Università degli Studi di Padova

DIPARTIMENTO DI MATEMATICA "TULLIO LEVI-CIVITA"

Corso di Laurea Magistrale in Matematica

Una introduzione alle algebre dei cammini di Leavitt ed alle loro rappresentazioni associate a cammini infiniti

Relatore:
Alberto Tonolo

Laureanda: Letizia Tortora
Matricola: 2027904

Anno Accademico 2022/2023

22 Settembre 2023

Algebre di Leavitt

Letizia Tortora

Settembre 2023

Indice

1 Introduzione

Le algebre dei cammini di Leavitt sono un argomento di ricerca molto recente e attualmente in continua evoluzione, che vanta una fiorente produzione di articoli e approfondimenti datati nell'arco dell'ultimo decennio. Questo lavoro si prefigge lo scopo di guidare il lettore in una prima incursione proprio all'interno del vasto e affascinante universo di queste algebre. Il tragitto inizia dalle prime definizioni fondamentali all'edificazione delle stesse, e in seguito offre uno scorcio sui fondamenti storici che celano le ragioni della loro scoperta e del loro successivo approfondimento. Poi, prosegue mostrando le proprietà basilari che rendono le algebre dei cammini di Leavitt ambienti favorevoli a generare costruzioni anche molto complesse, fino ad approdare alla descrizione nello specifico di alcune loro classi di rappresentazioni irriducibili: i moduli di Chen. Le rappresentazioni irriducibili dell'algebra sono infatti il primo oggetto di studio quando ci si approccia ad un approfondimento anche più sistematico e generale delle strutture connesse ad essa, dunque la restrizione a tali rappresentazioni nella seguente trattazione, che ha invece uno scopo introduttivo, si può definire naturale. Il lettore avrà quindi l'occasione di capire come, a partire da un grafo, sia possibile individuare procedure che permettono la costruzione di un determinato tipo di modulo sull'algebra dei cammini di Leavitt corrispondente. Aiutato da alcuni esempi, avrà modo di imparare come alcune decisioni prese all'inizio di tali procedure, come quella di selezionare un certo tipo di cammino infinito piuttosto che un altro, portino alla costruzione di tipologie di moduli non isomorfe tra loro. Avrà inoltre l'opportunità di acquisire consapevolezza di come alcune caratteristiche del grafo di partenza influiscano sulle proprietà delle rappresentazioni esistenti dell'algebra corrispondente, e di come l'individuazione di tale legame sia un nodo cruciale e stimolante per la ricerca: è senza dubbio appetibile la possibilità di poter già stabilire a priori, con un solo sguardo al grafo, quali tipi di moduli siano o non siano costruibili sull'algebra dei cammini di Leavitt ad esso associata. Ma si tratta anche di una prospettiva raggiungibile solo a fatica in alcuni casi, e non ancora possibile in molti altri. La scelta di lavorare nello specifico con i moduli di Chen, permetterà in questo senso al lettore di vedere un esempio concreto di un contesto in cui, nonostante la necessità di innumerevoli passaggi preliminari, in effetti è possibile stabilire un legame tra la conformazione del grafo e le caratteristiche delle rappresentazioni dell'algebra, un legame riassunto in modo chiaro nel teorema conclusivo della tesi.

Ringrazio il professor Tonolo per aver accolto la mia richiesta di essere seguita nel lavoro di produzione di tesi una seconda volta, dopo l'esperienza triennale, e in particolare per la gentile disponibilità dimostratami di recente nonostante gli impegni esterni, gesto che non sottovaluto. Al termine di questo mio faticoso ed emozionante percorso, tengo molto a ringraziare il professore anche perché le sue scelte di insegnamento in questi anni mi hanno sempre fatto percepire che esiste una modalità di approccio alla conoscenza matematica che sa essere allo stesso tempo rigorosa ma appassionata, di alto livello ma che non si dimentica del lato umano, soprattutto se calata in contesti di trasmissione.

In secondo luogo, sento di voler esprimere un grande ringraziamento alla professoressa Gabriella D'Este, che ho potuto conoscere al di fuori del contesto universitario. In questi anni di università è stata per me un riferimento importante, una presenza silenziosa ma sempre disponibile a concedere un po' del suo tempo per aiutarmi a fugare qualche dubbio algebrico, o a ragionare su qualche esercizio. È una generosità gratuita che non ho mai sottovalutato, e che in particolare ora, al momento della laurea, mi viene naturale ricordare tra i fattori che mi hanno permesso di giungere dove sono ora.

2 Richiami di Teoria degli Anelli e dei Moduli

In questo paragrafo verranno richiamate alcune definizioni e alcune proprietà degli anelli e dei moduli che saranno utili al fine di comprendere al meglio i risultati presenti nella trattazione successiva.

Definizione 2.0.1. *Dato un anello R, si dice che esso possiede la* ***proprietà IBN*** *(Invariant Basis Number) se soddisfa la seguente condizione: se m e n sono interi positivi tali che i moduli liberi sinistri R^m e R^n sono isomorfi, allora $m = n$.*

I concetti di modulo semplice, finitamente generato, finitamente presentato e proiettivo, risulteranno centrali. Vale dunque la pena di richiamarli:

Definizione 2.0.2. *Dato un anello R, un modulo sinistro ${}_RM$ non nullo è un modulo sinistro* ***semisemplice*** *se ogni sottomodulo di ${}_RM$ è un addendo diretto di ${}_RM$.*

Definizione 2.0.3. *Dato un anello R, un modulo sinistro ${}_RM$ non nullo è un modulo sinistro* ***semplice*** *se i suoi unici sottomoduli sono ${}_RM$ e 0.*

Definizione 2.0.4. *Sia R un anello e ${}_RM$ un modulo sinistro su R. Un sottoinsieme $X \subseteq {}_RM$ è un* ***insieme di generatori*** *per ${}_RM$ se ${}_RM = \langle X \rangle = \{r_1x_1 + ... + r_nx_n | n \geq 1, x_i \in X, r_i \in R \text{ per } i = 1, ..., n\}$. Ad eccezione del caso banale ${}_RM = 0$, in cui ogni sottoinsieme di ${}_RM$ è un insieme di generatori, si ha che un sottoinsieme X è un insieme di generatori per ${}_RM$ se e solo se $\forall m \in {}_RM$ esiste un numero finito di elementi $x_1, ..., x_n \in X$ e $r_1, ..., r_n \in R$ tali che $m = r_1x_1 + ... + r_nx_n$.*
Un modulo ${}_RM$ si dice ***finitamente generato*** *se ha un insieme X di generatori finito. Si dice* ***ciclico*** *se $|X| = 1$.*
Un modulo ${}_RM$ si dice ***libero*** *se ha un insieme* ***libero*** *X di generatori, cioè tale che $\forall n \geq 1$, $x_1, ..., x_n$ elementi distinti di X e $r_1, ..., r_n \in R$, si ha che $r_1x_1 + ... + r_nx_n = 0$ implica che $r_1 = ... = r_n = 0_R$. X è un insieme libero di generatori per il modulo ${}_RM$ se e solo se ogni elemento di ${}_RM$ può essere scritto come combinazione lineare di elementi di X in modo unico.*

Definizione 2.0.5. *Dato un anello R, un modulo sinistro ${}_RM$ su R si dice* ***proiettivo*** *se è isomorfo a un addendo diretto di un modulo libero.*

Definizione 2.0.6. *Sia ${}_RM$ un modulo sinistro su un anello R. Una* ***serie*** *per ${}_RM$ è una catena finita di sottomoduli di ${}_RM$ tali che:*

$$0 = M_0 \subseteq M_1 \subseteq M_2 \subseteq ... \subseteq M_n = M_R$$

I moduli M_i/M_{i-1} per $i = 1, ..., n$ sono detti ***fattori*** *della serie, mentre la* ***lunghezza*** *della serie è n. Si ha una* ***serie di composizione*** *per ${}_RM$ quando i fattori M_i/M_{i-1} sono moduli semplici $\forall i = 1, ..., n$.*
Si può dimostrare (Teorema di Jordan-Holder) che se un modulo ${}_RM$ ha una serie di composizione, allora la lunghezza e i fattori della serie non dipendono

dalla serie scelta di per sè, ma solo dal modulo $_RM$. Dunque in generale un modulo dotato di una serie di composizione si definisce un modulo ***a lunghezza finita di composizione****, o semplicemente* ***a lunghezza finita****.*

Definizione 2.0.7. *Sia M un modulo sinistro su un anello R. Il modulo M si dice* ***finitamente presentato*** *se esistono $n, m \in \mathbb{N}$ tali che*

$$R^{\oplus m} \to R^{\oplus n} \to M \to 0$$

sia una sequenza esatta.
Si ricordi che una sequenza di moduli:

$$\ldots \xrightarrow{\ldots} M_{i-1} \xrightarrow{f_{i-1}} M_i \xrightarrow{f_i} M_{i+1}$$

è esatta in M_i se $f_{i-1}(M_{i-1}) = ker f_i$. In altre parole, si può dire che un modulo sinistro $_RM$ su un anello R è finitamente presentato se è ottenuto da un quoziente di un modulo finitamente generato con un sottomodulo finitamente generato, o, equivalentemente, che un modulo è finitamente presentato se ha un numero di generatori finiti soggetti ad un numero finito di relazioni.

Nella discussione riguardo la possibilità di costruire moduli di Chen che non siano isomorfi tra loro, sarà importante lo studio dei rispettivi annullatori, che coinvolgerà anche i concetti di ideale primo e primitivo:

Definizione 2.0.8. *Dato un modulo sinistro $_RM$ su un anello R, si definisce il suo* ***annullatore*** *come l'insieme di tutti gli elementi $r \in R$ tali che $r(_RM) = 0$. In particolare, è un ideale sinistro di R.*

$$Ann_R(_RM) = \{r \in R | rm = 0 \quad \forall m \in_R M\}$$

Definizione 2.0.9. *Un ideale P in un anello R si dice* ***primo*** *se $P \neq R$ e se, dati due ideali qualsiasi A, B di R, si ha che $AB \subseteq P$ implica che o $A \subseteq P$ o $B \subseteq P$. Un ideale sinistro P di R si dice* ***primitivo*** *se è l'annullatore sinistro di un modulo semplice sinistro su R.*

Definizione 2.0.10. *Un modulo sinistro $_RM$ su un anello R si dice* ***fedele*** *se il suo annullatore è l'ideale nullo.*

Osservazione 2.0.11. Data un'algebra A, sia $\widehat{A}$ l'insieme delle classi di isomorfismo dei moduli semplici sinistri su A, e sia $Prim(A)$ l'insieme degli ideali primitivi di A. C'è una mappa canonica

$$\widehat{A} \to Prim(A)$$

che agisce mandando la classe $[N]$ nell'annullatore $Ann_A(N)$ di N.

L'algebra dei cammini di Leavitt, base di tutte le sovrastrutture che verranno analizzate in questa tesi, è prima di tutto un'algebra libera, ovvero:

Definizione 2.0.12. *Dato un campo K, una* ***K-algebra*** $(R, +, \cdot, *)$ *è un anello* $(R, +, \cdot)$ *che è anche un K-modulo* $R_K = (R, +, *)$, *e in cui* $(r \cdot s) * \lambda = (r * \lambda) \cdot s = r \cdot (s * \lambda) \quad \forall r, s \in R \quad e \quad \forall \lambda \in K$.
Data una K-algebra R e un sottoinsieme X di R, l'intersezione di tutte le K-sottoalgebre di R (ovvero sottoanelli di R che sono anche K-sottospazi di R_K) che contengono X è la K-sottoalgebra di R generata da X, e si denota con $K\langle X\rangle$. L'algebra $K\langle X\rangle$ sarà l'insieme di tutte le combinazioni lineari a coefficienti in K di prodotti finiti di elementi di X, in particolare:

$$K\langle X\rangle = \{\sum_{finite} x_{i_1} \dots x_{i_n} \lambda_{i_1 \dots i_n} | x_{i_t} \in X, \lambda_{i_1 \dots i_n} \in K\}$$

Dunque $X \subseteq R$ è un insieme di generatori della K-algebra R se e solo se ogni elemento $r \in R$ può essere scritto come somma finita di prodotti della forma $x_1 \dots x_n \lambda$ con $x_1, \dots, x_n \in X$ e $\lambda \in K$. L'insieme di generatori X è ***libero****, e di conseguenza lo è la corrispondente algebra generata, se questo può essere fatto in modo unico.*

Definizione 2.0.13. *Un omomorfismo ϕ di K-algebre R ed S è una mappa che è contemporaneamente un omomorfismo di K-moduli (ovvero $\forall x, y \in R$ e $\forall k \in K$ si ha $\phi(x + y) = \phi(x) + \phi(y)$ e $\phi(kx) = k\phi(x)$) e un omomorfismo di anelli.*

Si vedrà in seguito come la struttura di un grafo possa influenzare alcune proprietà dell'algebra costruita a partire da esso. Uno degli esempi più immediati di questo fatto sta nella possibilità dell'algebra di essere o meno artiniana a seconda della presenza o meno di cicli nel grafo. Si ricordino dunque le definizioni:

Definizione 2.0.14. *Dato un anello R e un modulo sinistro ${}_RM$, si indica con il simbolo $\mathcal{L}({}_RM)$ il* ***reticolo di tutti i sottomoduli*** *di ${}_RM$, cioè l'insieme parzialmente ordinato $(\mathcal{L}({}_RM), \subseteq)$ i cui elementi sono i sottomoduli di ${}_RM$, in cui l'ordine parziale è dato dall'inclusione, e in cui valgono le proprietà:*

$$\forall\ N_1, N_2 \in \mathcal{L}({}_RM) \qquad N_1 \vee N_2 = N_1 + N_2 \qquad e \qquad N_1 \wedge N_2 = N_1 \cap N_2$$

Definizione 2.0.15. *Un insieme parzialmente ordinato $(P, \leq)$ si dice* ***noetheriano*** *se soddisfa una delle seguenti condizioni equivalenti:*

1. *Ogni sottoinsieme non vuoto di $(P, \leq)$ ha un elemento massimale;*

2. *Ogni successione numerabile ascendente in P è stazionaria (cioè se $p_0 \leq p_1 \leq ...$ sono elementi di P, esiste $n \geq 0$ tale che $p_n = p_{n+1} = p_{n+2} = ...$);*

Un insieme parzialmente ordinato $(P, \leq)$ si dice ***artiniano*** *se il suo opposto $(P, \geq)$ è noetheriano.*
Dato un anello R, un modulo sinistro ${}_RM$ si dice ***artiniano*** *se il corrispondente reticolo $\mathcal{L}({}_RM)$ è un insieme artiniano parzialmente ordinato. Dunque lo è se ogni successione discendente $N_0 \supseteq N_1 \supseteq N_2 \supseteq ...$ di sottomoduli di ${}_RM$ è stazionaria.*

Negli ultimi capitoli si rivelerà fondamentale il concetto di Morita equivalenza, che consentirà in particolare di facilitare lo studio di alcune strutture costruibili su un certo grafo lavorando equivalentemente con un grafo più semplice.

Definizione 2.0.16. *Dati due anelli R e S, essi si definiscono **Morita equivalenti** se le categorie $R-Mod$ e $S-Mod$ dei moduli sinistri su R e su S sono equivalenti.*

Definizione 2.0.17. *Dato un anello R, un elemento $\epsilon \in R$ si definisce **idempotente** se $\epsilon^2 = \epsilon$. Un elemento idempotente ϵ si dice anche **full** nel caso in cui $R = R\epsilon R$. Se $\epsilon \in R$ è un idempotente non nullo, allora l'anello $\epsilon R\epsilon$ si dice un **corner** di R.*

Osservazione 2.0.18. Un criterio molto utile per stabilire l'equivalenza di Morita (vedi [1] Teorema 1.6(1)) è il seguente:

Siano R e S anelli unitari. L'anello R è Morita equivalente all'anello S se e solo se esiste un n intero positivo e un idempotente full $\epsilon \in M_n(R)$, tali che $S \cong \epsilon M_n(R)\epsilon$.

3 Grafi

La definizione di Algebra di Leavitt utilizza come pilastro principale il concetto di algebra associata ad un grafo. Per questo sarà utile richiamare alcune definizioni di base della Teoria dei Grafi, alcune delle quali verranno ampiamente sfruttate durante tutto il corso della trattazione successiva.

Definizione 3.0.1. *Un **grafo (diretto)** è definito da una quadrupla $E = (E_0, E_1, r, s)$ in cui E_0, E_1 sono due insiemi i cui elementi sono detti rispettivamente **vertici** e **frecce**, mentre r,s:$E_1 \to E_0$ sono due funzioni.*

Definizione 3.0.2. *Dato un grafo diretto $E = (E_0, E_1, r, s)$:*

- *Se sia E_0 che E_1 sono insiemi finiti, il grafo si dice **finito**;*
- *Se $s^{-1}(v)$ è un insieme finito $\forall v \in E_0$, il grafo si dice **row-finite**;*
- *Un vertice v per cui $s^{-1}(v) = \emptyset$ si dice **sink**, mentre uno per cui $r^{-1}(v) = \emptyset$ si dice **source**. Se v è sia sink che source si dice **isolato**;*
- *Un vertice v per cui $|s^{-1}(v)| = \infty$ è detto **emittente infinito**, e il simbolo $Inf(E)$ indica l'insieme di tutti gli emittenti infiniti del grafo E;*
- *Un vertice v si dice **singolare** se è un emittente infinito oppure un sink, altrimenti si dice **regolare**. Il simbolo $Reg(E)$ indica l'insieme di tutti i vertici regolari del grafo E. Un grafo si dice **regolare** se ognuno dei suoi vertici è regolare.*

Quando si lavora con le algebre di Leavitt gli elementi fondamentali con cui si ha a che fare sono i cammini percorribili sul grafo a cui l'algebra è associata. E' importante perciò ricordarne le diverse tipologie:

Definizione 3.0.3. *Un* ***cammino*** μ *in un grafo* E *è una sequenza di frecce* $\mu = e_1 e_2 \cdots e_n$ *tali che* $r(e_i) = s(e_{i+1})$ *per* $i = 1, 2, \ldots, n-1$, *e si indica con* $Path(E)$ *l'insieme di tutti i cammini in* E.

- *Dato un cammino* $\mu = e_1 e_2 \cdots e_n$ *in* E, *si definisce la funzione lunghezza* $\ell : Path(E) \to \mathbb{N}$ *come* $\ell(\mu) = n$;

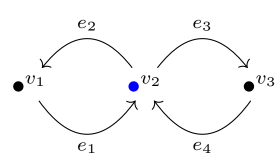
- *Dato un cammino* $\mu = e_1 e_2 \cdots e_n$ *in* E *è possibile considerare un'estensione delle funzioni* s *ed* r *all'insieme* $Path(E)$ *definendo* $s(\mu) = s(e_1)$ *e* $r(\mu) = r(e_n)$. *I vertici di* E *possono essere interpretati come cammini di lunghezza* 0, *e su di essi le estensioni delle funzioni* r *ed* s *agiscono come* $s(v) = r(v) = v \ \forall v \in E$;

- *Dato un cammino* $\mu = e_1 e_2 \cdots e_n$ *in* E, $\mu^0 = \{s(e_1), r(e_i) | 1 \le i \le n\}$ *è l'insieme dei vertici del cammino* μ, *mentre* $\mu^1 = \{e \in E_1 | e$ *compare in* $\mu\}$ *è l'insieme delle frecce coinvolte in* μ;

- *Dato un cammino* $\mu = e_1 e_2 \cdots e_n$ *in* E, μ *si dice* ***semplice*** *se non ammette vertici ripetuti, ovvero* $s(e_i) \neq s(e_j) \ \forall \ 1 \le i, j \le n$ *con* $i \neq j$;

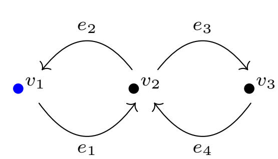
- *Per* $n \ge 2$ *si indica con* E_n *l'insieme dei cammini in* E *di lunghezza* n, *cosicché* $Path(E) = \bigcup_{n \ge 0} E_n$;

- *Dato un cammino* $\mu = e_1 e_2 \cdots e_n$ *in* E, *se* $n = \ell(\mu) \ge 1$ *e* $v = s(\mu) = r(\mu)$ *allora* μ *si dice* ***chiuso con base*** v. *Ad esempio:*



$\mu = e_3 e_4 e_2 e_1$ *è chiuso con base* v_2

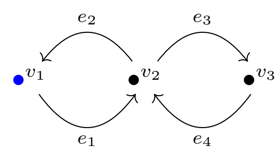
- *Dato un cammino* $\mu = e_1 e_2 \cdots e_n$ *in* E, μ *chiuso con base* v *è anche* ***semplice*** *(in sigla* $CSP(v)$, *Closed Simple Path based at* v*) se* $s(e_j) \neq v$ $\forall j > 1$. *Ad esempio:*



$\mu = e_1 e_3 e_4 e_2$ *è un CPS*(v_1)

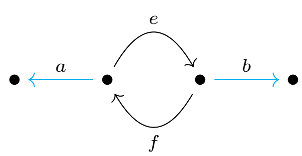
- *Dato un cammino* $\mu = e_1 e_2 \cdots e_n$ *in* E, μ *è un* ***ciclo*** *se è un cammino chiuso con base* v *e* $s(e_i) \neq s(e_j) \ \forall i \neq j$. *Se* μ *è un ciclo con base* v, *allora* $\forall 1 \le i \le n$ *il cammino* $\mu_i = e_i e_{i+1} \ldots e_n e_1 \ldots e_{i-1}$ *è un ciclo con base*

*$s(e_i)$. Si chiama **ciclo di** μ la collezione di cicli $\{\mu_i\}_i$ con basi $s(e_i)_i$. Un ciclo di lunghezza 1 si dice **loop**. Un ciclo si dice **esclusivo** se è disgiunto rispetto a qualsiasi altro ciclo (cioè nessuno dei suoi vertici è base per un ciclo che sia diverso da una permutazione ciclica di se stesso). Ad esempio:*



$\mu = e_1 e_2$ *è un ciclo non-esclusivo*

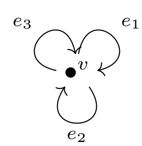
- *si dice **uscita** del ciclo μ una freccia e tale che $s(e) = s(e_i)$ per qualche i, con $e \neq e_i$. Ad esempio:*



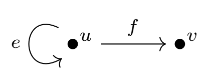
a,b sono uscite del ciclo $\mu = ef$

- *E si dice **aciclico** se non contiene alcun cammino chiuso basato su suoi vertici (dunque non contiene cicli);*

- *E soddisfa la **condizione** (K) se $\forall v \in E_0$ in un cammino chiuso semplice, esistono almeno due cammini chiusi semplici distinti α, β con base v. Ad esempio:*



- *E soddisfa la **condizione** (L) se ogni ciclo di E possiede un'uscita. Ad esempio:*



f è uscita dell'unico ciclo $\mu = e$

- *Si definisce un preordine $\leq$ su E_0:*

$$v \geq w \text{ se esiste un cammino } \mu \text{ tale che } s(\mu) = v \text{ e } r(\mu) = w$$

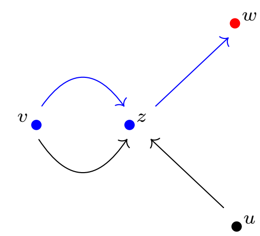
*In questo caso, si dice che v è **a monte** di w, o, equivalentemente, che w si trova **a valle** di v. Si utilizza il simbolo $T(v)$ per indicare l'insieme $\{w \in E_0 : v \geq w\}$.*

- *$D \subseteq E_0$ è **diretto verso il basso** se $\forall u, v \in D$ $\exists w \in D$ tale che $u \geq w$ e $v \geq w$;*

- $D \subseteq E_0$ *ha la* ***Countable Separation Property (CPS)*** *rispetto ad un insieme* C, *se* C *è un sottoinsieme numerabile di* E_0 *con la proprietà che* $\forall u \in D$ *esiste* $v \in C$ *tale che* $u \geq v$.

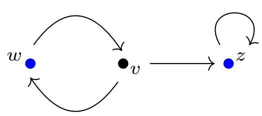
- $H \subseteq E_0$ *è* ***ereditario*** *se ogni volta che* $v \in H, w \in E_0$ *sono tali che* $v \geq w$, *allora* $w \in H$. *Ad esempio:*

  $v \in H = \{v, z, w\}$, H *è ereditario* $\Rightarrow w \in H$

  .

  Un insieme ereditario è ***saturo*** *se* $\forall$ *vertice regolare* $v \in E_0$ *si ha che* $r(s^{-1}(v)) \subseteq H$ *implica* $v \in H$ *(cioè per ogni vertice* v *non-sink che emette un numero finito di frecce in* E, *se tutte queste frecce terminano in* H, *allora anche* v *deve stare in* H*). Ad esempio:*

  $\{\, r(e) \mid s(e) = v \,\} \subseteq H$ *e* H *è saturo* $\implies v \in H$.

Nella trattazione della costruzione dei moduli di Chen sarà anche importante lavorare con cammini infiniti:

Definizione 3.0.4.

- *Un cammino* μ *su* E *si dice* ***infinito*** *(a destra) se è costituito da una sequenza infinita di frecce* $\mu = e_1 e_2 \ldots$ *tali che* $r(e_i) = s(e_{i+1})$ *per ogni* $i \geq 1$. *Si indica con* E_∞ *l'insieme dei cammini infiniti su* E.

- *Dato il cammino* $\mu = e_1 e_2 e_3 \ldots$ *non necessariamente finito, si dice* ***segmento iniziale di*** μ ***di lunghezza*** l, *con* $l \in \mathbb{N}$, *il sottocammino* $e_1 e_2 \ldots e_l$ *(con la convenzione che se* $l = 0$ *il segmento iniziale si considera* $v_0 = s(e_1)$*).*

- *Un vertice* $v \in E_0$ *si dice di* ***biforcazione*** *se* $|s^{-1}(v)| \geq 2$.

- *Un vertice* $v \in E_0$ *si dice* ***line point*** *se non esistono né biforcazioni né cicli (o meglio, non ci sono vertici che giacciono su cicli) in ogni vertice di* $T(v)$. *Dunque se* v *è un line point, ci sarà un unico cammino "in linea" finito (eventualmente anche di lunghezza zero, e che in ogni caso deve terminare in un vertice sink) o infinito* μ *che parte da* v, *e ogni altro cammino* α *con* $s(\alpha) = v$ *sarà un segmento iniziale di* μ.

La prossima definizione si rivelerà centrale nella costruzione dell'algebra di Leavitt associata ad un grafo:

Definizione 3.0.5. *Dato un grafo diretto $E = (E_0, E_1, r, s)$ si definisce* ***grafo esteso di E*** *il nuovo grafo $\hat{E} = (E_0, E_1 \cup (E_1)^*, r', s')$ dove $(E_1)^* = \{e^* | e \in E_1\}$ e le funzioni r' ed s' sono tali che*

$$r'|_{E_1} = r \quad s'|_{E_1} = s \quad r'(e^*) = s(e) \quad s'(e^*) = r(e) \quad \forall e \in E_1$$

Generalmente ci si riferisce agli elementi di E_1 con il termine ***frecce reali****, mentre agli elementi di $(E_1)^*$ con il termine* ***frecce fantasma****.*
Se $\mu = e_1 e_2 \cdots e_n$ è un cammino in E, il corrispondente cammino $e_n^* \cdots e_2^* e_1^*$ si indica con μ^*.

4 Algebra di Leavitt

4.1 Definizione

Per poter comprendere al meglio la definizione di *Algebra di Leavitt* è utile richiamare innanzitutto quella di *K-algebra dei cammini*.

Definizione 4.1.1. *Dato un campo K e un grafo diretto $E = (E_0, E_1, r, s)$, la* ***K-algebra dei cammini di E*** *(indicata col simbolo KE e nota equivalentemente come* ***K-algebra associata al quiver E****) è definita come la K-algebra libera generata dall'insieme $E_0 \cup E_1$ modulo le seguenti relazioni:*

(V) $vv' = \delta_{v,v'} v \ \forall v, v' \in E_0$

(E1) $s(e)e = er(e) = e \ \forall e \in E_1$

Equivalentemente, si può definire KE come la K-algebra avente $Path(E)$ come base, e in cui la moltiplicazione è definita tramite l'estensione K-lineare della concatenazione:

$$\begin{cases} p \cdot q = pq & \textit{se } r(p) = s(q) \\ p \cdot q = 0 & \textit{altrimenti} \end{cases} \tag{1}$$

Ecco che ora appare definitivamente chiara anche la seguente definizione:

Definizione 4.1.2. *Dato un grafo diretto $E = (E_0, E_1, r, s)$ e un campo K, si definisce* ***K-algebra dei cammini di Leavitt****, in simboli $L_K(E)$, la K-algebra dei cammini $K\hat{E}$ modulo le relazioni:*

(CK1) $e_i^* e_j = \delta_{i,j} r(e_j) \ \forall e_j \in E_1$ *e* $\forall e_i^* \in (E_1)^*$

(CK2) $v_i = \sum_{\{e_j \in E_1 | s(e_j) = v_i\}} e_j e_j^* \ \forall v_i \in E_0$ *che sia un vertice regolare*

ossia, più precisamente, $L_K(E)$ corrisponde al quoziente di $K\hat{E}$ modulo l'ideale di $K\hat{E}$ generato dalle relazioni $(CK1)$ e $(CK2)$.
Equivalentemente, è possibile definire l'algebra dei cammini di Leavitt di E a coefficienti in K come la K-algebra libera generata dall'insieme $E_0 \cup E_1 \cup (E_1)^*$ modulo le relazioni:

(V) $vv' = \delta_{v,v'}v \ \forall v, v' \in E_0$

(E1) $s(e)e = er(e) = e \ \forall e \in E_1$

(E2) $r(e)e^* = e^*s(e) = e^* \ \forall e \in E_1$

(CK1) $e_i^*e_j = \delta_{i,j}r(e_j) \ \forall e_j \in E_1$ *e* $\forall e_i^* \in (E_1)^*$

(CK2) $v_i = \sum_{\{e_j \in E_1 | s(e_j)=v_i\}} e_je_j^* \ \forall v_i \in E_0$ *che sia un vertice regolare*

Osservazione 4.1.3. Una diretta conseguenza delle regole elencate nella Definizione 4.1.2 è che moltiplicare una freccia per un vertice che sia ad essa scollegato dà risultato zero:

$$ve = vs(e)e = 0 \text{ se } v \neq s(e) \text{ grazie alle relazioni } (V), (E1)$$

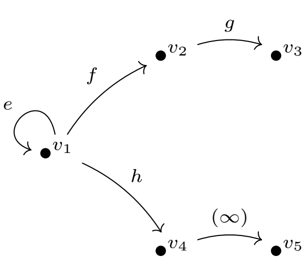
$$ev = er(e)v = 0 \text{ se } v \neq r(e) \text{ grazie alle relazioni } (V), (E1)$$

Lo stesso vale naturalmente per le frecce fantasma.

