

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA
DIPARTIMENTO DI SCIENZE STATISTICHE
CORSO DI LAUREA TRIENNALE IN
STATISTICA PER L'ECONOMIA E L'IMPRESA



RELAZIONE FINALE

**La previsione della volatilità nel settore energetico:
confronto tra modelli GAS, GARCH e GJR**

Relatrice Prof.ssa Luisa Bisaglia
Dipartimento di Scienze Statistiche

Laureanda Luna Piattella
Matricola 2013720

Anno Accademico 2022/2023

Indice

Introduzione	1
1 Fatti stilizzati	3
1.1 Prezzi <i>spot</i> e <i>futures</i> nel mercato energetico	3
1.2 Regolarità empiriche	4
2 Modelli ARCH e GARCH	9
2.1 Struttura del modello ARCH(q)	9
2.2 Struttura del modello GARCH(p,q)	10
2.2.1 Il modello GARCH(1,1)	11
2.2.2 Previsioni con un GARCH(1,1)	12
2.3 Estensioni asimmetriche del GARCH(p,q)	13
2.3.1 Modello GJR-GARCH	14
2.3.2 Modello EGARCH	15
2.3.3 Modello APARCH	16
3 Modelli GAS	17
3.1 Introduzione e specificazione dei processi GAS	17
3.2 Modelli GAS gaussiani	19
3.3 Modelli GAS t-Student	20
4 Dati e adattamento dei modelli	23
4.1 Analisi dei prezzi e dei rendimenti	23
4.2 Adattamento dei modelli	26
5 Previsione della volatilità	31
5.1 Criteri di valutazione previsivi	31
5.2 Confronto previsivo tra modelli nel settore energetico	33
Conclusioni	37
Appendice	43

Codice R	52
Bibliografia	65

Introduzione

La volatilità rappresenta una misura di fluttuazione dei rendimenti di uno strumento finanziario nel corso del tempo. In generale, al concetto di volatilità si fa corrispondere una misura statistica di variabilità: quella più immediata è la radice della varianza dei rendimenti. Nel contesto finanziario, una volatilità che cambia nel tempo è molto più frequente di una volatilità costante. Il lavoro di Engle (1982) ha aperto il campo ad un filone di letteratura molto ampio, che conta oltre mille articoli pubblicati, su modelli cosiddetti a eteroschedasticità condizionata per lo studio della varianza condizionata ad un certo insieme informativo.

I due principali approcci per catturare la dinamica della varianza sono i modelli autoregressivi eteroschedastici (ARCH) e i modelli a volatilità stocastica (i modelli SV considerano la volatilità come una variabile casuale governata da un processo stocastico); nella presente relazione l'attenzione si pone sul primo approccio. Si consulti Shephard (2005) per maggiori dettagli sulla volatilità stocastica. Introdotti da Bollerslev (1986), i modelli GARCH (Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity) sono una classe di modelli per serie storiche utilizzata per descrivere la volatilità condizionata degli assets finanziari. Essi costituiscono un'estensione dei processi ARCH (Autoregressive Conditional Heteroskedasticity), introdotti da Engle (1982). I modelli GARCH sono spesso utilizzati in finanza per modellare la variabilità dei rendimenti, in modo da gestire il rischio, l'incertezza e l'ottimizzazione del portafoglio. Le estensioni del GARCH, come l'EGARCH, l'APARCH e il GJR-GARCH, consentono di tener conto di eventuali asimmetrie in varianza e dell'effetto leverage, utili a catturare il comportamento dei mercati finanziari durante i periodi di alta volatilità. Sebbene i modelli GARCH abbiano una buona capacità di fornire stime accurate della volatilità dei rendimenti, le prestazioni si deteriorano quando questi modelli vengono utilizzati per ottenere previsioni fuori dal campione in presenza di eventi turbolenti. Creal et al. (2013) introducono, pertanto, una nuova classe di modelli denominata GAS (Generalized Autoregressive Score). La

novità dei modelli GAS è rappresentata dall'introduzione della funzione punteggio della densità condizionata nell'equazione della dinamica in varianza.

Nella prima parte della relazione verranno descritti nel dettaglio alcuni dei modelli sopracitati che, in seguito, verranno adattati alle serie dei rendimenti relativi a due materie prime fondamentali nel mercato energetico: il petrolio greggio e il gas naturale. I due beni citati sono tra i più frequentemente studiati utilizzando modelli di tipo GARCH. L'analisi riguarderà 6 serie temporali: 4 relative al petrolio e 2 al gas naturale così da poter osservare le differenze tra i due beni, tra i mercati di riferimento e tra i prezzi *spot* e *futures*. I residui o i criteri automatici sono strumenti utili per valutare la bontà di adattamento ai dati da parte dei modelli considerati. Tuttavia, in questa relazione, l'attenzione si pone principalmente su un confronto di tipo predittivo; si effettueranno previsioni statistiche utilizzando la metodologia delle *rolling windows* sulle serie relative al settore energetico in modo da valutare la capacità dei diversi modelli di prevedere la volatilità. Le previsioni verranno valutate mediante apposite metriche: RMSE (Root Mean Square Error), test Diebold Mariano, WR (Winning Ratio) e CSSFED (Cumulated Sum of Squared Forecast Error Differential).

Capitolo 1

Fatti stilizzati

1.1 Prezzi *spot* e *futures* nel mercato energetico

Il petrolio greggio e il gas naturale sono due importanti fonti di energia usate a livello globale. I tre principali *benchmark crude* (greggi di riferimento) sono i greggi europei estratti nel Mare del Nord (Brent, Forties, Oseberg, Ekofisk o BFOE), il greggio americano West Texas Intermediate (WTI) e i greggi del Golfo Arabico Dubai/Oman.

Il prezzo del Brent è utilizzato come riferimento per i prezzi di tutti i greggi scambiati nel continente europeo e buona parte di quelli destinati al nord dell'America e Asia. Il WTI ha un uso prevalentemente destinato al mercato statunitense e il suo sistema logistico interno causa facili distorsioni dei suoi prezzi rispetto a quelli vigenti sui mercati internazionali (Di Benedetto (2008)). Le Borse di riferimento per le contrattazioni dei prezzi del petrolio sono pertanto l'ICE (intercontinental Exchange) di Londra per il Brent e il NYMEX (New York Mercantile EXchange) di New York per il WTI. Le contrattazioni possono essere:

- *spot* (*deal* o *term* a seconda se ci si riferisce a una singola consegna nel breve periodo o una serie di consegne in un periodo predefinito di tempo) in cui tutti i dettagli sono noti (o al massimo posticipati negli *spot term*) e concernono un reale scambio fisico;
- *futures*, accordo con il quale una parte si impegna ad acquistare o vendere greggio con consegna futura, in uno specifico luogo e mese, secondo le quotazioni previste dalla borsa in cui avviene la transazione.

Per i contratti *futures* non esiste una relazione diretta tra le controparti. Gli scambi non sono effettuati direttamente tra i contraenti ma attraverso una istituzione indipendente

che assicura la corretta esecuzione dei contratti e svolge il compito di garante dal rischio insolvenza della controparte. Tale istituzione è la cosiddetta Clearing House (per il Brent questa funzione è assolta dalla ICE Clear Europe).

In linea di massima i prezzi *spot* incorporano le conoscenze degli operatori di mercato, non solo in relazione ai fattori che influiscono sul prezzo a pronti, ma anche per quelli che possono avere un impatto futuro. Se gli operatori di mercato stimano una crescita dei prezzi, il *futures* punta verso l'alto, ma traina anche i prezzi *spot*. Il prezzo *spot* dovrebbe tendere al valore dei *futures* decurtati i costi di gestione delle scorte; altrimenti ci sarebbe convenienza a comprare il greggio *spot*, vendere *futures* e pagare gli interessi sul capitale circolante immobilizzato per consegnare alla scadenza il bene e intascare la differenza positiva che rimane (arbitraggio che continuerebbe fino a quando lo *spot price* non raggiunge il prezzo *future* depurato degli oneri di stoccaggio).

Le contrattazioni del mercato del gas funzionano per lo più con i medesimi meccanismi osservati per il greggio. Tuttavia va precisato che il prezzo del gas viene negoziato al TTF (Title Transfer Facility) che è un mercato con sede in Olanda ed è considerato il più grande e principale mercato di negoziazione del gas naturale. Questa piattaforma permette la negoziazione tra operatori e trader ed il gas si scambia in euro per megawattora. L'indice è chiamato "Dutch TTF gas price". La negoziazione avviene sia *spot*, per quanto riguarda le consegne di gas a breve termine, che *future*, per i contratti con consegna a lungo termine. Al TTF è spesso attribuita natura di "virtual market place" in quanto il gas metano ivi scambiato viene poi consegnato in plurimi punti di "uscita" a differenza di un tipico mercato "fisico" come l'Henry Hub (hub di convergenza e distribuzione di gasdotti in Louisiana ed il cui prezzo diventa il *benchmark* per i contratti *futures* statunitensi).

I prezzi *spot* e *futures* del gas naturale fissati all'Henry Hub sono denominati in dollari USA per milioni di unità termiche britanniche e sono generalmente considerati il prezzo principale stabilito per il mercato nordamericano del gas naturale. Il gas naturale viene quotato sul mercato internazionale NYMEX.

1.2 Regolarità empiriche

Componenti come rischio, incertezza o mutamenti strutturali svolgono un ruolo importante e spesso decisivo all'interno del sistema economico. La volatilità rappresenta la manifestazione dell'incertezza nei mercati finanziari ed analiticamente si identifica nel concetto di (radice della) varianza condizionale ad un dato insieme informativo disponibile al tempo t .

Una caratteristica fondamentale della volatilità è la sua non diretta osservabilità. Ciò rende difficile valutare la capacità predittiva di un modello condizionatamente eteroschedastico. La soluzione proposta è l'utilizzo di una *proxy* della varianza; la *proxy* più usata è rappresentata dai quadrati dei rendimenti osservati scartati dalla loro media.

I modelli per serie finanziarie, vengono comunemente adattati utilizzando i rendimenti degli strumenti finanziari, anziché i loro prezzi; si usano rendimenti di tipo logaritmico, ottenuti come differenze prime dei logaritmi dei prezzi. Ciò semplifica l'analisi dei dati finanziari e consente l'applicazione di modelli più accurati e robusti per la previsione della volatilità.

Un mercato efficiente è un mercato in cui l'informazione viene istantaneamente e completamente inglobata nel prezzo corrente (Gallo et al. (2002), p.173). Un caso particolare di EMH (Efficient Markets Hypothesis) si ha qualora i prezzi seguano un processo di tipo random walk. L'ipotesi random walk prevede che i log prezzi siano definiti come segue

$$p_t = \mu + p_{t-1} + \epsilon_t \quad (1.1)$$

dove $p_t = \log(P_t)$, con P_t prezzo al tempo t . Si assume

$$r_t = \mu + \epsilon_t \quad (1.2)$$

$$r_t \sim i.d. \quad (1.3)$$

ovvero i rendimenti sono identicamente distribuiti ma non indipendenti. Il motivo è legato al momento secondo, cioè la varianza, in quanto essa cambia nel tempo. La distribuzione dei rendimenti di oggi dipende da ciò che si è osservato nel passato; i rendimenti, pertanto, presentano dinamica nelle varianze.

La Figura 1.1 mostra l'evoluzione dei prezzi e dei (log) rendimenti del greggio WTI futures dal gennaio 2010 al marzo 2023; dal grafico, si può osservare come momenti di forte instabilità siano seguiti da periodi più contenuti: le oscillazioni non sono costanti e si osserva dispersione. Un fenomeno che caratterizza le serie finanziarie è il *volatility clustering*: periodi di alta volatilità seguiti da periodi di bassa volatilità. Sono necessari, pertanto, dei modelli che tengano conto dei cambiamenti nel tempo in termini di varianza e che siano in grado, quindi, di catturare la volatilità.

L'ipotesi della varianza costante, pertanto, non è compatibile con le caratteristiche empiriche delle serie finanziarie; per questo motivo, i modelli presentati successivamente sono caratterizzati da un'equazione specifica per descrivere l'evoluzione della varianza condizionata σ_t^2 .

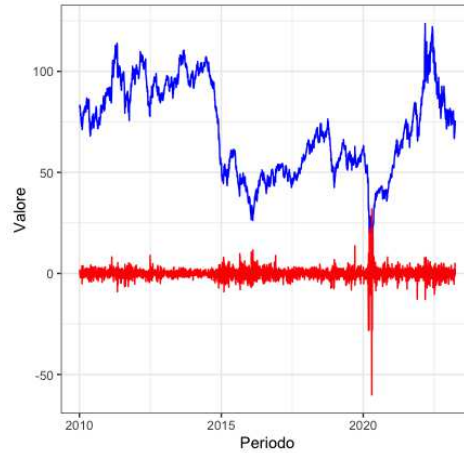


FIGURA 1.1: Serie storica dei prezzi (in blu) e rendimenti (in rosso) del WTI futures da gennaio 2010 a marzo 2023.

Di norma, si può osservare una distribuzione dei rendimenti leptocurtica. Le distribuzioni leptocurtiche hanno la particolarità di assegnare una maggiore probabilità ad eventi molto lontani dal valore medio della distribuzione rispetto alla probabilità che verrebbe assegnata da una distribuzione gaussiana; per questo motivo si parla di distribuzioni con code spesse. I test più comuni per valutare l'allontanamento dall'ipotesi di normalità sono il test di D'Agostino (Yap & Sim (2011)), il test JB di Jarque-Bera (Rana et al. (2021)) e il test di Kolmogorov-Smirnov (Berger & Zhou (2014)).

L'evidenza empirica sulle serie dei rendimenti suggerisce anche la presenza di comportamento asimmetrico in varianza e di effetto leverage (Carnero & Pérez (2019)); l'asimmetria in varianza indica un incremento della variabilità con intensità diversa a seconda del segno dello shock. L'effetto leverage si basa su un concetto più ampio: gli shock positivi riducono la varianza poiché il rischio diminuisce mentre gli shock negativi generano un aumento dell'incertezza, quindi della volatilità condizionata.

Un'altra caratteristica osservabile sui rendimenti azionari riguarda le funzioni di autocorrelazione globale (ACF) e parziale (PACF). I rendimenti sono generalmente incorrelati (o caratterizzati da una debole correlazione seriale economicamente irrilevante), mentre i quadrati e i valori assoluti dei rendimenti presentano correlazioni statisticamente ed economicamente significative. All'analisi grafica si possono affiancare dei test per valutare la presenza di eteroschedasticità nei dati. Il test LM-ARCH (Lagrange Multiplier test for Autoregressive Conditional Heteroskedasticity) è un test statistico utilizzato per verificare la presenza di eteroschedasticità condizionale in una serie storica (si consulti Scott Hacker & Hatemi-J* (2005)); si stima un modello autoregressivo

sui quadrati delle innovazioni definito come

$$\epsilon_t^2 = \gamma + \sum_{j=1}^q \alpha_j \epsilon_{t-j}^2 + u_t. \quad (1.4)$$

L'ipotesi nulla prevede che i coefficienti definiti in (1.4) siano congiuntamente pari a 0; il rifiuto di tale ipotesi comporta la presenza di eteroschedasticità nei dati. Il test viene utilizzato anche per valutare l'adeguatezza di un modello GARCH; se il modello è correttamente specificato ci si aspetta di accettare l'ipotesi nulla, secondo la quale il processo ha catturato tutta l'eteroschedasticità presente nei dati, altrimenti è necessario incrementare gli ordini del modello.

Un altro test comunemente usato per valutare la presenza di dinamica in varianza è il test Ljung-Box sui quadrati dei rendimenti in deviazione dalla media; ci si aspetta il rifiuto dell'ipotesi nulla e quindi la presenza di correlazioni significative tra gli ϵ_t^2 . La statistica test è definita come

$$Q(p) = T(T+2) \sum_{j=1}^p \frac{\hat{\rho}_j^2}{T-j} \sim \chi_p^2 \quad (1.5)$$

dove p indica il numero dei ritardi.

Risulta, perciò, sensato adattare un modello in grado di valutare la dinamica della volatilità presente nei dati. I modelli autoregressivi condizionatamente eteroschedastici (ARCH), introdotti da Engle (1982), gli ARCH generalizzati (GARCH), da Bollerslev (1986), e le estensioni asimmetriche dei GARCH sono stati sviluppati per catturare le seguenti caratteristiche osservabili sui rendimenti: distribuzioni a code spesse, *volatility clustering*, asimmetria ed effetto leverage.

I beni energetici sono estremamente volatili; ciò dipende da una serie di fattori, tra cui la domanda e l'offerta di energia, gli eventi geopolitici, le politiche governative, il cambiamento climatico e la tecnologia. Ad esempio, un aumento della domanda di energia o una riduzione dell'offerta possono portare a un aumento dei prezzi dell'energia e, di conseguenza, ad un aumento della volatilità.

Gli shock drastici sono molto comuni nei mercati energetici, si pensi ad esempio alla crisi finanziaria del 2008 (Charles & Darné (2017)), al Covid, alla guerra dei prezzi in Arabia Saudita del 2020, alla guerra Russia-Ucraina iniziata nel 2022. L'evento più recente che ha impattato bruscamente sui prezzi dei beni energetici è l'invasione russa in Ucraina nel febbraio 2022; la Russia è uno dei principali produttori ed esportatori di petrolio e gas naturale al mondo. Pertanto, tutti gli eventi che coinvolgono questa potenza possono influenzare i prezzi delle risorse a livello globale.

