



Università degli Studi di Padova

Dipartimento di Ingegneria Industriale DII

Corso di Laurea magistrale in Ingegneria Aerospaziale

TESI DI LAUREA

Fenomeni di instabilità in elementi strutturali in parete sottile

Laureando:
Bottos Luca

Matr.
1030320

Relatore:
Prof. Zaccariotto Mirco

Correlatore:
Prof. Galvanetto Ugo

Anno accademico 2012-2013

Alla mia famiglia

Indice

Abstract

1. Instabilità Primaria	1
1.1 La stabilità	1
1.2 Instabilità per diramazione	3
1.3 La trave di Eulero	6
1.4 Influenza delle condizioni vincolari	13
1.5 Influenza di imperfezioni iniziali	21
1.6 Instabilità elasto-plastica	24
2. Instabilità secondaria	35
2.1 Instabilità elastica in piastre sottili isotrope	36
2.2 Instabilità elastoplastica in piastre sottili	42
2.3 Determinazione sperimentale del carico critico per una piastra piana ...	43
2.4 Instabilità localizzata	45
2.5 Tensione di crippling	50
2.6 Metodo dello spessore efficace per sezioni a box e channel	54
2.7 Esempio: collasso elastico di tubi in parete sottile	63
3. L'instabilità in materiali compositi	69
3.1 Richiami sulla teoria del laminato	69
3.2 Equazione di equilibrio per la piastra in laminato	75
3.3 Instabilità del laminato	78
3.4 Prove sperimentali di un cilindro in materiale composito sottoposto a compressione assiale	82
4. Setup sperimentale per test a compressione su provini in parete sottile	95
4.1 Descrizione della macchina per il test di compressione	96
4.2 Scelta dei sensori e configurazione della catena di misura	98
4.3 Progettazione dei supporti per i sensori e delle piastre vincolari	102

4.4	Scelta dei provini da testare.....	110
5.	Analisi FEM	113
5.1	Analisi FEM della trave alettata.....	113
5.2	Analisi FEM della lattina.....	117
5.3	Analisi FEM del tubo in composito	127
6.	Prova sperimentale di compressione di una lattina	133
6.1	Configurazione della prova sperimentale	133
6.2	Risultati sperimentali e confronto con le analisi FEM.....	135
	Conclusioni.....	143
	Bibliografia	147

Abstract

L'elaborato tratta il problema dell'instabilità in elementi strutturali, nello specifico viene analizzato il fenomeno nella sua forma locale riguardante strutture in parete sottile.

Nel primo capitolo si tratterà il problema generale dell'instabilità analizzando la teoria classica della trave di Eulero.

Nel secondo capitolo si estenderà la trattazione alle piastre sottili analizzando inizialmente la teoria kirchhoff, per poi introdurre metodologie analitiche ricercate in letteratura per il calcolo del carico critico in strutture in parete sottili.

Nel capitolo 3 si tratterà il problema del *buckling* in materiali compositi riferendosi in particolar modo all'instabilità di cilindri compressi.

Nel quarto capitolo verrà descritta la macchina per eseguire test a compressione e la relativa progettazione del setup utilizzato nelle prove sperimentali.

Nel capitolo 5 si simuleranno le prove sperimentali focalizzandosi sul problema dell'instabilità di una comune lattina per uso alimentare.

Infine nel capitolo 6 si riporteranno i dati ottenuti nella prova a compressione della lattina e il confronto con le rispettive analisi numeriche.

1. Instabilità Primaria

In questo primo capitolo si tratterà il concetto stabilità per una struttura, in particolar modo si analizzerà il problema dell'instabilità in travi compresse.

Il problema dell'instabilità in travi compresse è stato ampiamente studiato nel corso della storia in quanto, una struttura può cedere o fallire nella sua funzione a causa di questo fenomeno. Ciò ha portato alla definizione di leggi teoriche che esprimessero un carico limite chiamato carico critico, oltre al quale la struttura cambia la sua configurazione di equilibrio presentando una particolare deformazione.

L'instabilità presa in esame riguarderà l'intera struttura e non fenomeni localizzati che, saranno discussi nel secondo capitolo.

1.1 La stabilità

In una struttura si possono evidenziare tre differenti configurazioni di equilibrio: stabile, instabile ed indifferente.

L'equilibrio è stabile quando a partire da una configurazione iniziale di equilibrio a seguito di perturbazioni esterne la struttura tende a ritornare nella sua configurazione iniziale. L'equilibrio è instabile quando perturbando la configurazione iniziale la struttura tende ad allontanarsi dalla posizione di equilibrio iniziale. L'equilibrio è indifferente quando a partire da una configurazione iniziale di equilibrio a seguito di una perturbazione la struttura tende a restare nella sua configurazione perturbata.

La stabilità delle possibili configurazioni di equilibrio di una trave compressa, può essere studiata tramite la stessa teoria utilizzata per la definizione degli stati di equilibrio di un corpo rigido.

Prendendo in analisi una sfera (come in **Fig. 1.1**), si possono definire per essa i tre stati fondamentali di equilibrio a seconda della concavità del piano

su cui è posta. Nel caso (a) la sfera è su di un piano concavo realizzando uno stato di equilibrio stabile, nel caso (b) la sfera posta su di un piano orizzontale realizza uno stato di equilibrio indifferente mentre nel caso (c) dove il piano di appoggio è convesso lo stato di equilibrio è instabile.



Fig. 1.1 Tipologie di equilibrio [25]

L'asta rettilinea compressa in **Fig. 1.2** può essere considerata analogamente alla sfera a seconda del carico di compressione applicato. Nella configurazione (a) l'asta è sottoposta ad un carico di compressione (P) minore di una certa soglia detta carico critico (P_{cr}).

Applicando una forza laterale che infletta la trave e rimuovendola si osserva come la struttura tenda a ritornare alla posizione rettilinea di partenza realizzando un equilibrio stabile. Viceversa nella configurazione (b) il carico di compressione (P) è maggiore del carico critico (P_{cr}) e, si osserva che anche a seguito della rimozione della forza laterale, l'inflessione della trave aumenta spostandosi sempre più dalla configurazione rettilinea di partenza e realizzando un equilibrio instabile. Nel caso (b) invece quando il carico (P) coincide con il valore del carico critico (P_{cr}) si realizza un equilibrio indifferente ovvero sono possibili variazioni infinitesime dalla posizione rettilinea iniziale che rispettano l'equilibrio.

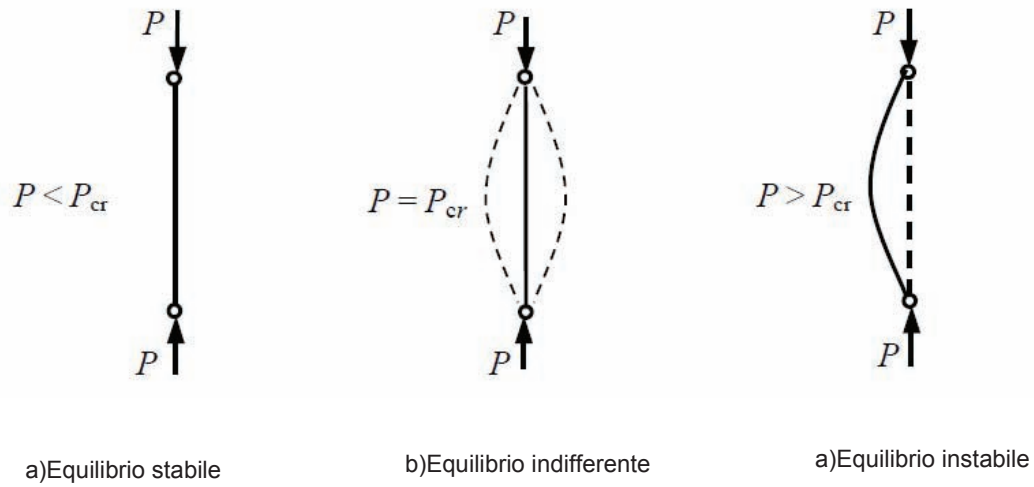


Fig. 1.2 Configurazioni di equilibrio di una trave compressa [25]

1.2 Instabilità per diramazione

Si consideri la trave incastrata ad un estremo e caricata assialmente in **Fig. 1.3** in cui si suppone la trave rigida e l'incastro cedevole elasticamente con una rigidezza di valore K . Pertanto la trave non si deforma mentre l'incastro permette una rotazione di tipo elastico, proporzionale al momento di reazione:

$$M_R = K\alpha \quad (1.1)$$

dove la costante elastica K ha dimensioni $[Nm/rad]$

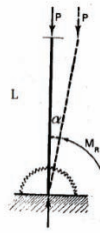


Fig. 1.3 Trave rigida compressa incastrata alla base [25]

La trave è equilibrata se la reazione del vincolo eguaglia il carico P . Per valutare la tipologia di equilibrio è necessario studiare la struttura in diverse configurazioni, ottenute a partire dallo stato iniziale imprimendo una rotazione rigida alla trave. Si prende in esame quindi la trave in **Fig 1.4** ottenuta dalla trave precedente tramite una rotazione α e si procede scrivendo le equazioni di equilibrio per questa nuova configurazione.

