



UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

Dipartimento di Fisica e Astronomia “Galileo Galilei”

Corso di Laurea in Fisica

Tesi di Laurea

La costruzione ADHM per gli istantoni.

Relatore

Prof. Pieralberto Marchetti

Laureanda

Francesca Pretto

Anno Accademico 2021/2022

Indice

Introduzione	2
1 Istantoni	3
1.1 Istantoni nella teoria di Yang-Mills	3
1.1.1 Introduzione e convenzioni utilizzate	3
1.1.2 Effetto tunnel tra i vuoti	4
1.2 Un'interpretazione topologica	9
1.3 Simboli di 't Hooft	10
1.4 Soluzioni di istantone	11
2 La costruzione ADHM	14
2.1 Esempio di applicazione	18
Conclusioni e cenni di applicazioni	22
Istantoni e confinamento	22
Istantoni e violazione del numero barionico	23
A	24
A.1 Complementi sui simboli di 't Hooft	24
Bibliografia	25

Introduzione

Gli istantoni sono delle particolari soluzioni classiche delle equazioni del moto della teoria di Yang-Mills nello spazio euclideo, che hanno azione finita, non nulla. Sono stati definiti inizialmente pseudo-particelle dopo la loro scoperta nel 1975 da parte di Belavin, Polyakov, Schwarz e Tyupkin, per la loro proprietà di essere oggetti localizzati nello spazio-tempo.

Nella tesi si presenta un'introduzione generale sugli istantoni, in particolare sulla loro interpretazione come configurazioni del potenziale che permettono l'effetto tunnel tra i minimi classici della teoria nella gauge temporale.

L'obiettivo della trattazione è poi presentare la costruzione ADHM (Atiyah – Drinfeld – Hitchin – Manin), ovvero un metodo per riscrivere la condizione di auto dualità che caratterizza le soluzioni di istantone. Si può in questo modo passare da una condizione differenziale ad un insieme di equazioni algebriche, semplificando il problema.

Nella tesi si considera questa costruzione esclusivamente per il caso semplice della teoria di Yang-Mills basata su $SU(2)$.

L'interesse fisico e matematico per gli istantoni coinvolge molteplici fenomeni: dalla prima ipotesi, poi accantonata, di utilizzarli come spiegazione del confinamento dei quark, alle più recenti teorie di gauge in cui gli istantoni spiegano la violazione del numero barionico nei processi elettrodeboli. Ulteriori applicazioni, come il contributo alla rottura della simmetria chirale nelle teorie con fermioni privi di massa, sono rilevanti, ma vanno oltre le possibilità di questo lavoro.

Questa tesi nasce con l'idea di approfondire un argomento che si analizza in modo più naturale con gli strumenti delle teorie di campo quantistiche, ma che può essere affrontato anche con un punto di vista diverso, interessante e completamente classico.

Capitolo 1

Istantoni

1.1 Istantoni nella teoria di Yang-Mills

1.1.1 Introduzione e convenzioni utilizzate

La teoria di Yang-Mills è una teoria di gauge basata sul gruppo $SU(N)$, ovvero un gruppo di Lie non abeliano. Per le interazioni forti si considera $SU(3)$, mentre per questa trattazione ci si concentrerà sul gruppo $SU(2)$ per la sua semplicità.

La rappresentazione fondamentale dell'algebra di $SU(2)$ è costituita dai tre generatori del gruppo dati da: $\frac{\sigma^a}{2}$ dove le σ^a sono le matrici di Pauli, con a che va da 1 a 3. Il potenziale di gauge, perciò, si può esprimere attraverso le sue componenti nell'algebra:

$$A_\mu = A_\mu^a \frac{\sigma^a}{2}$$

con le proprietà note dei generatori: $[\sigma^a, \sigma^b] = 2i \epsilon_{abc} \sigma^c$ e $tr(\sigma^a \sigma^b) = 2\delta^{ab}$.

A partire dal potenziale si può definire il campo $F_{\mu\nu}$

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - ig[A_\mu, A_\nu]$$

dove g è la costante di accoppiamento, che definisce la forza dell'interazione.

In generale si può rappresentare una trasformazione di gauge di A_μ con un certo $U(x)$, elemento del gruppo di gauge, scritto nella rappresentazione più appropriata.

$$\begin{aligned} A_\mu &\longrightarrow UA_\mu U^{-1} - \frac{i}{g}(\partial_\mu U)U^{-1} = UA_\mu U^{-1} + \frac{i}{g}U\partial_\mu U^{-1} \\ F_{\mu\nu} &\longrightarrow UF_{\mu\nu}U^{-1} \end{aligned}$$

In $SU(2)$ gli elementi del gruppo, che è connesso all'identità, si possono scrivere usando i generatori dell'algebra: $U = e^{-i\alpha^a \frac{\sigma^a}{2}}$. Prendendo poi lo sviluppo di Taylor dell'esponenziale si ottengono le trasformazioni infinitesime.

La lagrangiana di Yang-Mills si scrive come:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4g^2} F_{\mu\nu}^a F^{\mu\nu a} = -\frac{1}{2g^2} tr F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \quad (1.1)$$

con la traccia sull'indice dell'algebra del gruppo. Si vede che, con la definizione data per il campo, questa \mathcal{L} è invariante per trasformazioni di gauge.

Si introduce inoltre la derivata covariante esprimendola per un campo scalare ϕ :

$$D_\mu \phi = \partial_\mu \phi - ig A_\mu \phi \quad (1.2)$$

D_μ è una generalizzazione della derivata parziale e si definisce così per fare in modo che le equazioni che la contengono conservino le loro proprietà fisiche sotto trasformazioni di gauge. Ovvero se si ha un campo che trasforma come $\phi'(x) = U(x)\phi(x)$, si vede che un termine cinetico della forma $\phi^\dagger \partial_\mu \phi$ non è gauge invariante. Si vuole allora definire D_μ come un operatore che trasformi in modo covariante:

$$D'_\mu = U(x) D_\mu U^\dagger(x)$$

e per soddisfare questa richiesta si trova l'espressione (1.2).

In questo modo si verifica che $D'_\mu \phi'(x) = U(x) D_\mu \phi(x)$ e si possono scrivere termini invarianti come: $\phi'^\dagger(x) D'_\mu \phi'(x) = \phi^\dagger(x) D_\mu \phi(x)$.

Infine, per quanto riguarda gli indici, si usa la convenzione in cui le lettere greche assumono valori da 0 a 3 e si riferiscono alle coordinate nello spazio di Minkowski, le lettere dell'ultima parte dell'alfabeto latino (r, s, p, \dots) sono gli indici dello spazio euclideo e variano da 1 a 4, mentre le lettere a metà dell'alfabeto latino (i, j, \dots) sono gli indici spaziali che variano da 1 a 3.

1.1.2 Effetto tunnel tra i vuoti

L'interpretazione principale degli istantoni, che sono soluzioni classiche delle equazioni del moto euclideo di Yang-Mills ad azione finita e non nulla, consiste nel considerarli come configurazioni del potenziale che permettono l'effetto tunnel tra i minimi classici dell'energia, in opportune gauge.

La meccanica quantistica prevede che una particella abbia una probabilità diversa da zero di attraversare una barriera di potenziale per effetto tunnel, anche senza avere l'energia sufficiente per superarla. Risolvendo opportunamente l'equazione di Schrodinger infatti, si trova che la funzione d'onda all'interno di una barriera di potenziale di altezza V_0 è un'esponenziale decrescente per una particella con energia minore di V_0 . Si ottiene perciò un coefficiente di trasmissione non nullo oltre la barriera.

Nella gauge $A_0 = 0$ si può scrivere la lagrangiana di Yang-Mills in modo semplice e si può evidenziare la presenza di minimi classici degeneri del potenziale separati da barriere di energia. L'obiettivo è descrivere queste configurazioni di minimo e mostrare che l'effetto tunnel quantistico attraverso queste barriere è descritto dagli istantoni.

Dall'equazione (1.1) fissando la gauge $A_0 = 0$ si ottiene:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= -\frac{1}{2} \text{tr} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = -\text{tr} F_{j0} F^{j0} - \frac{1}{2} \text{tr} F_{ij} F^{ij} \\ &= \text{tr} \dot{A}_j^2 - \frac{1}{2} \text{tr} F_{ij}^2 \end{aligned}$$

poichè $\partial_i A_0 = 0$. Si indica la derivata rispetto a x_0 come: $\partial_0 A_j = \dot{A}_j$.

La gauge $A_0 = 0$ è utile per passare dallo spazio di Minkowski allo spazio euclideo \mathbb{R}^4 , poichè per tale trasformazione si realizza la rotazione di Wick che associa a $x_0 \rightarrow ix_4$ restituendo così un vettore del tipo (x_1, x_2, x_3, x_4) . Se si applicasse questa sostituzione lasciando A_0 invariato, la componente F_{0j} del campo diventerebbe complessa e per risolvere questo bisognerebbe introdurre arbitrariamente un fattore i anche in A_0 . Se si lavora nella gauge $A_0 = 0$ invece il problema non si presenta. A partire dalla metrica di Minkowski con questa trasformazione si ottiene la metrica euclidea a meno di un segno globale:

$$x_\mu x^\mu = x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 = -(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2)$$

si ha perciò la conferma di essere passati dallo spazio-tempo allo spazio euclideo.