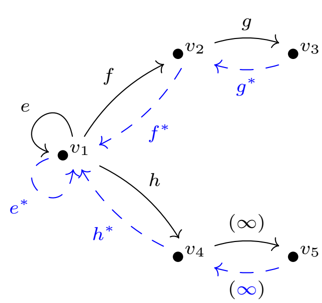
Osservazione 4.1.4. Se $\alpha = e_1e_2 \dots e_n$ è un cammino in E, è possibile interpretare α come un elemento dell'algebra dei cammini KE, e di conseguenza anche come un elemento dell'algebra dei cammini di Leavitt $L_K(E)$. La concatenazione nel grafo E si interpreta come la moltiplicazione in KE o in $L_K(E)$. In genere, ci si riferisce al cammino $\alpha = e_1e_2 \dots e_n$ di E (visto come elemento di $L_K(E)$) con il nome di **cammino reale**, mentre un elemento di $L_K(E)$ del tipo $\alpha^* = e_n^* \dots e_2^*e_1^*$ si definisce **cammino fantasma**.

Esempio 4.1.5. *Vediamo come costruire il grafo esteso $\widehat{E}$ corrispondente ad un grafo E, e mostriamo come utilizzare le relazioni elencate nella precedente definizione per effettuare alcuni semplici conti.*

$E =$



$\widehat{E} =$



Se a partire dal grafo E costruiamo l'algebra dei cammini di Leavitt di E a coefficienti in un generico campo K, $L_K(E)$, allora possiamo notare che valgono le relazioni:

$$ee^* + ff^* + hh^* = v_1$$

$$v_1 f = f v_2 = f$$

$$v_2 f^* = f^* v_1 = f^*$$

$$h^* h = v_4$$

$$gg^* = v_2$$

Osservazione 4.1.6. Nell'Esempio 4.1.5 si vede che l'elemento ff^*, al contrario di $f^*f = v_2$, non ha una semplificazione vera e propria. Tuttavia, $(ff^*)^2 = ff^*ff^* = f(f^*f)f^* = fwf^* = ff^*$, dunque risulta essere un elemento idempotente. Questo comportamento, in realtà, è riscontrabile non solo in questo specifico esempio, ma vale in generale: se E è un grafo, ed $e \in E_1$, allora l'elemento $ee^* \in L_K(E)$ è sempre un idempotente grazie alla proprietà $(CK1)$. Inoltre, $ee^* \neq s(e)$ a meno che e sia l'unica freccia emessa da $s(e)$ (nel qual caso, infatti, varrebbe la proprietà $(CK2)$).

Avendo enunciato la definizione di algebra di Leavitt e dei suoi elementi, è possibile ora comprendere alcune più specifiche definizioni riguardo i grafi, che saranno poi utili in seguito.

Definizione 4.1.7. *Se H è un sottoinsieme ereditario di E_0, un vertice $v \in E_0$ si dice **di rottura** per H se appartiene all'insieme*

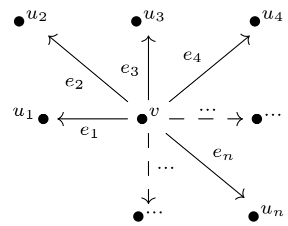
$$B_H = \{v \in E_0 \backslash H \,:\, |s^{-1}(v)| = \infty \;\; e \; 0 < |s^{-1}(v) \cap r^{-1}(E_0 \setminus H)| < \infty\}$$

In particolare, B_H consiste di tutti quei vertici che sono emittenti infiniti, che non appartengono ad H, e per i quali le frecce emesse terminano tutte in H ad eccezione di una quantità finita (ma non nulla).
Se $v \in B_H$, si definisce

$$v^H = v - \sum_{e \in s^{-1}(v) \cap r^{-1}(E_0 \backslash H)} ee^*$$

e per ogni sottoinsieme $S \subseteq B_H$ si definisce $S_H = \{v^H | v \in S\}$.
*Se H è un sottoinsieme ereditario saturo, e $S \subseteq B_H$, allora la coppia (H, S) si dice **coppia ammissibile**. Le coppie ammissibili in particolare formano un insieme parzialmente ordinato sotto la relazione "$(H_1, S_1) \leq (H_2, S_2)$ se e solo se $H_1 \subseteq H_2$ e $S_1 \subseteq H_2 \cup S_2$". Infine, data una coppia ammissibile (H, S), si denota con $I(H, S)$ l'ideale generato da $H \cup \{v^H : v \in S\}$.*

Ad esempio sia $C_{\mathbb{N}}$ il grafo "orologio infinito":



.

Sia U l'insieme $\{u_i | i \in \mathbb{N}\} = C^0_{\mathbb{N}} \setminus \{v\}$. Ogni sottoinsieme di U è ereditario, e dato che la saturazione si applica solo ai vertici regolari, ogni sottoinsieme di U è anche saturo. Ora, se $H \subseteq U$ è tale che $U \setminus H$ è infinito, oppure se $H = U$, allora $B_H = \emptyset$. Se invece $U \setminus H$ è finito, allora $B_H = \{v\}$ e si ha

$$v^H = v - \sum_{\{i | r(e_i) \in U \setminus H\}} e_i e_i^*$$

Con un insieme ereditario e con una coppia ammissibile è possibile costruire a partire da E una nuova tipologia di grafo, detta grafo quoziente:

Definizione 4.1.8. *Sia E un grafo diretto, e sia H un sottoinsieme ereditario di E_0. Si indica con*

$$E/H$$

*e si dice **grafo quoziente di** E **con** H, il grafo definito da:*

$$(E/H)_0 = E_0 \backslash H \qquad e \qquad (E/H)_1 = \{e \in E_1 | r(e) \notin H\}$$

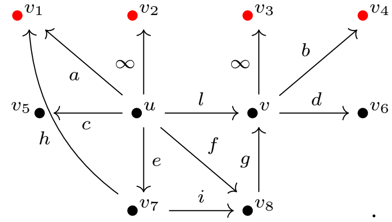
e in cui le mappe r, s sono definite restringendo il loro dominio da E_1 a $(E/H)_1$.

Definizione 4.1.9. *Dato un grafo diretto E e una coppia ammissibile (H, S), si definisce **grafo quoziente di** E **con** (H, S) e si indica con il simbolo*

$$E/(H, S)$$

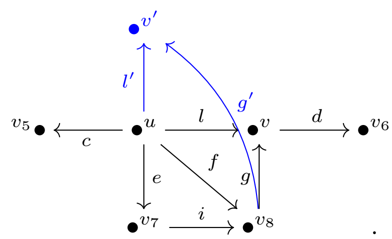
il grafo per cui $(E/(H, S))_0 = (E_0 \backslash H) \cup \{v' : v \in B_H \backslash S\}$ e $(E/(H, S))_1 = \{e \in E_1 : r(e) \notin H\} \cup \{e' : e \in E_1, r(e) \in B_H \backslash S\}$ e le mappe r, s sono estese a $(E/(H, S))_1$ imponendo che $s(e') = s(e)$ e $r(e') = r(e)'$.
Se $S = B_H$ si ha che $(E/(H, B_H))_0 = E_0 \backslash H$ e $(E/(H, B_H))_1 = \{e \in E_1 : r(e) \notin H\}$, quindi considerando la Definizione 4.1.8 è possibile identificare il grafo $E/(H, B_H)$ con il sottografo E/H di E.

Esempio 4.1.10.



.

Sia E il grafo in figura, e sia H il sottoinsieme di E_0 dato da $H = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$: esso è ereditario e saturo. Si vede allora che l'insieme dei vertici di rottura per H è dato da $B_H = \{u, v\}$. Si scelga ora il sottoinsieme proprio $S = \{u\} \subset B_H$. La coppia (H, S) è una coppia ammissibile, dunque è possibile costruire il grafo quoziente $E/(H, S)$:



Osservazione 4.1.11. Si noti che gli elementi v' tali che $v \in B_H \backslash S$ sono tutti vertici sink nel grafo $E/(H, S)$.

Osservazione 4.1.12. Un importante risultato (vedi [2] Teorema 5.7) afferma che esiste un epimorfismo quoziente

$$\phi : L_K(E) \to L_K(E/(H, S))$$

$$\text{tale che } ker\phi = I(H, S) \text{ e } \phi(v^H) = v' \text{ per } v \in B_H \backslash S$$

Quindi si ha che $L_K(E)/I(H, S) \cong L_K(E/(H, S))$.
Tale teorema è stato dimostrato in [2] sotto l'ipotesi che E sia un grafo con al massimo una quantità numerabile di vertici e frecce; tuttavia analizzando la dimostrazione si nota che la condizione di numerabilità su E non viene effettivamente utilizzata. Dunque il risultato vale in generale per grafi diretti arbitrari.

Definizione 4.1.13. *Se H è un sottoinsieme ereditario e saturo di E_0, c è un ciclo senza uscite in $E/(H, B_H) = E/H$ con base $v \in E_0 \backslash H$, e $f(x)$ è un polinomio in $K[x, x^{-1}]$, si definisce con il simbolo*

$$I(H, B_H, f(c))$$

l'ideale di $L_K(E)$ generato da $I(H, B_H)$ e $f(c)$ ($f(c)$ è l'elemento di $L_K(E)$ ottenuto sostituendo formalmente x con c, x^{-1} con c^* e il termine costante a_0 con $a_0 v$ nell'espressione canonica di $f(x)$ come polinomio in x, x^{-1}.

4.2 Alcune proprietà

Definizione 4.2.1. *Si dice che un anello R è dotato di un **insieme di unità locali** F se F è un insieme di idempotenti in R con la proprietà che, per ogni sottinsieme finito $\{r_1, ..., r_n\}$ di elementi di R, esiste $f \in F$ tale che $fr_if = r_i$ per ogni $1 \leq i \leq n$. Si dice che un anello R ha **abbastanza idempotenti** se esiste un insieme E di idempotenti ortogonali non nulli in R per cui l'insieme F delle somme finite di elementi distinti di E è un insieme di unità locali per R. In tal caso, ${}_RR = \oplus_{e \in E} Re$ come R-moduli sinistri.*

Definizione 4.2.2. *Sia E un grafo e A una qualsiasi K-algebra. Una **E-famiglia di Leavitt** in A è data dall'unione di un insieme $\{a_v | v \in E_0\}$ per cui:*

1. $a_v a_{v'} = \delta_{v,v'} a_v \ \forall v, v' \in E_0$

(cioè un insieme di idempotenti ortogonali) e di altri due insiemi $\{b_e | e \in E_1\}$ e $\{c_e | e \in E_1\}$ tali che:

2. $a_{s(e)} b_e = b_e a_{r(e)} = b_e \ \forall e \in E_1$
3. $a_{r(e)} c_e = c_e a_{s(e)} = c_e \ \forall e \in E_1$
4. $c_e b_{e'} = \delta_{e,e'} a_{r(e)} \ \forall e, e' \in E_1$
5. $a_v = \sum_{\{e \in E_1 | s(e) = v\}} b_e c_e \ \forall v$ *regolare in* E_0

Grazie alla Definizione 4.1.2 di $L_K(E)$ come quoziente di una K-algebra libera modulo un insieme di relazioni, si può ottenere il seguente risultato, talvolta chiamato *Proprietà Universale delle K-algebre dei cammini di Leavitt*:

Teorema 4.2.3. *Dato un grafo E, una K-algebra A e una E-famiglia di Leavitt in A, esiste un unico omomorfismo di K-algebre $\phi : L_K(E) \to A$ per cui:*

- $\phi(v) = a_v \ \forall v \in E_0$
- $\phi(e) = b_e \ \forall e \in E_1$
- $\phi(e^*) = c_e \ \forall e \in E_1$

Dimostrazione. Una volta definita la mappa ϕ come nell'enunciato, e quindi avendo stabilito le immagini di ogni generatore, c'è un unico modo di estenderla ad un omomorfismo di algebre, ovvero un omomorfismo di anelli che sia anche applicazione lineare tra spazi vettoriali. □

Proposizione 4.2.4. *Sia E un grafo arbitrario e K un campo. Siano $\gamma, \lambda, \mu, \rho \in Path(E)$:*

1. *Prodotti di monomi del tipo $\gamma\lambda^*$ in $L_K(E)$ danno i seguenti risultati:*

$$(\gamma\lambda^*)(\mu\rho^*) = \begin{cases} \gamma\beta\rho^* & \text{se } \mu = \lambda\beta \text{ per qualche } \beta \in Path(E) \\ \gamma\alpha^*\rho^* & \text{se } \lambda = \mu\alpha \text{ per qualche } \alpha \in Path(E) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

   In particolare, se $\ell(\lambda) = \ell(\mu)$, allora $\lambda^*\mu \neq 0$ se e solo se $\lambda = \mu$, e in tal caso $\lambda^*\mu = r(\lambda)$.

2. *L'azione del campo K sull'algebra $L_K(E)$ è, come ci si aspetta, tale per cui:*

$$(k\gamma\lambda^*)(k'\mu\rho^*) = kk'(\gamma\lambda^*\mu\rho^*) \qquad \text{con } k, k' \in K$$

3. *L'algebra $L_K(E)$ è generata come spazio vettoriale su K dall'insieme di monomi della forma:*

$$\{\gamma\lambda^* | \gamma, \lambda \in Path(E) \text{ tali che } r(\gamma) = r(\lambda)\}$$

In altre parole, ogni elemento non nullo $x \in L_K(E)$ si può esprimere come

$$x = \sum_{i=1}^{n} k_i \gamma_i \lambda_i^*$$

dove $k \in K^\times$, $\gamma_i, \lambda_i \in Path(E)$ con $r(\gamma_i) = r(\lambda_i)$ per ogni $1 \leq i \leq n$. A parte i casi banali, questa rappresentazione non è unica, dunque l'insieme di monomi appena descritto non costituisce una base per $L_K(E)$.

4. *Se E_0 è finito, l'algebra $L_K(E)$ è unitaria. In tal caso*

$$1_{L_K(E)} = \sum_{v \in E_0} v$$

5. *Per ogni $\alpha \in L_K(E)$ esiste un insieme finito di vertici distinti $V(\alpha)$ per cui $\alpha = f\alpha f$, dove $f = \sum_{v \in V(\alpha)} v$. Inoltre, l'algebra $L_K(E)$ è un anello con abbastanza idempotenti (i vertici di E_0) e quindi un anello con unità locali (somme di elementi distinti di E_0).*

Dimostrazione. 1. Se $\mu = \lambda\beta$ allora utilizzando le proprietà elencate nella Definizione 4.1.2 si ha che $(\gamma\lambda^*)(\mu\rho^*) = \gamma\lambda^*\lambda\beta\rho^* = \gamma r(\lambda)\beta\rho^* = \gamma r(\gamma)\beta\rho^* = \gamma\beta\rho^*$. Se invece $\lambda = \mu\alpha$ allora $\lambda^* = \alpha^*\mu^*$, quindi si ha che $(\gamma\lambda^*)(\mu\rho^*) = \gamma\alpha^*\mu^*\mu\rho^* = \gamma\alpha^* r(\mu)\rho^* = \gamma\alpha^* r(\rho)\rho^* = \gamma\alpha^*\rho^*$. Altrimenti: $(\gamma\lambda^*)(\mu\rho^*) = \gamma\lambda^*\mu\rho^* = 0$. In particolare, se $\ell(\lambda) = \ell(\mu) = n$ allora $\lambda = e_1 e_2 \dots e_n$ e $\mu = e'_1 e'_2 \dots e'_n$ e quindi $e_n^* \dots e_2^* e_1^* e'_1 e'_2 \dots e'_n \neq 0$ soltanto se $\lambda = \mu$ grazie alla proprietà $(CK1)$ nella Definizione 4.1.2.

2. Segue dalla definizione di $L_K(E)$ come K-algebra libera associata ad un insieme di generatori.

3. Il punto 1 della proposizione mostra come prodotti (cioè concatenazioni) di monomi del tipo $\gamma\lambda^*$ si possano sempre scrivere a loro volta come altri monomi dello stesso tipo, a parte i casi banali. Inoltre va ricordato che anche un cammino puramente reale come $\gamma = e_1 e_2$ può essere scritto come monomio $\gamma\lambda^*$, in particolare basta considerare λ^* come il cammino fantasma di lunghezza zero con origine $r(\gamma)$. A questo punto è facile dedurre che qualsiasi elemento non banale dell'algebra sia riconducibile a combinazioni lineari di monomi del tipo descritto nell'enunciato.

4. Se E_0 è finito, l'elemento di $L_K(E)$ in questione agisce come l'identità: dato un generico $x \in L_K(E)$, si ha che $x = \sum_{i=1}^{n} k_i \gamma_i \lambda_i^*$ grazie al punto 3, e dunque

$$1_{L_K(E)} x = \left(\sum_{v \in E_0} v\right)\left(\sum_{i=1}^{n} k_i \gamma_i \lambda_i^*\right) = \sum_{v \in E_0}\left(\sum_{i=1}^{n} k_i v \gamma_i \lambda_i^*\right) = \sum_{i=1}^{n} k_i \gamma_i \lambda_i^* = x$$

$$x1_{L_K(E)} = \left(\sum_{i=1}^{n} k_i\gamma_i\lambda_i^*\right)\left(\sum_{v\in E_0} v\right) = \sum_{v\in E_0}\left(\sum_{i=1}^{n} k_i\gamma_i\lambda_i^* v\right) = \sum_{i=1}^{n} k_i\gamma_i\lambda_i^* = x$$

perché grazie a quanto detto nell'Osservazione 4.1.3 si annullano tutti i contributi tranne quello in cui $v = s(\gamma_i)$ nel primo caso, tranne quello in cui $v = s(\lambda_i)$ nel secondo.

5. Grazie alla relazione (V) nella Definizione 4.1.2, ogni somma di vertici distinti in $L_K(E)$ costituisce un idempotente, infatti:

$$(v_1 + v_2 + ... + v_n)(v_1 + v_2 + ... + v_n) = v_1v_1 + v_1v_2 + ... = \sum_{i=1}^{n} v_iv_i = \sum_{i=1}^{n} v_i$$

Ora, sia $\alpha = \sum_{i=1}^{n} k_i\gamma_i\lambda_i^*$ un elemento di $L_K(E)$ e sia $V(\alpha)$ l'insieme di tutti i vertici coinvolti in α, cioè tutti i vertici che siano sorgenti di γ_i o arrivi di λ_i^* (cioè sorgenti di λ_i) per qualche i. Definendo $f = \sum_{v\in V(\alpha)}$ allora si ha che:

$$f\alpha f = \left(\sum_{v\in E_0} v\right)\left(\sum_{i=1}^{n} k_i\gamma_i\lambda_i^*\right)\left(\sum_{v\in E^0} v\right) = \left(\sum_{v\in E_0}\sum_{i=1}^{n} k_iv\gamma_i\lambda_i^*\right)\left(\sum_{v\in E_0} v\right)$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{n} k_i\gamma_i\lambda_i^*\right)\left(\sum_{v\in E_0} v\right) = \sum_{v\in E_0}\left(\sum_{i=1}^{n} k_i\gamma_i\lambda_i^* v\right) = \sum_{i=1}^{n} k_i\gamma_i\lambda_i^* = \alpha$$

In base alla Definizione 4.2.1 l'algebra $L_K(E)$ è allora un anello dotato di un insieme di unità locali (l'insieme delle somme di elementi distinti di E_0), e con abbastanza idempotenti (i vertici di E_0). Si può notare, infine, che $V(\alpha)$ non è unico: la scelta fatta nella dimostrazione include l'esigenza di trovare l'insieme con cardinalità minima, ma si potrebbero anche includere altri vertici "non coinvolti" nell'elemento α (in modo tale che diano contributo nullo nell'operazione $f\alpha f$).

□

4.2.1 Gradazione data da $\mathbb{Z}$

Una proprietà molto importante dell'algebra dei cammini di Leavitt è quella di essere graduata, cioè di possedere una gradazione data da $\mathbb{Z}$.

Definizione 4.2.5. *Sia G un gruppo e A un'algebra su un campo K. Si dice che A è* ***graduata da*** *G se esiste una famiglia $\{A_\sigma\}_{\sigma\in G}$ di sottospazi su K di A tali che:*

$$A = \bigoplus_{\sigma\in G} A_\sigma \qquad e \qquad A_\sigma \cdot A_\tau \subseteq A_{\sigma\tau} \quad \forall\sigma,\tau\in G$$

Un elemento $x \in A_\sigma$ si dice ***elemento omogeneo di grado*** *σ. Un ideale I di una K-algebra che sia graduata da G si dice* ***ideale graduato*** *se:*

$$I \subseteq \sum_{\sigma\in G}(I\cap A_\sigma) \quad o,\ equivalentemente, \quad y = \sum_{\sigma\in G} y_\sigma \in I \ implica\ y_\sigma \in I\ \forall\sigma\in G$$

*Tra due K-algebre graduate da G, $A = \oplus_{\sigma \in G} A_\sigma$ e $B = \oplus_{\sigma \in G} B_\sigma$ un omomorfismo f si dice **graduato** se $f(A_\sigma) \subseteq B_\sigma$ $\forall \sigma \in G$.*

Osservazione 4.2.6. Il quoziente di un'algebra $A = \oplus_{\sigma \in G} A_\sigma$ graduata da G con un ideale graduato è ancora un'algebra graduata da G, con la gradazione naturale indotta da A. Ciò significa che considerata la proiezione:

$$\pi : A \longrightarrow A/I = \hat{A} \qquad a \mapsto \hat{a}$$

e utilizzando la proprietà di I di essere graduato, si ha che $\forall \sigma \in G$ la componente omogenea $\hat{A}_\sigma$ di A di grado σ è proprio $\widehat{A_\sigma}$.

Dopo aver definito la gradazione di un'algebra in generale, ecco che nel caso specifico dell'algebra dei cammini di Leavitt essa viene definita a partire da una gradazione stabilita prima sull'algebra dei cammini associata al grafo esteso $\hat{E}$:

Definizione 4.2.7. *Sia E un grafo diretto, K un campo arbitrario e $\hat{E}$ il grafo esteso di E. Si definisca il grado dei generatori dell'algebra dei cammini $K\hat{E}$ nel seguente modo:*

- $deg(v) = 0$ $\forall v \in E_0$
- $deg(e) = 1$ $\forall e \in E_1$
- $deg(e^*) = -1$ $\forall e^* \in (E_1)^*$

Dunque per ogni monomio del tipo $\lambda x_1 \dots x_m$ con $x_i \in E_0 \cup E_1 \cup (E_1)^*$ si avrà che:

$$deg(\lambda x_1 \dots x_m) = \sum_{i=1}^{m} deg(x_i)$$

Definendo $\forall n \in \mathbb{Z}$ il sottospazio su K:

$$A_n = span_K\{x_1 \dots x_m | x_i \in E_0 \cup E_1 \cup (E_1)^* \text{ con } deg(x_1 \dots x_m) = n\}$$

la decomposizione $K\hat{E} = \oplus_{n \in \mathbb{Z}} A_n$ definisce una gradazione data da $\mathbb{Z}$ sull'algebra dei cammini $K\hat{E}$, e tale gradazione ne induce una sull'algebra dei cammini di Leavitt $L_K(E)$ esprimibile nella decomposizione:

$$L_K(E) = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} L_n \quad \text{con } L_n = span_K\{\gamma\lambda^* | \gamma, \lambda \in Path(E) \text{ e } \ell(\gamma) - \ell(\lambda) = n\}$$

Uno dei risultati principali che la gradazione di $L_K(E)$ data da $\mathbb{Z}$ permette di dimostrare è il *Reduction Theorem*, il quale afferma che ogni elemento non nullo dell'algebra può essere ridotto, tramite moltiplicazioni a destra e a sinistra per opportuni cammini, a un K-multiplo di un vertice, o a un polinomio monico in un ciclo senza uscite, o a entrambi:

Teorema 4.2.8. *Sia E un grafo diretto e K un campo arbitrario. Per ogni elemento $\alpha \in L_K(E)$ esistono $\mu, \nu \in Path(E)$ tali che:*

- $0 \neq \mu^* \alpha \nu = kv$ *per qualche* $k \in K^\times$ *e* $v \in E_0$*, oppure*
- $0 \neq \mu^* \alpha \nu = f(c)$ *dove* c *è un ciclo senza uscite e* $f(x) \in K[x, x^{-1}]$ *è un polinomio non nullo.*

Esempio 4.2.9. *Le due possibilità espresse nel Teorema 4.2.8 possono verificarsi contemporaneamente, ad esempio se si considera l'algebra dei cammini di Leavitt* $L_K(R_1)$ *associata al grafo:*

$$R_1 = \; {}_{e}\circlearrowright \bullet^{u}$$

si ha che $e^* e = u$*, e tale elemento è allo stesso tempo un vertice e la base di un ciclo (loop) senza uscite.*

Un importante corollario del *Reduction Theorem*, che tornerà utile in seguito, è il seguente:

Corollario 4.2.10. *Sia* E *un grafo diretto che soddisfi la condizione* (L)*, e* K *un campo arbitrario. Allora ogni ideale non nullo di* $L_K(E)$ *contiene un vertice.*

Dimostrazione. Sia I un ideale non nullo di $L_K(E)$, e sia $0 \neq \alpha \in I$. Poiché E soddisfa la condizione (L), grazie al Reduction Theorem devono esistere $\mu, \nu \in Path(E)$ tali che $0 \neq \mu^* \alpha \nu = kv$ con $k \in K^\times$ e $v \in E_0$. Questo implica che $0 \neq v = k^{-1} \mu^* \alpha \nu \in L_K(E) I L_K(E) \subseteq I$. $\square$

4.3 Origini dell'algebra di Leavitt

4.3.1 Algebre di Leavitt di tipo (m,n)

Un importante antecedente delle Algebre dei cammini di Leavitt è costituito da una classe particolare di algebre definita all'inizio degli anni Sessanta da W.G. Leavitt, un matematico americano che insegnò all'università del Nebraska e che fu molto attivo nella ricerca in ambito di Teoria degli anelli e dei moduli. In particolare ciò che condusse Leavitt a definire le suddette algebre, fu lo studio della struttura di anelli che, a differenza degli esempi più comuni, non possedevano la proprietà IBN (vedi Definizione 2.0.1).

Esempio 4.3.1. *La maggior parte degli anelli che si incontrano più facilmente possiedono la proprietà IBN, come gli anelli noetheriani o quelli commutativi. Tuttavia esistono anche molte altre classi di anelli che non possiedono la proprietà IBN, e l'esempio più comune è forse quello dell'anello* $R = RFM_{\mathbb{N}}(K)$ *delle matrici* $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ *ad entrate in un campo* K*, aventi in ogni riga al massimo un numero finito di entrate non nulle. Questo anello, infatti, possiede la proprietà SBN (Single Basis Number), che in particolare implica:*

$$R^i \cong R^j \text{ come moduli sinistri (o destri) su } R, \quad \forall i, j \in \mathbb{N}$$

Dimostrazione. Un isomorfismo di moduli sinistri ${}_R R \to_R R^2$ si può definire considerando la mappa che associa ad ogni matrice $M \in RFM_{\mathbb{N}}(K)$ la coppia

(M_1, M_2) con $M_1, M_2 \in RFM_{\mathbb{N}}(K)$ e tale che M_1 è costruita utilizzando le colonne dispari di M, mentre M_2 le colonne di indice pari. Più formalmente, definendo le seguenti matrici:

$$Y_1 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} Y_2 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

$$X_1 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} X_2 := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

si ha che MY_1 dà le colonne dispari di M, mentre MY_2 dà le colonne pari di M. Dunque la mappa descritta sopra sarà proprio

$$_RR \to_R R^2 \qquad M \mapsto (MY_1, MY_2)$$

Viceversa, è possibile partire da una coppia di matrici (M_1, M_2) con $M_1, M_2 \in RFM_{\mathbb{N}}(K)$ e risalire ad un'unica matrice M tramite la mappa:

$$_RR^2 \to_R R \qquad (M_1, M_2) \mapsto M_1X_1 + M_2X_2$$

Osservando infine che

$$_RR^3 \cong_R R^2 \oplus_R R \cong_R R \oplus_R R \cong_R R$$

e applicando una generalizzazione arriviamo alla tesi $R^i \cong R^j \ \forall i, j \in \mathbb{N}$. □

Osservazione 4.3.2. Si può notare che nell' Esempio 4.3.1 valgono le equazioni:

$$Y_1X_1 + Y_2X_2 = \mathbb{I}$$

$$X_1Y_1 = \mathbb{I} = X_2Y_2 \qquad \text{e} \qquad X_1Y_2 = \mathbb{O} = X_2Y_1$$

e che tramite esse è possibile riformulare le mappe inverse $_RR \to_R R \oplus_R R$ e $_RR \oplus_R R \to_R R$ nel seguente modo:

$$M \mapsto (MY_1, MY_2) \mapsto MY_1X_1 + MY_2X_2 = M\mathbb{I} = M$$

$$(M_1, M_2) \mapsto M_1X_1 + M_2X_2 \mapsto ((M_1X_1 + M_2X_2)Y_1, (M_1X_1 + M_2X_2)Y_2) = (M_1, M_2)$$

Utilizzando lo stesso espediente, è possibile affermare allora che dato un qualsiasi anello R con identità che contenga quattro elementi y_1, y_2, x_1, x_2 tali che

$$y_1x_1 + y_2x_2 = 1_R$$

$$x_1y_1 = 1_R = x_2y_2 \qquad \text{e} \qquad x_1y_2 = 0 = x_2y_1$$

allora esso soddisferà $R \cong R \oplus R$. Gli insiemi $\{1_R\}$ e $\{x_1, x_2\}$ sono entrambi insiemi liberi di generatori per R.

Definizione 4.3.3. *Sia R un anello non IBN. Sia $m \in \mathbb{N}$ il minimo intero positivo con la proprietà che $R^m \cong R^{m'}$ come R-moduli sinistri con $m' > m$. Per tale m sia n il minimo intero positivo per cui $R^m \cong R^n$, con $n > m$. Allora si dice che R ha "module type" (m, n).*

Esempio 4.3.4. *L'anello R dell'Esempio 4.3.1 ha module type $(1, 2)$.*

William G.Leavitt, nel corso della sua ricerca, indagò la possibilità di esistenza di anelli che potessero rappresentare uno stadio intermedio tra quelli IBN e quelli SBN, cioè anelli per i quali accadesse che ${}_RR^i \cong_R R^j$ per alcune coppie $i, j \in \mathbb{N}$, ma non per tutte. Se si assume che esista un isomorfismo tra ${}_RR^i$ e ${}_RR^j$ per qualche $i \neq j$, allora considerando k-copie di R si avrà che anche ${}_RR^{i+k} \cong_R R^{j+k}$. Utilizzando questa idea, è possibile ottenere il seguente risultato:

Lemma 4.3.5. *Sia R un anello con identità, non IBN, ossia tale che esistano $i \neq j \in \mathbb{N}$ per cui ${}_RR^i \cong_R R^j$. Sia in particolare (m, n) il module type di R, e sia $k = n - m \in \mathbb{N}$. Allora, per ogni coppia $i, j \in \mathbb{N}$ si avrà:*

$${}_RR^i \cong_R R^j \qquad \Leftrightarrow \qquad i, j \geq m \quad e \quad i \equiv j \pmod{k}$$

Tenendo presente l'idea del Lemma 4.3.5, Leavitt riuscì a dimostrare il seguente teorema (*"anything-that-can-happen-actually-does-happen"*) che oggi è conosciuto proprio come "Teorema di Leavitt":

Teorema 4.3.6. *Siano $m, n \in \mathbb{N}$ con $n > m$, e sia K un campo. Allora esiste una K-algebra $L_k(m, n)$ avente module type (m, n). Inoltre:*

1. *$L_k(m, n)$ è universale, nel senso che se S è una qualsiasi K-algebra con module type (m, n) allora esiste un omomorfismo di K-algebre*

$$\phi : L_k(m, n) \to S$$

2. *$L_k(m, n)$ è semplice (cioè non ha ideali bilateri non triviali) se e solo se $m = 1$. In questo caso, per ogni $0 \neq x \in L_k(1, n)$ esistono $a, b \in L_k(1, n)$ per cui $axb = 1$;*

3. *$L_k(m, n)$ è esplicitamente descritta in termini di generatori e relazioni.*

Definizione 4.3.7. *L'algebra $L_k(m, n)$ che compare nel Teorema 4.3.6 si definisce **algebra di Leavitt di tipo (m,n)**.*

In particolare le algebre di Leavitt di tipo $(1,n)$ assumono uno speciale rilievo, ed è possibile fornirne una descrizione esplicita abbastanza semplice.