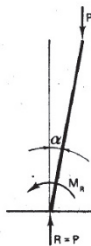


Fig. 1.4 Trave rigida compressa ruotata [25]

L'equilibrio alla traslazione verticale porge:

$$R = P$$

La rotazione α da origine ad un momento attivo:

$$M_A = PL\text{sen}(\alpha) \quad (1.2)$$

e l'equilibrio sussiste se il momento di reazione eguaglia il momento attivo ovvero:

$$M_R = M_A$$

che sostituendo i rispettivi valori porta alla condizione di equilibrio:

$$P = \frac{K\alpha}{L\text{sen}(\alpha)} \quad (1.3)$$

e quindi la nuova configurazione è in equilibrio se P ha il valore dato dall'equazione (1.3).

In **Fig. 1.5** è diagrammata la funzione $P(\alpha)$.

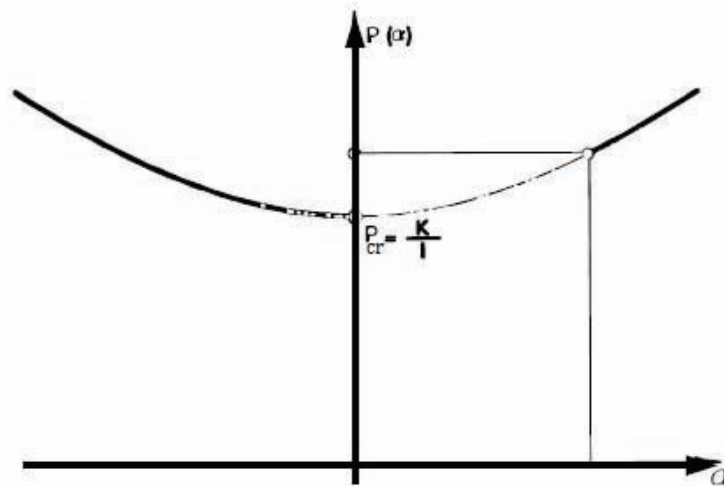


Fig. 1.5 Andamento del carico rispetto alla rotazione α [25]

Dal grafico si osserva che per $\alpha \rightarrow 0$ il carico assume un valore:

$$P(0) = P_{cr} = \frac{K}{L} \quad (1.4)$$

per cui, quando $P < P_{cr}$ il momento di reazione M_R è sempre maggiore dal momento attivo M_A . Per un qualsiasi valore di P compreso tra 0 e K/L se si impone alla trave una rotazione che la porti in una configurazione differente da quella iniziale e successivamente la si rilasci, la trave ritorna nella posizione iniziale, ovvero, i carichi $P < P_K$ caratterizzano un equilibrio stabile. Per carichi $P > P_{cr}$ accade che, se una qualsiasi perturbazione sposta la trave dalla posizione verticale, essa continua a ruotare fino a raggiungere un

angolo α per cui si instauri una situazione di equilibrio per $M_R = M_A$. I punti dell'asse $P(\alpha)$ al di sopra di P_{cr} , caratterizzano quindi valori di equilibrio instabile per la trave dritta, mentre sono di equilibrio stabile per la trave ruotata.

Per $P = P_{cr}$ l'equilibrio è poi indifferente, cioè sono possibili variazioni infinitesime della posizione dritta nel rispetto dell'equilibrio.

Il carico P_{cr} che segna, allora, il limite tra posizioni di equilibrio stabile ed instabile prende il nome di *carico critico*.

Al valore di P_{cr} l'equilibrio si dirama in quanto esiste la possibilità che sussistano configurazioni diritte instabili e configurazione ruotate stabili quindi il punto P_{cr} prende anche il nome di punto di biforcazione dell'equilibrio.

Il passo successivo consiste nell'eliminare l'ipotesi di elasticità concentrata supponendola distribuita lungo tutto l'asse, ovvero si considera la classica trave di Eulero.

1.3 La trave di Eulero

Il problema della trave di Eulero in **Fig. 1.6** riguarda lo studio dell'instabilità flessionale di una trave elastica perfettamente centrata con condizioni vincolari di appoggio-carrello caricata assialmente in corrispondenza del carrello tramite un carico di compressione P .

Si analizza il problema con un metodo statico ossia, scelta una configurazione deformata si scrivono le equazioni di equilibrio per la trave relative a questa nuova conformazione.

Tutta la trattazione si svolgerà in ipotesi di piccoli spostamenti considerando la trave perfettamente elastica.

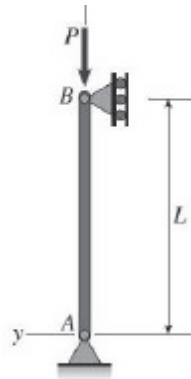


Fig. 1.6 Trave di Eulero [25]

Inizialmente fin tanto che $P < P_{cr}$ la trave è soggetta alla sola pressione

$$\sigma = \frac{P}{A} \quad (1.5)$$

con A sezione della trave.

Incrementando il carico fino a $P = P_{cr}$ si raggiunge una condizione di equilibrio indifferente, nel quale la reazione elastica è fornita dalla curvatura assunta dalla trave ovvero la trave è ora nella sua configurazione deformata (**Fig. 1.7**).

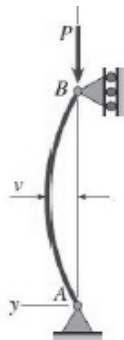


Fig. 1.7 Trave di Eulero in configurazione deformata [25]

Nella nuova configurazione per gli equilibri alla traslazione orizzontale (y) e alla rotazione le reazioni orizzontali agli appoggi A e B sono nulle.

Sezionando la trave in corrispondenza dell'ascissa x generica, si evidenzia un momento flettente riequilibrante proporzionale alla curvatura della trave:

$$M_e = EI \frac{\partial^2 v}{\partial^2 x} \quad (1.6)$$

Separando in due la trave come in **Fig. 1.8** rispetto al punto A l'equilibrio dei momenti porge:

$$EI \frac{\partial^2 v}{\partial^2 x} + Pv = 0 \quad (1.7)$$

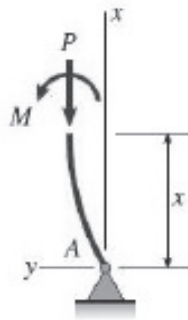


Fig. 1.8 Trave di Eulero sezionata in mezzeria [25]

Posto:

$$k = \sqrt{\frac{P}{EI}} \quad (1.8)$$

si ottiene:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial^2 x} + k^2 v = 0 \quad (1.9)$$

L'equazione differenziale ottenuta è omogenea e quindi ammette la soluzione banale $v = 0$.

Si ottiene così un problema agli autovalori ed autovettori.

Gli autovalori sono i carichi critici, determinati imponendo che l'equazione omogenea ammetta soluzioni per $v \neq 0$. Sostituendo poi un valore critico nell'equazione differenziale si ottengono i modi critici, ovvero gli autovettori corrispondenti.

L'equazione algebrica associata all'equazione (1.9) risulta:

$$\lambda^2 + k^2 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm ik \quad (1.10)$$

quindi la soluzione generale sarà la seguente:

$$v(x) = C_1 \sin(kx) + C_2 \cos(kx) \quad (1.11)$$

occorre aggiungere le condizioni al contorno che definiscono univocamente C_1 e C_2 .

Per la trave in esame doppiamente appoggiata (*double-pinned*) le condizioni al contorno sono di spostamento nullo per $x = 0$ e per $x = L$

$$\begin{cases} v(0) = 0 \Rightarrow C_2 = 0 \\ v(L) = 0 \Rightarrow C_1 \sin kL = 0 \end{cases}$$

Volendo ottenere delle soluzioni $v \neq 0$ occorre che $C_1 \neq 0$ per cui risulta:

$$\sin kL = 0 \Rightarrow kL = n\pi \Rightarrow k = \sqrt{\frac{P}{EI}}$$

da cui, tenendo conto della definizione di k si trova l'espressione per il carico critico:

$$P_{cr} = \pi^2 n^2 \frac{EI}{L^2} \quad (n = 1, 2, 3 \dots) \quad (1.12)$$

Si hanno dunque infiniti carichi critici, uno per ogni valore di n .

Il carico critico minimo, detto carico di Eulero, si ottiene ponendo $n = 1$:

$$P_{cr} = \pi^2 \frac{EI}{L^2} \quad (1.13)$$

In corrispondenza, poiché $n = 1$, $kL = \pi$ e quindi il modo critico risulterà:

$$v = C_1 \sin \frac{\pi x}{L}$$

Ponendo poi $n = 2$, $n = 3$ e così via si hanno i modi critici corrispondenti ai successivi carichi critici:

$$v = C_1 \sin \frac{2\pi x}{L} \quad (n = 2)$$

$$v = C_1 \sin \frac{3\pi x}{L} \quad (n = 3)$$

e così via.

In **Fig. 1.9** sono rappresentati i primi due modi critici ($n = 1,2$) per la trave presa in considerazione.

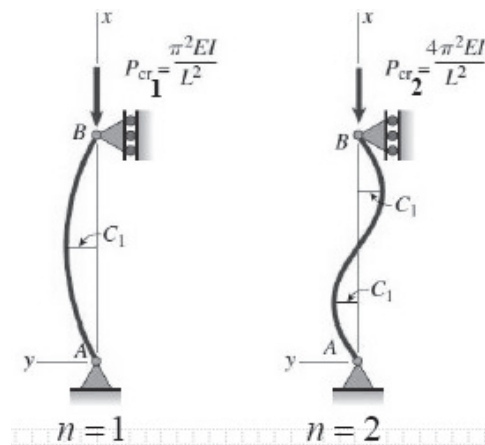


Fig. 1.9 Modi critici corrispondenti della trave di Eulero per $n=1,2$ [25]

In generale il modo critico risulta:

$$v = C_1 \sin \frac{n\pi x}{L} \quad (1.14)$$

Se la trave è libera di inflettersi in ogni piano e se le cerniere alle due estremità sono sferiche, la trave potrà inflettersi in uno qualunque dei due piani longitudinali contenenti un'asse principale di inerzia della sezione.