Anche dopo aver fissato $A_0 = 0$ rimane la libertà di realizzare trasformazioni di gauge indipendenti dal tempo, in modo da non modificare A_0 e questo porta a scrivere la lagrangiana euclidea come:

$$\mathcal{L}_e = \frac{1}{2} \text{tr} F_{rs}^2$$

I vuoti classici sono definiti dalla condizione $F_{\mu\nu} = 0$ che nella gauge scelta corrisponde ad avere un potenziale di pura gauge:

$$A_j = \frac{i}{g} G^{-1} \partial_j G$$

dove $G(\vec{x})$ è un elemento del gruppo $SU(2)$, nella sua rappresentazione fondamentale è una matrice e dipende dalle componenti spaziali di x .

Se due vuoti possono essere collegati tra loro da una traiettoria di tunneling, la corrispondente azione classica del potenziale che realizza questa traiettoria deve essere finita. Questo si traduce in una condizione asintotica per la matrice G , cioè deve tendere ad un valore costante per $|\vec{x}| \rightarrow \infty$ e, senza perdita di generalità, si può considerare $G \rightarrow \mathbb{I}$. Questa condizione compattifica lo spazio tridimensionale che diventa topologicamente equivalente alla sfera S_3 considerando l'infinito spaziale come un singolo punto, visto che G vi assume un unico valore.

$G(\vec{x})$ costituisce quindi una mappa da \mathbb{R}^3 al gruppo di gauge $SU(2)$ che è anch'esso equivalente ad una tre-sfera. Si ha perciò $G(x) : S_3 \rightarrow S_3$, mappa che può essere classificata dal numero di avvolgimento (winding number), ovvero un parametro che conta quante volte si percorre la sfera S_3 del gruppo $SU(2)$ se si compie un giro completo sulla sfera corrispondente allo spazio delle coordinate.

Si esprime questa classificazione con il terzo gruppo di omotopia che coincide con i numeri interi:

$$\pi_3(S_3) = \mathbb{Z}$$

in questo modo si possono separare le mappe $G(x)$ in classi distinte etichettate da un numero intero n , l'indice di avvolgimento. Tutte le matrici appartenenti ad una stessa classe sono collegate tra loro da trasformazioni di gauge continue e

dipendenti da x , che possono essere costruite combinando una serie di trasformazioni infinitesime, mentre non esiste nessuna trasformazione di gauge continua che colleghi due classi diverse.

La corrispondenza tra i vuoti e le classi di omotopia è resa esplicita definendo la quantità:

$$N[G] = \frac{1}{24\pi^2} \epsilon_{ijk} \int d^3x \operatorname{tr}(G^{-1} \partial_i G G^{-1} \partial_j G G^{-1} \partial_k G)$$

che corrisponde proprio allo winding number che conta quante volte \mathbb{R}^3 è mappato in $SU(2)$. Infatti, sviluppando $G(x)$ vicino ad un certo valore G_0 , si può mostrare come l'integrale sullo spazio delle coordinate dell'equazione precedente diventi un integrale su tutto il gruppo.

Si verifica la consistenza di questa definizione ad esempio per $G_1 = e^{i\hat{r}_a \sigma_a f(r)}$ con $f(r)$ funzione monotona tale che $f(0) = -\pi$ e $f(\infty) = 0$. Questa G_1 dà una mappa uno a uno dallo spazio fisico a $SU(2)$ e si verifica che $N[G_1] = 1$ come richiesto.

Inoltre ogni trasformazione continua applicata a G lascia $N[G]$ invariato.

Il passo successivo è definire la corrente di Chern-Simons, la cui carica associata risulterà utile per calcolare l'azione di Yang-Mills. Si utilizzano gli indici greci dello spazio di Minkowski, ma tutte le espressioni successive rimangono valide anche nello spazio euclideo dove si usa x_4 nella parametrizzazione di A_j con $j = 1, 2, 3$.

$$\begin{aligned} j^\mu &= \frac{g^2}{8\pi^2} \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \operatorname{tr}(A_\nu \partial_\alpha A_\beta - \frac{2ig}{3} A_\nu A_\alpha A_\beta) \\ &= \frac{g^2}{16\pi^2} \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \operatorname{tr}(A_\nu F_{\alpha\beta} + \frac{2ig}{3} A_\nu A_\alpha A_\beta) \end{aligned}$$

dove si passa dalla prima alla seconda uguaglianza sfruttando la definizione e le proprietà del tensore ϵ .

La divergenza di questa corrente è indipendente dalla gauge e ha un'espressione semplice:

$$\partial_\mu j^\mu = \frac{g^2}{16\pi^2} \operatorname{tr} F_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu} \quad (1.3)$$

in cui si introduce il campo duale $\tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} F_{\alpha\beta}$.

La carica associata a questa corrente si calcola come l'integrale della prima componente:

$$Q = \int d^3x j^0 = \frac{g^2}{16\pi^2} \int d^3x \epsilon^{ijk} \operatorname{tr} \left(A_i F_{jk} + \frac{2ig}{3} A_i A_j A_k \right)$$

Per una configurazione di vuoto si ha $F_{ij} = 0$ e $A_j = \frac{i}{g} G^{-1} \partial_j G$ perciò si vede semplicemente sostituendo che:

$$Q = N[G]$$

Inoltre, è possibile scrivere l'integrale della divergenza come:

$$\int d^4x \partial_\mu j^\mu = \int d^4x [\partial_0 j^0 + \partial_i j^i]$$

E se si considera A_μ come una sequenza di configurazioni ad energia finita che interpola tra due vuoti, si può calcolare l'integrale su tutto \mathbb{R}^4 come una somma degli integrali sulla superficie di bordo che è un ipercilindro orientato lungo l'asse dei tempi. Il primo termine dell'integrale contribuisce solo nelle ipersuperfici a t costante e dà la differenza $N_2 - N_1$ degli indici di avvolgimento delle configurazioni di vuoto iniziale e finale. Nel secondo termine invece si ha l'integrale sul volume di \mathbb{R}^3 della divergenza, applicando Gauss lo si converte in un integrale sulla superficie all'infinito. Nella gauge $A_0 = 0$ la componente j^i si scrive come:

$$j^i = \frac{g^2}{16\pi^2} \epsilon^{i\nu\alpha\beta} \text{tr}(A_\nu F_{\alpha\beta} + \frac{2ig}{3} A_\nu A_\alpha A_\beta) = \frac{g^2}{16\pi^2} \epsilon^{ij0k} \text{tr} A_j F_{0k}$$

Si ottiene la forma finale perchè un indice tra ν, α, β deve essere zero per fare in modo che $\epsilon^{i\nu\alpha\beta} \neq 0$. Il secondo termine quindi si annulla, perchè uno tra i tre A_μ è A_0 . Questo permette di dire che l'integrale sulla superficie all'infinito va a zero, perchè per configurazioni ad energia finita $A_j F_{0k}$ va a zero rapidamente se $|\vec{x}| \rightarrow \infty$. Usando allora l'espressione della divergenza (1.3) si ottiene:

$$\Delta N = N_2 - N_1 = \frac{g^2}{16\pi^2} \int d^4x \text{tr} F_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu} \quad (1.4)$$

Se si considerano traiettorie che connettono vuoti con $\Delta N = 1$ si può sfruttare l'equazione precedente per calcolare l'integrale che tornerà utile nel ricavare esplicitamente la soluzione di istantone.

$$\int d^4x \text{tr} F_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{16\pi^2}{g^2}$$

Una rappresentazione schematica dello spazio delle configurazioni nella gauge $A_0 = 0$ è data dalla figura seguente, in cui le regioni ombreggiate costituiscono le configurazioni di vuoto per valori diversi del numero di avvolgimento. Sono separate da regioni in cui l'energia è diversa da zero e le traiettorie di tunneling che collegano i vari vuoti sono trasformazioni di gauge G con $N[G]$ unitario.

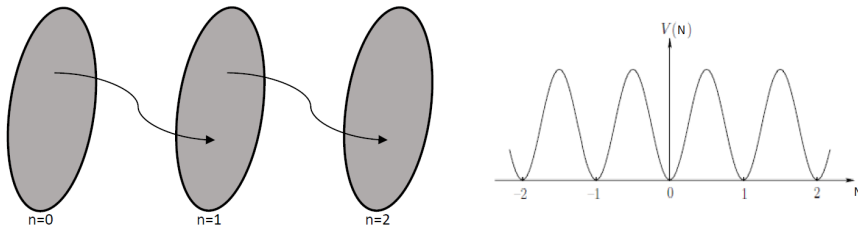


Figura 1.1: Rappresentazione dei vuoti in gauge $A_0 = 0$ e analogia con un potenziale periodico in cui N corrisponde allo winding number.