Gli eventi estremi che impattano sui prezzi, generano, quindi, forti instabilità e possono ridurre la capacità dei modelli della famiglia GARCH di effettuare previsioni fuori dal campione. Per questo motivo, è stato proposto un modello alternativo in grado di adattarsi alla presenza degli outliers, il modello GAS (Generalized Autoregressive Score), introdotto da Creal et al. (2013).

Capitolo 2

Modelli ARCH e GARCH

2.1 Struttura del modello ARCH(q)

La classe dei modelli ARCH (Autoregressive Conditional Heteroskedasticity) assume una particolare importanza soprattutto per il fatto che, per la prima volta, viene posta l'attenzione sulla distinzione tra momento secondo condizionale e non condizionale.

Engle (1982) elabora il primo modello di tipo ARCH, che prevede un nuovo metodo di analisi delle serie storiche basato sull'intuizione che la varianza condizionale sia in relazione con i valori da essa assunti nel passato.

La formulazione data da Engle per un ARCH(q) con q numero di parametri è la seguente

$$r_t = \mu + \epsilon_t \quad (2.1)$$

$$\epsilon_t | \mathcal{I}_{t-1} \sim \mathcal{D}(0, \sigma_t^2) \quad (2.2)$$

$$\sigma_t^2 = \gamma + \sum_{j=1}^q \alpha_j \epsilon_{t-j}^2 \quad (2.3)$$

dove q indica il numero dei ritardi. Gli errori condizionati all'insieme informativo hanno una certa distribuzione \mathcal{D} con media 0 e varianza σ_t^2 dipendente dal tempo. La varianza condizionata è funzione delle osservazioni precedenti. I vincoli posti sui coefficienti sono $\gamma > 0$, $\alpha_j \geq 0 \forall j = 1, \dots, q$; si tratta di vincoli di positività necessari per garantire la positività della varianza condizionata. Il processo ARCH è caratterizzato, pertanto, da media nulla, varianza costante e varianza condizionale che dipende, in modo lineare, dai quadrati delle innovazioni. Questo modello riesce a catturare la variabilità delle oscillazioni delle serie storiche dei rendimenti, quindi interpreta il fenomeno del *volatility clustering*.

L'applicazione empirica di modelli ARCH richiede spesso molti parametri per descrivere adeguatamente il processo di volatilità di un rendimento. Si è osservato che i valori di q necessari fossero tanti a causa della persistenza forte delle varianze; ciò comportava un'evidente complessità del modello. Per questo motivo, è stata proposta una soluzione alternativa al modello ARCH: il processo GARCH.

2.2 Struttura del modello GARCH(p,q)

Il termine GARCH, attribuito da Bollerslev (1986), sta per "Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity" e rappresenta una generalizzazione del modello ARCH. La novità, rispetto al modello di Engle (1982), è data dall'inserimento di una nuova componente nell'equazione della dinamica della varianza, detta componente GARCH o autoregressiva rispetto alla varianza condizionata. La varianza condizionata al tempo t è, quindi, una combinazione lineare di q residui ritardati al quadrato e di p ritardi della varianza condizionata.

Bollerslev (1986) introduce un modello che rappresenta un utile strumento per analizzare la persistenza dei movimenti della volatilità senza dover stimare l'alto numero di parametri presenti nell'equazione della varianza condizionata di un modello ARCH. L'equazione di un generico modello GARCH(p,q) specifica la varianza condizionale come segue

$$\sigma_t^2 = \gamma + \sum_{j=1}^q \alpha_j \epsilon_{t-j}^2 + \sum_{i=1}^p \beta_i \sigma_{t-i}^2 \quad (2.4)$$

dove $\gamma > 0$, $\alpha_j \geq 0$, $\beta_i \geq 0$.

La varianza al tempo t dipende da $(1+p+q)$ parametri dove p si riferisce all'ordine della parte autoregressiva e q alla componente ARCH. Un'altra condizione fondamentale sulla quale si basa il GARCH riguarda la varianza non condizionata; bisogna verificare che siano soddisfatte le condizioni di stazionarietà del modello in modo da ottenere una varianza non condizionata finita.

Condizione necessaria e sufficiente per la stazionarietà di un GARCH(p,q) è

$$\sum_{j=1}^q \alpha_j + \sum_{i=1}^p \beta_i < 1. \quad (2.5)$$

2.2.1 Il modello GARCH(1,1)

Il modello GARCH più semplice e più utilizzato è il GARCH(1,1) con $p = q = 1$. L'espressione della dinamica della varianza è data da

$$\sigma_t^2 = \gamma + \alpha \epsilon_{t-1}^2 + \beta \sigma_{t-1}^2. \quad (2.6)$$

Se $\alpha = \beta = 0$ il modello diventa omoschedastico, se $\alpha > 0$ e $\beta = 0$ il GARCH(1,1) diventa un ARCH(1); il caso con $\alpha = 0$ e $\beta > 0$ non può verificarsi.

Il modello GARCH(1,1) offre un buon equilibrio tra semplicità e capacità di catturare la varianza condizionale nei dati finanziari. Quando si sceglie un modello con un ordine superiore come un GARCH(2,1) o un GARCH(1,2), il modello diventa più complesso con un numero maggiore di parametri da stimare. Questo può portare a una maggiore varianza dell'errore di stima dei parametri. Inoltre, modelli con ordini superiori potrebbero non sempre migliorare significativamente la capacità di previsione rispetto a modelli più semplici.

La scelta dell'ordine del modello GARCH dipende, quindi, dalla natura dei dati, dalla loro volatilità e dalle esigenze specifiche dell'analisi.

Una rappresentazione alternativa del GARCH è il modello ARMA(max(p,q),p) dove la componente autoregressiva è data dal massimo tra p e q mentre la componente a media mobile è pari a p, cioè al numero di coefficienti beta nel processo GARCH; la rappresentazione ARMA è utile per cogliere un'altra caratteristica rilevante dei rendimenti: la correlazione seriale dei loro quadrati. Definita ν_t una differenza di martingala del tipo $\nu_t = \epsilon_t^2 - \sigma_t^2$, si può sostituire al posto della varianza condizionata questa uguaglianza in modo da ricavare il processo definito in un modo alternativo

$$\epsilon_t^2 = \gamma + (\alpha + \beta)\epsilon_{t-1}^2 + \nu_t - \beta\nu_{t-1} \quad (2.7)$$

in cui ϵ_t^2 è governato da un processo ARMA i cui ordini dipendono da quelli del GARCH. La rappresentazione ARMA di un GARCH(1,1) è un ARMA(1,1). Da questa forma, si può ottenere facilmente l'espressione della varianza non condizionata di un GARCH(1,1) definita come

$$\bar{\sigma}^2 = \frac{\gamma}{1 - \alpha - \beta}. \quad (2.8)$$

Nel caso $\alpha + \beta = 1$, si ottiene il processo IGARCH(1,1), cioè il GARCH integrato caratterizzato da un comportamento esplosivo nella varianza non condizionata dei rendimenti.

2.2.2 Previsioni con un GARCH(1,1)

Si consideri il GARCH(1,1) specificato come segue

$$r_t = \mu + \epsilon_t \quad (2.9)$$

$$\epsilon_t | \mathcal{I}_{t-1} \sim N(0, \sigma_t^2) \quad (2.10)$$

$$\sigma_t^2 = \gamma + \alpha \epsilon_{t-1}^2 + \beta \sigma_{t-1}^2 \quad (2.11)$$

Il rendimento atteso all'istante $t+1$, cioè $\mathbb{E}[r_{t+1} | \mathcal{I}_t]$, è circa 0; questo deriva dall'ipotesi di efficienza di mercato secondo la quale la miglior previsione per il rendimento futuro è la media non condizionata dei rendimenti (Gallo et al. (2002), p. 173); μ ha un valore molto piccolo tendenzialmente positivo nelle serie di lungo periodo. I rendimenti non sono caratterizzati da dinamica in media, ma presentano dinamica in varianza perciò, nell'ambito previsivo, si pone l'attenzione sulla previsione della volatilità dei rendimenti condizionatamente all'insieme informativo. Supponendo di avere a disposizione i dati da 1 a t la previsione con orizzonte temporale $h=1$ è :

$$\mathbb{E}[\sigma_{t+1}^2 | \mathcal{I}_t] = \gamma + \alpha \mathbb{E}[\epsilon_t^2 | \mathcal{I}_t] + \beta \mathbb{E}[\sigma_t^2 | \mathcal{I}_t] = \gamma + \alpha \epsilon_t^2 + \beta \sigma_t^2 = \sigma_{t+1}^2. \quad (2.12)$$

La prima previsione è nota date le informazioni contenute nell'insieme di dati; questa è una caratteristica di tutti i GARCH(p,q). Le previsioni per più passi in avanti sono funzioni delle previsioni precedenti. L'espressione della previsione della varianza con orizzonte h generico ha la seguente struttura :

$$\mathbb{E}[\sigma_{t+h}^2 | \mathcal{I}_t] = \gamma + \sum_{j=0}^{h-2} (\alpha + \beta)^j + (\alpha + \beta)^{h-1} \sigma_{t+1}^2, \quad (2.13)$$

per $h \rightarrow \infty$ le previsioni convergono alla varianza non condizionata dei rendimenti. Nel caso limite $(\alpha + \beta) = 1$ (non stazionarietà) le varianze previste divergono per $h \rightarrow \infty$.

Come alternativa alle previsioni dinamiche, si può usare un altro approccio predittivo, basato su finestre mobili; si tratta di previsioni statistiche. Esse sono effettuate per uno o più passi in avanti mediante finestra *rolling* o finestra *expanding*. La finestra di dati sulla quale si stimano i modelli può ampliarsi, quindi si parla di 'finestra *expanding*' o può avere un'ampiezza fissa 'finestra *rolling*'. Questo metodo predittivo è caratterizzato da 3 fasi principali: stima del modello, previsione uno o più passi in avanti, inserimento del nuovo dato; esse si ripetono in maniera ciclica fino ad ottenere il numero n di previsioni desiderate. Ad ogni passo, quindi, la finestra può ampliarsi di un'osservazione oppure

può traslare in avanti di un dato, a seconda del metodo che si preferisce; la fase di stima può ripetersi ad ogni nuova informazione inserita oppure dopo un certo numero di previsioni. Le previsioni con metodo *rolling* sono particolarmente utili in situazioni in cui le condizioni di mercato o altri fattori che influenzano la variabile di interesse possono cambiare rapidamente nel tempo. In questo modo, infatti, è possibile generare previsioni più accurate e tempestive che tengano conto di queste variazioni, in quanto l'aggiornamento del modello di previsione avviene costantemente all'arrivo di nuovi dati. Per valutare le previsioni effettuate, uno strumento generalmente utilizzato è l'RMSE, definito come la radice della media degli errori quadratici di previsione. Altri strumenti utili per valutare l'accuratezza previsiva verranno descritti nel capitolo 5 e utilizzati nelle serie finanziarie del petrolio greggio e del gas naturale.

2.3 Estensioni asimmetriche del GARCH(p,q)

La corretta specificazione della dinamica della varianza include il fatto che il modello debba essere in grado di catturare i fatti stilizzati delle serie finanziarie dei rendimenti. Un elemento fondamentale di cui il modello GARCH non tiene conto è l'asimmetria in varianza; i processi descritti precedentemente sono simmetrici poiché, nella definizione dell'equazione della dinamica in varianza, i rendimenti scartati dalla media sono al quadrato perciò non ha alcun effetto il segno di ϵ_{t-1} .

Sono stati proposti, perciò, dei modelli alternativi al GARCH standard capaci di cogliere anche l'asimmetria e l'effetto leverage delle serie finanziarie. Per valutare la presenza di asimmetria in varianza nei dati esistono diversi possibili approcci, i quali si basano sugli ϵ_t o sui residui standardizzati z_t , ottenuti adattando un modello GARCH(1,1). Il primo metodo è l'analisi delle correlazioni in cui vengono valutate le correlazioni tra ϵ_t^2 e ϵ_{t-1} condizionate al segno del rendimento; se le due correlazioni risultano diverse c'è asimmetria in varianza. Usando gli ϵ_t la valutazione avviene a priori prima della specificazione del modello, con i residui standardizzati, invece, la valutazione avviene dopo aver adattato un modello eteroschedastico.

Gli altri approcci più comunemente utilizzati per valutare l'asimmetria in varianza sono il Sign Bias Test, il Negative Size Bias Test, il Positive Size Bias Test e il test congiunto (ulteriori dettagli si possono trovare in Engle & Ng (1993)). Nel Sign Bias Test viene definito il seguente modello di regressione

$$\frac{\epsilon_t^2}{\sigma_t^2} = z_t^2 = \alpha + \beta D_{t-1}^- + u_t \quad (2.14)$$

dove $u_t \stackrel{d}{\sim} MDS$, z_t^2 è la serie dei residui standardizzati al quadrato e D_{t-1}^- è una variabile dummy che vale 1 se $\epsilon_{t-1} > 0$, 0 altrimenti. Se $\beta \neq 0$, l'impatto su z_t^2 è $\alpha + \beta$ nel caso di shock negativo, α nel caso di shock positivo. L'asimmetria, quindi, si manifesta se $\beta > 0$. Il Negative Size Bias Test è caratterizzato da un'equazione ausiliaria in cui si suppone che la volatilità sia influenzata non solo dal segno di ϵ_{t-1} , ma anche dalla sua dimensione. I quadrati dei residui sono definiti nel seguente modo

$$\frac{\epsilon_t^2}{\sigma_t^2} = z_t^2 = \alpha + \delta D_{t-1}^- \epsilon_{t-1} + u_t. \quad (2.15)$$

In questo caso l'effetto di asimmetria si manifesta se $\delta < 0$. Si può procedere come nel caso precedente e stimare i parametri di interesse utilizzando il metodo dei minimi quadrati per poi verificare l'ipotesi nulla $H_0 : \delta = 0$.

Il Positive Size Bias Test è analogo al caso precedente con l'unica modifica relativa alla dummy D che risulta complementare alla dummy che compare nel Negative Size Bias Test. Considerando le ipotesi dei test precedenti si ricava l'espressione del test congiunto

$$z_t^2 = \alpha + \beta D_{t-1}^- + \delta_1 D_{t-1}^- \epsilon_{t-1} + \delta_2 D_{t-1}^+ \epsilon_{t-1} + u_t. \quad (2.16)$$

L'ipotesi nulla di assenza di asimmetria in varianza diventa $H_0 : \beta = 0 \cup \delta_1 = 0 \cup \delta_2 = 0$. Di seguito, vengono specificati alcuni dei modelli della famiglia GARCH, che tengono conto di asimmetria in varianza e/o effetto leverage (Nelson (1991); Gallo et al. (2002) p. 290).

2.3.1 Modello GJR-GARCH

Il GJR-GARCH è un modello della famiglia GARCH che tiene conto del fenomeno dell'asimmetria in varianza.

Il generico GJR-GARCH(p,q) con risposta asimmetrica della volatilità è definito come

$$\epsilon_t | \mathcal{I}_{t-1} \sim \mathcal{D}(0, \sigma_t^2) \quad (2.17)$$

$$\sigma_t^2 = \gamma + \sum_{j=1}^q \alpha_j \epsilon_{t-j}^2 + \sum_{j=1}^q \delta_j D_{t-j}^- \epsilon_{t-j}^2 + \sum_{i=1}^p \beta_i \sigma_{t-i}^2 \quad (2.18)$$

dove $\gamma > 0$, $\alpha_j \geq 0$, $\beta_i \geq 0$ e $\delta_j \geq 0$.

D_{t-1}^- è una dummy che vale 1 quando l'innovazione è negativa, 0 altrimenti.

L'equazione della varianza del GJR-GARCH(1,1) è

$$\sigma_t^2 = \gamma + \alpha \epsilon_{t-1}^2 + \delta D_{t-1}^- \epsilon_{t-1}^2 + \beta \sigma_{t-1}^2. \quad (2.19)$$

I vincoli sui coefficienti sono analoghi al caso generico. Il GJR-GARCH ingloba l'asimmetria mediante il parametro δ . Se $\delta > 0$ esiste un effetto asimmetrico, se $\delta = 0$ si torna al GARCH(1,1) simmetrico. Le innovazioni positive hanno un impatto misurato da α , mentre gli shock negativi da $\alpha + \delta$; quindi, nel caso di rendimento negativo si avrà un incremento maggiore in termini di volatilità rispetto ad un shock positivo.

Di norma, si osservano valori di δ significativi e positivi: il modello GJR rappresenta ad oggi un *benchmark* per le serie storiche finanziarie. Esso è soggetto agli stessi di vincoli di positività sui parametri del GARCH standard in quanto deve garantire la positività della varianza condizionata. Il GJR-GARCH rappresenta uno dei vari modelli asimmetrici proposti per valutare l'eteroschedasticità dei dati. In questo elaborato, si sceglie il GJR-GARCH come modello asimmetrico di riferimento nelle serie del petrolio greggio e del gas naturale.

Un altro processo asimmetrico noto e comunemente utilizzato per catturare l'eteroschedasticità dei dati è il modello EGARCH, introdotto da Nelson (1991).

2.3.2 Modello EGARCH

Il processo EGARCH(p,q) è definito dalle seguenti equazioni

$$\epsilon_t = \exp\left(\frac{1}{2}h_t\right)z_t \quad (2.20)$$

$$h_t = \gamma + \sum_{j=1}^q \alpha_j g(z_{t-j}) + \sum_{i=1}^p \beta_i h_{t-i} \quad (2.21)$$

$$g(z_{t-j}) = \theta z_{t-j} + \delta(|z_{t-j}| - \mathbb{E}[|z_{t-j}|]) \quad (2.22)$$

dove si ha che $\mathbb{E}[g(z_{t-j})] = 0$, per garantire che $g(z_t)$ sia una MDS (differenza di martingala); δ misura l'effetto simmetrico dello shock sulla volatilità ed è tipicamente positivo, θ misura l'effetto con segno (asimmetrico) della volatilità.