In tal caso il minimo carico critico dell'asta è quello relativo all'inflessione nel piano di minima rigidità, normale all'asse principale di inerzia di minimo momento di inerzia:

$$P_{cr} = \pi^2 \frac{EI_{min}}{L^2} \quad (1.15)$$

Nelle condizioni critiche la trave si trova in uno stato di equilibrio indifferente.

I carichi critici successivi al primo crescono rapidamente con n^2 e sono di scarso interesse pratico.

Analizzando la formula che esprime il carico critico di Eulero si può notare che:

- Non dipende dal carico limite
- Cresce linearmente con il momento di inerzia della sezione
- Cresce linearmente con il modulo di Young
- Decresce quadraticamente con la lunghezza

Una trave generica, caricata a compressione e libera di svellere in qualunque direzione, si infletterà ortogonalmente alla direzione di minimo momento di inerzia.

Dalla formulazione del carico critico, si può calcolare facilmente un valore di tensione critica che non è legato al cedimento del materiale ma piuttosto alle sue caratteristiche elastiche:

$$\sigma_{cr} = \frac{P_{cr}}{A} = \frac{\pi^2 EI_{min}}{L^2 A} \quad (1.16)$$

si definisce il raggio di girazione o curvatura come:

$$r = \sqrt{\frac{I_{min}}{A}} \quad (1.17)$$

che sostituito nella (1.16) porta alla seguente espressione per la tensione critica:

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{\left(\frac{L}{r}\right)^2} \quad (1.18)$$

Si definisce poi la snellezza della trave λ come il rapporto tra la sua lunghezza e la sua curvatura:

$$\lambda = \frac{L}{r} \quad (1.19)$$

che sostituita nell'equazione (1.18) fornisce:

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \quad (1.20)$$

In **Fig. 1.10** è rappresentata la curva di Eulero ossia l'andamento della tensione critica rispetto alla snellezza della trave.

Dal grafico è evidente come per una $\lambda \rightarrow 0$ la σ_{cr} tenda ad un valore infinito. Nella realtà questa tendenza è un assurdo e la curva di Eulero viene quindi limitata alla tensione di flusso plastico σ_{pl} del materiale in quanto si è ipotizzato un comportamento perfettamente elastico.

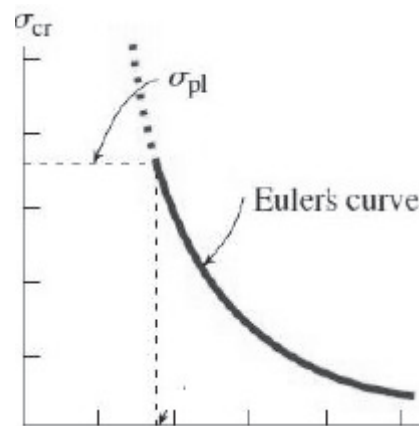


Fig. 1.10 Curva di Eulero [25]

In particolare il σ_{cr} a parità di materiale dipende dal rapporto di snellezza ed è tanto più basso quanto più la trave è snella, mentre è più elevato per travi tozze. Un carico di compressione può quindi comportare il collasso quando:

- a. Il carico induce uno stato di sforzo σ tale da superare il limite di proporzionalità σ^* della curva sforzo-deformazione. Superato questo limite di resistenza del materiale il comportamento non è più elastico. In questo caso la trave va quindi progettata a resistenza: $\sigma < \sigma^*$
- b. Il carico è tale da provocare una flessione elastica ovvero instabilità. In questo caso la trave va quindi progettata a *buckling*: $\sigma < \sigma_{cr}$.

1.4 Influenza delle condizioni vincolari

Nella determinazione del carico critico per una trave compressa, come visto nel paragrafo precedente, è necessario considerare nelle equazioni le condizioni al contorno date dai vincoli posti sulla trave. Le condizioni vincolari influenzano dunque il valore del carico critico.

Di seguito vengono riportate le soluzioni per travi con diverse condizioni vincolari.

- Trave incastrata-libera

In **Fig. 1.11** è raffigurata la trave incastrata (mensola) alla base e caricata all'estremo opposto con un carico P di compressione e, la sua configurazione deformata rispetto la quale si scrivono le equazioni di equilibrio.

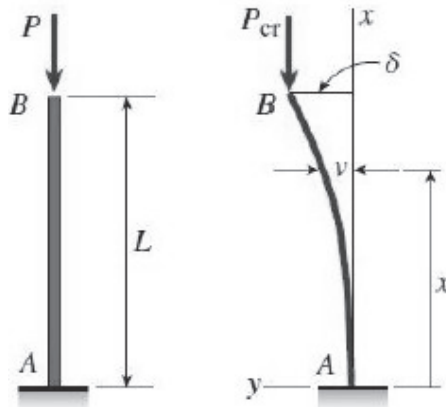


Fig. 1.11 Trave incastrata alla base e compressa [25]

Ad una coordinata generica x il momento di disallineamento risulta essere:

$$M_p(x) = P(\delta - v) \quad (1.21)$$

L'equazione che esprime l'equilibrio è data da:

$$EI \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + P(\delta - v) = 0 \quad (1.22)$$

posto:

$$k = \sqrt{\frac{P}{EI}}$$

si ottiene un'equazione differenziale del secondo ordine a coefficienti costanti e forzata:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + k^2 v = k^2 \delta \quad (1.23)$$

La soluzione dell'equazione (1.23) si ottiene sommando alla soluzione dell'equazione omogenea associata (calcolata precedentemente) una soluzione particolare:

$$v_{part} = \delta$$

La soluzione generale è del tipo:

$$v(x) = \delta + C_1 \sin kx + C_2 \cos kx \quad (1.23)$$

Per determinare i coefficienti si devono inserire le tre condizioni al contorno: due per $x = 0$ ed una per $x = L$

$$\begin{cases} v(0) = 0 & \Rightarrow C_2 = -\delta \\ \frac{\partial v}{\partial x}(0) = 0 & \Rightarrow C_1 = 0 \\ v(L) = \delta & \Rightarrow \delta \cos kL = 0 \end{cases}$$

Sostituendo le tre condizioni all'equazione (1.23):

$$v(x) = \delta(1 - \cos kx)$$

Si ha una soluzione banale per ($\delta = 0$), mentre per ottenere soluzioni per ($\delta \neq 0$) si deve soddisfare la condizione:

$$\cos kL = 0 \Rightarrow kL = n \frac{\pi}{2}$$

tenendo conto della definizione di k si trova l'espressione del carico critico:

$$P_{cr} = \pi^2 n^2 \frac{EI}{4L^2} \quad (n = 1, 2, 3 \dots) \quad (1.24)$$

e sostituendo nella soluzione generale si ottiene:

$$v(x) = \delta \left(1 - \cos \frac{n\pi x}{2L} \right) \quad (1.25)$$

In **Fig. 1.12** sono rappresentate le forme modali per $n=1,2,3$ con i relativi valori di carico critico.

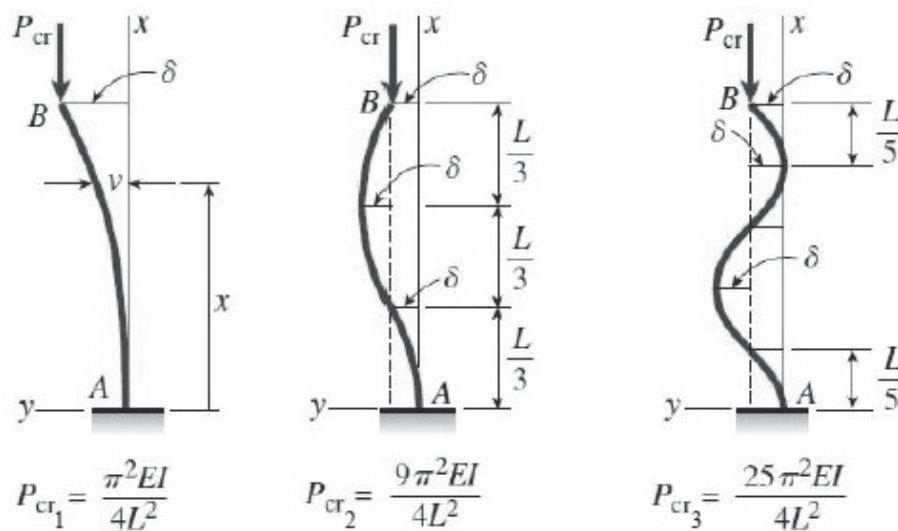


Fig. 1.12 Forme modali e carichi critici per $n=1,2,3$ della trave incastrata alla base [25]

Analizzando le due formule (1.15), (1.24) che esprimono il valore del carico critico per la trave doppiamente appoggiate e per la trave incastrata a mensola, è possibile osservare un analogia tra i due casi:

Trave pinned-pinned: $P_{crp-p} = \pi^2 \frac{EI_{min}}{L^2}$

Trave incastrata-libera: $P_{cri-l} = \pi^2 \frac{EI}{(2L)^2}$

La curvatura della trave incastrata-libera corrisponde esattamente alla curvatura di una trave *pinned-pinned* di lunghezza doppia con $L_{eq} = 2L$ (**Fig. 1.13**).