Il potenziale periodico rappresentato in figura esprime l'energia delle configurazioni di A_μ . I valori interi del numero di avvolgimento N corrispondono alle configurazioni pure-gauge con energia nulla, mentre per i valori intermedi tra un intero e l'altro si

ha $F_{\mu\nu} \neq 0$, perciò l'energia potenziale è positiva e si trova così l'andamento periodico.

Con questa visione dell'energia si ritrova l'interpretazione iniziale dei minimi classici degeneri separati da barriere di potenziale che possono essere attraversate per effetto tunnel.

Un'analogia utile, per attribuire un ulteriore significato all'effetto tunnel attraverso una barriera, è il sistema fisico dato da una particella soggetta alla forza gravitazionale che vive su un cerchio orientato verticalmente.

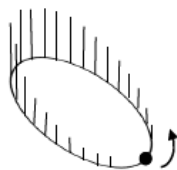


Figura 1.2: Particella vincolata su un cerchio verticale, rappresentato inclinato per indicare con le sbarrette verticali il potenziale gravitazionale.

In meccanica classica sono possibili solo oscillazioni della particella attorno alla posizione di equilibrio nel punto più basso del cerchio. In meccanica quantistica invece, si ha una probabilità non nulla che la particella possa fare un giro completo del cerchio passando attraverso la barriera, anche se la sua energia iniziale è troppo bassa perché questo sia classicamente possibile.

Considerando la lagrangiana di una singola particella di massa m :

$$L = \frac{1}{2}m\dot{\alpha}^2 - K(1 - \cos\alpha)$$

se α può assumere tutti i valori reali questa descrive una particella che si muove in un potenziale periodico con una certa intensità K , se invece si prende α periodico di periodo 2π il sistema è un pendolo nel campo gravitazionale.

Anche nella teoria di Yang-Mills si presenta la stessa situazione, nella gauge $A_0 = 0$ si hanno minimi classici degeneri e gli istantoni sono le traiettorie di tunneling che minimizzano l'azione e collegano due minimi adiacenti. Se invece si sceglie un'altra gauge: quella assiale, fissando le condizioni

$$\begin{aligned} A_3(x, y, z, t) &= 0 \\ A_2(x, y, 0, t) &= 0 \\ A_1(x, 0, 0, t) &= 0 \\ A_0(0, 0, 0, t) &= 0 \end{aligned}$$

si trova che il potenziale presenta un unico vuoto classico, perciò gli istantoni in questa gauge sono traiettorie nello spazio delle configurazioni che attraversano la barriera di potenziale attorno al vuoto e tornano al punto di partenza, in modo del tutto analogo al sistema fisico della particella nel cerchio.

In ogni caso visto che la fisica è gauge-invariante, le due scelte diverse della gauge

permettono di descrivere sempre lo stesso fenomeno fisico, che è l'effetto tunnel, e ne forniscono solo una diversa interpretazione.

Gli istantoni inoltre hanno la proprietà di essere oggetti localizzati nello spazio-tempo, il loro stesso nome dovuto a 't Hooft è stato proposto dopo l'idea iniziale che era di chiamarli pseudo-particelle.

1.2 Un'interpretazione topologica

Si può trovare un'interpretazione topologica all'integrale di $tr(F_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu})$ pensando per semplicità al campo definito sulla quattro-sfera S^4 invece che su \mathbb{R}^4 . Si considera un campo di gauge non abeliano A_p che può presentare solo singolarità che possono essere rimosse da trasformazioni di gauge. S^4 perciò risulta ricoperta da varie carte locali e in ognuna il potenziale è non singolare, nelle intersezioni tra due carte i due A_p sono collegati da una trasformazione di gauge.

Nel passaggio da una carta all'altra δA non è continuo come nel caso abeliano, ma trasforma in modo covariante:

$$\delta A_p^{II} = U \delta A_p^I U^{-1}$$

dove U è la funzione di gauge che collega A_p^I e A_p^{II} .

Si definisce quindi il secondo numero di Chern:

$$I_2 = \frac{g^2}{32\pi^2} \int d^4x \epsilon^{pqrs} tr(F_{pq}F_{rs})$$

L'obiettivo è mostrare che I_2 è una quantità topologicamente invariante, cioè che non cambia per deformazioni lisce del potenziale.

$$\begin{aligned} A_p^I &\rightarrow A_p^I + \delta A_p^I \\ A_p^{II} &\rightarrow A_p^{II} + \delta A_p^{II} \end{aligned}$$

La variazione di I_2 dovuta a questa trasformazione si scrive come:

$$\delta I_2 = \frac{g^2}{16\pi^2} \int d^4x \epsilon^{pqrs} tr(F_{pq}\delta F_{rs}) = \frac{g^2}{8\pi^2} \int d^4x \epsilon^{pqrs} tr(F_{pq}D_r\delta A_s)$$

Si ottiene la seconda uguaglianza calcolando la variazione di F_{rs}

$$\begin{aligned} \epsilon^{pqrs}\delta F_{rs} &= \epsilon^{pqrs}\delta(\partial_r A_s - \partial_s A_r - igA_r A_s + igA_s A_r) \\ &= \epsilon^{pqrs}(D_r\delta A_s - D_s\delta A_r) \\ &= 2\epsilon^{pqrs} D_r\delta A_s \end{aligned}$$

dove si usa la definizione di derivata covariante: $D_\mu A_\nu = \partial_\mu A_\nu - ig[A_\mu, A_\nu]$ e si sfrutta l'antisimmetria di ϵ^{pqrs} per lo scambio di due indici per sommare le due derivate covarianti.

Ricostruendo la derivata di un prodotto si può scrivere:

$$\epsilon^{pqrs} tr(F_{pq}D_r\delta A_s) = \epsilon^{pqrs} \partial_r tr(F_{pq}\delta A_s) - \epsilon^{pqrs} tr(D_r F_{pq} \delta A_s)$$

e il secondo termine è nullo poichè vale l'identità di Bianchi. Si ottiene perciò:

$$\delta I_2 = \frac{g^2}{8\pi^2} \int d^4x \partial_r (\epsilon^{pqrs} \text{tr}(F_{pq} \delta A_s))$$

L'integrale di una divergenza su tutta S^4 vale zero, visto che la quattro-sfera non ha bordo. Perciò se $\delta I_2 = 0$ si ha che I_2 è invariante sotto trasformazioni lisce del potenziale.

Inoltre, si vede chiaramente usando la definizione di \tilde{F}_{pq} , che l'integrale $I_2 = \Delta N$ coincide con la differenza degli indici di avvolgimento calcolata in (1.4). In questo modo si è mostrato che l'indice di avvolgimento è anche un invariante topologico.

Il vero interesse di questa trattazione però sta nei campi di gauge definiti nello spazio euclideo quadridimensionale, \mathbb{R}^4 , non sulla quattro-sfera. Tuttavia se il campo va a zero abbastanza rapidamente all'infinito spaziale, lo si può considerare definito su S^4 . Si può pensare infatti di proiettare la quattro-sfera su \mathbb{R}^4 come si fa con la proiezione stereografica tridimensionale. Si ha che un punto della sfera, per esempio il polo sud è mappato nell'infinito spaziale dello spazio euclideo. Perciò con campi di gauge che possono essere mappati da \mathbb{R}^4 a S^4 , I_2 coincide con il numero istantonico.

1.3 Simboli di 't Hooft

Per poter scrivere la soluzione di istantone è utile sviluppare per prima cosa una notazione adatta. Si definiscono i due insiemi di matrici:

$$e_p = \begin{cases} i\sigma_p & p = 1, 2, 3 \\ \mathbb{I} & p = 4 \end{cases}$$

$$e_p^\dagger = \begin{cases} -i\sigma_p & p = 1, 2, 3 \\ \mathbb{I} & p = 4 \end{cases}$$

dove le σ_p sono le matrici di Pauli. In questo modo è possibile rappresentare un vettore V_p di $SO(4)$ come una matrice 2×2 :

$$V = e_p^\dagger V_p = \begin{pmatrix} V_4 - iV_3 & -V_2 - iV_1 \\ V_2 - iV_1 & V_4 + iV_3 \end{pmatrix} \quad (1.5)$$

E prendendo la traccia si riottengono le componenti del vettore di partenza:

$$V_p = \frac{1}{2} \text{tr}(V e_p)$$

Si definiscono poi i simboli:

$$\begin{aligned} \eta_{pq} &= -i(e_p e_q^\dagger - \delta_{pq} \mathbb{I}) \\ \bar{\eta}_{pq} &= -i(e_p^\dagger e_q - \delta_{pq} \mathbb{I}) \end{aligned}$$

che costituiscono un set di 16 matrici 2×2 e vengono usati per esprimere le rotazioni infinitesime.

