tesi, però alcuni tra loro meritano qualcosa in più. Gli amici di sempre, il vero 'tesoro': Alessandro, Luca, Marco e Alberto. Gli amici dell'università, quanti esami passati grazie alle loro ripetizioni: Luca, Andrea e Matia. Gli amici di 'gioco', perchè la vita non è solo studio e lavoro: Marco, Nicola, Stefano e Diego.

Ho ricevuto molto più di quel che ho dato, da tutti quanti, ed è tanta la gratitudine che le parole ormai non bastano più a descriverla.

Mi raccontate del mio passato.  
Siete nel mio presente.  
Vi immagino nel mio futuro.

Infine vorrei omaggiare quello che considero, citando le sue parole, un vero *maestro di pensiero*: Fabrizio De Andrè. La sua vita, le sue canzoni sono una continua fonte di ispirazione; mi hanno insegnato a guardare il mondo da un'altra angolazione, ad andare in *direzione ostinata e contraria* ma, soprattutto, ha cambiato il mio rapporto con Dio, insegnandomi il vero significato della fede: l'amore.

Descrivere a parole la gratitudine, anzi di più, l'ammirazione che gli porto è difficile e mi rendo conto di non essere adatto a rendergli un giusto tributo.

Posso solo consigliare a tutti di conoscere quest'uomo. A quel punto allora, anche voi, capirete.

*Non cercare la felicità  
in tutti quelli a cui tu  
hai donato  
per avere un compenso  
ma solo in te  
nel tuo cuore  
se tu avrai donato  
solo per pietà  
per pietà  
per pietà...*

Fabrizio De Andrè  
*Corale(Leggenda del re infelice)*  
Tutti Morimmo a Stento (1968)

## Abstract

In the formulation of any control problem there will typically be discrepancies between the actual plant and the mathematical model adopted for control design. The engineer must ensure that the resulting controller has the ability to produce the required performance levels in practice despite such plant/model mismatches. This has led to an intense interest in the development of so-called *robust* control methods which seek to solve this problem. One particular approach to robust-controller design is the so-called *sliding mode* control methodology.

Sliding mode control is a particular type of *Variable structure control system* (VSCS). This system are characterised by a suite of feedback control law and a decision rule, termed the *switching function*. This Thesis provides the reader with a thorough grounding in the sliding mode control area and as such is appropriate for the graduate with a basic knowledge of classical control theory and some knowledge of state-space methods.

The Thesis is structured as follows. Chapter 1 introduce the concept of sliding mode control and formulates the general multivariable sliding mode control problem. The interpretation of the sliding surface design problem as a straightforward linear state feedback problem for a subsystem is emphasised.

Controller design issues are considered in Chapter 2. Methods for sliding surface design are described and frameworks for the solution of tracking problems are presented.

As developed thus far, the controllers require full state information. In practice, it may be impossible to measure all of the system variables. The next three chapters address this problem. Chapter 3 investigates the possibilities of obtaining sliding mode schemes where both the control law and the decision rule are a function of the measured outputs. Chapter 4 and 5 consider the possibilities of both state reconstruction and control using sliding mode techniques.

## Sommario

Nella formulazione di un problema di controllo si verifica regolarmente una certa differenza tra il processo reale e il modello matematico ad esso associato per lo sviluppo del sistema di controllo. A prescindere da queste differenze che intercorrono tra il processo ed il modello matematico, è necessario garantire che il sistema di controllo sia in grado di produrre nella pratica le prestazioni richieste. Si è quindi rivolto molto interesse nello sviluppo di quei metodi chiamati di controllo *robusto* in grado di risolvere questi problemi. Un particolare approccio è la metodologia relativa al cosiddetto controllo *sliding mode*.

Il controllo sliding mode è un particolare tipo di *variable structure control system* (VSCS); tali sistemi sono caratterizzati da una serie di leggi di controllo a retroazione e da una regola di decisione che è chiamata *switching function*. Questa Tesi si rivolge a coloro che hanno già familiarità con le basi della teoria del controllo, in particolar modo con l'analisi in spazio di stato, con l'obiettivo di fornire al lettore una conoscenza approfondita nell'ambito del controllo sliding mode.

La Tesi è strutturato nel modo seguente. Il Capitolo 1 introduce il concetto di sliding mode control; prima con un semplice esempio, poi in modo più rigoroso si formula il problema generale multivariabile ponendo l'accento sui problemi di progetto della superficie di sliding e di retroazione dallo stato. Il progetto di una superficie di sliding è affrontato con maggiori dettagli nel Capitolo 2 nel quale si forniscono anche le soluzioni al problema del tracking.

Per come è stato analizzato fino ad ora, il controllore richiederebbe la totale conoscenza del vettore di stato. Nella pratica potrebbe essere impossibile misurare tali variabili; i successivi tre capitoli affrontano questo problema. Il Capitolo 3 analizza la possibilità di realizzare uno schema di controllo sliding mode in cui la legge di controllo e la regola decisionale sono funzioni delle uscite misurate. I Capitoli 4 e 5 considerano la possibilità di utilizzare queste misure per ricostruire il vettore di stato tramite uno stimatore, e applicare poi le tecniche sliding mode analizzate nei capitoli precedenti.



# Capitolo 1

## Controllo Sliding Mode

Nella formulazione di un problema di controllo si verifica regolarmente una certa differenza tra il processo reale e il modello matematico ad esso associato per lo sviluppo del sistema di controllo. Queste discrepanze possono essere dovute a differenti fattori come, per esempio, ad una dinamica non modellata e a variazioni dei parametri in gioco. A prescindere da queste differenze che intercorrono tra il processo ed il modello matematico, è necessario garantire che il sistema di controllo sia in grado di produrre nella pratica le prestazioni richieste. Si è quindi rivolto molto interesse nello sviluppo di quei metodi chiamati di controllo *robusto* in grado di risolvere questi problemi. Un particolare approccio è la metodologia relativa al cosiddetto controllo *sliding mode*.

Il controllo sliding mode è un particolare tipo di *variable structure control system* (VSCS); tali sistemi di controllo a struttura variabile sono caratterizzati da una serie di leggi di controllo a retroazione e da una regola di decisione. Quest'ultima, chiamata *switching function*, ha come ingressi alcune misurazioni del comportamento corrente del sistema e fornisce in uscita, per l'istante specifico, il particolare controllore a retroazione che il sistema deve adottare. Il risultato finale è un sistema a struttura variabile, il quale assume una fisionomia diversa di controllo valida in base al comportamento del sistema, cioè all'appartenenza dello stato a specifiche regioni decisionali. Questo metodo offre sicuramente diversi vantaggi. Quello che si vuole sottolineare riguarda l'abilità di combinare importanti ed utili proprietà di ciascuna struttura di cui è composto il sistema. Lo scopo principale di questo sistema di controllo è quello di condurre e poi mantenere lo stato del sistema nelle vicinanze della regione dove interviene la *switching function*; in questo modo il sistema di controllo gode dei seguenti vantaggi: il comportamento dinamico del sistema può essere caratterizzato da una specifica scelta della *switching function* e la risposta del sistema in catena chiusa risulta essere totalmente insensibile ad alcune classi di disturbi (incertezze). Il progetto per questo tipo di sistemi di controllo consiste quindi nella scelta di due componenti: una è la *switching function*, in modo tale che vengano soddisfatte le specifiche, mentre l'altra è la legge di controllo che deve garantire che la regione dove interviene la *switching function* risulti attrattiva per il sistema.

Questa metodologia è quindi una candidata appropriata per un controllo robusto grazie soprat-

tutto alla sua proprietà di insensibilità ai disturbi.

## 1.1 Introduzione al controllo sliding mode

Come suggerisce il nome, i sistemi di controllo a struttura variabile sono una classe di sistemi in cui la legge di controllo cambia durante il processo di controllo in accordo con delle specifiche regole che dipendono dallo stato del sistema. Per fare un esempio si consideri il doppio integratore dato da

$$\ddot{y}(t) = u(t) \quad (1.1)$$

Inizialmente si considerino gli effetti della seguente legge di controllo

$$u(t) = -ky(t) \quad (1.2)$$

dove  $k$  è uno scalare positivo. Per analizzare la dinamica del sistema ad anello chiuso, un modo efficace è quello di osservare il diagramma di fase, che essenzialmente è un grafico della velocità in funzione della posizione. Sostituendo in (1.1) l'ingresso di controllo, e moltiplicando da ambo le parti per  $\dot{y}$  l'equazione risultante, si ricava

$$\dot{y}(t)\ddot{y}(t) = -k\dot{y}(t)y(t) \quad (1.3)$$

Integrando questa espressione si ottiene la seguente relazione tra velocità e posizione

$$\dot{y}^2 + ky^2 = c \quad (1.4)$$

in cui  $c$  rappresenta la costante di integrazione che dipende dalle condizioni iniziali ed è strettamente positiva. Interessante notare come il tempo non appaia esplicitamente nell'equazione (1.4). Come si può notare in figura (1.1), la relazione ottenuta tra la velocità e la posizione

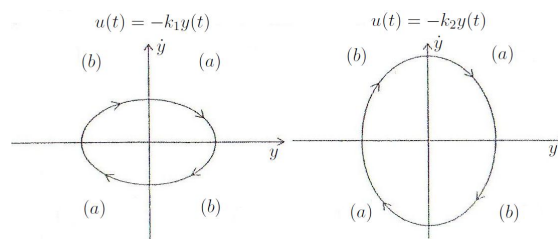


Figura 1.1: Diagrammi di fase per un moto armonico semplice

genera un grafico ad ellisse, i cui parametri dipendono dalle condizioni iniziali del sistema. Per un problema relativo alla regolazione, che consiste nel portare il sistema da condizioni iniziali arbitrarie nell'origine, una legge di controllo del tipo (1.2) non è appropriata poiché non è in

grado, per l'appunto, di far convergere gli stati verso l'origine.

Si assuma invece una legge di controllo del tipo

$$u(t) = \begin{cases} -k_1 y(t) & \text{se } y\dot{y} < 0 \\ -k_2 y(t) & \text{altrimenti} \end{cases} \quad (1.5)$$

dove  $0 < k_1 < 1 < k_2$ . In questo caso il piano di fase è diviso, dalla regola di cambiamento della legge di controllo, in quattro quadranti separati dagli assi. Il comportamento in questo caso è differente da quanto precedentemente analizzato, infatti l'evoluzione risulta a spirale convergente verso l'origine e la dinamica asintoticamente stabile, come illustrato dalla figura (1.2). Questo può essere dimostrato formalmente considerando la funzione

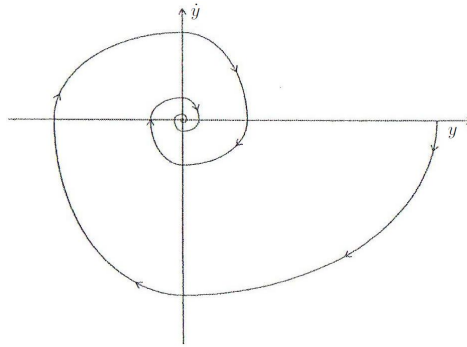


Figura 1.2: Diagramma di fase con controllo VSCS

$$V(y, \dot{y}) = y^2 + \dot{y}^2 \quad (1.6)$$

che rappresenta la distanza al quadrato del punto del piano  $(y, \dot{y})$  dall'origine. Lungo le traiettorie del sistema, la derivata di  $V(y, \dot{y})$  rispetto al tempo è data da:

$$\dot{V} = 2\dot{y}y + 2\dot{y}\dot{y} \quad (1.7)$$

$$= 2\dot{y}(y + u) = \begin{cases} 2\dot{y}y(1 - k_1) & \text{se } y\dot{y} < 0 \\ 2\dot{y}y(1 - k_2) & \text{se } y\dot{y} > 0 \end{cases} \quad (1.8)$$

ed è sempre negativa, per come sono stati scelti i due parametri  $k_1$  e  $k_2$ . Quindi la distanza dall'origine continua a diminuire durante tutta l'evoluzione del sistema nel tempo. È interessante osservare come l'introduzione di una regola che permetta la scelta fra due strutture di controllo, che singolarmente non garantiscono la stabilità asintotica del sistema, consente di ottenere un sistema a catena chiusa stabile. In pratica, il movimento avviene sempre lungo ellissi, ma commutando da un'ellissi all'altra si riesce a diminuire costantemente la distanza del punto dall'origine.

Un esempio più significativo si ottiene utilizzando la seguente legge a struttura variabile

$$u(t) = \begin{cases} -1 & \text{se } s(y, \dot{y}) < 0 \\ 1 & \text{se } s(y, \dot{y}) > 0 \end{cases} \quad (1.9)$$

dove la *switching function* è definita da

$$s(y, \dot{y}) = my + \dot{y} \quad (1.10)$$

ed  $m$  è un parametro scalare di progetto. Il termine ‘switching function’ si spiega per mezzo del fatto che, in base al valore di (1.10), si decide quale struttura di controllo usare in ogni punto del piano di fase. Volendo essere più precisi, si può riscrivere la legge di controllo come

$$u(t) = -\text{sgn}(s(t)) \quad (1.11)$$

La funzione segno, ha la proprietà molto importante

$$s * \text{sgn}(s) = |s| \quad (1.12)$$

Controllando il doppio integratore con la (1.9) si ottiene, per grandi valori di  $\dot{y}$ , il diagramma di fase mostrato in figura (1.3). La linea punteggiata rappresenta i punti del piano in cui  $s(y, \dot{y}) = 0$ , che è in questo caso una retta passante per l’origine di pendenza  $-m$ . Per valori di  $\dot{y}$  tali da soddisfare  $|\dot{y}| < \frac{1}{m}$  si osserva che

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} s^2 = s \dot{s} = s(m\dot{y} + \ddot{y}) = s(m\dot{y} - \text{sgn}(s)) \leq |s|(m|\dot{y}| - 1) < 0 \quad (1.13)$$

e quindi, per tali valori, le traiettorie del sistema, da ambo le parti della linea

$$L_s = \{(y, \dot{y}) : s(y, \dot{y}) = 0\}$$

puntano verso di essa. A questo punto si verifica un cambio di struttura di controllo a frequen-

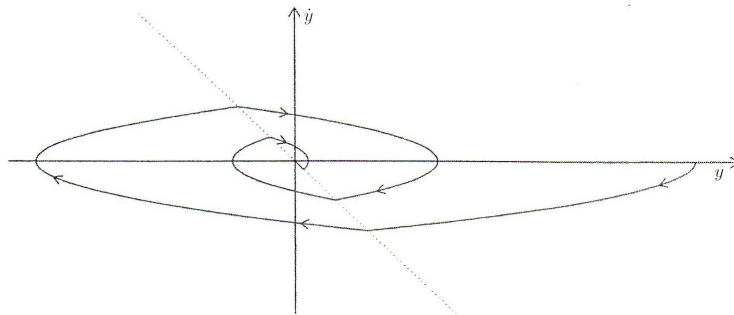
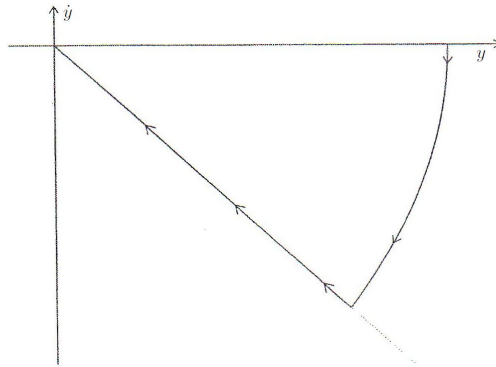


Figura 1.3: Diagramma di fase per valori grandi di  $\dot{y}$

za elevata quando le traiettorie del sistema attraversano la linea  $L_s$ . Tale fenomeno ad alta frequenza è conosciuto con il nome di *chattering*. Se fosse possibile raggiungere una frequenza infinita per il cambio di struttura, la dinamica verrebbe costretta a giacere sulla linea  $L_s$ , si avrebbe inoltre che  $s(y, \dot{y}) = 0$  ottenendo

$$\dot{y}(t) = -my(t) \quad (1.14)$$

Figura 1.4: Diagramma di fase di uno *sliding mode*

che rappresenta un decadimento del primo ordine e le traiettorie del sistema ‘scivolano’ lungo  $L_s$  verso l’origine, come mostrato in figura (1.4). Tale comportamento dinamico è descritto come *sliding mode ideale* e la linea  $L_s$  viene chiamata *superficie di scivolamento*. Durante questo comportamento sembra che l’azione di controllo non intervenga nell’evoluzione del sistema di ordine ridotto, tuttavia essa serve a garantire che sia valida la seguente relazione

$$s\dot{s} < 0 \quad (1.15)$$

conosciuta come *condizione di raggiungibilità*. Dalla scelta della *switching function* dipendono invece le prestazioni della risposta del sistema. È da notare che l’azione di controllo per ottenere un tale risultato è discontinua e non definita sulla superficie di scivolamento.

Lo scopo dell’azione di controllo è quello di assicurare che le traiettorie siano dirette verso  $L_s$  e costrette a rimanere su di essa per garantire uno sliding motion. Si supponga che al tempo  $t_s$  la superficie di commutazione sia raggiunta e intervenga uno sliding motion ideale, allora succede che la switching function soffisca

$$s(t) = 0 \quad \forall t > t_s \quad (1.16)$$

che implica inoltre

$$\dot{s}(t) = 0 \quad \forall t > t_s \quad (1.17)$$

Dalle equazioni (1.1) e (1.10) si ricava

$$\dot{s}(t) = m\dot{y}(t) + u(t) \quad (1.18)$$

e, dal momento che vale (1.17), deriva dalla (1.18) che l’unica legge di controllo capace di mantenere la dinamica su  $L_s$  risulta essere

$$u(t) = -m\dot{y}(t) \quad \forall t \geq t_s \quad (1.19)$$

Questa legge di controllo viene denominata azione di *controllo equivalente* e può essere pensata come il segnale di controllo applicato ‘in media’ al processo.

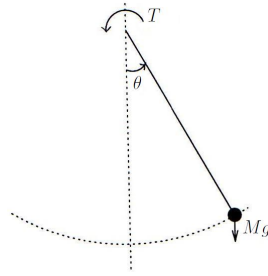


Figura 1.5: Schema di un pendolo

Per capire meglio cosa si intende con questo concetto, si consideri ora un sistema reale, il pendolo. Come mostrato in figura (1.5) la variabile  $\theta$  rappresenta la distanza angolare dall'asse verticale, mentre  $u(t) = T(t)$  rappresenta la coppia applicata nel punto di sospensione e che può essere considerata come la variabile di controllo del sistema. Matematicamente il sistema è rappresentato da

$$\ddot{\theta}(t) = -\frac{g}{l}\sin\theta(t) + \frac{1}{Ml^2}u(t) \quad (1.20)$$

dove  $M$  rappresenta la massa del punto,  $l$  la lunghezza della corda e  $g$  l'accelerazione di gravità. Dopo opportuni dimensionamenti si ottiene l'equazione che rappresenta la dinamica essenziale del sistema, conosciuta come *equazione del pendolo normalizzato*

$$\ddot{y}(t) = -a_1\sin y(t) + u(t) \quad (1.21)$$

in cui  $a_1$  è uno scalare positivo. Utilizzando come legge di controllo la (1.10) e (1.11), scelta anche per il doppio integratore, si ottiene un risultato molto importante. Una volta stabilito, in tempo finito, uno sliding motion ideale entrambi i sistemi si comportano nello stesso modo espresso matematicamente da

$$\dot{y}(t) = -my(t) \quad (1.22)$$

Volendo considerare il termine relativo alla funzione seno come elemento di disturbo per il sistema nominale del doppio integratore, si può dare una interpretazione alternativa del risultato ottenuto. Si può infatti dire che gli elementi non lineari considerati come disturbo sono stati completamente compensati e si può così affermare che il sistema a catena chiusa è robusto. È tuttavia difficile pensare come si possa *cancellare* gli effetti di un disturbo non conosciuto a priori. Un tentativo per dare un'interpretazione intuitiva di tale fenomeno si avvale del concetto di controllo equivalente. Come già detto in precedenza per il doppio integratore, una volta raggiunto uno sliding motion al tempo  $t_s$ , per tutto il tempo successivo valgono  $s(t) = 0$  e  $\dot{s}(t) = 0$ . Poiché in questo caso

$$\dot{s}(t) = m\dot{y}(t) - a_1\sin y(t) + u(t) \quad (1.23)$$

si ottiene la seguente espressione per il controllo equivalente

$$u_{eq}(t) = -m\dot{y}(t) + a_1\sin y(t) \quad (1.24)$$

in cui si nota chiaramente come il disturbo venga ‘catturato’ nel sistema a catena chiusa, cancellandone gli effetti. Bisogna tuttavia chiarire un fatto importante. L’azione di controllo del processo non utilizza alcuna conoscenza a priori relativa al disturbo. A prescindere dalle proprietà relative allo sliding motion, un ulteriore beneficio si ha dal fatto che il pendolo è costretto a comportarsi come un sistema del primo ordine e lineare, pertanto in un controllo di posizione, da condizioni iniziali arbitrarie, non vi sarà la presenza di sovraelongazione.

È possibile che, a partire da determinate condizioni iniziali, la traiettoria del sistema intercetti la linea  $L_s$  senza però possedere una sufficiente energia di controllo tale da mantenere uno sliding motion. Questo fatto è in linea di principio concorde con la teoria presentata per il doppio integratore che in effetti è una approssimazione lineare del pendolo normalizzato se non si considera il termine non lineare (possibile nelle vicinanze del punto di equilibrio). Quindi uno sliding motion può essere garantito anche nel caso del pendolo, come per il doppio integratore, solo se la velocità angolare del sistema risulta inferiore a  $\frac{1}{m}$ , cioè in quella regione del piano di fase in cui la linea  $L_s$  risulta attrattiva per il sistema.

Risulta quindi chiaro quali siano i punti principali da seguire durante la fase di progetto della legge di controllo: minimizzare il tempo necessario per indurre uno sliding motion e contemporaneamente massimizzare la regione in cui lo sliding motion può avvenire.

Una struttura di controllo che può andare incontro alle esigenze di progetto è la seguente

$$u(t) = l_1 y(t) + l_2 \dot{y}(t) - \rho \operatorname{sgn}(s(t)) \quad (1.25)$$

dove  $l_1$ ,  $l_2$ ,  $\rho$  sono degli scalari. La scelta relativa a questi parametri dipende dal requisito di ottenere che la disuguaglianza  $s\dot{s} < 0$  sia sempre verificata. Utilizzando la switching function descritta in (1.10) si ottiene

$$s\dot{s} = s(m\dot{y} + \ddot{y}) = s(m\dot{y} - a_1 \sin(y) + u) \quad (1.26)$$

e sostituendo l’equazione del controllo (1.25), risulta

$$s\dot{s} = s(m\dot{y} - a_1 \sin(y) + l_1 y + l_2 \dot{y} - \rho \operatorname{sgn}(s)) \quad (1.27)$$

Scegliendo  $l_1 = 0$  e  $l_2 = -m$  segue che

$$s\dot{s} = -s a_1 \sin(y) - \rho |s| = |s|(-\operatorname{sgn}(s) a_1 \sin(y) - \rho) \leq |s|(a_1 - \rho) \quad (1.28)$$

e infine, scegliendo  $\rho > a_1 + \eta$  dove  $\eta$  è un parametro scalare di progetto positivo, si riesce a stabilire che

$$s\dot{s} < -\eta |s| \quad (1.29)$$

In letteratura ci si riferisce a questa disuguaglianza come *condizione di  $\eta$ -raggiungibilità*. Con la scelta di questa legge di controllo e dei relativi parametri si garantisce che, in qualsiasi istante si raggiunga la superficie di scivolamento, uno sliding motion ideale si verifica. Si possono tuttavia porre delle obiezioni a questa scelta, infatti a seconda del modulo del parametro  $\rho$

varia l'ampiezza delle oscillazioni in alta frequenza, e di conseguenza il consumo dell'attuatore, ma anche il tempo necessario per raggiungere la superficie di scivolamento; si ottiene una diminuzione delle oscillazioni in frequenza a discapito di un aumento del tempo necessario a raggiungere  $\mathcal{S}$ . Per ovviare a questo inconveniente è possibile apportare una semplice modifica alla scelta dei parametri in (1.25). Ad esempio  $l_1 = -\Phi m$  e  $l_2 = -(m + \Phi)$ , dove  $\Phi$  è uno scalare positivo, permettono di ottenere

$$u(t) = -(m + \Phi)\dot{y}(t) - \Phi m y(t) - \rho \operatorname{sgn}(s(t)) \quad (1.30)$$

che permette di raggiungere una  $\eta$ -raggiungibilità dato che

$$s\dot{s} \leq -\Phi s^2 - \eta|s| \quad (1.31)$$

viene soddisfatta. In questo modo si può scegliere  $\Phi$  in modo tale da ridurre il tempo per raggiungere la superficie di scivolamento e allo stesso tempo si può agire su  $\rho$  per limitare l'usura dell'attuatore.

È possibile considerare anche un approccio, che sarà molto usato in seguito, in spazio di stato considerando come vettore di stato  $x(t) = [y(t) \ \dot{y}(t)]^T$ , allora per esempio il doppio integratore nell'equazione (1.1) può essere scritto in spazio di stato come

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \quad (1.32)$$

La switching function, espressa in termini dello stato, risulta

$$s(y, \dot{y}) = Sx(t) \quad (1.33)$$

dove  $S = [m \ 1]$ .

Nelle successive sezioni verrà trattata la teoria per sistemi MIMO. Si inizierà con un problema di regolazione di un sistema lineare tempo invariante soggetto a parametri incerti o non linearità; si osserverà come un controllore è in grado di forzare gli stati del sistema a raggiungere e rimanere su una superficie predefinita dello spazio di stato. Il comportamento dinamico del sistema quando confinato sulla superficie è appunto descritto come *sliding motion ideale*. Verranno considerate le proprietà di tale comportamento e le componenti da progettare per rendere elevate le prestazioni del sistema in catena chiusa. Lo scopo principale è quello di ridurre al minimo il tempo dedicato alla *fase di raggiungimento*, la fase iniziale prima di raggiungere la superficie di sliding per poi scivolare su di essa.

## 1.2 Formulazione del problema

Consideriamo il sistema lineare tempo invariante

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + f(x, t, u) \quad (1.34)$$



in cui  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  e  $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ .

Sia  $B$  matrice a rango pieno e sia  $f$  una funzione  $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  che assumiamo sconosciuta ma limitata e che tiene conto dell'incertezza sui parametri e delle non-linearità del sistema.

Si parla di *ideal sliding motion* per descrivere la dinamica dell'evoluzione di stato quando il controllore forza lo stato a raggiungere, e conseguentemente a mantenersi, una prefissata superficie definita nello spazio degli stati. Il vantaggio di ottenere questo tipo di evoluzione, come detto, è duplice: da un lato c'è una riduzione nell'ordine del sistema, dall'altro un'evoluzione *sliding motion* è insensibile ai disturbi.

Sia  $s : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  la funzione lineare:

$$s(x) = Sx \quad (1.35)$$

in cui  $S \in \mathbb{R}^{m \times n}$  è a rango pieno.

Sia  $\mathcal{S}$  l'iperpiano così definito:

$$\mathcal{S} = \{x \in \mathbb{R}^n : s(x) = 0\} \quad (1.36)$$

**Definizione 1.1** (ideal sliding motion). Supponiamo che esista un tempo finito  $t_s$  tale che la soluzione di (1.34), rappresentata da  $x(t)$ , soddisfi

$$s(x(t)) = 0 \quad \forall t \geq t_s$$

Allora diremo che uno *sliding motion ideale* ha luogo per ogni  $t \geq t_s$ . L'azione di controllo necessaria per mantenere su  $\mathcal{S}$  lo sliding motion ideale è chiamata *controllo equivalente*.

Per spiegare cosa intendiamo per controllo equivalente, consideriamo il sistema (1.34) ipotizzando che sia identicamente nulla la funzione  $f$ :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (1.37)$$

Supponiamo ora che, dall'istante  $t_s$  in poi, lo stato  $x(t)$  giaccia sulla superficie  $\mathcal{S}$  e che abbia luogo uno sliding motion. Matematicamente ciò significa che

$$Sx(t) = 0$$

e quindi

$$\dot{s}(x(t)) = S\dot{x}(t) = 0 \quad \forall t \geq t_s$$

Andando ora a sostituire la (1.37) in quest'ultima equazione, otteniamo

$$S\dot{x}(t) = SAx(t) + SBu(t) = 0 \quad \forall t \geq t_s \quad (1.38)$$

Supponiamo ora che la matrice  $S$  sia tale per cui  $SB$  sia non singolare<sup>1</sup>

---

<sup>1</sup>Questa supposizione non rappresenta una seria difficoltà considerando che  $B$  è per ipotesi a rango pieno e che  $S$  è un parametro di progetto.

**Definizione 1.2** (controllo equivalente). Si definisce *controllo equivalente* associato al sistema (1.37) e si scrive  $u_{eq}$  l'unica<sup>2</sup> soluzione dell'equazione algebrica (1.38):

$$u_{eq}(t) = -(SB)^{-1}SAx(t) \quad (1.39)$$

A questo punto possiamo determinare l'evoluzione sulla superficie  $\mathcal{S}$  sostituendo in (1.37) l'espressione appena definita per il controllo equivalente (1.39), ottenendo così un'evoluzione indipendente dalla legge di controllo e data da:

$$\dot{x}(t) = (I_n - B(SB)^{-1}S)Ax(t) \quad \forall t \geq t_s \quad \text{e} \quad Sx(t_s) = 0 \quad (1.40)$$

Definendo

$$P_s := (I_n - B(SB)^{-1}S) \quad (1.41)$$

si nota facilmente che  $P_s$  è un proiettore ortogonale che soddisfa

$$SP_s = 0 \quad \text{e} \quad P_s B = 0 \quad (1.42)$$

### 1.3 Proprietà degli Sliding Motion

Consideriamo inizialmente il sistema (1.37) e supponiamo esista una legge di controllo che induce uno sliding motion ideale sulla superficie (1.36).

Il primo risultato che presentiamo prova che la soluzione di (1.40) è di ordine ridotto e fornisce importanti informazioni sulla struttura degli autovalori ad essa associati.