Se $z_t \sim N(0, 1)$, allora $\mathbb{E}[|z_t|] = \sqrt{\frac{2}{\pi}}$. È importante osservare che l'equazione della dinamica in varianza è specificata in termini di logaritmo della varianza condizionata. Questo implica che non deve essere imposto alcun vincolo sui parametri perchè la trasformazione esponenziale garantisce la non negatività della varianza; inoltre, diventa particolarmente semplice introdurre variabili esogene nell'equazione della varianza condizionata.

Da questo punto di vista, il processo EGARCH risulta più flessibile rispetto ad un GARCH o un GJR.

Il modello EGARCH(1,1) nel caso condizionatamente gaussiano è specificato come

$$\epsilon_t | \mathcal{I}_{t-1} \sim N(0, \exp(h_t)) \quad (2.23)$$

$$h_t = \gamma^* + \beta h_{t-1} + \alpha^* \frac{|\epsilon_{t-1}|}{\sigma_{t-1}} + \theta^* \frac{\epsilon_{t-1}}{\sigma_{t-1}} \quad (2.24)$$

dove $\gamma^* = \gamma - \alpha^* \sqrt{\frac{2}{\pi}}$, $\alpha^* = \alpha\delta$, β , $\theta^* = \alpha\theta$ sono i parametri da stimare nel modello e non sono soggetti ad alcuna restrizione e $\sigma_t^2 = \exp(h_t)$.

L'effetto asimmetrico è evidenziato da $\theta^* \frac{\epsilon_{t-1}}{\sigma_{t-1}}$ dove ϵ_{t-1} compare con segno; quindi, se $\theta^* \neq 0$ si ha un impatto asimmetrico sulla volatilità. Ponendo $\alpha^* \frac{|\epsilon_{t-1}|}{\sigma_{t-1}} + \theta^* \frac{\epsilon_{t-1}}{\sigma_{t-1}} = g^*(z_t)$, l'equazione (2.24) diventa un autoregressivo di ordine 1, stazionario se $|\beta| < 1$. In un modello EGARCH(1,1), quindi, i coefficienti possono assumere anche valori negativi ma deve essere soddisfatta la condizione $|\beta| < 1$.

A partire dall'equazione specificata per h_t , si può esplicitare la varianza condizionata σ_t^2 come segue

$$\sigma_t^2 = \gamma^{**} (\sigma_{t-1}^2)^\beta \exp\left(\frac{\alpha^* |\epsilon_{t-1}| + \theta^* \epsilon_{t-1}}{\sigma_{t-1}}\right) \quad (2.25)$$

dove $\gamma^{**} = \exp(\gamma^*)$. Se $\epsilon_{t-1} > 0$ allora il numeratore diventa $(\alpha^* + \theta^*)\epsilon_{t-1}$ mentre se $\epsilon_{t-1} < 0$ si ha $(\theta^* - \alpha^*)\epsilon_{t-1}$, quindi se $\theta^* < 0$ e $\theta^* < \alpha^* < -\theta^*$ si ha il leverage dato che $(\alpha^* + \theta^*)$ e $(\theta^* - \alpha^*)$ sono entrambi negativi.

2.3.3 Modello APARCH

Un'altra regolarità empirica delle serie finanziarie è rappresentata dal fatto che le autocorrelazioni dei rendimenti in valore assoluto sono generalmente più forti di quelle dei rendimenti al quadrato. In generale si possono considerare le autocorrelazioni di $|r_t|^\delta$ e stimare δ dai dati piuttosto che imporre $\delta = 2$ come avviene nel modello GARCH. Il processo AP-GARCH(p,q), asymmetric power GARCH (Ding et al. (1993)), è specificato dalla seguente equazione dinamica

$$\sigma_t^\delta = \gamma + \sum_{j=1}^q \alpha_j (|\epsilon_{t-j}| - \rho_j \epsilon_{t-j})^\delta + \sum_{i=1}^p \beta_i \sigma_{t-i}^\delta \quad (2.26)$$

dove $\gamma > 0$, $\alpha_j \geq 0$, per $j=1,2,\dots,q$, $\beta_i \geq 0$ per $i=1,2,\dots,p$, $\rho_j \in (-1,1)$ per $j=1,2,\dots,q$ parametri di asimmetria e $\delta > 0$, parametro di potenza. La condizione di asimmetria corrisponde a $\rho \neq 0$ e la presenza di asimmetria richiede che $\rho > 0$. Il modello non ammette la presenza di leverage.

Capitolo 3

Modelli GAS

3.1 Introduzione e specificazione dei processi GAS

I modelli più comunemente utilizzati per fare previsione sulla volatilità delle serie finanziarie sono i modelli della famiglia GARCH; tuttavia, Creal et al. (2013) hanno proposto una nuova classe di modelli, guidati dalle osservazioni, denominata GAS (Generalized Autoregressive Score).

Eventi esterni riducono la capacità dei GARCH di prevedere la volatilità fuori campione; i modelli GARCH possono essere sensibili agli outliers, in quanto gli errori ritardati influenzano direttamente la stima della volatilità futura. Se sono presenti valori anomali nelle osservazioni passate, i GARCH possono produrre previsioni imprecise o instabili. I modelli GAS, d'altra parte, utilizzano una funzione di penalizzazione robusta che riduce l'influenza degli outliers sulla stima dei parametri, rendendoli più adatti ad affrontare fenomeni turbolenti. Il GAS, quindi, può gestire, in modo più appropriato, l'arrivo di valori anomali (Troster et al. (2019)).

I modelli GARCH sono caratterizzati da una buona performance in termini previsivi che, però, si deteriora nel caso di previsioni *out-of-sample*. I modelli GAS possono adattarsi in modo più flessibile ai cambiamenti nella struttura dei dati e catturare al meglio le fluttuazioni della volatilità. Tuttavia, è importante notare che l'accuratezza delle previsioni dipende anche dalla specifica del modello utilizzato (si veda Creal et al. (2013)) e dalla tipologia e dalla qualità dei dati disponibili.

I GAS sono una classe di modelli guidati dalle osservazioni. I modelli di serie storiche con parametri variabili nel tempo sono classificati in due categorie: modelli guidati dalle osservazioni e modelli guidati dai parametri (si veda Shephard (2005) per una discussione dettagliata). Il primo approccio è più popolare poiché i parametri sono perfettamente

prevedibili date le informazioni passate mentre nel secondo i parametri sono processi stocastici con una propria fonte di errore.

La novità dei processi GAS è l'introduzione della funzione punteggio (*score*) della densità condizionata dei rendimenti nell'equazione della volatilità; ridimensionando lo *score* in modo appropriato, è possibile, inoltre, recuperare modelli standard basati sulle osservazioni, come il modello GARCH standard. Il GAS, quindi, sfrutta l'intera struttura di densità dei rendimenti e non solo i momenti di ordine primo e secondo; ciò differenzia i GAS dagli altri processi guidati dalle osservazioni.

Il modello GAS può essere espresso come

$$y_t \sim p(y_t|f_t; \theta) \quad (3.1)$$

$$f_{t+1} = \omega + \sum_{i=1}^p A_i s_{t-i+1} + \sum_{j=1}^q B_j f_{t-j+1} \quad (3.2)$$

dove $\theta = (\omega, A_1, \dots, A_p, B_1, \dots, B_q)$ è il vettore dei parametri non noti e f_t rappresenta il parametro variabile nel tempo che caratterizza alcuni aspetti della distribuzione condizionata $p(y_t|f_t; \theta)$. La distribuzione condizionata potrebbe dipendere da variabili osservabili (covariate) che però si omettono per semplicità di notazione.

Il parametro variabile nel tempo dipende da una componente autoregressiva e da una componente legata alla derivata del logaritmo della distribuzione condizionata. I fattori sono guidati nel tempo dalla funzione punteggio scalata definita come segue

$$s_t = S_t \nabla_t \quad (3.3)$$

$$\nabla_t = \frac{d \log p(y_t|f_t; \theta)}{df_t} \quad (3.4)$$

dove S_t è una matrice di scala, pari all'inversa della matrice di informazione di Fisher nel caso $\gamma = 1$:

$$S_t = -\mathbb{E}_{t-1}[\nabla_t \nabla_t']^{-1} \quad (3.5)$$

Nella presente relazione, l'attenzione viene posta sui modelli con volatilità univariata dove il fattore variabile nel tempo, cioè f_t , determina la varianza o la log varianza della distribuzione condizionata. Assunta la media di y_t pari a 0 e la varianza condizionata al set informativo pari a σ_t^2 si considerano le seguenti riparametrizzazioni:

- $f_t = \sigma_t^2$
- $f_t = \log(\sigma_t^2)$.

Quando si ricavano i modelli GAS è più semplice derivare rispetto a σ_t^2 ; la funzione *score* rispetto a f_t è data da $\nabla_t = \frac{d \log p(y_t|f_t;\theta)}{d\sigma_t^2} \frac{d\sigma_t^2}{df_t}$. Con la riparametrizzazione $f_t = \log(\sigma_t^2)$ il secondo termine diventa $\frac{d\sigma_t^2}{df_t} = \exp(f_t)$; con la riparametrizzazione $f_t = \sigma_t^2$ il secondo termine diventa $\frac{d\sigma_t^2}{df_t} = 1$.

Nel paragrafo successivo si descrive, nel dettaglio, la struttura del modello GAS (Creal et al. (2013)) ipotizzando la distribuzione condizionata dei rendimenti; i due casi più comuni sono la distribuzione gaussiana e la distribuzione t-Student (si consulti Creal et al. (2013) per ulteriori formulazioni dei modelli GAS che includono anche l'effetto asimmetrico in varianza).

3.2 Modelli GAS gaussiani

Si assume che i rendimenti abbiano una distribuzione condizionata normale con log densità

$$\log(p(y_t|f_t;\theta)) = -\frac{1}{2} \log(2\pi) - \frac{1}{2} \log(\sigma_t^2) - \frac{1}{2} \frac{y_t^2}{\sigma_t^2}$$

dove σ_t^2 è la varianza condizionata di y_t (la media è assunta pari a 0).

Sono proposte, di seguito, le equazioni della dinamica in varianza nelle due diverse riparametrizzazioni viste precedentemente. Quando $f_t = \sigma_t^2$, lo score, l'inversa della matrice di informazione di Fisher e la varianza condizionata sono definite come segue

$$\nabla_t = -\frac{1}{2f_t} + \frac{y_t^2}{2f_t^2} \quad (3.6)$$

$$S_t = 2f_t^2 \quad (3.7)$$

$$\sigma_{t+1}^2 = \omega + A(y_t^2 - \sigma_t^2) + B\sigma_t^2 \quad (3.8)$$

Quando la densità condizionata ha una distribuzione normale e $f_t = \sigma_t^2$ il modello GAS(1,1) si riduce al modello GARCH(1,1) definito nell'equazione 2.6 con la seguente riparametrizzazione $\alpha = A, \beta = B - A$. Quando $f_t = \log(\sigma_t^2)$, le tre quantità risultano

$$\nabla_t = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{y_t^2}{\exp(f_t)} \quad (3.9)$$

$$S_t = 2 \quad (3.10)$$

$$\log(\sigma_{t+1}^2) = \omega + A \left(\frac{y_t^2}{\sigma_t^2} - 1 \right) + B \log(\sigma_t^2) \quad (3.11)$$

3.3 Modelli GAS t-Student

La presenza di code pesse nella distribuzione dei rendimenti rende la distribuzione t-Student un'ipotesi sicuramente più coerente e realistica da cui partire. Si assume, perciò, che y_t abbia una distribuzione t-Student condizionata con v gradi di libertà.

Quando $f_t = \sigma_t^2$ l'equazione della dinamica in varianza può essere scritta come

$$\sigma_{t+1}^2 = \omega + A \left[\frac{(v+3)}{v} \left(\left(1 + \frac{y_t^2}{v-2} \right)^{-1} \frac{(v+1)y_t^2}{v-2} - \sigma_t^2 \right) \right] + B\sigma_t^2. \quad (3.12)$$

Il modello specificato è notevolmente diverso da un modello GARCH con innovazioni t di Student, poichè se nel GARCH standard la varianza condizionata al tempo t dipende direttamente dagli shock ritardati e da una componente autoregressiva, nell'equazione del GAS lo *score* con distribuzione condizionata t-Student mitiga l'impatto dei valori elevati di y_t^2 sulla varianza futura grazie alla presenza dei quadrati degli errori ritardati nel denominatore dell'equazione. L'espressione che compare al denominatore, infatti, causa un aumento più moderato in varianza per una grande realizzazione di y_t (considerando un valore v dei gradi di libertà finito) rispetto a quello che si avrebbe con un GARCH; l'intuizione è chiara: se gli errori sono modellati da una distribuzione a code pesanti, una grande realizzazione assoluta di y_t non richiede un aumento sostanziale della varianza. Il meccanismo di aggiornamento dei parametri nel caso di un modello GAS con distribuzione t-Student è, perciò, differente da quello di un GARCH, in particolare nella gestione degli outliers.

Quando $f_t = \log(\sigma_t^2)$ l'equazione della dinamica in varianza è la seguente

$$\log(\sigma_{t+1}^2) = \omega + A \left[\frac{(v+3)}{v} \left(\left(1 + \frac{y_t^2}{(v-2)} \right)^{-1} \frac{(v+1)y_t^2}{(v-2)\sigma_t^2} - 1 \right) \right] + B \log(\sigma_t^2), \quad (3.13)$$

se i coefficienti A e B risultano non significativi si ha omoschedasticità nel processo, al contrario, se i parametri sono diversi da 0 è presente dinamica in varianza. Tendenzialmente i coefficienti risultano significativi con B alto, indice di un'elevata persistenza della volatilità. La stima dei parametri del modello GAS avviene utilizzando il metodo della massima verosimiglianza, i coefficienti definiti nel vettore θ sono stimati numericamente massimizzando la funzione di log-verosimiglianza (per maggiori dettagli si veda l'articolo di Creal et al. (2013)).

Il quadro dei GAS è molto diffuso nella modellazione delle distribuzioni marginali, ad esempio, delle materie prime energetiche e degli assets finanziari (Xu & Lien (2020)). Il modello GAS(1,1) con distribuzione t-Student viene preso come esempio rappresentativo

per i modelli GAS e viene adattato nelle serie finanziarie del petrolio greggio e del gas naturale descritte nel capitolo successivo.

Si noti che, come per gli EGARCH, non è necessario imporre vincoli di positività sui coefficienti se si modella il logaritmo della varianza, in quanto esso assume valori su tutto l'asse reale; questa caratteristica rappresenta un ulteriore punto di forza dei GAS rispetto ai GARCH.

Capitolo 4

Dati e adattamento dei modelli

4.1 Analisi dei prezzi e dei rendimenti

I dati utilizzati nella presente relazione sono i prezzi di chiusura giornalieri di due tra i principali beni energetici: il petrolio greggio e il gas naturale.

Si considerano i prezzi *spot* e *futures* del WTI e del Brent, per quanto riguarda il primo asset, i prezzi del gas naturale olandese TTF e del gas quotato sul NYMEX (New York Mercantile Exchange) per il secondo bene. In totale, il campione è caratterizzato da 6 serie. I dati sono stati scaricati dal sito *investing.com*. Si utilizzano i rendimenti logaritmici in punti percentuali, calcolati come differenza prima dei logaritmi dei prezzi moltiplicata per 100. Il periodo di campionamento per le serie finanziarie va dal 04/01/2010 al 31/03/2023, coprendo tutti i dati disponibili (il numero di osservazioni relativo ad ogni serie è riportato nella tabella 4.1). La Figura 4.1 mostra l'andamento

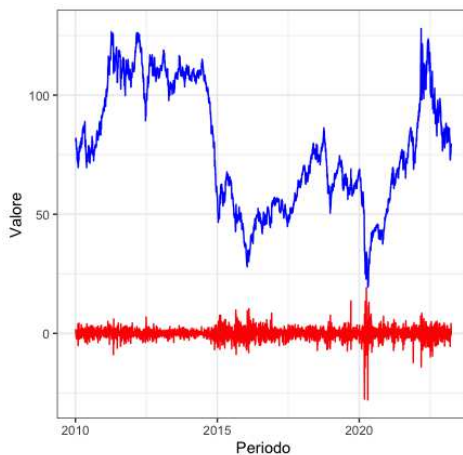


FIGURA 4.1: Serie storica dei prezzi e rendimenti del Brent futures da gennaio 2010 a marzo 2023.

dei prezzi (in blu) e dei rendimenti (in rosso) del petrolio greggio Brent futures; i prezzi sono caratterizzati da forti oscillazioni, e da due crolli nel 2014/2015 (crisi del petrolio) e nel 2020 (pandemia da COVID-19); i rendimenti oscillano intorno ad un valore medio prossimo allo 0 ed evidenziano la presenza di *volatility clustering*. I grafici delle altre serie sono riportati in Appendice. La Tabella 4.1 riporta le statistiche descrittive relative alle 6 serie dei rendimenti.