Infatti, il gruppo delle rotazioni nello spazio euclideo quattro-dimensionale è

$$SO(4) \simeq \frac{SU(2) \times SU(2)}{Z_2}$$

che si può scrivere in questo modo perchè una rotazione di un vettore V_p equivale a moltiplicarlo a destra e a sinistra per due matrici unitarie, in generale diverse, che corrispondono ai due gruppi $SU(2)$ nella realizzazione di $SO(4)$ sopra descritta. La divisione per Z_2 , con cui si costruisce la classe di equivalenza, è necessaria perchè se si moltiplica due volte per $-\mathbb{I}$ il vettore rimane invariato.

Gli η sono elementi dell'algebra di $SU(2)$ che si possono scrivere anche come:

$$\eta_{pq} = \eta_{pq}^j \sigma_j \quad \bar{\eta}_{pq} = \bar{\eta}_{pq}^j \sigma_j$$

Dove le componenti di $SU(2)$ sono fissate da:

$$\eta_{ij}^k = \bar{\eta}_{ij}^k = \epsilon_{ijk} \quad \eta_{i4}^k = -\bar{\eta}_{i4}^k = \delta_{ik}$$

Inoltre soddisfano le proprietà: $\eta_{pq} = -\eta_{qp}$ e $\bar{\eta}_{pq} = -\bar{\eta}_{qp}$ e per costruzione η_{pq} è autoduale:

$$\eta_{pq} = \frac{1}{2} \epsilon_{pqrs} \eta_{rs} \quad (1.6)$$

mentre $\bar{\eta}_{pq}$ è anti-autoduale.

1.4 Soluzioni di istantone

La soluzione si può ricavare esplicitamente dalle equazioni del moto euclidean del secondo ordine di Yang-Mills, ma il metodo migliore consiste nel minimizzare l'azione euclidean dato che si vuole trovare una configurazione di A_p con azione finita che colleghi due zeri dell'energia. Sapendo che $F_{rs}^2 = \tilde{F}_{rs}^2$ si può scrivere l'azione nel modo seguente:

$$\begin{aligned} \int d^4x \frac{1}{2} \text{tr} F_{rs}^2 &= \int d^4x \frac{1}{4} \text{tr} (F_{rs}^2 + \tilde{F}_{rs}^2) \\ &= \int d^4x \frac{1}{4} \text{tr} (F_{rs} \mp \tilde{F}_{rs})^2 \pm \int d^4x \frac{1}{2} \text{tr} (F_{rs} \tilde{F}_{rs}) \\ &= \pm \left(\frac{8\pi^2}{g^2} \right) n + \int d^4x \frac{1}{4} \text{tr} (F_{rs} \mp \tilde{F}_{rs})^2 \\ &\geq \left(\frac{8\pi^2}{g^2} \right) |n| \end{aligned}$$

dove n è il numero istantonico e il secondo integrale nella seconda riga è stato calcolato precedentemente usando la corrente di Chern Simons (1.4). Si nota quindi che l'azione è minima se il campo soddisfa alla condizione di auto dualità (in inglese self-duality)

$$F_{rs} = \tilde{F}_{rs} \quad (1.7)$$

e le configurazioni di A_p che soddisfano questa equazione vengono chiamate istantoni. Si vede che l'azione è minimizzata anche soddisfacendo la condizione di anti-self-duality, ($F_{rs} = -\tilde{F}_{rs}$), le cui soluzioni vengono dette anti-istantoni.

Per risolvere la condizione (1.7) è utile partire da un ansatz che tenga conto delle simmetrie della teoria e poi determinare i parametri che lo definiscono. Si vuole che la soluzione sia invariante sotto trasformazioni di gauge globali di $SU(2)$ e trasformazioni di uno dei due fattori $SU(2)$ che compaiono in $SO(4)$, perchè se si applicano queste trasformazioni l'azione rimane invariata. Questo suggerisce di ipotizzare la struttura della soluzione come:

$$A_p = \eta_{pq} x_q f(x^2)$$

Il campo corrispondente è

$$\begin{aligned} F_{pq} &= \partial_p A_q - \partial_q A_p - ig[A_p, A_q] \\ &= \eta_{qs} \delta_{ps} f(x^2) + \eta_{qs} x_s \frac{\partial f}{\partial x^2} 2x_p - \eta_{ps} \delta_{qs} f(x^2) - \eta_{ps} x_s \frac{\partial f}{\partial x^2} 2x_p - ig[\eta_{ps}, \eta_{qr}] x_s x_r f^2 \\ &= -2\eta_{pq} f + 2(\eta_{qs} x_s x_p - \eta_{ps} x_s x_q) f' - ig[\eta_{ps}, \eta_{qr}] x_s x_r f^2 \end{aligned}$$

Si arriva all'espressione finale sfruttando il fatto che η_{pq} è antisimmetrico e scrivendo la derivata di f rispetto a x^2 come f' .

Richiedere che questo F_{pq} sia autoduale impone delle condizioni su $f(x^2)$ e visto che il potenziale è invariante per rotazioni è sufficiente esaminare il campo lungo il semiasse positivo x_4 . Ovvero ponendo a zero tutte le $x_r \neq x_4$ si ottiene:

$$\begin{aligned} F_{ij} &= -2\eta_{ij} f + 2(\eta_{44} x_4^2 - \eta_{44} x_4^2) f' - ig[\eta_{i4}, \eta_{j4}] x_4^2 f^2 = -2\eta_{ij} f - ig[\eta_{i4}, \eta_{j4}] x^2 f^2 \\ F_{k4} &= -2\eta_{k4} f + 2(\eta_{44} x_4^2 - \eta_{k4} x_4^2) f' - ig[\eta_{k4}, \eta_{44}] x_4^2 f^2 = -2\eta_{k4} f - 2\eta_{k4} x^2 f' \end{aligned}$$

visto che, per come è definito, $\eta_{44} = 0$ si ottengono le espressioni finali.

La condizione di auto dualità $F_{pq} = \frac{1}{2} \epsilon_{pqrs} F_{rs}$ scegliendo r o s uguali a 4 diventa:

$F_{pq} = \frac{1}{2} (\epsilon_{pqr4} F_{r4} + \epsilon_{pq4s} F_{4s})$ dove sfruttando l'antisimmetria di ϵ e di F_{4s} si semplifica il due a denominatore. Si nota poi che p, q ed r ora possono assumere solo valori da 1 a 3 altrimenti ϵ_{pqr4} si annullerebbe. Quindi sfruttando le due equazioni precedenti si ottiene:

$$\begin{aligned} F_{ij} &= \epsilon_{ijk} F_{k4} \\ -2\eta_{ij} f - ig(\eta_{i4} \eta_{j4} - \eta_{j4} \eta_{i4}) x^2 f^2 &= \epsilon_{ijk} (-2\eta_{k4} f - 2\eta_{k4} x^2 f') \\ ig(2i\eta_{ij} + 3\delta_{ij} \mathbb{I} - 2i\eta_{ji} - 3\delta_{ij} \mathbb{I}) f^2 &= 2\epsilon_{ijk} \eta_{k4} f' \end{aligned}$$

Sfruttando il fatto che $\eta_{ij} = \epsilon_{ijk} \eta_{k4}$, visto che η_{pq} è self-dual, i termini della seconda uguaglianza lineari in f si semplificano. Si usa inoltre l'identità dei simboli di 't Hooft: $\eta_{pq} \eta_{qr} = -2i\eta_{pr} - 3\delta_{pr} \mathbb{I}$ per ottenere l'ultima riga. Poi semplificando le due δ_{ij} , usando $\eta_{ij} = -\eta_{ji}$ e nuovamente l'autodualità di η si ottiene un'equazione semplice per f :

$$\frac{df}{d(x^2)} = -g f^2$$

che è risolta dalla funzione $f = \frac{1}{g} \frac{1}{x^2 + \lambda^2}$, come si può verificare facilmente.

λ^2 è una costante di integrazione che deve essere positiva per avere una soluzione non singolare. Mettendo tutto insieme si ottiene la soluzione:

$$A_p = \frac{1}{g} \frac{\eta_{pq} x_q}{x^2 + \lambda^2} \quad A_p^j = \frac{2}{g} \frac{\eta_{pq}^j x_q}{x^2 + \lambda^2}$$

dove la prima espressione dà il vettore del potenziale espresso come una matrice 2×2 come visto in (1.5), mentre la seconda mostra le componenti di A_p nell'algebra di $SU(2)$ scritte rispetto alla base tradizionale data da $[\sigma_i/2]_{i=1,2,3}$.

Il parametro λ definisce la dimensione caratteristica dell'istantone e il fatto che siano possibili tutti i valori reali esprime l'invarianza di scala della teoria. Il numero istantonico è $n = 1$ per questa soluzione, si può ricavare scrivendo il campo F_{pq} a partire dal potenziale e calcolando l'integrale di $tr F_{pq} \tilde{F}_{pq}$ su tutto lo spazio.