Lemma 4.3.8. *Sia R un anello con unità, e sia $n \in \mathbb{N}$. Allora ${}_R R \cong_R R^n$ come R-moduli sinistri se e solo se esistono $2n$ elementi $x_1, x_2, ..., x_n$ e $y_1, y_2, ..., y_n$ in R tali che*

$$y_i x_j = \delta_{i,j} 1_R \qquad e \qquad \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = 1_R$$

Dimostrazione. L'idea di fondo su cui si basa questo risultato è la stessa che compare nell'Osservazione 4.3.2, in cui è spiegato il caso $n = 2$. Per $n > 2$, si può vedere che interpretando gli omomorfismi tra moduli in termini di prodotti matriciali, gli isomorfismi $\psi \in Hom_R(R^1, R^n)$ e $\phi \in Hom_R(R^n, R^1)$ tali che $\psi \circ \phi = id_{R^n}$ e $\phi \circ \psi = id_R$ si possono costruire se e solo se esistono $1 \times n$ e $n \times 1$ R-vettori

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix} \quad \text{per cui}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix} = (1_R) \qquad \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1_R & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1_R & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1_R \end{pmatrix}$$

e ciò corrisponde perfettamente alle richieste espresse nell'enunciato del lemma. □

Il Lemma 4.3.8 fornisce l'idea chiave per poter costruire algebre di Leavitt di tipo $(1,n)$ (e più in generale esempi di anelli non-IBN), e poter quindi dedurre la loro costituzione esplicita. Infatti, dato $n > 1$, è relativamente semplice costruire un'algebra A che contenga $2n$ elementi che si comportino secondo le relazioni espresse nel Lemma 4.3.8: sia K un campo e sia

$$S = K\langle X_1, ..., X_n, Y_1, ..., Y_n \rangle$$

la K-algebra libera generata da $2n$ variabili non commutative, e sia I l'ideale di S generato dalle relazioni

$$I = \langle \sum_{i=1}^{n} X_i Y_i - 1, Y_i X_j - \delta_{i,j} 1 | 1 \leq i, j \leq n \rangle$$

e sia

$$A := S/I$$

Allora l'insieme $\{x_i = \bar{X}_i, y_j = \bar{Y}_j | 1 \leq i, j \leq n\}$ è l'insieme di variabili cercato, che soddisfa per costruzione le relazioni del Lemma 4.3.8, dunque si ha che

$$A^1 \cong A^n \quad \text{come A-moduli sinistri}$$

Ora, nonostante sia stata costruita una K-algebra A per cui $A^1 \cong A^n$, non sarebbe possibile dedurre automaticamente che sia di tipo $(1, n)$, a meno che non si dimostri la minimalità di n. Tuttavia questo è esattamente ciò che conferma Leavitt nel Teorema 4.3.6: la K-algebra $L_k(1, n)$ che compare nell'enunciato è esattamente l'algebra $A = S/I$ costruita appena sopra. Riassumendo queste considerazioni, è possibile allora formalizzare la costruzione esplicita delle Algebre di Leavitt di tipo $(1, n)$ dandone una nuova definizione:

Definizione 4.3.9. *Sia K un campo e sia $n > 1$ un intero positivo. La **K-algebra di Leavitt di tipo** $(1, n)$ è la K-algebra*

$$L_K(1, n) = K\langle X_1, ..., X_n, Y_1, ...Y_n\rangle / \langle \sum_{i=1}^{n} X_iY_i - 1, Y_iX_j - \delta_{i,j}1 | 1 \leq i, j \leq n\rangle$$

4.3.2 Algebre di Bergman

Le algebre di Leavitt di tipo $L_K(1, n)$ rappresentarono una delle "naturali" motivazioni nei confronti della ricerca più approfondita che portò in seguito alla definizione delle più generali algebre dei cammini di Leavitt. Tuttavia ci furono altri percorsi, per lo più paralleli, che nonostante la loro apparente diversità portarono alla fine alla comune necessità di definire questi nuovi oggetti. Quello descritto in forma riassunta in questo paragrafo conduce attraverso gli studi di G.Bergman, un matematico statunitense, e la sua costruzione di un'algebra in relazione ad un particolare monoide.

Definizione 4.3.10. *Sia R un anello unitario. Sia $\mathcal{V}(R)$ il semigruppo i cui elementi sono le classi di isomorfismo di R-moduli sinistri proiettivi finitamente generati, con operazione binaria $\oplus$ definita in modo naturale come $[P] \oplus [Q] = [P \oplus Q]$. $(\mathcal{V}(R), \oplus)$ è un monoide commutativo con elemento neutro $[\{0\}]$.*

Osservazione 4.3.11. Se R è un anello con divisione, allora un R-modulo sinistro è uno spazio vettoriale sinistro su R. Dunque in questo caso la proprietà di essere proiettivo finitamente generato è equivalente a quella di avere dimensione finita su R, di conseguenza la classificazione degli R-spazi vettoriali sinistri a dimensione finita si può ottenere proprio tramite la funzione dimensione, che permette di stabilire una corrispondenza biunivoca tra classi di spazi vettoriali con stessa dimensione e interi positivi. Si ha quindi $\mathcal{V}(R) \cong \mathbb{Z}^+$. Anche nel caso in cui $R = \mathbb{Z}$ il monoide $\mathcal{V}(R)$ è isomorfo a $\mathbb{Z}^+$, infatti poiché $\mathbb{Z}$ è un PID, uno $\mathbb{Z}$-modulo è proiettivo se e solo se è libero ([3] Teorema 7.7), dunque gli $\mathbb{Z}$-moduli proiettivi finitamente generati possono essere classificati anch'essi tramite il loro rango, che stabilisce un isomorfismo (dal momento che $\mathbb{Z}$ è un anello IBN) tra $\mathcal{V}(R)$ e gli interi positivi. Per un arbitrario anello R, invece, è in genere difficile ottenere una descrizione esplicita di $\mathcal{V}(R)$.

Alcune proprietà di $\mathcal{V}(R)$ sono ad esempio:

- $\forall$ idempotente $e \in R$, $[Re] \in \mathcal{V}(R)$, poiché Re è un modulo proiettivo. In particolare $[R] \in \mathcal{V}(R)$;

- se R e S sono anelli isomorfi, allora esiste un isomorfismo di monoidi $\phi : \mathcal{V}(R) \to \mathcal{V}(S)$ per cui $\phi([R]) = [S]$, e si può scrivere $(\mathcal{V}(R), [R]) \cong (\mathcal{V}(S), [S])$
- $\mathcal{V}(R)$ è *conico*: se $x, y \in \mathcal{V}(R)$ sono tali che $x \oplus y = [\{0\}]$, allora $x = y = [\{0\}]$. Infatti per come è stata definita l'operazione $\oplus$ nella Definizione 4.3.10, si ha che $x \oplus y = [P \oplus Q]$ con P, Q moduli proiettivi rappresentanti rispettivamente delle classi x, y, e affinché tale somma diretta possa essere isomorfa al modulo nullo, entrambi gli addendi devono esserlo a loro volta;
- $\mathcal{V}(R)$ contiene un *elemento distinto* d: $\forall x \in \mathcal{V}(R)$ $\exists y \in \mathcal{V}(R)$ e $n \in \mathbb{N}$ tali che $x \oplus y = nd$ (nello specifico, $d = [R]$). Infatti un R-modulo proiettivo finitamente generato è isomorfo a un addendo diretto di ${}_R R^n$ per qualche $n \geq 0$, inoltre essendo R unitario, $[R] \in \mathcal{V}(R)$, come visto poco sopra.

Nel 1974 Bergman formulò il seguente importante teorema:

Teorema 4.3.12. *Sia M un monoide commutativo conico e finitamente generato con un elemento distinto $d \neq 0$, e sia K un campo. Allora esiste una K-algebra $B = B(M, d)$ per cui $(\mathcal{V}(B), [B]) \cong (M, d)$. Inoltre B può essere scelta in modo tale che $B = B(M, d)$ sia universale, cioè data una qualsiasi K-algebra unitaria C per cui $(\mathcal{V}(C), [C]) \cong (M, d)$, esiste un omomorfismo (non necessariamente unico) di K-algebre $\Psi : B \to C$ che induce un morfismo di monoidi $\mathcal{V}(\Psi) : \mathcal{V}(B) \to \mathcal{V}(C)$ con $\langle {}_B A \rangle \mapsto \langle C \otimes_B A \rangle$.*
Per una tale B, inoltre, si ha che:

1. *ogni ideale destro o sinistro di B è proiettivo.*
2. *la costruzione di $B(M, d)$ dipende dalla rappresentazione specifica di M come $\mathcal{F}/\langle \mathcal{R} \rangle$ dove $\mathcal{F}$ è un monoide abeliano libero finitamente generato, mentre $\mathcal{R}$ è un dato insieme finito di relazioni su $\mathcal{F}$. Con $\mathcal{F}$ e $\mathcal{R}$ interpretati come dati iniziali, l'algebra $B = B(M, d) = B(\mathcal{F}/\langle \mathcal{R} \rangle, d)$ è costruita esplicitamente tramite una sequenza finita di passi, in cui ogni passo consiste nell'associare elementi soddisfacenti esplicite relazioni specificate (fornite da $\mathcal{R}$) ad un'algebra esplicitamente descritta.*

Osservazione 4.3.13. La definizione del morfismo di monoidi indotto $\mathcal{V}(\Psi) : \mathcal{V}(B) \to \mathcal{V}(C)$ come mappa che manda $\langle {}_B A \rangle \mapsto \langle C \otimes_B A \rangle$ ha senso poiché C viene inteso come modulo destro su B (C_B) con moltiplicazione per scalare $*$ definita in questo modo:

$$c * b = c\Psi(b) \qquad \text{con } c \in C, b \in B$$

L'enunciato del teorema corrisponde graficamente alla commutatività del seguente diagramma:

$$\begin{tikzcd}
(M, d) \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, "\cong"'] & (\mathcal{V}(C), [C]) \\
(\mathcal{V}(B), [B]) \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

Definizione 4.3.14. *L'algebra $B = B(M,d) = B(\mathcal{F}/\langle\mathcal{R}\rangle, d)$ descritta nel Teorema 4.3.12 si definisce **algebra di Bergman** associata a $(\mathcal{F}/\langle\mathcal{R}\rangle, d)$.*

Esempio 4.3.15. *Consideriamo K campo e $(M,d) = (\mathbb{Z}^+, 1)$. Se scegliamo di rappresentare $\mathbb{Z}^+$ come monoide abeliano libero con insieme di generatori dato da $\{1\}$, modulo un insieme vuoto di relazioni, $(\mathbb{Z}^+, 1) = (\mathbb{Z}^+/\langle\varnothing\rangle, 1)$, allora si ha che $B(\mathbb{Z}^+/\langle\varnothing\rangle, 1) = K$. Ciò non appare sorprendente, poiché K risulta essere l'algebra più semplice tale che i suoi moduli proiettivi finitamente generati siano spazi vettoriali di dimensione finita, dunque effettivamente in corrispondenza biunivoca con $\mathbb{Z}^+$.*

Esempio 4.3.16. *Interpretando ora il monoide $\mathbb{Z}^+$ come $\mathbb{Z}^+/\langle 1 = 1\rangle$, si ha che alla stessa coppia $(\mathbb{Z}^+, 1)$ verrà associata l'algebra $B(\mathbb{Z}^+/\langle 1 = 1\rangle, 1) = K[x, x^{-1}]$, ovvero l'algebra dei polinomi di Laurent a coefficienti in K (che in seguito vedremo essere uno tra gli esempi fondamentali di Algebra dei cammini di Leavitt).*

Esempio 4.3.17. *Sia $n \geq 2$ intero positivo. Sia V_n il monoide abeliano libero avente un singolo generatore x, soggetto alla relazione $nx = x$. Allora $V_n = \{0, x, 2x, ..., (n-1)x\}$, $|V_n| = n$ e la coppia (V_n, x) soddisfa le ipotesi del Teorema 4.3.12. In questo caso la costruzione esplicita di Bergman porta a $B(V_n, x) = K\langle x_1, ..., x_n, y_1, ...y_n\rangle$ con le stesse relazioni*

$$y_i x_j = \delta_{i,j} 1_R \qquad e \qquad \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = 1_R$$

già comparse nel Lemma 4.3.8. Di conseguenza l'algebra di Bergman $B(V_n, x)$ risulta essere proprio l'algebra di Leavitt $L_K(1, n)$.

4.3.3 C^*-Algebre su grafi

Un altro esempio di percorso di ricerca che si è rivelato fondamentale nella costruzione, in seguito, del concetto di Algebra dei cammini di Leavitt, è quello che conduce attraverso lo studio delle C^*-algebre su grafi (in realtà l'argomento assume ancora oggi un ruolo centrale nello sviluppo ulteriore della ricerca intorno alle algebre dei cammini di Leavitt). In questo paragrafo, in cui verranno mostrate in modo riassuntivo le proprietà delle C^*-algebre su grafi che permettono poi di comprendere la loro connessione con il nuovo oggetto di studio, si assumerà che ogni algebra presa in considerazione sia unitaria sul campo dei numeri complessi $\mathbb{C}$.

Definizione 4.3.18. *1. L'algebra A è una $*$**-algebra** se esiste una mappa $* : A \to A$ tale che:*

- $(x+y)^* = x^* + y^* \qquad \forall x, y \in A$;
- $(xy)^* = y^* x^* \qquad \forall x, y \in A$;
- $1^* = 1$;

- $(x^*)^* = x \qquad \forall x \in A$;
- $(\alpha x)^* = \bar{\alpha} x^* \qquad \forall x, y \in A$ *e* $\forall \alpha \in \mathbb{C}$ *($\bar{\alpha}$ indica il complesso coniugato di α);*

2. *Una C^*-norma su una $*$-algebra A è una funzione $\|\cdot\| : A \to \mathbb{R}^+$ per cui:*

   - $\|ab\| \leq \|a\| \cdot \|b\| \qquad \forall a, b \in A$
   - $\|a + b\| \leq \|a\| + \|b\| \qquad \forall a, b \in A$
   - $\|aa^*\| = \|a\|^2 = \|a^*\|^2 \qquad \forall a \in A$
   - $\|a\| = 0 \Leftrightarrow a = 0 \qquad \forall a \in A$
   - $\|\lambda a\| = |\lambda| \|a\| \qquad \forall a \in A, \forall \lambda \in \mathbb{C}$

Definizione 4.3.19. *Una C^*-norma su una $*$-algebra A induce una topologia su A nel modo usuale, definendo la palla di raggio ϵ intorno ad $a \in A$ come $\{b \in A | \|b - a\| < \epsilon\}$. Si dice C^***-algebra** una $*$-algebra A dotata di una C^*-norma $\|\cdot\|$ tale che A risulti completa rispetto alla topologia indotta da $\|\cdot\|$. Inoltre:*

- *Una C^*-algebra si dice **semplice** se non contiene ideali bilateri chiusi non-triviali;*
- *Una C^*-algebra si dice **infinita** se contiene un elemento x tale che $xx^* = 1$ e $x^*x \neq 1$;*
- *Una C^*-algebra A è **semplice puramente infinita** se A non è isomorfa a $\mathbb{C}$ e $\forall 0 \neq x \in A$ esistono $a, b \in A$ tali che $axb = 1$;*
- *Una **isometria parziale** è un elemento x nella C^*-algebra A tale che $y = x^*x$ è un idempotente autoaggiunto, cioè $y^* = y$ e $y^2 = y$. Tali elementi si possono anche caratterizzare come quelli per cui $xx^*x = x$.*

Esempio 4.3.20. *Esempi standard di $*$-algebre sono l'anello delle matrici $M_n(\mathbb{C})$ (in cui $*$ è il trasposto coniugato), e l'anello $C(\mathbb{T})$ delle funzioni continue dalla circonferenza unitaria $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} | |z| = 1\}$ in $\mathbb{C}$ (in cui $*$ si definisce come $f^*(z) = \overline{f(z)}$ per $z \in \mathbb{T}$). Una C^*-norma su $M_n(\mathbb{C})$ è data dalla norma operatoriale, per cui vediamo gli elementi di $M_n(\mathbb{C})$ come operatori $\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ (con norma euclidea su $\mathbb{C}^n$), e assegniamo ad $M \in M_n(\mathbb{C})$ la radice del più grande autovalore di M^*M. Anche su $C(\mathbb{T})$ si può definire una C^*-norma che sia una norma operatoriale. Un esempio di isometria parziale (e anche di proiezione) in $M_n(\mathbb{C})$ è qualsiasi elemento che sia somma di matrici distinte del tipo $e_{i,i}$ con $1 \leq i \leq n$ (ovvero le matrici aventi 1 nell'entrata i, i).*
Invece in $C(\mathbb{T})$ gli unici idempotenti sono le funzioni costanti 0 e 1, infatti:

$$f(z) \in \mathbb{C} \quad \forall z \in \mathbb{T}, \textit{ dunque se } f^2(z) = f(z)f(z) = f(z) \Rightarrow f(z) \in \{0, 1\}$$

$$\Rightarrow f \equiv 0 \textit{ oppure } f \equiv 1 \textit{ per la continuità di } f \textit{ e la connessione di } \mathbb{T}$$

Di conseguenza l'insieme di tutte le isometrie parziali in $C(\mathbb{T})$ è $J = \{0\} \cup \{f \in C(\mathbb{T}) | f(\mathbb{T}) \subseteq \mathbb{T}\}$. Infatti, denotando con la lettera I l'insieme $\{x \in C(\mathbb{T}) | y = xx^* \Rightarrow y = y^*, y^2 = y\}$ delle isometrie parziali, si ha che:

- $J \subseteq I$: *Sia* $f \in J \backslash \{0\}$. *Allora* $f(\mathbb{T}) \subseteq \mathbb{T}$. *Posto* $g = ff^*$, *si ha* $\overline{f(t)} = \frac{1}{f(t)}$ *per ogni* $t \in \mathbb{T}$. *Dunque* $g(t) = f(t)f^*(t) = f(t)\frac{1}{f(t)} = 1$ *per ogni* $t \in \mathbb{T}$. *Dunque* g *è la funzione costante* 1 *che soddisfa le condizioni* $g = g^*$ *e* $g^2 = g$. *Perciò* $f \in I$.

- $I \subseteq J$: *Sia* $x \in I \backslash \{0\}$ *e sia* $y = xx^*$. *Dato che* $y = y^2$, *si ha che* $y(t) \in \{0, 1\}$ *per ogni* $t \in \mathbb{T}$ *e che* $y(a) = 1$ *per qualche* $a \in \mathbb{T}$. *Dato che* x *e* y *sono funzioni continue e che* $\mathbb{T}$ *è connesso, si ottiene* $y(t) = 1$ *per ogni* $t \in \mathbb{T}$. *Così* y *è la funzione costante* 1 *e vale* $x(\mathbb{T}) \subseteq \mathbb{T}$. *Dunque* $x \in J$.

Lo studio delle C^*-algebre nacque in relazione ai primi sviluppi della meccanica quantistica, per rispondere all'esigenza di dare forma alle algebre degli osservabili fisici. Nel corso degli anni, poi, i ricercatori si posero diverse domande riguardo la loro struttura. Una di queste, riguardante la descrizione esplicita di una C^*-algebra semplice, infinita e separabile, fu analizzata e risolta dal matematico tedesco J.Cuntz nel 1977:

Teorema 4.3.21. *Sia* $n \in \mathbb{N}$. *Si consideri uno spazio di Hilbert* $\mathcal{H}$ *e un insieme di isometrie* $\{S_i\}_{i=1}^n$ *(cioè* $S_i^* S_i = 1$*) su* $\mathcal{H}$. *Si assuma che* $\sum_{i=1}^n S_i S_i^* = 1$. *Si indichi con* $\mathcal{O}_n = C^*(S_1, ..., S_n)$ *la* C^**-algebra generata da* $\{S_i\}_{i=1}^n$. *Allora la* C^**-algebra infinita e separabile* $\mathcal{O}_n$ *è semplice.*

Definizione 4.3.22. *L'algebra* $\mathcal{O}_n$ *che compare nel Teorema 4.3.21 si definisce* ***C^*-algebra di Cuntz****.*

Osservazione 4.3.23. Una delle conseguenze più interessanti del Teorema 4.3.21 è che permette ad esempio di collegare le C^*-algebre $\mathcal{O}_n$ con le algebre di Leavitt: è possibile dimostrare che $\mathcal{O}_n$ si può interpretare come il C^*-completamento di una $\mathbb{C}$-algebra isomorfa a $L_{\mathbb{C}}(1, n)$.

Dopo la comparsa delle algebre di Cuntz, molti ricercatori approfondirono l'argomento tentando di stabilirne naturali generalizzazioni. Allo stesso tempo, però, all'inizio degli anni ottanta molti si dedicarono allo studio di costruzioni di C^*-algebre corrispondenti a grafi diretti. Questa nuova prospettiva, ovvero la possibilità di costruire e studiare le C^*-algebre a partire da grafi diretti, riscontrò molto successo e favorì ulteriori scoperte. Tramite questo approccio, ad esempio, fu possibile stabilire che l'algebra di Cuntz $\mathcal{O}_n$ poteva essere realizzata come la C^*-algebra associata a R_n, un particolare tipo di grafo che verrà trattato nei paragrafi successivi. Secondo questa nuova tendenza, dunque:

Definizione 4.3.24. *Sia* $E = (E_0, E_1, r, s)$ *un grafo diretto finito. Una* E*-famiglia di Cuntz-Krieger in una* C^**-algebra* A *consiste in un insieme di proiezioni mutuamente ortogonali* $\{p_v | v \in E_0\}$ *e in un insieme di isometrie parziali* $\{s_e | e \in E_1\}$ *che soddisfa le relazioni di Cuntz-Krieger:*

(CK1) $s_e^* s_e = p_{r(e)} \qquad \forall e \in E_1$

(CK2) $p_v = \sum_{\{e | s(e) = v\}} s_e s_e^* \qquad \forall v \in Reg(E)$

Si indica con il simbolo $C^*(E)$ la C^*-algebra generata da una E-famiglia universale di Cuntz-Krieger $\{s_e, p_v\}$, cioè tale che per ogni E-famiglia di Cuntz-Krieger $\{t_e, q_v\}$ nella C^*-algebra A, c'è un omomorfismo $\phi : C^*(E) \to A$ per cui $\phi(s_e) = t_e$ e $\phi(p_v) = q_v$ $\forall e \in E_1$ e $\forall v \in E_0$.

Gli studi in questa direzione portarono a risultati sempre più specifici ed interessanti riguardo la connessione tra algebra e grafo, e su come alcune proprietà dell'una fossero direttamente riconducibili ad alcune proprietà dell'altro, ad esempio:

Teorema 4.3.25. *Sia E un grafo finito. Allora $C^*(E)$ è semplice se e solo se gli unici sottoinsiemi di E ereditari e saturi sono banali, ed ogni ciclo di E ha un'uscita. Inoltre $C^*(E)$ è semplice puramente infinita se e solo se $C^*(E)$ è semplice e E contiene almeno un ciclo.*

4.3.4 La confluenza dei percorsi e la nuova definizione

Concluso il breve sopralluogo sulle algebre di Leavitt, sulle algebre di Bergman e sulle C^*-algebre, non è ancora del tutto chiara la connessione tra esse e la descrizione dell'algebra dei cammini di Leavitt fornita nella Definizione 4.1.2. Cerchiamo di far luce su questo punto, mostrando come essenzialmente due differenti tragitti storici sono confluiti in un'unica definizione.

Primo percorso: algebre di Bergman e C^*-algebre Si può dire che i protagonisti qui furono gli spagnoli P.Ara, E.Pardo, e l'americano K.R.Goodearl, matematici con una grande esperienza sia in teoria degli anelli che nelle C^*-algebre. Nella loro comune ricerca, inizialmente estesero la nozione di C^*-algebra semplice puramente infinita al contesto più generale degli anelli unitari, studiandone le proprietà. Grazie a questo studio notarono ad esempio che l'algebra di Cuntz $\mathcal{O}_n$ è interpretabile come C^*-completamento dell'algebra di Leavitt $L_{\mathbb{C}}(1, n)$ sul campo dei numeri complessi, collegamento che appunto non fu per nulla scontato fino ai primi anni 2000. Dopo aver introdotto così la nozione di anelli semplici puramente infiniti, i tre ricercatori (a cui si aggiunse lo spagnolo Gonzàles-Barroso) si concentrarono sull'analisi di esempi espliciti. Mantenendo come primo riferimento la nozione di C^*-algebra semplice puramente infinita, arrivarono a modellare un nuovo tipo di algebre, che chiamarono *algebraic Cuntz-Krieger algebras* (algebre (CK)). E' interessante notare che, retrospettivamente, tali algebre corrisponderebbero alle algebre dei cammini di Leavitt associate a grafi finiti senza vertici *source* nè *sink*, e che non siano unioni distinte di cicli. Le stesse domande che avevano stimolato i ricercatori nell'approfondire le proprietà delle C^*-algebre puramente infinite, furono riformulate allora anche per le nuove algebre (CK), e ci si chiese in un secondo momento anche come potesse risultare la struttura del monoide $\mathcal{V}(A)$ per tali algebre. Dopo aver approfondito diversi esempi nello specifico, Ara e Pardo capirono in particolare che molte informazioni riguardo al monoide $\mathcal{V}(A)$, con A una (CK) algebra, potevano essere viste direttamente in termini di relazioni tra vertici e frecce in un preciso grafo associato E, perchè effettivamente tali informazioni potevano essere usate per generare un monoide in modo naturale:

Definizione 4.3.26. *Sia E un grafo finito, con $E_0 = \{v_0, ..., v_n\}$. Si definisce M_E il monoide associato al grafo E come il monoide abeliano libero su un insieme di generatori $\{a_{v_1}, ..., a_{v_n}\}$ modulo le relazioni*

$$a_{v_i} = \sum_{\{e \in E_1 | s(e) = v_i\}} a_{r(e)} \qquad \forall v_i \in Reg(E)$$

Da uno scritto dello stesso E.Pardo indirizzato al matematico Gene Abrams possiamo leggere:

"...at some moment [early in 2004] one of us suggested that probably Bergman's coproduct construction would be a good manner of solving the computation and prove that both monoids coincide."

Fu così che Ara, Pardo e un altro collega Moreno-Frìas arrivarono a stabilire la seguente definizione e il successivo teorema:

Definizione 4.3.27. *Sia E un grafo finito, K un campo. Si definisce **la K-algebra** $L_K(E)$ **associata ad** E come la K-algebra generata dagli insiemi $\{p_v | v \in E_0\}$ e $\{x_e, y_e | e \in E_1\}$ soddisfacente le seguenti relazioni:*

1. $p_v p_{v'} = \delta_{v,v'} p_v$ *per ogni* $v, v' \in E_0$
2. $p_{s(e)} x_e = x_e p_{r(e)} = x_e$ *per ogni* $e \in E_1$
3. $p_{r(e)} y_e = y_e p_{s(e)} = y_e$ *per ogni* $e \in E_1$
4. $y_e x_{e'} = \delta_{e,e'} p_{r(e)}$ *per ogni* $e, e' \in E_1$
5. $p_v = \sum_{\{e \in E_1 | s(e) = v\}} x_e y_e$ *per ogni* $e \in E^0$ *che emetta frecce*

Sicuramente si può notare come sia stata utilizzata volontariamente una notazione e una terminologia molto simili a quelle delle C^*-algebre su grafi.

Teorema 4.3.28. *Sia E un grafo finito, K un campo. Allora esiste un isomorfismo naturale di monoidi $\mathcal{V}(L_K(E)) \cong M_E$.*

E' possibile riformulare questo importante teorema sfruttando il Teorema 4.3.12 di Bergman:

Teorema 4.3.29. *Sia E un grafo finito, K un campo. Sia M_E il monoide con l'insieme di generatori e di relazioni specificati nella Definizione 4.3.26. Sia d l'elemento $\sum_{\{v \in E_0\}} a_v$ di M_E. Allora $L_K(E) \cong B(M_E, d)$. Di conseguenza $\mathcal{V}(L_K(E)) \cong M_E$. Inoltre $L_K(E)$ è ereditaria.*

Insieme al Teorema 4.3.28 Ara, Pardo e Moreno riuscirono anche a stabilire una connessione tra i $\mathcal{V}$-monoidi di $L_K(E)$ e di $C^*(E)$:

Teorema 4.3.30. *Sia E un grafo finito. Allora esiste un isomorfismo naturale di monoidi $\mathcal{V}(L_{\mathbb{C}}(E)) \cong \mathcal{V}(C^*(E))$.*

Secondo percorso: quozienti di algebre di quiver Questo sviluppo alternativo inizia con l'interesse del matematico americano Gene Abrams nei confronti delle algebre di Leavitt, nello specifico di quelle del tipo $L_K(1,n)$. Queste ultime, infatti, potevano essere usate per produrre anelli non-IBN, come visto nella discussione del Lemma 4.3.8, ma trovavano anche altre applicazioni, come ad esempio la soluzione di alcuni quesiti riguardo gli anelli graduati. Il potenziale di queste algebre incuriosì e motivò maggiormente la ricerca nei loro confronti, finchè in una conferenza del 2004 tenuta all'Università dell'Iowa diversi algebristi tra cui Muhly, Ánh e Abrams cominciarono a realizzare che quando si considerava il "pre-completamento" delle C^*-algebre su grafi, la struttura algebrica rimanente somigliava a una sorta di modifica della ben nota nozione di *algebra di quiver* o *algebra dei cammini* (Definizione 4.1.1). Il lavoro congiunto di Abrams con il collega Gonzalo Aranda Pino nei mesi successivi alla conferenza, portò esattamente alla Definizione 3.0.5 di grafo esteso, e alla Definizione 4.1.2 di algebra dei cammini di Leavitt (sempre nel 2004). Anche in questo caso vale la pena notare come alcune notazioni sviluppate nel contesto delle C^*-algebre siano state riprese e introdotte nel mondo delle algebre dei cammini di Leavitt, ad esempio l'uso delle sigle $(CK1)$ e $(CK2)$ a designare le relazioni chiave, che richiamano le relazioni di Cuntz-Krieger esposte nella Definizione 4.3.24.
Dopo aver definito i nuovi oggetti, tenendo presenti il Teorema 4.3.6 di Leavitt e il Teorema 4.3.25 di semplicità per le C^*-algebre su grafi, Abrams e Aranda Pino si chiesero inizialmente per quali grafi E l'algebra $L_K(E)$ risultasse semplice. Fu stabilito il seguente teorema:

Teorema 4.3.31. *Sia E un grafo finito e K un campo. Allora $L_K(E)$ è semplice se e solo se gli unici sottoinsiemi ereditari e saturi di E sono banali, e ogni ciclo in E ha un'uscita.*

L'unione dei percorsi Applicando le ovvie corrispondenze $v \leftrightarrow p_v$, $e \leftrightarrow x_e$, $e^* \leftrightarrow y_e$, si vide che:

Per un grafo finito E e un campo K, la K-algebra dei grafi descritta nella Definizione 4.3.27 è la stessa algebra descritta nella Definizione 4.1.2 di algebra dei cammini di Leavitt.