	Brent F.	Brent S.	WTI F.	WTI S.	gas naturale TTF	gas naturale NYMEX
Media	0.00	0.00	0.00	0.00	0.04	-0.03
Mediana	0.09	0.06	0.09	0.06	-0.04	-0.03
Max.	19.08	41.20	31.96	40.35	41.28	19.80
Min.	-27.98	-64.37	-60.17	-40.46	-35.24	-18.07
Curtosi	17.66	111.05	80.88	52.03	17.32	3.41
Asimmetria	-0.95	-2.94	-2.78	-1.09	0.55	0.01
Dev.std.	2.29	2.75	2.79	2.51	3.76	3.24
ADF	-12.0357	-11.3392	-12.7001	-11.9502	-11.4919	-11.8421
	(0.00)	(0.00)	(0.00)	(0.00)	(0.00)	(0.00)
J-B	45024	1729929	945947	413701	41989	1678
	(0.00)	(0.00)	(0.00)	(0.00)	(0.00)	(0.00)
Obs.	3421	3353	3450	3657	3343	3448

TABELLA 4.1: Statistiche descrittive per il petrolio greggio e per il gas naturale.

I valori medi e mediani sono tutti intorno allo 0. Le deviazioni standard dei rendimenti del gas naturale sono maggiori di quelle dei rendimenti del Brent e del WTI; ciò significa che i rendimenti del gas naturale sono più fluttuanti rispetto a quelli del greggio.

Si notano, in generale, curtosi elevata e asimmetria, indice di un allontanamento significativo dall'ipotesi di normalità. Tutti i rendimenti relativi al petrolio greggio presentano un'asimmetria negativa mentre quelli dei gas presentano un'asimmetria positiva. La curtosi assume valori molto distanti dallo 0, in particolare per il Brent spot e per il WTI futures in cui raggiunge valori estremamente alti. Il gas naturale olandese presenta curtosi nettamente più elevata del gas naturale NYMEX.

I test di Jarque-Bera rifiutano l'ipotesi di normalità. È evidente, anche graficamente, la non gaussianità dei rendimenti, in particolare sulle code, per la serie del Brent futures (Figura 4.2). Per le altre serie si vedano i grafici in Appendice (Figura A3). I risultati del test Augmented Dickey-Fuller (ADF) suggeriscono la stazionarietà delle serie dei rendimenti, rifiutando l'ipotesi nulla con un p-value minore di 0.01.

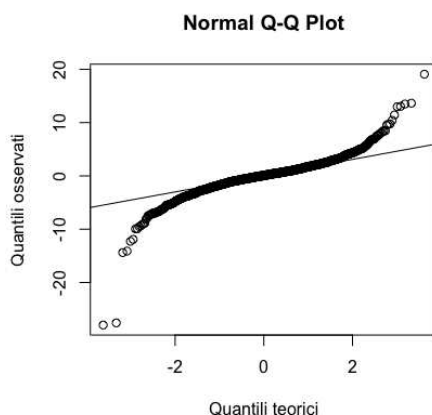


FIGURA 4.2: Brent futures: Normal Q-Q Plot.

In tutte le serie del greggio e del gas naturale, le funzioni di autocorrelazione globale e parziale mostrano la non stazionarietà dei prezzi in quanto i coefficienti di correlazione risultano estremamente elevati e decrescono lentamente e linearmente verso lo 0. Al contrario ACF e PACF relative alle serie dei rendimenti suggeriscono assenza di correlazione seriale poichè le correlazioni sono statisticamente significative solo per qualche ritardo con valori molto piccoli, e da un punto di vista economico sono totalmente irrilevanti.

Per verificare la presenza di eteroschedasticità nei dati, vengono valutate ACF e PACF anche sui quadrati dei rendimenti i quali costituiscono una *proxy* della varianza; i coefficienti di correlazione sono significativi e assumono valori elevati, indice di dinamica in varianza nei dati.

A questo punto si può procedere mediante un test per verificare l'ipotesi di eteroschedasticità; viene eseguito il test Ljung-Box a ritardi 5 e 10 usando gli ϵ_t^2 , i rendimenti scartati dalla loro media al quadrato. Sotto l'ipotesi nulla, le funzioni di autocorrelazione sono congiuntamente nulle fino a ritardo 5 o 10. Ci si aspetta un chiaro rifiuto di tale ipotesi in quanto si è osservato che le sequenze dei rendimenti presentano dinamica in varianza.

Nella Figura 4.3 sono riportate le funzioni di autocorrelazione dei prezzi, dei rendimenti e dei rendimenti quadratici per il Brent futures. È riportato anche il risultato del test Ljung-Box ai ritardi 5 e 10 per valutare la presenza di eteroschedasticità (Tabella 4.2). I risultati osservati per la serie del Brent valgono analogamente anche per il petrolio WTI e per i due gas (si vedano Figure A4, A5, A6, A7, A8 in Appendice). In generale, gli aspetti descritti fino ad ora sono osservabili nella maggior parte delle serie di carattere finanziario.

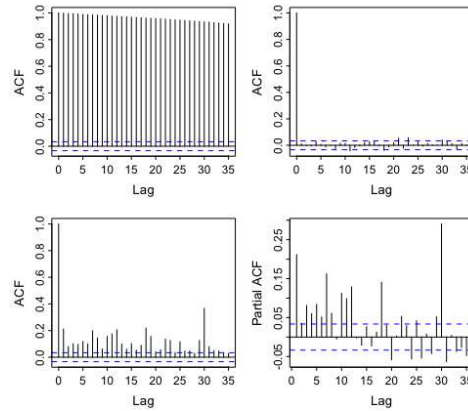


FIGURA 4.3: Brent futures: ACF sui prezzi (in alto a sinistra), ACF sui rendimenti (in alto a destra), ACF e PACF sui quadrati dei rendimenti (in basso).

X^2	df	pvalue
287.59	5	<2.e-16
622.63	10	<2.e-16

TABELLA 4.2: Test Ljung-Box per valutare l'eteroschedasticità sui rendimenti del Brent futures.

4.2 Adattamento dei modelli

In questo contesto, un modello appropriato è un modello caratterizzato da una corretta specificazione della dinamica nella varianza e da una distribuzione delle innovazioni coerente con i dati osservati.

Pertanto, si stimano i seguenti modelli GARCH(1,1), GJR-GARCH(1,1) e GAS(1,1) con distribuzione t-Student, scelta motivata dalle caratteristiche empiriche delle serie finanziarie. I modelli GARCH e GJR vengono adattati sfruttando le funzioni contenute nel pacchetto *rugarch* di R mentre il GAS utilizzando il pacchetto *GAS* di R. Si consultino Ardia et al. (2016) per la descrizione del pacchetto *GAS* e Ghalanos (2020) per il pacchetto *rugarch*.

Nelle analisi effettuate, il campione viene suddiviso in due parti: il periodo *in-sample* dal 4 gennaio 2010 al 31 dicembre 2020 e il periodo *out-of-sample* dal 1 gennaio 2021 al 31 marzo 2023. Il periodo fuori campione ha tra le 500 e le 600 osservazioni, a seconda del mercato di riferimento e della serie considerata. I modelli vengono adattati sui dati del campione *in sample* e poi viene usato il metodo della finestra *rolling* per fare

previsioni nel periodo fuori campione. I risultati relativi alle stime dei diversi modelli sono contenuti nelle Tabelle 4.3, 4.4, 4.6.

Per i modelli GARCH le stime delle medie condizionate non risultano significative. Per il WTI spot la media μ è significativa al 5% ma non all' 1%. Per quanto riguarda l'intercetta del modello, γ , è significativa in tutte le serie di rendimenti, esclusa quella relativa al gas naturale olandese. Il parametro v si riferisce alla stima dei gradi di libertà della distribuzione t-Student assunta per le innovazioni. I coefficienti relativi alla dinamica in varianza, α e β , sono rilevanti nei 6 casi di studio.

Questi risultati confermano il comportamento dinamico della volatilità nei mercati del greggio e del gas naturale. La condizione di stazionarietà $(\alpha + \beta) < 1$ del modello GARCH(1,1) è sempre soddisfatta.

Coefficienti	Brent F.	Brent S.	WTI F.	WTI S.	TTF gas	NYMEX gas
μ	0.040 (0.028)	0.030 (0.029)	0.045 (0.031)	0.065 (0.031)	-0.034 (0.025)	-0.055 (0.042)
γ	0.049 (0.018)	0.062 (0.017)	0.094 (0.034)	0.072 (0.025)	0.032 (0.020)	0.140 (0.046)
α	0.089 (0.013)	0.097 (0.012)	0.104 (0.016)	0.086 (0.016)	0.112 (0.020)	0.069 (0.012)
β	0.905 (0.014)	0.894 (0.011)	0.880 (0.019)	0.901 (0.016)	0.887 (0.022)	0.915 (0.014)
v	5.179 (0.531)	5.473 (0.593)	5.753 (0.689)	5.237 (0.626)	5.495 (0.574)	7.660 (1.158)

TABELLA 4.3: Stime dei coefficienti con i relativi standard errors (tra parentesi) dei modelli GARCH(1,1).

Per tener conto dell'asimmetria in varianza, di solito, si adatta direttamente un modello asimmetrico e poi si valuta la significatività del coefficiente legato all'asimmetria; una delle possibili estensioni asimmetriche dei modelli GARCH è il processo GJR-GARCH; l'equazione della dinamica in varianza ha la stessa forma di quella del GARCH standard con l'aggiunta di un coefficiente, δ , il quale attribuisce un peso maggiore alla varianza condizionata in presenza di un'innovazione negativa. In caso di shock positivo, l'impatto sulla varianza è dato da α , in caso di shock negativo da $\alpha + \delta$.

Nella Tabella 4.4 sono riportati i risultati del GJR-GARCH(1,1). La media condizionata non è significativa, il parametro δ è significativo nel caso del petrolio greggio, *spot* e *futures*, al contrario non lo è nelle due serie relative al gas naturale. Si consulti

l'articolo di Carnero & Pérez (2019) per ulteriori dettagli e analisi approfondite sulla significatività dell'asimmetria in varianza e dell'effetto leverage nel settore energetico.

Sembra, quindi, che non esistano volatilità asimmetriche per i *futures* sul gas naturale TTF e NYMEX. I rendimenti delle serie del gas naturale, quindi, non presentano asimmetria in varianza, pertanto, shock positivi e negativi non hanno impatti significativamente diversi sulla volatilità condizionata. Come ulteriore conferma, si possono effettuare i Sign Bias Test sul GARCH(1,1) che, effettivamente, portano ad accettare l'ipotesi nulla di assenza di asimmetria in varianza (la Tabella 4.5 riporta i risultati relativi al gas TTF).

Coefficienti	Brent F.	Brent S.	WTI F.	WTI S.	TTF gas	NYMEX gas
μ	0.020 (0.028)	0.013 (0.032)	0.020 (0.031)	0.046 (0.031)	-0.0379 (0.026)	-0.052 (0.042)
γ	0.044 (0.016)	0.062 (0.027)	0.080 (0.028)	0.055 (0.020)	0.031 (0.020)	0.140 (0.045)
α	0.030 (0.011)	0.045 (0.013)	0.031 (0.011)	0.007 (0.011)	0.092 (0.027)	0.072 (0.015)
δ	0.087 (0.017)	0.090 (0.020)	0.107 (0.019)	0.105 (0.021)	0.032 (0.024)	-0.009 (0.023)
β	0.916 (0.014)	0.898 (0.019)	0.897 (0.017)	0.927 (0.015)	0.891 (0.023)	0.916 (0.014)
ν	5.529 (0.609)	5.950 (0.763)	6.213 (0.803)	5.489 (0.744)	5.504 (0.589)	7.633 (1.152)

TABELLA 4.4: Stime dei coefficienti con i relativi standard errors (tra parentesi) dei modelli GJR-GARCH(1,1).

	t value	prob sig
Sign Bias test	0.502	0.616
Negative Size Bias test	1.261	0.207
Positive Size Bias test	0.299	0.765
Test congiunto	4.351	0.226

TABELLA 4.5: Sign Bias test sulla serie del gas naturale TTF.

L'ultimo modello che viene adattato è il GAS(1,1) con distribuzione t-Student. I

coefficienti d'interesse sono la media μ , l'intercetta ω , i gradi di libertà della t-Student indicati con v e, soprattutto, i due parametri A e B che descrivono la dinamica in varianza (si veda equazione (3.2)). La media μ condizionata risulta non significativa nella maggior parte delle serie, mentre i coefficienti A e B presenti nell'equazione della dinamica in varianza sono sempre ampiamente significativi. Un alto valore di B implica un'alta persistenza della volatilità. Pertanto, per tutti i rendimenti *spot* e *futures* del petrolio greggio e del gas naturale le volatilità sono altamente persistenti.

La significatività di A e B in tutte le serie analizzate suggerisce che i momenti secondi dei rendimenti di questi assets energetici siano effettivamente variabili nel tempo, coerentemente con i risultati ottenuti da studi precedenti, per esempio, Herrera et al. (2018).

Coefficienti	Brent F.	Brent S.	WTI F.	WTI S.	TTF gas	NYMEX gas
μ	0.042 (0.027)	0.027 (0.029)	0.043 (0.030)	0.067 (0.028)	-0.039 (0.024)	-0.049 (0.044)
ω	0.011 (0.004)	0.012 (0.004)	0.017 (0.005)	0.012 (0.004)	0.010 (0.004)	0.033 (0.009)
A	0.217 (0.025)	0.209 (0.022)	0.229 (0.025)	0.209 (0.023)	0.291 (0.033)	0.171 (0.020)
B	0.985 (0.004)	0.986 (0.004)	0.983 (0.004)	0.986 (0.004)	0.988 (0.004)	0.981 (0.005)
v	5.635	6.217	6.287	5.311	4.988	8.188

TABELLA 4.6: Stima dei coefficienti con i relativi standard errors (tra parentesi) dei modelli GAS(1,1).

Per valutare la bontà di adattamento ai dati, si possono confrontare i valori della log-verosimiglianza ottenuti adattando i modelli GARCH, GJR e GAS. I risultati sono riassunti nella Tabella 4.7 per tutte le serie analizzate. Sembra che il GJR-GARCH(1,1) si comporti meglio per le serie del petrolio greggio, mentre per il gas naturale il GAS(1,1) risulta il migliore nel catturare i movimenti nel campione.

Serie	GARCH	GJR	GAS
Brent F.	-5624.872	-5611.212	-5629.143
Brent S.	-5635.926	-5624.752	-5635.99
WTI F.	-5896.634	-5880.355	-5899.574
WTI S.	-6041.271	-6018.836	-6023.007
TTF gas	-6802.699	-6802.569	-6799.944
NYMEX gas	-5617.222	-5615.717	-5583.949

TABELLA 4.7: Log-verosimiglianza dei modelli. In grassetto i risultati migliori.

Tuttavia, è importante notare che la log-verosimiglianza da sola potrebbe non essere sufficiente per un confronto completo tra modelli. Altri criteri come l'AIC (Akaike Information Criterion) o il BIC (Bayesian Information Criterion) possono essere utilizzati per prendere in considerazione la complessità dei modelli e ottenere un confronto più equo.

La superiorità *in-sample* di un modello non garantisce una performance previsiva migliore fuori dal campione (Ghoddusi & Emamzadehfard (2017)); è necessario, quindi, valutare e confrontare i modelli anche da un altro punto di vista. Il capitolo successivo descrive le prestazioni dei modelli eteroschedastici nella previsione della volatilità fuori dal campione dei diversi beni energetici. Il confronto viene fatto sui tre modelli adattati: il GARCH standard(1,1), modello più noto e comune nella famiglia dei processi condizionatamente eteroschedastici, il GJR-GARCH(1,1), considerato come il *benchmark* per le serie storiche finanziarie e il modello GAS(1,1), in grado di gestire la presenza di outliers.

Capitolo 5

Previsione della volatilità

5.1 Criteri di valutazione previsivi

Le prestazioni previsionive dei modelli GARCH, GJR e GAS vengono valutate sulla base di quattro diversi strumenti che offrono prove empiriche su quale modello abbia una migliore capacità di previsione della volatilità condizionata.

Si analizza l'accuratezza delle previsioni a 1, 5, 20 e 60 passi avanti utilizzando uno schema *rolling* con una finestra mobile di dimensioni fisse. Sulla base di previsioni *multistep-ahead*, si valutano le performance in un periodo fuori dal campione. Il primo strumento per calcolare le previsioni è la radice dell'errore quadratico medio (RMSE). Esso è calcolato nel seguente modo

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n (V_t - \hat{V}_t)^2} \quad (5.1)$$

dove n indica il numero di previsioni, V_t è la varianza osservata, approssimata dai quadrati dei rendimenti seguendo l'approccio di Chun et al. (2019), e \hat{V}_t indica la varianza prevista.

La seconda metrica è il Winning Ratio (WR), che misura la superiorità di ciascun modello nel prevedere la volatilità tra i modelli candidati; il WR di previsione è dato dal rapporto tra il numero di casi in cui l'errore assoluto di previsione di un modello risulta inferiore a quello dei modelli rimanenti e il numero di previsioni complessive.

La differenza tra RMSE e WR consiste nella penalizzazione della distanza poiché se l'RMSE penalizza la distanza tramite una funzione quadratica, il WR può essere considerato una funzione di penalizzazione costante in quanto l'intensità dell'errore di previsione non influisce sulla valutazione del modello migliore; i casi che presentano un

errore minore rispetto agli altri modelli entrano nel calcolo del WR allo stesso modo dei casi caratterizzati da errori previsivi più ampi. Un valore di WR superiore a 0.5 indica che il modello in questione produce previsioni più accurate in più della metà dei casi. L'approccio previsivo con il Winning Ratio può essere considerato come una forma estrema di misura dell'accuratezza con una funzione di penalizzazione costante. Ne deriva che un RMSE minore non garantisce un WR maggiore (Chun et al. (2019)).