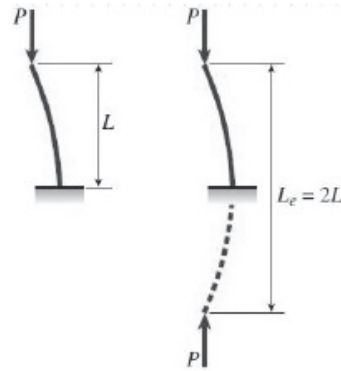


Fig.1.13 Definizione della lunghezza equivalente [25]

Con L_{eq} si definisce una lunghezza equivalente che permette di definire una espressione generale del carico critico valida per le varie configurazioni vincolari:

$$P_{cr} = \pi^2 \frac{EI}{L_{eq}^2} \quad (1.26)$$

- Trave incastrata-incernierata

In **Fig. 1.14** è rappresentata la trave incastrata-incernierata caricata con un carico P di compressione e, la sua configurazione deformata rispetto alla quale si scrivono le equazioni di equilibrio.

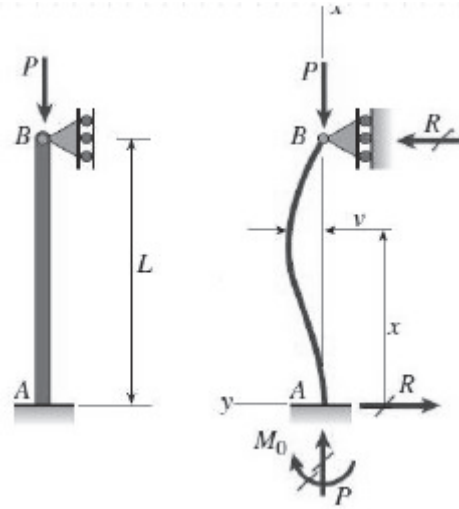


Fig. 1.14 Trave incastrata-incernierata compressa [25]

Le due reazioni vincolari orizzontali R saranno uguali ma di verso opposto. Il momento di reazione alla base sarà:

$$M_0 = RL$$

mentre il momento in una generica coordinata x risulterà:

$$M(x) = M_0 - Pv - Rx$$

L'equazione di equilibrio per la trave risulta:

$$EI \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = -Pv + R(L - x) \quad (1.27)$$

posto:

$$k = \sqrt{\frac{P}{EI}}$$

si ottiene un'equazione differenziale del secondo ordine forzata a coefficienti costanti:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + k^2 v = \frac{R}{EI} k^2 \delta \quad (1.28)$$

La soluzione generale è del tipo:

$$v(x) = C_1 \sin kx + C_2 \cos kx + \frac{R}{P}(L - x) \quad (1.29)$$

Per determinare i coefficienti si devono inserire le tre condizioni al contorno:

$$\left\{ \begin{array}{ll} v(0) = 0 & \Rightarrow C_2 + \frac{RL}{P} = 0 \\ \frac{\partial v}{\partial x}(0) = 0 & \Rightarrow C_1 k - \frac{R}{P} = 0 \\ v(L) = \delta & \Rightarrow C_1 \sin kL + C_2 \cos kL = 0 \end{array} \right.$$

si ottiene dalle prime due condizioni:

$$C_2 = -C_1 kL$$

dalla terza si ricava la condizione:

$$kL = \tan kL$$

la soluzione si ricava per via numerica ottenendo:

$$kL = 4.4934$$

Dalla definizione di k si ricava il valore del carico critico per la trave incastrata-incernierata ovvero:

$$P_{cr} = \pi^2 \frac{EI}{L_{eq}^2} \quad (1.30)$$

con $L_{eq} = 0.699L \approx 0.7L$.

- Trave incastrata-incastrata

In **Fig. 1.15** è rappresentata la trave incastrata-incastrata caricata con un carico P di compressione e, la sua configurazione deformata.

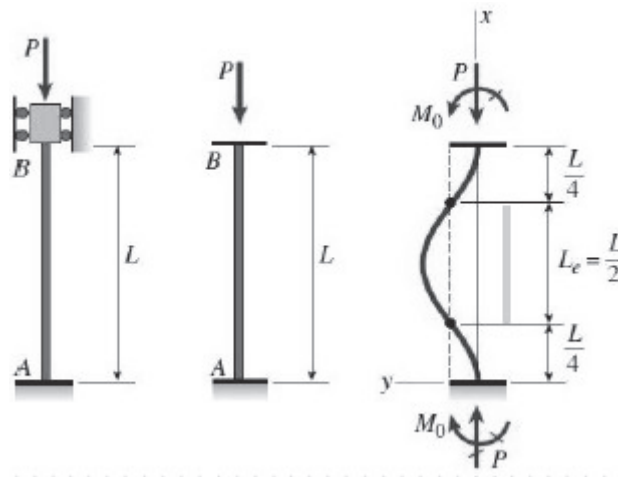


Fig. 1.15 Trave incastrata-incastrata, sua deformata e analogia con la trave a mensola [25]

La simmetria rispetto all'asse orizzontale impone che le reazioni orizzontali degli incastrati siano nulle e che la sezione in mezzzeria non ruoti.

Il numero minimo di flessi della configurazione deformata è due e la loro disposizione è simmetrica rispetto l'asse orizzontale passante per la sezione centrale della trave. I due flessi e la sezione in mezzzeria dividono la luce della trave in quattro parti equivalenti ad una configurazione deformata ad una trave incastrata-libera(mensola). Il carico critico della trave deve quindi coincidere con il carico critico delle quattro mensole di uguale lunghezza ($L/4$). Pertanto il carico critico in questa disposizione vincolare risulta pari a:



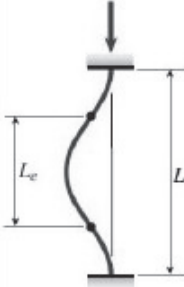

$$P_{cr} = 4\pi^2 \frac{EI}{L^2} \quad (1.31)$$

e usando la definizione di lunghezza equivalente:

$$P_{cr} = \pi^2 \frac{EI}{L_{eq}^2} \quad (1.32)$$

con $L_{eq} = \frac{L}{2}$

In tabella (**Tab. 1.1**) è rappresentato uno schema riassuntivo che, esprime per varie configurazioni vincolari della trave compressa i corrispondenti valori di carico critico e lunghezza equivalente.

(a) Pinned-pinned column	(b) Fixed-free column	(c) Fixed-fixed column	(d) Fixed-pinned column
$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2}$	$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{4L^2}$	$P_{cr} = \frac{4\pi^2 EI}{L^2}$	$P_{cr} = \frac{2.046 \pi^2 EI}{L^2}$
			
$L_e = L$	$L_e = 2L$	$L_e = 0.5L$	$L_e = 0.699L$
$K = 1$	$K = 2$	$K = 0.5$	$K = 0.699$

Tab. 1.1 Valore dei carichi critici e della lunghezza equivalente per la trave compressa in differenti condizioni vincolari [25]

1.5 Influenza di imperfezioni iniziali

Nella pratica, risulta impossibile ottenere una trave perfettamente dritta ed omogenea, e risulta altrettanto complicato caricarla esattamente con un carico assiale senza decentramenti. Tali imperfezioni influenzano in grande

misura sul comportamento della trave, che, al contrario della trave perfetta comincia a piegarsi subito dopo l'applicazione del carico assiale.

Per modellare le imperfezioni si considera una trave, inizialmente già deformata, e soggetta ad un carico di compressione P crescente, come mostrato in **Fig. 1.16**. In questo caso, il momento flettente in ogni punto è proporzionale all'incremento di curvatura della trave dalla sua posizione iniziale deformata.

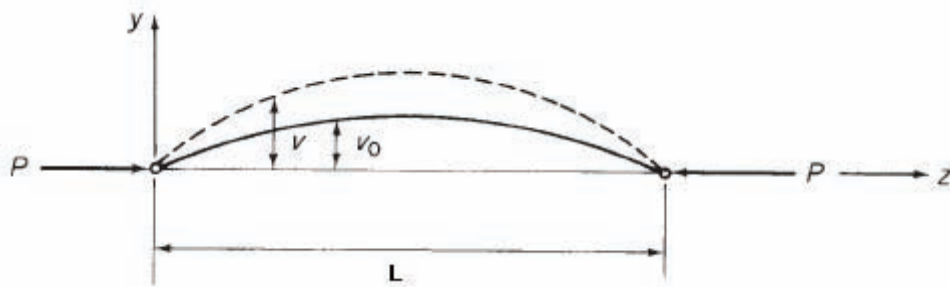


Fig. 1.16 Modello della trave con difetti ^[39]

L'equazione differenziale di equilibrio per la trave è data da:

$$EI \frac{d^2 v}{dz^2} - EI \frac{d^2 v_0}{dz^2} = Pv \quad (1.33)$$

ponendo: $\lambda^2 = P/EI$ si riscrive come:

$$\frac{d^2 v}{dz^2} + \lambda^2 v = \frac{d^2 v_0}{dz^2} \quad (1.34)$$

Lo spostamento finale, v lungo y , della trave dipende dallo spostamento iniziale v_0 della trave definito dall'espressione:

$$v_0 = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{n\pi z}{L} \quad (1.35)$$

che, sostituita nell'equazione (1.34) porge:

$$\frac{d^2v}{dz^2} + \lambda^2 v = -\frac{\pi^2}{L^2} \sum_{n=1}^{\infty} n^2 A_n \sin \frac{n\pi z}{L} \quad (1.36)$$

La soluzione generale dell'equazione è:

$$v = B \cos \lambda z + D \sin \lambda z + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 A_n}{n^2 - \alpha} \sin \frac{n\pi z}{L} \quad (1.37)$$

dove B e D sono delle costanti di integrazione e $\alpha = \lambda^2 L^2 / \pi^2$.