Le pubblicazioni in cui principalmente si esprimono i fondamenti del nuovo soggetto sono da considerarsi i due articoli:

1. Abrams G., Aranda Pino G.: The Leavitt path algebra of a graph. J. Algebra 293, 319–334 (2005)

2. Ara P., Moreno M.A., Pardo E.: Nonstable K-theory for graph algebras. Algebras Represent. Theory 10(2), 157–178 (2007)

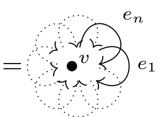
È interessante notare gli sviluppi cronologici di entrambi questi lavori paralleli: per quanto riguarda 1. il lavoro iniziò nel Luglio 2004, fu inviato per la pubblicazione nel Settembre 2004, accettato nel Giugno 2005, comparve online nel Settembre 2005 e fu stampato a Novembre 2005. Il lavoro sull'articolo

2., invece, iniziò all'inizio del 2004, fu inviato per la pubblicazione alla fine del 2004, accettato all'inizio del 2005, ma non comparve in stampa fino ad Aprile del 2007. Quindi, anche se 1. apparve in stampa otto mesi prima di 2., in realtà la maggior parte del lavoro matematico fatto per produrre 2. precedette quello impiegato per produrre 1.

4.4 Esempi fondamentali

Un aspetto forse sorprendente delle algebre di Leavitt è che comprendono classi di algebre notevoli e apparentemente molto diverse fra loro.

Definizione 4.4.1. *Per ogni $n \in \mathbb{N}$ si definisce **rosa con n petali** e si indica con il simbolo R_n il grafo caratterizzato da un solo vertice e n loop:*

$R_n =$ 

Definizione 4.4.2. *Per ogni $n \in \mathbb{N}$ si definisce **grafo orientato** n**-lineare** e si indica con il simbolo A_n il grafo caratterizzato da n vertici e $n-1$ frecce:*

$$A_n = \bullet^{v_1} \xrightarrow{e_1} \bullet^{v_2} \xrightarrow{e_2} \bullet^{v_3} \xrightarrow{e_3} \cdots \xrightarrow{e_{n-2}} \bullet^{v_{n-1}} \xrightarrow{e_{n-1}} \bullet^{v_n}$$

Definizione 4.4.3. *Si definisce **grafo di Toeplitz** e si indica con $\mathcal{T}$ il grafo finito caratterizzato da due vertici e due frecce disposti nel seguente modo:*

$$\mathcal{T} = \begin{tikzcd} \bullet^{v} \arrow[loop left, "e"] \arrow[r, "f"] & \bullet^{w} \end{tikzcd}$$

4.4.1 $L_K(R_n)$: algebra dei cammini di Leavitt associata a R_n

In base alla Proposizione 4.2.4, possiamo dire che si tratta di un'algebra unitaria in cui l'identità coincide con l'unico vertice v ($1_{L_K(R_n)} = v$). Per $n \geq 2$ è non-commutativa ($e_1e_2 \neq e_2e_1$ ad esempio) e come spazio vettoriale ha dimensione infinita, contiene infatti cammini di lunghezza k per ogni $k \in \mathbb{N}$.

Proposizione 4.4.4. *Sia $n \geq 2$ un intero positivo, K un campo e R_n la rosa con n petali. Allora $L_K(1,n) \cong L_K(R_n)$.*

Dimostrazione. Ricordando la Definizione 4.3.9 e il Lemma 4.3.8 riguardo la costruzione dell'algebra di Leavitt di tipo $(1,n)$ come quoziente di un'algebra libera su $2n$ variabili $(x_1, ...x_n, y_1, ...y_n)$ modulo un insieme di relazioni, un isomorfismo tra essa e l'algebra dei cammini di Leavitt associata al grafo R_n si può definire in questo modo:

$$\begin{aligned} L_K(R_n) &\longrightarrow L_K(1,n) \\ v &\longmapsto 1 \\ e_i &\longmapsto y_i \\ e_i^* &\longmapsto x_i. \end{aligned}$$

In questo modo, le relazioni $(CK1)$ e $(CK2)$ nella Definizione 4.1.2 corrispondono a quelle esplicitate nel Lemma 4.3.8:

$$
\begin{aligned}
&e_i^* e_j = \delta_{i,j} v && x_i y_j = \delta_{i,j} 1 \\
&e_1 e_1^* + e_2 e_2^* + \cdots + e_n e_n^* = v && y_1 x_1 + y_2 x_2 + \cdots + y_n x_n = 1
\end{aligned}
$$

□

4.4.2 $L_K(R_1)$: algebra dei cammini di Leavitt associata a R_1

Poiché il grafo ha una sola freccia, in questo caso si tratta di un'algebra unitaria e commutativa.

Definizione 4.4.5. *Dato un campo K si definisce* ***K-algebra dei polinomi di Laurent*** *e si indica con il simbolo $K[x, x^{-1}]$ la K-algebra libera generata dai due simboli x e y con la seguente relazione:*

$$xy = yx = 1$$

Un generico elemento di $K[x, x^{-1}]$ può essere scritto come $\sum_{i=m}^{n} k_i x^i$ (con $k_i \in K$ e $m \leq n \in \mathbb{Z}$), dunque in particolare gli esponenti possono essere anche interi negativi.

Proposizione 4.4.6. *Sia K un campo. Allora si ha che $K[x, x^{-1}] \cong L_K(R_1)$*

Dimostrazione. L'isomorfismo tra $K[x, x^{-1}]$ e $L_K(R_1)$ si può definire in questo modo:

$$
\begin{aligned}
L_K(R_1) &\longrightarrow K[x, x^{-1}] \\
v &\longmapsto 1 \\
e &\longmapsto x \\
e^* &\longmapsto x^{-1}.
\end{aligned}
$$

In particolare, analizzando più nel dettaglio la struttura di $L_K(R_1)$:

$$R_1 = \bullet^{v} \circlearrowright e \qquad \widehat{R_1} = e^* \circlearrowleft \bullet^{v} \circlearrowright e$$

Grazie alla relazione $(CK1)$ si ha che $e^* e = v$, grazie a $(CK2)$ si ha che $ee^* = v$, e grazie alla Proposizione 4.2.4 si ha che $v = 1_{L_K(E)}$. Queste relazioni corrispondono esattamente ai requisiti dell'algebra di Laurent: $xy = yx = 1$. □

4.4.3 $L_K(A_n)$: algebra dei cammini di Leavitt associata ad A_n

Poiché il grafo ha un numero finito n di vertici, l'algebra associata è unitaria ($1_{L_K(A_n)} = \sum_{v \in E_0} v$), e per $n \geq 2$ non è commutativa.

Proposizione 4.4.7. *Sia K un campo e $n \geq 1$ un intero positivo. Allora si ha che $M_n(K) \cong L_K(A_n)$.*

Dimostrazione. Denotando con $E_{i,j}$ per $1 \leq i,j \leq n$ le matrici $n \times n$ aventi tutte le entrate nulle tranne quella in posizione i,j, occupata dal valore 1, l'isomorfismo tra $M_n(K)$ e $L_K(A_n)$ si può definire in questo modo:

$$\begin{aligned} L_K(A_n) &\longrightarrow M_n(K) \\ v_i &\longmapsto E_{i,i} \\ e_i &\longmapsto E_{i,i+1} \\ e_i^* &\longmapsto E_{i+1,i}. \end{aligned}$$

Nel caso in cui, ad esempio, $n = 3$ si avrà:

$$A_3 = \bullet^{v_1} \xrightarrow{e_1} \bullet^{v_2} \xrightarrow{e_2} \bullet^{v_3} \qquad \widehat{A_3} = \begin{tikzcd} \bullet^{v_1} \arrow[r, bend left, "e_1"] & \bullet^{v_2} \arrow[l, bend left, dashed, "e_1^*"] \arrow[r, bend left, "e_2"] & \bullet^{v_3} \arrow[l, bend left, dashed, "e_2^*"] \end{tikzcd}$$

e l'isomorfismo cercato sarà:

$$\begin{aligned} L_K(A_3) &\longrightarrow M_3(K) \\ v_i &\longmapsto E_{i,i} \\ e_i &\longmapsto E_{i,i+1} \\ e_i^* &\longmapsto E_{i+1,i} \\ e_1e_2 &\longmapsto E_{1,2}E_{2,3} = E_{1,3} \\ e_2^*e_1^* &\longmapsto E_{3,2}E_{2,1} = E_{3,1}. \end{aligned} \qquad \begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix}$$

□

4.4.4 $L_K(\mathcal{T})$: algebra dei cammini di Leavitt associata a $\mathcal{T}$

Poiché il grafo soggiacente è finito,

$$\mathcal{T} = \begin{tikzcd} \bullet^{v} \arrow[loop left, "e"] \arrow[r, "f"] & \bullet^{w} \end{tikzcd}$$

l'algebra associata è unitaria, con $1_{L_K(\mathcal{T})} = v + w$. Come spazio vettoriale, ha dimensione infinita sul campo K, e non è commutativa (ad esempio, $ef \neq fe$).

Proposizione 4.4.8. *Sia K un campo. Allora l'algebra di Leavitt $L_K(\mathcal{T})$ (generalmente indicata con il simbolo $\mathcal{T}_K$) è isomorfa alla K-algebra libera $K\langle x, y\rangle$ generata dalle variabili x, y modulo la relazione $xy = 1$.*

Dimostrazione. Sia $S = \{yx, 1 - yx\} \cup \{y^2x, y - y^2x\} \cup \{yx^2, x - yx^2\}$. S costituisce una $\mathcal{T}$-famiglia di Leavitt in $A = K\langle x, y | xy = 1\rangle$, dunque grazie al Teorema 4.2.3 si può affermare che esiste un unico omomorfismo di K-algebre

$\phi : L_K(\mathcal{T}) \to A$ tale che:

$$\begin{aligned} L_K(\mathcal{T}) &\longrightarrow A \\ v &\longmapsto yx \\ w &\longmapsto 1 - yx \\ e &\longmapsto y^2x \\ f &\longmapsto y - y^2x \\ e^* &\longmapsto yx^2 \\ f^* &\longmapsto x - yx^2. \end{aligned}$$

S è una $\mathcal{T}$-famiglia di Leavitt in A perché ricordando i punti elencati nella Definizione 4.2.2 si ha:

1. $a_va_v = (yx)(yx) = y(xy)x = yx$; $a_va_w = yx(1 - yx) = yx - yxyx = yx - yx = 0$; $a_wa_w = (1-yx)(1-yx) = 1-yx-yx+yxyx = 1-yx-yx+yx = 1 - yx$; $a_wa_v = (1 - yx)yx = yx - yxyx = yx - yx = 0$.

2. $a_vb_e = (yx)(y^2x) = yxyyx = yyx = y^2x$; $b_ea_v = (y^2x)(yx) = y^2xyx = y^2x$; $a_vb_f = (yx)(y-y^2x) = yxy-yxyyx = y-y^2x$; $b_fa_w = (y-y^2x)(1-yx) = y - y^2x - y^2x + y^2xyx = y - y^2x$.

3. $a_vc_e = (yx)(yx^2) = yxyx^2 = yx^2$; $c_ea_v = (yx^2)(yx) = yx^2yx = yx^2$; $a_wc_f = (1 - yx)(x - yx^2) = x - yx^2 - yx^2 + yxyx^2 = x - yx^2$; $c_fa_v = (x - yx^2)(yx) = xyx - yx^2yx = x - yx^2$.

4. $c_eb_e = (yx^2)(y^2x)(y^2x) = yx^2y^2x = yx$; $c_eb_f = (yx^2)(y - y^2x) = yx^2y - yx^2y^2x = yx - yx = 0$; $c_fb_f = (x - yx^2)(y - y^2x) = xy - xy^2x - yx^2y + yx^2y^2x = xy - yx - yx + yx = xy - yx = 1 - yx$; $c_fb_e = (x - yx^2)(y^2x) = xy^2x - yx^2y^2x = yx - yx = 0$.

5. $a_v = b_ec_e+b_fc_f = (y^2x)(yx^2)+(y-y^2x)(x-yx^2) = y^2xyx^2+yx-y^2x^2 - y^2x^2 + y^2xyx^2 = y^2x^2 + yx - y^2x^2 - y^2x^2 + y^2x^2 = yx$.

Viceversa, si vede che definendo $X = e^* + f^*$ e $Y = e + f$ in A si ha

$$XY = (e^* + f^*)(e + f) = e^*e + e^*f + f^*e + f^*f = v + w = 1$$

Questo significa che è possibile definire un omomorfismo ψ tra K-algebre come l'unica estensione della mappa che agisca sui generatori nel seguente modo:

$$\begin{aligned} A &\longrightarrow L_K(\mathcal{T}) \\ x &\longmapsto e^* + f^* \\ y &\longmapsto e + f. \end{aligned}$$

ϕ e ψ sono uno l'inverso dell'altro, infatti:

$$\phi \circ \psi(x) = \phi(e^* + f^*) = \phi(e^*) + \phi(f^*) = yx^2 + x - yx^2 = x$$

$$\phi \circ \psi(y) = \phi(e + f) = \phi(e) + \phi(f) = y^2x + y - y^2x = y$$

$$\psi \circ \phi(v) = \psi(yx) = \psi(y)\psi(x) = (e+f)(e^*+f^*) = ee^*+ef^*+fe^*+ff^* = v$$

$$\psi \circ \phi(w) = \psi(1-yx) = \psi(1)-\psi(yx) = 1-\psi(y)\psi(x) = 1-(e+f)(e^*+f^*) = 1 - v = w$$

$$\psi \circ \phi(e) = \psi(y^2x) = \psi(y)\psi(y)\psi(x) = (e+f)(e+f)(e^* + f^*) = (e+f)v = ev + fv = e$$

$$\psi \circ \phi(f) = \psi(y-y^2x) = \psi(y)-\psi(y)\psi(y)\psi(x) = e+f-(e+f)(e+f)(e^* + f^*) = e + f - e = f$$

$$\psi \circ \phi(e^*) = \psi(yx^2) = \psi(y)\psi(x)\psi(x) = (e+f)(e^* + f^*)(e^* + f^*) = v(e^* + f^*) = ve^* + vf^* = e^*$$

$$\psi \circ \phi(f^*) = \psi(x - yx^2) = \psi(x) - \psi(y)\psi(x)\psi(x) = e^* + f^* - (e+f)(e^* + f^*)(e^* + f^*) = e^* + f^* - e^* = f^*.$$

Quindi possiamo concludere che $L_K(\mathcal{T}) \cong A$ □

Da questo punto in poi del lavoro di tesi, per tutti i capitoli successivi, si assumerà sempre che i grafi E presi in considerazione siano tali che E_0 sia un insieme finito, e che dunque tutte le algebre dei cammini di Leavitt introdotte siano unitarie.

5 Classi di moduli semplici su algebre dei cammini di Leavitt

In questo capitolo verranno presentate alcune tipologie di rappresentazioni irriducibili delle algebre dei cammini di Leavitt, ovvero classi di moduli semplici che si possono costruire sulle suddette algebre. In particolare si farà riferimento a strutture introdotte e studiate dal matematico cinese Xiao-Wu Chen circa dieci anni fa, conosciute per l'appunto con il nome di *moduli di Chen*.

5.1 Moduli $V_{[p]}$

Per definire questa particolare classe di moduli, Chen si è servito di un metodo basato sull'utilizzo delle classi di equivalenza di cammini infiniti sul grafo E, e la relazione di equivalenza in questione è definita *tail-equivalence*.

Definizione 5.1.1. *Dato un grafo diretto E, sia $p \in E_\infty$ un cammino infinito su E. Con i simboli $\tau_{\leq n}(p) = e_1e_2 \dots e_n \in E_n$ e $\tau_{>n}(p) = e_{n+1}e_{n+2} \dots \in E_\infty$ si indichino i due troncamenti del cammino infinito. Ora, siano $p, q \in E_\infty$ due cammini infiniti su E. Si dice che p e q sono **tail-equivalent**, e si scrive $p \sim q$, se $\exists n, m \in \mathbb{N}$ tali che*

$$\tau_{>n}(p) = \tau_{>m}(q)$$

Definizione 5.1.2. *Se il cammino infinito p è tail-equivalent al cammino c^{∞}, dove c è un ciclo in E, allora si dice che p* ***termina in un ciclo****.*

Osservazione 5.1.3. La relazione *tail-equivalence* è una relazione di equivalenza su E_{∞}, infatti è riflessiva (in questo caso $n = m = 0$), simmetrica (si deduce direttamente dalla definizione) e transitiva, infatti se $p \sim q$ e $q \sim t$, allora significa che:

$$\exists n, m, r, s \in \mathbb{N} \text{ tali che } \tau_{>n}(p) = \tau_{>m}(q) \text{ e } \tau_{>r}(q) = \tau_{>s}(t)$$

Ora, se $r < m$ allora:

$$\tau_{>n}(p) = \tau_{>m}(q) = \tau_{>m-r}(\tau_{>r}(q)) = \tau_{>m-r}(\tau_{>s}(t)) = \tau_{>m-r+s}(t) \Rightarrow p \sim t$$

Se invece $r > m$ allora:

$$\tau_{>s}(t) = \tau_{>r}(q) = \tau_{>r-m}(\tau_{>m}(q)) = \tau_{>r-m}(\tau_{>n}(p)) = \tau_{>r-m+n}(p) \Rightarrow t \sim p$$

Si può dunque indicare con $\widetilde{E_{\infty}}$ l'insieme delle classi di equivalenza, e con $[p]$ la classe di equivalenza corrispondente al cammino p.

Definizione 5.1.4. *Dato un grafo diretto E, per ogni $v \in E_0$ si definiscano i seguenti insiemi:*

$$M(v) = \{w \in E_0 | w \geq v\} \qquad H(v) = E_0 \backslash M(v)$$

Similmente, se p è un cammino infinito su E, definiamo:

$$M(p) = \{w \in E_0 | w \geq v \text{ per qualche } v \in p^0\} \qquad H(p) = E_0 \backslash M(p)$$

Osservazione 5.1.5. Gli insiemi $M(v)$ e $M(p)$ sono entrambi diretti verso il basso, infatti $\forall w, x \in M(v)$ si ha che $w \geq v$ e $x \geq v$ per definizione, e $v \in M(v)$ poiché esiste il cammino di lunghezza nulla che lo collega a se stesso. Similmente, $\forall w, x \in M(p)$ devono esistere $v_1, v_2 \in p^0$ tali che $w \geq v_1$ e $x \geq v_2$, e non è restrittivo supporre che $v_1 \geq v_2$. Ma allora si avrà che ad esempio anche $w \geq v_2$, infatti basta completare il cammino da w a v_1 con la porzione di p che collega v_1 a v_2. Inoltre $v_2 \in M(p)$ perché tutti i vertici raggiunti da p sono considerabili collegati ai vertici di p^0 da cammini di lunghezza nulla. Si osservi, poi, che per ogni vertice v e per ogni cammino infinito p gli insiemi $H(v)$ ed $H(p)$ sono sottoinsiemi ereditari di E_0, infatti:

$$\forall v_1 \in H(v) \text{ tale che } v_1 \geq v_2 \Rightarrow v_2 \in H(v)$$

perché se invece $v_2 \notin H(v)$, si avrebbe $v_2 \in M(v)$, dunque $v_2 \geq v$ e $v_1 \geq v_2 \geq v \Rightarrow v_1 \geq v \Rightarrow v_1 \in M(v)$, ma ciò è assurdo poiché $M(v) \cap H(v) = \emptyset$. Lo stesso vale per $H(p)$:

$$\forall v_1 \in H(p) \text{ tale che } v_1 \geq v_2 \Rightarrow v_2 \in H(p)$$

perché se invece $v_2 \notin H(p)$, si avrebbe $v_2 \in M(p)$, dunque $v_2 \geq v$ con $v \in p^0$, e $v_1 \geq v_2 \geq v \Rightarrow v_1 \geq v \Rightarrow v_1 \in M(p)$, ma ciò è assurdo poiché $M(p) \cap H(p) = \emptyset$. L'insieme $H(p)$ è anche saturo per ogni cammino infinito p:

$$\text{Se } w \in E_0 \text{ è regolare e tale che } r(s^{-1}(w)) \subseteq H(p) \Rightarrow w \in H(p)$$

Infatti chiamato R l'insieme

$$r(s^{-1}(w)) =$$

$$= \{v_1, ..., v_n | \exists e_i \in E_1 \text{ t.c. } s(e_i) = w \text{ e } r(e_i) = v_i \text{ con } 1 \leq i \leq n = |r(s^{-1}(w))|\}$$

e supponendo che $R \subseteq H(p)$ e che $w \notin H(p)$, si ha che $w \in M(p)$, e dunque w è collegato a v per qualche $v \in p^0$ da un cammino q di lunghezza ≥ 0. In particolare, se $\ell(q) = 0$ allora significa che $w = v \in p^0$, quindi esiste una freccia $e_i \in R$, emessa da w, che fa parte del cammino p, e tale freccia avrà $r(e_i) \in p^0$, dunque $r(e_i) \in M(p)$. Ma ciò costituisce una contraddizione, perché $M(p)$ e $H(p)$ sono disgiunti. Se invece $\ell(q) > 0$, allora $q = e_1e_2...e_m$ con $s(e_1) = w$ e $r(e_m) = v$, dunque il cammino $e_2...e_m$ collega $r(e_1) \in R$ a v, ma ciò significa che $r(e_1) \in M(p)$, e non è possibile perché $H(p)$ e $M(p)$ sono disgiunti.
Nel caso dell'insieme $H(v)$, al contrario, la proprietà di essere saturo si manifesta soltanto nell'eventualità che v sia un *sink* oppure un emittente infinito. Infatti se v è un emittente finito, potrebbe anche emettere soltanto nell'insieme $H(v)$ pur restando in $M(v)$, cioè potrebbe appartenere alla saturazione di $H(v)$. Ad esempio, nel caso del grafo:

$$\bullet^v \xrightarrow{e} \bullet^u$$

si ha che $M(v) = \{v\}$ e $H(v) = \{u\}$, ma la chiusura satura di $H(v)$ è $\{v, u\}$.
Vale la pena notare, infine, che $H(p) = H([p])$, cioè che $H(p)$ non dipende dalla scelta del rappresentante della classe di equivalenza (dunque dipende solo dalla coda del cammino). Infatti, dato il cammino infinito q tale che $q \sim p$, si ha che $p = \bar{p}\tau$ e $q = \bar{q}\tau$ con $\bar{q}, \bar{p}$ cammini finiti e τ coda infinita, quindi $H(q) = H(\bar{q}) \cup H(\tau)$ e $H(p) = H(\bar{p}) \cup H(\tau)$. Ora, se ad esempio in $H(q)$ ci fossero dei vertici che non stanno in $H(p)$, allora sarebbero vertici non-connessi a $\bar{q}$ che però sono connessi a $\bar{p}$, ma allora sarebbero anche connessi a τ, dunque non potrebbero stare in $H(q)$.

Sia K un campo e E un grafo diretto. Si indichi con V lo spazio vettoriale su K che ha per base l'insieme E_∞, e per ogni classe di equivalenza $[p]$ in $\widetilde{E_\infty}$, sia $V_{[p]}$ il sottospazio di V generato dall'insieme $\{q \in E_\infty | q \in [p]\}$. Allora si ha che

$$V = \oplus_{[p] \in \widetilde{E_\infty}} V_{[p]}$$

L'obiettivo ora è costruire una rappresentazione dell'algebra dei cammini di Leavitt $L_K(E)$ su V. Si definiscano le seguenti mappe:

- $\forall v \in E_0$ sia $P_v : V \to V$ la mappa lineare tale che $P_v(p) = \delta_{v,s(p)}p$, $\forall p \in E_\infty$;
- $\forall e \in E_1$ sia $S_e : V \to V$ la mappa lineare tale che $S_e(p) = \delta_{r(e),s(p)}ep$, $\forall p \in E_\infty$;

- $\forall e \in E_1$ sia $S_e^* : V \to V$ la mappa lineare tale che $S_e^*(p) = \delta_{e,e_1}\tau_{>1}(p)$ per $p = e_1 e_2 \cdots \in E_\infty$

Proposizione 5.1.6. *Esiste un omomorfismo di algebre $\rho : L_K(E) \to End_K(V)$ tale che $\rho(v) = P_v$, $\rho(e) = S_e$, $\rho(e^*) = S_e^*$ per ogni $v \in E_0$ ed $e \in E_1$.*

Dimostrazione. Avendo definito le immagini dei generatori dell'algebra, rimane solamente la dimostrazione del fatto che le mappe lineari P_v, S_e, S_e^* soddisfano le relazioni costitutive delle algebre dei cammini di Leavitt. Per ogni $v, v' \in E_0$, $e, f \in E_1$ e $p = e_1 e_2 \cdots \in E_\infty$:

(V) $\rho(vv')(p) = \rho(v)\rho(v')(p) = P_v \circ P_{v'}(p) = P_v(\delta_{v',s(p)}p) = \delta_{v,s(p)}\delta_{v',s(p)}p = \delta_{v,v'}\delta_{v,s(p)}p = \delta_{v,v'}P_v(p) = \rho(\delta_{v,v'}v)(p)$;

(E1) $\rho(s(e)e)(p) = \rho(s(e))\rho(e)(p) = P_{s(e)} \circ S_e(p) = P_{s(e)}(\delta_{r(e),s(p)}ep) = \delta_{s(e),s(ep)}\delta_{r(e),s(p)}ep = \delta_{s(e),s(e)}\delta_{r(e),s(p)}ep = \delta_{r(e),s(p)}ep = S_e(p) = \rho(e)(p)$;

(E2) $\rho(er(e))(p) = \rho(e)\rho(r(e))(p) = S_e \circ P_{r(e)}(p) = S_e(\delta_{r(e),s(p)}p) = \delta_{r(e),s(p)}\delta_{r(e),s(p)}ep = \delta_{r(e),s(p)}ep = S_e(p) = \rho(e)(p)$;

(CK1) $\rho(e^*f)(p) = \rho(e^*)\rho(f)(p) = S_e^* \circ S_f(p) = S_e^*(\delta_{r(f),s(p)}fp) = \delta_{e,f}\delta_{r(f),s(p)}p = \delta_{e,f}P_{r(e)}(p) = \delta_{e,f}\rho(r(e))(p) = \rho(\delta_{e,f}r(e))(p)$;

(CK2) $\rho(\sum_{s(e)=v} ee^*)(p) = \sum_{s(e)=v} \rho(ee^*)(p) = \sum_{s(e)=v} \rho(e)\rho(e^*)(p) = \sum_{s(e)=v} S_e \circ S_e^*(p) = \sum_{s(e)=v} S_e(\delta_{e,e_1}\tau_{>1}(p)) = \sum_{s(e)=v} \delta_{r(e),s(e_2)}\delta_{e,e_1}e\tau_{>1}(p) = \delta_{r(e_1),s(e_2)}e_1\tau_{>1}(p) = p = \delta_{s(p),s(p)}p = \delta_{s(e_1),s(p)}p = \delta_{s(e),s(p)}p = P_{s(e)}(p) = \rho(v)(p)$.

□

Per concludere la costruzione della rappresentazione V dell'algebra, si definisce l'azione di $L_K(E)$ su V con il simbolo "." nel seguente modo: $\alpha.p = \rho(\alpha)(p)$ per $\alpha \in L_K(E)$ e $p \in V$. Dunque in particolare i generatori dell'algebra risultano agire su V secondo le relazioni:

- $v.p = \rho(v)(p) = P_v(p) = \delta_{v,s(p)}p$
- $e.p = \rho(e)(p) = S_e(p) = \delta_{r(e),s(p)}ep$
- $e^*.p = \rho(e^*)(p) = S_e^*(p) = \delta_{e,e_1}\tau_{>1}(p)$ se $p = e_1 e_2 \ldots$

Lemma 5.1.7. *Sia $p \in V$ e siano $\gamma = \gamma_1\gamma_2 \ldots \gamma_n, \eta = \eta_1\eta_2 \ldots \eta_m$ cammini finiti di lunghezza rispettivamente n, m su E. Allora valgono le seguenti relazioni:*

1. *$\eta.p \neq 0$ se e solo se $s(p) = r(\eta)$, e in tal caso $\eta.p = \eta p$*
2. *$\gamma^*.p \neq 0$ se e solo se $\gamma = \tau_{\leq n}(p)$. In particolare $\tau_{\leq n}(p)^*.p = \tau_{>n}(p)$*
3. *Se $r(\gamma) = r(\eta)$ allora $(\eta\gamma^*).p \neq 0$ se e solo se $\gamma = \tau_{\leq n}(p)$, e in tal caso $(\eta\gamma^*).p = \eta\tau_{>n}(p)$*

Dimostrazione. 1. Per come è stata definita l'azione dell'algebra, data una freccia $e \in E_1$ si ha che $e.p = \delta_{r(e),s(p)}ep$, dunque la concatenazione dei cammini dà risultato non nullo soltanto se $s(p) = r(\eta)$;

2. l'algebra agisce tramite le frecce fantasma nel seguente modo: $e^*.p = \delta_{e,e_1}\tau_{>1}(p)$. Dunque si ha che $\gamma^*.p = \gamma_n^* \dots \gamma_2^*\gamma_1^*.e_1e_2 \dots = e_{n+1}e_{n+2}$ solo se $\gamma = \tau_{\le n}(p)$ (cioè se $\gamma^* = e_n^* \dots e_2^*e_1^*$);

3. $\eta\gamma^*.p = \eta_1 \dots \eta_m\gamma_n^* \dots \gamma_2^*\gamma_1^*e_1e_2 \dots = \eta\tau_{>n}(p)$ solo se $r(\gamma) = r(\eta)$ e $\gamma = \tau_{\le n}(p)$, come mostrato nel punto precedente.