**Proposizione 1.3.1.** *Lo sliding motion dato dall'equazione (1.40) è di ordine ridotto e gli autovettori relativi ad ogni autovalore non nullo della matrice*

$$A_{eq} = (I_n - B(SB)^{-1}S)A \quad (1.43)$$

*appartengono al nucleo della matrice  $S$ .*

*Dimostrazione.* Dalle definizioni date segue che, durante lo sliding,  $Sx(t) = 0 \quad \forall t \geq t_s$ . Poichè  $S \in \mathbb{R}^{m \times n}$  è a rango pieno, abbiamo che esattamente  $m$  stati possono essere espressi come combinazione lineare dei rimanenti  $n - m$  e quindi l'evoluzione (1.40) dipende unicamente dalla dinamica di questi  $n - m$  stati.

Questo prova che l'evoluzione, durante lo sliding, è di ordine ridotto.

Per provare l'appartenenza degli autovettori allo spazio nullo di  $S$ , consideriamo l'autovalore non nullo  $\lambda_i$  della matrice  $A_{eq}$  e il corrispondente autovettore destro  $v_i$ . Dalle (1.42) segue

$$SA_{eq} = 0 \quad \Rightarrow \quad SA_{eq}v_i = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_i Sv_i = 0 \quad \Rightarrow \quad Sv_i = 0$$

ovvero il fatto che gli autovettori relativi ad autovalori non nulli appartengono a  $\mathcal{N}(S)$ .  $\square$

---

<sup>2</sup>La condizione di non singolarità per  $SB$  garantisce l'unicità della soluzione.

Dalla proposizione appena enunciata, risulta chiaro come  $A_{eq}$  possa avere al massimo  $n - m$  autovalori non nulli. Supponiamo di aver scelto  $S$  in modo che essi siano distinti e chiamiamo  $V \in \mathbb{R}^{n \times (n-m)}$  la matrice formata dagli autovettori destri di tali autovalori.

Allora  $V$  è tale per cui risulta verificata la seguente proposizione

**Proposizione 1.3.2.** *La matrice  $V$  degli autovettori destri soddisfa*

$$SV = 0 \quad e \quad rank[V B] = n - m$$

L'equazione (1.39) potrebbe far pensare al controllo equivalente come a quella componente di retroazione lineare dallo stato, necessaria a mantenere un'evoluzione di ordine ridotto; in altre parole si potrebbe pensare di utilizzare il segnale

$$u(t) = Kx(t); \quad K = -(SB)^{-1}SA \quad (1.44)$$

come una legge di controllo in retroazione lineare.

È perciò molto importante a questo punto, precisare che la nozione di controllo equivalente non si riferisce ad una legge di controllo che sia fisicamente applicabile ma solo ad uno strumento di analisi, introdotto per poter spiegare più semplicemente il mantenimento della traiettoria sull'iperpiano. Per chiarire questo concetto, consideriamo il seguente sistema

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + D\xi(t, x) \quad (1.45)$$

in cui la matrice  $D \in \mathbb{R}^{n \times l}$  è supposta nota, mentre la funzione  $\xi : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^l$  è invece sconosciuta.<sup>3</sup>

Supponiamo che esista un controllore in grado di indurre uno sliding motion malgrado la presenza del disturbo  $\xi(\cdot)$ . Se al tempo  $t_s$  lo stato giace su  $\mathcal{S}$  e da questo istante in poi vi rimane, deve risultare  $\dot{s}(t) = 0 \quad \forall t > t_s$  per cui, ragionando come è stato fatto per il calcolo precedente di  $u_{eq}$ , otteniamo questa volta che l'azione di controllo necessaria a mantenere tale evoluzione di stato è data da

$$u_{eq}(t) = -(SB)^{-1}(SAx(t) + SD\xi(t, x)) \quad \forall t \geq t_s \quad (1.46)$$

Questo controllo equivalente è ora dipendente da  $\xi(t, x)$  che è sconosciuta e non può certo essere realizzato in pratica, tuttavia  $u_{eq}(t)$  viene automaticamente indotto se le leggi di controllo garantiscono il mantenimento della traiettoria sulla superficie di sliding.

L'equazione (1.46) è utile anche per evidenziare un'altra importante proprietà dello *sliding mode control*, ovvero l'insensibilità ai disturbi. Il segnale  $u_{eq}$  trovato in (1.46) è infatti l'unico compatibile con il mantenimento della traiettoria su  $\mathcal{S}$  e, come si vede chiaramente, 'compensa' il disturbo.

Questo risultato è formalizzato dal seguente teorema

---

<sup>3</sup>Questa funzione rappresenta le incertezze sulle matrici  $A$  e  $B$  o alternativamente un disturbo agente sul sistema. Con riferimento al sistema (1.34) essa va intesa come corrispondente al caso  $f(t, x, u) = D\xi(t, x)$ .

**Teorema 1.3.3.** *Una sliding motion ideale è del tutto insensibile alla funzione incertezza  $\xi(t, x)$  definita in (1.45) se, tra i sottospazi immagine delle matrici  $D$  e  $B$ , vale la seguente relazione  $\mathcal{I}(D) \subset \mathcal{I}(B)$ <sup>4</sup>*

*Dimostrazione.* Sostituendo la legge di controllo equivalente (1.46) nel sistema (1.45) otteniamo un'evoluzione sull'iperpiano di sliding che soddisfa la

$$\dot{x}(t) = P_s Ax(t) + P_s D \xi(x, t) \quad \forall t \geq t_s \quad \text{e} \quad Sx(t_s) = 0$$

in cui  $P_s$  è il proiettore definito in (1.41).

Supponiamo verificata l'ipotesi  $\mathcal{I}(D) \subset \mathcal{I}(B)$ ; come conseguenza esiste  $R \in \mathbb{R}^{m \times l}$  tale che  $D = BR$ . Ma allora:  $P_s D = P_s (BR) = (P_s B)R = 0$  per (1.42). Questo implica che l'evoluzione  $\dot{x}(t)$  appena calcolata si riduce a

$$\dot{x}(t) = P_s Ax(t) \quad \forall t \geq t_s \quad \text{e} \quad Sx(t_s) = 0$$

che risulta appunto indipendente dal disturbo  $\xi(\cdot)$ . □

A questo punto risulta chiaro come sia importante il verificarsi della condizione  $\mathcal{I}(D) \subset \mathcal{I}(B)$ . Ad essa daremo il nome inglese di *matching condition*.

Supponendo che sia verificata, ci occupiamo ora del problema di come definire la superficie di sliding; il teorema appena enunciato ci permette di non considerare, per il momento, la componente di disturbo o incertezza.

Prima di tutto effettuiamo un cambio di base in modo tale da decomporre il sistema in due sottosistemi connessi, uno dei quali agisce in  $\mathcal{I}(B)$  mentre l'altro agisce in  $\mathcal{N}(S)$ .<sup>5</sup> Poichè  $\text{rank}(B) = m$  allora esiste una matrice invertibile  $T_r \in \mathbb{R}^{n \times n}$  tale che

$$T_r B = \begin{bmatrix} 0 \\ B_2 \end{bmatrix} \quad (1.47)$$

dove  $B_2 \in \mathbb{R}^{m \times m}$  è non singolare. Si noti che è sempre possibile trovare una matrice  $T_r$  ortonormale che soddisfi la (1.47). In questo modo, trattandosi di una matrice di cambiamento di base ortonormale, otteniamo una trasformazione che preserva la norma Euclidea. Inoltre, avendo determinante uguale ad uno, è facile trattando questo tipo di matrici determinare l'inversa come semplice trasposizione. Partizionando il vettore di stato coerentemente con la trasformazione semplice

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (1.48)$$

in cui  $x_1 \in \mathbb{R}^{n-m}$  e  $x_2 \in \mathbb{R}^m$ , possiamo riscrivere il sistema (1.37) in questo modo

$$\dot{x}_1(t) = A_{11}x_1(t) + A_{12}x_2(t) \quad (1.49)$$

$$\dot{x}_2(t) = A_{21}x_1(t) + A_{22}x_2(t) + B_2 u(t) \quad (1.50)$$

<sup>4</sup>Con la notazione  $\mathcal{I}(M)$  indichiamo lo spazio immagine della matrice  $M$ .

<sup>5</sup>Con  $\mathcal{N}(M)$  si intende il nucleo della matrice  $M$ .

Questa rappresentazione è conosciuta come *forma normale*. L'equazione (1.49) descrive la dinamica nello spazio  $\mathcal{N}(s)$ , mentre l'equazione (1.50) descrive quella nello spazio generato da  $\mathcal{I}(B)$ . Compatibilmente con il nuovo sistema di coordinate, la *switching function* è così partizionata:

$$S = [S_1 \ S_2] \quad (1.51)$$

con  $S_1 \in \mathbb{R}^{m \times (n-m)}$  e  $S_2 \in \mathbb{R}^{m \times m}$ , e allora

$$\det(SB) = \det(S_2B_2) = \det(S_2)\det(B_2) \quad (1.52)$$

Quindi, una condizione necessaria e sufficiente perchè la matrice  $SB$  sia non singolare, è che  $\det(S_2) \neq 0$  dal momento che, per costruzione,  $\det(B_2) \neq 0$ .

Si assuma che da progetto sia questo il caso.

Allora, durante lo 'scivolamento' ideale, il comportamento del sistema è dato da:

$$S_1x_1(t) + S_2x_2(t) = 0 \quad \forall t > t_s \quad (1.53)$$

ed esprimendo formalmente  $x_2(t)$  in termini di  $x_1(t)$  risulta:

$$x_2(t) = -Mx_1(t) \quad \forall t > t_s \quad (1.54)$$

in cui  $M \triangleq S_2^{-1}S_1$ . Sostituendo quindi l'espressione di  $x_2(t)$  in (1.49) otteniamo:

$$\dot{x}_1(t) = (A_{11} - A_{12}M)x_1(t) \quad (1.55)$$

In conclusione, l'*ideal sliding motion* è dato dalla combinazione delle equazioni (1.55) e (1.54); in particolare è interessante sottolineare due aspetti:

- La matrice  $S_2$  non produce effetti diretti sulla dinamica dello 'scivolamento' ma funge unicamente da fattore di scala per la switching function.
- In ambito di progetto del regolatore, la matrice  $A_{11}^s \triangleq A_{11} - A_{12}M$  deve avere autovalori stabili.

Il problema relativo al progetto della superficie può quindi essere ricondotto alla scelta di una matrice  $M$  di retroazione dallo stato capace di ottenere le prestazioni richieste per il sistema di ordine ridotto  $(A_{11}, A_{12})$ . La difficoltà dipende dalla controllabilità o meno della coppia  $(A_{11}, A_{12})$ ; ma questo è possibile stabilirlo direttamente dal sistema originale.

**Proposizione 1.3.4.** *La coppia di matrici  $(A_{11}, A_{12})$  è controllabile se e solo se la coppia  $(A, B)$  è controllabile*

*Dimostrazione.* Data la struttura particolare della forma normale e usando il fatto che

$$\det(B_2) \neq 0$$

segue che

$$\begin{aligned} \text{rank}[zI - A \ B] &= \text{rank} \begin{bmatrix} zI - A_{11} & -A_{12} & 0 \\ -A_{21} & zI - A_{22} & B_2 \end{bmatrix} \\ &= \text{rank}[zI - A_{11} \ A_{12}] + m \quad \forall z \in \mathbb{C} \end{aligned}$$

e ciò implica

$$\text{rank}[zI - A \ B] = n \Leftrightarrow \text{rank}[zI - A_{11} \ A_{12}] = n - m$$

e, per il test PBH, si conclude che  $(A, B)$  è controllabile se e solo se  $(A_{11}, A_{12})$  è controllabile.  $\square$

Usando quindi questa proposizione, assumendo che la coppia originale  $(A, B)$  sia controllabile, la coppia  $(A_{11}, A_{12})$  è controllabile e qualsiasi metodo lineare robusto di retroazione dallo stato può essere applicato per progettare  $M$ .

Si può facilmente verificare, tramite valutazioni dirette, che

$$A_{eq} \triangleq P_s A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ -MA_{11} & -MA_{12} \end{bmatrix} \quad (1.56)$$

e inoltre

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ -MA_{11} & -MA_{12} \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} I & 0 \\ -M & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11}^s & A_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ -M & I \end{bmatrix}^{-1} \quad (1.57)$$

Dalla proprietà di invarianza degli autovalori relativamente alla trasformazione di matrici simili, si ricava da queste ultime due equazioni che

$$\lambda(A_{eq}) = \lambda(A_{11}^s) \cup \{0\}^m$$

in accordo con l'analisi fatta in precedenza nella quale era stato stabilito che  $A_{eq}$  avesse almeno  $m$  autovalori nell'origine.

**Proposizione 1.3.5.** *I poli che governano la dinamica dello sliding motion sono gli zeri invarianti della terna  $(A, B, S)$*

*Dimostrazione.* Per definizione, gli zeri invarianti sono costituiti dall'insieme

$$\{z \in \mathbb{C} : P(z) \text{ cala di rango}\}$$

dove  $P(z)$  è la matrice

$$P(z) = \begin{bmatrix} zI - A & B \\ -S & 0 \end{bmatrix}$$

In questo caso  $(A, B, S)$  ha lo stesso numero di ingressi ed uscite, pertanto la matrice  $P(z)$  diminuisce di rango se e solo se il suo determinante è uguale a zero. Sostituendo al posto della terna i risultati delle equazioni (1.49), (1.50) si ottiene la seguente matrice

$$P(z) = \begin{bmatrix} zI - A_{11} & -A_{12} & 0 \\ -A_{21} & zI - A_{22} & B_2 \\ -S_1 & -S_2 & 0 \end{bmatrix}$$

Dal momento che  $B_2$  è non singolare per costruzione

$$\det P(z) = 0 \Leftrightarrow \det \begin{bmatrix} zI - A_{11} & -A_{12} \\ -S_1 & -S_2 \end{bmatrix} = 0$$

Anche  $S_2$  è una matrice non singolare e si può osservare direttamente che, per ogni valore di  $z \in \mathbb{C}$

$$\begin{bmatrix} zI - A_{11} & -A_{12} \\ -S_1 & -S_2 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} I & A_{12}S_2^{-1} \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} zI - A_{11}^s & 0 \\ 0 & -S_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ M & I \end{bmatrix}$$

Dal momento che la prima e l'ultima matrice del secondo membro di questa equivalenza sono indipendenti da  $z$  e hanno determinante unitario, allora

$$\det \begin{bmatrix} zI - A_{11} & -A_{12} \\ -S_1 & -S_2 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} zI - A_{11}^s & 0 \\ 0 & -S_2 \end{bmatrix} = \det(zI - A_{11}^s) \det(-S_2)$$

In conclusione, poichè come già visto  $S_2$  è non singolare

$$\det P(z) = 0 \Leftrightarrow \det(zI - A_{11}^s) = 0$$

Così gli zeri invarianti della terna  $(A, B, S)$  sono gli autovalori della matrice  $A_{11}^s$ , cioè i poli dello sliding motion, come volevasi dimostrare.  $\square$

Fino a questo momento sono stati introdotti in modo rigoroso per un sistema lineare ad ingressi multipli, i concetti di *sliding mode* e superficie di 'scivolamento'. La relazione esistente tra la superficie di scivolamento ed il rispettivo sliding motion è stata esaminata e una relazione esplicita è stata identificata come conveniente dal punto di vista della progettazione. Il concetto di *matching condition* è stato introdotto ed è stata sottolineata la proprietà importante secondo cui lo sliding motion risulta completamente insensibile alle incertezze che soddisfano la matching condition stessa.

## 1.4 Il problema della raggiungibilità

Nell'affrontare questo problema verrà prima considerato, essendo più semplice, il caso single-input

### 1.4.1 Caso single-input

Prima di descrivere la struttura di controllo è opportuno stabilire condizioni sufficienti che garantiscano l'aver luogo di uno sliding motion ideale. Intuitivamente, la superficie di sliding deve essere, almeno localmente, *attrattiva*, ovvero in un certo dominio prossimo alla superficie stessa, le traiettorie di  $s(t)$  devono essere dirette verso di essa.

Questo è espresso matematicamente da

$$s\dot{s} < 0 \quad (1.58)$$

in un certo dominio  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ . In questo caso la superficie di sliding sarà

$$\mathcal{D} = L \cap \Omega = \{x \in \Omega : s(x) = 0\}$$

L'espressione (1.58) è chiamata *condizione di raggiungibilità*. In generale, se la condizione di raggiungibilità è soddisfatta globalmente, ovvero  $\Omega = \mathbb{R}^n$ , allora dal momento che

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} s^2 = s\dot{s} \quad (1.59)$$

si ha che

$$V(s) = \frac{1}{2} s^2 \quad (1.60)$$

è una funzione di Lyapunov per lo stato  $s$ .

Questa osservazione si rivelerà utile quando verrà preso in considerazione il caso multi-input.

Sfortunatamente la condizione (1.58) non garantisce l'esistenza di uno sliding motion ideale per come è stato definito nella Definizione 1.1, ma essenzialmente garantisce semplicemente che la superficie di sliding venga raggiunta asintoticamente.

Come esempio, si consideri ancora una volta il doppio integratore  $\ddot{y}(t) = u(t)$  ma questa volta si utilizzi la legge di controllo in retroazione lineare dallo stato

$$u(t) = -(m + \Phi)\dot{y}(t) - \Phi my(t) \quad (1.61)$$

dove  $\Phi$  è uno scalare positivo di progetto. Si può dimostrare che con una legge di controllo di questo tipo il comportamento in catena chiusa del sistema risulta stabile con poli in  $\{-m, -\Phi\}$ . Inoltre risulta che

$$\dot{s} = -\Phi s \quad (1.62)$$

considerando che la switching function è nella forma  $s(y, \dot{y}) = my + \dot{y}$  con  $m > 0$ , l'equazione (1.62) implica

$$\dot{s}s = -\Phi s^2 < 0 \quad (1.63)$$

e quindi la condizione di raggiungibilità è soddisfatta. Tuttavia dall'equazione (1.62) segue anche che

$$s(t) = s(0)e^{-\Phi t} \quad (1.64)$$



e dunque, se  $s(0) \neq 0$ , ovvero se inizialmente lo stato non giace sulla superficie di sliding, allora  $s(t) \neq 0$  per ogni  $t > 0$  sebbene certamente  $s(t) \rightarrow 0$  per  $t \rightarrow \infty$ : la superficie di sliding è quindi raggiunta solo asintoticamente e non in tempo finito.

Una condizione più forte che garantisce una sliding motion ideale è quella, già accennata, di  $\eta$ -raggiungibilità e data da

$$\dot{s} \leq -\eta|s| \quad (1.65)$$

con  $\eta$  costante positiva piccola in modulo. Supponendo  $s(t) > 0$  nell'intervallo  $[0, t_s)$  segue che

$$\dot{s} \leq -\eta s \quad (1.66)$$

In cui è possibile semplificare  $s$  da ambo le parti senza problemi perchè essa è positiva nell'intervallo considerato. A questo punto, integrando da 0 a  $t_s$ , si ottiene

$$s(t_s) - s(0) \leq -\eta t_s \quad (1.67)$$

e in questo modo il tempo impiegato per raggiungere  $s = 0$ , rappresentato da  $t_s$ , soddisfa

$$t_s \leq \frac{s(0)}{\eta} \quad (1.68)$$

Lo stesso ragionamento si può fare nel caso in cui  $s(t) < 0$  nell'intervallo  $[0, t_s)$ , con i dovuti cambiamenti, ottenendo un risultato analogo.

La  $\eta$ -raggiungibilità è già stata incontrata nell'esempio relativo al doppio integratore quando lo si controllava con la legge di controllo

$$u(t) = -m\dot{y}(t) - \rho \operatorname{sgn}(s(t))$$

Era stato dimostrato che

$$\dot{s} = -\rho|s|$$

e quindi che la condizione di  $\eta$ -raggiungibilità era soddisfatta. Considerate le condizioni sufficienti per la raggiungibilità, si può ora passare alla sintesi delle leggi di controllo in grado di indurre uno sliding motion.

## 1.4.2 Strutture di Controllo

Le strutture di controllo più comunemente usate sono composte di due componenti: una è una componente lineare di retroazione dallo stato mentre l'altra è una componente discontinua o comunque non lineare. Si consideri un sistema di ordine  $n$  caratterizzato da una certa incertezza nei parametri o affetto da non-linearità. Il sistema è quindi rappresentabile come

$$\dot{x}(t) = (A + A_{per}(t))x(t) + bu(t) \quad (1.69)$$

dove la coppia  $(A, b)$  è controllabile e  $A_{per}(t)$  è una matrice tempo-variante, non completamente definita, che appartiene a  $\mathcal{I}(B)$  e rappresenta l'incertezza dovuta ai parametri o le non-linearità del sistema. Secondo appropriate coordinate è possibile riportare il sistema alla *forma canonica di controllo*, in cui le matrici  $A$  e  $b$  sono le seguenti

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & & 0 & 1 \\ -a_1 & -a_2 & \dots & \dots & -a_n \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (1.70)$$

Uno dei vantaggi di questa forma canonica è che il polinomio caratteristico è dato da

$$\lambda^n + a_n \lambda^{n-1} + \dots + a_2 \lambda + a_1$$

In questo modo la stabilità o meno della matrice  $A$  può essere determinata osservando gli elementi dell'ultima riga. La struttura espressa in (1.70) è simile alla struttura della forma normale, perciò il sottosistema  $(A_{11}, A_{12})$  dalla (1.49), che gioca un ruolo centrale in fase di progetto della switching function, è dato da

$$A_{11} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & 0 & 1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{bmatrix}, \quad A_{12} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (1.71)$$

Si può facilmente verificare che tale sottosistema è controllabile come predetto dalla Proposizione 1.3.4. Sia

$$M = [m_1 \dots m_{n-1}] \quad (1.72)$$

un vettore di ordine  $n - 1$ . La coppia  $(A_{11}, A_{12})$  è essa stessa un caso particolare di forma canonica di controllo. La matrice del sistema che governa lo sliding motion di ordine ridotto

$$A_{11}^s = A_{11} - A_{12}M \quad (1.73)$$

ha i coefficienti di  $M$  nella sua ultima riga. Quindi il polinomio caratteristico di  $A_{11}^s$  è dato da

$$\lambda^{n-1} + m_{n-1} \lambda^{n-2} + \dots + m_2 \lambda + m_1 \quad (1.74)$$

In questo modo, una volta constatato che i coefficienti  $m_1, \dots, m_{n-1}$  formano un polinomio di Hurwitz<sup>6</sup>, ne consegue che gli autovalori della matrice  $A_{11}^s$  sono stabili. Allora la funzione lineare

$$s(x) = \sum_{i=1}^{n-1} m_i x_i + x_n \quad (1.75)$$

---

<sup>6</sup>ovvero un polinomio le cui radici appartengono al semipiano sinistro del piano complesso

dove  $x_i$  rappresenta la  $i$ -esima componente del vettore di stato, rappresenta una switching function appropriata per garantire uno sliding motion ideale stabile. L'equazione (1.75) è effettivamente un caso particolare della forma generale presentata in (1.35) dove  $S = [M \ 1]$  e  $M$  è definita in (1.72). È importante notare che la trasformazione necessaria per portare il sistema in forma canonica di controllo non è quasi mai data da coordinate ortogonali. Così, a meno che il sistema non sia da principio scritto sotto la forma espressa in (1.70), non si dovrebbe considerare tale forma come un'appropriata forma normale per il progetto della switching function.

Dal momento che le incertezze del sistema si assume siano accoppiate, ipotizzando che la coppia  $(A, b)$  sia in forma canonica di controllo, l'equazione (1.69) può essere riscritta in modo più conveniente come

$$\dot{x}_i(t) = x_{i+1}(t) \quad \text{per } i = 1, \dots, n-1 \quad (1.76)$$

$$\dot{x}_n(t) = - \sum_{i=1}^n (a_i + \Delta_i(t))x_i(t) + u(t) \quad (1.77)$$

Si supponrà che, per ogni istante di tempo  $t$ , la perturbazione  $\Delta_i(t)$ , che modella le incertezze accoppiate, soddisfi

$$k_i^- < \Delta_i(t) < k_i^+ \quad \text{per } i = 1, 2, \dots, n \quad (1.78)$$

dove gli estremi sono scalari fissati e conosciuti.

Una legge di controllo comunemente usata è

$$u(t) = u_l(t) + u_n(t) \quad (1.79)$$

in cui  $u_l(t)$  è una legge di retroazione dello stato, spesso il controllo equivalente nominale, mentre  $u_n(t)$  è una componente discontinua. Facendo la derivata dell'equazione (1.75) si ottiene

$$\begin{aligned} \dot{s}(t) &= \sum_{i=1}^{n-1} m_i x_{i+1}(t) - \sum_{i=1}^n (a_i + \Delta_i(t))x_i(t) + u(t) \\ &= -a_1 x_1(t) + \sum_{i=2}^n (m_{i-1} - a_i)x_i(t) - \sum_{i=1}^n \Delta_i(t)x_i(t) + u(t) \end{aligned}$$

Qualora la componente lineare della legge di controllo sia scelta in modo che

$$u_l(t) \triangleq a_1 x_1(t) + \sum_{i=2}^n (a_i - m_{i-1})x_i(t) \quad (1.80)$$

allora sostituendola in (1.79) risulta

$$\dot{s}(t) = - \sum_{i=1}^n \Delta_i(t)x_i(t) + u_n(t) \quad (1.81)$$

Verranno ora analizzate due alternative. Innanzitutto si definisce una funzione scalare  $\rho(t, x)$  tale che

$$\rho(t, x) \geq \left| \sum_{i=1}^n \Delta_i(t) x_i \right| + \eta \quad \forall t, x \quad (1.82)$$

dove  $\eta$  è uno scalare positivo piccolo. Allora una potenziale espressione per il termine discontinuo per la legge di controllo è

$$u_n(t) = -\rho(t, x(t)) \operatorname{sgn}(s(t)) \quad (1.83)$$

Dalla (1.81) si ricava allora che

$$\dot{s}s = -s \left( \sum_{i=1}^n \Delta_i x_i - \rho(t, x) \right) |s| \leq |s| \left( \left| \sum_{i=1}^n \Delta_i x_i - \rho(t, x) \right| \right) < -\eta |s| \quad (1.84)$$

ed è quindi garantito uno sliding motion ideale in tempo finito, per la  $\eta$ -raggiungibilità.

In letteratura ci si riferisce alla struttura di controllo appena esaminata (1.83) come alla *struttura scaled relay*. Una scelta alternativa è quella di prendere

$$u_n(t) = \sum_{i=1}^n k_i x_i(t) - \eta \operatorname{sgn}(s(t)) \quad (1.85)$$

dove  $\eta$  è uno scalare positivo piccolo in modulo mentre i coefficienti  $k_i$  sono definiti nel modo seguente

$$k_i = \begin{cases} k_i^- & \text{se } s x_i > 0 \\ k_i^+ & \text{se } s x_i < 0 \end{cases} \quad (1.86)$$

Si può quindi stabilire che

$$\dot{s}s = \sum_{i=1}^n s x_i (k_i - \Delta_i) - \eta |s| \leq -\eta |s| \quad (1.87)$$

dal momento che per costruzione  $s(t) x_i(t) (k_i - \Delta_i(t)) \leq 0$  per  $i = 1, 2, \dots, n$ . Ancora una volta la condizione di  $\eta$ -raggiungibilità è stata stabilita e quindi è garantito uno sliding motion ideale in tempo finito. Si vuole infine sottolineare una cosa: la struttura lineare di controllo definita in (1.80) è di fatto il ‘controllo equivalente nominale’ dal momento che si può facilmente notare che

$$a_1 x_1(t) + \sum_{i=2}^n (a_i - m_{i-1}) x_i(t) = -(SB)^{-1} S A x(t)$$

### 1.4.3 Caso multi-input

Per iniziare a trattare la situazione di sistemi multivariabili è conveniente considerare tale problema come una serie di sottosistemi ad ingresso unico. Si tratta quindi di analizzare il controllo di un sistema incerto espresso da

$$\dot{x}(t) = (A + A_{per}(t))x(t) + Bu(t) \quad (1.88)$$

dove  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$  e  $A_{per}(t)$  rappresenta una qualsiasi incertezza o non-linearità che, come in precedenza, sono assunte essere accoppiate pertanto

$$A_{per}(t) = B\Delta(t) \quad (1.89)$$

in cui  $\Delta(t)$  è una qualche matrice tempo-variante. In precedenza la superficie  $\mathcal{S}$  era stata definita come lo spazio nullo della matrice  $S \in \mathbb{R}^{m \times n}$ . Una definizione alternativa, tuttavia equivalente, per la stessa superficie è

$$\mathcal{S} = \bigcap_{i=1}^m \mathcal{S}_i \quad (1.90)$$

dove la superficie

$$\mathcal{S}_i = \{x \in \mathbb{R}^n | S_i x = 0\} \quad (1.91)$$

e  $S_i \in \mathbb{R}^{1 \times n}$  è la  $i$ -esima riga della matrice  $S$ . Il cosiddetto *metodo di controllo gerarchico* cerca di usare la  $i$ -esima componente dell'azione di controllo per indurre uno sliding motion sulla superficie  $\mathcal{S}_i$  sotto l'ipotesi che le componenti di controllo  $u_1, \dots, u_{i-1}$  abbiano già indotto degli sliding motions su  $\mathcal{S}_1, \dots, \mathcal{S}_{i-1}$ . La prima componente del controllo è scelta per indurre uno sliding motion su  $\mathcal{S}_1$ , qualsiasi siano i valori delle altre componenti del segnale di controllo, considerando il sistema ad ingresso singolo

$$\dot{x}(t) = \tilde{A}(t)x(t) + [b_2 \ \dots \ b_m] \begin{bmatrix} u_2(t) \\ \vdots \\ u_m(t) \end{bmatrix} + b_1 u_1(t) \quad (1.92)$$

dove  $\tilde{A}(t) = A + A_{per}(t)$  e  $b_i$  rappresenta la  $i$ -esima colonna della matrice di distribuzione degli ingressi.

Una volta che su  $\mathcal{S}_1$  si sia stabilito uno scivolamento ideale, la dinamica di ordine ridotto è data da

$$\dot{x}(t) = \tilde{A}_{eq1}(t)x(t) + [b_3 \ \dots \ b_m] \begin{bmatrix} u_3(t) \\ \vdots \\ u_m(t) \end{bmatrix} + b_2 u_2(t) \quad (1.93)$$

dove  $\tilde{A}_{eq1}(t)$  rappresenta la dinamica equivalente ottenuta assumendo che abbia luogo lo sliding su  $\mathcal{S}_1$ . La seconda componente dell'ingresso di controllo è quindi progettata per indurre uno

sliding motion su  $\mathcal{S}_2$  considerando l'equazione (1.93) come l'equazione di un sistema ad ingresso singolo in  $u_2$ . Poichè si è assunto che su  $\mathcal{S}_1$  avviene uno sliding motion a prescindere dagli altri segnali di controllo, segue che lo sliding motion ha luogo anche in  $\mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2$ . Usando un metodo induttivo, si può affermare che lo scivolamento del sistema globale avviene definitivamente su  $\mathcal{S} = \bigcap_{i=1}^m \mathcal{S}_i$ .