Le condizioni al contorno sono date da:

$$\begin{cases} v(z=0) = 0 \\ v(z=L) = 0 \end{cases} \Rightarrow D, B = 0$$

Per cui la (1.37) diviene:

$$v = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 A_n}{n^2 - \alpha} \sin \frac{n\pi z}{L} \quad (1.38)$$

Una forma alternativa di α è data da:

$$\alpha = \frac{PL^2}{\pi^2 EI} = \frac{P}{P_{Cr}} \quad (1.39)$$

Si osserva come α sia sempre minore di 1 e tendente all'unità per P che tende al carico critico P_{Cr} , quindi nell'equazione (1.38) il primo termine è quello che domina la serie. Pertanto, quando il carico tende al carico critico, una buona approssimazione per lo spostamento v (deflessione), risulta essera:

$$v = \frac{A_1}{1 - \alpha} \sin \frac{\pi z}{L} \quad (1.39)$$

che nel punto centrale della trave per $z = L/2$ è pari a:

$$v = \frac{A_1}{1 - \frac{P}{P_{Cr}}} \quad (1.40)$$

dove A_1 indica lo spostamento iniziale del punto centrale.

Se lo spostamento centrale ($\delta = v - A_1$) è misurato dalla posizione iniziale incurvata della trave, dall'equazione (1.40) si ottiene:

$$\delta = \frac{A_1}{1 - \frac{P}{P_{Cr}}} - A_1$$

che arrangiando i termini:

$$\delta = P_{Cr} \frac{\delta}{P} - A_1$$

1.6 Instabilità elasto-plastica

Fino ad ora nell'analisi del fenomeno dell'instabilità si è considerata l'ipotesi di travi perfettamente elastiche ovvero composte da materiali sollecitati al di sotto del loro carico di snervamento. Tuttavia, è stato accertato sperimentalmente che si possono verificare collassi anche al di sotto della curva di Eulero in prossimità del punto di intersezione con la retta di snervamento (punto Q della **Fig. 1.22**). Quando la snellezza della trave è prossima a valori vicini a tale punto di intersezione non si dovrebbe impiegare la teoria di Eulero.

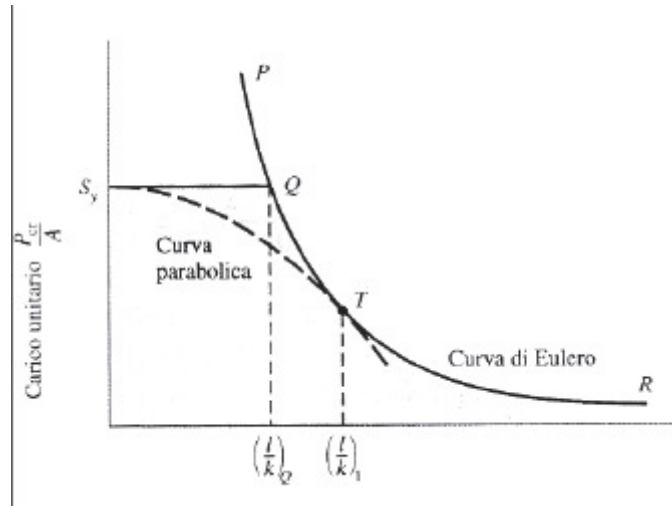


Fig. 1.22 Curve di stabilità elastica ed elasto-plastica [25]

Un possibile approccio è quello di scegliere un generico punto T (come in Fig. 1.23) sulla curva e impiegare la relazione di Eulero solo nel caso in cui la snellezza sia superiore a quella corrispondente al punto T.

Quando la snellezza della trave diminuisce si entra dunque in una zona non rappresentata da un comportamento perfettamente elastico, ma occorre considerare fenomeni inelastici.

Si determina un valore critico di snellezza, che limita l'utilizzo di Eulero poiché si supera il carico di snervamento del materiale:

$$\lambda_{cr} = \left(\frac{L}{r} \right)_{cr} = \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_{lp}}} \quad (1.52)$$

dove σ_{lp} indica lo stress limite di proporzionalità ossia lo stress oltre al quale il materiale non risponde più linearmente.

Allo stesso modo si determina un valore di stress che rappresenta il collasso plastico finale (σ_{ult}) non superabile anche per travi tozze.

Nel grafico di Fig. 1.23 che mostra l'andamento del carico critico unitario in funzione della snellezza, si evidenzia la curva di Eulero (tratto CD), rappresentante il limite di stabilità elastica, la curva (tratto BC) che rappresenta il limite di stabilità inelastica ed infine la curva (tratto AB) che determina la resistenza limite per travi tozze.

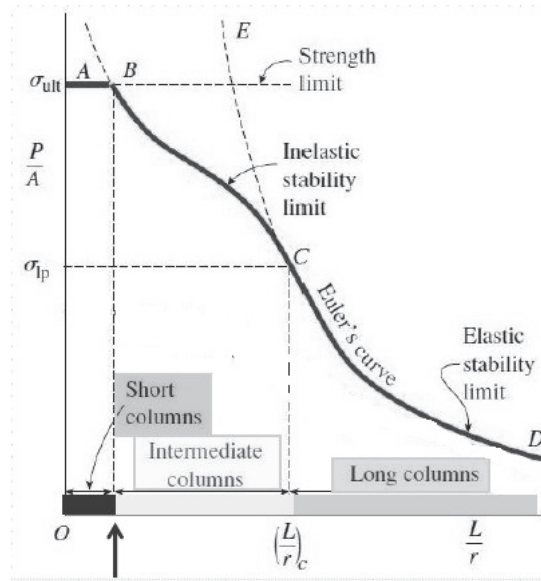


Fig. 1.23 Curve di stabilità [25]

Esiste dunque una zona intermedia delimitata da un valore di snellezza critica nella quale non si può considerare un comportamento lineare del materiale poiché, si ricade nel punto del grafico tensione-deformazione in cui la pendenza della curva diminuisce (Fig. 1.24). Di conseguenza il carico critico dovrà risultare minore della previsione di Eulero.

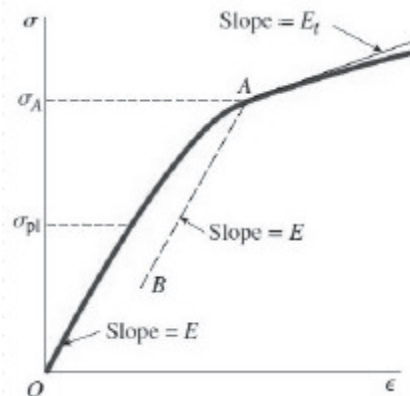


Fig. 1.24 Curva tensione-deformazione [25]

Di seguito si tratteranno tre diverse teorie per determinare l'instabilità qualora si rientri nel caso inelastico, riferendosi ad una trave compressa *pinned-pinned*.

- Teoria del modulo tangente

Superato il valore della tensione di snervamento, la pendenza della curva tensione-deformazione per il materiale esaminato diminuisce. Si definisce dunque un modulo elastico locale tangente alla curva come mostrato in **Fig. 1.24**.

$$E_t(\varepsilon) = \frac{d\sigma}{d\varepsilon} \quad (1.53)$$

dove ε indica la deformazione e σ la tensione.

Per determinare il carico critico, si utilizza direttamente la soluzione di Eulero ma sostituendo il modulo tangente appena determinato:

$$P_{tan}(\varepsilon) = \frac{\pi^2 E_{tan}(\varepsilon) I}{L^2} \quad (1.54)$$

analogamente la tensione sarà:

$$\sigma_{tan}(\varepsilon) = \frac{P_{tan}}{A} = \frac{\pi^2 E_t(\varepsilon) I}{\left(\frac{L}{r}\right)^2} \quad (1.55)$$

Il metodo di calcolo è iterativo, partendo da un E_{tan} iniziale si calcola P_{tan} e si determina il corrispondente σ_{tan} e quindi un nuovo valore aggiornato di E_{tan} da riutilizzare nella successiva iterazione. Si procede fino a che i valori non convergono.

In **Fig. 1.25** è rappresentata la curva di stabilità ottenuta combinando la teoria di Eulero per una $\lambda > \lambda_{cr}$ e la teoria del modulo tangente per $\lambda < \lambda_{cr}$

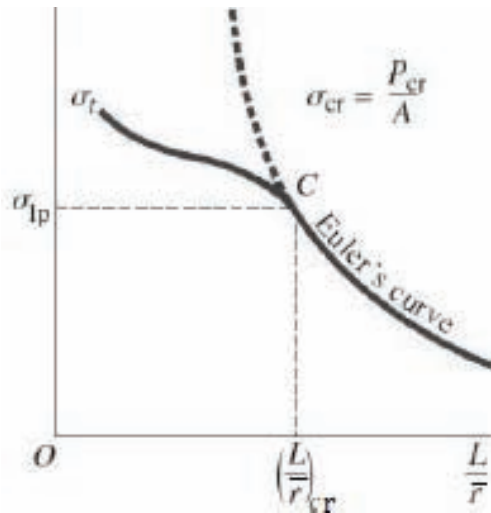


Fig. 1.25 Curva di stabilità ottenuta combinando l'instabilità Euleriana con la teoria del modulo tangente [25]

- Teoria del modulo ridotto

La teoria del modulo tangente appena analizzata risulta essere limitata poiché non prende in considerazione l'intero fenomeno fisico.