□

Un elemento $q \in V$ si dice *in forma normale* se espresso come $q = \sum_{i=1}^{l} \lambda_i p_i$ dove $\lambda_i \in K, \lambda_i \neq 0$ e i cammini infiniti p_i sono distinti a due a due. Il seguente risultato mostra che V è una somma diretta di rappresentazioni irriducibili dell'algebra di Leavitt (in particolare, quando V risulta essere una somma diretta di moduli semplici, si dice che è completamente riducibile):

Teorema 5.1.8. *Si consideri un grafo diretto E, un campo K e la rappresentazione V di $L_K(E)$. Allora si ha che:*

1. *Per ogni $[p] \in \widetilde{E_\infty}$, il sottospazio $V_{[p]} \subseteq V$ è una sottorappresentazione irriducibile, che in particolare soddisfa $End_{L_K(E)}(V_{[p]}) \cong K$;*
2. *Due rappresentazioni $V_{[p]}$ e $V_{[q]}$ sono isomorfe se e solo se $[p] = [q]$.*

Dimostrazione. 1. $V_{[p]}$ è un sottomodulo di V poiché $p \sim p$ dunque $p \in V_{[p]} \neq \emptyset$, e per ogni freccia $\alpha \in L_K(E)$ tale che $r(\alpha) = s(p)$ si ha che $p \sim \alpha p$, altrimenti $\alpha p = 0$. Dunque $\alpha p \in V_{[p]}$. Per dimostrare, poi, che $V_{[p]}$ è irriducibile, si supponga che $U \subseteq V_{[p]}$ sia un sottomodulo non nullo , e sia $u = \sum_{i=1}^{l} \lambda_i p_i \in U$ un elemento non nullo, espresso in forma normale. Si scelga n grande abbastanza tale che tutti i troncamenti $\tau_{\le n}(p_i)$ siano a due a due distinti. Allora grazie al Lemma 5.1.7 si ha che

$$\tau_{\le n}(p_1)^*.u = \tau_{\le n}(p_1)^*.\sum_{i=1}^{l} \lambda_i p_i =$$

$$\lambda_1\tau_{\le n}(p_1)^*.p_1 + \sum_{i=2}^{l} \lambda_i\tau_{\le n}(p_1)^*.p_i = \lambda_1\tau_{>n}(p_1)$$

Dunque poiché U è un modulo, $\tau_{>n}(p_1) \in U$. A questo punto si dimostra che ogni $p' \in [p]$ sta in U, e dunque di conseguenza $U = V_{[p]}$: alla luce di quanto appena provato, si osserva che $p' \sim \tau_{>n}(p_1)$; dunque assumendo che siano r, s tali che $\tau_{>r}(p') = \tau_{>s}(\tau_{>n}(p_1))$, si hanno le uguaglianze:

$$\tau_{>s}(\tau_{>n}(p_1)) = \tau_{\le s}(\tau_{>n}(p_1))^*.\tau_{>n}(p_1)$$

$$p' = \tau_{\le r}(p').\tau_{>r}(p')$$

da cui si vede che $p' \in U$. La biiezione tra l'anello degli endomorfismi e il campo K segue infine dal prossimo punto.

2. Si consideri un omomorfismo ψ non nullo tra i moduli semplici $V_{[p]}$ e $V_{[q]}$. Esso sarà necessariamente iniettivo grazie alla semplicità di $V_{[p]}$, e necessariamente suriettivo grazie alla semplicità di $V_{[q]}$, dunque è un isomorfismo. Sia $p' \in [p]$ e la sua immagine in forma normale $\psi(p') = \sum_{i=1}^{l} \lambda_i q_i$. L'obiettivo ora è mostrare che in realtà $l = 1$ e $q_1 = p'$. Si supponga allora per assurdo che $q_1 \neq p'$. Si scelga n abbastanza grande in modo tale che tutti i troncamenti $\tau_{\leq n}(q_i)$ siano a due a due distinti e che $x = \tau_{\leq n}(q_1) \neq \tau_{\leq n}(p')$ (è possibile perchè stiamo assumendo $q_1 \neq p'$). Allora grazie al Lemma 5.1.7 si ha che

$$x^*.p' = \tau_{\leq n}(q_1)^*.p' = 0$$

Ma allo stesso tempo

$$x^*.\psi(p') = x^*.\sum_{i=1}^{l} \lambda_i q_i = \lambda_1 x^*.q_1 + \sum_{i=2}^{l} \lambda_i x^*.q_i = \lambda_1 x^*.q_1 = \lambda_1 \tau_{>n}(q_1) \neq 0$$

Ciò costituisce un assurdo, poiché ψ è un omomorfismo di moduli, e deve necessariamente accadere che $\psi(0) = \psi(x^*.p') = x^*.\psi(p') = 0$. Dunque $\psi(p') = \lambda_1 p'$ e $p \sim p' = q_1 \sim q$. Si noti che è stato anche appena provato che un endomorfismo non nullo $\psi : V_{[p]} \to V_{[p]}$ è in realtà una moltiplicazione per scalare a sinistra, agisce come $\psi(p') = \lambda_{p'} p'$ con $\lambda_{p'} \in K$ e $\forall p' \in [p]$. Per mostrare che $End_{L_K(E)}(V_{[p]}) \cong K$ basta solo far vedere che tutti i $\lambda_{p'}$ sono lo stesso. Siano $p', p'' \in [p]$ e siano r, s tali che $\tau_{>r}(p') = \tau_{>s}(p'')$. Allora valgono le uguaglianze:

$$\tau_{>s}(p'') = \tau_{\leq s}(p'')^*.p''$$
$$p' = \tau_{\leq r}(p').\tau_{>r}(p')$$

Inoltre per quanto visto poco sopra, esistono $\lambda', \lambda'' \in K$ tali che $\psi(p') = \lambda' p'$ e $\psi(p'') = \lambda'' p''$. Ma allora:

$$\lambda' p' = \psi(p') = \psi(\tau_{\leq r}(p').\tau_{>r}(p')) = \tau_{\leq r}(p').\psi(\tau_{>r}(p')) =$$
$$\tau_{\leq r}(p').\psi(\tau_{>s}(p'')) = \tau_{\leq r}(p').\psi(\tau_{\leq s}(p'')^*.p'') = \tau_{\leq r}(p').[\tau_{\leq s}(p'')^*.\psi(p'')]$$
$$= \tau_{\leq r}(p').[\tau_{\leq s}(p'')^*.\lambda'' p''] = \tau_{\leq r}(p').[\lambda'' \tau_{\leq s}(p'')^*.p''] = \tau_{\leq r}(p').\lambda'' \tau_{>s}(p'')$$
$$= \tau_{\leq r}(p').\lambda'' \tau_{>r}(p') = \lambda'' \tau_{\leq r}(p').\tau_{>r}(p') = \lambda''.p'$$

Dunque $\lambda' = \lambda''$.

□

Osservazione 5.1.9. Nel secondo punto della precedente dimostrazione è stata utilizzata la proprietà per cui, dato M un modulo sinistro sull'algebra di Leavitt $A = L_K(E)$, vale:

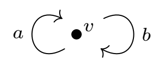
$$\alpha.\lambda p = \lambda \alpha.p \quad \text{con } \lambda \in K \text{ e } p \in M$$

Infatti nella definizione di K-algebra A si ha che:

$$(\lambda a)b = a(\lambda b) = (ab)\lambda 1_A \quad \forall \lambda \in K \quad \forall a, b \in A$$

Esempio 5.1.10. *Si consideri il grafo R_1. E' stato già visto che l'algebra dei cammini di Leavitt $L_K(R_1)$ è isomorfa all'algebra dei polinomi di Laurent $K[x, x^{-1}]$. Qui l'insieme E_∞ consiste di un solo elemento (ovvero il cammino che ripete infinite volte l'unico loop $eee\dots$) e dunque la rappresentazione V è irriducibile. In particolare V ha dimensione 1.*

Esempio 5.1.11. *Si consideri il grafo R_2. In questo caso si ha che l'insieme $\widetilde{E_\infty}$ delle classi di equivalenza di cammini tail-equivalent risulta essere più che numerabile*



Infatti si consideri un generico cammino infinito su R_2, $p = e_1e_2\dots e_i\dots$: poiché $e_i \in \{a, b\}$ $\forall i$, l'insieme dei cammini p come sopra ha cardinalità $2^{\aleph_0}$. Ora, si noti che per ogni $j \geq 2$, il cammino $q = e_je_{j+1}e_{j+2}\dots$ è tail-equivalent al cammino p, dunque in questo modo si ottiene un numero finito o un'infinità numerabile di cammini equivalenti a p. Ad esempio:

$$\textit{Se } p = (aba)(aba)\dots \quad \Rightarrow \textit{se ne ottengono } 3$$

$$\textit{Se } p = (aba)(ab^2a)(ab^3a)\dots \quad \Rightarrow \textit{se ne ottengono infiniti}$$

Similmente, per ogni $r \geq 1$ e ogni cammino $d_1\dots d_r$ con $d_s \in \{a, b\}$ per ogni $1 \leq s \leq r$, anche il cammino $d_1\dots d_re_1e_2\dots$ è equivalente a p. Anche in questo modo si ottiene al più un'infinità numerabile di cammini equivalenti a p. Dato che ogni cammino tail-equivalent a p si ottiene da p in uno dei due modi visti sopra, si conclude che gli elementi di $[p]$ formano un insieme al più numerabile. Dunque l'insieme quoziente formato da tutte le classi di equivalenza $\widetilde{E_\infty} = \{[p] \quad | \quad p = e_1e_2\dots, \quad e_i \in \{a, b\}\}$ è infinito ma non numerabile.

Lemma 5.1.12. *Sia p un cammino infinito. Allora:*

1. *Se p non termina in un ciclo esclusivo, allora l'annullatore di $V_{[p]}$ è*

$$I(H(p), B_{H(p)})$$

2. *Se p termina in un ciclo esclusivo c basato su un vertice v, allora l'annullatore di $V_{[p]}$ è*

$$I(H(p), B_{H(p)}, (c - v))$$

Dimostrazione. 1. Sia J l'annullatore di $V_{[p]}$. Per provare che

$$I(H(p), B_{H(p)}) \subseteq J$$

poiché J è un ideale, è sufficiente mostrare (ricordando la Definizione 4.1.7) che $H(p)$ e $\{v^{H(p)} | v \in B_{H(p)}\}$ annullano $V_{[p]}$. Se $v \in H(p)$ allora v non è connesso in nessun modo ai vertici del cammino p, dunque $vq = 0\, \forall q \in V_{[p]}$. Se $v \in B_{H(p)} \subset E_0 \backslash H(p) = M(p)$, allora v è connesso a qualche vertice di p, ed emette alcune frecce in $M(p)$, che terminano quindi in vertici connessi a vertici di p. Allora esiste almeno un cammino equivalente a p

con sorgente in v. Sia $q \in V_{[p]}$ tale che $s(q) = v$, e sia e la freccia iniziale, cosicché si possa scrivere $q = eq_1$. $r(e) \notin H(p)$, poiché $r(e)$ è connessa a p, dunque si ha:

$$v^{H(p)}q = (v - \sum_{s(f)=v, r(f)\notin H(p)} ff^*)eq_1 = (ve - \sum_{s(f)=v, r(f)\notin H(p)} ff^*e)q_1$$
$$= (e - e)q_1 = 0$$

Quando invece $q \in V_{[p]}$ e $s(q) \neq v$ in generale, si vede che:

$$v^{H(p)}q = (v - \sum_{s(f)=v, r(f)\notin H(p)} ff^*)q = 0 - 0 = 0$$

Dunque in generale gli elementi dell'insieme $\{v^{H(p)} | v \in B_{H(p)}\}$ annullano $V_{[p]}$. Ciò dimostra l'inclusione

$$I(H(p), B_{H(p)}) \subseteq J$$

Ora, si consideri il grafo quoziente $F = E/(H(p), B_{H(p)})$. Sapendo che vale la relazione $L_K(E)/I(H(p), B_{H(p)}) \cong L_K(F)$ (vedi Osservazione 4.1.12), è possibile interpretare $V_{[p]}$ come modulo semplice su $L_K(F)$. Se si mostra che esso è anche un modulo fedele, si conclude la dimostrazione. Sia dunque $\bar{J}$ l'annullatore di $V_{[p]}$ visto come modulo sinistro su $L_K(F)$. Si ha che $\bar{J} \cap F_0 = \emptyset$ perché $F_0 = E_0 \backslash H(p) = M(p)$, dunque ogni vertice di F è connesso a p (e quindi un qualunque $v \in F_0$ darebbe risultato non nullo se testato ad esempio contro il cammino $q\tau \in V_{[p]}$ tale che q sia il cammino che connette v a un vertice $w \in p^0$, e τ sia la coda di p con sorgente w). Inoltre dal momento che ogni vertice in F è connesso a p, e per ipotesi p non termina in un ciclo esclusivo, F soddisfa la condizione (L). Il Corollario 4.2.10 permette di affermare che se il grafo F soddisfa la condizione (L), allora ogni ideale non nullo dell'algebra $L_K(F)$ contiene un vertice, ma allora $\bar{J} = 0$ necessariamente. Questo prova che

$$I(H(p), B_{H(p)}) \supseteq J$$

2. Per mostrare l'inclusione $I(H(p), B_{H(p)}, (c - v)) \subseteq J$ si procede come nel punto 1, mostrando in più che anche l'elemento $(c - v)$ annulla $V_{[p]}$. Dato $q \in V_{[p]}$, infatti, si ha che $q \sim p$ e che dunque sarà un cammino della forma $q = \gamma c^\infty$ con γ cammino finito tale che $r(\gamma) = v$. Quindi si avrà:

$$(c - v)q = cq - vq = c\gamma c^\infty - v\gamma c^\infty$$

Ora, se $s(\gamma) \neq v$, allora per le proprietà computazionali dell'algebra si ha:

$$c\gamma c^\infty - v\gamma c^\infty = 0 - 0 = 0$$

Se, invece, $s(\gamma) = v$, considerando che $r(\gamma) = v = s(\gamma)$ e che v non può essere base di cicli differenti da c, allora si ha che necessariamente $\gamma = c$:

$$c\gamma c^\infty - v\gamma c^\infty = ccc^\infty - cc^\infty = c^\infty - c^\infty = 0$$

Per quanto riguarda l'inclusione opposta, $V_{[p]}$ si può interpretare come modulo semplice su $L_K(F)$, e F (in cui tutti i vertici sono connessi a p) ha un unico ciclo senza uscite, che è proprio c. Chiamato $\bar{J}$ l'annullatore di $V_{[p]}$ in $L_K(F)$, si ha che $F_0 \cap \bar{J} = \emptyset$ (poiché ogni vertice in F è connesso a p), e $\bar{J}$ è ideale primitivo (perché annullatore di un modulo semplice su $L_K(F)$), dunque in particolare è primo. Grazie al [4] Teorema 3.12(iii), sotto queste ipotesi si può affermare che $\bar{J}$ è un ideale della forma:

$$\bar{J} = \langle H, \{v^H | v \in B_H\}, f(c)\rangle$$

dove $H = \bar{J} \cap F_0 = \emptyset$, c è ciclo esclusivo in F con base in un vertice v, e $f(x) \in K[x, x^{-1}]$ polinomio irriducibile. Allora in particolare si ha che:

$$\bar{J} = \langle \emptyset, \{v^{\emptyset} | v \in B_{\emptyset}\}, f(c)\rangle = \langle f(c)\rangle$$

poiché $B_{\emptyset} = \emptyset$. Dal momento che l'elemento $(c - v)$ annulla $V_{[p]}$, il polinomio $f(x)$ cercato sarà proprio $f(x) = x - 1$. Questo garantisce la validità dell'inclusione opposta.

□

5.2 Moduli N_w

La definizione di questa seconda classe di moduli, attribuita ancora al matematico Chen, richiama fondamentalmente gli stessi passaggi utilizzati nel paragrafo precedente, con la differenza che qui si prendono in considerazione cammini finiti che terminano in un vertice *sink* piuttosto che cammini infiniti. In riferimento ad un cammino generico $p = e_1 e_2 \dots e_n$ con $r(e_n) = w$ e $w \in E_0$ vertice sink, restano valide le notazioni introdotte in precedenza per indicare i troncamenti. Dunque se $1 \leq r \leq n$, si hanno:

$$\tau_{\leq r}(p) = e_1 e_2 \dots e_r$$

$$\tau_{>r}(p) = e_{r+1} e_{r+2} \dots e_n$$

Sia K un campo ed E un grafo diretto. Si indichi con E_0^s l'insieme di tutti i vertici sink contenuti in E. Sia ora N lo spazio vettoriale su K che ha per base tutti i cammini finiti su E che terminano in un sink. Per ogni sink w si indichi con N_w il sottospazio vettoriale di N generato dai cammini p tali che $r(p) = w$. Allora si ha che

$$N = \oplus_{w \in E_0^s} N_w$$

Per costruire una rappresentazione di $L_K(E)$ su N, ora, è necessario stabilire l'azione dell'algebra sugli elementi di N. Analogamente a quanto visto per i moduli $V_{[p]}$ si inizia definendo le tre mappe:

- $\forall v \in E_0$ sia $P_v : V \to V$ la mappa lineare tale che $P_v(p) = \delta_{v,s(p)} p$, $\forall p \in V$;
- $\forall e \in E_1$ sia $S_e : V \to V$ la mappa lineare tale che $S_e(p) = \delta_{r(e),s(p)} ep$, $\forall p \in V$;

- $\forall e \in E_1$ sia $S_e^* : V \to V$ la mappa lineare tale che $S_e^*(p) = 0$ se $\ell(p) = 0$, e $S_e^*(p) = \delta_{e,e_1}\tau_{>1}(p)$ altrimenti, con $p = e_1 e_2 \dots e_n \in V$

La Proposizione 5.1.6, con relativa dimostrazione, rimane valida anche in questo caso, e consente di arrivare similmente a quanto visto a definire l'azione di $L_K(E)$ su N con il simbolo "." tramite le relazioni:

- $v.p = P_v(p) = \delta_{v,s(p)}p$
- $e.p = S_e(p) = \delta_{r(e),s(p)}ep$
- $e^*.p = S_e^*(p) = 0$ se $\ell(p) = 0$ (cioè se $p = w$), altrimenti $e^*.p = \delta_{e,e_1}\tau_{>1}(p)$ se $p = e_1 e_2 \dots e_n$ con $r(e_n) = w$

Prestando attenzione al leggero cambiamento di significato nella notazione dei troncamenti dei cammini, rimane valido anche in questo contesto il Lemma 5.1.7 con relativa dimostrazione, permettendo di arrivare al risultato che stabilisce definitivamente come N costituisca una seconda classe di rappresentazioni irriducibili dell'algebra dei cammini di Leavitt, e in particolare come la rappresentazione N sia completamente riducibile:

Teorema 5.2.1. *Si consideri un grafo diretto E, un campo K e la rappresentazione N di $L_K(E)$. Allora si ha che:*

1. *$\forall w \in E_0^s$ il sottospazio $N_w \subseteq N$ è una sottorappresentazione irriducibile, che in particolare soddisfa $End_{L_K(E)}(N_w) \cong K$.*
2. *Due rappresentazioni N_w e N_z sono isomorfe se e solo se $w = z$.*
3. *$\forall [p] \in \widetilde{E_\infty}$ e $\forall w \in E_0^s$, $V_{[p]}$ non è isomorfo a N_w.*

Dimostrazione. 1. $N_w \subseteq N$ è un sottomodulo di N, infatti $N_w \neq \emptyset$ poiché $w \in N_w$ (w si può interpretare come un cammino di lunghezza 0 che termina in w), $\forall q, p \in N_w$ si ha che $q - p \in N_w$ poiché N_w è spazio vettoriale, chiuso per combinazioni lineari, e infine $\forall \alpha \in L_K(E)$ e $\forall q \in N_w$ si ha che αq potrebbe essere 0 oppure un cammino che termina ancora in w, dunque sta anch'esso in N_w. In particolare, N_w è proprio un sottomodulo generato dal cammino banale w. Per quanto riguarda l'irriducibilità, si consideri $U \subseteq N_w$ sottomodulo non nullo, e un elemento

$$0 \neq u = \sum_{j=1}^{l} \lambda_j p_j \in U$$

in forma normale, cioè tale che ogni $\lambda_j \in K$ sia non nullo, i cammini p_j siano a due a due distinti e $r(p_j) = w$. Si scelga in particolare la forma normale tale che p_1 sia il più lungo tra tutti i p_j (tale p_1 può non essere unico). Ora, per com'è stata definita l'azione dell'algebra (e dunque grazie al Lemma 5.1.7) si ha che

$$p_1^*.u = p_1^*.\sum_{j=1}^{l} \lambda_j p_j = \lambda_1 p_1^*.p_1 + \sum_{j=2}^{l} \lambda_j p_1^*.p_j = \lambda_1 p_1^*.p_1 = \lambda_1 w$$

infatti $p_1^*.p_j \neq 0$ solo se $p_1 = p_j$, ovvero, essendo i cammini distinti, solo se $j = 1$. Questo conto mostra dunque che $w \in U$ necessariamente, per proprietà del modulo U, e che quindi $U = N_w$, essendo w il generatore del modulo N_w. Infine, la biiezione tra l'anello degli endomorfismi e il campo K segue dal punto successivo.

2. Sia $\psi : N_w \to N_z$ un omomorfismo di moduli non nullo. Esso sarà in particolare iniettivo per via della semplicità di N_w, e suriettivo per via della semplicità di N_z, dunque necessariamente un isomorfismo. Più in particolare, sia $\psi(w) = \sum_{r=1}^{l} \lambda_r p_r$ l'immagine di w in forma normale (si noti che ogni p_r termina in z). Si vuole far vedere che $l = 1$ e che $p_1 = w$, cosicché si abbia di conseguenza $w = z$ e $End_{L_K(E)}(N_w) \cong K$. Si supponga allora per assurdo che ciò non valga: si assuma p_1 il più lungo tra i p_r, e che $\ell(p_1) \geq 1$. Allora si ha:

$$p_1^*.w = 0$$

ma allo stesso tempo

$$p_1^*.\psi(w) = p_1^*.\sum_{r=1}^{l} \lambda_r p_r = \lambda_1 p_1^*.p_1 + \sum_{r=2}^{l} \lambda_r p_1^*.p_r = \lambda_1 z \neq 0$$

e ciò costituisce un assurdo per definizione di omomorfismo tra moduli. Allora $\ell(p_i) = 0$ per ogni i, e quindi $l = 1$ e $p_1 = z$. Essendo $0 \neq \psi(w) = w\psi(w) = wz$ si ha che $w = z$. Ogni endomorfismo di N_w è in realtà una moltiplicazione sinistra per uno scalare del campo.

3. Per provare questo punto è sufficiente mostrare che ogni omomorfismo $\psi : N_w \to V_{[p]}$ soddisfa $\psi(w) = 0$, da cui si conclude che $\psi = 0$. Si scriva allora $\psi(w)$ in forma normale:

$$\psi(w) = \sum_{j=1}^{l} \lambda_j p_j \quad \text{con } p_j \in [p]$$

Poiché $\psi(w) = w\psi(w) = w\big(\sum_{j=1}^{l} \lambda_j p_j\big)$ e $wp_j = 0$ per ogni cammino infinito p_j (dal momento che w è un sink), si ha che $\psi(w) = 0$.

□

Lemma 5.2.2. *Se w è un sink, allora l'annullatore del modulo semplice N_w è $I(H(w), B_{H(w)})$.*

Dimostrazione. Sia J l'annullatore di N_w. Bisogna dimostrare che effettivamente $I(H(w), B_{H(w)}) = J$.

$\subseteq$ $I(H(w), B_{H(w)})$ è l'ideale generato da $H(w) \cup \{v^{H(w)} : v \in B_{H(w)}\}$. Essendo J un ideale di $L_K(E)$, è sufficiente mostrare che $H(w)$ e $\{v^{H(w)} : v \in B_{H(w)}\}$ annullano N_w. Se $v \in H(w)$, allora v è un vertice non connesso a

w, dunque $vp = 0$ per ogni cammino p che termini in w. Di conseguenza, $H(w)$ annulla N_w. Se invece $v \in B_{H(w)} \subset E_0 \backslash H(w)$, sia p un cammino in E tale che $s(p) = v$ e $r(p) = w$, e sia e la prima freccia di p, in modo tale che $p = ep_1$. Allora $r(e) \notin H(w)$ poiché $r(e)$ è connesso a w. Allora si ha che:

$$v^{H(w)}p = \big(v - \sum_{f \in s^{-1}(v), r(f) \notin H(w)} ff^*\big)ep_1 = \big(ve - \sum_{f \in s^{-1}(v), r(f) \notin H(w)} ff^*e\big)p_1$$
$$= (e - ee^*e)p_1 = (e - e)p_1 = 0$$

Se invece $p \in N_w$ ma $s(p) \neq v$, si ha in generale che:

$$v^{H(w)}p = \big(v - \sum_{f \in s^{-1}(v), r(f) \notin H(w)} ff^*\big)p = 0 - 0 = 0$$

Quindi l'insieme $\{v^{H(w)} : v \in B_{H(w)}\}$ annulla N_w. Dunque è stato mostrato che

$$I(H(w), B_{H(w)}) \subseteq J$$

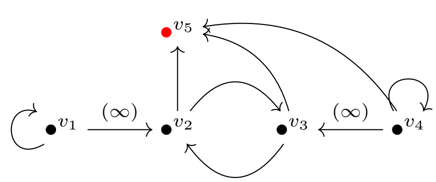
$\supseteq$ Si consideri il sottografo quoziente $F = E/(H(w), B_{H(w)})$ di E, ricordando che $L_K(E)/I(H(w), B_{H(w)}) \cong L_K(F)$ (vedi Osservazione 4.1.12). N_w può essere visto come modulo semplice su $L_K(F)$: mostrando che è anche un modulo fedele su $L_K(F)$, si dimostrerebbe l'inclusione cercata. Chiamato, quindi, $\bar{J}$ l'annullatore di N_w come modulo sinistro su $L_K(F)$, si ha che $\bar{J} \cap F_0 = \emptyset$ perché ogni vertice in F si connette a w ($F_0 = E_0 \backslash H(w) = M(w)$). Inoltre, F soddisfa la condizione (L) (cioè ogni ciclo in F possiede un'uscita) poiché ogni vertice in F si connette al sink w. Il Corollario 4.2.10 permette di affermare che se il grafo F soddisfa la condizione (L), allora ogni ideale non nullo dell'algebra $L_K(F)$ contiene un vertice, ma allora $\bar{J} = 0$ necessariamente. Questo prova che

$$I(H(w), B_{H(w)}) \supseteq J$$

□

Osservazione 5.2.3. In questo paragrafo è stato scelto di trattare i cammini generatori dei sottospazi N_w, ovvero i $p = e_1e_2 \ldots e_n$ con $r(e_n) = w$, come cammini finiti, e questo per ragioni di semplicità. Tuttavia, si noti che se p è un cammino finito che termina in un sink w, allora $p = pw = pw^2 = ... = pw^\infty$. Quindi in un certo senso il cammino $p = pw^\infty$ è anch'esso un cammino infinito, e dunque in un certo senso anche i moduli N_w (come i moduli $V_{[p]}$) si possono considerare definiti a partire da cammini infiniti.

Esempio 5.2.4. *Si consideri il grafo E:*



Il vertice v_5 è un vertice sink in E_0. Dunque se si costruisce il modulo su $L_K(E)$ generato da tale vertice, si ottiene il modulo di Chen

$$N_{v_5}$$

5.3 Rappresentazioni *twisted*: moduli $V^a_{[p]}$

In questo paragrafo verrà descritta un'altra tipologia di moduli semplici costruibile a partire dalle rappresentazioni irriducibili presentate in precedenza. Il processo avviene tramite un'operazione di *twist*, cioè di riscalamento dell'azione delle frecce attraverso l'uso di automorfismi. In particolare si otterranno nuove rappresentazioni irriducibili per le classi di equivalenza di cammini razionali.

Definizione 5.3.1. *Un cammino infinito p si dice **razionale** (e la corrispondente classe $[p]$ si dice **classe razionale**) se esiste un cammino chiuso (finito) g in E tale che $p = ggg\ldots$. Al contrario, un cammino infinito si definisce **irrazionale** (e così anche la corrispondente classe) se non è tail-equivalent ad un cammino razionale.*

Osservazione 5.3.2. Si noti che un cammino infinito $p \in E_\infty$ è razionale se e soltanto se $\exists n \geq 1$ tale che $p = \tau_{>n}(p)$. Infatti se p è razionale, allora $p = q^\infty$ per qualche ciclo q, dunque $p = \tau_{>\ell(q)}(p)$. Viceversa, se esiste un $n \geq 1$ per cui $p = \tau_{>n}(p)$, allora definito $q = \tau_{\leq n}(p)$ si ha che

$$\tau_{>n}(p) = p \Rightarrow \tau_{>n}(p) = q\tau_{>n}(p) = qq\tau_{>n}(p) = qq\ldots q\tau_{>n}(p) \Rightarrow p = q^\infty$$

Invece la condizione di irrazionalità implica che

$$\forall \text{ coppia } (n, m) \text{ di naturali distinti, } \tau_{>n}(p) \neq \tau_{>m}(p)$$

Considerando ora gli insiemi delle classi razionali e irrazionali $\widetilde{E^{rat}_\infty}$ e $\widetilde{E^{irr}_\infty}$, sottoinsiemi di $\widetilde{E_\infty}$, si ha dunque l'unione disgiunta

$$\widetilde{E_\infty} = \widetilde{E^{rat}_\infty} \cup \widetilde{E^{irr}_\infty}$$

Dato il grafo orientato E e il campo K, sia $K^\times$ il gruppo moltiplicativo di K, e sia $(K^\times)^{E_1}$ il gruppo prodotto i cui elementi siano della forma $a = (a_\alpha)_{\alpha \in E_1}$, con $a_\alpha \in K^\times$ e la cui moltiplicazione sia definita componente per componente. Si definisca $\forall a$ l'automorfismo di algebre $\gamma_a : L_K(E) \to L_K(E)$ tale che

$$\gamma_a(v) = v \ \forall v \in E_0 \quad \text{e} \quad \gamma_a(\alpha) = a_\alpha \alpha \ , \ \gamma_a(\alpha^*) = a_\alpha^{-1}\alpha^* \ \forall \alpha \in E_1$$

L'omomorfismo di gruppi iniettivo che si genera di conseguenza

$$\gamma : (K^\times)^{E_1} \to Aut(L_K(E))$$

si identifica proprio con l'*azione di riscalamento* citata all'inizio del paragrafo.

Definizione 5.3.3. *Dato un modulo M su un'algebra A e un automorfismo σ di A, la rappresentazione twisted M^σ di M si costruisce nel seguente modo:*

- $M^\sigma = M$ *come spazi vettoriali;*
- *l'azione dell'algebra sugli elementi del modulo è data da*

$$a.m^\sigma = (\sigma(a).m)^\sigma$$

dove $a \in A$, $m \in M$ e m^σ è il corrispondente elemento in M^σ.