Si può mostrare inoltre che a grande distanza A_p è un potenziale di pura gauge e per fare questo si considera la matrice unitaria

$$S = \frac{e_p^\dagger x_p}{|x|}$$

e si verifica che $\frac{i}{g} S^{-1} \partial_p S = \frac{1}{g} \frac{\eta_{pq} x_q}{x^2}$.

Perciò la soluzione di istantone si può scrivere come:

$$A_p = \frac{i}{g} S^{-1} \partial_p S \left(\frac{x^2}{x^2 + \lambda^2} \right)$$

dove risulta evidente che per $|x| \rightarrow \infty$ il potenziale è pure-gauge come deve essere per rappresentare una configurazione di vuoto. In questo modo risulta esplicito il significato degli istantoni come configurazioni del potenziale che realizzano il tunneling tra due vuoti.

Si può infine applicare una trasformazione di gauge a questo potenziale in modo da ottenere un altro modo utile per esprimerlo:

$$\begin{aligned} A'_p &= S A_p S^{-1} - \frac{i}{g} \partial_p S S^{-1} \\ &= \frac{i}{g} \partial_p S S^{-1} \left(\frac{x^2}{x^2 + \lambda^2} - 1 \right) \\ &= \frac{1}{g} \frac{\bar{\eta}_{pq}^j x_q \lambda^2}{x^2 (x^2 + \lambda^2)} \end{aligned} \quad (1.8)$$

Questa formulazione è utile perchè suggerisce un ansatz che porta alle soluzioni di multi-istantone, cioè alle configurazioni di A_p con winding number n maggiore di 1.

$$A_p = \bar{\eta}_{pr} f_r(x)$$

dove $f_r(x)$ sono generiche funzioni di x_p senza particolari simmetrie e vengono determinate imponendo l'auto dualità del campo F_{pq} .

Capitolo 2

La costruzione ADHM

Il metodo elaborato da Atiyah–Drinfeld–Hitchin–Manin permette di costruire la soluzione di istantone, trasformando in un insieme di equazioni algebriche la condizione di auto dualità del campo, che è un'equazione differenziale in A_p .

Per questa costruzione matematica è necessario introdurre i quaternioni, ovvero una generalizzazione dei numeri complessi che coinvolge tre unità immaginarie i, j e k , le quali anticommutano, soddisfano $ijk = -1$ e sono tali che: $i^2 = j^2 = k^2 = -1$.

Il quaternione generico si scrive come $q = a + bi + cj + dk$ con $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ e permette di esprimere un vettore di \mathbb{R}^4 in modo analogo alla corrispondenza tra i punti di \mathbb{R}^2 e del piano complesso. Per quello che si deve fare è utile definire:

$$\hat{e}_1 = -i, \quad \hat{e}_2 = -j, \quad \hat{e}_3 = -k, \quad \hat{e}_4 = 1$$

che permette di espandere il generico quaternione come $q = q_r \hat{e}_r$.

L'operazione di coniugazione è definita in modo simile alla coniugazione complessa: $q^* = a - bi - cj - dk = q_r \hat{e}_r^*$ sfruttando anche l'espansione con gli e_r .

Come primo passo di questa costruzione, si definisce la matrice di quaternioni di dimensione $(n + 1) \times n$ e della forma $M = B - Cx$, in cui B e C sono matrici costanti, che hanno la stessa dimensione di M , e infine x è la rappresentazione in quaternioni di un punto dello spazio euclideo: se $x \in \mathbb{R}^4$ si scrive $x = x_r \hat{e}_r$ con $x_r \in \mathbb{R}$.

Si richiede che la matrice $n \times n$ data da $R = M^\dagger M$ sia reale e invertibile e si costruisce il campo di gauge A_p utilizzando N , un vettore di quaternioni. N deve essere un vettore colonna di $(n + 1)$ componenti che soddisfi a:

$$N^\dagger M = 0 \qquad N^\dagger N = \mathbb{I}$$

Si definisce perciò:

$$\mathcal{A}_p = \frac{1}{g} N^\dagger \partial_p N$$

e si vede che questa espressione è anche uguale a $\mathcal{A}_p = -\frac{1}{g} (\partial_p N^\dagger) N$, perchè derivando

la condizione di normalizzazione $N^\dagger N = \mathbb{I}$ si ottiene $N^\dagger \partial_p N = -(\partial_p N^\dagger) N$. Da questi due modi per scrivere \mathcal{A}_p si intuisce che è un quaternione puramente immaginario,

perchè le due espressioni sono una la coniugata dell'altra a meno di un segno, come ci si aspetta visto che è prodotto di un vettore riga per un vettore colonna. Per prima cosa poi si verifica che questo potenziale \mathcal{A}_p definisca un campo F_{pq} che soddisfi alla condizione di auto dualità.

$$\begin{aligned} F_{pq} &= \partial_p A_q - \partial_q A_p + g[A_p, A_q] \\ &= \frac{1}{g}(\partial_p N^\dagger \partial_q N - \partial_p N^\dagger N N^\dagger \partial_p N - \partial_q N^\dagger \partial_p N + \partial_q N^\dagger N N^\dagger \partial_p N) \\ &= \frac{1}{g}[\partial_p N^\dagger (\mathbb{I} - N N^\dagger) \partial_q N - (p \leftrightarrow q)] \end{aligned}$$

Per passare dalla prima alla seconda riga si sostituisce l'espressione di \mathcal{A}_p definita sopra, usando la prima scrittura nei termini con le derivate parziali e la seconda nei termini con il prodotto $\mathcal{A}_p \mathcal{A}_q$ in modo da poter raccogliere nell'ultima riga il termine $(\mathbb{I} - N N^\dagger)$. Si vede anche che gli ultimi due termini della seconda riga si ottengono dai primi due scambiando gli indici p e q , perciò si trova la scrittura compatta dell'ultima riga.

Si mostra ora che il termine raccolto in parentesi tonda è un operatore che proietta nel sottospazio ortogonale a N e che questo coincide con il sottospazio generato da M . Se si applica il proiettore a N : $(\mathbb{I} - N N^\dagger)N = N - N N^\dagger N = N - N = 0$, sfruttando la condizione di normalizzazione, si ottiene 0 come proiezione di N sul suo sottospazio ortogonale, come deve essere. Se lo si applica a M : $(\mathbb{I} - N N^\dagger)M = M$, perchè $N^\dagger M = 0$.

Il sottospazio generato da M si può scrivere anche come $M(M^\dagger M)^{-1}M^\dagger$ visto che applicando questo operatore a M si ottiene proprio la matrice stessa:

$$[M(M^\dagger M)^{-1}M^\dagger]M = (M M^{-1})(M^\dagger)^{-1}M^\dagger M = \mathbb{I}M = M.$$

Perciò si può scrivere:

$$\mathbb{I} - N N^\dagger = M(M^\dagger M)^{-1}M^\dagger = M R^{-1} M^\dagger$$

mettendo in evidenza la matrice R definita sopra come $R = M^\dagger M$.

Si può allora sostituire nel calcolo di F_{pq} :

$$\begin{aligned} F_{pq} &= \frac{1}{g}[\partial_p N^\dagger M R^{-1} M^\dagger \partial_q N - (p \leftrightarrow q)] \\ &= \frac{1}{g}[N^\dagger \partial_p M R^{-1} \partial_q M^\dagger N - (p \leftrightarrow q)] \\ &= \frac{1}{g}[N^\dagger C \hat{e}_p R^{-1} \hat{e}_q^* C^\dagger N - (p \leftrightarrow q)] \end{aligned}$$

Per passare dalla prima alla seconda riga si usano le uguaglianze: $\partial_p N^\dagger M = -N^\dagger \partial_p M$ e $M^\dagger \partial_q N = -\partial_q M^\dagger N$ che si ottengono derivando $N^\dagger M = 0$ e la sua aggiunta.

Mentre per ottenere l'ultima riga si sostituisce l'espressione di M nelle due derivate parziali: $\partial_p M = \partial_p(B - C x_r \hat{e}_r) = -C \hat{e}_p$ e $\partial_q M^\dagger = \partial_q(B^\dagger - x_r \hat{e}_r^* C^\dagger) = -\hat{e}_q^* C^\dagger$.