Il terzo strumento è il test di Diebold Mariano (DM test; Diebold & Mariano (2002)) cioè il test di uguale performance predittiva tra due modelli; l'ipotesi nulla del test presuppone la parità di accuratezza previsiva tra i modelli. In altre parole, la statistica DM verifica se un processo sia superiore o inferiore ad un suo concorrente in termini di funzione di perdita. Vengono eseguiti test mutipli in modo da poter classificare più modelli secondo un ordine che dipende esclusivamente dalla capacità predittiva di questi (Herrera et al. (2018)). Solitamente si utilizza una funzione di perdita quadratica, cioè l'errore quadratico calcolato a partire dalla varianza prevista e dalla varianza osservata (una sua *proxy*). Dati due modelli A e B e indicate le rispettive funzioni di perdita come L_j^a e L_j^b , l'ipotesi nulla ha la seguente forma

$$H_0 : \mathbb{E} [L_j^a] = \mathbb{E} [L_j^b] .$$

La statistica test utilizzata per verificare H_0 è

$$\bar{d} \left(\sqrt{\frac{1}{M} \sigma(\bar{d})} \right)^{-1} \quad (5.2)$$

con distribuzione approssimativamente $\mathcal{N}(0, 1)$ e

$$\bar{d} = \frac{1}{M} \sum_{j=T+1}^{T+M} (L_j^a - L_j^b). \quad (5.3)$$

L'ultima metrica che viene introdotta e utilizzata è la somma cumulata delle differenze tra gli errori al quadrato dei due modelli M1 e M2 (CSSFED), utile per monitorare l'evoluzione della performance predittiva nel corso del tempo (Silverstovs (2017)). Il CSSFED è vantaggioso poiché un modello può mostrare una migliore accuratezza durante un determinato periodo rispetto ai suoi concorrenti e, al contrario, peggiorare in un altro momento. L'espressione del CSSFED è

$$CSSFED_{t_0, t_1} = \sum_{t=t_0}^{t_1} \left[(V_t - \hat{V}_{M1,t})^2 - (V_t - \hat{V}_{M2,t})^2 \right]. \quad (5.4)$$

A differenza dell'RMSE, rappresentato da uno scalare, il CSSFED è una serie temporale in grado di valutare se la superiorità di un modello sia generata da un continuo miglioramento della sua capacità maturata nel tempo. Il CSSFED spiega la discrepanza tra i risultati di RMSE e WR e supporta l'ipotesi che il GAS superi i modelli della classe GARCH in presenza di eventi estremi che riducono l'abilità di quest'ultimi di prevedere in maniera accurata la volatilità.

5.2 Confronto previsivo tra modelli nel settore energetico

Le previsioni sono effettuate per il periodo fuori dal campione compreso tra la prima data disponibile di gennaio 2021 e l'ultima di marzo 2023.

Ad ogni passo si sposta la finestra mobile di un'osservazione in avanti, si ristima il modello e si fanno previsioni fino a 60 passi avanti. Dopo aver effettuato le previsioni sull'intero periodo, viene costruita una matrice con gli errori di previsione a 1, 5, 20 e 60 passi avanti. Vengono calcolate le metriche descritte nel paragrafo 5.1 e si valuta quale tra i modelli proposti sia il migliore (da verificare se in maniera significativa o meno) da un punto di vista previsivo, tenendo conto dell'impatto del tipo di prezzo considerato, *spot* o *futures*, dell'asset energetico esaminato e del mercato di riferimento.

I risultati della tabella 5.1, ottenuti calcolando l'errore quadratico medio, mostrano che, per la previsione ad un passo avanti, il modello GAS produce un RMSE minore rispetto ai modelli GARCH e GJR-GARCH per 4 serie su 6. Per quanto riguarda le previsioni a 5 passi avanti il GAS mostra abilità previsive migliori rispetto ai suoi concorrenti nelle serie dei rendimenti del petrolio greggio e del gas olandese TTF, ad eccezione del gas NYMEX in cui il GARCH risulta la scelta vincente. La situazione è analoga anche per le previsioni con orizzonte 20.

Tuttavia, per le previsioni a 60 passi avanti, sembra che il vantaggio dei GAS si attenui in quanto solo la serie del gas olandese TTF è caratterizzata da un errore quadratico medio minore nel caso di adattamento con un modello GAS rispetto ai modelli alternativi della famiglia GARCH. La conclusione derivante dall'analisi effettuata mediante RMSE è chiara: la performance complessiva del GAS sembra essere migliore di quella dei modelli GARCH e GJR-GARCH; il quadro GAS, pertanto, supera i modelli GARCH, in particolare negli orizzonti 1, 5, 20. Il modello più performante, quindi, cambia a seconda dell'orizzonte previsivo che viene valutato.

Dal punto di vista dei diversi beni energetici, il petrolio greggio sembra essere meglio

previsto dal modello GAS, mentre per gli assets relativi al gas naturale il criterio RMSE valuta il GARCH meglio del GAS e del GJR a 1 passo avanti per il TTF gas e a 5 e 60 passi avanti per il NYMEX. In quest'ultima serie il GJR risulta il modello preferibile a 20 passi avanti. Confrontando, inoltre, la differenza tra prezzi *spot* e *futures*, ad esempio per la serie del Brent, non sono evidenti differenze significative in termini di accuratezza previsiva poichè entrambe le serie portano a preferire il GAS almeno per i passi 1, 5, 20.

h	Modello	Brent F.	WTI F.	Brent S.	WTI S.	TTF gas	NYMEX gas
1	GAS	14.686	14.468	14.552	13.282	127.905	35.509
	GARCH	14.798	14.470	14.635	13.219	125.143	35.592
	GJR	15.034	14.739	14.910	13.558	125.393	35.511
5	GAS	14.803	14.536	14.583	13.376	131.598	36.100
	GARCH	14.960	14.558	14.698	13.409	133.883	35.796
	GJR	15.177	14.826	14.958	13.647	133.899	35.873
20	GAS	15.255	15.070	15.184	13.768	135.671	38.188
	GARCH	15.678	15.212	15.462	13.978	144.500	36.659
	GJR	15.707	15.309	15.531	14.059	144.457	36.655
60	GAS	15.178	15.202	14.925	13.906	138.726	42.735
	GARCH	15.245	14.718	14.763	13.798	145.822	39.170
	GJR	15.050	14.721	14.631	13.779	145.843	39.196

TABELLA 5.1: RMSE 1, 5, 20, 60 passi in avanti. In grassetto i risultati migliori.

Nella tabella 5.2 sono riportati i risultati ottenuti valutando le previsioni della volatilità con la metrica del Winning Ratio (WR); per le previsioni con orizzonte temporale 1 passo avanti il GAS mostra una superiorità rispetto ai due modelli della famiglia GARCH nelle serie relative al gas naturale, mentre nel caso del petrolio greggio il modello GJR sembra essere il migliore. Il WR calcolato sulle previsioni 5 passi avanti raggiunge un valore superiore usando un modello GAS per 4 serie su 6, mentre per il WTI *spot* e *futures* il GJR è la scelta più adeguata. Per le previsioni 20 e 60 passi avanti il GAS mostra un'evidente superiorità per entrambi i beni energetici valutati.

h	Modello	Brent F.	WTI F.	Brent S.	WTI S.	TTF gas	NYMEX gas
1	GAS	0.375	0.286	0.345	0.283	0.411	0.478
	GARCH	0.195	0.236	0.192	0.272	0.232	0.207
	GJR	0.430	0.478	0.463	0.445	0.357	0.315
5	GAS	0.464	0.398	0.364	0.390	0.610	0.660
	GARCH	0.182	0.180	0.139	0.206	0.150	0.174
	GJR	0.354	0.422	0.312	0.404	0.240	0.166
20	GAS	0.640	0.684	0.686	0.633	0.655	0.603
	GARCH	0.230	0.236	0.233	0.222	0.230	0.210
	GJR	0.130	0.080	0.080	0.145	0.115	0.187
60	GAS	0.659	0.628	0.651	0.671	0.582	0.509
	GARCH	0.274	0.283	0.261	0.256	0.253	0.313
	GJR	0.067	0.089	0.088	0.073	0.165	0.178

TABELLA 5.2: WR 1, 5, 20, 60 passi in avanti. In grassetto i risultati migliori.

La tabella 5.3 classifica i modelli GAS, GARCH e GJR sulla base dell'errore quadratico medio; dopo aver eseguito il test di Diebold Mariano per tutte le coppie di modelli, si procede costruendo un ordinamento dove con 1 si identifica il modello con miglior capacità predittiva, con 2 il modello subottimale e con 3 quello con la performance peggiore. Per le previsioni a 1 passo avanti, il modello GAS si classifica al primo posto per 4 serie su 6, con una differenza statisticamente non significativa rispetto al secondo modello. Tra i tre modelli analizzati, il GJR sembra essere quello meno adatto in ambito previsivo per effettuare previsioni 1 passo avanti.

I risultati delle previsioni a 5 passi forniscono un maggiore sostegno al GAS. Il modello GAS si classifica al primo posto su 5 serie su 6, anche qui in modo non significativamente diverso dal GARCH. Per le previsioni a 20 passi avanti il GAS mostra un'abilità previsiva significativamente migliore dei suoi avversari.

La capacità previsiva del GAS peggiora nelle previsioni 60 passi avanti, in quanto esso risulta il modello migliore solo in una serie (gas TTF) e si classifica ultimo nelle restanti serie (ad eccezione del Brent futures in cui si colloca in seconda posizione).

h	Modello	Brent F.	WTI F.	Brent S.	WTI S.	TTF gas	NYMEX gas
1	GAS	1	1	1	2	3	1
	GARCH	2	2	2#	1	1	3
	GJR	3	3	3	3	2	2
5	GAS	1	1	1	1	1	3
	GARCH	2	2	2#	2	2	1
	GJR	3	3	3	3	3	2
20	GAS	1#	1	1#	#1	1#	3
	GARCH	2	2#	2	2	3	2#
	GJR	3	3	3	3	2	1
60	GAS	2	3	3	3	1#	3
	GARCH	3	1	2	2	2	1
	GJR	1	2#	1	1	3	2#

TABELLA 5.3: Confronto tra modelli mediante test DIEBOLD-MARIANO.

Nota: I numeri nella tabella denotano la posizione del modello sulla base della capacità previsiva. 1# significa che il modello è il migliore con previsioni statisticamente più accurate del secondo e terzo modello. 2# significa che il secondo modello ha una capacità previsiva significativamente migliore del terzo modello.

L'ultima metrica è il CSSFED che mostra, graficamente, l'evoluzione della performance previsiva di un modello rispetto ad un altro.

Piccoli ma costanti guadagni nell'accuratezza predittiva di un modello rispetto ad un suo avversario si traducono in un andamento regolare del CSSFED, mentre grandi guadagni si riflettono in bruschi salti nel CSSFED tracciato. In quest'ultimo caso, si possono distinguere periodi in cui entrambi i modelli hanno mostrato una capacità di previsione simile e periodi in cui un modello ha generato previsioni molto più accurate di un altro. La capacità di distinguere tra questi due tipi di periodi è importante per chi si occupa di previsioni, perché consente di analizzare le prestazioni relative dei modelli osservando i dati nel tempo.

Una tendenza al rialzo del CSSFED significa che il primo modello della coppia produce errori di previsione più elevati.

Sono riportati i grafici relativi al petrolio greggio Brent futures e al gas naturale olandese TTF ad 1, 5, 20 e 60 passi avanti (si consulti l'Appendice per i grafici del CSSFED del Brent spot, WTI futures, WTI spot, gas NYMEX). La Figura 5.1 mostra l'andamento del CSSFED tra GAS-GJR (in verde), GAS-GARCH (in blu) e GARCH-GJR (in rosso) nel caso di previsioni 1, 5, 20 e 60 passi avanti per la serie del Brent futures. Prima del 2022, il CSSFED 1 passo avanti di GAS-GJR e di GAS-GARCH si mantiene

positivo e aumenta leggermente nel corso del 2021, a partire dal 2022 il CSSFED passa da positivo a negativo in modo piuttosto brusco; ciò è dovuto alle conseguenze che la guerra tra Russia e Ucraina ha portato sui prezzi del petrolio greggio e del gas naturale. Prima di questo evento, i modelli GARCH sembrano esercitare una superiorità sul modello GAS, la quale, però, si deteriora in presenza di fatti straordinari che impattano sui mercati finanziari. Il GAS, in grado di gestire in modo migliore gli outliers, in queste circostanze, mostra vantaggi rispetto ai suoi concorrenti. Considerando un orizzonte previsivo di 5 o 20 passi avanti, i risultati sono molto simili al caso appena descritto.

La situazione cambia quando si valuta un orizzonte previsivo più ampio, di 60 passi avanti, in quanto il vantaggio del modello GAS si indebolisce visibilmente; la Figura 5.1, con orizzonte 60 passi, mostra un andamento del CSSFED tra le coppie di modelli piuttosto altalenante, passando da periodi in cui sembra che il GAS funzioni meglio ad altri in cui GARCH e GJR mostrano una capacità di previsione più accurata. Le conclusioni sul CSSFED del Brent spot e del WTI sono simili a quelle appena viste sulla serie del Brent futures (si vedano Figure A9, A10, A11 in Appendice).

Per il gas naturale TTF si può notare (Figura 5.2) come, dal 2022, i modelli GARCH e GJR risultino più performanti 1 passo avanti rispetto al GAS, al contrario di quanto osservato nell'esempio precedente; ciò spiega la discrepanza tra i risultati ottenuti con l'RMSE e quelli derivanti dal WR, in quanto se, in un primo momento, sembra che il GAS sia più accurato, da un certo periodo in poi i modelli della famiglia GARCH iniziano ad accumulare importanti vantaggi previsivi.

Per le previsioni con orizzonte maggiore di 1 passo, invece, il CSSFED passa da positivo a negativo mostrando un forte vantaggio per il GAS; i risultati sono coerenti con quanto detto fino ad ora: in presenza di eventi estremi, la capacità del GAS è superiore in quanto si riescono a gestire gli outliers, pertanto, le previsioni risultano più accurate di quelle ottenute con i modelli della famiglia GARCH.

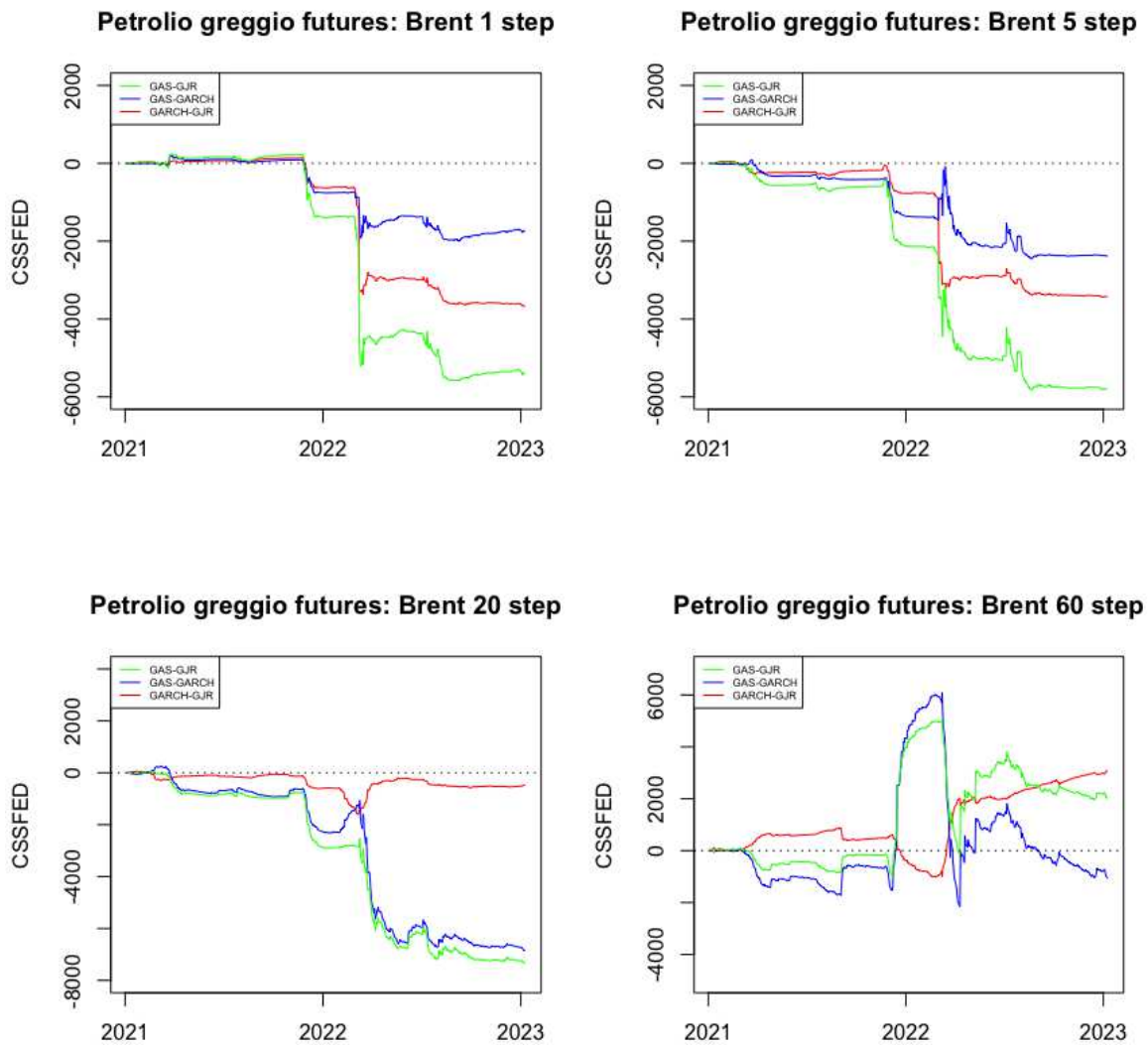


FIGURA 5.1: CSSFED per il Brent futures.