Proposizione 5.3.4. *La rappresentazione twisted M^σ è irriducibile $\Leftrightarrow$ M lo è.*

Dimostrazione. Innanzitutto si noti che da $M^\sigma = M$ segue che i due moduli hanno gli stessi elementi.

$\Leftarrow$ Sia $0 \neq t \in M^\sigma$. Allora $\exists m \neq 0 \in M$ tale che $t = m^\sigma$. Analogamente, sia $s \neq t$ un altro elemento non nullo di M^σ: esisterà un elemento non nullo $\tilde{m} \in M$ tale che $s = \tilde{m}^\sigma$. Poiché M è semplice, $\tilde{m} = a.m$ per qualche $0 \neq a \in A$. Ma allora $s = \tilde{m}^\sigma = (a.m)^\sigma = \sigma^{-1}(a).m^\sigma = \sigma^{-1}(a).t$. Quindi anche M^σ è semplice, perché il sottomodulo generato da t coincide con M^σ stesso.

$\Rightarrow$ Siano $t, s \in M$ elementi non nulli, e siano t^σ, s^σ i loro corrispondenti non nulli in M^σ. Poiché M^σ è semplice, $s^\sigma = a.t^\sigma$ per qualche $0 \neq a \in A$. Ma allora si ha $s^\sigma = a.t^\sigma = (\sigma(a).t)^\sigma$ e quindi $s = \sigma(a).t$. Dunque il sottomodulo di M generato da t coincide con M stesso, e questo fa di M un modulo semplice.

□

Nel caso in cui A sia un'algebra dei cammini di Leavitt, si indicherà direttamente con M^a la rappresentazione twisted M^{γ_a}.

Osservazione 5.3.5. Si noti che $M^1 = M$. Infatti nel caso in cui $a = 1$ (dove 1 è l'identità del campo K) si ha che $\gamma_1(v) = v$, $\gamma_1(\alpha) = 1\alpha = \alpha$, $\gamma_1(\alpha^*) = 1\alpha^* = \alpha^*$, dunque γ_1 corrisponde all'identità.

Definizione 5.3.6. *Dato un elemento $a = (a_\alpha)_{\alpha \in E_1}$ e un cammino finito non banale $p = \alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_n$ in E_1, sia $a_p = a_{\alpha_1}a_{\alpha_2}\dots a_{\alpha_n}$. L'elemento a si definisce* ***p-stabile*** *se $a_p = 1$.*

Proposizione 5.3.7. *Sia E un grafo orientato, e siano $a, b \in (K^\times)^{E_1}$. Allora valgono:*

1. *Se $[p] \in \widetilde{E_\infty}$ è una classe irrazionale, le rappresentazioni $V^a_{[p]}$ e $V^b_{[p]}$ sono isomorfe;*
2. *Se $[q^\infty] \in \widetilde{E_\infty}$ è una classe razionale (con q ciclo), allora le rappresentazioni $V^a_{[q^\infty]}$ e $V^b_{[q^\infty]}$ sono isomorfe se e solo se ab^{-1} è q-stabile;*

Dimostrazione. 1. Se si dimostra che

$$V_{[p]} \cong V^a_{[p]}$$

$\forall a \in (K^\times)^{E_1}$, allora si conclude. Sia dunque $\tilde{p} \in [p]$. Per ogni $q \in [p]$ esistono $n, m \in \mathbb{N}$ tali che $\tau_{>n}(q) = \tau_{>m}(\tilde{p})$ dato che $q, \tilde{p}$ appartengono alla stessa classe di equivalenza. Ora, $\tilde{p}$ è irrazionale, quindi il numero $(n-m)$ è unico per q. Anche lo scalare

$$\theta(q) = a_{\tau_{\leq m}(\tilde{p})}(a_{\tau_{\leq n}(q)})^{-1}$$

è indipendente dalla scelta di n e di m, infatti $\forall t > 0$ si ha che:

$$\tau_{>n+t}(q) = \tau_{>m+t}(\tilde{p})$$

$$a_{\tau_{\leq m+t}(\tilde{p})}(a_{\tau_{\leq n+t}(q)})^{-1} = a_{\tau_{\leq m}(\tilde{p})}(a_{\tau_{\leq n}(q)})^{-1} = \theta(q)$$

Ma allora è possibile definire un omomorfismo di moduli $\phi : V_{[p]} \to V^a_{[p]}$ che mappa $q \in [p]$ in $\theta(q)q$. Essendo $V_{[p]}$ e $V^a_{[p]}$ due moduli semplici (vedi rispettivamente Teorema 5.1.8 e Proposizione 5.3.4), si ha che ϕ deve essere necessariamente un isomorfismo. Ciò conclude la dimostrazione del primo punto.

2. Per dimostrare questo punto è sufficiente far vedere che

$$V_{[q^\infty]} \cong V^a_{[q^\infty]} \text{ se e solo se } a \text{ è q-stabile}$$

per ogni $a \in (K^\times)^{E_1}$. Per l'implicazione "$V_{[q^\infty]} \cong V^a_{[q^\infty]} \Rightarrow a$ è q-stabile" si noti che, analogamente a quanto mostrato nel punto 2 della dimostrazione del Teorema 5.1.8, ogni isomorfismo $\psi : V_{[q^\infty]} \to V^a_{[q^\infty]}$ soddisfa $\psi(q^\infty) = \lambda q^\infty$ per qualche scalare $\lambda \neq 0$. Allora si ha che:

$$\psi(q^\infty) = \psi(q.q^\infty) = q.\psi(q^\infty) = q.\lambda q^\infty = \lambda q.q^\infty = \lambda a_q q.q^\infty = \lambda a_q q^\infty$$

dove si è utilizzato che $\gamma_a(q) = a_q q$. Dunque questo implica che $a_q = 1$, e che a è q-stabile. Per quanto riguarda il viceversa, invece, per ogni $p \in [q^\infty]$ si consideri il più piccolo numero naturale n_0 tale che $\tau_{>n_0}(p) = q^\infty$, e si ponga $\theta(p) = (a_{\tau_{\leq n_0}(p)})^{-1}$ e $\theta(q^\infty) = 1$. Si costruisca dunque la mappa lineare $\psi : V_{[q^\infty]} \to V^a_{[q^\infty]}$ che manda p in $\theta(p)p$. Essendo i due moduli $V_{[q^\infty]}$ e $V^a_{[q^\infty]}$ semplici, l'omomorfismo sarà iniettivo e suriettivo, dunque un isomorfismo.

□

Da questo momento in poi verrà focalizzata l'attenzione su un tipo particolare di moduli twisted $V^a_{[p]}$ che rientrano nella categoria dei *moduli di Chen*, ovvero verrà considerata una scelta ben specifica dell'elemento $a = (a_\alpha)_{\alpha \in E_1} \in (K^\times)^{E_1}$: sia $[p] \in \widetilde{E^{rat}_\infty}$ una classe razionale con $q = \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n$ un ciclo tale che $p = q^\infty$. Per ogni $\lambda \in K^\times$ sia $a_{\lambda,q} = (a_\alpha)_{\alpha \in E_1}$ tale che $a_{\alpha_1} = \lambda$ e $a_\alpha = 1$ per $\alpha \neq \alpha_1$. Per semplificare la notazione, invece che $V^{a_{\lambda,q}}_{[p]}$, verrà utilizzato direttamente il simbolo:

$$V^\lambda_{[p]}$$

Osservazione 5.3.8. Volendo riassumere le caratteristiche principali di questo tipo di modulo, si ha che:

- Dato $\lambda \in K^\times$, il modulo $V_{[p]}^\lambda$ è la rappresentazione twisted $V_{[p]}^\sigma$ di $V_{[p]}$, dove σ è l'automorfismo di $L_K(E)$ tale che:

$$\sigma(v) = v \text{ se } v \in E_0$$

$$\sigma(\alpha) = \alpha \text{ e } \sigma(\alpha^*) = \alpha^* \text{ se } \alpha \in E_1 \text{ con } \alpha \neq \alpha_1$$
$$\sigma(\alpha_1) = \lambda\alpha_1 \text{ e } \sigma(\alpha_1^*) = \lambda^{-1}\alpha_1^*$$

- Denotando con $*$ l'operazione del modulo $V_{[p]}^\lambda$, si ha che:

$$q * p = \sigma(q)q^\infty = \lambda q q^\infty = \lambda q^\infty = \lambda p$$

  E, similmente:

$$q_i * q_i^\infty = \lambda q_i^\infty \text{ per ogni permutazione ciclica } q_i \text{ di } q$$

- Il modulo $V_{[p]}^\lambda$ è semplice, grazie alla Proposizione 5.3.4.

Osservazione 5.3.9. Grazie al punto 2 della Proposizione 5.3.7, $\forall a \in (K^\times)^{E_1}$ si ha che $V_{[p]}^a \cong V_{[p]}^{a_q}$ (infatti $(aa_q^{-1})_q = a_{\alpha_1} \dots a_{\alpha_n} a_q^{-1} = 1$), e che $V_{[p]}^\lambda \cong V_{[p]}^{\hat{\lambda}}$ se e solo se $\lambda = \hat{\lambda}$ (infatti $(a_{\lambda,q}a_{\hat{\lambda},q}^{-1})_q = \lambda\hat{\lambda}^{-1}11\dots1 = \lambda\hat{\lambda}^{-1}$). Si ricordi inoltre che $V_{[p]}^1 = V_{[p]}$.

5.4 Moduli $V_{[p]}^f$

La costruzione di questi moduli si ottiene tramite una leggera modifica rispetto a quella descritta per i moduli $V_{[p]}^\lambda$. In particolare, sia $f(x) = 1 + a_1x + ... + a_nx^n$ con $n \geq 1$ un polinomio irriducibile in $K[x, x^{-1}]$ e sia $c = e_1e_2 \dots e_m$ un ciclo esclusivo. Sia $p = c^\infty$. L'anello $\bar{K} = K[x, x^{-1}]/(f(x))$ è un campo dal momento che $f(x)$ è stato scelto irriducibile. Si ponga $\bar{x} = x + (f(x))$. È possibile definire un modulo $V_{[p]}^{\bar{x}}$ sull'algebra $L_{\bar{K}}(E)$. Si noti che effettivamente la definizione acquista significato poiché $\bar{x}$ è invertibile in $\bar{K}$, e che di conseguenza $V_{[p]}^{\bar{x}}$ è anche un modulo semplice su $L_{\bar{K}}(E)$. Si denoti ora con il simbolo

$$V_{[p]}^f$$

il modulo su $L_K(E)$ ottenuto restringendo il campo degli scalari su $V_{[p]}^{\bar{x}}$ da $L_{\bar{K}}(E)$ a $L_K(E)$. Si può dimostrare che anche il modulo $V_{[p]}^f$ è una rappresentazione irriducibile dell'algebra $L_K(E)$.

Lemma 5.4.1. *Il modulo $V_{[p]}^f$ su $L_K(E)$ è semplice.*

Dimostrazione. Si supponga che U sia un sottomodulo non nullo di $V_{[p]}^f$. Siano $\lambda, \mu \in \bar{K}$ due scalari diversi da 0 e sia $\lambda p \in U$. Allora anche $\mu p \in U$, infatti:

$$c * (\lambda p) = \sigma(c)(\lambda c^\infty) = \bar{x} c \lambda p = (\bar{x}\lambda)p$$

dunque $(\bar{x}\lambda)p \in U$, e di conseguenza anche μp. Infatti $\mu = k'\lambda$ con $k' \in \bar{K}$ e $k' = \sum_{i=0}^{n-1} k_i \bar{x}^i$ con $k_i \in K$. Ora, analogamente a quanto fatto nella dimostrazione del Teorema 5.1.8, sia $u = \sum_{i=1}^{l} \lambda_i q_i$ un elemento diverso da zero in U espresso in forma normale, con $\lambda_i \in \bar{K} \backslash \{0\}$ e q_i cammini infiniti distinti in $[p]$, e si scelgano i q_i in modo tale che $q_i = \tilde{q}_i c^\infty$, con $\tilde{q}_i$ cammino finito (possibilmente di lunghezza 0) che non coinvolga e_1 (dove e_1 è la freccia iniziale di $c = e_1 e_2 \dots e_m$). Si assuma inoltre che la lunghezza di $\tilde{q}_1$ sia maggiore o uguale al massimo tra le lunghezze di tutti gli altri cammini $\tilde{q}_i$, con $i \geq 2$. Dunque, grazie anche al Lemma 5.1.7, si ha:

$$\tilde{q_1}^* * u = \tilde{q_1}^* * \big(\lambda_1 q_1 + \sum_{i=2}^{l} \lambda_i q_i\big) = \tilde{q_1}^* * \big(\lambda_1 \tilde{q_1} c^\infty + \sum_{i=2}^{l} \lambda_i \tilde{q_i} c^\infty\big) =$$
$$\lambda_1 \tilde{q_1}^* * \tilde{q_1} c^\infty = \lambda_1 c^\infty$$

infatti $\tilde{q_1}$ non coinvolge e_1 ed ha lunghezza massima. Si è dunque ottenuto che $\lambda_1 c^\infty = \lambda_1 p \in U$. Ora, siano $0 \neq \mu \in \bar{K}$, e $q_0 \in [p]$. In linea con le scelte fatte poco sopra, si scriva q_0 nella forma $q_0 = \tilde{q_0} p$, con $\tilde{q_0}$ cammino finito che non coinvolge e_1. Grazie a quanto dimostrato poco sopra, si ha che anche $\mu p \in U$, e allora:

$$\mu q_0 = \mu \tilde{q_0} p = \tilde{q_0} * (\mu p) \in U$$

Quindi $U = V_{[p]}^f$. □

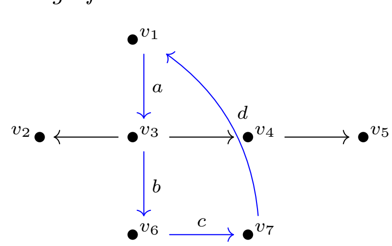
Lemma 5.4.2. *Sia $f(x) = 1 + a_1 x + ... + a_n x^n$, con $n \geq 1$, un polinomio irriducibile in $K[x, x^{-1}]$, e sia $c = e_1 e_2 \dots e_m$ un ciclo esclusivo. Sia $p = c^\infty$. Allora l'annullatore di $V_{[p]}^f$ è $I(H(p), B_{H(p)}, f(c))$.*

Dimostrazione. Si procede esattamente come nella dimostrazione del secondo punto del Lemma 5.1.12, con la differenza che in questo caso è necessario mostrare che l'annullatore $\bar{J}$ di $V_{[p]}^f$ in $L_K(F)$, dove $F = E/(H(p), B_{H(p)})$ è il grafo quoziente, contiene $f(c)$. Questo si ottiene considerando che:

$$f(c) * c^\infty = \sigma(f(c))c^\infty = f(\sigma(c))c^\infty = f(\bar{x})c^\infty = 0$$

□

Esempio 5.4.3. *Sia E il grafo*



Il ciclo $s = bcda$ è un ciclo esclusivo. Dunque ponendo $p = s^\infty$ il cammino razionale infinito ottenuto da s e scegliendo un polinomio $f(x)$ irriducibile in $K[x, x^{-1}]$, è possibile costruire, seguendo il procedimento descritto sopra, il modulo di Chen

$$V_{[p]}^f$$

5.5 Moduli $N_v^{B_{H(v)}}$

Sia E un grafo diretto tale che esista un emittente infinito $v \in B_{H(v)}$. Si costruisca l'ideale $P = I(H(v), B_{H(v)} \backslash \{v\})$ (che grazie al Teorema 3.12(ii) e al Teorema 4.3(ii) in [4] risulta essere primitivo), e il grafo quoziente $F = E/(H(v), B_{H(v)} \backslash \{v\})$, in cui:

$$F_0 = (E_0 \backslash H(v)) \cup \{v'\} \quad \text{e} \quad F_1 = \{e \in E_1 : r(e) \notin H(v)\} \cup \{e' : e \in E_1, r(e) = v\}$$

e in cui r, s sono estese a F secondo le relazioni:

$$s(e') = s(e) \qquad \text{e} \qquad r(e') = v' \qquad \forall e \in E_1 \text{ con } r(e) = v$$

Si noti che v' è un sink in F, e si ricordi che vale la relazione (vedi Osservazione 4.1.12):

$$L_K(E)/P \cong L_K(F)$$

Utilizzando la Definizione 5.1.4, si indichi rispettivamente con $M_F(w)$ e con $M_E(w)$ l'insieme $M(w)$ pensato come sottoinsieme di F_0 o di E_0. Allora vale il seguente lemma:

Lemma 5.5.1. *Nelle ipotesi espresse nella parte iniziale di questo paragrafo, si ha che $M_F(v') = F_0$.*

Dimostrazione. Poiché $M_E(v) = E_0 \backslash H(v)$ per definizione, per mostrare che tutti i vertici di F sono connessi a v' è sufficiente far vedere che v è connesso a v'. Dal momento che $v \in B_{H(v)}$, deve esistere $e \in E_1$ tale che $s(e) = v$ e $r(e) \in M_E(v)$. Se $r(e) = v$ allora e è un loop e $e' \in F_1$ con $s(e') = v$ e $r(e') = v'$. Se invece $r(e) \neq v$ allora, dato che ogni vertice in $M_E(v)$ si connette a v, esisterà un cammino $p = f_1 \dots f_m$ in E tale che $s(p) = r(e)$ e $r(p) = v$. Ora il cammino $q = ef_1 f_2 \dots f_{m-1} f'_m$ è un cammino in F tale che $s(q) = v$ e $r(q) = v'$. Quindi v è connesso a v' in F. □

Poiché, come ricordato poco sopra, v' è un sink in F, è possibile seguire la costruzione indicata da Chen per definire il modulo $N_{v'}$ su $L_K(F)$.

Lemma 5.5.2. *Nelle ipotesi espresse nella parte iniziale di questo paragrafo, il modulo $N_{v'}$ su $L_K(F)$ è un modulo semplice e fedele.*

Dimostrazione. Il modulo $N_{v'}$ è una rappresentazione irriducibile dell'algebra $L_K(F)$ grazie al Teorema 5.2.1. Inoltre, dal momento che $M_F(v') = F_0$, grazie alla seconda metà della dimostrazione del Lemma 5.2.2, si vede che $N_{v'}$ è anche fedele come modulo su $L_K(F)$. □

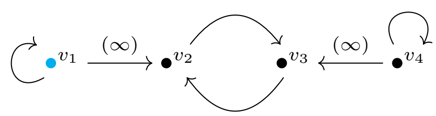
Utilizzando la mappa quoziente $\phi : L_K(E) \to L_K(F)$ é possibile interpretare $N_{v'}$ come un modulo semplice su $L_K(E)$ (Osservazione 4.1.12). Si denoti dunque questo nuovo modulo su $L_K(E)$ con il simbolo:

$$N_v^{B_{H(v)}}$$

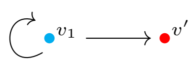
Lemma 5.5.3. *Sia v un emittente infinito tale che $v \in B_{H(v)}$. Allora l'annullatore di $N_v^{B_{H(v)}}$ è $I(H(v), B_{H(v)} \backslash \{v\})$.*

Dimostrazione. Poiché $N_{v'}$ è un modulo semplice e fedele su $L_K(F)$, e $L_K(F) \cong L_K(E)/P$, si ha che sull'algebra $L_K(E)$ il suo annullatore deve corrispondere proprio a $P = I(H(v), B_{H(v)} \backslash \{v\})$. $\square$

Esempio 5.5.4. *Sia E il seguente grafo diretto:*



Si consideri il vertice v_1, emittente infinito tale che $v_1 \in B_{v_1}$: il grafo quoziente $F = E/(H(v_1), B_{H(v_1)} \backslash \{v_1\})$ allora sarà



Si vede che v' è un vertice sink in F: costruendo il modulo sinistro su $L_K(F)$, $N_{v'}$, generato dal vertice v', e interpretandolo come modulo semplice su $L_K(E)$ si ottiene il modulo di Chen

$$N_{v_1}^{B_{H(v_1)}}$$

5.6 Moduli $N_v^{H(v)}$

Sia E un grafo diretto, e sia v un emittente infinito in E_0 tale che $r(s^{-1}(v)) \subseteq H(v)$. Allora in questo caso si ha che v è l'unico vertice sink del grafo quoziente $F = E/(H(v), B_{H(v)})$, i cui vertici sono infatti dati da $F_0 = E_0 \backslash H(v) = M(v)$. Sia N_v il corrispondente modulo semplice su $L_K(F)$ creato grazie alla costruzione di Chen vista in precedenza. N_v è quindi un modulo semplice e fedele su $L_K(F)$ per via dei risultati dimostrati. Considerando la mappa quoziente $\phi : L_K(E) \to L_K(F)$, si interpreti ora N_v come un modulo semplice su $L_K(E)$, e si indichi con il simbolo:

$$N_v^{H(v)}$$

Lemma 5.6.1. *Sia v un emittente infinito in un grafo diretto E tale che si abbia $r(s^{-1}(v)) \subseteq H(v)$. Allora l'annullatore del modulo semplice $N_v^{H(v)}$ è $I(H(v), B_{H(v)})$.*

Dimostrazione. Poiché vale la relazione $L_K(E)/I(H(v), B_{H(v)}) \cong L_K(F)$ e N_v è semplice e fedele su $L_K(F)$, segue direttamente la tesi. $\square$

Esempio 5.6.2. *Si consideri il seguente grafo E:*

$$\begin{tikzcd}
\bullet^{v_1} \arrow[r, "(\infty)"] \arrow[d] & \bullet^{v_2} & \\
\bullet^{v_3} & \bullet^{v_4} \arrow[l] \arrow[ul] & \bullet^{v_5} \arrow[l] \arrow[ul, "(\infty)"']
\end{tikzcd}$$

Il vertice v_1 è un emittente infinito in E_0, ed è tale che $r(s^{-1}(v_1)) \subseteq H(v_1)$. Se si costruisce il grafo quoziente $F = E/(H(v_1), B_{H(v_1)})$ si ottiene:

$$\begin{tikzcd}
\bullet^{v_1} & & \\
& \bullet^{v_4} \arrow[ul] & \bullet^{v_5} \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

v_1 è l'unico vertice sink del grafo quoziente F: se si costruisce il modulo N_{v_1} su $L_K(F)$ e si interpreta poi come modulo semplice su $L_K(E)$, si ottiene il modulo di Chen

$$N_{v_1}^{H(v_1)}$$

5.7 Moduli di Chen

In questo paragrafo verranno riassunti i moduli di Chen presentati fino ad ora, e dimostrati alcuni risultati generali che li riguardano.

Definizione 5.7.1. *Sia E un grafo diretto e K un campo arbitrario. Si definisce* ***modulo di Chen*** *un modulo sinistro semplice su $L_K(E)$ che rientri in una delle seguenti cinque categorie:*

1. *$V_{[p]}$, con p un cammino infinito su E*
2. *N_w, con w un vertice sink in E*
3. *$V_{[q]}^f$, con $q = c^\infty$, c un ciclo esclusivo, e $f(x) \in K[x, x^{-1}]$ un polinomio irriducibile con $f(x) \neq x - 1$*
4. *$N_v^{B_{H(v)}}$, con v un emittente infinito tale che $v \in B_{H(v)}$*
5. *$N_v^{H(v)}$, con v un emittente infinito tale che $r(s^{-1}(v)) \subseteq H(v)$*

Proposizione 5.7.2. *Tutti i moduli semplici elencati nella Definizione 5.7.1 sono a due a due non-isomorfi.*

Dimostrazione. Due moduli isomorfi su $L_K(E)$ devono avere lo stesso annullatore, dunque in base ai calcoli fatti nei paragrafi precedenti riguardo l'annullatore di ciascuna tipologia di moduli elencati nella definizione, e agli enunciati del Teorema 5.1.8 e del Teorema 5.2.1, i moduli descritti non possono essere isomorfi. $\square$

Teorema 5.7.3. *Sia E un grafo diretto, K un campo arbitrario e P un ideale primitivo di $L_K(E)$. Allora esiste un modulo di Chen S semplice, tale che l'annullatore di S sia proprio P.*

Dimostrazione. Se $H = P \cap E_0$, grazie a [4]Teorema 4.3 si ha che P deve soddisfare una delle seguenti:

1. $P = I(H, B_H, f(c))$ con c ciclo esclusivo con base in un vertice u, $E_0 \backslash H = M(u)$, $f(x) \in K[x, x^{-1}]$ polinomio irriducibile;

2. P è un ideale della forma $I(H, B_H \backslash \{u\})$ con $u \in B_H$ e $M(u) = E_0 \backslash H$;

3. P è un ideale della forma $I(H, B_H)$, ed $E/(H, B_H)$ è diretto verso il basso, soddisfa la condizione (L) e la Countable Separation Property.

Si supponga che valga (1). Sia $q = c^{\infty}$. Sia poi $H = H(q) = E_0 \backslash M(u)$. Considerando il modulo di Chen $V_{[q]}^{f}$ si ha, grazie al Lemma 5.4.2, che il suo annullatore risulta essere proprio $I(H, B_H, f(c)) = P$.
Si supponga ora che valga (2). Si ha che u è un emittente infinito tale che $u \in B_{H(u)}$ e, dal momento che $M(u) = E_0 \backslash H$, necessariamente $H(u) = H$. Ma allora considerando il modulo di Chen $N_u^{B_{H(u)}}$ l'annullatore corrispondente risulta essere proprio $P = I(H, B_H \backslash \{u\})$, grazie al Lemma 5.5.3.
Infine, si supponga che valga (3). Sia S un sottoinsieme numerabile (finito o infinito) di $E_0 \backslash H$ tale che ogni vertice di $E/(H, B_H)$ si connetta a qualche vertice di S. L'obiettivo ora è quello di dimostrare che o esiste un (unico) vertice sink in $E/(H, B_H)$ a cui si connettono tutti i vertici di $E/(H, B_H)$, oppure esiste un cammino infinito p su $E/(H, B_H)$ tale che ogni vertice in $E/(H, B_H)$ si connette ad un vertice in p^0. Sia dunque $F = E/(H, B_H)$. Se F ha un vertice sink v, allora poiché F_0 è diretto verso il basso si ha che v è l'unico sink, $v \in S$ e $F_0 = M(v)$. Si assuma invece che F non abbia alcun vertice sink: se S è infinito, si denotino con i simboli $v_1, v_2, ...$ i suoi elementi, se altrimenti $S = \{v_1, v_2, ..., v_k\}$ è finito, si consideri la sequenza infinita $v_1, v_2, ..., v_k, v_1, v_2, ..., v_k, v_1, v_2, ..., v_k, ...$ ottenuta ripetendo la sequenza finita $v_1, v_2, ..., v_k$ infinite volte, così da avere $v_{kr+i} = v_i$. Ora si vuole definire induttivamente una sequenza di cammini $\lambda_1, \lambda_2, ...$ in F con le seguenti caratteristiche:

1. λ_i è un segmento (sottocammino) iniziale di λ_j ogni qual volta $i \leq j$

2. $v_i \geq r(\lambda_i)$ $\forall i$

Si procede dunque in questo modo alla definizione per induzione:

Sia $\lambda_1 = v_1$

Sia $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ una sequenza di cammini costruiti con le caratteristiche di cui sopra per qualche $n > 1$. Poichè il grafo è diretto verso il basso, esiste un vertice u_{n+1} in F tale che $r(\lambda_n) \geq u_{n+1}$ e $v_{n+1} \geq u_{n+1}$. Sia dunque q_{n+1} un cammino da $r(\lambda_n)$ a u_{n+1}, e si definisca $\lambda_{n+1} = \lambda_n q_{n+1}$. Allora anche λ_{n+1} risulta avere le caratteristiche sperate.

A partire dai cammini λ_i, allora, si ottiene un cammino infinito p tale che ogni vertice $v_j \in S$ sia connesso ad un vertice di p^0. E poiché per definizione ogni vertice di F è connesso a qualche vertice di S, si ha che ogni vertice di F è connesso a qualche vertice in p^0. Si noti che nel caso il cammino p costruito sia un cammino razionale infinito $gggg\ldots$, con g un cammino chiuso, la condizione (L) su F, insieme alla proprietà che ogni vertice si connette a g^0, permette di dedurre che g non può essere un ciclo esclusivo.
Se esiste un unico sink v in F a cui si connettono tutti i vertici di F, allora $H = H(v)$ (perché $F_0 = M(v)$ e H deve essere tale che $E_0 \backslash H = F_0$ per come è definito il grafo quoziente), e in particolare:

- v non può emettere frecce (in numero finito o infinito) in $M(v)$, altrimenti non sarebbe un sink in F;
- v non può emettere un numero finito di frecce in $E_0 \backslash M(v) = H(v)$ perché $H(v)$ è saturo: se v fosse un vertice regolare ed emettesse un numero di frecce finito in $H(v)$ allora dovrebbe appartenere a $H(v)$.

Di conseguenza si possono verificare solamente due casi: o v è un sink in E, oppure v è un emittente infinito tale che $r(s^{-1}(v)) \subseteq H(v)$. In entrambe le eventualità, grazie rispettivamente al Lemma 5.2.2 e al Lemma 5.6.1 si ha che considerando i moduli di Chen N_v e $N_v^{H(v)}$ essi risultano avere proprio $P = I(H(v), B_{H(v)})$ come annullatore.
Se invece esiste un cammino infinito p su F tale che $F_0 = M(p)$, si consideri p come un cammino infinito sul grafo E. Allora $H = H(p)$ e, poiché F ha la condizione (L), p non può terminare in un ciclo esclusivo in E. Quindi grazie al punto (1) del Lemma 5.1.12, si ha che l'annullatore di $V_{[p]}$ è proprio $P = I(H, B_H)$. □

6 Moduli semplici finitamente presentati

In questa sezione si partirà dalle costruzioni dei moduli semplici di Chen per arrivare a stabilire un legame più generale tra moduli semplici e moduli finitamente presentati costruibili sull'algebra di Leavitt associata a grafi finiti. Un aspetto particolarmente interessante di tale legame è il fatto che esso si manifesti in presenza di particolari condizioni sul grafo, e che costituisca dunque un esempio esplicito di come la conformazione di vertici e frecce influisca in modo determinante sulle proprietà delle strutture costruite sull'algebra ad essi associata. Nel corso di tutto il prossimo capitolo si assumerà sempre di lavorare con grafi diretti E finiti, cioé tali che gli insiemi E_0 e E_1 siano entrambi finiti.

Definizione 6.0.1. *Dato un grafo diretto $E = (E_0, E_1, r, s)$ si definisce **grafo inverso di** E e si indica con il simbolo $\bar{E}$ il grafo in cui:*

$$\bar{E}_0 = E_0 \qquad e \qquad \bar{E}_1 = \{e^* | e \in E_1\}$$

Dunque $\bar{E}$ è il grafo diretto ottenuto a partire da E invertendo l'orientamento di tutte le frecce di E.