Sebbene questo tipo di approccio sia concettualmente attraente, soffre di alcune difficoltà di messa in pratica che non possono essere ignorate. Come si intuisce facilmente, il problema principale è la dipendenza dall'ordine in cui gli scivolamenti vengono indotti sulle superfici  $\mathcal{S}_1, \dots, \mathcal{S}_m$ ; in generale non ci sono garanzie che inizialmente lo scivolamento avvenga proprio sulla superficie  $\mathcal{S}_1$ . In letteratura ci si riferisce a questo metodo come *fixed – order approach*.

Un metodo più pratico è quello chiamato *approccio con diagonalizzazione*. È stato già richiamato che, affinché possa esistere un unico controllo equivalente, la matrice  $S$  debba essere scelta in modo che  $\det(SB) \neq 0$ ; in aggiunta è stato dimostrato che lo sliding motion sia invariante nei confronti di cambiamenti di base, tramite matrici non singolari, della switching function. Come risultato si può assumere che, da progetto

$$SB = \Lambda \quad (1.94)$$

in cui  $\Lambda \in \mathbb{R}^{m \times m}$  è una matrice diagonale avente rango pieno. Come nel caso di ingresso singolo prima analizzato, si assume che il segnale di controllo abbia la forma

$$u(t) = -(SB)^{-1}SAx(t) + u_n(t) \quad (1.95)$$

in cui  $u_n(t)$  rappresenta la componente di controllo discontinua. Partendo dall'equazione (1.88), pre-moltiplicando per la matrice  $S$  e sostituendo la legge di controllo (1.95) si ottiene

$$\dot{s}(t) = \Lambda u_n(t) + \Lambda \Delta(t)x(t) \quad (1.96)$$

Se la componente  $u_n$  è scelta in modo che la sua  $i$ -esima componente dipenda esclusivamente dalla sola componente  $i$ -esima della switching function  $s_i(t)$ , allora l'equazione (1.96) può essere interpretata come un sistema di (almeno)  $m$  equazioni linearmente indipendenti

$$\dot{s}_i(t) = \Lambda_i((u_n)_i(t) + \Delta_i(t)x(t)) \quad \text{per } i = 1, 2, \dots, m \quad (1.97)$$

in cui  $\Delta_i(t)$  è la  $i$ -esima riga di  $\Delta(t)$  e  $\Lambda_i$  è l' $i$ -esimo elemento sulla diagonale di  $\Lambda$ . In questo modo, se ad esempio consideriamo

$$(u_n)_i(t) = -\rho_i(x(t), t) \operatorname{sgn}(s_i(t)) \quad (1.98)$$

con

$$\rho_i(t, x) > |\Delta_i(t)x| \quad (1.99)$$

allora, grazie alle considerazioni fatte precedentemente, si conclude che uno sliding motion ideale sarà indotto per ognuna delle equazioni (1.97). Questo approccio riconduce il progetto di controllori multivariabili a quello di  $m$  problemi single input. Il vantaggio di questo metodo appena esposto nei confronti dell'approccio gerarchico è che non bisogna definire a priori l'ordine in cui avvengono gli sliding motion sulle superfici. Comunque, in entrambi i casi, il cambio di struttura del controllore avviene in punti dello spazio diversi da quelli che costituiscono  $\mathcal{S}$ , ogni volta che la traiettoria del sistema a catena chiusa attraversa una qualsiasi delle superfici  $\mathcal{S}_1, \dots, \mathcal{S}_m$ . In una situazione pratica questo risultato provoca un'eccessiva usura dell'attuatore che potrebbe essere in alcuni casi considerata non accettabile. Da questo punto di vista converrebbe utilizzare una struttura di controllo che cambia solamente nelle vicinanze di  $\mathcal{S}$ .

## 1.5 Metodo del Vettore Unico

Si consideri il sistema

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + f_u(t, x(t)) + f_m(t, x(t), u(t)) \quad (1.100)$$

dove le funzioni  $f_u : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow (\mathcal{I}(B))^\perp$  e  $f_m : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathcal{I}(B)$  sono sconosciute ma limitate e soddisfano le seguenti relazioni

$$\|f_u(t, x(t))\| \leq k_1 \|x(t)\| + k_2 \quad (1.101)$$

$$\|f_m(t, x(t), u(t))\| \leq k_3 \|u(t)\| + \alpha(t, x(t)) \quad (1.102)$$

dove  $k_1, k_2, k_3 \geq 0$  sono costanti conosciute e vale<sup>7</sup>

$$k_3 < \sqrt{\lambda_{\min}(B^T B)} \quad (1.103)$$

e dove  $\alpha(\cdot)$  è una funzione nota a priori. Per le definizioni date, le funzioni  $f_u(\cdot)$  e  $f_m(\cdot)$  rappresentano, rispettivamente, le componenti delle incertezze accoppiate e disaccoppiate. Senza perdita di generalità si può assumere che il sistema (1.100) sia già in forma normale e quindi

$$\dot{x}_1(t) = A_{11}x_1(t) + A_{12}x_2(t) + \bar{f}_u(t, x(t)) \quad (1.104)$$

$$\dot{x}_2(t) = A_{21}x_1(t) + A_{22}x_2(t) + B_2u(t) + \bar{f}_m(t, x(t), u(t)) \quad (1.105)$$

dove  $\bar{f}_u(\cdot)$  e  $\bar{f}_m(\cdot)$  sono le proiezioni delle funzioni  $f_u(\cdot)$  e  $f_m(\cdot)$  nelle coordinate rispettivamente dei sottospazi  $\mathcal{N}(S)$  e  $\mathcal{I}(B)$ , cosa possibile dal momento che  $\mathcal{N}(S) \oplus \mathcal{I}(B) = \mathbb{R}^n$ . Si può assumere che la trasformazione usata per ottenere la forma normale sia ortogonale. Quindi si preserva la norma Euclidea, la quale implica le disequazioni

$$\|\bar{f}_u(t, x(t))\| \leq k_1 \|x(t)\| + k_2 \quad (1.106)$$

$$\|\bar{f}_m(t, x(t), u(t))\| \leq k_3 \|u(t)\| + \alpha(t, x(t)) \quad (1.107)$$

---

<sup>7</sup> $\lambda_{\min}(A)$  indica il più piccolo autovalore della matrice  $A$ .

e  $B^T B = B_2^T B_2$ . Di conseguenza<sup>8</sup>

$$\sqrt{\lambda_{\min}(B^T B)} = \underline{\sigma}(B_2) \quad (1.108)$$

e inoltre<sup>9</sup>

$$\underline{\sigma}(B_2) = (\bar{\sigma}(B_2^{-1}))^{-1} = \|B_2^{-1}\|^{-1} \quad (1.109)$$

La prima uguaglianza deriva dalla proprietà dei valori singolari mentre la seconda dalla definizione di norma spettrale. Dalle equazioni (1.108) e (1.109) si ricava

$$k_3 \|B_2^{-1}\| < 1 \quad (1.110)$$

Nelle usuali notazioni la switching function si può esprimere in questo modo

$$s(t) = S_2 M x_1(t) + S_2 x_2(t) \quad (1.111)$$

dove  $M \in \mathbb{R}^{m \times (n-m)}$  è stata scelta secondo alcuni criteri di progetto per stabilizzare la coppia  $(A_{11}, A_{12})$ . La scelta di  $S_2 \in \mathbb{R}^{m \times m}$  è arbitraria ma in questo caso conviene sceglierla in modo che risulti

$$S_2 B_2 = \Lambda \quad (1.112)$$

dove  $\Lambda$  è una matrice diagonale e non singolare che permette di soddisfare

$$k_3 \kappa(\Lambda) \|B_2^{-1}\| < 1 \quad (1.113)$$

in cui  $\kappa(\Lambda)$  rappresenta il numero di condizionamento spettrale<sup>10</sup>. Questo è sempre possibile dal momento che, per esempio, se  $\Lambda$  è una matrice identità allora  $\kappa(\Lambda) = 1$  e l'equazione precedente si riconduce al caso (1.110), che è valido per assunzione.

Si definisca un cambio di coordinate lineare dato dalla matrice

$$T_s \triangleq \begin{bmatrix} I & 0 \\ S_1 & S_2 \end{bmatrix} \quad (1.114)$$

non singolare dal momento che  $S_2$  è non singolare. Se si definiscono le nuove coordinate come

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ s \end{bmatrix} = T_s \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (1.115)$$

Allora, poichè  $x_2(t) = S_2^{-1} s(t) - M x_1(t)$ , si ottiene

$$\dot{x}_1(t) = \bar{A}_{11} x_1(t) + A_{12} S_2^{-1} s(t) + \bar{f}_u(t, x(t)) \quad (1.116)$$

$$\dot{s}(t) = S_2 \bar{A}_{21} x_1(t) + S_2 \bar{A}_{22} S_2^{-1} s(t) + \Lambda u(t) + S_2 \bar{f}_m(t, x(t), u(t)) + S_1 \bar{f}_u(t, x(t)) \quad (1.117)$$

<sup>8</sup> $\underline{\sigma}(A)$  rappresenta il valore dell'elemento minimo della matrice  $A$ .

<sup>9</sup> $\bar{\sigma}(A)$  rappresenta il valore dell'elemento massimo della matrice  $A$ .

<sup>10</sup>Data una matrice simmetrica e non singolare  $A$ , il condizionamento spettrale  $\kappa(A)$  è definito in questo modo:  $\kappa(A) = \|A\|_2 \cdot \|A^{-1}\|_2 = \frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}}$  in cui la norma 2 è così definita:  $\|A\|_2 = \sqrt{\lambda_{\max}(A^T A)}$



dove

$$\begin{aligned}\bar{A}_{11} &= A_{11} - A_{12}M \\ \bar{A}_{21} &= M\bar{A}_{11} + A_{21} - A_{22}M \\ \bar{A}_{22} &= MA_{12} + A_{22}\end{aligned}$$

Ora si propone una legge di controllo che è composta da due componenti, una lineare per stabilizzare il sistema nominale e una discontinua, cioè

$$u(t) = u_l(t) + u_n(t) \quad (1.118)$$

dove la componente lineare è data da

$$u_l(t) = \Lambda^{-1}(-S_2\bar{A}_{21}x_1(t) - (S_2\bar{A}_{22}S_2^{-1} - \Phi)s(t)) \quad (1.119)$$

in cui  $\Phi \in \mathbb{R}^{m \times m}$  è una matrice di progetto stabile qualsiasi. La componente discontinua invece è definita come

$$u_n(t) = -\rho(t, x(t))\Lambda^{-1} \frac{P_2 s(t)}{\|P_2 s(t)\|} \quad \text{per } s(t) \neq 0 \quad (1.120)$$

dove  $P_2 \in \mathbb{R}^{m \times m}$  è una matrice simmetrica, definita positiva, che soddisfa l'equazione di Lyapunov

$$P_2\Phi + \Phi^T P_2 = -I \quad (1.121)$$

e la funzione scalare  $\rho(t, x)$ , che dipende esclusivamente dalla grandezza dell'incertezza, è una qualsiasi funzione che soddisfa

$$\rho(t, x(t)) \geq \frac{\|S_2\|(\|M\|(k_1\|x(t)\| + k_2) + k_3\|u_l(t)\| + \alpha(t, x(t))) + \gamma_2}{(1 - k_3\kappa(\Lambda))\|B_2^{-1}\|} \quad (1.122)$$

dove  $\gamma_2 > 0$  è un parametro progettuale. Si vuole sottolineare, confrontando questo approccio con quelli della sezione precedente, che la componente non-lineare del metodo del vettore unico presenta al suo interno

$$\frac{P_2 s(t)}{\|P_2 s(t)\|} = \text{sgn}(s(t)) \quad (s(t) \neq 0)$$

e quindi la struttura di controllo considerata in (1.120) diventa una struttura scaled relay come descritto nell'equazione (1.83).

### 1.5.1 Esistenza e descrizione di uno sliding mode ideale

Sostituendo le equazioni da (1.118) a (1.120) in (1.117) e semplificando, si ottiene il seguente sistema

$$\dot{x}_1(t) = \bar{A}_{11}x_1(t) + A_{12}S_2^{-1}s(t) + \bar{f}_u(t, x(t)) \quad (1.123)$$

$$\dot{s}(t) = \Phi s(t) - \rho(t, x(t)) \frac{P_2 s(t)}{\|P_2 s(t)\|} + S_2\bar{f}_m(t, x(t), u(t)) + S_1\bar{f}_u(t, x(t)) \quad (1.124)$$

Scegliendo come funzione di Lyapunov  $V(s) = s^T P_2 s$  e derivando, si può verificare che

$$\begin{aligned} \dot{V}(s) &\leq -\|s\|^2 - 2\rho(t, x)\|P_2 s\| + 2s^T P_2 S_2 (\bar{f}_m(t, x, u) + M\bar{f}_u(t, x)) \\ &\leq -\|s\|^2 - 2\|P_2 s\|(\rho(t, x) - \|S_2\|(\|\bar{f}_m\| + \|M\| \cdot \|\bar{f}_u\|)) \end{aligned} \quad (1.125)$$

dove si è sfruttato il fatto che  $s^T P_2 P_2 s = \|P_2 s\|^2$  per stabilire la prima disuguaglianza. Poichè  $S_2 = \Lambda B_2^{-1}$ , risulta che  $\|S_2\| < \|B_2\| \cdot \|\Lambda\|$ . Riarrangiando ora l'equazione (1.122) si ricava

$$\rho(t, x) \geq \|S_2\|(\|M\|(k_1\|x\| + k_2) + k_3(\|u_l\| + \|\Lambda^{-1}\|\rho(t)) + \alpha(t, x)) + \gamma_2 \quad (1.126)$$

Usando la definizione data per la componente di controllo discontinua si ottiene

$$\|u_n(t)\| \leq \rho(t, x(t))\|\Lambda^{-1}\| \quad (1.127)$$

e quindi risulta per la definizione della legge di controllo, con l'ausilio della disuguaglianza triangolare

$$\|u(t)\| \leq \rho(t, x)\|\Lambda^{-1}\| + \|u_l(t)\| \quad (1.128)$$

Sfruttando ora le disuguaglianze relative alla legge di controllo e alla sua componente discontinua, e i limiti legati alle incertezze dati in (1.101) e (1.102) segue che

$$\begin{aligned} \rho(t, x) &\geq \|S_2\|(\|M\|(k_1\|x\| + k_2) + k_3\|u(t)\| + \alpha(t, x)) + \gamma_2 \\ &\geq \|S_2\|(\|M\| \cdot \|\bar{f}_u\| + \|\bar{f}_m\|) + \gamma_2 \end{aligned} \quad (1.129)$$

Combinando le disequazioni (1.125) e (1.129) si ottiene che la derivata della funzione di Lyapunov soddisfa

$$\dot{V}(s) \leq -\|s\|^2 - 2\gamma_2\|P_2 s\| \quad (1.130)$$

Questa disuguaglianza verrà appunto usata per dimostrare che lo scivolamento sulla superficie  $\mathcal{S}$  avviene in tempo finito. Dal principio di Rayleigh<sup>11</sup>

$$\|P_2 s\|^2 = (P_2^{1/2} s)^T P_2 (P_2^{1/2} s) \geq \lambda_{\min}(P_2)\|P_2^{1/2} s\|^2 = \lambda_{\min}(P_2)V(s) \quad (1.131)$$

che, insieme alla (1.130), implica

$$\dot{V} \leq -2\gamma_2\sqrt{\lambda_{\min}(P_2)}\sqrt{V} \quad (1.132)$$

A questo punto si può ricavare il tempo necessario per raggiungere la superficie di sliding e dato da  $t_s$ . Infatti la (1.132) può essere riscritta come

$$\frac{\dot{V}}{2\sqrt{V}} \leq -\gamma_2\sqrt{\lambda_{\min}(P_2)} \quad (1.133)$$

<sup>11</sup>Data la matrice simmetrica  $Q$ , il principio di Rayleigh per la forma quadratica  $x^T Q x$  afferma:  $\lambda_{\min}(Q)\|x\|^2 \leq x^T Q x \leq \lambda_{\max}(Q)\|x\|^2$ .

e integrando da 0 a  $t_s$  si ha

$$\int_0^{t_s} \frac{\dot{V}}{2\sqrt{V}} dt = \sqrt{V(s(t_s))} - \sqrt{V(s(0))} \leq \int_0^{t_s} -\gamma_2 \sqrt{\lambda_{\min}(P_2)} dt = -\gamma_2 \sqrt{\lambda_{\min}(P_2)} t_s \quad (1.134)$$

ed essendo  $V(s) > 0$ ,  $\dot{V}(s) \leq 0$  vale

$$\sqrt{V(s(0))} - \sqrt{V(s(t_s))} \leq \sqrt{V(s(0))}$$

Si ottiene quindi che  $t_s$  soddisfa la seguente relazione

$$t_s \leq \gamma_2^{-1} \sqrt{\frac{V(s_0)}{\lambda_{\min}(P_2)}} \quad (1.135)$$

dove  $s_0$  rappresenta il valore iniziale di  $s(t)$  quando  $t = 0$ . È stata quindi trovata una funzione di Lyapunov che dipende dagli stati della switching function e che soddisfa la (1.132), una naturale estensione della  $\eta$ -raggiungibilità.

Sostituendo  $s(t) = 0$  nell'equazione (1.124) si ottiene l'equazione che rappresenta lo sliding motion quando gli stati del sistema sono confinati sulla superficie  $\mathcal{S}$ , cioè

$$\dot{x}_1(t) = \bar{A}_{11}x_1(t) + \bar{f}_u(t, x(t)) \quad (1.136)$$

Sia  $P_1 \in \mathbb{R}^{(n-m) \times (n-m)}$  l'unica matrice simmetrica e definita positiva, soluzione dell'equazione di Lyapunov

$$P_1 \bar{A}_{11} + \bar{A}_{11}^T P_1 = -Q_1 \quad (1.137)$$

dove  $Q_1 \in \mathbb{R}^{(n-m) \times (n-m)}$  è una matrice simmetrica definita positiva. Sia inoltre  $V(x_1) = x_1^T P_1 x_1$  una funzione quadratica di Lyapunov candidata per il sistema (1.136). La derivata della funzione lungo le traiettorie del sistema è

$$\begin{aligned} \dot{V}(x_1) &= -x_1^T Q_1 x_1 + 2x_1^T P_1 \bar{f}_u(t, x) \\ &\leq -x_1^T Q_1 x_1 + 2\|P_1 x_1\| \cdot \|\bar{f}_u\| \\ &\leq -\lambda_{\min}(Q_1)\|x_1\|^2 + 2\lambda_{\max}(P_1)\|x_1\| \cdot \|\bar{f}_u\| \\ &= -\|x_1\| \lambda_{\max}(P_1) (\mu \|x_1\| - 2\|\bar{f}_u\|) \end{aligned}$$

in cui si è definito  $\mu \triangleq \frac{\lambda_{\min}(Q_1)}{\lambda_{\max}(P_1)}$ . Quindi, se

$$\|\bar{f}_u(t, x)\| < \frac{1}{2}\mu \|x_1\| \quad (1.138)$$

allora  $\dot{V}(x_1) < 0$  e il sistema (1.136) è stabile. La scelta ottimale per massimizzare il valore dello scalare  $\mu$  è di imporre  $Q_1 = I$ , il che implica

$$\hat{\mu} = \frac{1}{\lambda_{\max}(P_1)} \leq -2\max[\text{Re}\lambda(\bar{A}_{11})]$$

L'espressione (1.138) non è soddisfatta a meno che  $k_2 = 0$ . In tale situazione il meglio che si può garantire è che lo stato  $x_1$  sia definitivamente limitato. La limitatezza definitiva assicura che, in tempo finito, la soluzione entri in un insieme  $\mathcal{E}$  (di solito un accettabile piccolo intorno dell'origine) e ivi rimanga per tutto il tempo successivo.

Durante lo sliding motion  $x_2 = -M_1 x_1$  e quindi  $\|x\| \leq (\sqrt{1 + \|M\|^2})x_2$ . Di conseguenza, il limite per le incertezze non accoppiate in (1.101) può essere scritto come

$$\|\bar{f}_u(t, x)\| < \bar{k}_1 \|x_1\| + k_2 \quad (1.139)$$

dove  $\bar{k}_1 = k_1 \sqrt{1 + \|M\|^2}$ . Allora, argomentando come in precedenza e assumendo  $\hat{\mu} > 2\bar{k}_1$ , segue

$$\begin{aligned} \dot{V}(x_1) &\leq -\|x_1\| \lambda_{max}(P_1) (\hat{\mu} \|x_1\| - 2\|\bar{f}_u\|) \\ &\leq -\|x_1\| \lambda_{max}(P_1) (\hat{\mu} \|x_1\| - 2\bar{k}_1 \|x_1\| - 2k_2) \end{aligned}$$

e di conseguenza  $\dot{V}(x_1) < 0$  se  $x_1 \in \mathcal{E}_1$ , dove

$$\mathcal{E}_1 = \{x_1 \in \mathbb{R}^{n-m} : \|x_1\| < 2k_2 / (\hat{\mu} - 2\bar{k}_1) + \varepsilon\} \quad (1.140)$$

per un qualche piccolo scalare  $\varepsilon > 0$ .

Quindi gli stati  $x_1(t)$  sono definitivamente limitati in relazione alla sfera  $\mathcal{E}_1$ .

# Capitolo 2

## Progetto della superficie di sliding

Si è stabilito, grazie allo studio presentato nel capitolo precedente, che il problema di progettare la superficie di sliding può essere interpretato come il problema di progettare una retroazione statica dallo stato per un particolare sottosistema. Questo capitolo considererà inizialmente lo sviluppo di un metodo appropriato alla risoluzione di questo problema e basato sulla teoria del controllo ottimo.

Un altro aspetto che verrà preso in considerazione è quello di come inserire un segnale di riferimento nel progetto di uno sliding mode. Questa richiesta non è affatto banale in quanto è stato dimostrato che, durante lo scivolamento, il sistema è completamente insensibile ad ogni segnale che soddisfa la matching condition; si vedrà quindi come poter realizzare uno schema che permetta di inserire un segnale di riferimento in modo che esso non venga scartato dal sistema. Verranno considerati due metodi: il primo approccio sarà di tipo *model – reference* e il secondo ad *azione integrale*.

### 2.1 Richiami sulla forma normale

Nel capitolo precedente è stato mostrato come una particolare forma canonica, che è stata chiamata forma normale, sia particolarmente adatta per lo studio della dinamica di ordine ridotto di uno sliding mode.

Si consideri il modello lineare nominale

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (2.1)$$

in cui  $\text{rank}(B) = m$  e  $(A, B)$  è una coppia controllabile. La switching function associata a tale sistema è così definita

$$s(t) = Sx(t) \quad (2.2)$$

Il sistema, riscritto in forma normale tramite un cambiamento di base, ha le seguente struttura

$$\dot{z}_1(t) = A_{11}z_1(t) + A_{12}z_2(t) \quad (2.3)$$

$$\dot{z}_2(t) = A_{21}z_1(t) + A_{22}z_2(t) + B_2u(t) \quad (2.4)$$

mentre la switching function risulta

$$s(t) = S_1z_1(t) + S_2z_2(t) \quad (2.5)$$

Il cambio di coordinate è definito dalla matrice ortogonale  $T_r$  in modo che

$$z(t) = T_r x(t) \quad (2.6)$$

Le matrici dei sotto-blocchi di (2.3) e (2.4) possono essere ottenute in termini della coppia originale  $(A, B)$

$$T_r A T_r^T = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \quad T_r B = \begin{bmatrix} 0 \\ B_2 \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

allo stesso modo, gli elementi della switching function (2.5) soddisfano

$$S T_r^T = [S_1 \ S_2] \quad (2.8)$$

Durante lo sliding motion la switching function  $s(t)$  è identicamente uguale a zero. L'equazione (2.5) allora comporta

$$S_1z_1(t) + S_2z_2(t) = 0 \quad (2.9)$$

A questo punto è importante far notare che si sta analizzando una tecnica di progetto per la switching function; quindi è ragionevole assumere a priori che  $S$  sia tale per cui il prodotto  $SB$  è non singolare. Questo implica che  $S_2$  sia non singolare.

Fatta questa doverosa precisazione, è possibile ri-arrangiare l'equazione appena scritta ed esprimerla come

$$\begin{aligned} z_2(t) &= -S_2^{-1}S_1z_1(t) \\ &= -Mz_1(t) \end{aligned} \quad (2.10)$$

in cui  $M \in \mathbb{R}^{m \times (n-m)}$  è così definita

$$M = S_2^{-1}S_1 \quad (2.11)$$

Lo sliding mode è determinato dalle equazioni (2.3) e (2.10)

$$\dot{z}_1(t) = A_{11}z_1(t) + A_{12}z_2(t) \quad (2.12)$$

$$\dot{z}_2(t) = -Mz_1(t) \quad (2.13)$$

Queste equazioni rappresentano un sistema di ordine  $(n - m)$  in cui  $z_2$  assume il ruolo di un segnale di controllo ottenuto come retroazione lineare dallo stato. Sostituendo quindi (2.13) in (2.12) si ottiene

$$\dot{z}_1(t) = (A_{11} - A_{12}M)z_1(t) \quad (2.14)$$

Per assicurare una dinamica asintoticamente stabile durante lo sliding è necessario determinare  $M$  in modo che gli  $(n - m)$  poli di (2.14) abbiano parte reale negativa. Questo problema può essere risolto utilizzando una qualunque tra le procedure standard di controllo in retroazione di un sistema lineare; il metodo che viene preso in considerazione in questo capitolo è quello del controllo ottimo.

Un ulteriore aspetto che merita di essere sottolineato è che, a prescindere dal metodo che si sceglie di utilizzare, la determinazione della matrice  $M$  non risolve univocamente il problema della scelta di  $S$  in quanto ci sono  $m^2$  gradi di libertà nella relazione

$$S_2M = S_1 \quad (2.15)$$

Per risolvere tale grado di libertà, è stata fatta la scelta  $S_2 = I_m$  ottenendo così

$$ST_r^T = [M \ I_m] \quad (2.16)$$

Questa scelta risponde all'esigenza di minimizzare i processi di calcolo (e quindi la possibilità di errori numerici) nell'ottenere  $S$  da  $M$ .

## 2.2 Metodo del controllo ottimo

Il metodo prende in considerazione lo sviluppo dell'iperpiano di sliding tramite la minimizzazione di un funzionale di costo in cui la funzione integranda è quadratica in termini dello stato. Il funzionale di costo quadratico che si vuole minimizzare è il seguente

$$J = \frac{1}{2} \int_{t_s}^{\infty} x(t)^T Q x(t) dt \quad (2.17)$$

dove, con le notazioni tipiche della teoria del controllo ottimo,  $Q$  è una matrice simmetrica e definita positiva mentre  $t_s$  è l'istante temporale in cui inizia lo sliding. Si supponga nota la condizione iniziale  $x(t_s)$  ovvero lo stato del sistema al tempo  $t_s$  e si supponga che sia tale per cui  $x(t) \rightarrow 0$  se  $t \rightarrow \infty$ . A questo punto un cambio di base per la matrice  $Q$  permette un partizionamento compatibile con le coordinate  $z$ :

$$T_r Q T_r^T = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{21} & Q_{22} \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

con  $Q_{21} = Q_{12}^T$ . L'equazione (2.17) può così essere scritta in termini delle coordinate  $z$

$$J = \frac{1}{2} \int_{t_s}^{\infty} (z_1^T Q_{11} z_1 + 2z_1^T Q_{12} z_2 + z_2^T Q_{22} z_2) dt \quad (2.19)$$

Per risolvere il problema di minimizzazione, sarebbe auspicabile riuscire a porre l'indice nella forma standard, in cui cioè  $z_1$  determina la dinamica dello stato del sistema per uno sliding mode ideale, mentre  $z_2$  ha il ruolo dell'effettivo ingresso di controllo. Per raggiungere questo obiettivo è dunque necessario eliminare il termine misto  $2z_1^T Q_{12} z_2$  dall'equazione. Concentrandosi sugli ultimi due addendi di (2.19) si può notare che

$$2z_1^T Q_{12} z_2 + z_2^T Q_{22} z_2 = (z_2 + Q_{22}^{-1} Q_{21} z_1)^T Q_{22} (z_2 + Q_{22}^{-1} Q_{21} z_1) - z_1^T Q_{21}^T Q_{22}^{-1} Q_{21} z_1 \quad (2.20)$$

L'indice  $J$  (2.19) si riscrive quindi in questo modo

$$J = \frac{1}{2} \int_{t_s}^{\infty} z_1^T (Q_{11} - Q_{12} Q_{22}^{-1} Q_{21}) z_1 + (z_2 + Q_{22}^{-1} Q_{21} z_1)^T Q_{22} (z_2 + Q_{22}^{-1} Q_{21} z_1) dt \quad (2.21)$$

Definendo

$$\hat{Q} = Q_{11} - Q_{12} Q_{22}^{-1} Q_{21} \quad (2.22)$$

$$v = z_2 + Q_{22}^{-1} Q_{21} z_1 \quad (2.23)$$

L'indice  $J$  può così essere scritto nella forma più compatta

$$J = \frac{1}{2} \int_{t_s}^{\infty} z_1^T \hat{Q} z_1 + v^T Q_{22} v dt \quad (2.24)$$

Il sistema nelle originali coordinate  $z$  è

$$\dot{z}_1(t) = A_{11} z_1(t) + A_{12} z_2(t) \quad (2.25)$$

ed eliminando il contributo di  $z_2$  grazie alla (2.23) si ottiene l'espressione del sistema modificato

$$\dot{z}_1(t) = \hat{A} z_1(t) + A_{12} v(t) \quad (2.26)$$

in cui

$$\hat{A} = A_{11} - A_{12} Q_{22}^{-1} Q_{21} \quad (2.27)$$

Il problema è quindi diventato quello di minimizzare il funzionale (2.24) rispetto al sistema (2.26) ed è espresso nella forma standard del controllo ottimo. Prima di scrivere la soluzione in maniera esplicita sono però necessarie alcune precisazioni; innanzitutto si fa notare che, essendo  $Q$  definita positiva per ipotesi, anche  $Q_{22}$  è definita positiva e quindi è assicurata l'esistenza di  $Q_{22}^{-1}$  e di conseguenza anche quella di  $\hat{Q} > 0$ . Inoltre la controllabilità di  $(A, B)$  in (2.1) assicura la controllabilità di  $(A_{11}, A_{12})$  che, per la proposizione 1.3.4, è una condizione sufficiente per la controllabilità di  $(\hat{A}, A_{12})$ . Grazie a ciò si può concludere che l'equazione algebrica di Riccati, associata al problema definito da (2.24) e (2.26), ha un'unica soluzione definita positiva  $P_1$

$$P_1 \hat{A} + \hat{A}^T P_1 - P_1 A_{12} Q_{22}^{-1} A_{12}^T P_1 + \hat{Q} = 0 \quad (2.28)$$



L'ingresso ottimo  $v$  che minimizza (2.24) è dato da

$$v = -Q_{22}^{-1}A_{12}^T P_1 z_1 \quad (2.29)$$

Sostituendo questa espressione in (2.23) si ottiene

$$z_2 = -Q_{22}^{-1}(A_{12}^T P_1 + Q_{21})z_1 \quad (2.30)$$

e finalmente, l'espressione per la matrice  $M$

$$M = Q_{22}^{-1}(A_{12}^T P_1 + Q_{21}) \quad (2.31)$$

## 2.3 Il problema del tracking

Fino ad ora sono stati presi in considerazione solo problemi di regolazione, in cui si è cercato di capire come poter portare a zero lo stato del sistema. Ci si concentra ora sulla possibilità di inserire una richiesta di tracking ovvero di inseguimento di un segnale di riferimento. Va richiamato ancora una volta quanto dimostrato nel primo capitolo, e cioè che ogni segnale che soddisfa l'ipotesi di matching condition viene compensato dall'ingresso equivalente; includere un segnale di riferimento non è quindi un'operazione banale in quanto ci si deve assicurare che il comando di tracking non venga interamente o parzialmente 'rifiutato' dal sistema.