Quando avviene lo sbandamento della trave, la flessione genera un aumento di tensione nella zona di compressione (*bottom*) e uno scarico nella parte in tensione (*top*). In altri termini la trave si comporta come se fosse realizzata con due differenti materiali, uno con modulo tangente E_{tan} (*bottom*) e l'altro (*top*) con il modulo elastico E del materiale non snervato (**Fig. 1.26**).

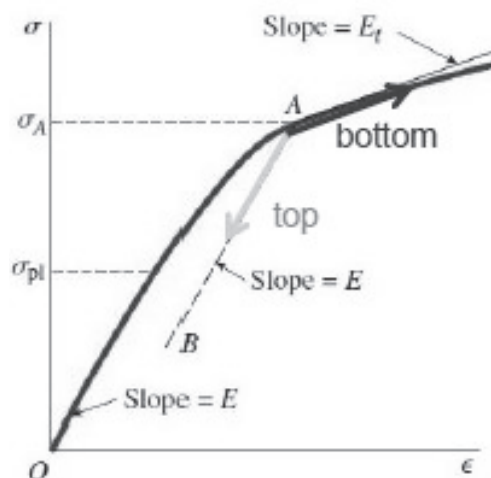


Fig. 1.26 Curva tensione deformazione per top e bottom della trave [25]

Con la teoria del modulo ridotto si considera dunque lo sviluppo della sezione della trave. Si vuole determina un modulo ridotto E_{rid} che risulterà maggiore rispetto al modulo tangente E_{tan} .

Si prenda in esame una trave a sezione rettangolare sottoposta a flessione, il diagramma di sollecitazione sarà come quello in **Fig. 1.27**.

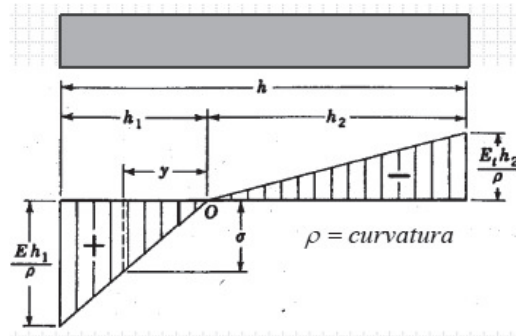


Fig. 1.27 Diagramma di sollecitazione per una trave a sezione rettangolare [25]

Le risultanti di trazione e compressione per l'equilibrio devono essere:

$$Eh_1^2 = E_{tan}h_2^2 \quad (1.56)$$

posto:

$$h = h_1 + h_2$$

si ricavano:

$$h_1 = \frac{h\sqrt{E_{tan}}}{\sqrt{E} + \sqrt{E_{tan}}} \quad h_2 = \frac{h\sqrt{E}}{\sqrt{E} + \sqrt{E_{tan}}}$$

Il momento flettente risultante è:

$$M = \frac{Eh_1}{\rho} \frac{bh_1}{2} \frac{2}{3} h_1 + \frac{Eh_2}{\rho} \frac{bh_2}{2} \frac{2}{3} h_2 = \frac{E}{\rho} \frac{bh_1^2}{2} \frac{2}{3} h \quad (1.57)$$

sostituendo il valore di h_1 calcolato in precedenza:

$$M = \frac{bh^2}{12\rho} \cdot \frac{4EE_{tan}}{(\sqrt{E} + \sqrt{E_{tan}})^2} \quad (1.58)$$

il secondo termine dell'equazione è pari al modulo ridotto E_{rid}

$$E_{rid} = \frac{4EE_{tan}}{(\sqrt{E} + \sqrt{E_{tan}})^2} \quad (1.59)$$

Il modulo di Young ridotto dipende dunque sia dal materiale che dallo sviluppo geometrico della trave.

Per il calcolo del carico critico si utilizza la formulazione di Eulero ma sostituendo il modulo E_{rid} appena determinato:

$$P_{rid}(\varepsilon) = \frac{\pi^2 E_{rid}(\varepsilon) I}{L^2} \quad (1.60)$$

e la tensione risulta:

$$\sigma_{rid}(\varepsilon) = \frac{P_{tan}}{A} = \frac{\pi^2 E_{rid}(\varepsilon) I}{\left(\frac{L}{\bar{r}}\right)^2} \quad (1.61)$$

In **Fig. 1.28** è rappresentata la curva di stabilità ottenuta combinando la teoria di Eulero per una $\lambda > \lambda_{cr}$ e le due teoria del modulo ridotto e del modulo tangente per $\lambda < \lambda_{cr}$ messe a confronto.

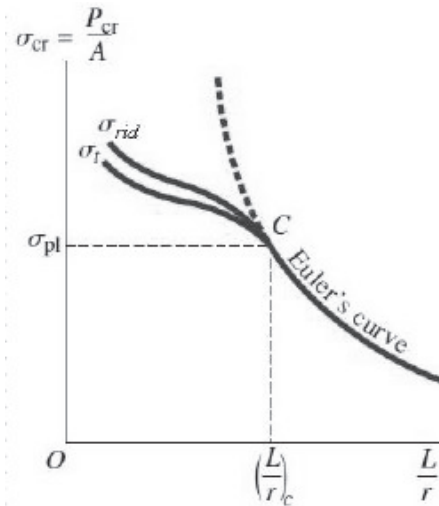


Fig. 1.28 Curve di stabilità delle teorie del modulo tangente e del modulo ridotto a confronto [25]

Il grafico evidenzia come la teoria del modulo ridotto fornisca carichi di instabilità un poco superiori rispetto la teoria del modulo tangente.

- Modello di Johnson

Per tenere conto delle evidenze sperimentali che riportavano collassi anche per combinazioni di “carico-snellezza” teoricamente sicure, è stata proposta una modifica empirica alla relazione di Eulero proposta da J.B. Johnson.

Tale formula prevede un andamento parabolico (**Fig. 1.29**) nella zona a comportamento elasto-plastico del tipo:

$$\sigma_{cr,pl} = \sigma_{sn} - k\lambda^2 \quad (1.62)$$

con k definito come:

$$k = \left(\frac{\sigma_{sn}}{2\pi}\right)^2 \frac{1}{E} \quad (1.63)$$

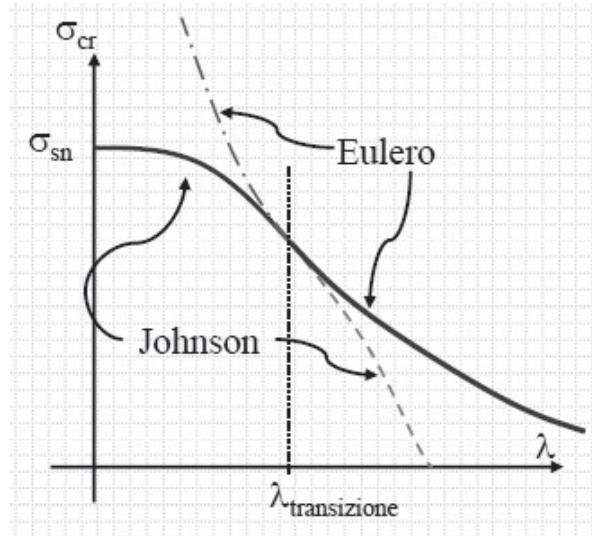


Fig. 1.29 Confronto tra il modello Johnson ed Eulero [25]

Occorre valutare quale sia la snellezza di transizione per delimitare i campi di utilizzo tra la formula di Eulero e di Johnson.

Il valore di tale snellezza si ottiene imponendo la condizione:

$$\sigma_{cr,E} = \sigma_{cr,J} \quad (1.64)$$

dove con $\sigma_{cr,E}$ si intende la tensione critica per Eulero, mentre con $\sigma_{cr,J}$ si intende la tensione critica per Johnson.

Nell'equazione (1.62) si sostituiscono le espressioni (1.63), (1.55) ottenendo:

$$\frac{\pi^2 E}{\lambda_t^2} = \sigma_{sn} - \left(\frac{\sigma_{sn}}{2\pi}\right)^2 \frac{1}{E} \lambda_t^2 \quad (1.65)$$

risolvendo l'equazione di quarto grado per λ_t si ricava l'espressione della snellezza di transizione:

$$\lambda_t = \sqrt{\frac{2\pi^2 E}{\sigma_{sn}}} \quad (1.66)$$

Dunque per valori di $\lambda > \lambda_t$ si utilizza la formulazione di Eulero, mentre per valori di snellezza $\lambda < \lambda_t$ viene applicata la formulazione parabolica di Johnson.

2. Instabilità secondaria

Il fenomeno dell'instabilità (*buckling*) locale o secondaria, al contrario dell'instabilità locale analizzata nel primo capitolo che non considerava la sezione delle travi, interessa zone localizzate della struttura andando a modificare la sezione stessa della trave.

Lo studio del carico critico secondario risulterà quindi più complicato, non solo per la bidimensionalità del problema e per la maggiore varietà dei vincoli al contorno ma anche per la diversità dei tipi di carico: forze nel piano, carichi distribuiti, compressione, taglio ecc..