Ora si sfrutta la richiesta iniziale di avere la matrice R reale, perchè in questo modo questa commuta con tutti gli \hat{e}_p e si arriva a scrivere:

$$F_{pq} = \frac{1}{g} N^\dagger C R^{-1} (\hat{e}_p \hat{e}_q^* - \hat{e}_q \hat{e}_p^*) C^\dagger N$$

Da questa espressione si vede che il campo soddisfa la relazione: $F_{pq} = \tilde{F}_{pq}$, perchè la quantità tra parentesi tonda è autoduale. Infatti $\chi_{pq} = (\hat{e}_p \hat{e}_q^* - \hat{e}_q \hat{e}_p^*)$ si può scrivere sfruttando la corrispondenza tra gli \hat{e}_r e le matrici e_s usate per definire i simboli di 't Hooft, che non sono altro che le matrici di Pauli e l'identità. Se si inverte la definizione di η_{pq} si può esprimere:

$$e_p e_q^\dagger = i\eta_{pq} + \delta_{pq} \mathbb{I}$$

Sapendo poi che η_{pq} è self-dual si calcola:

$$\begin{aligned} \tilde{\chi}_{pq} &= \frac{1}{2} \epsilon_{pqrs} (e_r e_s^\dagger - e_s e_r^\dagger) \\ &= \frac{1}{2} \epsilon_{pqrs} (i\eta_{rs} + \delta_{rs} \mathbb{I} - i\eta_{sr} - \delta_{sr} \mathbb{I}) \\ &= \frac{1}{2} \epsilon_{pqrs} (i\eta_{rs} - i\eta_{sr}) \\ &= \chi_{pq} \end{aligned}$$

I due termini con δ_{rs} si semplificano perchè questa è simmetrica per lo scambio di indici e si ottiene poi l'ultima uguaglianza sfruttando: $\tilde{\eta}_{rs} = \eta_{rs}$.

Ciò che manca ora da mostrare è che la soluzione \mathcal{A}_p ottenuta in questo modo può essere ricondotta alla soluzione di 't Hooft e perciò come questa ha numero istantónico n , si vedrà che la prima parte si dimostra esplicitamente nel caso di un esempio semplice. In generale poi una matrice M che soddisfa la condizione di realtà ed è connessa in modo continuo ad una certa M che dà la soluzione di 't Hooft deve avere necessariamente numero istantónico n .

La matrice M non è determinata in modo unico dal campo di gauge \mathcal{A}_p , perchè questo rimane invariato se si applicano le trasformazioni:

$$M \rightarrow SMT \quad N \rightarrow SN$$

In cui S è una matrice di quaternioni indipendente da x che soddisfa a $S^\dagger S = \mathbb{I}$ e T è una matrice reale, invertibile e indipendente da x . Si mostra che il potenziale che viene definito è lo stesso usando semplicemente la normalizzazione di S :

$$\mathcal{A}'_p = \frac{1}{g} (SN)^\dagger \partial_p (SN) = \frac{1}{g} N^\dagger (S^\dagger S) \partial_p N = \mathcal{A}_p$$

E si vede anche che continuano a valere le relazioni iniziali con cui sono stati definiti N ed M : $(SN)^\dagger SN = N^\dagger N = \mathbb{I}$ e $(SN)^\dagger (SMT) = N^\dagger MT = 0$.

Grazie a questa libertà nel definire M ed N si può fare un modo che la matrice C sia in una forma canonica, con la prima riga di zeri e sotto la matrice identità $n \times n$.

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Risulta ancora possibile modificare N ed M con la matrice S , di dimensione $(n + 1) \times (n + 1)$, che è formata da due blocchi lungo la diagonale:

$$S = \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & T^{-1} \end{pmatrix}$$

dove u è un quaternionio unitario, cioè tale che $u^*u = 1$ e T è una matrice ortogonale $n \times n$. Per esprimere in modo semplice la condizione di realtà è utile decomporre B come:

$$B = \begin{pmatrix} v \\ b \end{pmatrix}$$

in cui v è un vettore riga di k quaternioni e b è una matrice di quaternioni $n \times n$.

La condizione di realtà consiste nel richiedere che $R = M^\dagger M$ sia reale, cioè che:

$$\begin{aligned} M^\dagger M &= (B^\dagger - x^*C^\dagger)(B - Cx) \\ &= B^\dagger B - x^*C^\dagger B - B^\dagger Cx + x^*C^\dagger Cx \\ &= (v^\dagger v + b^\dagger b) - (x^*b + b^\dagger x) + x^*x\mathbb{I} \end{aligned} \quad (2.1)$$

sia reale. Si può mostrare come si arriva all'ultima riga direttamente calcolando i prodotti tra matrici, prendendo ad esempio il caso semplice di $n = 2$.

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad C^\dagger = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad C^\dagger C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbb{I}_2$$

Poi scrivendo B in modo generico si possono calcolare gli altri prodotti:

$$\begin{aligned} B &= \begin{pmatrix} v \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 \\ b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix} & B^\dagger &= \begin{pmatrix} v_1^* & b_1^* & b_3^* \\ v_2^* & b_2^* & b_4^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v^\dagger \\ b^\dagger \end{pmatrix} \\ C^\dagger B &= \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix} = b & B^\dagger C &= \begin{pmatrix} b_1^* & b_3^* \\ b_2^* & b_4^* \end{pmatrix} = b^\dagger \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B^\dagger B &= \begin{pmatrix} |v_1|^2 + |b_1|^2 + |b_3|^2 & v_1^*v_2 + b_1^*b_2 + b_3^*b_4 \\ v_2^*v_1 + b_2^*b_1 + b_4^*b_3 & |v_2|^2 + |b_2|^2 + |b_4|^2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} |v_1|^2 & v_1^*v_2 \\ v_2^*v_1 & |v_2|^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} |b_1|^2 + |b_3|^2 & b_1^*b_2 + b_3^*b_4 \\ b_2^*b_1 + b_4^*b_3 & |b_2|^2 + |b_4|^2 \end{pmatrix} = v^\dagger v + b^\dagger b \end{aligned}$$

Esaminando queste relazioni è semplice convincersi che valgono anche per matrici di dimensione maggiore.

Per avere quindi $M^\dagger M$ reale si esaminano uno ad uno i termini dell'espressione (2.1). Si vede subito che l'ultimo termine $x^*x\mathbb{1}$ è una matrice reale per qualsiasi x . Il termine lineare in x : $x^*b_{mn} + (b^\dagger)_{nm}x = x^*b_{mn} + (b_{nm})^*x$ è reale per x arbitrario se b è simmetrica, perchè in questo caso si ha la somma di un numero più il suo complesso coniugato e perciò la parte immaginaria dei quaternioni si annulla. In conclusione la condizione di realtà si riduce alla richiesta che sia reale:

$$B^\dagger B = v^\dagger v + b^\dagger b \quad (2.2)$$

Si potrebbe mostrare infine che questa condizione lascia esattamente $8n - 3$ parametri fisici liberi, che sono quelli che corrispondono alla soluzione di istantone con winding number n . Questi parametri nel caso semplice di $n = 1$ sono cinque: guardando la soluzione (1.8) si vede che uno è il parametro λ che dà la dimensione caratteristica dell'istantone e gli altri quattro sono le coordinate che definiscono un oggetto localizzato nello spazio-tempo.

2.1 Esempio di applicazione

Scrivendo esplicitamente le matrici si può applicare la costruzione per ottenere la soluzione di istantone (1.8) espressa con i simboli di 't Hooft.

Per fare in modo che sia verificata la condizione di realtà (2.2) si considera il caso in cui tutte le componenti di v sono reali e b è diagonale.

$$B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_k \\ \omega_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \omega_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \omega_k \end{pmatrix}$$

Con i $\lambda_i \in \mathbb{R}$ e gli ω_i che sono quaternioni e si possono considerare come posizioni in \mathbb{R}^4 .

La matrice M quindi è:

$$M = B - Cx = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_k \\ \omega_1 - x & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \omega_2 - x & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \omega_k - x \end{pmatrix}$$

Per costruire il campo di gauge \mathcal{A}_p bisogna determinare il vettore colonna N in modo che soddisfi la condizione:

$$0 = (N^\dagger M)_j = N_0^\dagger \lambda_j + N_j^\dagger (\omega_j - x) \quad (2.3)$$

dove si è separata la prima componente di N dalle altre N_j , chiamandola N_0 . Si ottiene N_j^\dagger moltiplicato per $(\omega_j - x)$, perchè escludendo la prima riga dalla matrice B si ottiene una matrice diagonale e la matrice C senza la prima riga è l'identità.

Si può scrivere poi in un modo più utile N_0 senza perdere generalità:

$$N_0 = \frac{u(x)}{\sqrt{\rho(x)}}$$

utilizzando nella definizione un generico quaternioni unitario: $u^*u = 1$ e ρ come fattore reale di normalizzazione, che devono essere determinati.