### 2.3.1 Metodo Model-Reference

L'obiettivo di questo metodo è quello di sviluppare uno schema di controllo che forzi la dinamica del sistema 'reale' a seguire quella di un modello ideale. Il controllore dovrebbe così far tendere a zero l'errore tra lo stato del sistema reale e quello del modello ideale, al tendere all'infinito del tempo in modo da assicurare una fedele corrispondenza tra l'uscita del modello e quella del sistema.

Il sistema lineare tempo-invariante sia definito con le usuali notazioni

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (2.32)$$

mentre il modello ideale di riferimento sia il seguente

$$\dot{w}(t) = A_m w(t) + B_m r(t) \quad (2.33)$$

in cui  $x \in \mathbb{R}^n$  e  $w \in \mathbb{R}^n$  sono il vettore di stato del sistema e del modello rispettivamente;  $u \in \mathbb{R}^m$  è l'ingresso di controllo,  $r \in \mathbb{R}^r$  è il vettore di ingresso del modello e infine  $A, B, A_m$  e  $B_m$  sono matrici di dimensioni compatibili. Si assume per ipotesi che la coppia  $(A, B)$  sia controllabile e che il modello ideale sia stabile, ovvero che gli autovalori di  $A_m$  abbiano parte

reale negativa.

Si definisce l'errore di tracking  $e$  come la differenza tra lo stato del sistema e quello del modello

$$e(t) = x(t) - w(t) \quad (2.34)$$

L'obiettivo è quello di far tendere asintoticamente a zero questo errore. Differenziando rispetto al tempo, si ottiene

$$\dot{e}(t) = \dot{x}(t) - \dot{w}(t) \quad (2.35)$$

La dinamica dell'errore può ora essere determinata direttamente dalle equazioni (2.32) e (2.33)

$$\dot{e}(t) = Ax(t) - A_m w(t) + Bu(t) - B_m r(t) \quad (2.36)$$

Manipolando questa equazione, ovvero aggiungendo e poi togliendo il termine  $Aw$ , si ottiene

$$\dot{e}(t) = Ae(t) + (A - A_m)w(t) + Bu(t) - B_m r(t) \quad (2.37)$$

Una condizione sufficiente per ottenere perfetta corrispondenza con il modello è che le derivate di ogni ordine dell'errore siano zero per ogni tempo  $t$  che vuol dire  $e(t)$  identicamente nullo.

Imponendo la condizione sulla derivata di ordine zero, si ottiene

$$w(t) = x(t) \quad (2.38)$$

Si supponga ora di aggiungere all'azione di controllo in (2.32) un termine di feed-forward sullo stato del modello

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + B(u(t) + Gw(t)) \quad (2.39)$$

per un qualche guadagno  $G$ . Se la derivata prima dell'errore deve essere zero, allora deve valere

$$Ax(t) + Bu(t) + BGx(t) = A_m w(t) + B_m r(t) \quad (2.40)$$

Risolvendo quest'ultima equazione rispetto ad  $u(t)$  si ottiene la seguente espressione per l'ingresso di controllo

$$u(t) = B^\dagger(A_m w(t) + B_m r(t) - Ax(t) - BGx(t)) \quad (2.41)$$

in cui  $B^\dagger$  denota la pseudo-inversa di Moore-Penrose della matrice  $B$ . Sostituendo in (2.40) si ottiene

$$Ax(t) + BB^\dagger(A_m w(t) + B_m r(t) - Ax(t) - BGx(t)) + BGx(t) - A_m w(t) - B_m r(t) = 0$$

Espressione che si può semplificare ricordando che  $BB^\dagger B = B$

$$(BB^\dagger - I)A_m w(t) - (BB^\dagger - I)Ax(t) + (BB^\dagger - I)B_m r(t) = 0 \quad (2.42)$$

Le equazioni (2.38) e (2.42) sono soddisfatte per ogni  $x$ ,  $w$  ed  $r$  se

$$(BB^\dagger - I)(A - A_m) = 0 \quad (2.43)$$

$$(BB^\dagger - I)B_m = 0 \quad (2.44)$$

Se le equazioni (2.43) e (2.44) sono soddisfatte al tempo  $t$ , anche tutte le derivate di ordine superiore saranno zero.

Si consideri ora la legge di controllo con la seguente struttura

$$u(t) = u_1(t) + u_2(t) \quad (2.45)$$

in cui

$$u_1(t) = -Ke(t) \quad (2.46)$$

$$u_2(t) = B^\dagger(A_m - A)x(t) + B^\dagger B_m r(t) \quad (2.47)$$

Sostituendo (2.45) in (2.39) ed ipotizzando che siano verificate le ipotesi (2.43) e (2.44), allora

$$\dot{e}(t) = (A_m - BK)e(t) \quad (2.48)$$

Se la coppia  $(A_m, B)$  è controllabile, allora la matrice della catena chiusa  $(A_m - BK)$  può avere un set arbitrario di autovalori grazie ad un'appropriata scelta di  $K$  e in questo modo è possibile controllare l'errore. Le equazioni (2.43) e (2.44) sono le condizioni di perfetta corrispondenza, mentre la (2.45) è la legge di controllo che la implementa.

Un test equivalente per le (2.43) e (2.44) è il seguente teorema di algebra lineare

**Teorema 2.3.1.** *Per il sistema di equazioni*

$$HD = E \quad (2.49)$$

*una soluzione per  $D$  esiste se e solo se  $\text{rank}[H \ E] = \text{rank}[H]$*

Quindi, se sono soddisfatte le seguenti condizioni di rango

$$\text{rank}[B \ A_m - A] = \text{rank}[B] \quad (2.50)$$

$$\text{rank}[B \ B_m] = \text{rank}[B] \quad (2.51)$$

il teorema 2.3.1 garantisce l'esistenza di matrici  $F$  e  $G$  (di dimensioni compatibili) tali per cui

$$BF = A_m - A \quad (2.52)$$

$$BG = B_m \quad (2.53)$$

Da questo segue che, la legge di controllo definita da (2.45) con  $u_2$  espresso da

$$u_2(t) = Fx(t) + Gr(t) \quad (2.54)$$

ugualmente ottiene lo scopo di perfetta corrispondenza tra sistema e modello di riferimento.

Il passo successivo è quello di determinare una legge di controllo a struttura variabile in modo che l'evoluzione di stato del sistema (2.32) segua quella del modello (2.33). L'obiettivo è quello

di determinare un'iperpiano  $\mathcal{S}_e$  ed equivalentemente una matrice  $S$ , in modo che l'errore  $e$  raggiunga uno sliding mode.

La switching function è quindi definita in dipendenza dell'errore

$$s(e) = Se \quad (2.55)$$

e l'iperpiano di sliding, definito nello spazio dell'errore, è il seguente

$$\mathcal{S}_e = \{e \in \mathbb{R}^n : Se = 0\} \quad (2.56)$$

Durante lo sliding mode, l'errore soddisfa l'equazione

$$Se(t) = 0 \quad (2.57)$$

che, derivata rispetto al tempo e sostituita in (2.37), comporta

$$\begin{aligned} S\dot{e}(t) &= S(A_m e(t) + (A - A_m)x(t) + Bu(t) - B_m r(t)) \\ &= 0 \end{aligned} \quad (2.58)$$

Ipotizzando, al solito, che il prodotto  $SB$  sia non singolare, il controllo equivalente che ha luogo durante lo sliding è

$$u_{eq}(t) = -(SB)^{-1}S(A_m e(t) + (A - A_m)x(t) - B_m r(t)) \quad (2.59)$$

Sostituendo il controllo equivalente in (2.37) si ottiene

$$\dot{e}(t) = (I - B(SB)^{-1}S)(A_m e(t) + (A - A_m)x(t) - B_m r(t)) \quad (2.60)$$

Si supponga ora che  $A, B, A_m$  e  $B_m$  soddisfino le condizioni (2.52) e (2.53). Si fa notare che queste condizioni, chiamate di *model - matching*, coincidono con quelle di invarianza espresse dal teorema 1.3.3; quindi se  $x$  ed  $r$  sono considerati disturbi alla dinamica dell'errore, un perfetto model-matching garantisce che lo sliding mode sia insensibile a tali disturbi per cui l'equazione (2.60) si semplifica in

$$\begin{aligned} \dot{e}(t) &= (I - B(SB)^{-1}S)A_m e(t) \\ &= A_{eq}e(t) \end{aligned} \quad (2.61)$$

Durante lo scivolamento il sistema dell'errore è quindi equivalente ad un sistema di ordine  $n - m$  la cui evoluzione temporale è determinata dagli  $n - m$  autovalori non nulli di (2.61). Data una coppia  $(A_m, B)$  stabilizzabile, si può determinare una matrice  $S$  (per esempio con la tecnica del controllo ottimo sopra esposta) in modo che l'errore tenda a zero al crescere del tempo. Per assicurare un veloce azzeramento dell'errore si può pensare di posizionare i poli molto a sinistra nel semipiano complesso; una volta scelta la matrice adatta si determina la struttura di controllo non lineare tramite il metodo del vettore unico (1.118), (1.120) e (1.120) in modo

che l'errore possa essere condotto nello spazio nullo di  $S$  e quindi mantenuto sulla superficie di sliding. Per assicurare il raggiungimento dell'iperpiano in breve tempo si lavora sugli  $m$  autovalori della matrice  $\Phi$ .

Sia  $P_2 \in \mathbb{R}^{m \times m}$  una matrice simmetrica e definita positiva, che soddisfa l'equazione di Lyapunov

$$P_2\Phi + \Phi^T P_2 = -I \quad (2.62)$$

Allora, la componente lineare  $u_l$  del controllo è

$$u_l(t) = -(SB)^{-1}(SA_m - \Phi S)e(t) \quad (2.63)$$

mentre la componente  $u_n$

$$u_n(t) = -\rho(t, e)(SB)^{-1} \frac{P_2 s(t)}{\|P_2 s(t)\|} \quad \text{per } s(t) \neq 0 \quad (2.64)$$

La funzione scalare  $\rho(t, e)$  dipende solo dall'ampiezza dell'incertezza e può essere determinata con argomentazioni simili aa quelle proposte per  $\rho(t, x)$ .

Lo schema completo per la struttura di controllo variabile ha quindi la seguente espressione

$$u(t) = u_l(t) + u_n(t) + u_2(t) \quad (2.65)$$

in cui  $u_2(t)$  è definito secondo la (2.54).

### 2.3.2 Metodo del controllo ad azione integrale

Si consideri inizialmente lo sviluppo di una legge di controllo per il tracking del sistema lineare nominale

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (2.66)$$

$$y(t) = Cx(t) \quad (2.67)$$

in cui si suppone, per convenienza, che la coppia  $(A, B)$  sia in forma normale. La legge di controllo che si andrà ad analizzare, utilizza la metodologia dell'azione integrale.

Si introduca uno stato addizionale  $x_r \in \mathbb{R}^p$  soddisfacente alla relazione

$$\dot{x}_r(t) = r(t) - y(t) \quad (2.68)$$

in cui il segnale differenziabile  $r(t)$  soddisfa

$$\dot{r}(t) = \Gamma(r(t) - R) \quad (2.69)$$

con  $\Gamma \in \mathbb{R}^{p \times p}$  matrice stabile di progetto ed  $R$  vettore costante. Si aumenti il vettore di stato aggiungendo il contributo dell'azione integrale e si definisca di conseguenza il vettore

$$\tilde{x} = \begin{bmatrix} x_r \\ x \end{bmatrix} \quad (2.70)$$

e si partizioni lo stato di conseguenza

$$\tilde{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (2.71)$$

con  $x_1 \in \mathbb{R}^n$  e  $x_2 \in \mathbb{R}^m$ . Il sistema aumentato si riscrive così nella forma

$$\dot{x}_1(t) = \tilde{A}_{11}x_1(t) + \tilde{A}_{12}x_2(t) + B_r r(t) \quad (2.72)$$

$$\dot{x}_2(t) = \tilde{A}_{21}x_1(t) + A_{22}x_2(t) + B_2 r(t) \quad (2.73)$$

dove

$$\begin{bmatrix} \tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{12} \\ \tilde{A}_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \triangleq \left[ \begin{array}{cc|c} 0 & -C_1 & -C_2 \\ 0 & A_{11} & A_{12} \\ \hline 0 & A_{21} & A_{22} \end{array} \right] \quad (2.74)$$

mentre  $B_r$  è data da

$$B_r = \begin{bmatrix} I_p \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.75)$$

La superficie sulla quale si vorrà indurre uno sliding motion è

$$\mathcal{S} = \{ \tilde{x} \in \mathbb{R}^{n+p} : S\tilde{x} = S_r r \} \quad (2.76)$$

dove  $S \in \mathbb{R}^{m \times (n+p)}$  e  $S_r \in \mathbb{R}^{p \times p}$  sono parametri di progetto. Si partizioni la matrice caratteristica dell'iperpiano nel modo seguente

$$S = \left[ \underbrace{S_1}_n \quad \underbrace{S_2}_p \right] \quad (2.77)$$

e si assuma  $S_2 = \Lambda B_2^{-1}$  con  $\Lambda$  matrice diagonale non singolare. Se esistesse un controllore in grado di indurre uno sliding motion ideale su  $\mathcal{S}$ , allora lo sliding motion ideale sarebbe

$$\dot{x}_1(t) = (\tilde{A}_{11} - \tilde{A}_{12}M)x_1(t) + (\tilde{A}_{12}S_2^{-1}S_r + B_r)r(t) \quad (2.78)$$

con  $M \triangleq S_2^{-1}S_1$ . Per far sì che sia valido il metodo di selezione dell'iperpiano descritto precedentemente, è necessario che la coppia  $(\tilde{A}_{11}, \tilde{A}_{12})$  sia completamente controllabile. Una condizione necessaria sul sistema originale è data dal seguente risultato

**Lemma 2.3.2.** *Se  $(A, B, C)$  è completamente controllabile e non ha zeri invarianti nell'origine, allora la coppia  $(\tilde{A}_{11}, \tilde{A}_{12})$  è completamente controllabile*

*Dimostrazione.* Sia

$$P(z) = \begin{bmatrix} zI - A & B \\ -C & 0 \end{bmatrix}$$

Gli zeri invarianti della tripla  $(A, B, C)$  sono dati da

$$\{z \in \mathbb{C} : \det P(z) = 0\}$$

Quindi, il sistema ha zeri nell'origine se e solo se  $\det P(0) = 0$ . Poichè  $(A, B, C)$  è in forma normale e  $B_2$  è non singolare, risulta

$$\begin{aligned} \det P(0) = 0 &\Leftrightarrow \det \begin{bmatrix} -C & 0 \\ -A & B \end{bmatrix} = 0 \\ &\Leftrightarrow \det \begin{bmatrix} -C_1 & -C_2 & 0 \\ -A_{11} & -A_{12} & 0 \\ -A_{21} & -A_{22} & B_2 \end{bmatrix} = 0 \\ &\Leftrightarrow \det \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \\ A_{11} & A_{12} \end{bmatrix} = 0 \end{aligned}$$

Utilizzando il test PBH, la coppia  $(\tilde{A}_{11}, \tilde{A}_{12})$  è controllabile se e solo se

$$\text{rank} \begin{bmatrix} zI & C_1 & -C_2 \\ 0 & zI - A_{11} & A_{12} \end{bmatrix} = n \quad \forall z \in \mathbb{C} \quad (2.79)$$

Se  $z = 0$  allora

$$\begin{aligned} \text{rank} \begin{bmatrix} zI & C_1 & -C_2 \\ 0 & zI - A_{11} & A_{12} \end{bmatrix} = n &\Leftrightarrow \det \begin{bmatrix} C_1 & -C_2 \\ -A_{11} & A_{12} \end{bmatrix} \neq 0 \\ &\Leftrightarrow \det \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \\ A_{11} & A_{12} \end{bmatrix} \neq 0 \\ &\Leftrightarrow (A, B, C) \text{ non ha zeri nell'origine} \end{aligned}$$

Se invece  $z \neq 0$  allora

$$\text{rank} \begin{bmatrix} zI & C_1 & -C_2 \\ 0 & zI - A_{11} & A_{12} \end{bmatrix} = n \Leftrightarrow \text{rank}[zI - A_{11} \ A_{12}] = n - p$$

Tuttavia, per la proposizione (1.3.4),  $(A, B)$  è controllabile se e solo se  $(A_{11}, A_{12})$  è controllabile e pertanto, per ipotesi, il test PBH applicato alla coppia  $(A_{11}, A_{12})$  comporta

$$\text{rank}[zI - A_{11} \ A_{12}] = n - p \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

Quindi è lecito concludere che la (2.79) è verificata; dunque  $(\tilde{A}_{11}, \tilde{A}_{12})$  è controllabile.  $\square$

L'ingresso di controllo è quindi determinato con la metodologia del vettore unico. Si definisca il cambio di coordinate dato dalla matrice  $T_s$

$$T_s = \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ S_1 & S_2 \end{bmatrix} \quad (2.80)$$

che è non singolare poichè, per costruzione,  $S_2$  è non singolare. Il vettore di stato nelle nuove coordinate è

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ s \end{bmatrix} \triangleq T_s \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Rispetto a queste nuove coordinate il sistema si riscrive in questo modo

$$\dot{x}_1(t) = \bar{A}_{11}x_1(t) + \bar{A}_{12}s(t) + B_r r(t) \quad (2.81)$$

$$\dot{s}(t) = S_2\bar{A}_{21}x_1(t) + S_2\bar{A}_{22}S_2^{-1}s(t) + \Lambda u(t) + S_1B_r r(t) \quad (2.82)$$

in cui

$$\begin{aligned} \bar{A}_{11} &= \tilde{A}_{11} - \tilde{A}_{12}M \\ \bar{A}_{12} &= \tilde{A}_{12}S_2^{-1} \\ \bar{A}_{21} &= M\tilde{A}_{11} + \tilde{A}_{21} - A_{22}M \\ \bar{A}_{22} &= M\tilde{A}_{12} + A_{22} \end{aligned}$$

La legge di controllo globale è data come somma di due componenti; una lineare  $u_L(\cdot)$  e una discontinua  $u_N(\cdot)$

$$u = u_L(x_1, s, r) + u_N(s, r) \quad (2.83)$$

Se  $\Phi$  è una matrice stabile, la componente lineare è così definita

$$u_L(x_1, s, r) = \Lambda^{-1}(-S_2\bar{A}_{21}x_1 + (\Phi - S_2\bar{A}_{22}S_2^{-1})s - (\Phi S_r + S_1B_r)r + S_r\dot{r}) \quad (2.84)$$

mentre per quanto riguarda la parte discontinua, vale la relazione

$$u_N(s, r) = \begin{cases} -\rho_c(u_L, y)\Lambda^{-1} \frac{\bar{P}_2(s-S_r r)}{\|\bar{P}_2(s-S_r r)\|} & \text{se } s \neq S_r r \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad (2.85)$$

in cui  $\bar{P}_2$  è una matrice simmetrica e definita positiva che soddisfa l'equazione di Lyapunov

$$\bar{P}_2\Phi + \Phi^T\bar{P}_2 = -I \quad (2.86)$$

mentre la funzione  $\rho_c(u_L, y)$  può essere ottenuta ragionando similmente a quanto fatto nel paragrafo relativo al metodo del vettore unico. In termini delle coordinate originali, risulta

$$u_L(\tilde{x}, r) = L\tilde{x} + L_r r + L_r\dot{r} \quad (2.87)$$



con i guadagni che sono definiti nel modo seguente

$$L = -\Lambda^{-1}(S\tilde{A} - \Phi S) \quad (2.88)$$

$$L_r = -\Lambda^{-1}(\Phi S_r + S_1 B_r) \quad (2.89)$$

$$L_{\dot{r}} = \Lambda^{-1} S_r \quad (2.90)$$

e la matrice del sistema aumentato  $\tilde{A}$ , è

$$\tilde{A} \triangleq \begin{bmatrix} \tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{12} \\ \tilde{A}_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \quad (2.91)$$

Questo capitolo ha così affrontato il problema della scelta della matrice di sliding  $S$  e lo ha risolto grazie ad uno studio basato sulla teoria del controllo ottimo che si è dimostrato particolarmente adatto per problemi di regolazione VSCS. Si è infine mostrato il comportamento del controllo sliding mode nel passaggio da un problema di regolazione ad uno di inseguimento di traiettoria con le metodologie del controllo a modello di riferimento e controllo con azione integrale. Il passo successivo sarà quello di comprendere come poter utilizzare un feedback dall'uscita anziché dello stato.



# Capitolo 3

## Sliding mode utilizzando i dati di uscita

Nei capitoli precedenti si è sempre ipotizzato che il controllore possa accedere allo stato interno del sistema. In molte situazioni pratiche tuttavia, questa situazione non si verifica; in alcune circostanze misurare tutte le variabili di stato è impossibile o troppo costoso, in altri casi il sistema è così articolato che si rivelerebbe necessario adottare complesse tecniche di identificazione per ottenere un modello accettabile o ancora, lo stato interno del sistema potrebbe essere associato a variabili che non hanno un significato fisico e che quindi non possono essere misurate. In questo capitolo ci si occupa quindi di come poter determinare la superficie di sliding e la relativa legge di controllo utilizzando non più la variabile di stato ma solo le informazioni relative ai dati di uscita.

### 3.1 Formulazione del problema

Si consideri il sistema dinamico

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) + f(t, x, u) \\ y(t) &= Cx(t)\end{aligned}\tag{3.1}$$

in cui  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $u \in \mathbb{R}^m$  e  $y \in \mathbb{R}^p$  con  $m \leq p < n$ . Si assuma che, per ipotesi, il sistema nominale lineare  $(A, B, C)$  sia conosciuto e che le matrici di ingresso e di uscita,  $B$  e  $C$  rispettivamente, siano entrambe a rango pieno. La funzione ignota  $f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  rappresenta le non linearità e le incertezze del sistema. Si supponga che soddisfi la matching condition, che si ricorda essere espressa da

$$f(t, x, u) = B\xi(t, x, u)\tag{3.2}$$

in cui la funzione limitata  $\xi : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  soddisfa

$$\|\xi(t, x, u)\| < k_1\|u(t)\| + \alpha(t, y(t))\tag{3.3}$$

per una qualche nota funzione  $\alpha : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}_+$  e una costante positiva  $k_1 < 1$ .

L'intento è quello di progettare una legge di controllo per indurre uno sliding motion ideale sulla superficie

$$\mathcal{S} = \{x \in \mathbb{R}^n : FCx = 0\} \quad (3.4)$$

per una qualche matrice  $F \in \mathbb{R}^{m \times p}$ . Si cercherà una legge di controllo della forma

$$u(t) = Gy(t) - \nu_y \quad (3.5)$$

in cui  $G$  è una matrice di guadagno fissa e il vettore discontinuo  $\nu_y$  è del tipo

$$\nu_y = \begin{cases} \rho(t, y(t)) \frac{Fy(t)}{\|Fy(t)\|} & \text{se } Fy \neq 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad (3.6)$$

in cui  $\rho(t, y(t))$  è una funzione scalare positiva dell'uscita.

Prima di analizzare il caso generale, per semplicità è utile considerare inizialmente il caso particolare in cui il numero degli ingressi è uguale al numero delle uscite. Ci si riferirà a questo caso col nome di *square system*.

## 3.2 Il caso square system

Si prende in considerazione per il momento il caso, di più semplice trattazione, di sistemi quadrati; in cui cioè il numero degli ingressi è uguale a quello delle uscite. Inizialmente si consideri la scelta di un iperpiano in modo da garantire una dinamica di ordine ridotto stabile. Per quanto visto nei precedenti capitoli, affinché esista un unico controllo equivalente, deve essere  $\det(FCB) \neq 0$ . Poichè, per ipotesi, ci si sta occupando di sistemi quadrati in cui  $m = p$  e quindi  $F$  è una matrice quadrata, risulta

$$\det(FCB) = \det(F)\det(CB)$$

Questo implica che, perchè sia soddisfatta la condizione di esistenza, deve risultare  $\det(F) \neq 0$  e contemporaneamente  $\det(CB) \neq 0$ .

Si fa notare che il termine  $CB$  è un coefficiente di Markov<sup>1</sup> e non dipende dalla realizzazione scelta per il sistema. La relazione sul determinante mette in luce che la matrice  $F$  agisce come fattore di scala per l'iperpiano e quindi

$$\mathcal{S} = \{x \in \mathbb{R}^n : Cx = 0\} = \mathcal{N}(C)$$

Dalla proposizione 1.3.5 segue che i poli dello sliding mode di ordine ridotto sono gli zeri invarianti della terna  $(A, B, C)$ . Di conseguenza, in questo caso particolare, non ci sono gradi di libertà nella scelta della dinamica di ordine ridotto e si conclude che le condizioni necessarie per uno sliding motion stabile sono

<sup>1</sup>I coefficienti di Markov  $CA^iB$  per  $i = 0, 1, 2, \dots$  sono i coefficienti delle potenze di  $1/s$  nello sviluppo di Taylor della funzione di trasferimento  $C(sI - A)^{-1}B$ .

- $\det(CB) \neq 0$
- gli zeri invarianti di  $(A, B, C)$  appartengono al semipiano sinistro del piano complesso  $\mathbb{C}_-$

L'analisi fatta, naturalmente, dipende dall'esistenza di una legge di controllo che induce lo sliding. È quindi importante esaminare come si ripercuota, sulla struttura di controllo esaminata nel metodo del vettore unico, la conoscenza della sola uscita.

Sotto questo aspetto, la componente non lineare (1.120) non pone particolari problemi in quanto dipende solo dalla switching function. La componente lineare invece è stato mostrato essere

$$u_l(t) = -(SB)^{-1}SAx(t) + (SB)^{-1}\Phi Sx(t) \quad (3.7)$$

e, nel caso in esame, diventa

$$u_l(t) = -(FCB)^{-1}FCAx(t) + (FCB)^{-1}\Phi FCx(t) \quad (3.8)$$

È chiaro però che, a meno del caso fortuito in cui  $CA = MC$  per una qualche matrice  $M \in \mathbb{R}^{m \times m}$ , la (3.8) non può essere realizzata. Bisogna quindi adottare un approccio differente.

Si assuma che il sistema (3.1) sia espresso in forma normale e che la tripla  $(A, B, C)$  sia così partizionata

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ B_2 \end{bmatrix} \quad C = [C_1 \ C_2] \quad (3.9)$$

Siano  $A_{22}, B_2 \in \mathbb{R}^{m \times m}$  e sia inoltre  $B_2$  non singolare. Si assuma infine che  $\det(CB) \neq 0$  e che gli zeri invarianti di  $(A, B, C)$  abbiano parte reale negativa. Si consideri quindi il cambiamento di coordinate  $x \mapsto \bar{T}x$  espresso dalla

$$\bar{T} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ C_1 & C_2 \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

Fintantoché  $CB = C_2B_2$  e sono diversi da zero i determinanti di  $CB$  e  $B_2$ , ovvero  $\det(CB) \neq 0$  e  $\det(B_2) \neq 0$ , deve necessariamente risultare anche che  $\det(C_2) \neq 0$  e quindi la trasformazione appena definita è non singolare. Nel nuovo sistema di coordinate, il sistema è

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} \bar{A}_{11} & \bar{A}_{12} \\ \bar{A}_{21} & \bar{A}_{22} \end{bmatrix} \quad \bar{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ B_2 \end{bmatrix} \quad F\bar{C} = [0 \ F] \quad (3.11)$$

con  $\bar{A}_{11} = A_{11} - A_{12}C_2^{-1}C_1$ .