Definizione 6.0.2. *Un cammino chiuso c si definisce* ***primitivo*** *se $c \neq d^r$ per ogni cammino chiuso d e per ogni $r \geq 2$. In tal caso, se $c = e_1 e_2 \dots e_n$ è primitivo, allora tutte le permutazioni cicliche che partono dalla freccia in posizione i, cioè $c_i = e_i e_{i+1} \dots e_n e_1 \dots e_{i-1}$, con $i = 1, ..., n$ sono differenti.*

La prossima proposizione specifica in quali casi i moduli di Chen N_w e $V_{[p]}$ sono o non sono finitamente presentati. Tale prerogativa sarà deducibile dall'analisi della risoluzione proiettiva di questi moduli, la quale necessita prima delle seguenti definizioni:

Definizione 6.0.3. *Sia M un modulo arbitrario. Una* ***risoluzione proiettiva*** *di M è una sequenza esatta di moduli*

$$... \xrightarrow{...} P_n \xrightarrow{\alpha_n} ... \xrightarrow{...} P_1 \xrightarrow{\alpha_1} P_0 \xrightarrow{\alpha_0} M \longrightarrow 0$$

in cui tutti i moduli P_i sono proiettivi. Può essere una sequenza finita oppure infinita, ma tutti i moduli ne possiedono una.

Definizione 6.0.4. *Sia E un grafo finito, e sia $\mu = e_1 e_2 \dots e_n$ un cammino in E. Per ogni $0 \leq i \leq n-1$ sia*

$$X_i(\mu) = \{f \in E_1 | s(f) = s(e_{i+1}) \text{ e } f \neq e_{i+1}\}$$

l'insieme (eventualmente vuoto) delle uscite di μ al vertice $s(e_{i+1})$. Per ogni $i \geq 0$ sia poi $J_i(\mu)$ l'ideale sinistro di $L_K(E)$ definito da

$$J_i(\mu) = \sum_{f \in X_i(\mu)} L_K(E) f^* \tau_{\leq i}(\mu)^*$$

Si noti in particolare che $J_i(\mu) = \{0\}$ esattamente quando $X_i(\mu) = \emptyset$.
Nel caso di un cammino infinito $p = e_1 e_2 \dots \in E_\infty$, si ponga per ogni $i \geq 0$:

$$X_i(p) := X_i(\tau_{\leq i+1}(p)) \qquad e \qquad J_i(p) := J_i(\tau_{\leq i+1}(p))$$

Definizione 6.0.5. *Sia c un cammino chiuso primitivo su E, e sia $v = s(c)$. Si definiscono con i simboli ρ_{c-v} e ρ_{c^∞} le mappe che agiscono rispettivamente come moltiplicazione a destra per $(c - v)$ e per c^∞:*

$$\rho_{c-v} : L_K(E) \longrightarrow L_K(E)(c-v) \qquad \rho_{c^\infty} : L_K(E) \longrightarrow V_{[c^\infty]}$$

Sia invece $p \in E_\infty$ un cammino irrazionale. Allora si definisce con il simbolo ρ_p la mappa che agisce come moltiplicazione a destra per p:

$$\rho_p : L_K(E)v \longrightarrow V_{[p]} \qquad \textit{tale che } r \longmapsto rp$$

Osservazione 6.0.6. Si può dimostrare (vedi [5]) che le mappe ρ_{c-v}, ρ_{c^∞} e ρ_p hanno caratteristiche che le rendono idonee a definire le risoluzioni proiettive dei moduli di Chen. In particolare:

- la mappa ρ_{c-v} è un isomorfismo di moduli;

- la mappa ρ_{c^∞} è tale che $ker(\rho_{c^\infty}) = L_K(E)(c - v)$;
- la mappa ρ_p è tale che $ker(\rho_p) = \oplus_{i=0}^{\infty} J_i(p)$.

È possibile ora definire le risoluzioni proiettive cercate dei moduli di Chen del tipo N_w e $V_{[p]}$, infatti:

1. Sia w un vertice sink in E, e sia N_w il modulo di Chen ad esso associato. Come già notato in precedenza, N_w corrisponde all'ideale sinistro generato dal vertice w, cioè $L_K(E)w$. Essendo w un idempotente, tale ideale è anche proiettivo. Chiamati $v_1, v_2, ..., v_n, w$ i vertici del grafo E, e denominata ρ_w la mappa moltiplicazione a destra per w, è possibile definire la seguente risoluzione proiettiva:

$$0 \longrightarrow L_K(E)v_1 \oplus ... \oplus L_K(E)v_n \longrightarrow L_K(E) \xrightarrow{\rho_w} L_K(E)w \longrightarrow 0$$

2. Sia c un cammino chiuso primitivo, e sia $v = s(c)$. Dal momento che v è un idempotente, il modulo $L_K(E)v$ è proiettivo, dunque una risoluzione proiettiva del modulo semplice $V_{[c^\infty]}$ è la seguente:

$$0 \longrightarrow L_K(E)v \xrightarrow{\rho_{c-v}} L_K(E)v \xrightarrow{\rho_{c^\infty}} V_{[c^\infty]} \longrightarrow 0$$

3. Sia p un cammino infinito irrazionale su E, e sia $v = s(p)$. Poiché è possibile dimostrare che ogni $J_i(p)$ è proiettivo, una risoluzione proiettiva del modulo semplice $V_{[p]}$ è data da:

$$0 \longrightarrow \oplus_{i=0}^{\infty} J_i(p) \longrightarrow L_K(E)v \xrightarrow{\rho_p} V_{[p]} \longrightarrow 0$$

Proposizione 6.0.7. *Sia E un grafo finito, K un campo arbitrario, $w \in E_0$ un vertice sink e $p = e_1e_2\dots$ un cammino infinito in E. Allora si ha che:*

1. *Il modulo di Chen N_w è finitamente presentato;*
2. *Il modulo di Chen $V_{[p]}$ è finitamente presentato se e solo se p è un cammino razionale della forma c^∞ con c cammino chiuso primitivo.*

Dimostrazione. Ricordando la Definizione 2.0.7, e considerando le risoluzioni proiettive dei moduli N_w e $V_{[c^\infty]}$, si vede che essi sono finitamente presentati, infatti risultano essere entrambi quozienti di moduli proiettivi finitamente generati con sottomoduli proiettivi finitamente generati. Si consideri ora la risoluzione proiettiva del modulo $V_{[p]}$ nel caso in cui p sia irrazionale: $V_{[p]}$ è finitamente presentato se gli ideali $J_i(p)$ sono diversi da zero solo per un numero finito di $i \in \mathbb{N}$ (altrimenti la loro somma diretta non costituirebbe un modulo proiettivo finitamente generato), cioè, come già osservato, quando gli $X_i(p)$ sono non vuoti solo per un numero finito di $i \in \mathbb{N}$. Ma nel caso di un grafo finito si ha invece che gli ideali $J_i(p)$ sono diversi da zero per un numero infinito di

$i \in \mathbb{N}$. Si supponga, infatti, per assurdo che $\exists N \in \mathbb{N}$ per cui $X_i(p) = \emptyset$ per tutti gli $i \geq N$. Dal momento che E_0 è finito, esisteranno $m, m' \geq N$, con $m < m'$, tali che $s(e_m) = s(e_{m'})$. Ma poiché $X_m(p) = \emptyset$, allora $e_m = e_{m'}$. Allo stesso modo, si ottiene che $e_{m+l} = e_{m'+l}$ per ogni $l \in \mathbb{N}$. Indicato con d il cammino chiuso $e_m e_{m+1} \dots e_{m'-1}$, si avrebbe che $p \sim d^\infty$, ma ciò è assurdo poiché p è irrazionale. □

I prossimi due lemmi dimostrano che l'algebra dei cammini di Leavitt associata ad un grafo si rivela essere, sotto determinate condizioni, Morita equivalente all'algebra di Leavitt associata ad un nuovo grafo ottenibile da quello di partenza tramite alcune modifiche. Prima, però, due utili definizioni:

Definizione 6.0.8. *Siano R ed S due anelli idempotenti, cioè tali che $R^2 = R$ e $S^2 = S$ (in particolare le algebre di Leavitt, avendo unità locali, sono anche anelli idempotenti). Siano poi ${}_R N_S$ e ${}_S M_R$ due bimoduli, ϕ un omomorfismo R-R-bimodulo, e ψ un omomorfismo S-S-bimodulo dati da:*

$$\phi : N \otimes_S M \longrightarrow R \quad e \quad \psi : M \otimes_R N \longrightarrow S$$

tali che:

$$\phi(n \otimes m)n' = n\psi(m \otimes n') \quad e \quad \psi(m \otimes n)m' = m\phi(n \otimes m')$$

*per ogni $n, n' \in N$ e $m, m' \in M$. Un **contesto di Morita** è una tupla a sei entrate (R, S, N, M, ϕ, ψ) tale che i suoi elementi soddisfino le proprietà descritte sopra, e si dice **suriettivo** se entrambe le mappe ϕ, ψ sono suriettive.*

Osservazione 6.0.9. Un risultato molto famoso della Teoria di Morita (vedi [6]), e che rende i contesti suriettivi di Morita particolarmente interessanti, afferma che:

Dati R, S due anelli idempotenti, si ha che R è Morita equivalente ad S se e solo se esiste un contesto di Morita (R, S, N, M, ϕ, ψ) suriettivo.

Definizione 6.0.10. *Sia $E = (E_0, E_1, r, s)$ un grafo diretto, e sia $v \in E_0$ un vertice source. Si definisce **grafo source-elimination**, e si indica con $E \backslash v$, il grafo in cui:*

$$(E\backslash v)_0 = E_0 \backslash \{v\} \qquad e \qquad (E\backslash v)_1 = E_1 \backslash s^{-1}(v)$$

e in cui le mappe $s_{E\backslash v}$ e $r_{E\backslash v}$ sono le mappe s e r ristrette al dominio $(E\backslash v)_1$.

Lemma 6.0.11. *Sia E un grafo diretto finito, e sia K un campo. Se $v \in E_0$ è un vertice source ma non è un sink, allora $L_K(E)$ è Morita equivalente all'algebra $L_K(E\backslash v)$.*

Dimostrazione. Per dimostrare la Morita equivalenza tra le due algebre, si vuole ricorrere al criterio citato nell'Osservazione 2.0.18. Per prima cosa si osservi che $|E_0| \geq 2$ poiché per ipotesi contiene un vertice source e non sink. Per come è stato definito $E\backslash v$, si vede che esso costituisce un sottografo completo di E (cioé per ogni coppia di vertici in $E\backslash v$, le frecce che li connettono sono esattamente le frecce presenti tra loro anche in E). Questa proprietà garantisce che la mappa $\theta : L_K(E\backslash v) \to L_K(E)$ tale che

$$\theta(w) = w \quad \forall w \in (E\backslash v)_0$$

$$\theta(e) = e \quad , \quad \theta(e^*) = e^* \quad \forall e \in (E\backslash v)_1$$

sia un omomorfismo ben definito di K-algebre, non nullo e graduato. Dalla definizione della mappa, si evince facilmente che vertici, frecce e generici elementi non nulli dell'algebra non vengono mandati in zero, e che dunque si tratta di un monomorfismo. Si consideri ora l'elemento

$$\epsilon = \theta(1_{L_K(E\backslash v)}) = \sum_{w \in E_0, w \neq v} w$$

Essendo una sommatoria di vertici, esso è un elemento idempotente per le proprietà computazionali dell'algebra di Leavitt, e quindi l'anello $\epsilon L_K(E)\epsilon$ è un corner di $L_K(E)$.
Si dimostra che $\theta(L_K(E\backslash v)) = \epsilon L_K(E)\epsilon$, infatti:

- $\subseteq$ Ogni cammino μ che genera l'algebra $L_K(E\backslash v)$ è un cammino che non coinvolge il vertice v, e che viene mandato in se stesso dalla mappa θ. L'elemento ϵ agisce come l'identità nell'immagine e μ può essere scritto nella forma:
$$\mu = 1\mu 1 = \epsilon\mu\epsilon$$
- $\supseteq$ $\epsilon L_K(E)\epsilon$ è generato linearmente da elementi $pq^* \in \epsilon L_K(E)\epsilon$ tali che $s(p) \neq v$ e $s(q) \neq v$. Inoltre, poiché v è una sorgente, né p né q possono passare per v. Ma allora sia p che q sono cammini su $E\backslash v$, dunque:
$$pq^* = \theta(pq^*) \in \theta(L_K(E\backslash v))$$

Dal momento che θ è un monomorfismo, è stato appena dimostrato che $L_K(E\backslash v)$ è isomorfa al corner $\epsilon L_K(E)\epsilon$. Per completare la dimostrazione della Morita equivalenza, rimane solo la verifica che ϵ sia un idempotente full, cioé tale che:

$$L_K(E)\epsilon L_K(E) = L_K(E)$$

L'inclusione $L_K(E)\epsilon L_K(E) \subseteq L_K(E)$ è ovvia, mentre per far vedere l'inclusione opposta è sufficiente mostrare che $v \in L_K(E)\epsilon L_K(E)$. Sia dunque $\emptyset \neq s^{-1}(v) = \{e_1, ..., e_n\}$. Poiché per ogni i si ha che $r(e_i)$ appartiene all'ideale bilatero $L_K(E)\epsilon L_K(E)$ (infatti nessuna freccia e_i può avere $r(e_i) = v$ dal momento che v è un vertice source), e poiché $e_i r(e_i) = e_i$, si ha necessariamente che anche $e_i \in L_K(E)\epsilon L_K(E)$. Notando poi che

$$v = \sum_{i=1}^{n} e_i e_i^*$$

si ottiene che necessariamente anche $v \in L_K(E)\epsilon L_K(E)$. □

Lemma 6.0.12. *Sia E un grafo finito, e sia K un campo arbitrario. Sia c un ciclo in E senza entrate, ovvero tale che $|r^{-1}(v)| = 1\ \forall v \in c^0$. Allora è possibile costruire un grafo finito F, a partire da E, in cui il ciclo c appaia sostituito da un loop e tale che $L_K(F)$ sia Morita equivalente a $L_K(E)$.*

Dimostrazione. Sia $c = e_1 \dots e_r$ e siano v_i i vertici coinvolti nel ciclo, cioè tali che $s(e_i) = v_i$. I vertici del nuovo grafo F possono essere definiti nel seguente modo:

$$F_0 = (E_0 \backslash c^0) \cup \{v\} \qquad \text{dove } v \text{ è un nuovo vertice}$$

Per quanto riguarda le frecce, invece, si noti innanzitutto che $E_0 \backslash c^0$ è un insieme ereditario, infatti per ipotesi $r(e) \notin c^0$ per ogni $e \in E_1$ tale che $s(e) \notin c^0$. Dunque per i vertici $w \in E_0 \backslash c^0$ si può considerare $s_F^{-1}(w) = s_E^{-1}(w)$. Poi, per ogni freccia $f \in E_1$ con $s(f) \in c^0$ e $r(f) \in E_0 \backslash c^0$, si definisca una freccia $f' \in F_1$ tale che $s_F(f') = v$ e $r_F(f') = r(f)$. Infine si definisca un loop e' su v, tale che $s_F(e') = r_F(e') = v$. Ora si vuole mostrare che l'algebra dei cammini di Leavitt associata a questo nuovo grafo F è Morita equivalente a quella associata al grafo E di partenza utilizzando il criterio citato nell'Osservazione 2.0.18. Si definisca dunque l'omomorfismo di K-algebre $\theta : L_K(F) \to L_K(E)$ che agisca nel seguente modo:

$$\theta(w) = w \quad \forall w \in E_0 \backslash c^0 \qquad \text{e} \qquad \theta(v) = v_1 \text{ dove } v_1 = s(e_1)$$

$$\theta(e) = e \quad \theta(e^*) = e^* \quad \forall e \text{ tali che } s(e) \in E_0 \backslash c^0$$

$$\theta(f') = e_1 \dots e_{i-1} f,\ \theta(f'^*) = f^* e_{i-1}^* \dots e_1^*\ \forall f \text{ tale che } s(f) = v_i \text{ e } r(f) \in E_0 \backslash c^0$$

$$\theta(e') = e_1 \dots e_r = c \quad \theta(e'^*) = e_r^* \dots e_1^*$$

In particolare θ preserva le relazioni costitutive dell'algebra di Leavitt $(CK1)$ e $(CK2)$, in quanto:

$(CK1)$: Se $s(e) \in E_0 \backslash c^0$, allora si ha

$$\theta(e^* e) = \theta(e^*)\theta(e) = e^* e = r(e) = \theta(r(e)) \text{ perché } r(e) \in E_0 \backslash c^0$$

Se $s(f) \in c^0$ e $r(f) \in E_0 \backslash c^0$, allora si ha

$$\theta(f'^* f') = \theta(f'^*)\theta(f') = f^* e_{i-1}^* \dots e_1^* e_1 \dots e_{i-1} f = f^* f = r(f)$$

$$= \theta(r(f)) \text{ perché } r(f) \in E_0 \backslash c^0$$

Se invece si considera il loop e', si ha

$$\theta(e'^* e') = \theta(e'^*)\theta(e') = e_r^* \dots e_1^* e_1 \dots e_r = e_r^* e_r = r(e_r) = v_1 = \theta(v)$$

$(CK2)$: Se $w \in F_0 \backslash \{v\}$ allora si ha

$$\theta\Big(\sum_{\alpha \in s_F^{-1}(w)} \alpha\alpha^*\Big) = \sum_{\alpha \in s_F^{-1}(w)} \theta(\alpha\alpha^*) = \sum_{\alpha \in s_F^{-1}(w)} \theta(\alpha)\theta(\alpha^*) = \sum_{\alpha \in s_F^{-1}(w)} \alpha\alpha^*$$

$$= \sum_{\alpha \in s_E^{-1}(w)} \alpha\alpha^* = w = \theta(w) \text{ perché } w \in E_0 \backslash c^0 \text{ e } s_F^{-1}(w) = s_E^{-1}(w)$$

Se invece si considera v, allora si ha

$$\theta(\sum_{\alpha \in s_F^{-1}(v)} \alpha\alpha^*) = \sum_{\alpha \in s_F^{-1}(v)} \theta(\alpha\alpha^*) = \theta(e'e'^*) + \sum_{\{f\prime | s(f) \in c^0, r(f) \in E_0 \backslash c^0\}} \theta(f'f'^*)$$

$$= \theta(e')\theta(e'^*) + \sum_{i=1}^{r} \sum_{f \in s_E^{-1}(v_i) \backslash \{e_i\}} \theta(f')\theta(f'^*) =$$

$$= e_1 \dots e_r e_r^* \dots e_1^* + \sum_{i=1}^{r} \sum_{f \in s_E^{-1}(v_i) \backslash \{e_i\}} e_1 \dots e_{i-1} f f^* e_{i-1}^* \dots e_1^* =$$

$$= e_1 \dots e_{r-1}(e_r e_r^* + \sum_{f \in s_E^{-1}(v_r) \backslash \{e_r\}} f f^*) e_{r-1}^* \dots e_1^* +$$

$$+ \sum_{i=1}^{r-1} \sum_{f \in s_E^{-1}(v_i) \backslash \{e_i\}} e_1 \dots e_{i-1} f f^* e_{i-1}^* \dots e_1^* =$$

$$= e_1 \dots e_{r-1} v_r e_{r-1}^* \dots e_1^* + \sum_{i=1}^{r-1} \sum_{f \in s_E^{-1}(v_i) \backslash \{e_i\}} e_1 \dots e_{i-1} f f^* e_{i-1}^* \dots e_1^* =$$

$$= e_1 \dots e_{r-1} e_{r-1}^* \dots e_1^* + \sum_{i=1}^{r-1} \sum_{f \in s_E^{-1}(v_i) \backslash \{e_i\}} e_1 \dots e_{i-1} f f^* e_{i-1}^* \dots e_1^*$$

Reiterando lo stesso procedimento, si arriva infine ad avere:

$$= e_1 e_1^* + \sum_{f \in s_E^{-1}(v_1) \backslash \{e_1\}} f f^* = v_1 = \theta(v)$$

Ora, per dimostrare che θ è una mappa iniettiva, si vuole far vedere che essa manda una base di $L_K(F)$ in un sottoinsieme di una base di $L_K(E)$. A questo scopo si definisce prima una base particolare $\mathcal{B}_{\mathcal{E}}$ di $L_K(E)$ in questo modo:

1. Si fissi una funzione $\gamma : E_0 \backslash \{sink\} \to E_1$ tale che $s(\gamma(x)) = x$ per ogni $x \in E_0 \backslash \{sink\}$. In particolare, per ogni $w \in E_0 \backslash c^0$ che non sia un vertice sink, si scelga una freccia $\gamma(w)$ in $s_E^{-1}(w)$. Invece per ogni vertice in c^0, cioè per ogni $i = 1, ..., r$, si ponga $\gamma(v_i) = e_i \in s_E^{-1}(v_i)$. Ci si riferirà a tali frecce immagini come "speciali".

2. Grazie a quanto affermato in [7]Teorema 1 una base $\mathcal{B}_{\mathcal{E}}$ di $L_K(E)$ è data da:

   - w , con $w \in E_0$

- p, p^* , con p cammino in E
- pq^* , con $p = \alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_n$ e $q = \beta_1\beta_2 \dots \beta_m$ cammini in E che terminano nello stesso vertice $r(\alpha_n) = r(\beta_m)$, $n, m \geq 1$, senza restrizioni se $\alpha_n \neq \beta_m$, ma con la restrizione che α_n non debba essere una freccia speciale nel caso in cui $\alpha_n = \beta_m$. In altre parole, pq^* non deve essere della forma $\alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_n\alpha_n^*\beta_{m-1}^* \dots \beta_1^*$ con α_n speciale.

Seguendo le stesse indicazioni, si costruisca una corrispondente base $\mathcal{B}_{\mathcal{F}}$ per $L_K(F)$ scegliendo come speciali le stesse frecce scelte sopra nel caso in cui $w \in E_0 \backslash c^0$, e ponendo poi $\gamma(v) = e'$. Ma allora con questa scelta di basi la mappa θ si restringe ad una mappa iniettiva dalla base di $L_K(F)$ alla base di $L_K(E)$.
Si consideri ora l'elemento idempotente (lo è perché corrisponde ad una sommatoria di vertici):

$$\epsilon = \theta(1_{L_K(F)}) \quad \text{dove } 1_{L_K(F)} = v + \sum_{u \in E^0 \backslash c^0} u \quad \text{, dunque}$$

$$\epsilon = v_1 + \sum_{u \in E^0 \backslash c^0} u$$

e il corner di $L_K(E)$ con ϵ, ovvero l'anello $\epsilon L_K(E)\epsilon$. Poiché c non ha entrate, $\theta(\mathcal{B}_{\mathcal{F}})$, sottoinsieme della base $\mathcal{B}_{\mathcal{E}}$ di $L_K(E)$, è base per $\epsilon L_K(E)\epsilon$, e allora si ha:

$$\theta(L_K(F)) = \epsilon L_K(E)\epsilon$$

Ora rimane solo dimostrare che ϵ è un idempotente full:
l'inclusione $L_K(E)\epsilon L_K(E) \subseteq L_K(E)$ è ovvia, mentre per dimostrare l'opposta è sufficiente far vedere che $c^0 \subseteq L_K(E)\epsilon L_K(E)$. Osservando che $v_1 \in L_K(E)\epsilon L_K(E)$, che $L_K(E)\epsilon L_K(E)$ è ideale bilatero, e che ciascun v_i, per $i = 2, ..., r$, si può scrivere come $v_i = e_{i-1}^* \dots e_1^* v_1 e_1 \dots e_{i-1}$, si raggiunge lo scopo. Quindi si ha:

$$L_K(E)\epsilon L_K(E) = L_K(E)$$

□

Nei risultati che seguono si cercherà di capire come la presenza o meno di cicli nel grafo E intervenga e influisca sulla prerogativa dei moduli costruiti sull'algebra associata al grafo di essere semplici, di Chen, o finitamente presentati.

Definizione 6.0.13. *Dato un grafo diretto $E = (E_0, E_1, r, s)$ e un sottoinsieme ereditario H di E_0, si definisce **grafo ristretto**, e si indica con il simbolo E_H, il grafo in cui:*

$$(E_H)_0 = H \quad e \quad (E_H)_1 = \{e \in E_1 : s(e) \in H\}$$

e in cui le mappe s_{E_H} e r_{E_H} sono le mappe s e r ristrette al dominio $(E_H)_1$.

Definizione 6.0.14. *Dato un grafo diretto E, è possibile stabilire un preordine $\leq$ sull'insieme dei cicli di E in questo modo:*

Se c_1, c_2 sono due cicli in E, $c_1 \leq c_2$ se esiste un cammino da un vertice di c_2 ad un vertice di c_1.

Un ciclo c in E si dice ***ciclo massimale*** *se, per ogni ciclo c' in E, si ha che $c \leq c'$ implica $c' \leq c$.*

Osservazione 6.0.15. La relazione binaria $\leq$ descritta nella Definizione 6.0.14 è effettivamente un preordine perché, dati c_1, c_2, c_3 cicli su E, si ha:

- *Riflessività*: $c \leq c$ perché ad esempio c stesso è un cammino da $s(c)$ a $s(c)$.
- *Transitività*: Se $c_1 \leq c_2$ e $c_2 \leq c_3$, significa che esistono due cammini p, q tali che $s(p) \in c_2^0$, $r(p) \in c_1^0$ e $s(q) \in c_3^0$, $r(q) \in c_2^0$. Ora, chiamando $\tilde{c}$ la porzione di c_2 che connette il vertice $r(q)$ al vertice $s(p)$, si ha che la composizione di cammini $q\tilde{c}p$ è un cammino in E che connette $s(q) \in c_3^0$ con $r(p) \in c_1^0$, dunque $c_1 \leq c_3$.

Teorema 6.0.16. *Sia E un grafo finito, e sia K un campo arbitrario. Allora le seguenti condizioni sono equivalenti per l'algebra dei cammini di Leavitt $L_K(E)$:*

1. *Ogni modulo sinistro su $L_K(E)$ che sia semplice è finitamente presentato.*
2. *Ogni modulo semplice di Chen è finitamente presentato.*
3. *Ogni vertice $v \in E_0$ è la base di al massimo un ciclo in E.*

Dimostrazione. $1 \Rightarrow 2$ è un'implicazione ovvia

$2 \Rightarrow 3$ Si assuma che ogni modulo semplice di Chen su $L_K(E)$ sia finitamente presentato. Ora, si supponga per assurdo che esista un vertice $v \in E_0$ tale che v sia la base di due cicli differenti g, h. Se si considera il cammino infinito p dato dalla composizione

$$p = gh^2gh^3 \dots gh^ngh^{n+1} \dots$$

si nota che esso non può essere tail-equivalent al cammino razionale $c^\infty = cccc\dots$ per un qualsiasi cammino chiuso c (infatti la coda di p continua a modificarsi all'infinito). Ma allora grazie alla Proposizione 6.0.7 il corrispondente modulo di Chen $V_{[p]}$ non può essere finitamente presentato. Ciò costituisce un assurdo, poiché contraddice l'assunzione fatta all'inizio. Dunque ogni vertice in E_0 è base di al massimo un ciclo in E.

$3 \Rightarrow 1$ Si assuma che ogni vertice in E_0 sia base di al massimo un ciclo in E. Si vuole dimostrare che ogni $L_K(E)$-modulo sinistro semplice è finitamente presentato. Sia n il numero totale di cicli distinti in E: si procede alla dimostrazione della tesi per induzione su n.
Se $n = 0$, allora il grafo E è aciclico. Ma allora, grazie a [8]Corollario 4.2.13, si ha che $L_K(E)$ è un anello semisemplice e artiniano sinistro. Per

quanto enunciato in [3] (*Structure Theorem for semi-primitive artinian rings*), tutti i moduli sinistri su di esso sono proiettivi, dunque finitamente presentati.
Si supponga ora che $n \geq 1$ e che il teorema sia vero per tutti i grafi finiti che abbiano meno di n cicli.
Essendo l'equivalenza di Morita un'equivalenza tra categorie di moduli su anelli unitari che preserva le proprietà dei moduli di essere semplici e anche la proprietà di essere finitamente presentati, è possibile arrivare alla tesi lavorando con un'algebra associata ad un grafo più semplice rispetto a E, ma che rimanga Morita equivalente all'algebra associata a E. Con questo obiettivo, si applichi un numero finito di volte il Lemma 6.0.11 ad E per ottenere un grafo F completamente privo di sorgenti e tale che $L_K(F)$ sia Morita equivalente a $L_K(E)$: il nuovo grafo F avrà gli stessi cammini chiusi di E, perché sottraendo solo le sorgenti non si vanno a modificare i vertici in cui entrano ed escono gli eventuali cammini chiusi, e non essendoci sorgenti tutti i cammini in E potranno essere visti come porzioni di cammini provenienti da un ciclo in E.
Ora, si noti che nell'ipotesi in cui valga (2), la relazione di preordine $\leq$ sui cicli è anche un ordine parziale (infatti vale anche la proprietà antisimmetrica: se $c_1 \neq c_2$ e $c_1 \leq c_2$ e $c_2 \leq c_1$, allora componendo le porzioni dei cammini che collegano i due cicli con c_1, sarebbe possibile costruire un nuovo ciclo che abbia come base il vertice v_1, base del ciclo c_1. Ciò contraddirebbe l'ipotesi che ogni vertice del grafo sia base di al massimo un ciclo. Dunque deve accadere che $c_1 = c_2$). Essendo il numero di cicli n un valore finito, sarà possibile individuare nel grafo un ciclo c che sia massimale rispetto alla relazione $\leq$. Poiché il grafo F non ha sorgenti e c è massimale, il ciclo c sarà anche privo di entrate. Grazie alle stesse considerazioni fatte poco sopra riguardo alla possibilità di lavorare equivalentemente con un grafo semplificato, si noti che F soddisfa le ipotesi del Lemma 6.0.12: è possibile dunque eliminare il ciclo c dal grafo F e sostituirlo con un loop la cui origine sia un vertice v. Si assuma quindi di lavorare con un nuovo grafo E che sia finito, privo di sorgenti, e in cui il ciclo massimale c sia un loop attorno al vertice v. L'insieme $E_0 \backslash \{v\}$ è un sottoinsieme di E_0 con le seguenti proprietà:

- è *ereditario*: basta verificare che "$\forall w_1, w_2 \in E_0 \backslash \{v\}$ tali che $w_1 \geq w_2$ allora $w_2 \in E_0 \backslash \{v\}$" nel caso in cui $w_2 = v$. Ma gli unici cammini che terminano in v sono il loop c e il cammino di lunghezza 0 che parte da v stesso, dunque la proprietà è verificata anche in v.
- è *saturo*: basta verificare che "$\forall$ vertice regolare $w \in E_0$, $r(s^{-1}(w)) \subseteq E_0 \backslash \{v\}$ implica che $w \in E_0 \backslash \{v\}$" nel caso in cui $w = v$. Ma v emette almeno una freccia che termina fuori da $E_0 \backslash \{v\}$, ovvero il loop c, dunque la proprietà è sempre verificata.