Invertendo la condizione (2.3) si può ricavare N_j prendendo poi l'aggiunto di entrambi i membri.

$$N_j^\dagger = \frac{N_0^\dagger \lambda_j}{(x - \omega_j)} \quad N_j = \frac{N_0 \lambda_j}{(x - \omega_j)^*} = \frac{\lambda_j}{\sqrt{\rho}} \frac{x - \omega_j}{|x - \omega_j|^2} u(x)$$

Imponendo poi la condizione di normalizzazione per N si può determinare ρ :

$$N^\dagger N = \mathbb{I} \quad \implies \quad N_0^\dagger N_0 + N_j^\dagger N_j = \frac{u^*u}{\rho} + \sum_j \frac{\lambda_j^2}{\rho |x - \omega_j|^2} u^*u = \mathbb{I}$$

E visto che $u^*u = 1$, invertendo si ricava ρ :

$$\rho(x) = 1 + \sum_j \frac{\lambda_j^2}{|x - \omega_j|^2}$$

Si mostra ora che imponendo $u(x) = 1$ si trova la soluzione di 't Hooft, che in termini delle componenti di $SU(2)$ si scrive:

$$A_p = \frac{2\lambda^2}{g} \frac{\bar{\eta}_{pq}^j x_q}{x^2(x^2 + \lambda^2)} \quad (2.4)$$

Partendo dal vettore N bisogna imporre $n = 1$ e $\omega_1 = 0$ e si ottiene un vettore di due componenti:

$$N_0 = \frac{1}{\sqrt{\rho}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\lambda^2}{|x|^2}}} \quad N_1 = \frac{x\lambda}{|x|^2} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\lambda^2}{|x|^2}}} \quad (2.5)$$

Da N si calcola il quaternioni \mathcal{A}_p , in cui si omette il fattore $\frac{1}{g}$ aggiungendolo solo alla fine. Si usa nei passaggi seguenti la derivata: $\partial_p \frac{1}{\sqrt{\rho}} = -\frac{1}{2\rho^{\frac{3}{2}}} \partial_p \left(\frac{\lambda^2}{|x|^2} \right) = \frac{\lambda^2 x_p}{\rho^{\frac{3}{2}} |x|^4}$.

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_p &= N^\dagger \partial_p N = N_0^* \partial_p N_0 + N_1^* \partial_p N_1 \\ &= \frac{\lambda^2 x_p}{\rho^2 |x|^4} + \frac{\lambda x^*}{|x|^2 \sqrt{\rho}} \left(\frac{\lambda \hat{e}_p}{|x|^2 \sqrt{\rho}} - \frac{\lambda x \cdot 2x_p}{|x|^4 \sqrt{\rho}} + \frac{x \lambda^3 x_p}{|x|^6 \rho^{\frac{3}{2}}} \right) \\ &= \frac{\lambda^2 x_p}{(|x|^2 + \lambda^2)^2} + \frac{\lambda^2 x^* \hat{e}_p}{|x|^2 (|x|^2 + \lambda^2)} - \frac{\lambda^2 \cdot 2x_p}{|x|^2 (|x|^2 + \lambda^2)} + \frac{\lambda^4 x_p}{|x|^2 (|x|^2 + \lambda^2)^2} \\ &= \frac{\lambda^2 x^* \hat{e}_p - \lambda^2 x_p}{|x|^2 (|x|^2 + \lambda^2)} \end{aligned} \quad (2.6)$$

Dove dalla seconda alla terza riga si è sostituita l'espressione di ρ usata nelle equazioni (2.5) e si è scritto tutto in modo più chiaro eseguendo prodotti e semplificazioni. Si ottiene poi l'ultima riga osservando che gli altri termini si semplificano. Da questa espressione si può ricavare ad esempio la componente con $p = 1$ usando l'espansione $x^* = x_r \hat{e}_r^*$ e le proprietà dei quaternioni.

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_1 &= \frac{\lambda^2}{g |x|^2 (|x|^2 + \lambda^2)} [(x_1 \hat{e}_1^* + x_2 \hat{e}_2^* + x_3 \hat{e}_3^* + x_4 \hat{e}_4^*) \hat{e}_1 - x_1] \\ &= \frac{\lambda^2}{g |x|^2 (|x|^2 + \lambda^2)} (x_1 - x_2 \hat{e}_3 + x_3 \hat{e}_2 + x_4 \hat{e}_1 - x_1) \\ &= \frac{\lambda^2}{g |x|^2 (|x|^2 + \lambda^2)} (x_4 \hat{e}_1 + x_3 \hat{e}_2 - x_2 \hat{e}_3) \end{aligned}$$

Si sa poi che il quaternioni così determinato può essere messo in corrispondenza con le sue componenti nella notazione di $SU(2)$ con l'espansione:

$$\mathcal{A}_p = - \sum_{a=1}^3 \frac{\hat{e}_a}{2} A_p^a$$

Si possono perciò sostituire in questa equazione le componenti (2.4) della soluzione di 't Hooft per verificare che il risultato sia esattamente lo stesso quaternioni ricavato attraverso la costruzione ADHM.

Le componenti della soluzione di 't Hooft, fissato ad esempio $p = 1$, sono:

$$\begin{aligned} A_1^j &= \frac{2\lambda^2}{g x^2 (x^2 + \lambda^2)} (\bar{\eta}_{11}^j x_1 + \bar{\eta}_{12}^j x_2 + \bar{\eta}_{13}^j x_3 + \bar{\eta}_{14}^j x_4) \\ &= \frac{2\lambda^2}{g x^2 (x^2 + \lambda^2)} (\epsilon_{11j} x_1 + \epsilon_{12j} x_2 + \epsilon_{13j} x_3 - \delta_{1j} x_4) \end{aligned}$$

Ricordando le proprietà del tensore ϵ_{ijk} (con due indici uguali vale zero, $\epsilon_{123} = 1$ e così tutte le permutazioni pari degli indici) e della delta di Kronecker si può calcolare:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_1 &= -\frac{\hat{e}_1}{2} A_1^1 - \frac{\hat{e}_2}{2} A_1^2 - \frac{\hat{e}_3}{2} A_1^3 \\ &= \frac{2\lambda^2}{g x^2 (x^2 + \lambda^2)} \left[\frac{\hat{e}_1}{2} \delta_{11} x_4 - \frac{\hat{e}_2}{2} (-x_3 - \delta_{12} x_4) - \frac{\hat{e}_3}{2} (x_2 - \delta_{13} x_4) \right] \\ &= \frac{\lambda^2}{g x^2 (x^2 + \lambda^2)} (x_4 \hat{e}_1 + x_3 \hat{e}_2 - x_2 \hat{e}_3) \end{aligned}$$

che è proprio la stessa espressione ricavata sopra, partendo dal vettore N . Si può ripetere lo stesso procedimento fissando un altro valore per p e si ottiene lo stesso risultato, mostrando la consistenza della costruzione presentata.

Se inizialmente fosse stata scelta una funzione diversa da $u(x) = 1$, come risultato si avrebbe un A_p collegato a quello ricavato da una trasformazione di gauge. Infatti, se si sceglie un'altra funzione si trasforma il vettore N moltiplicandolo per un

quaternione unitario: $N \longrightarrow NW$ e si ottiene:

$$\mathcal{A}'_p = \frac{1}{g}(NW)^\dagger \partial_p(NW) = \frac{1}{g}W^\dagger \mathcal{A}_p W + \frac{1}{g}W^\dagger \partial_p W \quad (2.7)$$

che è proprio il modo in cui si scrivono le trasformazioni di gauge. Si può vedere un esempio semplice per conferma, scegliendo $u(x) = W = \frac{x}{|x|}$ come quaternione unitario si definisce:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}'_p &= (N'_0)^* \partial_p N'_0 + (N'_1)^* \partial_p N'_1 \\ &= \frac{x^*}{|x|} \mathcal{A}_p \frac{x}{|x|} + \frac{1}{\rho} \frac{x^* \hat{e}_p |x| - x \frac{x_p}{|x|}}{|x|^2} + \frac{\lambda^2 x^*}{\rho |x|^5} \left(\hat{e}_p |x| - x \frac{x_p}{|x|} \right) \\ &= \frac{x^*}{|x|} \mathcal{A}_p \frac{x}{|x|} + \frac{x^*}{|x|} \left(\frac{\hat{e}_p |x| - x \frac{x_p}{|x|}}{|x|^2} \right) \end{aligned}$$

svolgendo i calcoli per passare dalla prima alla seconda uguaglianza si ritrovano tutti i termini ottenuti in (2.6) moltiplicati a sinistra per $u^*(x)$ e a destra per $u(x)$. Poi i termini rimanenti ricostruiscono la seconda parte dell'equazione (2.7), visto che il termine tra parentesi dell'ultima riga è proprio $\partial_p u(x)$.

Conclusioni e cenni di applicazioni

Per riassumere quanto trattato bisogna ricordare la definizione data per gli istantoni, che sono particolari soluzioni ad azione finita, diversa da zero, delle equazioni del moto classiche della teoria di Yang-Mills nello spazio euclideo. L'interpretazione fondamentale presentata considera gli istantoni come configurazioni del potenziale che permettono l'effetto tunnel tra i minimi classici dell'energia nella gauge temporale.

L'interesse principale di questa trattazione poi è stato focalizzato sulla costruzione ADHM, cioè un metodo algebrico utile per scrivere le soluzioni di istantone in modo semplice senza dover risolvere equazioni differenziali.