**Lemma 3.2.1.** *Gli zeri invarianti della terna  $(\bar{A}, \bar{B}, \bar{C})$  sono gli autovalori di  $\bar{A}_{11}$ .*

*Dimostrazione.* La prova di questo lemma può essere ottenuta, con gli opportuni adattamenti, come diretta conseguenza della proposizione (1.3.5).  $\square$

Sia  $P$  una matrice simmetrica e definita positiva, partizionata in modo coerente con la rappresentazione (3.22)

$$P = \begin{bmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & P_2 \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

Il blocco  $P_2$ , simmetrico e definito positivo, è una matrice di progetto mentre il blocco  $P_1$ , anch'esso simmetrico e definito positivo, soddisfa l'equazione di Lyapunov

$$P_1 \bar{A}_{11} + \bar{A}_{11}^T P_1 = -Q_1 \quad (3.13)$$

per una qualche matrice  $Q_1$  simmetrica e definita positiva. Se

$$F \triangleq B_2^T P_2 \quad (3.14)$$

allora la matrice  $P$  soddisfa la relazione

$$P \bar{B} = \bar{C}^T F^T \quad (3.15)$$

Per semplificare la scrittura delle equazioni, si definiscano le matrici

$$Q_2 \triangleq P_1 \bar{A}_{12} + \bar{A}_{21}^T P_2 \quad (3.16)$$

$$Q_3 \triangleq P_2 \bar{A}_{22} + \bar{A}_{22}^T P_2 \quad (3.17)$$

e lo scalare<sup>2</sup>

$$\gamma_0 \triangleq \frac{1}{2} \lambda_{\max}((F^{-1})^T (Q_3 + Q_2^T Q_1^{-1} Q_2) F^{-1}) \quad (3.18)$$

**Lemma 3.2.2.** *La matrice simmetrica  $L(\gamma) \triangleq P A_0 + A_0^T P$ , con  $A_0 = \bar{A} - \gamma \bar{B} F \bar{C}$  è definita negativa se e solo se  $\gamma > \gamma_0$ .*

*Dimostrazione.* Dalla definizione data per  $A_0$  e dall'equazione (3.15) segue che

$$\begin{aligned} L(\gamma) &\triangleq P A_0 + A_0^T P = P \bar{A} + \bar{A}^T P - \gamma P \bar{B} F \bar{C} - \gamma \bar{C}^T F^T \bar{B}^T P \\ &= P \bar{A} + \bar{A}^T P - 2\gamma (F \bar{C})^T F \bar{C} \end{aligned}$$

Usando a questo punto le equazioni (3.22) e (3.12), e le definizioni date per le matrici  $Q_2$  e  $Q_3$  si ottiene

$$L(\gamma) = \begin{bmatrix} -Q_1 & Q_2 \\ Q_2^T & Q_3 - 2\gamma F^T F \end{bmatrix}$$

<sup>2</sup>Questo scalare è ben definito fino a che la matrice a destra dell'equazione è simmetrica e con autovalori reali.

Per le proprietà delle matrici simmetriche e, per il fatto che  $Q_1$  è definita positiva, segue che

$$\begin{aligned}
L(\gamma) < 0 &\Leftrightarrow Q_3 - 2\gamma F^T F + Q_2^T Q_1^{-1} Q_2 < 0 \\
&\Leftrightarrow 2\gamma F^T F > Q_3 + Q_2^T Q_1^{-1} Q_2 \\
&\Leftrightarrow 2\gamma I_m > (F^{-1})^T (Q_3 + Q_2^T Q_1^{-1} Q_2) F^{-1} \\
&\Leftrightarrow 2\gamma > \lambda_{\max}((F^{-1})^T (Q_3 + Q_2^T Q_1^{-1} Q_2) F^{-1})
\end{aligned}$$

e quindi la dimostrazione è completa.  $\square$

Si definisca quindi la legge di controllo a struttura variabile dipendente solo dall'uscita in questo modo

$$u(t) = -\gamma Fy(t) - \nu_y \quad (3.19)$$

in cui:  $\gamma > \gamma_0$ ,  $\nu_y$  è il vettore discontinuo dato da

$$\nu_y = \begin{cases} \rho(t, y) \frac{Fy(t)}{\|Fy(t)\|} & \text{se } Fy(t) \neq 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad (3.20)$$

e  $\rho(t, y)$  è la funzione scalare positiva

$$\rho(t, y) = \frac{(k_1 \gamma \|Fy(t)\| + \alpha(t, y) + \gamma_2)}{(1 - k_1)} \quad (3.21)$$

con  $\gamma_2$  scalare positivo. Nel nuovo sistema di coordinate, il sistema (3.1) può essere riscritto in questo modo

$$\dot{\bar{x}}(t) = \bar{A}\bar{x}(t) + \bar{B}(u(t) + \xi(t, x, u)) \quad (3.22)$$

**Proposizione 3.2.3.** *La legge di controllo a struttura variabile (3.19) stabilizza il sistema descritto dall'equazione (3.22).*

*Dimostrazione.* Si consideri come funzione di Lyapunov la seguente espressione definita positiva

$$V(\bar{x}) = \bar{x}^T P \bar{x}$$

La sua derivata, lungo le traiettorie del sistema è

$$\begin{aligned}
\dot{V}(\bar{x}) &= \bar{x}^T (\bar{A}^T P + P \bar{A} - 2\gamma (F\bar{C})^T F\bar{C}) \bar{x} + 2\bar{x}^T P \bar{B} (\xi - \nu_y) \\
&= \bar{x}^T L(\gamma) \bar{x} + 2y^T F^T (\xi - \nu_y) \\
&\leq \bar{x}^T L(\gamma) \bar{x} - 2y^T F^T \nu_y + 2\|Fy\| \cdot \|\xi\| \\
&= \bar{x}^T L(\gamma) \bar{x} - 2\rho(t, y) \|Fy\| + 2\|Fy\| \cdot \|\xi\| \\
&< \bar{x}^T L(\gamma) \bar{x} - 2\|Fy\| (\rho(t, y) - k_1 \|u\| - \alpha(t, y))
\end{aligned}$$

ma, per definizione

$$\rho(t, y) = \frac{(k_1 \gamma \|Fy(t)\| + \alpha(t, y) + \gamma_2)}{(1 - k_1)}$$

e quindi

$$\begin{aligned} \rho(t, y) &= k_1 \rho(t, y) + k_1 \gamma \|Fy\| + \alpha(t, y) + \gamma_2 \\ &\geq k_1 (\|\nu_y\| + \gamma \|Fy\|) + \alpha(t, y) + \gamma_2 \\ &\geq k_1 \|u\| + \alpha(t, y) + \gamma_2 \end{aligned}$$

Usando quest'ultima disequazione nell'espressione di  $\dot{V}$  risulta

$$\dot{V} < \bar{x}^T L(\gamma) \bar{x} - 2\gamma_2 \|Fy\| < 0 \quad \text{se } \bar{x} \neq 0 \text{ e } \gamma > \gamma_0$$

e questo dimostra la stabilità quadratica del sistema.  $\square$

**Corollario 3.2.4.** *Uno sliding mode ideale ha luogo sulla superficie  $\mathcal{S}$ , nel dominio  $\Omega = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^n : \|B_2^{-1} A_0^L \bar{x}\| < \gamma_2 - \eta\}$  in cui  $A_0^L$  rappresenta la matrice formata con le ultime  $m$  righe di  $A_0$  e  $\eta$  è uno scalare piccolo in modulo, soddisfacente la relazione  $0 < \eta < \gamma_2$ .*

*Dimostrazione.* Sia  $s(\bar{x}) = F\bar{C}\bar{x}$  la switching function. Allora, per l'equazione (3.22) si ha

$$\dot{s}(\bar{x}) = F\bar{C}A_0\bar{x} + FB_2(\xi - \nu_y)$$

Si definisca ora la funzione  $V_c : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  come

$$V_c(s) = 2s^T (F^{-1})^T P_2 F^{-1} s$$

Usando il fatto che  $F^T = P_2 B_2$  si può verificare che risulta  $(F^{-1})^T P_2 F^{-1} F\bar{C}A_0 = B_2^{-1} A_0^L$  e quindi, ragionando come fatto per dimostrare la Proposizione 3.2.3, si ha

$$\dot{V}_c(s) = 2s^T B_2^{-1} A_0^L \bar{x} + 2s^T (\xi - \nu_y) \quad (3.23)$$

$$\leq 2\|s\| \cdot \|B_2^{-1} A_0^L \bar{x}\| - 2\gamma_2 \|s\| \quad (3.24)$$

$$< -2\eta \|s\| \quad (3.25)$$

se  $\bar{x} \in \Omega$ . Per la Proposizione 3.2.3 si può concludere che lo stato  $\bar{x}(t)$  è stabile e che quindi esiste un istante di tempo, che si può chiamare  $t_0$ , tale per cui  $\bar{x}(t) \in \Omega$  per ogni  $t > t_0$ . Di conseguenza, la (3.25) è valida per ogni  $t > t_0$  e ciò dimostra che uno sliding motion è ottenuto in tempo finito.  $\square$

Si conclude questo paragrafo con una piccola precisazione sul parametro  $\gamma_2$  sul quale finora si è detto semplicemente che è uno scalare positivo. Dal corollario appena enunciato, si evince che questo parametro definisce la regione  $\Omega$  in cui ha luogo lo scivolamento. Ciò comporta che, fuori da questa regione, le traiettorie del sistema potrebbero attraversare la superficie di sliding senza che un effettivo scivolamento abbia luogo. Tuttavia la stabilità dimostrata assicura che, alla fine, le traiettorie entreranno in  $\Omega$  e si avrà uno sliding mode.



### 3.3 Il caso generale

Il punto di partenza è, ancora una volta, il sistema (3.1) ma questa volta si ipotizza  $p \geq m$  e  $\text{rank}(CB) = m$ . La condizione sul rango è imposta per assicurare che la matrice  $FCB \in \mathbb{R}^{m \times m}$  abbia rango pieno e quindi garantisca l'esistenza di un'unico controllo equivalente. Sul rango del prodotto tra matrici, vale la relazione

$$\text{rank}(FCB) \leq \min \{ \text{rank}(F), \text{rank}(CB) \}.$$

per cui il prodotto  $FCB$  può avere rango pieno solo se le matrici  $F$  e  $CB$  hanno entrambe rango  $m$ . La matrice  $F$  è un parametro di progetto, per cui si può assumere che sia una matrice tale per cui tale disequazione valga invece come equazione. Essendo un parametro di progetto, si assume che  $F$  abbia rango  $m$ . La condizione necessaria affinché  $FCB$  abbia rango pieno è quindi una condizione sul rango del solo prodotto  $CB$ .

Il primo problema da considerare è quello della scelta di  $F$  in modo che si abbia uno sliding mode stabile. Si utilizzerà poi una legge di controllo simile a (3.19) e (3.21) per garantire l'esistenza di uno sliding motion.

#### 3.3.1 Progetto dell'iperpiano

In considerazione del fatto che si stanno utilizzando solo le uscite, è opportuno introdurre il seguente cambio di coordinate in modo che, le ultime  $p$  componenti dello stato del sistema, siano effettivamente le  $p$  componenti del vettore di uscita.

Si definisca a tale scopo la matrice

$$T_c = \begin{bmatrix} N_c^T \\ C \end{bmatrix} \quad (3.26)$$

in cui  $N_c \in \mathbb{R}^{n \times (n-p)}$  è una matrice le cui colonne generano lo spazio nullo della matrice  $C$ . Per costruzione, la trasformazione  $x \mapsto T_c x$  è non singolare e, nella nuova base, risulta

$$C = [0 \ I_p]$$

A partire da questo punto, si stabilirà un caso 'speciale' di forma normale: supponendo che, nelle nuove coordinate, si abbia

$$B = \begin{bmatrix} \underbrace{B_{c1}}_{n-p} \\ \underbrace{B_{c2}}_p \end{bmatrix}$$

allora  $CB = B_{c2}$  e quindi, per ipotesi,  $\text{rank}(B_{c2}) = m$ . Quindi la pseudoinversa

$$B_{c2}^\dagger = (B_{c2}^T B_{c2})^{-1} B_{c2}^T$$

è ben definita ed esiste perciò una matrice ortogonale  $T \in \mathbb{R}^{p \times p}$  tale per cui

$$T^T B_{c2} = \begin{bmatrix} 0 \\ B_2 \end{bmatrix} \quad (3.27)$$

in cui  $B_2 \in \mathbb{R}^{m \times m}$  è non singolare. Di conseguenza, l'ulteriore cambio di base  $x \mapsto T_b x$ , in cui

$$T_b = \begin{bmatrix} I_{n-p} & -B_{c1} B_{c2}^\dagger \\ 0 & T^T \end{bmatrix} \quad (3.28)$$

è non singolare. Rispetto a queste nuove nuove coordinate la tripla  $(A, B, C)$  è così partizionata

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ B_2 \end{bmatrix} \quad C = [0 \ T] \quad (3.29)$$

con  $A_{11} \in \mathbb{R}^{(n-m) \times (n-m)}$  e gli altri blocchi dimensionati coerentemente. Sia

$$FT = \left[ \underbrace{F_1}_{p-m} \quad \underbrace{F_2}_m \right]$$

in cui  $T$  è la matrice dell'equazione (3.27). Come risultato

$$FC = [F_1 C_1 \ F_2] \quad (3.30)$$

in cui

$$C_1 \triangleq [0_{(p-m) \times (n-p)} \ I_{(p-m)}] \quad (3.31)$$

Pertanto  $FCB = F_2 B_2$  e la matrice quadrata  $F_2$  è non singolare. Il sistema (3.29) può inoltre essere visto come un caso particolare della forma normale introdotta in precedenza; l'evoluzione sliding mode di ordine ridotto è quindi determinata dalla matrice

$$A_{11}^s \triangleq A_{11} - A_{12} F_2^{-1} F_1 C_1 \quad (3.32)$$

che deve quindi risultare stabile.

Se  $K \in \mathbb{R}^{m \times (p-m)}$  è definita come  $K = F_2^{-1} F_1$ , allora

$$A_{11}^s = A_{11} - A_{12} K C_1 \quad (3.33)$$

Il problema di definire l'iperpiano di sliding è quindi equivalente al problema di un feedback statico dall'uscita per il sistema  $(A_{11}, A_{12}, C_1)$ . Per poter affrontare tale problema con le strategie illustrate nei precedenti capitoli, è necessario che la coppia  $(A_{11}, A_{12})$  sia controllabile e che la coppia  $(A_{11}, C_1)$  sia osservabile. Per quanto riguarda la controllabilità, essa è dimostrabile facilmente con la proposizione 1.3.4. La dimostrazione dell'osservabilità è solo leggermente più complicata e non viene affrontata nel dettaglio. La si può trovare in [4].

**Lemma 3.3.1.** *Sia  $(A, B, C)$  un sistema lineare con  $p > m$  e  $\text{rank}(CB) = m$ . Allora esiste un cambio di coordinate tale per cui la tripla in esame, rispetto a queste nuove coordinate, ha la seguente struttura:*

1. *La matrice del sistema può essere scritta come*

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \quad \text{con } A_{11} \in \mathbb{R}^{(n-m) \times (n-m)} \quad (3.34)$$

*in cui il sotto-blocco  $A_{11}$ , è partizionato come segue*

$$A_{11} = \left[ \begin{array}{cc|c} A_{11}^o & A_{12}^o & A_{12}^m \\ 0 & A_{22}^o & \\ \hline 0 & A_{21}^o & A_{22}^m \end{array} \right] \quad (3.35)$$

*con  $A_{11}^o \in \mathbb{R}^{r \times r}$ ,  $A_{22}^o \in \mathbb{R}^{(n-p-r) \times (n-p-r)}$  e  $A_{21}^o \in \mathbb{R}^{(p-m) \times (n-p-r)}$  per un qualche  $r \geq 0$  e con la coppia  $(A_{22}^o, A_{21}^o)$  che è completamente osservabile.*

2. *La matrice di ingresso ha la forma*

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ B_2 \end{bmatrix} \quad (3.36)$$

*con  $B_2 \in \mathbb{R}^{m \times m}$  non singolare.*

3. *Infine, la matrice di uscita ha la forma*

$$C = [0 \ T] \quad (3.37)$$

*con  $T \in \mathbb{R}^{p \times p}$  che è matrice di cambiamento di base ortogonale.*

Lo scopo è quello di costruire un nuovo sistema  $(\tilde{A}_{11}, \tilde{B}_1, \tilde{C}_1)$  che sia contemporaneamente controllabile ed osservabile con la proprietà che

$$\lambda(A_{11}^s) = \lambda(A_{11}^o) \cup \lambda(\tilde{A}_{11} - \tilde{B}_1 K \tilde{C}_1)$$

A tal fine, si partizionino le matrici  $A_{12}$  e  $A_{12}^m$  in questo modo

$$A_{12} = \begin{bmatrix} A_{121} \\ A_{122} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad A_{12}^m = \begin{bmatrix} A_{121}^m \\ A_{122}^m \end{bmatrix} \quad (3.38)$$

in cui  $A_{122} \in \mathbb{R}^{(n-m-r) \times m}$  e  $A_{122}^m \in \mathbb{R}^{(n-p-r) \times (p-m)}$ . Si forma così un nuovo sottosistema, rappresentato dalla tripla  $(\tilde{A}_{11}, A_{122}, \tilde{C}_1)$ , in cui

$$\tilde{A}_{11} \triangleq \begin{bmatrix} A_{22}^o & A_{122}^m \\ A_{21}^o & A_{22}^m \end{bmatrix} \quad \tilde{C}_1 \triangleq [0_{(p-m) \times (n-p-r)} \ I_{p-m}] \quad (3.39)$$

Si possono quindi dimostrare i seguenti lemmi

**Lemma 3.3.2.** *Lo spettro di  $A_{11}^s$  si decompone come*

$$\lambda(A_{11} - A_{12}KC_1) = \lambda(A_{11}^o) \cup \lambda(\tilde{A}_{11} - A_{122}K\tilde{C}_1)$$

*Dimostrazione.* Utilizzando la partizione introdotta con la (3.35) si può scrivere:

$$\begin{aligned} A_{11}^s = A_{11} - A_{12}KC_1 &= \left[ \begin{array}{cc|c} A_{11}^o & A_{12}^o & A_{12}^m \\ 0 & A_{22}^o & \\ \hline 0 & A_{21}^o & A_{22}^m \end{array} \right] - [0_{(n-m) \times (n-p)} \ A_{12}K] \\ &= \left[ \begin{array}{cc} A_{11}^o & [A_{12}^o \ A_{121}^m] \\ 0 & \tilde{A}_{11} \end{array} \right] - \left[ \begin{array}{cc} 0 & A_{121}K \\ 0 & A_{122}K \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{cc} A_{11}^o & [A_{12}^o \ | \ A_{121}^m - A_{121}K] \\ 0 & A_{11} - A_{122}K\tilde{C}_1 \end{array} \right] \end{aligned}$$

Quindi,

$$\lambda(A_{11}^s) = \lambda(A_{11}^o) \cup \lambda(\tilde{A}_{11} - A_{122}K\tilde{C}_1)$$

come volevasi dimostrare.  $\square$

**Lemma 3.3.3.** *Lo spettro di  $A_{11}^o$  è rappresentato dagli zeri invarianti della tripla  $(A, B, C)$ .*

*Dimostrazione.* Sia  $P(z)$  la matrice di Rosenbrock del sistema

$$P(z) = \begin{bmatrix} zI - A & B \\ -C & 0 \end{bmatrix}$$

Gli zeri invarianti sono definiti come gli elementi di questo insieme

$$\{z \in \mathbb{C} : P(z) \text{ cala di rango}\}.$$

Per ipotesi, la terna  $(A, B, C)$  è nella forma del lemma (3.3.1) per cui, fintantochè  $\det(B_2) \neq 0$ ,

$$\begin{aligned} P(z) \text{ cala di rango} &\Leftrightarrow \left[ \begin{array}{ccc} zI - A_{11} & -A_{12} & 0 \\ -A_{21} & zI - A_{22} & B_2 \\ [0 - T_1] & -T_2 & 0 \end{array} \right] \text{ cala di rango} \\ &\Leftrightarrow \left[ \begin{array}{cc} zI - A_{11} & -A_{12} \\ [0 - T_1] & -T_2 \end{array} \right] \text{ cala di rango} \end{aligned}$$

in cui  $T_1 \in \mathbb{R}^{(p-m) \times m}$  e  $T_2 \in \mathbb{R}^{m \times m}$  rappresentano la partizione della matrice  $T$ . Sostituendo la (3.35) per  $A_{11}$  si ottiene

$$\left[ \begin{array}{cc} zI - A_{11} & -A_{12} \\ [0 - T_1] & -T_2 \end{array} \right] \equiv \left[ \begin{array}{cc|c} zI - A_{11}^o & -A_{12}^o & * \\ 0 & zI - A_{22}^o & * \\ \hline 0 & 0 & -T \end{array} \right]$$

in cui si è contrassegnato con \* quei sotto-blocchi che non giocano un ruolo ai fini di questa analisi. Dato che  $T$  è di rango pieno, l'espressione scritta a destra nell'equazione, e di conseguenza dunque anche la matrice  $P(z)$ , cala di rango se e solo se cala di rango

$$\begin{bmatrix} zI - A_{11}^o & -A_{12}^o \\ 0 & zI - A_{22}^o \\ 0 & -A_{21}^o \end{bmatrix}$$

Per costruzione, la coppia  $(A_{22}^o, A_{21}^o)$  è completamente osservabile quindi, per il criterio PBH,

$$\text{rango} \begin{bmatrix} zI - A_{22}^o \\ -A_{21}^o \end{bmatrix} = n - p - r \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

Di conseguenza

$$P(z) \text{ cala di rango} \Leftrightarrow \det(zI - A_{11}^o) = 0$$

e quindi, come volevasi dimostrare, gli zeri invarianti di  $(A, B, C)$  sono proprio gli autovalori di  $A_{11}^o$ .  $\square$

Ciò che si evince da questi due lemmi quindi, è che per ottenere uno sliding motion stabile gli zeri invarianti del sistema  $(A, B, C)$  devono appartenere al semipiano sinistro del piano complesso e che la tripla  $(\tilde{A}_{11}, A_{122}, \tilde{C}_1)$  deve essere stabilizzabile con una retroazione dall'uscita<sup>3</sup>. Per quanto visto finora, la matrice  $A_{122}$  non è necessariamente di rango pieno. Si supponga quindi che sia di rango  $m'$ . Allora è possibile costruire una matrice  $T_{m'} \in \mathbb{R}^{m \times m}$  in modo che risulti

$$A_{122}T_{m'} = [\tilde{B}_1 \ 0] \quad (3.40)$$

con  $\tilde{B}_1 \in \mathbb{R}^{(n-m-r) \times m'}$  e di rango pieno. Se  $K_{m'} = T_{m'}^{-1}K$  e  $K_{m'}$  è partizionata compatibilmente con le matrici in gioco

$$K_{m'} = \begin{bmatrix} \underbrace{K_1}_{m'} \\ \underbrace{K_2}_{m-m'} \end{bmatrix}$$

allora risulta che

$$\tilde{A}_{11} - A_{122}K\tilde{C}_1 = \tilde{A}_{11} - [\tilde{B}_1 \ 0]K_{m'}\tilde{C}_1 = \tilde{A}_{11} - \tilde{B}_1K_1\tilde{C}_1$$

e  $(\tilde{A}_{11}, A_{122}, \tilde{C}_1)$  è stabilizzabile con feedback dall'uscita se e solo se lo è la tripla  $(\tilde{A}_{11}, \tilde{B}_1, \tilde{C}_1)$ . La ragione di questo tortuoso ragionamento per determinare il sottosistema  $(\tilde{A}_{11}, \tilde{B}_1, \tilde{C}_1)$  è che, per poter utilizzare una retroazione standard dall'uscita, è necessario che il sottosistema che si prende in considerazione sia controllabile e osservabile.

<sup>3</sup>Con 'stabilizzabile tramite retroazione dall'uscita' si intende ammettere l'esistenza, per il sistema lineare  $(A, B, C)$ , di una matrice  $K$  che stabilizza la matrice  $A - BKC$ .

**Lemma 3.3.4.** *La coppia  $(\tilde{A}_{11}, \tilde{B}_1)$  è completamente controllabile e la coppia  $(\tilde{A}_{11}, \tilde{C}_1)$  è completamente osservabile.*

*Dimostrazione.* La coppia  $(A, B)$  è nella forma espressa nel (3.3.1) che può essere considerata come un caso particolare di forma normale. Per quanto già visto, si può affermare che la coppia  $(A, B)$  è controllabile se e solo se, lo è la coppia  $(A_{11}, A_{12})$ . Applicando il test PBH di controllabilità si ha

$$\text{rango}[zI - A_{11} \ A_{12}] = n - m \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

Sostituendo la (3.35) per  $A_{11}$  e la (3.38) per  $A_{12}$  si ottiene

$$\text{rank} \begin{bmatrix} zI - A_{11}^o & -[A_{12}^o \ A_{121}^m] & A_{121} \\ 0 & zI - \tilde{A}_{11} & A_{122} \end{bmatrix} = n - m \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

Questo implica che

$$\text{rank}[zI - \tilde{A}_{11} \ A_{122}] = n - m - r \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

Quindi, per il criterio PBH,  $(\tilde{A}_{11}, A_{122})$  è controllabile. Per costruzione,  $(\tilde{A}_{11}, A_{122})$  è controllabile se e solo se  $(\tilde{A}_{11}, \tilde{B}_1)$  è controllabile e quindi la prima parte del lemma può dirsi dimostrata. Applicando ora il test PBH di osservabilità alla coppia  $(\tilde{A}_{11}, \tilde{C}_1)$  si ottiene

$$\text{rank} \begin{bmatrix} zI - \tilde{A}_{11} \\ \tilde{C}_1 \end{bmatrix} = \text{rank} \begin{bmatrix} zI - A_{22}^o & -A_{122}^m \\ -A_{21}^o & zI - A_{22}^m \\ 0 & I_{p-m} \end{bmatrix} = \text{rank} \begin{bmatrix} zI - A_{22}^o \\ -A_{21}^o \end{bmatrix} + (p - m) \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

Poichè  $(A_{22}^o, A_{21}^o)$  è osservabile per ipotesi, il test PBH dà come risultato

$$\text{rank} \begin{bmatrix} zI - A_{22}^o \\ -A_{21}^o \end{bmatrix} = n - p - r \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

e quindi

$$\text{rank} \begin{bmatrix} zI - \tilde{A}_{11} \\ -\tilde{C}_1 \end{bmatrix} = n - m - r \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

il che implica, come volevasi dimostrare, che la coppia  $(\tilde{A}_{11}, \tilde{C}_1)$  è osservabile.  $\square$

Il passo successivo è ora quello di determinare una legge di controllo che induca lo sliding.

### 3.3.2 Sintesi della legge di controllo

Si ipotizzi l'esistenza di  $K_1 \in \mathbb{R}^{m' \times (p-m)}$  tale per cui  $\tilde{A}_{11} - \tilde{B}_1 K_1 \tilde{C}_1$  sia stabile. Sia

$$K = T_{m'} \begin{bmatrix} K_1 \\ K_2 \end{bmatrix} \quad (3.41)$$

in cui  $K_2 \in \mathbb{R}^{(m-m') \times (p-m)}$  è arbitraria e la matrice  $T_{m'} \in \mathbb{R}^{m \times m}$  è stata definita in (3.40). Allora, purchè gli zeri invarianti siano stabili, si ha

$$\lambda(A_{11} - A_{12}KC_1) = \lambda(A_{11}^o) \cup \lambda(\tilde{A}_{11} - \tilde{B}_1K_1\tilde{C}_1)$$

e così risulta stabile la matrice  $A_{11} - A_{12}KC_1$ . Si scelga

$$F = F_2[K \ I_m]T^T$$

con  $F_2 \in \mathbb{R}^{m \times m}$  matrice non singolare. Si introduca quindi il cambio di coordinate non-singolare  $x \mapsto \bar{T}x$  definito dalla matrice

$$\bar{T} = \begin{bmatrix} I_{(n-m)} & 0 \\ KC_1 & I_m \end{bmatrix} \quad (3.42)$$

in cui la matrice  $C_1$  è stata definita in (3.31). In questo nuovo sistema di coordinate, la tripla  $(\bar{A}, \bar{B}, F\bar{C})$  si partiziona in questo modo

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} \bar{A}_{11} & \bar{A}_{12} \\ \bar{A}_{21} & \bar{A}_{22} \end{bmatrix} \quad \bar{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ B_2 \end{bmatrix} \quad F\bar{C} = [0 \ F_2] \quad (3.43)$$

in cui  $\bar{A}_{11} = A_{11} - A_{12}KC_1$  è stabile. Questa è la stessa struttura presa in considerazione per la (3.22) e quindi si può utilizzare la stessa legge di controllo già analizzata in quel frangente per indurre uno sliding mode su  $\mathcal{S}$ . L'ingresso di controllo è quindi dato da

$$u(t) = -\gamma Fy(t) - \nu_y \quad (3.44)$$

in cui

$$\nu_y = \begin{cases} \rho(t, y) \frac{Fy(t)}{\|Fy(t)\|} & \text{se } Fy \neq 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad (3.45)$$

e

$$\gamma > \frac{1}{2} \lambda_{\max}((F_2^{-1})^T(Q_3 + Q_2^T Q_1^{-1} Q_2)F_2^{-1}) \quad (3.46)$$

in cui le matrici  $Q_1$ ,  $Q_2$  e  $Q_3$  sono state definite in (3.13), (3.16) e (3.17) mentre  $\rho(t, y)$  è stata definita in (3.21). Con ragionamenti analoghi a quelli visti in precedenza, si può argomentare la stabilità del sistema e affermare quindi che uno sliding motion ideale è indotto su  $\mathcal{S}$ .

Questo risultato viene riassunto dalla seguente proposizione

**Proposizione 3.3.5.** *Esiste una matrice  $F$  che definisce una superficie  $\mathcal{S}$  in cui ha luogo uno sliding motion ideale e stabile con un'unica legge di controllo equivalente se e solo se*

1. *gli zeri invarianti di  $(A, B, C)$  appartengono alla regione  $\mathbb{C}_-$ .*
2. *la tripla  $(\tilde{A}_{11}, \tilde{B}_1, \tilde{C}_1)$  è stabilizzabile con una retroazione dall'uscita.*

### 3.4 Metodo model reference utilizzando l'uscita

Nel capitolo precedente si è impiegata una strategia, che è stata chiamata di ‘model-following’ per affrontare e risolvere il problema del tracking. Ipotesi fondamentale era la conoscenza del vettore di stato e di tutte le sue componenti. In questo paragrafo si cercherà di risolvere tale problema supponendo di aver accesso solamente alle informazioni relative all'uscita del sistema. L'intenzione è quella di formulare una legge di controllo che utilizzi i dati raccolti dall'uscita del sistema in esame e quelli raccolti dalle variabili di stato del modello di riferimento in modo da annullare le differenze tra vettore di stato del sistema e vettore di stato del modello.