Sia M l'ideale di $L_K(E)$ generato da $E_0 \backslash \{v\}$. Grazie all'Osservazione 4.1.12, detto Q il grafo $E/E_0\backslash\{v\}$, si ha che:

$$L_K(E)/M \cong L_K(Q)$$

dove $Q_0 = E_0\backslash(E_0\backslash\{v\}) = \{v\}$ e $Q_1 = \{e \in E_1 | r(e) = v\} = \{c\}$. Ma allora $Q = R_1$, e dato che $L_K(R_1) \cong K[x, x^{-1}]$, si ha che:

$$L_K(E)/M \cong K[x, x^{-1}]$$

Si consideri un modulo sinistro arbitrario S su $L_K(E)$ che sia semplice. Si vuole dimostrare che esso è finitamente presentato. Dal momento che S è semplice, il sottomodulo MS deve essere banale, di conseguenza si possono distinguere due casi:

– Si supponga che $MS = S$. Sia $\epsilon = \sum_{w \in E_0\backslash\{v\}} w$. Essendo una somma di vertici è un elemento idempotente in M, ma è anche un idempotente full, infatti:

  $$L_K(E)\epsilon L_K(E) = M\epsilon M = M$$

  Ma allora M è Morita equivalente a $\epsilon L_K(E)\epsilon$, e se E_H è il grafo ristretto, $\epsilon L_K(E)\epsilon = L_K(E_H)$ (si veda [9] pagina 3). L'equivalenza di Morita tra due anelli implica l'esistenza di un *contesto suriettivo di Morita* tra essi (vedi Osservazione 6.0.9) costituito in questo caso dai due moduli $L_K(E)\epsilon$, $\epsilon L_K(E)$ e dagli omomorfismi suriettivi:

  $$\epsilon L_K(E) \otimes_M L_K(E)\epsilon \to \epsilon L_K(E)\epsilon$$

  $$L_K(E)\epsilon \otimes_{\epsilon L_K(E)\epsilon} \epsilon L_K(E) \to L_K(E)\epsilon L_K(E) = M$$

  Ora, il grafo E_H contiene $n-1$ cicli (poiché è stato eliminato il loop c), quindi per ipotesi induttiva tutti i moduli semplici su $L_K(E_H) = \epsilon L_K(E)\epsilon$ sono finitamente presentati. Grazie al [9]Lemma 1.2, M è anch'esso un'algebra di Leavitt, e dunque possiede unità locali. Quindi è possibile applicare a M e a $L_K(E_H) = \epsilon L_K(E)\epsilon$ (in quanto anelli con unità locali) il [10]Teorema 2.2, e affermare che i funtori "$\epsilon L_K(E) \otimes_M -$" e "$L_K(E)\epsilon \otimes_{\epsilon L_K(E)\epsilon} -$" inducono un'equivalenza tra le categorie $M - Mod$ e $\epsilon L_K(E)\epsilon - Mod$ dei moduli su M e su $\epsilon L_K(E)\epsilon$. Quindi in corrispondenza con S c'è un modulo semplice S' su $\epsilon L_K(E)\epsilon$ tale che:

  $$S \cong L_K(E)\epsilon \otimes_{\epsilon L_K(E)\epsilon} S'$$

  Dato che S' è finitamente presentato per ipotesi induttiva, allora anche S lo è, infatti se esiste una sequenza esatta di moduli su $\epsilon L_K(E)\epsilon$

  $$(\epsilon L_K(E)\epsilon)^n \to (\epsilon L_K(E)\epsilon)^m \to S' \to 0$$

  allora applicando a sinistra, ad ogni termine, il prodotto tensoriale "$L_K(E)\epsilon \otimes_{\epsilon L_K(E)\epsilon}$" si ottiene:

  $$(L_K(E)\epsilon)^n \to (L_K(E)\epsilon)^m \to L_K(E)\epsilon \otimes_{\epsilon L_K(E)\epsilon} S' \cong S \to 0$$

e grazie alle proprietà del prodotto tensoriale quest'ultima rimane una sequenza esatta. Dunque S è finitamente presentato.

– Si supponga, invece, che $MS = 0$. Allora S si può interpretare come modulo semplice sul quoziente $L_K(E)/M \cong K[x, x^{-1}]$, stabilendo che $\forall a \in L_K(E)$ l'azione della classe laterale $(a + M) \in L_K(E)/M$ su un elemento $s \in S$ corrisponda alla stessa azione che sarebbe stata determinata dall'elemento $a \in L_K(E)$. Dunque si avrà che $S \cong (L_K(E)/M)/(U/M)$ con U/M ideale massimale di $L_K(E)/M$, e $M \subseteq U \subseteq L_K(E)$. Poiché ogni ideale non banale dell'anello $K[x, x^{-1}]$ è generato da un unico elemento della forma $f(x) = 1+a_1x+...+a_nx^n$ con $a_n \neq 0$, è possibile scrivere che $S \cong K[x, x^{-1}]/(K[x, x^{-1}]f(x))$. Di conseguenza:

$$S \cong L_K(E)/(L_K(E)f(c) + M)$$

L'ideale $(L_K(E)f(c) + M)$ è finitamente generato perché sia M che $L_K(E)f(c)$ sono finitamente generati, e $L_K(E)$ è finitamente generata come modulo su se stessa, quindi S è finitamente presentato.

□

Lemma 6.0.17. *Sia E un grafo finito aciclico e K un campo arbitrario. Allora i moduli semplici sinistri su $L_K(E)$ sono in corrispondenza biunivoca con i vertici sink di E.*

Dimostrazione. Grazie a [8]Corollario 4.2.13, se E è aciclico allora $L_K(E)$ è un anello semisemplice artiniano. Sia S un modulo semplice su $L_K(E)$. Poiché un modulo semplice è ciclico, sia $r = \sum_i \lambda_i p_i q_i^* \in L_K(E)$ un generico elemento dell'algebra, tale che $L_K(E)r = S$. Ora, l'ideale $L_K(E)v$ generato da un vertice v tale che $v = s(p_i)$ per qualche p_i con $\lambda_i \neq 0$, ovvero l'ideale che contiene combinazioni lineari di cammini che terminano in v, sarà contenuto propriamente in S. Ma S è semplice, dunque necessariamente $S = L_K(E)v$. Ciò dimostra che i moduli semplici sinistri S su $L_K(E)$ si possono sempre esprimere nella forma

$$L_K(E)u \qquad \text{con } u \text{ vertice}$$

Grazie a [8]Proposizione 2.6.11, è possibile affermare inoltre che il vertice u deve essere necessariamente un line point.
Il prossimo obiettivo è dimostrare che ogni modulo semplice $L_K(E)u$, con u line point, è sempre isomorfo in particolare al modulo semplice $L_K(E)\bar{u}$ dove $\bar{u}$ è un sink. Si noti che in un grafo finito un line point è o un sink o un vertice da cui parte un percorso lineare che termina in un sink. Più precisamente, i line point in un grafo finito sono punti dai quali esiste un unico cammino possibile che conduce ad un sink. Si prenda dunque in considerazione il caso in cui si abbia un modulo $L_K(E)u$ con u line point che non sia un sink: allora esiste un unico $\mu = e_1e_2\dots e_n$ con $n \geq 1$, tale che $s(\mu) = u$, $r(e_i) = v_i$, e v_n vertice sink. Si può individuare un isomorfismo tra i moduli $L_K(E)u$ e $L_K(E)v_1$ in questo modo:

$$\psi : L_K(E)u \to L_K(E)v_1 \quad \text{tale che } ru \mapsto rue_1$$

dove $r \in L_K(E)$. Ma allora iterando lo stesso procedimento si ottiene anche che

$$L_K(E)v_1 \cong L_K(E)v_2 \quad \dots \quad L_K(E)v_{n-1} \cong L_K(E)v_n$$

Quindi è stato dimostrato che effettivamente i moduli semplici su $L_K(E)$ sono, a meno di isomorfismi, moduli del tipo $L_K(E)\bar{u}$ con $\bar{u}$ sink.
Rimane da dimostrare che i moduli generati da sink differenti non sono isomorfi: siano allora S_1, S_2 due moduli semplici generati rispettivamente dai vertici sink v_1, v_2, con $v_1 \neq v_2$. Allora essi sono in particolare moduli di Chen del tipo N_{v_1} e N_{v_2}, e grazie al Teorema 5.2.1 non sono isomorfi tra loro.

□

Teorema 6.0.18. *Sia E un grafo finito tale che ogni vertice in E sia la base di al massimo un ciclo. Allora ogni modulo semplice su $L_K(E)$ è un modulo di Chen. In particolare, per ogni ideale primitivo P di $L_K(E)$ esiste un unico modulo semplice S su $L_K(E)$ (che è un modulo di Chen) tale che il suo annullatore sia proprio P.*

Dimostrazione. La dimostrazione di questo teorema ricalca per diversi tratti quella del Teorema 6.0.16. Si vuole infatti dimostrare per induzione la tesi sul numero n di cicli distinti presenti in E.
Se $n = 0$ allora grazie al Lemma 6.0.17 i moduli semplici sono in corrispondenza biunivoca con i vertici sink di E (e generati da essi). Ma allora sono tutti della forma N_w con w vertice sink, e N_w è un modulo di Chen. Inoltre, per quanto visto nel capitolo precedente, moduli del tipo N_w con diversi generatori w hanno diversi annullatori, di conseguenza considerando quanto affermato nel Teorema 5.7.3 si giustifica anche la seconda parte della tesi.
Si assuma ora che $n \geq 1$ e che la tesi sia vera per tutti i grafi con meno di n cicli distinti. Dal momento che, grazie al Teorema 5.7.3, ogni ideale primitivo è l'annullatore di almeno un modulo semplice di Chen, e grazie al fatto che tra due anelli Morita equivalenti R e S c'è corrispondenza biunivoca tra le classi di isomorfismo dei moduli semplici su R e le classi di isomorfismo dei moduli semplici su S, e c'è una corrispondenza biunivoca anche tra gli ideali primitivi di R e gli ideali primitivi di S compatibile con la prima (nel senso che rispetta gli annullatori dei moduli semplici), è possibile dimostrare la tesi riconducendosi a lavorare con l'algebra associata ad un grafo più semplice, a condizione che essa sia Morita equivalente a quella di partenza. Dunque dopo aver applicato un numero finito di volte il Lemma 6.0.11 ci si riconduce ad un grafo senza sorgenti, e chiamato c un ciclo massimale in E, dopo aver applicato il Lemma 6.0.12, è possibile assumere che c sia un loop intorno ad un vertice v.
Continuando a seguire quanto fatto nella dimostrazione del teorema precedente, sia $H = E_0 \backslash \{v\}$, e sia M l'ideale generato da H. Sia S un modulo semplice arbitrario su $L_K(E)$, e si consideri il suo sottomodulo MS. Essendo S semplice, si avranno due possibili casi:

- Si supponga che $MS = S$. Gli stessi ragionamenti fatti nella dimostrazione del Teorema 6.0.16, che passano attraverso l'equivalenza di Morita, portano a poter scrivere $S \cong L_K(E)\epsilon \otimes_{\epsilon L_K(E)\epsilon} S'$ dove S' è un modulo semplice su $\epsilon L_K(E)\epsilon = L_K(E_H)$ ottenuto a partire da S tramite l'equivalenza tra le categorie $M - Mod$ e $\epsilon L_K(E)\epsilon - Mod$ indotta dai funtori "$\epsilon L_K(E) \otimes_M -$" e "$L_K(E)\epsilon \otimes_{\epsilon L_K(E)\epsilon} -$". Grazie all'ipotesi induttiva, S' è un modulo di Chen su $L_K(E_H)$ (poiché il grafo E_H possiede $n-1$ cicli). Ma allora, grazie a [11]Lemma 3.11, S è un modulo di Chen su $L_K(E)$.

- Si supponga invece che $MS = 0$. Ripetendo i ragionamenti fatti nel Teorema 6.0.16, S si può vedere come modulo semplice sul quoziente $L_K(E)/M \cong K[x, x^{-1}]$. Ma allora esiste un polinomio di Laurent irriducibile $f(x)$ tale che $S \cong L_K(E)/(L_K(E)f(c) + M)$ e $Ann_{L_K(E)}(S) = L_K(E)f(c)+M$. Si consideri ora il modulo di Chen $V_{[q]}^f$ con $q = c^\infty$: è stato dimostrato in precedenza che il suo annullatore è $I(H(q), B_{H(q)}, f(c))$. Ma $H(q) = H(c^\infty) = H(c)$, e poiché c è un loop con base v si ha che $H(c) = H(v)$. Inoltre, essendo il grafo senza sorgenti, c non ha entrate e dunque $H(v) = E_0 \backslash \{v\}$. Per quanto riguarda poi l'insieme $B_{H(q)}$, esso è vuoto perché il grafo è finito. Ma allora, essendo S e $V_{[q]}^f$ moduli semplici, deve accadere che $S \cong V_{[q]}^f$. Quindi S è un modulo semplice di Chen.

Infine, per dimostrare la seconda parte della tesi, siano S_1, S_2 due moduli semplici arbitrari su $L_K(E)$, e tali che $S_1 \ncong S_2$. Allora si distinguono tre casi:

- Se $MS_1 = S_1$ e $MS_2 = S_2$, dal momento che $S_1 \ncong S_2$, allora anche i corrispondenti $S'_1 \ncong S'_2$, di conseguenza grazie all'ipotesi induttiva si ha che $Ann_{L_K(E_H)}(S'_1) \neq Ann_{L_K(E_H)}(S'_2)$. Grazie all'equivalenza di Morita tra M e $L_K(E_H)$, e al fatto che l'annullatore è un ideale bilatero, gli annullatori $Ann_M(S_1)$ e $Ann_M(S_2)$ si possono scrivere nel seguente modo:

$$Ann_M(S_1) = L_K(E)\epsilon \otimes_{\epsilon L_K(E)\epsilon} Ann_{L_K(E_H)}(S'_1) \otimes_{\epsilon L_K(E)\epsilon} \epsilon L_K(E)$$

$$\neq L_K(E)\epsilon \otimes_{\epsilon L_K(E)\epsilon} Ann_{L_K(E_H)}(S'_2) \otimes_{\epsilon L_K(E)\epsilon} \epsilon L_K(E) = Ann_M(S_2)$$

  Di conseguenza anche $Ann_{L_K(E)}(S_1) \neq Ann_{L_K(E)}(S_2)$, quindi anche in questo caso moduli semplici diversi risultano avere differenti annullatori.

- Se $MS_1 = S_1$ e $MS_2 = 0$, allora $M \nsubseteq Ann_{L_K(E)}(S_1)$ e $M \subseteq Ann_{L_K(E)}(S_2)$, dunque S_1 e S_2 hanno differenti annullatori anche in questo caso.

- Se $MS_1 = 0$ e $MS_2 = 0$, dal momento che $S_1 \ncong S_2$ esisteranno due polinomi irriducibili $f(x), g(x)$ in $K[x, x^{-1}]$ tali che $S_1 \cong L_K(E)/(L_K(E)f(c) + M)$ e $S_2 \cong L_K(E)/(L_K(E)g(c) + M)$. Quindi:

$$Ann_{L_K(E)}(S_1) = M + L_K(E)f(c) \neq M + L_K(E)g(c) = Ann_{L_K(E)}(S_2)$$

  Dunque moduli semplici distinti hanno distinti annullatori anche in questa terza circostanza.

□

E' possibile ora arrivare davvero a dimostrare il risultato conclusivo, capace di connettere le strutture e le proprietà dei moduli di Chen alle proprietà e strutture di moduli generici costruibili sull'algebra, e di ricondurre questa connessione ad una ben precisa prerogativa del grafo di partenza.

Osservazione 6.0.19. Nel corso della prossima dimostrazione sarà necessario definire un modulo semplice M a dimensione finita su $K\bar{E}$, e a questo scopo verrà utilizzato un metodo che ha valenza generale, e che vale la pena di sottolineare. La definizione di un modulo su un'algebra dei cammini può infatti avvenire prima identificando una famiglia di sottospazi vettoriali assegnati in corrispondenza dei vertici del grafo, che andranno a costituire il supporto del modulo: la loro somma diretta costituirà lo spazio vettoriale sottostante al modulo, cioè il modulo stesso pensato come spazio vettoriale sul campo K degli scalari, non sull'algebra. Una volta definito il supporto, è necessario stabilire l'azione dell'algebra sugli elementi del modulo. Per quanto riguarda i vertici, si stabilisce che la moltiplicazione per essi agisca come l'identità sugli elementi del sottospazio ad essi corrispondente, e che si annulli invece contro ogni altro elemento. La moltiplicazione per le frecce, invece, viene descritta mediante l'assegnazione ad ogni freccia di un'applicazione lineare che vada dal sottospazio associato al suo vertice di partenza e finisca nel sottospazio associato al suo vertice di arrivo.

Teorema 6.0.20. *Sia E un grafo finito e K un campo arbitrario. Allora le seguenti condizioni sono equivalenti:*

1. *Ogni modulo semplice sinistro su $L_K(E)$ è finitamente presentato;*
2. *Ogni modulo semplice di Chen è finitamente presentato;*
3. *Ogni vertice $v \in E_0$ è base di al massimo un ciclo;*
4. *La mappa $\widehat{L_K(E)} \to Prim(L_K(E))$ è una biiezione;*
5. *Ogni modulo semplice sinistro su $L_K(E)$ è un modulo di Chen.*

Dimostrazione. Le prime tre doppie implicazioni $1 \Leftrightarrow 2 \Leftrightarrow 3$ sono provate direttamente dal Teorema 6.0.16.

$3 \Rightarrow 4$ Questa implicazione è provata dal Teorema 6.0.18.

$4 \Rightarrow 5$ Sia S un modulo semplice sinistro su $L_K(E)$. Allora grazie al Teorema 5.7.3 esisterà un modulo di Chen M tale che

$$Ann_{L_K(E)}(M) = Ann_{L_K(E)}(S)$$

Ora, assumendo che valga 4., si ha che allora $M \cong S$. Quindi ogni modulo semplice su $L_K(E)$ è un modulo di Chen.

$5 \Rightarrow 3$ Si supponga che $v \in E_0$ sia la base di due cicli differenti g e h. L'obiettivo sarà quello di costruire un modulo semplice su $L_K(E)$ finitamente presentato che non sia un modulo di Chen. Il primo passo sarà costruire un modulo semplice su $K\bar{E}$, a dimensione finita.

Volendo esplicitare meglio il ciclo g, si scriva $g = \alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_n$ con $v = v_1 = s(g) = r(g)$ e $v_i = s(\alpha_i) = r(\alpha_{i-1})$ per $i = 2, ..., n$. Allo stesso modo per il ciclo h si utilizzi la notazione $h = \beta_1\beta_2 \dots \beta_m$ con $v = w_1 = s(h) = r(h)$ e $w_j = s(\beta_j) = r(\beta_{j-1})$ per $j = 2, ..., m$. Ora si definisca una famiglia di spazi vettoriali unidimensionali in questo modo: per $i = 1, ..., n$, sia $M_{v_i} = z_iK$ uno spazio vettoriale unidimensionale con base z_i; per $w_j \in h^0 \backslash g^0$ sia $M_{w_j} = t_jK$ uno spazio vettoriale unidimensionale con base t_j; per $w_j = v_i \in h^0 \cap g^0$ si ponga $t_j = z_i$; per $w \notin g^0 \cup h^0$ si ponga $M_w = 0$. Queste assegnazioni definiscono dunque una famiglia $(M_w)_{w \in E_0}$ di spazi vettoriali a dimensione finita, che andranno a costituire lo spazio vettoriale sottostante del nuovo modulo:

$$M = \oplus_{w \in E_0} M_w$$

Ora, per $i = 1, ..., n$ e per $j = 1, ..., m$ si definiscano le applicazioni lineari:

$$\Phi_{\alpha_i^*} : M_{v_{i+1}} \to M_{v_i} \qquad \text{e} \qquad \Phi_{\beta_j^*} : M_{w_{j+1}} \to M_{w_j}$$

tali che $\Phi_{\alpha_i^*}(z_{i+1}) = z_i$ (stabilendo che $v_{n+1} = v_1$) e $\Phi_{\beta_j^*}(t_{j+1}) = t_j$. Se invece $\alpha \notin g^1 \cup h^1$, si ponga $\Phi_{\alpha^*} = 0$. Queste assegnazioni definiscono una famiglia di applicazioni lineari associate ad ogni freccia del grafo, che serviranno a stabilire l'azione dell'algebra sugli elementi del nuovo modulo. Alla fine si ha, dunque, la famiglia:

$$((M_w)_{w \in E_0}, (\Phi_{\alpha^*})_{\alpha \in E_1})$$

che definisce un modulo M su $K\bar{E}$ con spazio vettoriale sottostante $M = \oplus_{w \in E_0} M_w$. In particolare, M ha dimensione finita su K:

$$dim_K(M) = |g^0 \cup h^0|$$

Ora si vuole dimostrare che M è anche un modulo semplice su $K\bar{E}$, facendo vedere che dato un elemento arbitrario non nullo $a \in M$, si ha che $(K\bar{E})a = M$.

Sia dunque $a \in M$ un elemento non nullo. Allora a avrà la seguente forma:

$$a = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i z_i + \sum_{j \in J} \mu_j t_j \qquad \text{dove } J = \{j \in \{1, ..., m\} : w_j \notin g^0\}$$

Poiché a è non nullo, almeno uno dei coefficienti λ_i oppure μ_j sarà non nullo. Si supponga ad esempio che $\lambda_{i_0} \neq 0$. Ma allora:

$$\alpha_{i_0-1}^* a = \alpha_{i_0-1}^* \big(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i z_i + \sum_{j \in J} \mu_j t_j \big) = \alpha_{i_0-1}^*(\lambda_{i_0} z_{i_0}) = \lambda_{i_0} \alpha_{i_0-1}^*(z_{i_0}) =$$

$$= \lambda_{i_0} z_{i_0-1}$$

infatti $\alpha^*_{i_0-1}$ agisce in modo non banale solo sul vettore in corrispondenza del sottospazio con indice i_0, dunque sull'addendo $\lambda_{i_0} z_{i_0}$ della prima sommatoria, mandandolo in $\lambda_{i_0} z_{i_0-1}$ ($i_0 - 1$ è sempre inteso come modulo n). Allo stesso modo, se invece si suppone che sia $\mu_{j_0} \neq 0$ per qualche $j_0 \in J$, allora grazie agli stessi calcoli si ottiene $\beta^*_{j_0-1} a = \mu_{j_0} w_{j_0-1} \neq 0$. In entrambi i casi, si capisce che iterando il procedimento di moltiplicazione a sinistra con frecce fantasma, si può partire dall'elemento a ed arrivare a ottenere ad ogni iterazione i generatori con indice $i_0 - 1$, $i_0 - 2$, ..., fino ad arrivare a $z_1 = t_1 \in (K\bar{E})a$. Dunque il modulo M è semplice.
L'ultimo passo sarà quello di far vedere che a partire da M è possibile creare un modulo semplice $\tilde{M}$ che non sia però un modulo di Chen, ottenendo quindi una contraddizione che dimostra la tesi. Sia dunque:

$$\tilde{M} := L_K(E) \oplus_{K\bar{E}} M$$

Grazie a [12]Lemma 5.7 $\tilde{M}$ è un modulo semplice su $L_K(E)$ finitamente presentato. Il suo annullatore è:

$$Ann(\tilde{M}) = I(H(g^\infty)) = I(H(h^\infty))$$

infatti gli ideali generati dagli insiemi $H(g^\infty)$ e $H(h^\infty)$ coincidono perché i cicli g, h hanno stessa base, dunque tutti i vertici dell'uno sono connessi a tutti i vertici dell'altro, e dunque tutti i vertici che sono non-connessi a g devono anche essere non-connessi ad h, e viceversa. Inoltre per giustificare l'uguaglianza $Ann(\tilde{M}) = I(H(g^\infty))$ si noti che valgono le inclusioni:

- $\supseteq$ Sia $\tilde{m} = \sum_i l_i \otimes m_i \in \tilde{M}$, con $l_i \in L_K(E)$ e $m_i \in M$. Dato $w \in H(g^\infty)$ vertice in E non connesso ai vertici in g^0, si ha, per come è stato definito il modulo M, che w agisce come l'identità sui vettori del sottospazio M_w a lui corrispondente, altrimenti dà 0 contro tutti gli altri vettori. Ma $w \in g^0 \cup h^0$, dunque il suo sottospazio corrispondente è $M_w = 0$. Ma allora $Ann(\tilde{M}) \supseteq I(H(g^\infty))$.
- $\subseteq$ Sia $F = E/H(g^\infty)$ il grafo quoziente. Grazie all'Osservazione 4.1.12 si ha che $L_K(E)/I(H(g^\infty)) \cong L_K(F)$. Si interpreti $\tilde{M}$ come modulo semplice su $L_K(F)$, e sia $\tilde{J}$ il suo annullatore su $L_K(F)$: $\tilde{J} \cap F_0 = \emptyset$ perché $F_0 = E_0 \backslash H(g^\infty) = M(g^\infty)$. Inoltre il grafo F soddisfa la condizione (L): poiché $F_0 = M(g^\infty)$ ogni ciclo in F che non sia g oppure h deve essere connesso a qualche vertice in g^0, dunque in particolare ha un'uscita; il ciclo g ha un'uscita perché per ipotesi h è un ciclo differente con stessa base v, e lo stesso vale per h rispetto a g. Ma allora grazie al Corollario 4.2.10 si ha che $\tilde{J} = 0$. Il modulo $\tilde{M}$ è fedele su $L_K(F)$, dunque in $L_K(E)$ si ha che $Ann(\tilde{M}) \subseteq I(H(g^\infty))$.

Ora, si supponga per assurdo che $\tilde{M}$ sia un modulo di Chen: confrontando il suo annullatore con quelli calcolati in precedenza, si vede che l'unica possibilità è che $\exists p$ cammino infinito tale che $\tilde{M} \cong V_{[p]}$. Ma grazie alla

Proposizione 6.0.7, p deve essere un cammino razionale della forma q^∞ con q cammino chiuso primitivo in E, dunque $\tilde{M} \cong V_{[q^\infty]}$. Esplicitando $q = e_1 e_2 \dots e_r$ con $e_i \in E_1$ e chiamando $\forall 1 \leq i \leq r$ $q_i = e_i \dots e_{i-1}$ la i-esima permutazione ciclica di q, si definisca

$$N := \oplus_{i=1}^{r} q_i^\infty K$$

N è un modulo a dimensione finita e semplice su $K\bar{E}$, e $(KE)N = V_{[q^\infty]}$. Ciò implica che N è il più piccolo reticolo di $V_{[q^\infty]}$ (si veda [12] Proposizione 7.2). Ma poiché M è il reticolo minimale di $\tilde{M}$, e poichè vale $\tilde{M} \cong V_{[q^\infty]}$, deve esistere un isomorfismo ϕ di moduli su $K\bar{E}$:

$$\phi : M \longrightarrow N$$

N ha $dim_K(N) = r$ per definizione, mentre $dim_K(M) = |g^0 \cup h^0|$ come già visto, dunque deve necessariamente accadere che $r = dim_K(N) = |g^0 \cup h^0|$. Inoltre il fatto che $dim_K(wN) = 1$ per ogni $w \in g^0 \cup h^0$ implica che q deve essere un ciclo, perché non può passare attraverso lo stesso vertice due volte. Sia i il più piccolo intero positivo tale che $\alpha_i \neq \beta_i$. Allora si ha che $\alpha_i^* q_i^\infty = 0$ oppure $\beta_i^* q_i^\infty = 0$. Si supponga ad esempio che $\alpha_i^* q_i^\infty = 0$ (lo stesso procedimento si applica nell'altro caso): poiché q è un ciclo, anche $\alpha_i^* q_j^\infty = 0$ per ogni $j = 1, ..., n$ e quindi $\alpha_i^* N = 0$. Ma allora $0 = \alpha_i^* M \neq 0$, e ciò è assurdo. Dunque $\tilde{M}$ non può essere un modulo di Chen.

$\square$

Riferimenti bibliografici

[1] G.Abrams and T.G.Nam. Corners of leavitt path algebras of finite graphs are leavitt path algebras. *Journal of Algebra*, 547:494–518, 2020.

[2] M.Tomforde. Uniqueness theorems and ideal structure of leavitt path algebras. *Journal of Algebra*, 318:270–299, 2007.

[3] N.Jacobson. *Basic Algebra II, Second edition*. Dover Publications, Inc., Mineola, New York, 2009.

[4] K.M.Rangaswamy. The theory of prime ideals of leavitt path algebras over arbitrary graphs. *Journal of Algebra*, 375:73–96, 2013.

[5] G.Abrams, F.Mantese, and A.Tonolo. Extensions of simple modules over leavitt path algebras. *Journal of Algebra*, 431:78–106, 2015.

[6] J.L.Garcìa and J.J.Simòn. Morita equivalence for idempotent rings. *Journal of Pure and Applied Algebra*, 76:39–56, 1991.

[7] A.Alahmadi, H.Alsulami, S.K.Jain, and E.Zelmanov. Leavitt path algebras of finite gelfand-kirillov dimension. *Journal of Algebra and its applications*, 11(6):arXiv, 2012.

[8] G.Abrams, P.Ara, and M.S.Molina. *Leavitt path algebras*. Springer, 2017.

[9] P.Ara and E.Pardo. Stable rank of leavitt path algebras. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 136(7):arXiv, 2006.

[10] P.N.Anh and L.Màrki. Morita equivalence for rings without identity. *Tsukuba J.Math*, 11:1–16, 1987.

[11] P.Ara and K.M.Rangaswamy. Finitely presented simple modules over leavitt path algebras. *Journal of Algebra*, 417:333–352, 2014.

[12] P.Ara and M.Brustenga. Module theory over leavitt path algebras and k-theory. *Journal of Pure and Applied Algebra*, 214:1131–1151, 2010.

[13] P.N.Anh and T.G.Nam. Special irreducible representations of leavitt path algebras. *Advances in Mathematics*, 277:107483, 2021.

[14] A.Facchini. *Introduction to Ring and Module Theory*. Edizioni Libreria Progetto Padova, 2020.

[15] G.Abrams. Leavitt path algebras: the first decade. *Bulletin of Mathematical Sciences*, 5:59–120, 2015.

[16] M.M.Firrisa. Morita equivalence of graph and ultragraph leavitt path algebras. *arXiv*, 2006:06521, 2020.

[17] K.M.Rangaswamy. On simple modules over leavitt path algebras. *Journal of Algebra*, 423:239–258, 2015.

[18] G.Abrams, J.P.Bell, and K.M.Rangaswamy. On prime non-primitive von neumann regular algebras. *Transactions of the American Mathematical Society*, 366(5):arXiv, 2011.

[19] G.A.Pino, D.M.Barquero, C.M.Gonzàles, and M.S.Molina. Socle theory for leavitt path algebras of arbitrary graphs. *Revista Matematica Iberoamericana*, 26(2):arXiv, 2008.

[20] X.Chen. Irreducible representations of leavitt path algebras. *Forum Mathematicum*, 27:549–574, 2015.

[21] G.Abrams. *Minicourse on Leavitt path algebras.* University of Colorado. III Workshop on Dynamics, Numerations, Tilings and Graph Algebras, 2017.