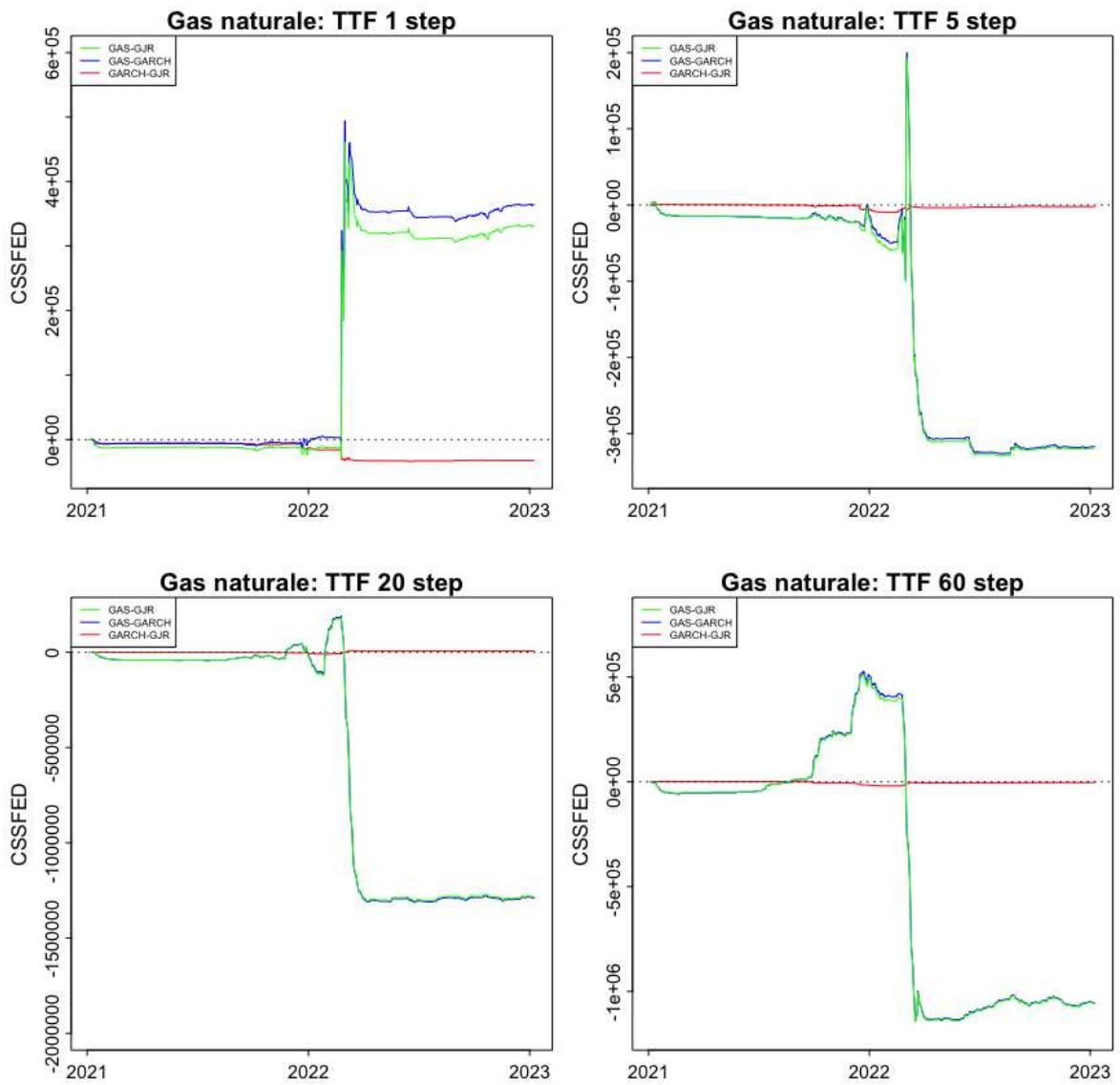


FIGURA 5.2: CSSFED per il gas naturale TTF.

Conclusioni

Questa relazione offre un'ampia indagine empirica sulla performance di previsione della volatilità nei modelli GARCH, GJR e GAS per 6 serie di rendimenti nel settore energetico ad orizzonti multipli. La lista delle materie prime considerate include il petrolio greggio *spot* e *futures* e il gas naturale scambiati nei mercati di riferimento. La capacità previsiva fuori dal campione è stata valutata mediante 4 metriche, RMSE, WR, test DM e CSSFED.

Le analisi empiriche indicano il GAS come il modello più performante nelle previsioni della volatilità del petrolio greggio in presenza di eventi turbolenti. Per quanto riguarda il mercato del gas naturale, il modello GAS non mostra vantaggi evidenti rispetto ai modelli GARCH e GJR; il CSSFED del GAS-GARCH e del GAS-GJR per il NYMEX è positivo per la maggior parte del periodo fuori dal campione, mostrando, quindi, una superiorità dei modelli GARCH e GJR in questo mercato; coerentemente con i risultati del test DM, il GAS ha un vantaggio rispetto ai suoi concorrenti solo per le previsioni un passo in avanti (si veda Figura A12 in Appendice). Per i futures del GAS naturale TTF, nelle previsioni 5, 20 e 60 passi in avanti, il modello GAS accumula un evidente vantaggio dai primi mesi del 2022 mostrando come esso sia in grado di catturare gli outliers e di gestire, quindi, i fenomeni turbolenti. La capacità previsiva del modello GAS nel caso del gas naturale, pertanto, dipende dal mercato di riferimento e dall'orizzonte previsivo valutato.

In generale, il GAS può essere considerato appropriato nel prevedere la volatilità dei rendimenti degli assets energetici, in particolare per il petrolio greggio e per le previsioni a breve termine (fino ad un mese).

Appendice

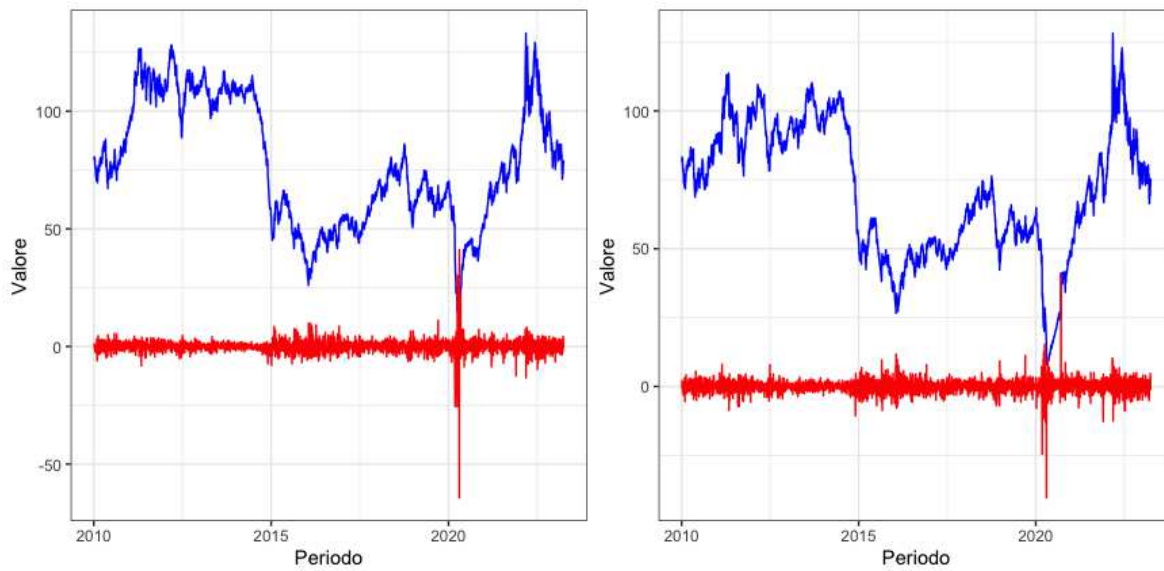


FIGURA A1: Prezzi e rendimenti del Brent spot (a sinistra) e del WTI spot (a destra).

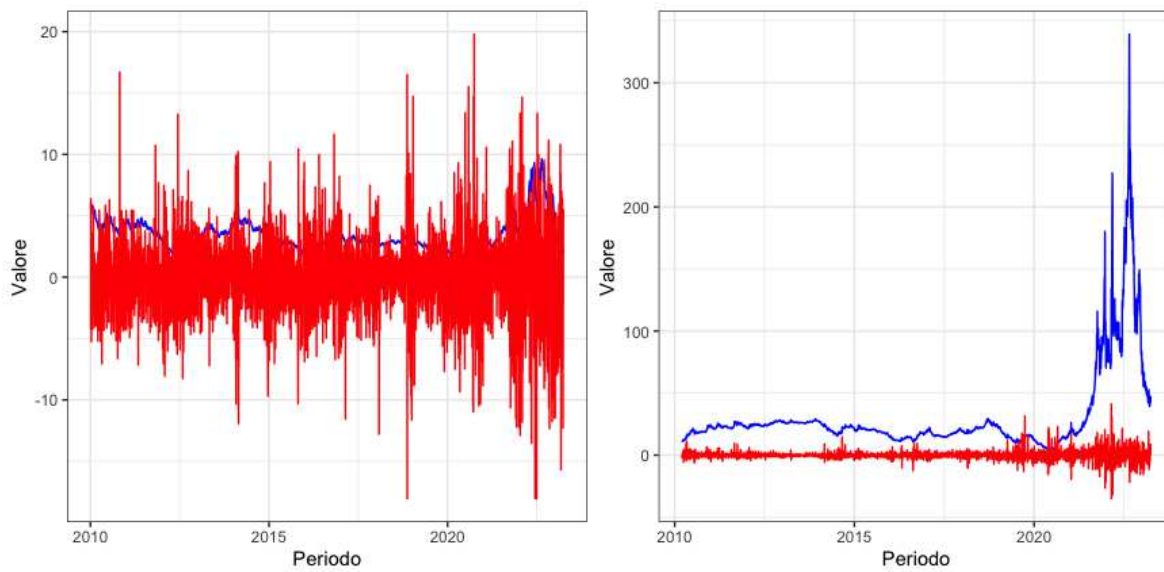


FIGURA A2: Prezzi e rendimenti del gas naturale NYMEX (a sinistra) e del gas naturale TTF (a destra).

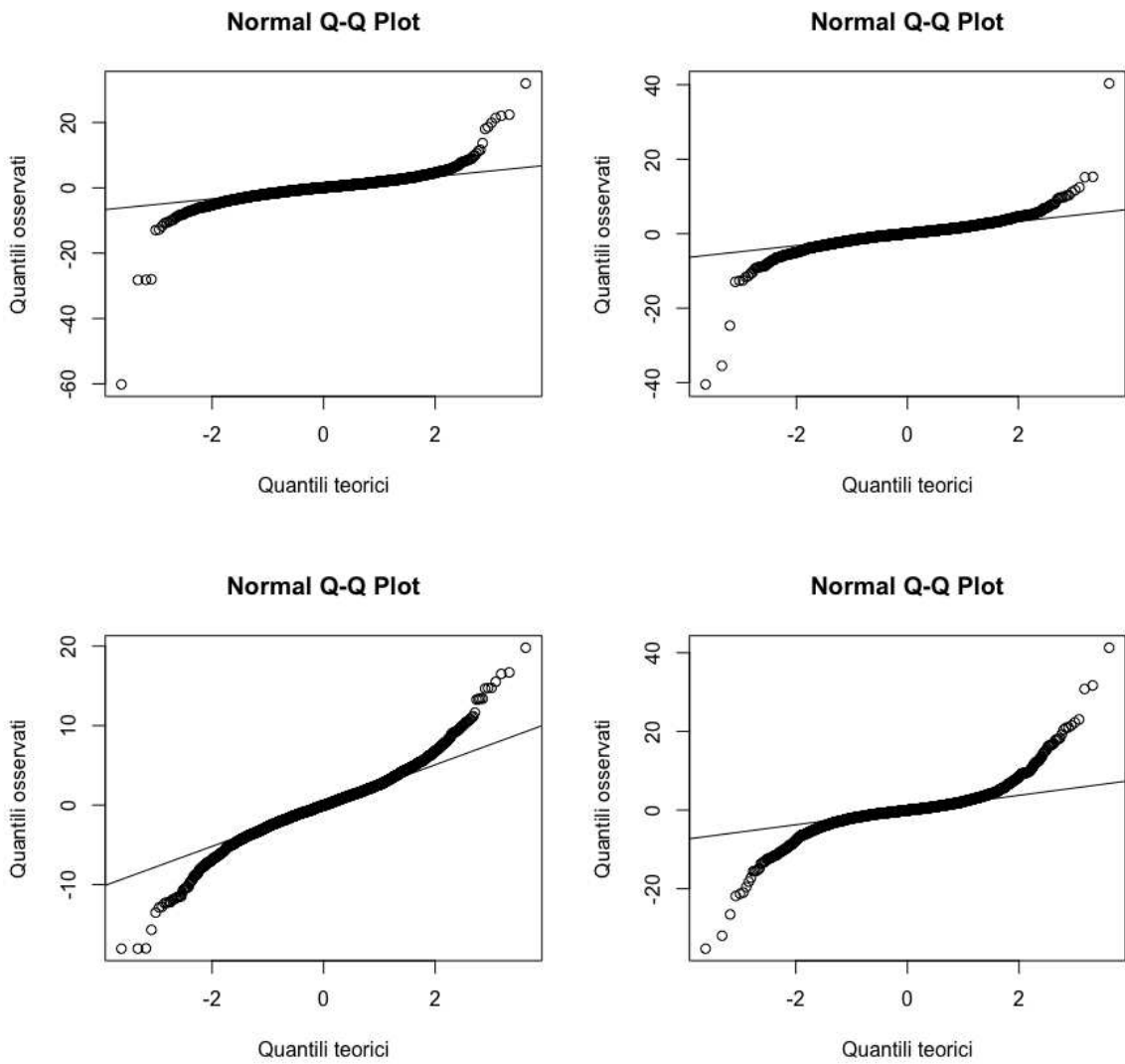


FIGURA A3: Normal Q-Q Plot per la serie del WTI futures (in alto a sinistra), del WTI spot (in alto a destra), del NYMEX (in basso a sinistra) e del TTF (in basso a destra).

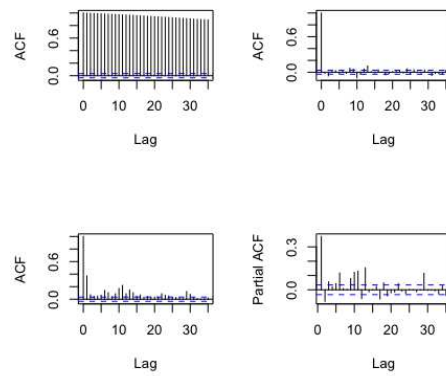


FIGURA A4: Brent spot: ACF sui prezzi (in alto a sinistra), ACF sui rendimenti (in alto a destra), ACF e PACF sui quadrati dei rendimenti (in basso).

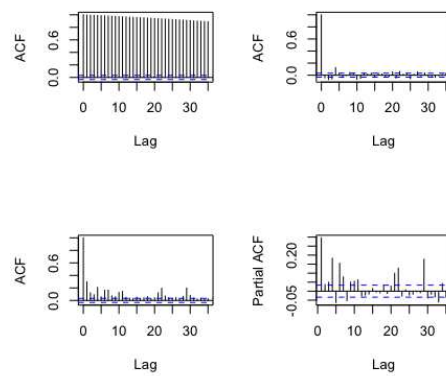


FIGURA A5: WTI futures: ACF sui prezzi (in alto a sinistra), ACF sui rendimenti (in alto a destra), ACF e PACF sui quadrati dei rendimenti (in basso).

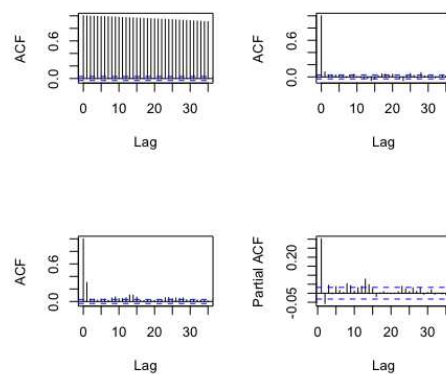


FIGURA A6: WTI spot: ACF sui prezzi (in alto a sinistra), ACF sui rendimenti (in alto a destra), ACF e PACF sui quadrati dei rendimenti (in basso).

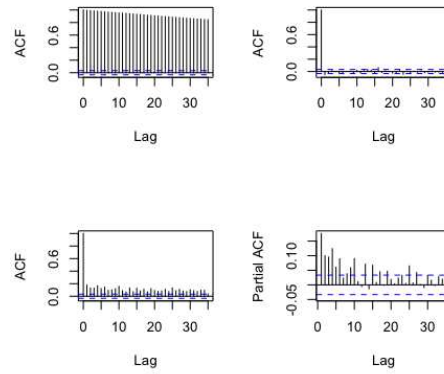


FIGURA A7: Gas NYMEX: ACF sui prezzi (in alto a sinistra), ACF sui rendimenti (in alto a destra), ACF e PACF sui quadrati dei rendimenti (in basso).