Si consideri, come punto di partenza, il sistema (3.1) e si definisca il nuovo sistema dinamico, che verrà chiamato ‘modello ideale’

$$\dot{x}_m(t) = A_m x_m(t) + B_m r(t) \quad (3.47)$$

$$y_m(t) = C x_m(t) \quad (3.48)$$

in cui  $x_m \in \mathbb{R}^n$  è lo stato del modello e  $r(t)$  l'ingresso di riferimento. Per ipotesi, si assuma che la matrice  $A_m$  sia stabile e, per garantire che ci sia corrispondenza tra modello e sistema reale, si ammetta l'esistenza di opportune matrici  $L_x$  e  $L_r$  tali per cui

$$A_m = A + B L_x \quad e \quad B_m = B L_r \quad (3.49)$$

L'obiettivo è quello di rendere asintoticamente stabile la dinamica dell'errore

$$e(t) \triangleq x(t) - x_m(t) \quad (3.50)$$

Utilizzando (3.1) e le equazioni (3.47) e (3.48), si ottiene che l'errore soddisfa la

$$\dot{e}(t) = A e(t) + B(u(t) + \xi(t, x, u) - L_x x_m(t) - L_r r(t)) \quad (3.51)$$

La legge di controllo che si vuole utilizzare ha la forma

$$u(t) = u_f(t) + u_e(t) \quad (3.52)$$

in cui  $u_e(t)$  dipende solo da  $e_y = C e$  mentre il termine  $u_f(t)$  è dato da  $u_f(t) = L_x x_m(t) + L_r r(t)$ ; ma allora si ha

$$\dot{e}(t) = A e(t) + B(u_e(t) + \xi(t, x, u)) \quad (3.53)$$

Il problema è dunque diventato quello di determinare la componente  $u_e(t)$ , utilizzando la sola uscita del sistema, per stabilizzare il sistema (3.53). Scritto in questa forma però, il problema è identico a quello del regolatore già affrontato in questo capitolo per cui sono applicabili i risultati già ottenuti.



# Capitolo 4

## Stimatori sliding mode

Nei primi due capitoli è stata sviluppata la teoria che sta alla base del controllo sliding mode. L'ipotesi implicita che è stata fatta, è stata di considerare sempre accessibile il vettore di stato. Il terzo capitolo ha affrontato il problema di determinare un ingresso di controllo quando questa ipotesi è violata; quando cioè si possono utilizzare solamente i dati di uscita. Anche in questo capitolo si affronterà il problema supponendo di non conoscere lo stato interno ma si cercherà di utilizzare l'uscita per creare una stima di tale stato ignoto, grazie ad un sistema dinamico chiamato appunto *stimatore*.

Si consideri il sistema lineare dato da

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned} \tag{4.1}$$

in cui  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$  e  $p \geq m$ . Si assuma inoltre che le matrici  $B$  e  $C$  siano di rango pieno e che la coppia  $(A, C)$  sia osservabile.

### 4.1 Stimatore di Utkin

Come primo passo, considerando che si stanno utilizzando solamente le uscite, è opportuno un cambio di coordinate in modo che esse compaiano come componenti dello stato. Con la stessa tecnica vista nel precedente capitolo, si consideri la trasformazione  $x \mapsto T_c x$  in cui

$$T_c = \begin{bmatrix} N_c^T \\ C \end{bmatrix} \tag{4.2}$$

dove le colonne di  $N_c \in \mathbb{R}^{n \times (n-p)}$  generano lo spazio nullo della matrice  $C$ . Questa trasformazione è non-singolare e, rispetto a queste nuove coordinate, la matrice di uscita è

$$CT_c^{-1} = [0 \ I_p]$$

Le altre matrici si possono invece partizionare in questo modo

$$T_c A T_c^{-1} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad T_c B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}$$

La dinamica dello stato si riscrive così

$$\dot{x}_1(t) = A_{11}x_1(t) + A_{12}y(t) + B_1u(t) \quad (4.3)$$

$$\dot{y}(t) = A_{21}x_1(t) + A_{22}y(t) + B_2u(t) \quad (4.4)$$

in cui il nuovo stato è appunto

$$T_c x = \begin{bmatrix} \underbrace{x_1}_{n-p} \\ \underbrace{y}_p \end{bmatrix}$$

Lo stimatore proposto da Utkin (1981), ha la forma

$$\dot{\hat{x}}_1(t) = A_{11}\hat{x}_1(t) + A_{12}\hat{y}(t) + B_1u(t) + L\nu(t) \quad (4.5)$$

$$\dot{\hat{y}}(t) = A_{21}\hat{x}_1(t) + A_{22}\hat{y}(t) + B_2u(t) - \nu(t) \quad (4.6)$$

in cui  $(\hat{x}_1, \hat{y})$  rappresentano le stime di  $(x_1, y)$ ,  $L \in \mathbb{R}^{(n-p) \times p}$  è una matrice costante di guadagno di retroazione e la  $i$ -esima componente del vettore discontinuo  $\nu$  è definita in questo modo

$$\nu_i = M \operatorname{sgn}(\hat{y}_i - y_i) \quad (4.7)$$

con  $M \in \mathbb{R}_+$ .

Si fa notare che non sarebbe necessario stimare la variabile  $y(t)$  in quanto rappresenta una misura che si ha disposizione. Si potrebbe infatti dimostrare (vedi [11]) che i risultati che si presenteranno, si otterrebbero anche con uno stimatore di ordine ridotto per la sola componente  $x_1$ . Tuttavia si sceglie di non utilizzare questa soluzione apparentemente più semplice perchè lo stimatore (4.6) si rivela più adatto nelle situazioni, sicuramente concrete, in cui i dati delle misurazioni sono affetti da rumore, grazie appunto ad un effetto di filtraggio del rumore.

Se l'errore tra il vettore 'vero' e quello stimato è espresso da  $e_1 = \hat{x}_1 - x_1$  e  $e_y = \hat{y} - y$ , allora dalle equazioni da (4.3) a (4.6), si ottiene

$$\dot{e}_1(t) = A_{11}e_1(t) + A_{12}e_y(t) + L\nu(t) \quad (4.8)$$

$$\dot{e}_y(t) = A_{21}e_1(t) + A_{22}e_y(t) - \nu(t) \quad (4.9)$$

Se la coppia  $(A, C)$  è osservabile allora si può concludere, con un ragionamento duale a quello fatto per dimostrare la proposizione 1.3.4, che anche la coppia  $(A_{11}, A_{21})$  è osservabile. Come

conseguenza di ciò, è possibile determinare  $L$  in modo che lo spettro di  $A_{11} + LA_{21}$  appartenga alla regione  $\mathbb{C}_-$ . Si definisca ora l'ulteriore cambio di coordinate, dipendente da  $L$ , in questo modo

$$\tilde{T} = \begin{bmatrix} I_{n-p} & L \\ 0 & I_p \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

e sia  $\tilde{e}_1 = e_1 + Ly$ . La dinamica dell'errore, rispetto a questo nuovo cambio di coordinate, è espressa dalle seguenti equazioni

$$\dot{\tilde{e}}_1(t) = \tilde{A}_{11}\tilde{e}_1(t) + \tilde{A}_{12}e_y(t) \quad (4.11)$$

$$\dot{e}_y(t) = A_{21}\tilde{e}_1(t) + \tilde{A}_{22}e_y(t) - \nu \quad (4.12)$$

in cui  $\tilde{A}_{11} = A_{11} + LA_{21}$ ,  $\tilde{A}_{12} = A_{12} + LA_{22} - \tilde{A}_{11}L$  e  $\tilde{A}_{22} = A_{22} - A_{21}L$ .

Dalla (4.12) segue che, nel dominio  $\Omega$

$$\Omega = \left\{ (e_1, e_y) : \|A_{21}e_1\| + \frac{1}{2}\lambda_{\max}(\tilde{A}_{22} + \tilde{A}_{22}^T)\|e_y\| < M - \eta \right\}. \quad (4.13)$$

in cui  $\eta < M$  è uno scalare positivo piccolo in modulo, la condizione di raggiungibilità

$$e_y^T \dot{e}_y < -\eta\|e_y\| \quad (4.14)$$

è soddisfatta. Di conseguenza uno sliding mode ideale ha luogo sulla superficie

$$\mathcal{S}_o = \{(e_1, e_y) : e_y = 0\}. \quad (4.15)$$

Da ciò segue che, dopo un qualche tempo finito  $t_s$  e per tutti gli istanti di tempo successivi,  $e_y = 0$  e  $\dot{e}_y = 0$ . L'equazione (4.11) allora diventa

$$\dot{\tilde{e}}_1(t) = \tilde{A}_{11}\tilde{e}_1(t) \quad (4.16)$$

che, per la scelta fatta su  $L$ , rappresenta la dinamica di un sistema stabile e quindi  $\tilde{e}_1 \rightarrow 0$ . Di conseguenza  $\hat{x}_1 \rightarrow x_1$  quando  $t \rightarrow \infty$ . L'equazione (4.16) rappresenta la dinamica dell'errore nello sliding mode di ordine ridotto.

## 4.2 Stimatore discontinuo

Si consideri il sistema dinamico

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) + D\xi(t, x, u) \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned} \quad (4.17)$$

in cui  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$  e  $D \in \mathbb{R}^{n \times q}$  con  $p \geq q$ . Si assuma che le matrici  $B, C$  e  $D$  siano di rango pieno e che la funzione  $\xi : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^q$  sia ignota ma limitata

$$\|\xi(t, x, u)\| \leq r_1\|u\| + \alpha(t, y) \quad (4.18)$$

con  $r_1$  scalare di valore noto e  $\alpha : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}_+$  che è una funzione nota.

### 4.2.1 La forma canonica per lo stimatore

Si supponga che esista un cambio di coordinate lineare  $T_o$  in modo che il sistema possa essere riscritto in questo modo

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= \mathcal{A}_{11}x_1(t) + \mathcal{A}_{12}y(t) + \mathcal{B}_1u(t) \\ \dot{y}(t) &= \mathcal{A}_{21}x_1(t) + \mathcal{A}_{22}y(t) + \mathcal{B}_2u(t) + \mathcal{D}_2\xi(t, x, u)\end{aligned}\quad (4.19)$$

in cui  $x_1 \in \mathbb{R}^{(n-p)}$ ,  $y \in \mathbb{R}^p$  e la matrice  $\mathcal{A}_{11}$  ha autovalori stabili. Si consideri uno stimatore nella forma

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}}_1(t) &= \mathcal{A}_{11}\hat{x}_1(t) + \mathcal{A}_{12}\hat{y}(t) + \mathcal{B}_1u(t) - \mathcal{A}_{12}e_y(t) \\ \dot{\hat{y}}(t) &= \mathcal{A}_{21}\hat{x}_1(t) + \mathcal{A}_{22}\hat{y}(t) + \mathcal{B}_2u(t) - (\mathcal{A}_{22} - \mathcal{A}_{22}^s)e_y(t) + \nu(t)\end{aligned}\quad (4.20)$$

in cui  $\mathcal{A}_{22}^s$  è una matrice di progetto e stabile e  $e_y = \hat{y} - y$ . Sia  $P_2 \in \mathbb{R}^{p \times p}$  la matrice di Lyapunov, simmetrica e definita positiva, per  $\mathcal{A}_{22}^s$ , allora il vettore discontinuo  $\nu$  è definito come segue

$$\nu = \begin{cases} -\rho(t, y, u) \|\mathcal{D}_2\| \frac{P_2 e_y}{\|P_2 e_y\|} & \text{se } e_y \neq 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}\quad (4.21)$$

in cui la funzione scalare  $\rho : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}_+$  soddisfa la

$$\rho(t, y, u) \geq r_1 \|u\| + \alpha(t, y) + \gamma_o \quad (4.22)$$

con  $\gamma_o$  scalare positivo. Definendo l'errore di stima  $e_1 = \hat{x} - x$  allora

$$\dot{e}_1(t) = \mathcal{A}_{11}e_1(t) \quad (4.23)$$

$$\dot{e}_y(t) = \mathcal{A}_{21}e_1(t) + \mathcal{A}_{22}^s e_y(t) + \nu(t) - \mathcal{D}_2\xi(t, x, u) \quad (4.24)$$

**Proposizione 4.2.1.** *Esiste una famiglia di matrici simmetriche e definite positive  $P_2$  tali per cui la dinamica dell'errore, espressa dalle equazioni (4.23) e (4.24), è asintoticamente stabile.*

*Dimostrazione.* Siano  $Q_1 \in \mathbb{R}^{(n-p) \times (n-p)}$  e  $Q_2 \in \mathbb{R}^{p \times p}$  matrici simmetriche e definite positive. Si definisce  $P_2 \in \mathbb{R}^{p \times p}$  l'unica soluzione simmetrica e definita positiva dell'equazione di Lyapunov

$$P_2 \mathcal{A}_{22}^s + (\mathcal{A}_{22}^s)^T P_2 = -Q_2 \quad (4.25)$$

Con tale  $P_2$ , si definisce

$$\hat{Q} = \mathcal{A}_{21}^T P_2 Q_2^{-1} P_2 \mathcal{A}_{21} + Q_1 \quad (4.26)$$

per la quale risulta verificato che  $\hat{Q} = \hat{Q}^T > 0$ . Sia  $P_1 \in \mathbb{R}^{(n-p) \times (n-p)}$  l'unica soluzione simmetrica e definita positiva dell'equazione di Lyapunov

$$P_1 \mathcal{A}_{11} + \mathcal{A}_{11}^T P_1 = -\hat{Q} \quad (4.27)$$

Si consideri ora la forma quadratica

$$V(e_1, e_y) = e_1^T P_1 e_1 + e_y^T P_2 e_y \quad (4.28)$$

come funzione di Lyapunov. La derivata lungo la traiettoria è

$$\dot{V} = -e_1^T \hat{Q} e_1 + e_1^T \mathcal{A}_{21}^T P_2 e_y + e_y^T P_2 \mathcal{A}_{21} e_1 - e_y^T Q_2 e_y + 2e_y^T P_2 \nu - 2e_y^T P_2 \mathcal{D}_2 \xi \quad (4.29)$$

Si può verificare che

$$(e_y - Q_2^{-1} P_2 \mathcal{A}_{21} e_1)^T Q_2 (e_y - Q_2^{-1} P_2 \mathcal{A}_{21} e_1) \equiv e_y^T Q_2 e_y - e_1^T \mathcal{A}_{21}^T P_2 e_y - e_y^T P_2 \mathcal{A}_{21} e_1 + e_1^T \mathcal{A}_{21}^T P_2 Q_2^{-1} P_2 \mathcal{A}_{21} e_1 \quad (4.30)$$

Sostituendo l'identità (4.30) nella (4.29) e definendo, per semplificare la notazione,  $\tilde{e}_y \triangleq (e_y - Q_2^{-1} P_2 \mathcal{A}_{21} e_1)$ , si ottiene

$$\begin{aligned} \dot{V} &= -e_1^T \hat{Q} e_1 + e_1^T \mathcal{A}_{21}^T P_2 Q_2^{-1} P_2 \mathcal{A}_{21} e_1 - \tilde{e}_y^T Q_2 \tilde{e}_y + 2e_y^T P_2 \nu - 2e_y^T P_2 \mathcal{D}_2 \xi \\ &= -e_1^T Q_1 e_1 - \tilde{e}_y^T Q_2 \tilde{e}_y + 2e_y^T P_2 \nu - 2e_y^T P_2 \mathcal{D}_2 \xi \\ &= -e_1^T Q_1 e_1 - \tilde{e}_y^T Q_2 \tilde{e}_y - 2\rho(t, y, u) \|\mathcal{D}_2\| \cdot \|P_2 e_y\| - 2e_y^T P_2 \mathcal{D}_2 \xi \end{aligned}$$

Utilizzando ora la (4.18) e la (4.22) si ottiene

$$\begin{aligned} \dot{V} &\leq -e_1^T Q_1 e_1 - \tilde{e}_y^T Q_2 \tilde{e}_y - 2\rho(t, y, u) \|\mathcal{D}_2\| \cdot \|P_2 e_y\| + 2\|\mathcal{D}_2\| (r_1 \|u\| + \alpha(y)) \|P_2 e_y\| \\ &\leq -e_1^T Q_1 e_1 - \tilde{e}_y^T Q_2 \tilde{e}_y - 2\gamma_o \|\mathcal{D}_2\| \cdot \|P_2 e_y\| \\ &< 0 \quad \text{per } (e_1, e_y) \neq 0 \end{aligned}$$

e quindi la stabilità è provata grazie al criterio di stabilità di Lyapunov.  $\square$

Si consideri dunque l'iperpiano, definito nello spazio dell'errore, e dato da

$$\mathcal{S}_o = \{e \in \mathbb{R}^n : Ce = 0\}. \quad (4.31)$$

Per la precedente proposizione, è possibile affermare il seguente

**Corollario 4.2.2.** *Nell'iperpiano  $\mathcal{S}_o$  appena definito, ha luogo uno sliding mode ideale*

*Dimostrazione.* Si consideri la forma quadratica

$$V_s(e_y) = e_y^T P_2 e_y \quad (4.32)$$

Ragionando similmente a quanto fatto nella dimostrazione della precedente proposizione, si ottiene

$$\begin{aligned} \dot{V}_s &= -e_y^T Q_2 e_y + 2e_y^T P_2 \mathcal{A}_{21} e_1 + 2e_y^T P_2 (\nu - \mathcal{D}_2 \xi) \\ &\leq 2\|P_2 e_y\| \cdot \|\mathcal{A}_{21} e_1\| - 2\gamma_o \|\mathcal{D}_2\| \cdot \|P_2 e_y\| \end{aligned}$$

in cui

$$\|P_2 e_y\|^2 = (P_2^{1/2} e_y)^T P_2 (P_2^{1/2} e_y) \geq \lambda_{\min}(P_2) \|P_2^{1/2} e_y\|^2 = \lambda_{\min}(P_2) V_s \quad (4.33)$$

Si deduce per cui che, nel dominio  $\Omega = \{(e_1, e_y) : \|\mathcal{A}_{21} e_1\| < \|\mathcal{D}_2\| \gamma_o - \eta\}$ , in cui  $\eta$  è uno scalare positivo, risulta valida la seguente

$$\dot{V}_s < -2\eta \|P_2 e_y\| \leq -2\eta \sqrt{\lambda_{\min}(P_2)} \sqrt{V_s} \quad (4.34)$$

Per la proposizione 4.2.1 l'errore  $e_y$  entra in  $\Omega$  in tempo finito e ivi rimane. Si conclude dunque che in tempo finito ha luogo uno sliding mode ideale sulla superficie  $\mathcal{S}_o$ .  $\square$

Se  $\hat{x}$  rappresenta la stima dello stato  $x$  ed  $e = \hat{x} - x$  l'errore, allora si scrive lo stimatore come

$$\dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + Bu(t) - G_l C e(t) + G_n \nu(t) \quad (4.35)$$

in cui il guadagno lineare ha la forma

$$G_l = T_o^{-1} \begin{bmatrix} \mathcal{A}_{12} \\ \mathcal{A}_{22} - \mathcal{A}_{22}^s \end{bmatrix} \quad (4.36)$$

mentre quello non lineare

$$G_n = \|\mathcal{D}_2\| T_o^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ I_p \end{bmatrix} \quad (4.37)$$

e

$$\nu = \begin{cases} -\rho(t, y, u) \frac{P_2 C e}{\|P_2 C e\|} & \text{se } C e \neq 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad (4.38)$$

L'utilità della proposizione 4.2.1 dipende dalla possibilità di identificare una classe di sistemi che possano essere riscritti nella forma canonica (4.19). Questo verrà trattato nel paragrafo seguente.

## 4.2.2 Condizione di esistenza

Sia  $(A, B, C, D)$  la rappresentazione della parte lineare del sistema (4.17) e si consideri il problema di costruire uno stimatore per il sistema, che sia della forma

$$\dot{z}(t) = Az(t) + Bu(t) - G_l C e(t) + G_n \nu(t) \quad (4.39)$$

in cui  $e = z - x$ ,  $\nu$  è discontinuo sull'iperpiano  $S_o = \{e \in \mathbb{R}^n : C e = 0\}$ , e  $G_l, G_n \in \mathbb{R}^{n \times p}$  sono appropriate matrici di guadagno. Lo scopo è quello di determinare una classe di sistemi per cui lo stimatore (4.39) garantisce asintotica stabilità per l'errore, a dispetto della presenza dell'incertezza del sistema (4.17).

La presentazione che segue è del tutto identica a quella del lemma 3.3.1 vista nel paragrafo 3.3.1; l'unica differenza sta nel partizionamento delle matrici in gioco<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Si considera il caso particolare  $B = D$ , per soddisfare la *matching - condition*

**Lemma 4.2.3.** *Sia  $(A, D, C)$  una tripla che rappresenta un sistema lineare con  $p > q$  e si supponga che  $\text{rank}(CD) = q$ . Allora esiste un cambio di coordinate tale per cui, la tripla in oggetto, rispetto alle nuove  $(\bar{A}, \bar{D}, \bar{C})$  ha la seguente struttura*

1. *La matrice del sistema si scrive*

$$\bar{A} = \left[ \begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline A_{211} & A_{22} \\ A_{212} & \end{array} \right] \quad (4.40)$$

in cui  $A_{11} \in \mathbb{R}^{(n-p) \times (n-p)}$ ,  $A_{211} \in \mathbb{R}^{(p-q) \times (n-p)}$  e, se a loro volta venissero partizionate, avrebbero la struttura

$$A_{11} = \begin{bmatrix} A_{11}^o & A_{12}^o \\ 0 & A_{22}^o \end{bmatrix} \quad e \quad A_{211} = [0 \ A_{21}^o] \quad (4.41)$$

in cui  $A_{11}^o \in \mathbb{R}^{r \times r}$  e  $A_{21}^o \in \mathbb{R}^{(p-q) \times (n-p-r)}$  per un qualche  $r \geq 0$  e la coppia  $(A_{22}^o, A_{21}^o)$  è osservabile. Inoltre, gli autovalori di  $A_{11}^o$  sono gli zeri invarianti di  $(A, D, C)$ .

2. *La matrice del disturbo è del tipo*

$$\bar{D} = \begin{bmatrix} 0 \\ D_2 \end{bmatrix} \quad (4.42)$$

in cui  $D_2 \in \mathbb{R}^{q \times q}$  è non-singolare.

3. *La matrice di uscita ha la forma*

$$\bar{C} = [0 \ T] \quad (4.43)$$

con  $T \in \mathbb{R}^{p \times p}$  ortogonale.

*Dimostrazione.* La dimostrazione è identica a quella del lemma 3.3.1 alla quale si rimanda.  $\square$

Si danno ora alcune notazioni, in modo da rendere la partizione delle matrici compatibili con quelle date nel lemma 4.2.3

$$A_{21} = \begin{bmatrix} A_{211} \\ A_{212} \end{bmatrix} \quad e \quad \bar{D} = \begin{bmatrix} 0 \\ \bar{D}_2 \end{bmatrix} \quad (4.44)$$

in cui  $\bar{D}_2$  è definita come

$$\bar{D}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ \underbrace{\phantom{0}}_{p-q} \\ D_2 \\ \underbrace{\phantom{0}}_q \end{bmatrix} \quad (4.45)$$

A questo punto si è finalmente in grado di dimostrare il risultato finale a cui si aspirava

**Proposizione 4.2.4.** *Lo stimatore sliding mode della forma (4.39), il quale è insensibile alla classe di disturbi (4.17), esiste se e solo se per il sistema lineare nominale valgono le seguenti condizioni*

- $\text{rank}(CD) = q$ .
- *Gli zeri invarianti di  $(A, D, C)$  appartengono al semipiano  $\mathbb{C}_-$ .*

*Dimostrazione.*

(prova della necessarietà della condizione)

Siano  $G_l$  e  $G_n$  matrici tali per cui  $A_0 = A - G_l C$  è stabile e si assuma che, sull'iperpiano  $\mathcal{S}_o$ , abbia luogo uno sliding mode ideale e che sia insensibile al disturbo. L'errore soddisfa

$$\dot{e}(t) = A_0 e(t) - D\xi(t, x, u) + G_n \nu \quad (4.46)$$

Affinchè esista un unico controllo equivalente,  $\det(CG_n) \neq 0$  e lo sliding mode soddisfa la

$$\dot{e}(t) = (I - G_n(CG_n)^{-1}C)A_0 e(t) + (I - G_n(CG_n)^{-1}C)D\xi(t, x, u) \quad (4.47)$$

L'insensibilità all'incertezza è espressa da

$$(I - G_n(CG_n)^{-1}C)D = 0 \quad (4.48)$$

o, equivalentemente

$$D = G_n(CG_n)^{-1}(CD) \quad (4.49)$$

Poichè, per ipotesi,  $\text{rank}(D) = q$ , dalla (4.49) si ha che  $\text{rank}(CD) = q$ . Senza perdita di generalità si può assumere che il sistema  $(A, D, C)$  sia nella forma canonica presentata nel lemma 4.2.3. Se la matrice non lineare è partizionata in questo modo

$$G_n = \begin{bmatrix} \underbrace{G_1}_{n-p} \\ \underbrace{G_2}_p \end{bmatrix} \quad (4.50)$$

allora,  $CG_n = TG_2$  e  $\det(G_2) \neq 0$ . Dall'equazione (4.47) risulta che i poli del sistema di ordine ridotto sono dati da

$$\lambda((A_0)_{11} - G_1 G_2^{-1} (A_0)_{21}) \quad (4.51)$$

in cui  $(A_0)_{11}$  e  $(A_0)_{21}$  rappresentano il sotto-blocco in alto a sinistra e quello in basso a sinistra nella matrice di anello chiuso  $A_0$  partizionata secondo quanto specificato per la forma canonica. Per definizione  $A_0 = A - G_l C$  quindi

$$(A_0)_{11} = A_{11} - (G_l C)_{11} \quad (4.52)$$



in cui, analogamente,  $(G_l C)_{11}$  rappresenta il sotto-blocco in alto a sinistra nella matrice quadrata  $G_l C$ . Tuttavia  $(G_l C)_{11} = 0$  per ogni  $G_l \in \mathbb{R}^{n \times p}$  per cui  $(A_0)_{11} = A_{11}$ . Similmente, si può dedurre che  $(A_0)_{21} = A_{21}$  e di conseguenza

$$\lambda((A_0)_{11} - G_1 G_2^{-1} (A_0)_{21}) = \lambda(A_{11} - G_1 G_2^{-1} A_{21}) \quad (4.53)$$

Dall'equazione (4.49) segue che

$$G_1 G_2^{-1} \bar{D}_2 = 0 \quad (4.54)$$

e questo, considerando la struttura che è stata data per  $\bar{D}_2$ , implica

$$G_1 G_2^{-1} = [\bar{G} \ 0] \quad (4.55)$$

in cui  $\bar{G} \in \mathbb{R}^{(n-p) \times (p-q)}$  e quindi, per la definizione di  $A_{21}$ , segue che

$$A_{11} - G_1 G_2^{-1} A_{21} = A_{11} - \bar{G} A_{211} \quad (4.56)$$

Per costruzione, la coppia  $(A_{11}, A_{211})$  è tale per cui

$$\{\text{gli zeri di } (A, D, C)\} = \lambda(A_{11}^o) \subset \lambda(A_{11} - \bar{G} A_{211}) \quad \forall \bar{G} \in \mathbb{R}^{(n-p) \times (p-q)} \quad (4.57)$$

e quindi, per avere uno sliding mode stabile, gli zeri invarianti devono appartenere alla regione  $\mathbb{C}_-$ .

(prova della sufficienza della condizione)

Sia  $(A, D, C)$  la terna rappresentativa del sistema e si supponga  $\text{rank}(CD) = q$  e che gli zeri invarianti del sistema appartengano alla regione  $\mathbb{C}_-$ . Senza perdita di generalità si può assumere che il sistema sia già scritto nella forma del lemma 4.2.3 in cui la matrice  $A_{11}^o$  è stabile. Come conseguenza esiste una matrice  $L \in \mathbb{R}^{(n-p) \times (p-q)}$  tale per cui  $A_{11} + LA_{211}$  è stabile. Si definisca ora la seguente trasformazione non singolare

$$T_L = \begin{bmatrix} I_{n-p} & \bar{L} \\ 0 & T \end{bmatrix} \quad (4.58)$$

in cui

$$\bar{L} = [L \ 0_{(n-p) \times q}] \quad (4.59)$$

Dopo la trasformazione, rispetto a  $T_L$ , la nuova matrice di uscita è

$$C = CT_L^{-1} = [0 \ I_p] \quad (4.60)$$

Per le definizioni di  $\bar{L}$  e  $\bar{D}_2$  risulta

$$\bar{L} \bar{D}_2 = [L \ 0] \begin{bmatrix} 0 \\ D_2 \end{bmatrix} = 0 \quad (4.61)$$

e quindi, la matrice di distribuzione dell'incertezza, è data da

$$\mathcal{D} = T_L D = \begin{bmatrix} \bar{L}\bar{D}_2 \\ T\bar{D}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ T\bar{D}_2 \end{bmatrix} \quad (4.62)$$

A questo punto, se  $\mathcal{A} = T_L A T_L^{-1}$ , si dimostra per calcolo diretto che

$$\mathcal{A}_{11} = A_{11} + L A_{211} \quad (4.63)$$

che è stabile per la scelta che è stata fatta su  $L$ . La terna  $(\mathcal{A}, \mathcal{D}, \mathcal{C})$  è ora nella forma canonica (4.19) e quindi, per la proposizione 4.2.1, esiste uno stimatore.  $\square$

# Capitolo 5

## Il problema del tracking con i dati di uscita

In questo capitolo si considera lo sviluppo di uno schema che permetta all'uscita del sistema di 'inseguire' un determinato segnale costante, sotto l'ipotesi di non conoscere lo stato del sistema ma, al solito, solo i dati di uscita. Si vuole coniugare quanto già visto nel capitolo 2, in merito appunto al problema del tracking, con la tecnica di stima dello stato vista nel precedente capitolo.

### 5.1 Descrizione del problema e progetto di uno stimatore

Si consideri il sistema dinamico

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) + B\xi(t, x, u) \\ y(t) &= Cx(t)\end{aligned}\tag{5.1}$$

in cui  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $u \in \mathbb{R}^m$  e  $y \in \mathbb{R}^p$  con  $m \leq p < n$ . Si assuma che il sistema nominale  $(A, B, C)$  sia noto e che le matrici  $B$  e  $C$  siano di rango pieno. La funzione  $\xi : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  è sconosciuta e rappresenta le non linearità e le incertezze sul modello. Essa è limitata e soddisfa

$$\|\xi(t, x, u)\| \leq k_1 \|u(t)\| + \alpha(t, y)\tag{5.2}$$

per un qualche scalare positivo  $k_1 < 1$  e per una funzione nota  $\alpha : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}_+$ . In aggiunta si ipotizzi che il sistema soddisfi le seguenti proposizioni

1. La coppia  $(A, B)$  è controllabile.
2. Il coefficiente di Markov  $CB$  è di rango pieno.
3. Gli zeri invarianti di  $(A, B, C)$  appartengono alla regione  $\mathbb{C}_-$ .