In campo aerospaziale, molti componenti strutturali sono composti da elementi piastra come ad esempio il rivestimento (*skin*) della struttura, le pareti dei longheroni, i pannelli rinforzati, il pavimento ecc...

Gli elementi piastra opportunamente accoppiati possono comporre travi in parete sottile con molteplici sezioni a seconda dello scopo a cui sono destinate.

E' necessario definire l'entità dei carichi per cui tali strutture raggiungano una condizione di instabilità deformandosi, questo per soddisfare sia i requisiti imposti di robustezza degli elementi portanti ma, anche per garantire il mantenimento della forma.

In questo capitolo si analizzerà inizialmente il fenomeno dell'instabilità per i soli elementi piastra e, successivamente si estenderà la trattazione a strutture con sezioni composte da piastre a formare travi in parete sottile.

2.1 Instabilità elastica in piastre sottili isotrope

Per una piastra sottile il fenomeno di instabilità è legato a un numero di variabili più elevato rispetto all'instabilità di travi quali: dimensioni, geometria, condizioni vincolari e tipologia di carichi.

Per lo studio dell'instabilità si prenda in esame una piastra sottile rettangolare (**Fig.2.1**) semplicemente appoggiata su tutti e quattro i lati e soggetta ad un carico di compressione N_x .

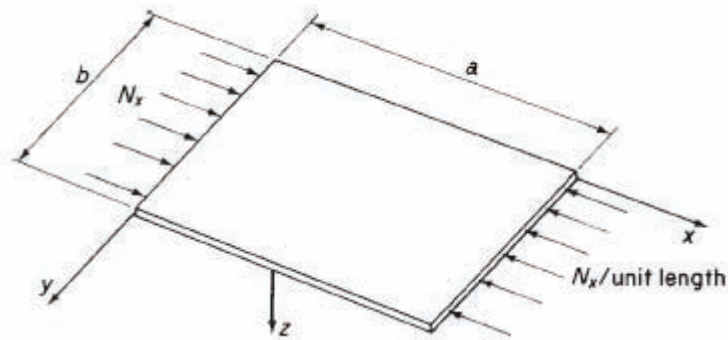


Fig. 2.1 Piastra rettangolare appoggiata su quattro lati sottoposta a compressione [39]

Tale configurazione risulta essere la più semplice condizione vincolare e di carico per lo studio dell'instabilità ed è assimilabile al comportamento di una trave di Eulero.

Quando il carico supera la soglia critica si raggiunge l'instabilità, la piastra si deforma nella zona centrale imbozzandosi. Tale deformazione è maggiore nella zona centrale e tende ad annullarsi vicino ai bordi vincolati che rimangono rettilinei.

Per la determinazione del carico critico si utilizza un approccio energetico partendo dalle definizioni di energia potenziale e di deformazione della piastra con ipotesi di piccoli spostamenti rispetto allo spessore.

Lo spostamento della piastra può essere espresso tramite la serie trigonometrica:

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (2.1)$$

L'energia totale di deformazione della piastra è :

$$U = \frac{D}{2} \int_0^a \int_0^b \left\{ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 - 2(1-\nu) \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial xy} \right)^2 \right] \right\} dx dy \quad (2.2)$$

Dove D indica la rigidità flessionale della piastra definita come:

$$D = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \frac{Ez^2}{1-\nu^2} dz = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} \quad (2.3)$$

con t spessore della piastra, E modulo di Young e ν modulo di Poisson.

L'energia potenziale dei carichi nel piano è:

$$V = -\frac{1}{2} \int_0^a \int_0^b \left[N_x \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + N_y \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + 2N_{xy} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right] dx dy \quad (2.4)$$

L'energia potenziale totale per la piastra sarà data dalla somma delle due espressioni (2.2) e (2.4) che vale:

$$U + V = \frac{1}{2} \int_0^a \int_0^b \left[D \left\{ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 - 2(1-\nu) \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial xy} \right)^2 \right] \right\} - N_x \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] dx dy \quad (2.5)$$

Integrando l'equazione (2.5) e inserendo la (2.3) si ottiene:

$$U + V = \frac{\pi^4 abD}{8} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn}^2 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right) - \frac{\pi^2 b}{8a} N_x \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} m^2 A_{mn}^2 \quad (2.6)$$

L'energia potenziale totale della piastra ha un valore stazionario nello stato di instabilità ovvero quando il carico equivale alla soglia critica: $N_x = N_{x,cr}$. Perciò, differenziando l'equazione (2.6) rispetto ad ogni valore del coefficiente incognito A_{mn} si ricava la condizione:

$$\frac{\partial(U + V)}{\partial A_{mn}} = \frac{\pi^4 abD}{4} A_{mn} \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2 - \frac{\pi^2 b}{4a} N_{x,cr} m^2 A_{mn} = 0 \quad (2.7)$$

che per una soluzione non banale porge:

$$N_{x,cr} = \pi^2 a^2 D \frac{1}{m^2} \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2 \quad (2.8)$$

L'equazione (2.8) esprime il valore del carico critico per unità di lunghezza nella configurazione analizzata.

Si osserva come per ognuno degli infiniti valori dei coefficienti legati alla deformazione corrisponda un determinato carico critico.

Il più basso valore del carico critico è dato dalla combinazione dei coefficienti interi m, n che, rappresentano il numero di semionde nelle deformazioni in direzione x e y della piastra.

Per determinare il carico critico si impone la condizione di minimo per la deformazione lungo y , ovvero $n = 1$. Successivamente si analizza poi al variare di m, a, b l'andamento del carico critico.

Per $n = 1$ l'espressione (2.8) diviene:

$$N_{x,cr} = \pi^2 a^2 D \frac{1}{m^2} \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)^2 \quad (2.9)$$

Si definisce il coefficiente di instabilità k come :

$$k = \left(\frac{mb}{a} + \frac{a}{mb} \right)^2 \quad (2.10)$$

che sostituito nella (2.9) porge:

$$N_{x,Cr} = \frac{k\pi^2 D}{b^2} \quad (2.11)$$

Il problema si riduce a valutare il minimo coefficiente k che determinerà il valore del carico critico minimo.

Dato il valore di a/b che, è un parametro geometrico della piastra, per determinare il k minimo si procede plottando k in funzione di a/b per differenti valori di m come mostrato in **Fig. 2.2**.

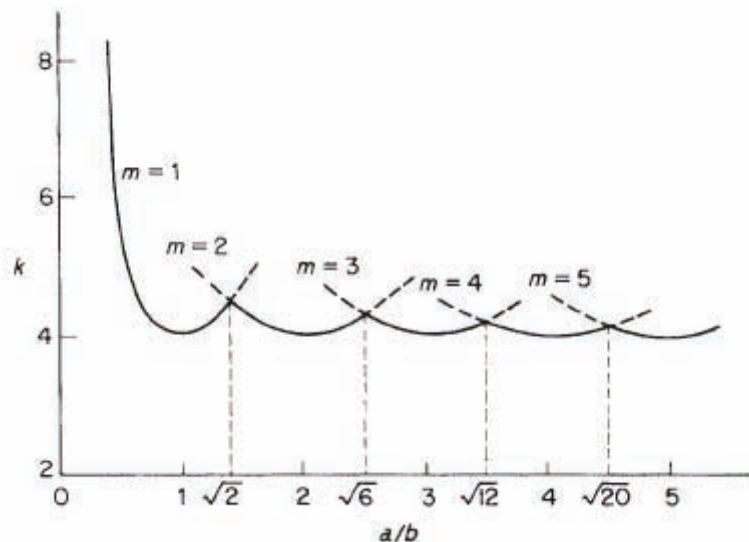


Fig. 2.2 Coefficiente di buckling k rispetto al parametro geometrico a/b per piastre in semplice appoggio sottoposte a compressione [39]

Dal grafico si osserva come le curve per diversi m tendano ad valore minimo di $k = 4$.

Si noti come il minimo di k si abbia in corrispondenza di $m \cong a/b$, inoltre con l'aumentare del rapporto a/b , k tende a 4 perciò le piastre strette e lunghe tendono a deformarsi in una serie di quadrati.

Interpolando le curve per i diversi m , si evidenziano dei punti di massimo che rappresentano la transizione tra due diversi modi, tali punti si possono determinare imponendo l'uguaglianza tra l'equazione (2.10) di k per $m = 1$ ed $m = m + 1$:

$$\frac{mb}{a} + \frac{a}{mb} = \frac{(m+1)b}{a} + \frac{a}{(m+1)b} \quad (2.12)$$

che svolta per a/b porge:

$$\frac{a}{b} = \sqrt{m(m+1)} \quad (2.13)$$

Sostituendo nella (2.13) gli di m per i diversi modi ($m = 1,2,3 \dots$) si ottengono i valori del rapporto a/b corrispondenti ai punti di transizione:

- $m = 1 \rightarrow \frac{a}{b} = \sqrt{2}$
- $m = 2 \rightarrow \frac{a}{b} = \sqrt{6}$
- $m = 3 \rightarrow \frac{a}{b} = \sqrt{12}$

Per un dato valore del rapporto a/b , la tensione critica è dato dall'espressione:

$$\sigma_{cr} = \frac{N_{x,cr}}{t} = \frac{k\pi^2 D}{tb^2} \quad (2.14)$$

con t lo spessore della piastra.

Ricordando la definizione di rigidità flessionale della piastra data dall'equazione (2.3) e sostituendola nella (2.14) si ottiene:

$$\sigma_{cr} = \frac{k\pi^2 E}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{t}{b}\right)^2 \quad (2.15)$$

In generale la tensione critica, per una piastra uniforme rettangolare, con varie condizioni di vincolo e caricata da forza nel piano (N_x, N_y) o a taglio (N_{xy}), è data dall'equazione (2.15).