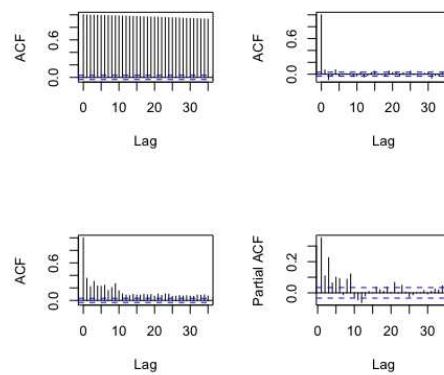


FIGURA A8: Gas TTF: ACF sui prezzi (in alto a sinistra), ACF sui rendimenti (in alto a destra), ACF e PACF sui quadrati dei rendimenti (in basso).

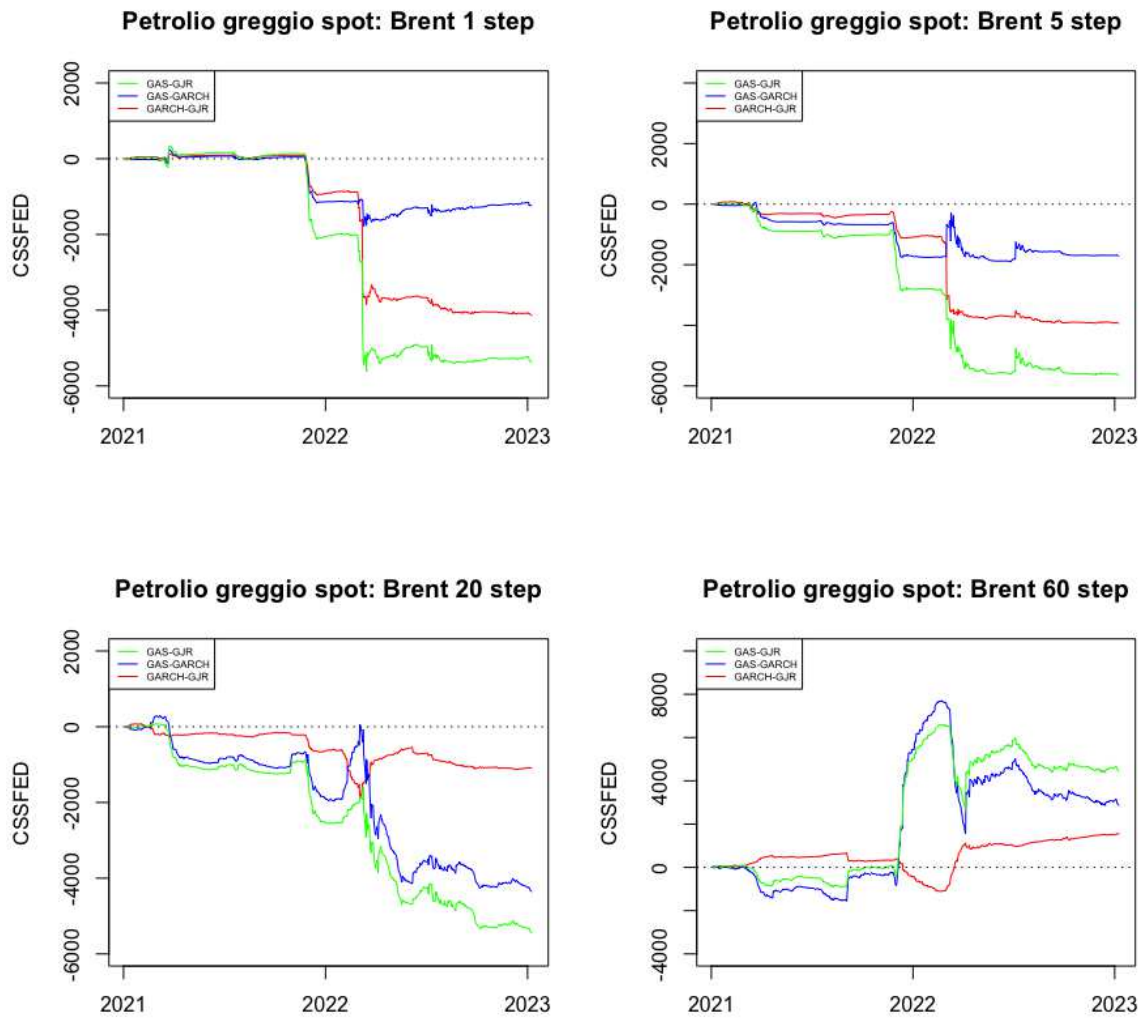


FIGURA A9: CSSFED per il Brent spot.

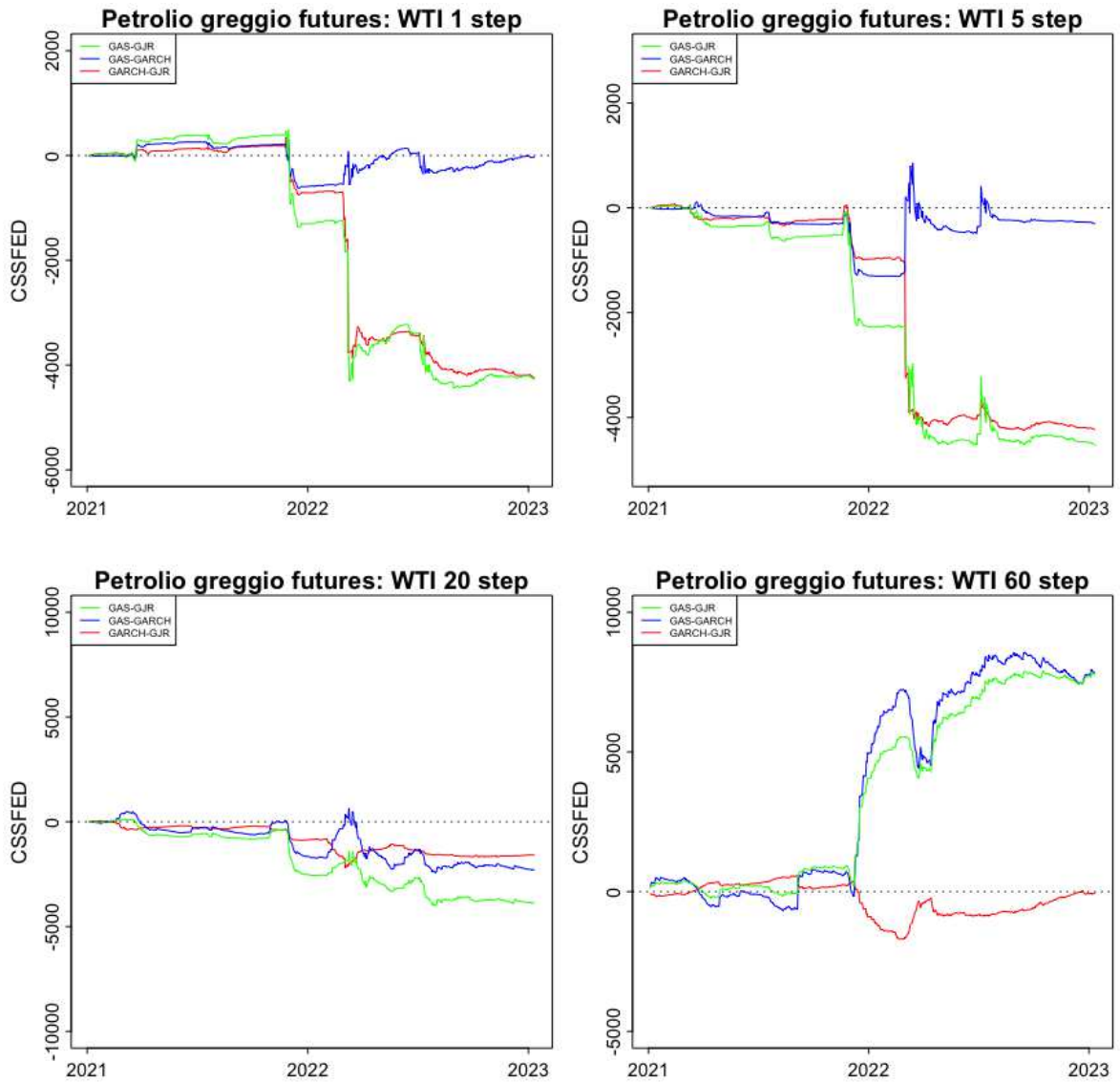


FIGURA A10: CSSFED per il WTI futures.

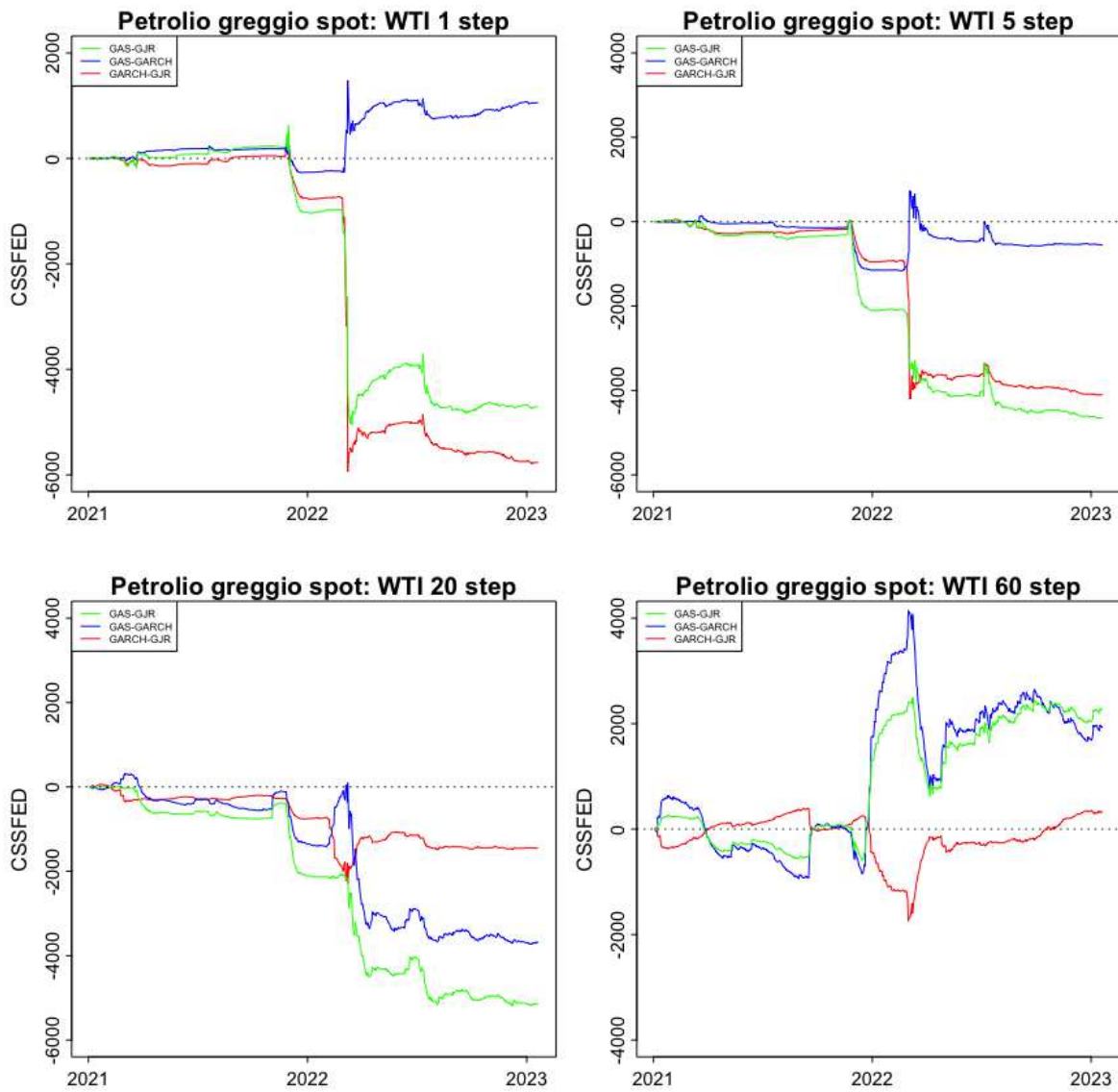


FIGURA A11: CSSFED per il WTI spot.

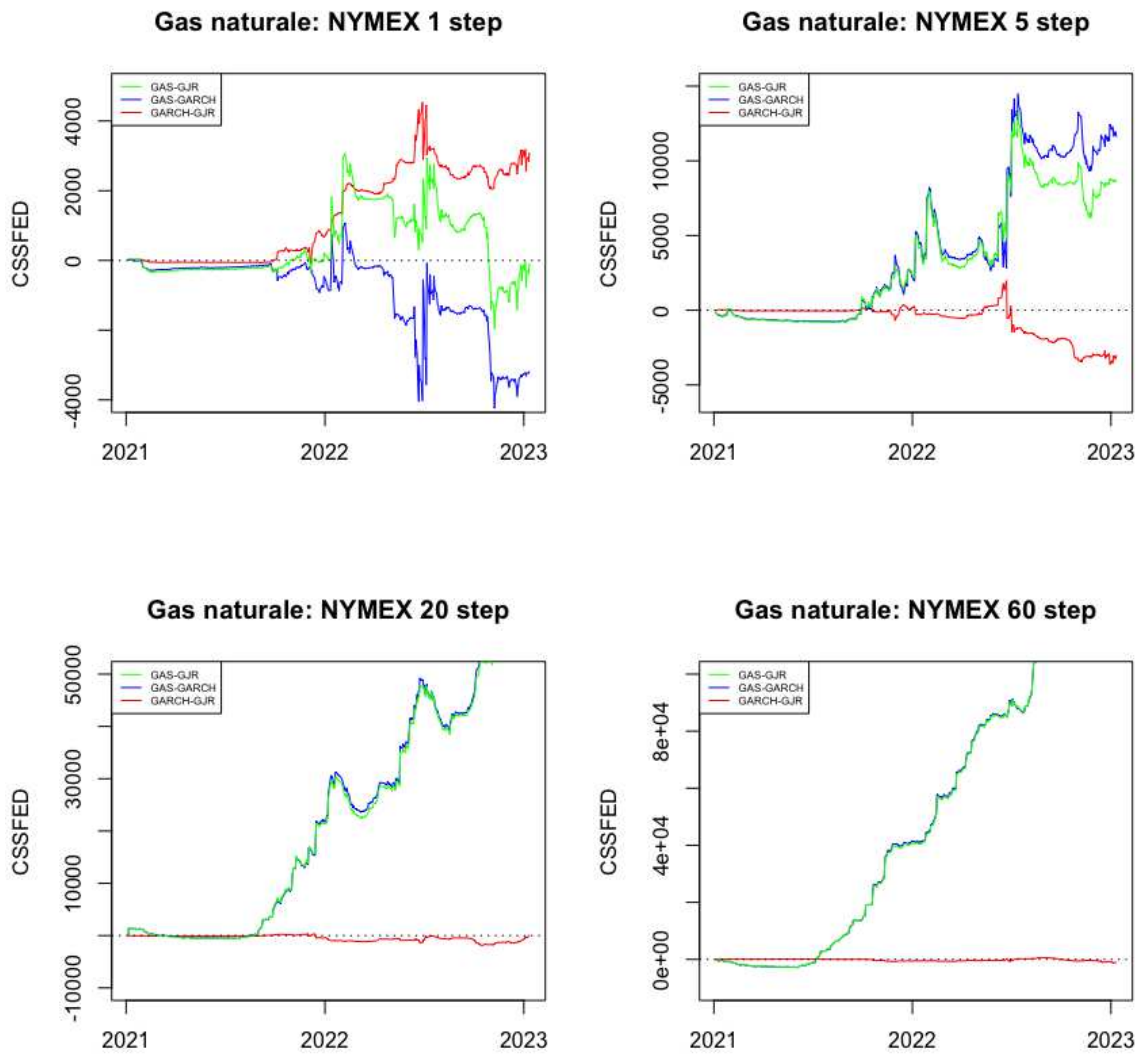


FIGURA A12: CSSFED per il gas NYMEX.