Senza perdita di generalità si può inoltre ipotizzare che il sistema sia già in forma normale

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ B_2 \end{bmatrix} \quad C = [C_1 \ C_2] \quad (5.3)$$

in cui  $A_{11} \in \mathbb{R}^{(n-m) \times (n-m)}$ ,  $B_2 \in \mathbb{R}^{m \times m}$  e la matrice  $C_2 \in \mathbb{R}^{p \times m}$ . La matrice  $B_2$  è non singolare per le ipotesi fatte sul rango di  $B$ . Se  $z(t)$  rappresenta una stima per lo stato e

$$e(t) = z(t) - x(t) \quad (5.4)$$

è l'errore di stima, allora lo stimatore considerato ha la forma

$$\dot{z}(t) = Az(t) + Bu(t) - GCe(t) + B\nu_o(t) \quad (5.5)$$

in cui la matrice  $G$  è scelta in modo tale che la matrice di anello chiuso  $A_0 = A - GC$  sia stabile ed abbia una matrice  $P$  che soddisfi l'equazione di Lyapunov

$$PA_0 + A_0^T P = -Q \quad (5.6)$$

per una qualche  $Q$  definita positiva, e per la quale sia verificata la seguente relazione

$$PB = C^T F^T \quad (5.7)$$

per  $F \in \mathbb{R}^{m \times p}$ . Il vettore discontinuo  $\nu_o$  è dato da

$$\nu_o = \begin{cases} -\rho_o(u_l, y) \frac{FCe}{\|FCe\|} & \text{se } FCe \neq 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad (5.8)$$

in cui  $\rho_o(u_l, y)$  è una funzione scalare che dipende dalla componente lineare della legge di controllo che in un certo senso è una limite superiore per la norma della funzione incertezza. Come visto nel precedente capitolo, le ipotesi fornite sono necessarie e sufficienti per l'esistenza di tale stimatore che induce uno sliding mode su

$$\mathcal{S}_o = \{e \in \mathbb{R}^n : FCe = 0\} \quad (5.9)$$

## 5.2 Controllore con azione integrale

Si assuma per semplicità che il sistema sia del tipo 'square' (ovvero che  $p = m$ ). Questa ipotesi ulteriore, sebbene non sia necessaria, è utile perchè, nella ricerca di una soluzione, non è necessaria la trasformazione di coordinate vista nel lemma 4.2.3. Si può tuttavia osservare che la formulazione dello stimatore richiede che ci siano almeno tante uscite quanti sono gli ingressi; per cui se la legge di controllo proposta richiede almeno tanti ingressi quante sono le uscite, risulta essenziale un sistema di questo tipo. Si fa notare infine che  $C_2$  è non singolare perchè, per ipotesi,  $C_2 B_2 = CB$  è non singolare.

### 5.2.1 Stimatore per sistemi di tipo square

Per i sistemi ‘quadrati’ la struttura delle equazioni dalla (5.5) alla (5.8) è identica a quella delle equazioni presentate per lo stimatore nel capitolo precedente. Si ipotizzi che la parte lineare di (5.1) sia nella forma normale di (5.3). Poichè  $C_2$  è non singolare, la trasformazione lineare

$$T_c = \begin{bmatrix} I_{n-p} & 0 \\ C_1 & C_2 \end{bmatrix} \quad (5.10)$$

è anch’essa non singolare. Nelle nuove coordinate  $x \mapsto T_c x$  la tripla  $(\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C})$  è data da

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} \mathcal{A}_{11} & A_{12}C_2^{-1} \\ C_1\mathcal{A}_{11} + C_2A_{21} - C_2A_{22}C_2^{-1}C_1 & C_1A_{12}C_2^{-1} + C_2A_{22}C_2^{-1} \end{bmatrix} \quad (5.11)$$

con  $\mathcal{A}_{11} = A_{11} - A_{12}C_2^{-1}C_1$  e con le matrici di ingresso e di uscita che sono date da

$$\mathcal{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ C_2B_2 \end{bmatrix} \quad \mathcal{C} = [0 \ I_p] \quad (5.12)$$

Per il lemma 3.2.1 gli autovalori di  $\mathcal{A}_{11}$  sono gli zeri invarianti di  $(\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C})$  per cui, come conseguenza delle ipotesi fatte, la matrice  $\mathcal{A}_{11}$  è stabile. Il sistema (5.11) e (5.12) è quindi nella forma canonica, per lo stimatore sliding mode, descritta nel precedente capitolo e si può perciò utilizzare la stessa procedura calcolando esplicitamente le matrici  $P_1$  e  $P_2$  tramite le equazioni (4.25) e (4.27). La matrice di Lyapunov  $P$  ed i guadagni  $G$  ed  $F$  si calcolano di conseguenza. Per quanto riguarda  $P$  si ottiene

$$P = \begin{bmatrix} I & 0 \\ C_1 & C_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & P_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ C_1 & C_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_1 + C_1^T P_1 C_1 & C_1^T P_2 C_2 \\ C_2^T P_2 C_1 & C_2^T P_2 C_2 \end{bmatrix} \quad (5.13)$$

mentre per  $G$  si ha:

$$G = \begin{bmatrix} A_{12}C_2^{-1} \\ A_{22}C_2^{-1} - C_2^{-1}A_{22}^s \end{bmatrix} \quad (5.14)$$

in cui  $A_{22}^s$  è una matrice stabile di opportune dimensioni; infine, per  $F$ , risulta

$$F = (P_2 C_2 B_2)^T \quad (5.15)$$

### 5.2.2 Legge di controllo con azione integrale e retroazione dallo stato stimato

La legge di controllo per il problema del tracking, in un sistema lineare del tipo

$$\dot{x} = Ax(t) + Bu(t) \quad (5.16)$$

in cui la coppia  $(A, B)$  si assume essere nella forma (5.3), è del tutto simile a quella presentata nel capitolo 2 eccezion fatta per l'utilizzo di uno stimatore dello stato. Come già visto, si introduca uno stato addizionale  $x_r \in \mathbb{R}^p$  soddisfacente

$$\dot{x}_r(t) = r(t) - y(t) \quad (5.17)$$

in cui il segnale differenziabile  $r(t)$ , soddisfa la

$$\dot{r}(t) = \Gamma(r(t) - R) \quad (5.18)$$

dove  $\Gamma \in \mathbb{R}^{p \times p}$  è una matrice stabile di progetto ed  $R$  il vettore costante che si richiede di riprodurre in uscita del sistema. Si partizioni quindi lo stato aumentato

$$\tilde{x} = \begin{bmatrix} x_r \\ x \end{bmatrix} \quad (5.19)$$

in questo modo

$$\tilde{x} = \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{bmatrix} \quad (5.20)$$

con  $\tilde{x}_1 \in \mathbb{R}^n$  e  $\tilde{x}_2 \in \mathbb{R}^m$ . L'obiettivo è quello di indurre uno sliding mode sulla superficie

$$\mathcal{S} = \{\tilde{x} \in \mathbb{R}^{n+p} : S\tilde{x} = S_r r\} \quad (5.21)$$

in cui  $S \in \mathbb{R}^{m \times (n+p)}$  e  $S_r \in \mathbb{R}^{p \times p}$ . Come nel capitolo 2, si assuma che la matrice  $S$  abbia la forma

$$S = S_2 [M \ I_m] \quad (5.22)$$

in cui  $M \in \mathbb{R}^{m \times n}$  ed il fattore di scala è  $S_2 = \Lambda B_2^{-1}$ . La componente lineare della legge di controllo (2.83) è data da

$$u_L(\tilde{x}, r) = L\tilde{x} + L_r r + L_{\dot{r}} \dot{r} \quad (5.23)$$

dove

$$L = -\Lambda^{-1}(S\tilde{A} - \Phi S) \quad (5.24)$$

$$L_r = -\Lambda^{-1}(\Phi S_r + S_2 M B_r) \quad (5.25)$$

$$L_{\dot{r}} = \Lambda^{-1} S_r \quad (5.26)$$

con  $\Phi$  matrice stabile e  $B_r$  definita nell'equazione (2.75). Il vettore discontinuo  $\nu_c$  è dato da

$$\nu_c = \begin{cases} -\rho_c(u_L, y) \Lambda^{-1} \frac{\bar{P}_2(S\tilde{x} - S_r r)}{\|\bar{P}_2(S\tilde{x} - S_r r)\|} & \text{se } S\tilde{x} \neq S_r r \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad (5.27)$$

in cui  $\bar{P}_2$  è una matrice simmetrica e definita positiva che soddisfa l'equazione di Lyapunov

$$\bar{P}_2^{-1}\Phi^T + \Phi\bar{P}_2^{-1} = -\hat{Q}_2 \quad (5.28)$$

per una qualche matrice  $\hat{Q}_2$ , definita positiva. La funzione positiva scalare  $\rho_c(u_L, y)$  è data da

$$\rho_c(u_L, y) = \|\Lambda\| \frac{k_1\|u_L\| + \alpha(t, y) + k_1\gamma_c\|\Lambda^{-1}\| + \gamma_o}{1 - k_1\kappa(\Lambda)} + \gamma_c \quad (5.29)$$

in cui  $\gamma_o$  e  $\gamma_c$  sono scalari positivi e  $\Lambda \in \mathbb{R}^{m \times m}$  è una matrice diagonale non singolare che soddisfa

$$k_1\kappa(\Lambda) < 1 \quad (5.30)$$

La corrispondente funzione scalare che pre-moltiplica la componente del vettore unico nell'equazione dello stimatore (5.8) è

$$\rho_o(u_L, y) = \frac{k_1\|u_L\| + \alpha(t, y) + k_1\gamma_c\|\Lambda^{-1}\| + \gamma_o}{1 - k_1\kappa(\Lambda)} \quad (5.31)$$

Si noti che, per costruzione

$$\rho_c(u_L, y) = \|\Lambda\|\rho_o(u_L, y) + \gamma_c \quad (5.32)$$

### 5.2.3 Analisi della catena chiusa

Si vogliono ora investigare gli effetti, dell'utilizzo dello stato stimato nella legge di controllo, sulla stabilità del sistema in catena chiusa.

Dalle equazioni (5.1), (5.5) e (5.17) segue che il sistema che rappresenta la dinamica dell'errore e della stima, è dato da

$$\dot{e}(t) = A_0e(t) + B\nu_o(t) - B\xi(t, x, \hat{u}) \quad (5.33)$$

$$\dot{x}_r(t) = r(t) - Cz(t) + e_y(t) \quad (5.34)$$

$$\dot{z}(t) = Az(t) - Ge_y(t) + B(\hat{u}(t) + \nu_o(t)) \quad (5.35)$$

in cui  $e_y(t) = Ce(t)$  e  $\hat{u}(t)$  è l'azione di controllo ottenuta utilizzando la stima  $z(t)$  anziché lo stato  $x(t)$  nelle equazioni (5.23) e (5.27). È conveniente ripartizionare le equazioni (5.34) e (5.35) per ottenere le coordinate

$$\begin{bmatrix} \tilde{z}_1 \\ \tilde{z}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_r \\ z \end{bmatrix} \quad (5.36)$$

con  $\tilde{z}_1 \in \mathbb{R}^n$  e  $\tilde{z}_2 \in \mathbb{R}^m$ . Si effettui poi un'ulteriore trasformazione, tramite la matrice

$$\bar{T} = \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ S_1 & S_2 \end{bmatrix} \quad (5.37)$$

in modo da ottenere il seguente nuovo set di coordinate

$$\begin{bmatrix} \tilde{z}_1 \\ \tilde{z}_2 \end{bmatrix} = \bar{T} \begin{bmatrix} \tilde{z}_1 \\ \tilde{z}_2 \end{bmatrix} \quad (5.38)$$

Si può verificare che, in termini di  $(\tilde{z}_1, \tilde{z}_2)$ , le equazioni da (5.33) a (5.35) diventano

$$\dot{\tilde{z}}_1(t) = \bar{A}_{11}\tilde{z}_1(t) + \bar{A}_{12}(\tilde{z}_2(t) - S_r r(t)) + (B_r + \bar{A}_{12}S_r)r(t) - \bar{G}_1 e_y(t) \quad (5.39)$$

$$\dot{\tilde{z}}_2(t) = \Phi(\tilde{z}_2 - S_r r(t)) + \Lambda \hat{\nu}_c(t) + S_r \dot{r}(t) - (S_1 \bar{G}_1 + S_2 G_2)e_y(t) + \Lambda - \nu_o(t) \quad (5.40)$$

in cui si è definito

$$\bar{G}_1 \triangleq \begin{bmatrix} -I_p \\ G_1 \end{bmatrix} \quad (5.41)$$

con  $G_1 = A_{12}C_2^{-1}$  e  $G_2 = A_{22}C_2^{-1} - C_2^{-1}A_{22}^s$ ;  $\bar{A}_{11} = \tilde{A}_{11} - \tilde{A}_{12}M$  e  $\bar{A}_{12} = \tilde{A}_{12}S_2^{-1}$  con  $\tilde{A}_{11}$  e  $\tilde{A}_{12}$  matrici del sistema con stato aumentato, come definite in (2.74).

Si definisca

$$e_r(t) = r(t) - R \quad (5.42)$$

Dall'equazione (5.18) segue che l'evoluzione di  $e_r(t)$  soddisfa la

$$\dot{e}_r(t) = \Gamma e_r(t) \quad (5.43)$$

Se ora si definisce il cambio di coordinate affine  $(\tilde{z}_1, \tilde{z}_2) \mapsto \zeta$  in cui

$$\zeta \triangleq \begin{bmatrix} \tilde{z}_1 + (\bar{A}_{11})^{-1}(\bar{A}_{12}S_r + B_r)R \\ \tilde{z}_2 - S_r r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \end{bmatrix} \quad (5.44)$$

allora risulta

$$\dot{\zeta}_1(t) = \bar{A}_{11}\zeta_1(t) + \bar{A}_{12}\zeta_2(t) + (B_r + \bar{A}_{12}S_r)e_r(t) - \bar{G}_1 e_y(t) \quad (5.45)$$

$$\dot{\zeta}_2(t) = \Phi\zeta_2(t) + \Lambda \hat{\nu}_c(t) - \bar{G}_2 e_y(t) + \Lambda \nu_o(t) \quad (5.46)$$

dove

$$\bar{G}_2 \triangleq S_1 \bar{G}_1 + S_2 G_2 \quad (5.47)$$

Le equazioni (5.45) e (5.46) possono essere scritte in maniera più compatta come

$$\dot{\zeta}(t) = A_c \zeta(t) + \bar{G}_r e_r(t) - \bar{G} C e(t) + \bar{\Lambda}(\nu_o(t) + \hat{\nu}_c(t)) \quad (5.48)$$

per appropriate scelte dei guadagni matriciali  $\bar{G}$ ,  $\bar{G}_r$  e  $\bar{\Lambda}$ .

Il sistema in catena chiusa è determinato dalla (5.48) assieme all'errore di stima

$$\dot{e}(t) = A_0 e(t) + B(\nu_o(t) - \xi(t, x, \hat{u})) \quad (5.49)$$



La dinamica lineare della catena chiusa è definita dalla matrice

$$A_c = \begin{bmatrix} \bar{A}_{11} & \bar{A}_{12} \\ 0 & \Phi \end{bmatrix} \quad (5.50)$$

che è stabile ed i cui autovalori sono dati da  $\lambda(\bar{A}_{11}) \cup \lambda(\Phi)$ . Per la matrice  $A_c$  si cercherà un blocco diagonale di Lyapunov della forma

$$\bar{P} = \begin{bmatrix} \bar{P}_1 & 0 \\ 0 & \bar{P}_2 \end{bmatrix} \quad (5.51)$$

in cui il sotto-blocco  $\bar{P}_2$  è la matrice di Lyapunov per  $\Phi$  usata nella componente del vettore unico per la legge di controllo. Usando la matrice di Lyapunov  $P$  per  $A_0$  data in (5.6) si definisca

$$P_G \triangleq \begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & \bar{P} \end{bmatrix} \quad (5.52)$$

in cui la matrice  $\bar{P}$  è scelta in modo che  $P_G$  sia una matrice di Lyapunov per la catena chiusa complessiva

$$A_G \triangleq \begin{bmatrix} A_0 & 0 \\ -\bar{G}C & A_c \end{bmatrix} \quad (5.53)$$

Si verifica che

$$P_G A_G + A_G^T P_G = \begin{bmatrix} -Q & -C^T \bar{G}^T \bar{P} \\ -\bar{P} \bar{G} C & \bar{P} A_c + A_c^T \bar{P} \end{bmatrix} \quad (5.54)$$

in cui  $Q$  è definita nell'equazione di Lyapunov (5.6). L'espressione a destra in (5.54) è definita negativa se e solo se

$$\bar{P} A_c + A_c^T \bar{P} + \bar{P} \bar{G} C Q^{-1} C^T \bar{G}^T \bar{P} < 0 \quad (5.55)$$

Il problema è quindi quello di determinare un blocco diagonale  $\bar{P}$  per la (5.51) in modo tale che

$$\bar{P} A_c + A_c^T \bar{P} + \bar{P} \bar{G} C Q^{-1} C^T \bar{G}^T \bar{P} + \bar{P} \bar{Q} \bar{P} = 0 \quad (5.56)$$

per una qualche matrice  $\bar{Q}$  simmetrica e definita positiva.

**Lemma 5.2.1.** *Una matrice diagonale, così come definita in (5.51), esiste e soddisfa l'equazione di Riccati (5.56) per una famiglia di matrici definite positive  $\bar{Q}$ . In particolare, può essere ottenuta una soluzione in cui  $\bar{P}_2$  è l'unica soluzione simmetrica e definita positiva della*

$$\bar{P}_2^{-1} \Phi^T + \Phi \bar{P}_2^{-1} = -\hat{Q}_2 \quad (5.57)$$

in cui  $\hat{Q}_2$  è una qualunque matrice simmetrica e definita positiva tale per cui  $\hat{Q}_2 > \bar{G}_2 Q_{22} \bar{G}_2^T$  e  $\bar{P}_1$  è l'unica soluzione simmetrica e definita positiva di

$$\bar{P}_1^{-1} \bar{A}_{11}^T + \bar{A}_{11} \bar{P}_1^{-1} = -\bar{A}_{12} \bar{P}_2^{-1} \hat{Q}_2^{-1} \bar{P}_2^{-1} \bar{A}_{12}^T - \hat{Q}_1 \quad (5.58)$$

in cui  $\hat{Q}_1$  è una qualunque matrice simmetrica e definita positiva tale per cui

$$\begin{aligned} \hat{Q}_1 > (\bar{A}_{12} \bar{P}_2^{-1} + \bar{G}_1 Q_{22} \bar{G}_2^T) (\hat{Q}_2 - \bar{G}_2 Q_{22} \bar{G}_2^T)^{-1} (\bar{P}_2^{-1} \bar{A}_{12}^T + \bar{G}_2 Q_{22} \bar{G}_1^T) \\ + \bar{G}_1 Q_{22} \bar{G}_1^T - \bar{A}_{12} \bar{P}_2^{-1} \hat{Q}_2^{-1} \bar{P}_2^{-1} \bar{A}_{12}^T \end{aligned} \quad (5.59)$$

e  $Q_{22} \triangleq CQ^{-1}C^T$

*Dimostrazione.* Risolvere l'equazione di Riccati (5.56) è equivalente<sup>1</sup> a trovare una soluzione dell'equazione di Lyapunov

$$A_c \bar{P}^{-1} + \bar{P}^{-1} A_c^T = -\hat{Q} \quad (5.60)$$

in cui

$$\hat{Q} = \bar{G} C Q^{-1} C^T \bar{G}^T + \bar{Q} \quad (5.61)$$

Dalla definizione di  $A_c$  segue che

$$A_c \bar{P}^{-1} + \bar{P}^{-1} A_c^T = \begin{bmatrix} \bar{P}_1^{-1} \bar{A}_{11}^T + \bar{A}_{11} \bar{P}_1^{-1} & \bar{A}_{12} \bar{P}_2^{-1} \\ \bar{P}_2^{-1} \bar{A}_{12}^T & \bar{P}_2^{-1} \Phi^T + \Phi \bar{P}_2^{-1} \end{bmatrix}$$

e quindi, una parametrizzazione per  $\hat{Q}$  è data da

$$\hat{Q} = \begin{bmatrix} \hat{Q}_1 + \bar{A}_{12} \bar{P}_2^{-1} \hat{Q}_2^{-1} \bar{P}_2^{-1} \bar{A}_{12}^T & -\bar{A}_{12} \bar{P}_2^{-1} \\ -\bar{P}_2^{-1} \bar{A}_{12}^T & \hat{Q}_2 \end{bmatrix}$$

in cui le matrici  $\bar{P}_1$  e  $\bar{P}_2$  risolvono le coppie di equazioni di Lyapunov (5.57) e (5.58) con  $\hat{Q}_1$  e  $\hat{Q}_2$  che sono arbitrarie matrici (di opportune dimensioni) simmetriche e definite positive. Se

$$Q_{22} = CQ^{-1}C^T \quad (5.62)$$

risulta

$$\bar{G} C Q^{-1} C^T \bar{G}^T = \begin{bmatrix} \bar{G}_1 Q_{22} \bar{G}_1^T & \bar{G}_1 Q_{22} \bar{G}_2^T \\ \bar{G}_2 Q_{22} \bar{G}_1^T & \bar{G}_2 Q_{22} \bar{G}_2^T \end{bmatrix}$$

Ri-arrangiando l'equazione (5.61) si ottiene

$$\bar{Q} = \begin{bmatrix} \hat{Q}_1 + \bar{A}_{12} \bar{P}_2^{-1} \hat{Q}_2^{-1} \bar{P}_2^{-1} \bar{A}_{12}^T - \bar{G}_1 Q_{22} \bar{G}_1^T & -\bar{A}_{12} \bar{P}_2^{-1} - \bar{G}_1 Q_{22} \bar{G}_2^T \\ -\bar{P}_2^{-1} \bar{A}_{12}^T - \bar{G}_2 Q_{22} \bar{G}_1^T & \hat{Q}_2 - \bar{G}_2 Q_{22} \bar{G}_2^T \end{bmatrix} \quad (5.63)$$

<sup>1</sup>Poichè l'intento è quello di trovare una soluzione definita positiva, essa sarà invertibile

e quest'espressione, con un'opportuna scelta di  $\hat{Q}_1$  e  $\hat{Q}_2$ , si può rendere definita positiva. Per dimostrarlo si tenga presente che una condizione necessaria affinché  $\bar{Q}$  sia definita positiva è che

$$\hat{Q}_2 > \bar{G}_2 Q_{22} \bar{G}_2^T \quad (5.64)$$

Sia quindi  $\hat{Q}_2$  una qualunque matrice definita positiva che soddisfa tale relazione. Risolvere la (5.57) porta alla determinazione della matrice  $\bar{P}_2$ . Di conseguenza, ogni elemento di  $\bar{Q}$  è specificato ad eccezione di  $\hat{Q}_1$ . A questo punto, una condizione necessaria e sufficiente affinché  $\bar{Q}$  sia definita positiva è che  $\hat{Q}_1$  soddisfi la (5.59). Si può così ottenere  $\bar{P}_1$  dalla (5.58) e, finalmente, il blocco diagonale che soddisfa l'equazione di Riccati (5.56)

$$\bar{P} = \begin{bmatrix} \bar{P}_1 & 0 \\ 0 & \bar{P}_2 \end{bmatrix}$$

□

Definita  $P_r$  come una matrice di Lyapunov per  $\Gamma$  soddisfacente

$$P_r \Gamma + \Gamma^T P_r = -\bar{G}_r^T \bar{Q}^{-1} \bar{G}_r - Q_r \quad (5.65)$$

per una qualche matrice simmetrica e definita positiva  $Q_r$ , si può dimostrare il più importante risultato di quest'analisi del comportamento in catena chiusa del sistema combinato azione integrale/stimatore.

**Proposizione 5.2.2.** *La forma quadratica  $V(e, \zeta, e_r) \triangleq e^T P e + \zeta^T \bar{P} \zeta + e_r^T P_r e_r$  è una funzione di Lyapunov per il sistema in catena chiusa (5.48) e (5.49).*

*Dimostrazione.* Derivando lungo la traiettoria, si ottiene

$$\begin{aligned} \dot{V} = & -e^T Q e - 2e^T P B \xi + 2e^T P B \nu_o - \zeta^T \bar{P} \bar{Q} \bar{P} \zeta - \zeta^T \bar{P} \bar{G} C Q^{-1} C^T \bar{G}^T \bar{P} \zeta \\ & - 2\zeta^T \bar{P} \bar{G} C e + 2\zeta^T \bar{P} \bar{\Lambda} \nu_o + 2\zeta^T \bar{P} \bar{\Lambda} \hat{\nu}_c + 2\zeta^T \bar{P} \bar{G}_r e_r \\ & - e_r^T Q_r e_r - e_r^T \bar{G}_r^T \bar{Q}^{-1} \bar{G}_r e_r \end{aligned} \quad (5.66)$$

Usando le relazioni (5.2) e (5.7) si scrive

$$\begin{aligned} 2e^T P B (\nu_o - \xi) &= 2e^T C^T F^T \nu_o - 2e^T C^T F^T \xi \\ &\leq 2\|F C e\| (k_1 \|\hat{u}\| + \alpha(t, y) - \rho_o(\hat{u}_L, y)) \end{aligned} \quad (5.67)$$

Richiamando l'equazione (5.31)

$$\rho_o(\hat{u}_L, y) = \frac{k_1 \|\hat{u}_L\| + \alpha(t, y) + k_1 \gamma_c \|\Lambda^{-1}\| + \gamma_o}{1 - k_1 \kappa(\Lambda)}$$

che, dopo alcuni passaggi in cui si utilizza la relazione (5.32)  $\rho_c = \|\Lambda\| \rho_o + \gamma_c$ , si può ri-arrangiare in questo modo

$$\rho_o(\hat{u}_L, y) \geq k_1 \|\hat{u}\| + \alpha(t, y) + \gamma_o \quad (5.68)$$

Quindi si ottiene, combinando le (5.67) e (5.68), la seguente disuguaglianza

$$2e^T C^T F^T \nu_o - 2e^T P B \xi \leq -2\gamma_o \|F C e\| \quad (5.69)$$

Siccome poi  $\|\Lambda\| \rho_o = \rho_c - \gamma_c$  si dimostra, dopo alcuni passaggi, che risulta anche verificata la seguente

$$2\zeta^T \bar{P} \bar{\Lambda} (\nu_o + \hat{\nu}_c) \leq -2\gamma_c \|\bar{P}_2 \zeta_2\| \quad (5.70)$$

A questo punto non resta che sostituire le (5.69) e (5.70) in (5.66) per ottenere

$$\begin{aligned} \dot{V} &\leq -e^T Q e - 2\gamma_o \|F C e\| - \zeta^T \bar{P} \bar{Q} \bar{P} \zeta - \zeta^T \bar{P} \bar{G} C Q^{-1} C^T \bar{G}^T \bar{P} \zeta - 2\zeta^T \bar{P} \bar{G} C e \\ &\quad - 2\gamma_c \|\bar{P}_2 \zeta_2\| + 2\zeta^T \bar{P} \bar{G}_r e_r - e_r^T Q_r e_r - e_r^T \bar{G}_r^T \bar{Q}^{-1} \bar{G}_r e_r \\ &\equiv -(e + Q^{-1} C^T \bar{G}^T \bar{P} \zeta)^T Q (e + Q^{-1} C^T \bar{G}^T \bar{P} \zeta) - \zeta^T \bar{P} \bar{Q} \bar{P} \zeta - 2\gamma_o \|F C e\| \\ &\quad - 2\gamma_c \|\bar{P}_2 \zeta_2\| + 2\zeta^T \bar{P} \bar{G}_r e_r - e_r^T Q_r e_r - e_r^T \bar{G}_r^T \bar{Q}^{-1} \bar{G}_r e_r \\ &\equiv -(e + Q^{-1} C^T \bar{G}^T \bar{P} \zeta)^T Q (e + Q^{-1} C^T \bar{G}^T \bar{P} \zeta) - e_r^T Q_r e_r - 2\gamma_o \|F C e\| \\ &\quad - 2\gamma_c \|\bar{P}_2 \zeta_2\| - (\zeta - \bar{P}^{-1} \bar{Q}^{-1} \bar{G}_r e_r)^T \bar{P} \bar{Q} \bar{P} (\zeta - \bar{P}^{-1} \bar{Q}^{-1} \bar{G}_r e_r) \\ &< 0 \quad \text{se } (e, \zeta, e_r) \neq 0 \end{aligned}$$

e dimostrare così l'asintotica stabilità del sistema in catena chiusa.  $\square$

**Corollario 5.2.3.** *Sliding motions sono indotti sulla superficie  $\mathcal{S}_o$ , definita in (5.9), e su*

$$\hat{\mathcal{S}} = \{(\zeta_1, \zeta_2) \in \mathbb{R}^{n+p} : \zeta_2 = 0\}. \quad (5.71)$$

*Dimostrazione.* È sufficiente dimostrare che si ha sliding sulla superficie definita nello spazio di stato 'combinato' e data da

$$\mathcal{S}_c = \{(e, \zeta_1, \zeta_2) \in \mathbb{R}^{2n+p} : C e = 0 \text{ e } \zeta_2 = 0\}$$

A questo scopo, si prenda  $\eta$  come scalare positivo, piccolo in modulo e tale per cui  $\eta < \gamma_c$  e  $\eta < \gamma_o$  e si definisca il dominio

$$\Omega_\eta \triangleq \{(e, \zeta_1, \zeta_2) \in \mathbb{R}^{2n+p} : \|(CB)^{-1} C A_0 e\| < \gamma_o - \eta \text{ e } \|\bar{G}_2 C e\| < \gamma_c - \eta\} \quad (5.72)$$

Si consideri ora la forma quadratica

$$V_c = e^T C^T P_2 C e + \zeta_2^T \bar{P}_2 \zeta_2 \quad (5.73)$$

che è definita positiva rispetto alla superficie  $\mathcal{S}_c$ . Dalla (5.49) segue che

$$C \dot{e}(t) = C A_0 e(t) + C_2 B_2 (\nu_o(t) - \xi(t, x, \hat{u}))$$

e, per la definizione di  $F$  data in (5.15) si ha che  $P_2 = F^T(CB)^{-1}$ . Quindi

$$P_2 C \dot{e}(t) = F^T(CB)^{-1} C A_0 e(t) + F^T(\nu_o(t) - \xi(t, x, \hat{u}))$$

Utilizzando la (5.69) si verifica che

$$e^T C^T P_2 C \dot{e} \leq \|F C e\| \cdot \|(CB)^{-1} C A_0 e\| - \gamma_o \|F C e\|$$

Derivando la forma quadratica (5.73) ed utilizzando l'equazione (5.46) combinata alla disequazione (5.70), segue

$$\begin{aligned} \dot{V}_c &= 2e^T C^T P_2 C \dot{e} + \zeta_2^T \bar{P}_2 \dot{\zeta}_2 + \dot{\zeta}_2^T \bar{P}_2 \zeta_2 \\ &\leq 2e^T C^T P_2 C \dot{e} - 2\zeta_2^T \bar{P}_2 \bar{G}_2 C e - 2\gamma_c \|\bar{P}_2 \zeta_2\| \\ &\leq -2\|F C e\|(\gamma_o - \|(CB^{-1}) C A_0 e\|) - 2\|\bar{P}_2 \zeta_2\|(\gamma_c - \|\bar{G}_2 C e\|) \end{aligned}$$

e quindi, nel dominio  $\Omega_\eta$

$$\begin{aligned} \dot{V}_c &\leq -2\eta(\|F C e\| + \|\bar{P}_2 \zeta_2\|) \\ &\leq -2\eta r_1 r_2^{-1/2} \sqrt{V_c} \end{aligned}$$

in cui gli scalari strettamente positivi,  $r_1$  ed  $r_2$ , sono così definiti<sup>2</sup>

$$r_1 = \min \{ \underline{\sigma}(F), \underline{\sigma}(\bar{P}_2) \} \quad \text{e} \quad r_2 = \max \{ \bar{\sigma}(\bar{P}_2), \bar{\sigma}(P_2) \}$$

Questa rappresenta una condizione sufficiente affinché abbia luogo uno sliding sulla superficie  $\mathcal{S}_c$ .  $\square$

**Corollario 5.2.4.** *L'uscita del sistema  $y(t)$  si porta asintoticamente al vettore costante  $R$ .*

*Dimostrazione.* Il corollario 5.2.3, assicura il raggiungimento di uno sliding mode e quindi, per l'equazione (5.45), questo implica che

$$\dot{\zeta}_1(t) = \bar{A}_{11} \zeta_1(t) + (\bar{A}_{12} S_r + B_r) e_r(t)$$

in cui

$$\dot{e}_r = \Gamma e_r(t)$$

e sia  $\bar{A}_{11}$  che  $\Gamma$  sono matrici stabili. Per questo sistema lineare, la stabilità di  $\zeta_1$  implica  $\dot{\zeta}_1 \rightarrow 0$  e questo, a sua volta, implica  $\dot{z}_1 \rightarrow 0$ . Per definizione di  $\tilde{z}_1$ , i primi  $p$  stati sono gli stati dell'azione integrale. Di conseguenza  $\dot{x}_r \rightarrow 0$  e da questa segue che  $y \rightarrow r$  asintoticamente.  $\square$

<sup>2</sup>con  $\underline{\sigma}(A)$  si intende il minimo valore singolare della matrice  $A$ ; mentre con  $\bar{\sigma}(A)$  il massimo valore singolare di  $A$ .