Questa costruzione in numerosi testi viene presentata attraverso tecniche di geometria differenziale lavorando con connessioni e fibrati vettoriali su varietà. La realizzazione di questo metodo nel 1977 è stata particolarmente rilevante, perchè costituisce uno dei primi esempi di una sofisticata applicazione della geometria moderna alla fisica.

Ci sono varie teorie in fisica che utilizzano queste particolari soluzioni di istantone per spiegare fenomeni complessi in molti ambiti diversi. Si accenna nei paragrafi successivi in particolare al confinamento dei quark e alla violazione del numero barionico nei processi elettrodeboli.

Istantoni e confinamento

Il postulato del confinamento dei quark afferma che sono osservabili stati legati di quark solo se sono complessivamente privi di carica di colore. A grandi distanze quark e gluoni sono fortemente vincolati tra loro, perchè il potenziale delle interazioni forti cresce linearmente con la distanza tra le particelle, perciò non si possono osservare quark o gluoni singoli liberi e si parla di schiavitù infrarossa.

Una delle prime proposte di applicazione degli istantoni è stata usarli per spiegare il confinamento nell'ambito della cromodinamica quantistica (QCD).

Quando queste pseudo-particelle sono ben separate e non interagiscono tra loro si può parlare di gas di istantoni. Callan, Dashen e Gross hanno introdotto l'approssimazione di gas di istantoni per modellizzare quark e gluoni e spiegare il confinamento. Questo tentativo però non ha avuto successo, perchè considerare gli istantoni come un gas non è una buona approssimazione in QCD neanche a livello qualitativo. In questa teoria si è visto infatti che, data la dimensione λ caratteristica delle soluzioni di istantone, quelle di piccole dimensioni vengono soppresse e sono favorite

quelle più grandi. Se λ diventa grande si ha che l'integrazione sulla dimensione degli istantoni diverge, cioè ogni pseudo-particella al crescere della dimensione tende a sovrapporsi alle altre influenzandone il comportamento. Non si può perciò usare il modello di un gas e il limite infrarosso della QCD non risulta trattabile con una approssimazione quasi-classica. Il confinamento rimane tutt'ora un fenomeno che non è stato completamente giustificato a livello teorico.

Istantoni e violazione del numero barionico

Gli effetti degli istantoni nella QCD non sono calcolabili poichè gli integrali divergono, mentre nella teoria elettrodebole $SU(2) \times U(1)$ ci sono effetti calcolabili associati all'isospin debole rappresentato dal fattore $SU(2)$.

Nel modello standard si hanno processi non perturbativi in cui il numero barionico B potrebbe non essere conservato e questo renderebbe possibile ad esempio il decadimento del protone in leptoni. Si può mostrare come la violazione di B si presenti in processi mediati dagli istantoni, che coinvolgono l'effetto tunnel attraverso barriere di potenziale che separano due vuoti diversi. Questi fenomeni sono soppressi da un fattore esponenziale, tipico del tunneling, legato ai parametri caratteristici dell'istantone

$$e^{-\frac{8\pi^2}{g^2}} \cdot 2$$

e questo rende il decadimento del protone non osservabile sperimentalmente.

La dimensione dell'istantone responsabile del processo dipende dalla scala dimensionale delle interazioni deboli, si trova un fattore di soppressione pari a 10^{-161} , perciò nonostante l'universo osservabile contenga un numero di protoni dell'ordine di 10^{78} la probabilità del decadimento rimane molto bassa.

Se si considerano tre doppietti di quark che differiscono per il colore e un doppietto di leptoni, tutti di tipo left, in modo che possano partecipare alle interazioni deboli, i numeri barionico B e leptonico L separatamente non sono conservati, mentre $(B - L)$ è un numero quantico conservato.

Il protone potrebbe decadere in un positrone e^+ più un fotone o un mesone π^0 , in modo che siano conservati energia e momento. Questo comporta una variazione del numero barionico e leptonico da $(B, L) = (1, 0)$ a $(0, -1)$ e si vede esplicitamente come le due variazioni coincidano tra loro. Si dimostra anche che corrispondono al numero istantonico: $\Delta B = \Delta L = n$.

Ci si chiede infine se in un regime ad alta energia si possa abbassare la barriera di potenziale tra due vuoti, in modo da permettere al sistema di superarla solo grazie ad effetti termici. Si trova che la sezione d'urto del processo cresce esponenzialmente con l'energia, però il processo rimane comunque non osservabile, anche se è molto più probabile che non a bassa energia. Ci sono modelli di cosmologia che affermano come nel Big Bang siano state raggiunte temperature superiori a 100GeV , per le quali la barriera scompare e le transizioni avvengono liberamente. La violazione del numero barionico in questi processi avrebbe portato a generare l'asimmetria barionica tra materia e antimateria che si osserva oggi.

Appendice A

A.1 Complementi sui simboli di 't Hooft

Si può mostrare la validità dell'equazione (1.6), che esprime l'auto dualità di η , sfruttando una relazione delle matrici di Pauli: $\sigma_i \sigma_j = i \epsilon_{ijk} \sigma_k + \delta_{ij} \mathbb{I}$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \epsilon_{pqrs} \eta_{rs} &= \frac{1}{2} \epsilon_{pqrs} (-i e_r e_s^\dagger + i \delta_{rs} \mathbb{I}) \\ &= \frac{1}{2} \epsilon_{pqij} (-i e_i e_j^\dagger) + \frac{1}{2} \epsilon_{pq44} (-i e_i e_4^\dagger) + \frac{1}{2} \epsilon_{pq4j} (-i e_4 e_j^\dagger) \\ &= \frac{1}{2} \epsilon_{pqij} (-i \sigma_i \sigma_j) + \epsilon_{pq44} \sigma_i \end{aligned}$$

dove si nota fin dalla prima riga che il prodotto $\epsilon_{pqrs} \delta_{rs} = 0$, visto che si moltiplica un tensore antisimmetrico per uno simmetrico. Per proseguire si nota che quando si fissa un indice di ϵ_{pqrs} uguale a 4 gli altri tre possono assumere solo valori da 1 a 3 altrimenti si ottiene zero. Perciò il secondo termine permette di calcolare gli η_{lm} con indici spaziali:

$$\epsilon_{lmi4} \sigma_i = -i (\sigma_l \sigma_m - \delta_{lm} \mathbb{I}) = \eta_{lm}$$

mentre il primo dà gli η_{pq} in cui uno dei due indici è quattro. Infatti, $\eta_{44} = 0$ e $\eta_{l4} = -i (e_l e_4^\dagger - \delta_{l4} \mathbb{I}) = -i (i \sigma_l \mathbb{I}) = \sigma_l$ e dal primo termine ricavato sopra si trova:

$$\frac{1}{2} \epsilon_{l4ij} (-i \sigma_i \sigma_j) = \frac{1}{2} \epsilon_{l4ij} (-i (i \epsilon_{ijk} \sigma_k + \delta_{ij} \mathbb{I})) = \frac{1}{2} \epsilon_{ijl4} \epsilon_{ijk} \sigma_k = 2 \delta_{lk} \sigma_k = \sigma_l = \eta_{l4}$$

in cui si sfrutta l'identità $\epsilon_{ijl} \epsilon_{ijk} = 2 \delta_{lk}$. In questo modo si considerano tutte le possibilità e si dimostra l'equazione (1.6).

Bibliografia

- [1] E.J. Weinberg, (2012), **Classical Solutions in Quantum Field Theory, Solitons and Instantons in High Energy Physics**, Cambridge University Press.
- [2] M.A. Shifman, (2012), **Advanced Topics in Quantum Field Theory**, Cambridge University Press.
- [3] A.A. Belavin, A.M. Polyakov, A.S. Schwarz, Y.S. Tyupkin, (1975), **Pseudo-particle Solutions of the Yang-Mills Equations**, Physics Letters B 59, p. 85.
- [4] M. Atiyah, V. Drinfeld, N. Hitchin, Y. Manin, (1978) **Construction of instantons**, Physics Letters A 65, p. 185.
- [5] C.G. Callan, R.F. Dashen, D.J. Gross, (1976), **The structure of the gauge theory vacuum**, Physics Letters B 63, p. 334.
- [6] R. Jackiw and C. Rebbi, (1976) **Vacuum periodicity in a Yang–Mills quantum theory**, Phys. Rev. Lett. 37, p. 172.
- [7] D. Tong, (2005), **TASI Lectures on Solitons, Lecture 1: Instantons**, Cambridge.
- [8] S. Donaldson, (2022), **The ADHM construction of Yang-Mills instantons**, [arXiv:2205.08639v1].
- [9] C.G. Callan, R.F. Dashen, and D.J. Gross, (1977), **A mechanism for quark confinement**, Physics Letters B 66, p. 375.
- [10] V.A. Rubakov, M.E. Shaposhnikov, (1996), **Electroweak baryon number non-conservation in the early universe and in high energy collisions**, Phys. Usp. 39, p. 461, [arXiv:hep-ph/9603208v2].