Codice R

È riportato il codice R per la serie del Brent futures. I comandi relativi alle altre serie sono analoghi a quelli riportati di seguito.

```
library(zoo)
library(forecast)
library(readxl)
library(forecast)
library(tseries)
library(fUnitRoots)
library(rugarch)
library(GAS)
library(quantmod)
library(astsa)
library(tidyverse)
library(fImport)
library(fBasics)
library(sn)
library(stats)
library(ggplot2)
dati=read_excel('Brent_future_completo.xlsx')
View(dati)
a=dim(dati)
T=a[1] #numero di osservazioni in totale dal gennaio 2010 al marzo 2023
p=log(dati$Ultimo) #log prezzi
r=100*(diff(p)) # log rendimenti in punti percentuali
T=T-1 #3421 rendimenti
data_r=data.frame(dati$Data[-1],r)
#3421 osservazioni
dati$Data=as.Date(dati$Data,tryFormats = c("%d.%m.%Y"))
```

```

data_plot <- data.frame(Prezzi = exp(p[2:3422]), Rendimenti = r,date=dati$Data[-1])
#grafico prezzi e rendimenti
ggplot(data_plot, aes(x = as.Date(date))) +
  geom_line(aes(y = Prezzi, color = "Prezzi")) +
  geom_line(aes(y = Rendimenti, color = "Rendimenti")) +
  scale_color_manual(values = c("blue", "red")) +
  xlab("Periodo") +
  ylab("Valore") +
  theme_bw()+
  theme(legend.position = "none")
basicStats(r)
acf(p)
pacf(p)
#test ADF
#lag=21 #dati giornalieri
out1<-adfTest(p,lags=21,type="c")
summary(out1@test$lm)
adfTest(p,lags=21,type="c")
#si accetta H0 , i prezzi sono non stazionari
acf(r)
pacf(r)
out1<-adfTest(r,lags=21,type="c")
summary(out1@test$lm)
out2<-adfTest(r,lags=20,type="c")
summary(out2@test$lm)
out2<-adfTest(r,lags=20,type="nc")
summary(out2@test$lm)
adfTest(r,lags=20,type="nc") #p value < 0.01
acf(r^2)
acf(abs(r))
#correlazioni significative e rilevanti
plot(density(r)) #code spese
qqnorm(r,xlab='Quantili teorici',ylab='Quantili osservati')
qqline(r) #deviazione dalla normalità
dagoTest(r)
jarque.bera.test(r)

```

```

# test Ljung-Box a ritardi 5 e 10
eps2=(r-mean(r))^2
Box.test(eps2, lag = 5, type = "Ljung-Box")
Box.test(eps2, lag = 10, type = "Ljung-Box")
#specificazione e adattamento dei modelli
#GARCH(1,1)
spec0 <-ugarchspec(variance.model=
                    list(model="sGARCH", garchOrder = c(1, 1)),
                    mean.model = list(armaOrder = c(0,0),include.mean= TRUE),
                    distribution.model="std")
fit0=ugarchfit(spec0,r[1:2840])
show(fit0)
#GAS(1,1)
spec2=UniGASSpec(Dist = 'std',
                 ScalingType = ' Identity ',
                 GASPar = list(location = FALSE,scale = TRUE, shape = FALSE))
fit2=UniGASFit(spec2,r[1:2840])
show(fit2)
#GJR(1,1)
spec3<- ugarchspec(variance.model =
                    list(model="gjrGARCH",garchOrder = c(1, 1)),
                    mean.model = list(armaOrder = c(0, 0),include.mean= TRUE),
                    distribution.model="std")
fit3=ugarchfit(spec3,r[1:2840])
show(fit3)
llk=cbind(fit0@fit$LLH,fit3@fit$LLH,fit2@Estimates$IC[4])
colnames(llk)=c('GARCH','GJR','GAS')
llk
#previsioni con metodo rolling
#garch
m=matrix(NA,522,60)
err=matrix(NA,522,60)
r.sample=r[1:2840]
for (i in 1: 522){
  spec0 <- ugarchspec(variance.model =
                      list(model="sGARCH",

```

```

        garchOrder = c(1, 1)),
        mean.model = list(armaOrder = c(0, 0),include.mean=TRUE),
        distribution.model="std")

fit0=ugarchfit(spec0,r.sample)
prev=ugarchforecast(fit0,n.ahead=60)
m[i,]=(prev@forecast$sigmaFor)^2
err[i,]=(r[(2840+i):(2840+i+60-1)])^2 - (prev@forecast$sigmaFor)^2
r.sample=c(r.sample[-1],r[2840+i])}
err_rid=err[,c(1,5,20,60)]
err2_rid=err_rid^2
RMSE_garch=sqrt(apply(err2_rid,2,mean))
#gas
m_g=matrix(NA,522,60)
err_g=matrix(NA,522,60)
r.sample=r[1:2840]
for (i in 1: 522){
    spec2 = UniGASSpec(Dist = 'std',ScalingType = 'Identity',
                      GASPar = list(location = FALSE,scale = TRUE, shape = FALSE))
    fit2=UniGASFit(spec2,r.sample)
    prev=UniGASFor(fit2,H=60)
    m_g[i,]=prev@Forecast$Moments[,2]
    err_g[i,]=(r[(2840+i):(2840+i+60-1)])^2 - prev@Forecast$Moments[,2]
    r.sample=c(r.sample[-1],r[2840+i])}
err_rid_g=err_g[,c(1,5,20,60)]
err2_rid_g=err_rid_g^2
RMSE_gas=sqrt(apply(err2_rid_g,2,mean))
#gjr
m_j=matrix(NA,522,60)
err_j=matrix(NA,522,60)
r.sample=r[1:2840]
for (i in 1: 522){
    spec3 <- ugarchspec(variance.model =
                        list(model="gjrGARCH",
                              garchOrder = c(1, 1)),
                        mean.model = list(armaOrder = c(0, 0),include.mean=TRUE),
                        distribution.model="std")

```

```

fit3=ugarchfit(spec3,r.sample)
prev=ugarchforecast(fit3,n.ahead=60)
m_j[i,]=(prev@forecast$sigmaFor)^2
err_j[i,]=(r[(2840+i):(2840+i+60-1)])^2 - (prev@forecast$sigmaFor)^2
r.sample=c(r.sample[-1],r[2840+i]) }
err_rid_j=err_j[,c(1,5,20,60)]
err2_rid_j=err_rid_j^2
RMSE_gjr=sqrt(apply(err2_rid_j,2,mean))
orizzonte=c(1,5,20,60)
cbind(RMSE_garch,RMSE_gas,RMSE_gjr,orizzonte)
#garch
err1=err_rid[,1]
err5=err_rid[,2]
err20=err_rid[,3]
err60=err_rid[,4]
#gas
err1_g=err_rid_g[,1]
err5_g=err_rid_g[,2]
err20_g=err_rid_g[,3]
err60_g=err_rid_g[,4]
#gjr
err1_j=err_rid_j[,1]
err5_j=err_rid_j[,2]
err20_j=err_rid_j[,3]
err60_j=err_rid_j[,4]
#test Diebold Mariano
#orizzonte 1
dm.test(err1,err1_g)
dm.test(err1,err1_j)
dm.test(err1_g,err1_j)
#orizzonte 5
dm.test(err5,err5_g)
dm.test(err5,err5_j)
dm.test(err5_g,err5_j)
#orizzonte 20
dm.test(err20,err20_g)

```

```

dm.test(err20,err20_j)
dm.test(err20_g,err20_j)
#orizzonte 60
dm.test(err60,err60_g)
dm.test(err60,err60_j)
dm.test(err60_g,err60_j)
# WR
# orizzonte 1
count=0
for (i in 1:length(abs(err1))) {
  if ( (abs(err1[i]) < abs(err1_j[i]))
    & (abs(err1[i]) < abs(err1_g[i])) ) {
    count=count+1
  }
  else
  {
    count=count
  }
}
count_garch_1passo=count
count_garch_1passo/522
#
count=0
for (i in 1:length(abs(err1))) {
  if ( (abs(err1_j[i]) < abs(err1[i]))
    & (abs(err1_j[i]) < abs(err1_g[i])) ) {
    count=count+1
  }
  else
  {
    count=count
  }
}
count_gjr_1passo=count
count_gjr_1passo/522
#

```



```

count=0
for (i in 1:length(abs(err1))) {
  if ( (abs(err1_g[i]) < abs(err1[i]))
    & (abs(err1_g[i]) < abs(err1_j[i])) ) {
    count=count+1
  }
  else
  {
    count=count
  }
}
count_gas_1passo=count
count_gas_1passo/522
#orizzonte 5
count=0
for (i in 1:length(abs(err5))) {
  if ( (abs(err5[i]) < abs(err5_j[i]))
    & (abs(err5[i]) < abs(err5_g[i])) ) {
    count=count+1
  }
  else
  {
    count=count
  }
}
count_garch_5passi=count
count_garch_5passi/522
#
count=0
for (i in 1:length(abs(err5))) {
  if ( (abs(err5_j[i]) < abs(err5[i]))
    & (abs(err5_j[i]) < abs(err5_g[i])) ) {
    count=count+1
  }
  else
  {

```

```

        count=count
    }
}
count_gjr_5passi=count
count_gjr_5passi/522
#
count=0
for (i in 1:length(abs(err5))) {
    if ( (abs(err5_g[i]) < abs(err5[i]))
        & (abs(err5_g[i]) < abs(err5_j[i])) ) {
        count=count+1
    }
    else
    {
        count=count
    }
}
count_gas_5passi=count
count_gas_5passi/522
#orizzonte 20
count=0
for (i in 1:length(abs(err20))) {
    if ( (abs(err20[i]) < abs(err20_j[i]))
        & (abs(err20[i]) < abs(err20_g[i])) ) {
        count=count+1
    }
    else
    {
        count=count
    }
}
count_garch_20passi=count
count_garch_20passi/522
#
count=0
for (i in 1:length(abs(err20))) {

```

```

if ( (abs(err20_j[i]) < abs(err20[i]))
& (abs(err20_j[i]) < abs(err20_g[i])) ) {
  count=count+1
}
else
{
  count=count
}
}
count_gjr_20passi=count
count_gjr_20passi/522
#
count=0
for (i in 1:length(abs(err20))) {
  if ( (abs(err20_g[i]) < abs(err20[i]))
& (abs(err20_g[i]) < abs(err20_j[i])) ) {
    count=count+1
  }
  else
  {
    count=count
  }
}
count_gas_20passi=count
count_gas_20passi/522
#orizzonte 60
count=0
for (i in 1:length(abs(err60))) {
  if ( (abs(err60[i]) < abs(err60_j[i]))
& (abs(err60[i]) < abs(err60_g[i])) ) {
    count=count+1
  }
  else
  {
    count=count
  }
}

```

```

}
count_garch_60passi=count
count_garch_60passi/522
#
count=0
for (i in 1:length(abs(err60))) {
  if ( (abs(err60_j[i]) < abs(err60[i]))
    & (abs(err60_j[i]) < abs(err60_g[i])) ) {
    count=count+1
  }
  else
  {
    count=count
  }
}
count_gjr_60passi=count
count_gjr_60passi/522
#
count=0
for (i in 1:length(abs(err60))) {
  if ( (abs(err60_g[i]) < abs(err60[i]))
    & (abs(err60_g[i]) < abs(err60_j[i])) ) {
    count=count+1
  }
  else
  {
    count=count
  }
}
count_gas_60passi=count
count_gas_60passi/522
#CSSFED 1-step
plot(dati$Data[2842:3363],
      cumsum(err1^2-err1_j^2),type='l',col='red',
      ylim=c(-6000,2000),
      main='Petrolio greggio futures: Brent 1 step',

```

```

        ylab='CSSFED',xlab='')
lines(dati$Data[2842:3363],cumsum(err1_g^2-err1^2),type='l',col='blue')
lines(dati$Data[2842:3363],cumsum(err1_g^2-err1_j^2),type='l',col='green')
legend('topleft',legend=c("GAS-GJR", "GAS-GARCH","GARCH-GJR"),
       col=c("green", "blue","red"),lty=1, cex=0.5)
abline(h=0,lty=9)
#CSSFED 5-step
plot(dati$Data[2842:3363],
     cumsum(err5^2-err5_j^2),type='l',col='red',
     ylim=c(-6000,2000),
     main='Petrolio greggio futures: Brent 5 step',
     ylab='CSSFED',xlab='')
lines(dati$Data[2842:3363],cumsum(err5_g^2-err5^2),type='l',col='blue')
lines(dati$Data[2842:3363],cumsum(err5_g^2-err5_j^2),type='l',col='green')
legend('topleft',legend=c("GAS-GJR", "GAS-GARCH","GARCH-GJR"),
       col=c("green", "blue","red"),lty=1, cex=0.5)
abline(h=0,lty=9)
#CSSFED 20-step
plot(dati$Data[2842:3363],
     cumsum(err20^2-err20_j^2),type='l',col='red',
     ylim=c(-8000,4000),
     main='Petrolio greggio futures: Brent 20 step',
     ylab='CSSFED',xlab='')
lines(dati$Data[2842:3363],cumsum(err20_g^2-err20^2),type='l',col='blue')
lines(dati$Data[2842:3363],cumsum(err20_g^2-err20_j^2),type='l',col='green')
legend('topleft',legend=c("GAS-GJR", "GAS-GARCH","GARCH-GJR"),
       col=c("green", "blue","red"),lty=1, cex=0.5)
abline(h=0,lty=9)
#CSSFED 60-step
plot(dati$Data[2842:3363],
     cumsum(err60^2-err60_j^2),type='l',col='red',
     ylim=c(-5000,7000),
     main='Petrolio greggio futures: Brent 60 step',
     ylab='CSSFED',xlab='')
lines(dati$Data[2842:3363],cumsum(err60_g^2-err60^2),type='l',col='blue')
lines(dati$Data[2842:3363],cumsum(err60_g^2-err60_j^2),type='l',col='green')

```

```
legend('topleft',legend=c("GAS-GJR", "GAS-GARCH","GARCH-GJR"),  
      col=c("green", "blue","red"),lty=1, cex=0.5)  
abline(h=0,lty=9)
```

Bibliografia

- ARDIA, D., BOUDT, K. & CATANIA, L. (2016). Generalized autoregressive score models in r: The gas package. *arXiv preprint arXiv:1609.02354* .
- BERGER, V. W. & ZHOU, Y. (2014). Kolmogorov–smirnov test: Overview. *Wiley statsref: Statistics reference online* .
- BOLLERSLEV, T. (1986). Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity. *Journal of econometrics* **31**, 307–327.
- CARNERO, M. A. & PÉREZ, A. (2019). Leverage effect in energy futures revisited. *Energy Economics* **82**, 237–252.
- CHARLES, A. & DARNÉ, O. (2017). Forecasting crude-oil market volatility: Further evidence with jumps. *Energy Economics* **67**, 508–519.
- CHUN, D., CHO, H. & KIM, J. (2019). Crude oil price shocks and hedging performance: A comparison of volatility models. *Energy Economics* **81**, 1132–1147.
- CREAL, D., KOOPMAN, S. J. & LUCAS, A. (2013). Generalized autoregressive score models with applications. *Journal of Applied Econometrics* **28**, 777–795.
- DI BENEDETTO, F. (2008). *Oil & Bio Trading*. Franco Angeli.
- DIEBOLD, F. X. & MARIANO, R. S. (2002). Comparing predictive accuracy. *Journal of Business & economic statistics* **20**, 134–144.
- DING, Z., GRANGER, C. W. & ENGLE, R. F. (1993). A long memory property of stock market returns and a new model. *Journal of empirical finance* **1**, 83–106.
- ENGLE, R. F. (1982). Autoregressive conditional heteroscedasticity with estimates of the variance of united kingdom inflation. *Econometrica: Journal of the econometric society* , 987–1007.

- ENGLE, R. F. & NG, V. K. (1993). Measuring and testing the impact of news on volatility. *The journal of finance* **48**, 1749–1778.
- GALLO, G. M., PACINI, B. et al. (2002). *Metodi quantitativi per i mercati finanziari*. Carocci Editore.
- GHALANOS, A. (2020). Introduction to the rugarch package.(version 1.3-1). *Manuscript*, <http://cran.r-project.org/web/packages/rugarch>. Accessed **11**.
- GHODDUSI, H. & EMAMZADEHFARD, S. (2017). Optimal hedging in the us natural gas market: The effect of maturity and cointegration. *Energy Economics* **63**, 92–105.
- HERRERA, A. M., HU, L. & PASTOR, D. (2018). Forecasting crude oil price volatility. *International Journal of Forecasting* **34**, 622–635.
- NELSON, D. B. (1991). Conditional heteroskedasticity in asset returns: A new approach. *Econometrica: Journal of the econometric society* , 347–370.
- RANA, S., ESHITA, N. N. & AL MAMUN, A. S. M. (2021). Robust normality test in the presence of outliers. In *Journal of Physics: Conference Series*, vol. 1863. IOP Publishing.
- SCOTT HACKER, R. & HATEMI-J*, A. (2005). A test for multivariate arch effects. *Applied Economics Letters* **12**, 411–417.
- SHEPHARD, N. (2005). *Stochastic volatility: selected readings*. OUP Oxford.
- SILIVERSTOV, B. (2017). Dissecting models' forecasting performance. *Economic Modelling* **67**, 294–299.
- TROSTER, V., TIWARI, A. K., SHAHBAZ, M. & MACEDO, D. N. (2019). Bitcoin returns and risk: A general garch and gas analysis. *Finance Research Letters* **30**, 187–193.
- XU, Y. & LIEN, D. (2020). Optimal futures hedging for energy commodities: An application of the gas model. *Journal of Futures Markets* **40**, 1090–1108.
- YAP, B. W. & SIM, C. H. (2011). Comparisons of various types of normality tests. *Journal of Statistical Computation and Simulation* **81**, 2141–2155.

Ringraziamenti

Voglio ringraziare tutte le persone che mi hanno sostenuto e incoraggiato durante il mio percorso universitario. Ringrazio la mia relatrice Luisa Bisaglia.

Un ringraziamento speciale va alle persone più importanti della mia vita, i miei genitori, per essere stati sempre al mio fianco supportandomi in ogni mia scelta. Grazie alla mia mamma Katia, al mio papà Manfredo, a mio fratello Giovannino, ai nonni Pisca, Marino, Giovanna e Gianni. Senza il vostro sostegno, il mio percorso non sarebbe stato lo stesso.

Questo traguardo rappresenta il risultato di un viaggio bellissimo che ho condiviso con delle persone che lo hanno reso speciale e indimenticabile. Grazie ai miei amici padovani, anzi finti padovani, che mi hanno sopportata per tre anni. Siete riusciti a tirare fuori tutta me stessa e vi ringrazio anche per questo.

Grazie alle due commare Martha e Ire con cui ho trascorso tanti bei momenti, a Emma sempre pronta ad accogliermi con un sorriso, alle mie amiche Alessia e Carolina con cui ho mangiato più gelati in tre anni che in tutta la mia vita, e a Saretta con cui ho riso come non mai. Infine, grazie alla mia amica di una vita, Rebs, sempre accanto a me.

Grazie di cuore a tutti.

Luna Piattella