### 5.2.4 Implementazione della legge di controllo

La descrizione fatta fino ad ora, lasciava alla libertà del progettista la scelta della matrice stabile  $A_{22}^s$  e della sua matrice di Lyapunov associata  $P_2$ . Ci si occupa ora di come progettare la parte non lineare della legge di controllo.

L'iperpiano considerato in precedenza è dato da

$$\mathcal{S} = \{\tilde{x} \in \mathbb{R}^{n+p} : S\tilde{x} = S_r r\} \quad (5.74)$$

in cui  $r$  rappresenta il segnale di riferimento,  $S_r \in \mathbb{R}^{m \times m}$  è una matrice di progetto, ed

$$S = S_2 [M \ I_m]$$

con  $M \in \mathbb{R}^{m \times n}$ . La matrice  $S_2$ , anch'essa scelta in fase di progetto, ha l'unica funzione di fattore di scala per l'iperpiano e non gioca alcun ruolo nella dinamica di ordine ridotto dello sliding mode che è data da

$$\dot{\tilde{x}}_1(t) = (\tilde{A}_{11} - \tilde{A}_{12}M)\tilde{x}_1(t) + (\tilde{A}_{12}S_2^{-1}S_r + B_r)r(t) \quad (5.75)$$

in cui la coppia  $(\tilde{A}_{11}, \tilde{A}_{12})$  è definita in (2.74) e  $B_r$  è definita in (2.75). È stato dimostrato (Lemma 2.3.2) che, con le ipotesi assunte all'inizio di questo capitolo, la coppia  $(\tilde{A}_{11}, \tilde{A}_{12})$  è completamente controllabile e di conseguenza è possibile determinare un'opportuna matrice  $M$  con le tecniche presentate nel capitolo 2.

Per quanto riguarda la matrice  $S_r$ , una possibilità è quella di sceglierla in modo che, a regime, l'azione integrale si annulli. Dalla (5.75) si ottiene l'espressione valida a regime

$$\bar{A}_{11}\tilde{x}_1 + (\tilde{A}_{12}S_2^{-1}S_r + B_r)r = 0 \quad (5.76)$$

e quindi<sup>3</sup>

$$\tilde{x}_1 = -\bar{A}_{11}^{-1}(\tilde{A}_{12}S_2^{-1}S_r + B_r)r \quad (5.77)$$

Il valore dello stato integrale è perciò dato da

$$x_r = -B_r^T \bar{A}_{11}^{-1}(\tilde{A}_{12}S_2^{-1}S_r + B_r)r \quad (5.78)$$

per la forma particolare di  $B_r$  in (2.75). Si definisca  $K_s$  come il guadagno statico del sistema  $(\bar{A}_{11}, \tilde{A}_{12}, B_r^T)$  allora, a patto che  $K_s$  sia non singolare, scegliendo

$$S_r = S_2 K_s^{-1} B_r^T \bar{A}_{11}^{-1} B_r \quad (5.79)$$

si ottiene  $x_r = 0$ . Il lemma seguente dimostra che, sotto le ipotesi assunte ad inizio capitolo, il guadagno  $K_s$  è non-singolare.

**Lemma 5.2.5.** *Il guadagno statico del sistema  $(\bar{A}_{11}, \tilde{A}_{12}, B_r^T)$  è non-singolare*

<sup>3</sup>La matrice  $\bar{A}_{11}$  è stabile e quindi invertibile

*Dimostrazione.* Se  $K_s$  rappresenta il guadagno statico, un calcolo diretto porta alla seguente relazione:

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ B_r^T \bar{A}_{11}^{-1} & K_s \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{12} \\ B_r^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ -M & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{A}_{11}^{-1} & -\bar{A}_{11}^{-1} \tilde{A}_{12} \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

Quindi,  $K_s$  è di rango pieno se e solo se

$$\det \begin{bmatrix} \tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{12} \\ B_r^T & 0 \end{bmatrix} \neq 0$$

Sostituendo la (2.74) per  $\tilde{A}_{11}$  e  $\tilde{A}_{12}$  e la (2.75) per  $B_r$  si ha:

$$\begin{aligned} \det \begin{bmatrix} \tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{12} \\ B_r^T & 0 \end{bmatrix} \neq 0 &\Leftrightarrow \det \begin{bmatrix} 0 & -C_1 & -C_2 \\ 0 & A_{11} & A_{12} \\ I & 0 & 0 \end{bmatrix} \neq 0 \\ &\Leftrightarrow \det \begin{bmatrix} -C_1 & -C_2 \\ A_{11} & A_{12} \end{bmatrix} \neq 0 \end{aligned}$$

Era già stato dimostrato, nella prova del Lemma 2.3.2, che

$$\det \begin{bmatrix} -C_1 & -C_2 \\ A_{11} & A_{12} \end{bmatrix} = 0 \Leftrightarrow (A, B, C) \text{ ha zeri invarianti nell'origine}$$

Per le ipotesi fatte sulla terna  $(A, B, C)$  si è quindi garantiti sulla non-singularità del guadagno  $K_s$ .  $\square$

Da un punto di vista progettuale, eccezion fatta per la funzione scalare che premoltiplica la componente del vettore unico, l'unica relazione tra stimatore e controllore è la matrice  $\bar{P}_2$  che definisce la seguente componente della legge di controllo

$$\nu_c = \begin{cases} -\rho_c(u_L, y) \Lambda^{-1} \frac{\bar{P}_2(S\tilde{x} - S_r r)}{\|\bar{P}_2(S\tilde{x} - S_r r)\|} & \text{se } S\tilde{x} \neq S_r r \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad (5.80)$$

e soddisfa l'equazione di Lyapunov

$$\bar{P}_2^{-1} \Phi^T + \Phi \bar{P}_2^{-1} = -\hat{Q}_2 \quad (5.81)$$

in cui  $\Phi$  è una matrice stabile di progetto. Per il Lemma 5.2.1 la matrice  $\hat{Q}_2$  è simmetrica, definita positiva e soddisfa la (5.64)

$$\hat{Q}_2 > \bar{G}_2 Q_{22} \bar{G}_2^T$$

Per un dato stimatore, l'espressione a destra della disequazione è completamente determinata e quindi sembra vincolare in qualche modo la scelta di  $\bar{P}_2$ . Tuttavia non è così. Sia  $\hat{Q}_2$  una

qualunque matrice simmetrica e definita positiva e sia  $\bar{P}_2$  l'unica soluzione dell'equazione (5.81). Se  $\lambda$  è uno scalare positivo qualunque, allora la coppia di matrici  $(\bar{P}_2^\lambda, \hat{Q}_2^\lambda) \triangleq (\frac{1}{\lambda}\bar{P}_2, \lambda\hat{Q}_2)$  soddisfa la

$$(\bar{P}_2^\lambda)^{-1}\Phi^T + \Phi(\bar{P}_2^\lambda)^{-1} = -\hat{Q}_2^\lambda \quad (5.82)$$

e si può verificare che

$$\hat{Q}_2^\lambda > \bar{G}_2 Q_{22} \bar{G}_2^T \quad \Leftrightarrow \quad \lambda > \lambda_{max}(\hat{Q}_2^{-1/2} \bar{G}_2 Q_{22} \bar{G}_2^T \hat{Q}_2^{-1/2}) \quad (5.83)$$

Di conseguenza, per una qualunque  $\hat{Q}_2$  assegnata e per un valore di  $\lambda$  abbastanza grande, la matrice  $\bar{P}_2^\lambda$  è una scelta appropriata per il vettore  $\nu_c$  definito in (5.80). Tuttavia, sempre osservando quell'equazione, si evince come  $\nu_c$  sia a tutti gli effetti, indipendente dal valore di  $\lambda$  per cui, come risultato, si può affermare che controllore e stimatore possono essere implementati indipendentemente nel senso che, a patto che la funzione scalare che premoltiplica la componente di  $\nu_c$  soddisfi la relazione (5.32), il sistema in catena chiusa risulta stabile con uno qualunque degli stimatori presentati nel paragrafo 5.2.1 e con qualsiasi legge di controllo, come visto nel paragrafo 5.2.2.

### 5.3 Approccio a modello di riferimento

L'obiettivo di questo approccio è quello, come descritto nel paragrafo 2.3.1, di sviluppare uno schema di controllo che forzi la dinamica del sistema 'reale' a seguire quella di un modello 'ideale'. Il controllore dovrebbe quindi portare a zero l'errore tra sistema vero e modello, al tendere all'infinito del tempo.

Si consideri il sistema

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (5.84)$$

a cui corrisponde il modello ideale

$$\dot{w}(t) = A_m w(t) + B_m r(t) \quad (5.85)$$

in cui  $w \in \mathbb{R}^n$  è il vettore di stato del modello,  $r \in \mathbb{R}^r$  il vettore di ingresso e le matrici  $A_m$  e  $B_m$ , hanno dimensioni compatibili. Si ipotizzi che il modello ideale sia stabile.

Si definisce così l'errore di stato

$$e_x(t) = x(t) - w(t) \quad (5.86)$$

L'obiettivo è di far tendere a zero questo errore. Si sostituiscano le equazioni (5.85) e (5.86). La dinamica dell'errore può così essere determinata come

$$\dot{e}_x(t) = A_m e_x(t) + (A - A_m)x(t) + B(u(t) + \xi(t, x, u)) - B_m r(t) \quad (5.87)$$

Come visto nel paragrafo 2.3.1, se valgono le condizioni di *model - following*, allora esistono matrici di dimensioni compatibili,  $L_x$  e  $L_r$  tali per cui

$$BL_x = A_m - A \quad (5.88)$$

$$BL_r = B_m \quad (5.89)$$



L'equazione (5.87) può così essere riscritta

$$\dot{e}_x(t) = A_m e_x(t) + B(u(t) - L_x x(t) - L_r r(t) + \xi(t, x, u)) \quad (5.90)$$

Se lo stato  $x$  (e quindi l'errore  $e_x$ ) fosse accessibile, allora con il controllore presentato nel paragrafo 2.3.1 si potrebbe assicurare  $e_x \rightarrow 0$ . Tuttavia in questo capitolo si vuole affrontare il problema supponendo che solo l'uscita di (5.1) sia accessibile, per cui è necessario un approccio alternativo.

Si consideri lo stimatore visto nel paragrafo 5.1 e si definisca

$$e_z(t) = z(t) - w(t) \quad (5.91)$$

come la differenza tra lo stato stimato e lo stato del modello ideale. La legge di controllo sarà del tipo

$$u(t) = u_f(t) + \bar{u}(t) \quad (5.92)$$

in cui  $u_f(t) = L_z z(t) + L_r r(t)$  mentre la componente  $\bar{u}(t)$ , che include l'elemento discontinuo, verrà analizzata successivamente. Con un ragionamento analogo al precedente, utilizzando (5.5) e (5.85), si determina l'equazione che regola la dinamica dell'errore  $e_z(t)$

$$\dot{e}_z(t) = A_m e_z(t) + B\bar{u}(t) - GCe(t) + B_n u_o \quad (5.93)$$

in cui  $e(t)$  rappresenta l'errore sullo stato stimato. L'obiettivo a questo punto, è quello di determinare  $\bar{u}(t)$  in modo che abbia luogo uno sliding sulla superficie

$$\mathcal{S} = \{e_z \in \mathbb{R}^n : s(e_z) = 0\} \quad (5.94)$$

in cui la switching function è definita in questo modo:  $s(e_z) = Se_z$  con  $S \in \mathbb{R}^{m \times n}$ . Per comodità, si partizioni la matrice dell'iperpiano in modo che

$$S = [S_1 \ S_2] \quad (5.95)$$

in cui  $S_1 \in \mathbb{R}^{m \times (n-m)}$  e  $S_2 \in \mathbb{R}^{m \times m}$ . Come ipotesi, si assuma che  $\det(S_2) \neq 0$  e

$$S_2 B_2 = \Lambda \quad (5.96)$$

con  $\Lambda$  matrice diagonale non singolare. Se si ipotizza che  $(A, B)$  sia in forma normale, anche  $(A_m, B)$  risulta in forma normale; e ancora, se  $A_m = A + BL_x$  allora lo sliding su  $\mathcal{S}$  è retto dalla

$$\bar{A}_{11} = A_{11} - A_{12}M \quad (5.97)$$

in cui  $M = S_2^{-1}S_1$ . Una naturale richiesta è quella di scegliere  $M$  in modo da assicurare la stabilità di  $\bar{A}_{11}$  e a questo scopo si può utilizzare quanto descritto nel capitolo 2. Per una data  $\Lambda$ , la matrice  $S_2$  è specificata e quindi la switching function è completamente determinata dalla

scelta di  $M$  e  $\Lambda$ . Ci si concentra ora sull'analisi di  $\bar{u}$ .

La componente  $\bar{u}(t)$  della legge di controllo comprende un elemento lineare atto a stabilizzare il sistema lineare nominale, e un termine discontinuo atto ad indurre uno sliding mode ideale.

$$\bar{u}(t) = u_l(t) + \nu_c(t) \quad (5.98)$$

La componente lineare è data da

$$u_l(t) = -(SB)^{-1}(SA_m - \Phi S)e_z(t) \quad (5.99)$$

in cui  $\Phi \in \mathbb{R}^{m \times m}$  è una matrice stabile. La componente non lineare è invece definita in questo modo

$$\nu_c = -\rho_c(u_l, y)\Lambda^{-1} \frac{\bar{P}_2 s(t)}{\|\bar{P}_2 s(t)\|} \quad \text{per } s(t) \neq 0 \quad (5.100)$$

in cui  $\bar{P}_2 \in \mathbb{R}^{m \times m}$  è la matrice simmetrica e definita positiva di Lyapunov per  $\Phi$ . La funzione scalare  $\rho_c(u_l, y)$  è scelta in modo da assicurare

$$\rho_c(u_l, y) = \|\Lambda\|\rho_o(u_l, y) + \gamma_c \quad (5.101)$$

come visto nel paragrafo 5.2.2. Si definisca un cambio di coordinate lineare

$$\bar{T} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ S_1 & S_2 \end{bmatrix} \quad (5.102)$$

che è non singolare dal momento che  $S_2$  per ipotesi è non singolare. Si definiscano quindi le nuove coordinate  $\bar{e}_z = \bar{T}e_z$  e la nuova tripla  $(\bar{A}, \bar{B}, \bar{C})$ . L'equazione (5.93) diventa

$$\dot{\bar{e}}_z(t) = \bar{A}_c \bar{e}_z(t) + \bar{B}(\nu_c + \nu_o) - \bar{G}C e(t) \quad (5.103)$$

in cui  $\bar{G} = \bar{T}G$  e  $\bar{A}_c$  è la matrice della catena chiusa che si ottiene sostituendo la componente lineare. In particolare

$$\bar{A}_c = \begin{bmatrix} \bar{A}_{11} & \bar{A}_{12} \\ 0 & \Phi \end{bmatrix}$$

in cui  $\bar{A}_{11}$  è definita in (5.97) e  $\bar{A}_{12} = A_{12}S_2^{-1}$ . Si partizioni ora il guadagno  $G$  in questo modo

$$\bar{G} = \begin{bmatrix} \underbrace{\bar{G}_1}_{n-m} \\ \underbrace{\bar{G}_2}_m \end{bmatrix} \quad (5.104)$$

La configurazione in catena chiusa è dunque determinata dalle seguenti equazioni

$$\dot{w}(t) = A_m w(t) + B_m r(t) \quad (5.105)$$

$$\dot{e}(t) = A_0 e(t) + B \nu_o - B \xi(t, x, u) \quad (5.106)$$

$$\dot{\bar{e}}_z(t) = \bar{A}_c \bar{e}_z(t) - \bar{G} C e(t) + \bar{B}(\nu_c + \nu_o) \quad (5.107)$$

dalle quali si nota immediatamente che la (5.105) è nota, stabile e indipendente da  $e(t)$  e  $\bar{e}_z(t)$ ; per cui è sufficiente provare la stabilità dei sotto-sistemi (5.106) e (5.107). La dimostrazione della stabilità segue gli stessi passaggi visti nel paragrafo 5.2.3.

Sia  $\bar{P}$  un blocco diagonale di Lyapunov per la matrice  $\bar{A}_c$

$$\bar{P} = \begin{bmatrix} \bar{P}_1 & 0 \\ 0 & \bar{P}_2 \end{bmatrix} \quad (5.108)$$

La sotto-matrice  $\bar{P}_2$  soddisfa l'equazione di Lyapunov

$$\bar{P}_2^{-1} \Phi^T + \Phi \bar{P}_2^{-1} = -\hat{Q}_2 \quad (5.109)$$

in cui  $\hat{Q}_2$  è una qualunque matrice simmetrica e definita positiva che soddisfa

$$\hat{Q}_2 > \bar{G}_2 C Q^{-1} C^T \bar{G}_2^T \quad (5.110)$$

Utilizzando  $P$ , la matrice di Lyapunov per  $A_0$  definita in (5.6), si definisce

$$P_G \triangleq \begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & \bar{P} \end{bmatrix} \quad (5.111)$$

in cui  $\bar{P}$  è scelta in modo che  $P_G$  sia la matrice di Lyapunov per la matrice della catena chiusa complessiva

$$A_G \triangleq \begin{bmatrix} A_0 & 0 \\ -\bar{G}C & \bar{A}_c \end{bmatrix} \quad (5.112)$$

Si verifica che

$$P_G A_G + A_G^T P_G = \begin{bmatrix} -Q & -C^T \bar{G}^T \bar{P} \\ -\bar{P} \bar{G} C & \bar{P} \bar{A}_c + \bar{A}_c^T \bar{P} \end{bmatrix} \quad (5.113)$$

in cui  $Q$  è stata definita nell'equazione di Lyapunov (5.6). L'espressione a destra della (5.113) è definita negativa se e solo se

$$\bar{P} \bar{A}_c + \bar{A}_c^T \bar{P} + \bar{P} \bar{G} C Q^{-1} C^T \bar{G}^T \bar{P} < 0 \quad (5.114)$$

L'esistenza di un blocco diagonale  $\bar{P}$  che soddisfi

$$\bar{P} \bar{A}_c + \bar{A}_c^T \bar{P} + \bar{P} \bar{G} C Q^{-1} C^T \bar{G}^T \bar{P} + \bar{P} \bar{Q} \bar{P} = 0 \quad (5.115)$$

per una qualche matrice simmetrica e definita positiva  $\bar{Q}$ , è stata dimostrata con il Lemma 5.2.1. Si dimostra quindi il seguente ed importante risultato

**Proposizione 5.3.1.** *La forma quadratica*

$$V(e, \bar{e}_z) = e^T P e + \bar{e}_z^T \bar{P} \bar{e}_z \quad (5.116)$$

è una funzione di Lyapunov per il sistema (5.106) e (5.107).

*Dimostrazione.* Derivando lungo la traiettoria si ottiene

$$\begin{aligned} \dot{V} = & -e^T Q e + 2e^T P B \nu_o - 2e^T P B \xi + \bar{e}_z^T (\bar{P} \bar{A}_c + \bar{A}_c^T \bar{P}) \bar{e}_z \\ & - 2\bar{e}_z^T \bar{P} \bar{G} C e + 2\bar{e}_z^T \bar{P} \bar{B} (\nu_c + \nu_o) \end{aligned}$$

Sostituendo la (5.115) si ottiene

$$\begin{aligned} \dot{V} = & -\bar{e}_z^T \bar{P} \bar{Q} \bar{P} \bar{e}_z - (e + Q^{-1} C^T \bar{G}^T \bar{P} \bar{e}_z)^T Q (e + Q^{-1} C^T \bar{G}^T \bar{P} \bar{e}_z) \\ & + 2e^T P B \nu_o - 2e^T P B \xi + 2\bar{e}_z^T \bar{P} \bar{B} (\nu_c + \nu_o) \end{aligned} \quad (5.117)$$

Dalla definizione di  $\rho_o(u, y)$  data in (5.31) e da ragionamenti analoghi a quelli fatti nella dimostrazione della Proposizione 5.2.2 si ha

$$2e^T P B \nu_o - 2e^T P B \xi \leq -2\|F C e\| \gamma_o \quad (5.118)$$

dalla quale si ricava che

$$2\bar{e}_z^T \bar{P} \bar{B} (\nu_c + \nu_o) \leq -2\gamma_c \|\bar{P}_2 s\| \quad (5.119)$$

Utilizzando le disequazioni (5.118) e (5.119), e combinandole con la (5.117), si ottiene che la derivata  $\dot{V}$  soddisfa la

$$\begin{aligned} \dot{V} \leq & -\bar{e}_z^T \bar{P} \bar{Q} \bar{P} \bar{e}_z - (e + Q^{-1} C^T \bar{G}^T \bar{P} \bar{e}_z)^T Q (e + Q^{-1} C^T \bar{G}^T \bar{P} \bar{e}_z) \\ & - 2\|\bar{P}_2 s\| \gamma_c - 2\|F C e\| \gamma_o \end{aligned}$$

e quindi  $\dot{V} < 0$  per  $(e, \bar{e}_z) \neq 0$  e la stabilità è dimostrata.

Poichè inoltre  $e_x = e_z - e$ , dal momento che  $e_z \rightarrow 0$  e  $e \rightarrow 0$ , da questo segue che anche  $e_x \rightarrow 0$  e di conseguenza si raggiunge un perfetto *model – following*.  $\square$

**Corollario 5.3.2.** *Uno sliding mode ideale ha luogo sulle superfici  $\mathcal{S}_o$  e  $\mathcal{S}$  in tempo finito.*

*Dimostrazione.* La dimostrazione di questo fatto è del tutto analoga a quella vista per il Corollario 5.2.3 e quindi non viene riproposta.  $\square$

# Capitolo 6

## Conclusioni

La teoria del controllo, nello sviluppare la propria analisi, ha quasi sempre fatto affidamento su un'ipotesi importante: la possibilità di avere accesso in maniera completa alle informazioni relative alle variabili interne del sistema che si intendono, appunto, controllare. Ciò che ha stimolato questo lavoro di Tesi è stata la considerazione pratica che, in moltissimi casi 'concreti', questa ipotesi non è verificata. In alcune circostanze, infatti, misurare tutte le variabili di stato è impossibile o troppo costoso, in altri casi il sistema è così articolato che si rivelerebbe necessario adottare complesse tecniche di identificazione per ottenere un modello accettabile o ancora, lo stato interno del sistema potrebbe essere associato a variabili che non hanno un significato fisico e che quindi non possono essere misurate. La presente Tesi ha quindi analizzato la possibilità di avvalersi delle enormi potenzialità di una strategia di controllo sliding mode, avendo a disposizione solo le misure delle uscite del sistema.

I vantaggi offerti da questo tipo di strategia di controllo discontinua, sono notevoli. Si è visto nei primi capitoli come si riesca, a partire dal sistema del tutto generale

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) + f(t, x, u) \\ y(t) &= Cx(t)\end{aligned}$$

affetto da disturbi e da incertezze modellate dalla funzione sconosciuta  $f(\cdot)$ , ad ottenere una dinamica, sull'iperpiano di sliding, che risulta essere di ordine ridotto, stabile e che compensa qualunque tipo di disturbo soddisfi l'ipotesi chiamata di *matching – condition*.

Quello che è stato fatto è stato uno studio soprattutto teorico, basato in larga misura su un'analisi alla Lyapunov, e che ha portato alla dimostrazione di quei risultati che hanno permesso di ottenere i vantaggi sopra esposti anche con una retroazione e una regola decisionale che, appunto, sia basata sulle misure dell'uscita. Un'altra importante questione che è stata affrontata in questa Tesi, è stata la possibilità di inserire un segnale di riferimento e quindi come utilizzare la strategia sliding mode per risolvere il cosiddetto *tracking problem*: la richiesta, cioè, di far 'inseguire' all'evoluzione del sistema una traiettoria stabilita a priori. È stato dimostrato come questo sia possibile e di come cioè l'errore tra l'andamento effettivo e quello desiderato, tenda

a zero.

Infine, è stata analizzata la possibilità di utilizzare l'uscita del sistema per generare una stima dello stato interno e quindi di come poter utilizzare questa stima per determinare una legge di controllo sliding mode.

Il 'punto debole' di questa teoria riguarda l'impossibilità per alcuni sistemi meccanici, di implementare una legge di controllo discontinua. Il continuo commutare tra una regola di decisione ed un'altra infatti potrebbe generare delle oscillazioni ad alta frequenza dovute ad un non perfetto scivolamento lungo la superficie ma al suo continuo 'attraversamento' da un lato all'altro. Tale fenomeno, noto come *chattering*, è forse l'unico motivo che limita l'utilizzo di tale tecnica di controllo: in molti sistemi meccanici infatti queste fastidiose oscillazioni ad alta frequenza possono degradare i componenti molto più in fretta, aumentando le probabilità di guasto.

Un possibile sviluppo futuro di questa Tesi potrebbe quindi essere quello di un'analisi volta alla risoluzione di questo problema. In letteratura si parla di *pseudo – sliding mode* in riferimento ad una strategia che utilizzi approssimazioni continue (ad esempio per la funzione segno) e non leggi di controllo discontinue. In questo caso non si potrà più parlare di sliding mode ideale, dato che il raggiungimento in tempo finito dell'iperpiano e il mantenimento della traiettoria sullo stesso sono garantite, appunto, da un'azione di controllo discontinua. Con pseudo-sliding mode si intende non più il raggiungimento effettivo dell'iperpiano ma quello di una zona ad esso arbitrariamente vicina.

Ovviamente tutte le proprietà relative alla reiezione dei disturbi accoppiati saranno perse, tuttavia si possono raggiungere approssimazioni molto vicine al caso ideale. Del resto, in termini di progettazione di una legge di controllo realizzabile per applicazioni pratiche, deve essere adottato un compromesso tra le prestazioni ottenibili e lo smussamento della discontinuità dell'azione di controllo.

# Bibliografia

- [1] Bisiacco, M. (2011) *Appunti di Tecniche Avanzate di Controllo*, Dispense del corso ‘Tecniche Avanzate di Controllo’, Università degli studi di Padova.
- [2] Chen, C.T. (1984) *Linear System Theory and Design*, Holt, Rinehart & Winston, New York.
- [3] Dotoli, M. (2009) *Controllo Sliding Mode*, Dispense del corso ‘Controllo non Lineare’, Politecnico di Bari.
- [4] Edwards C. & Spurgeon S. (1998) *Sliding Mode Control, Theory and Application*, Taylor & Francis.
- [5] El-Khazali, R. & DeCarlo, R.A. (1992) *Variable Structure Output Feedback Control*, American Control Conference.
- [6] El-Khazali, R. & DeCarlo, R.A. (1995) *Output Feedback Variable Structure Control Design*, Automatica, **31**, 805-816.
- [7] Fornasini, E. & Marchesini, G. (2003) *Appunti di Teoria dei Sistemi*, Edizioni Libreria Progetto, Padova.
- [8] Khalil, H.K. (1992) *Nonlinear Systems*, Prentice Hall, Englewood Cliffs NJ.
- [9] Soderstrom, T. & Stoica, P. (1989) *System Identification*, Prentice Hall, Hemel Hempstead, UK.
- [10] Utkin, V.I. (1992) *Sliding Modes in Control Optimization*, Springer-Verlag, Berlino.
- [11] Utkin, V.I. (1999) *Sliding Modes Control in Electromechanical Systems*, Edizioni CRC Press.
- [12] Zhou, F. & Fisher, D.G. (1992) *Continuous Sliding Mode Control*, International Journal of Control **55**, 313-327.
- [13] Zinober, A.S.I (1994) *An Introduction to Sliding Mode Variable Structure Control*, Springer-Verlag, Berlino.