Il valore della costante di instabilità k è funzione del rapporto a/b ma dipende anche dalla tipologia del carico applicato e dai vincoli posti.

Le soluzioni per altre tipologie di carico e vincoli, sono state ottenute usando il metodo energetico approssimato di Rayleigh-Ritz ed alcuni esempi sono mostrati nel grafico in **Fig. 2.3** per piastre in compressione (a), in flessione (b) e caricate a taglio (c).

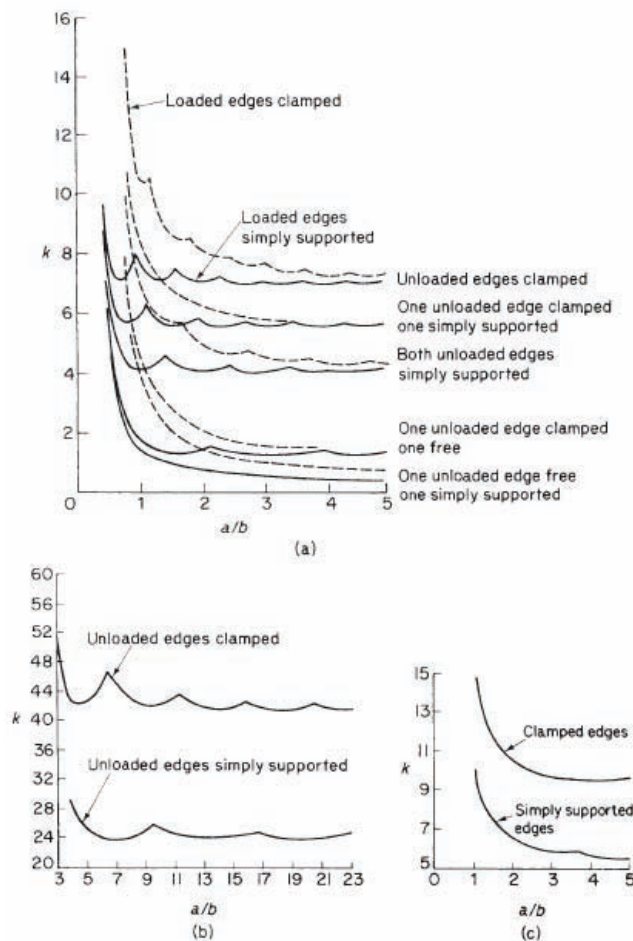


Fig. 2.3: a)Coefficienti di buckling per piastre in compressione; b)Coefficienti di buckling per piastre in flessione; c)Coefficiente di buckling per piastre sottoposte a taglio [39]

In **Fig. 2.3(c)**, dove k rappresenta il coefficiente di instabilità a taglio, il parametro geometrico b è sempre la dimensione del lato più corto della piastra.

Si può osservare come k divenga circa costante per valori di $a/b > 3$.

Tale fatto viene sfruttato nelle strutture di aerei dove degli irrigidimenti longitudinali dividono la pelle “*skin*” in una serie di pannelli più stretti (piccoli valori di b) incrementando così la tensione critica di instabilità.

2.2 Instabilità elastoplastica in piastre sottili

Per piastre aventi piccoli valori del rapporto b/t , la tensione critica può superare il limite elastico del materiale.

In tale situazione, l’equazione (2.14) non è applicabile poiché, come visto nella trattazione delle travi, il modulo di elasticità E ed il modulo di Poisson ν dipendono dalla tensione applicata nel tratto plastico.

Per considerare l’effetto della plasticità viene inserito nell’equazione (2.14) un fattore di correzione plastico η quindi, l’equazione diviene:

$$\sigma_{Cr} = \frac{\eta k \pi^2 E}{12(1 - \nu^2)} \left(\frac{t}{b}\right)^2 \quad (2.16)$$

La (2.16) può essere applicata ad ogni livello di tensione sia in campo elastico (ponendo $\eta = 1$) che in campo plastico.

Il fattore di correzione è definito dalla formula empirica:

$$\eta = \frac{1 - \nu_e^2 E_s}{1 - \nu_p^2 E} \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4} + \frac{3 E_t}{4 E_s} \right)^{\frac{1}{2}} \right] \quad (2.17)$$

dove E_t e E_s sono il modulo tangente e secante (della curva tensione/deformazione) della piastra nella regione inelastica mentre ν_e e ν_p sono i coefficienti di Poisson in campo elastico e plastico.

2.3 Determinazione sperimentale del carico critico per una piastra piana

Il carico critico per una piastra rettangolare può essere determinato per via sperimentale con la metodologia qui di seguito riportata.

Si prenda in esame una piastra sottile avente una curvatura iniziale e si definisca con w_0 la deflessione di ogni punto del suo piano medio.

Si assuma che il valore w_0 sia piccolo rispetto allo spessore della piastra.

Se si applicano dei carichi trasversali e nel piano, la deflessione della piastra incrementerà di una quantità w_1 quindi, la deflessione totale risulterà essere $w_l = w_0 + w_1$ ovvero la somma delle due.

L'equazione differenziale che governa la piastra è:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^4 w_1}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w_1}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w_1}{\partial y^4} \\ = \frac{1}{D} \left[q + N_x \frac{\partial^2 (w_0 + w_1)}{\partial x^2} + N_y \frac{\partial^2 (w_0 + w_1)}{\partial y^2} \right. \\ \left. + 2N_{xy} \frac{\partial^2 (w_0 + w_1)}{\partial x \partial y} \right] \quad (2.18) \end{aligned}$$

dove D indica la rigidità flessionale della piastra, (N_x, N_y, N_{xy}) i carichi nel piano e q i carichi distribuiti.

L'effetto della curvatura iniziale è equivalente all'applicazione di un carico trasversale di intensità:

$$N_x \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + N_y \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \quad (2.19)$$

Le azioni nel piano producono flessione, purché ci sia una curvatura iniziale.

Si assume che la deflessione iniziale della piastra sia data dalla formula trigonometrica:

$$w_0 = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (2.20)$$

che, sostituita nell'equazione (2.18) considerando agente solo il carico di compressione lungo N_x ($N_y, N_{xy} = 0$), fornisce :

$$w_1 = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} B_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (2.19)$$

dove il coefficiente B_{mn} è definito come:

$$B_{mn} = \frac{A_{mn} N_x}{\frac{\pi^2 D}{a^2} \left[m + \left(\frac{n^2 a^2}{m b^2} \right) \right]^2 - N_x} \quad (2.20)$$

Si osserva che B_{mn} aumenta con l'incremento dell'intensità del carico di compressione N_x .

Di conseguenza, quando il N_x tende al valore critico $N_{x,Cr}$, il termine della serie corrispondente alla deformata della piastra diviene il più significativo.

Ad esempio per una piastra quadrata, il valore critico minimo è dato per $m = 1$ e $n = 1$, per cui al centro della piastra la deflessione sarà pari a:

$$w_1 = \frac{A_{11} N_x}{N_{x,Cr} - N_x} \quad (2.21)$$

2.4 Instabilità localizzata

Come analizzato nel capitolo precedente si distinguono per le strutture due differenti fenomeni di instabilità: primaria e secondaria.

L'instabilità primaria riguarda l'intera struttura, non avviene un cambiamento della sezione e l'entità della deformata è dello stesso ordine della grandezza dell'elemento. In generale le travi spesse sono sensibili a questo fenomeno.

L'instabilità secondaria è invece un fenomeno localizzato che provoca variazione della sezione dell'elemento e la deformata è dello stesso ordine della sezione. Usualmente travi in parete sottile e le piastre sono soggette a questa seconda forma di instabilità.

Generalmente se una trave ha snellezza $\lambda > 80$ sarà soggetta ad instabilità primaria mentre se ha $\lambda < 20$ risponderà all'instabilità secondaria. Per valori di snellezza compresi tra 20 e 30 l'instabilità sarà data dalla combinazione dell'instabilità primaria e secondaria.

In ambito strutturale vengono utilizzate abitualmente travi in parete sottile con svariate sezioni: ad angolo, a Z, a U, ecc...(Fig. 2.4).

Queste si possono pensare come composte, tramite operazioni di piegatura o di accoppiamento, a partire da piastre sottili.



Fig. 2.4 Esempi di possibili sezioni per travi in parete sottile: a) Sezione ad angolo retto; b) Sezione a U; c) Sezione a canale (*channel*) d) sezione a "top hat" [39]

Gli elementi piastra componenti una sezione di una trave si suddividono in due categorie: flange (*flange*), che hanno un lato libero, e nervature, che sono vincolate a piastre adiacenti o hanno i lati caricati come mostrato nell'esempio in Fig. 2.6 con una trave a sezione ad I.

I bordi comuni di ogni piastra, si suppone abbiano condizioni di vincolo di semplice appoggio (nella realtà la condizione di vincolo è intermedia tra

quella di semplice appoggio e quella di un incastro completo) trascurando così la capacità di resistere alle rotazioni.

Nell'instabilità locale o secondaria, le flange e le nervature si deformano come delle piastre, ciò comporta una variazione di sezione nella trave.

La lunghezza d'onda della deformazione è dello stesso ordine della larghezza dell'elemento piastra e, il carico critico corrispondente è generalmente indipendente dalla lunghezza della trave che si considera avere una dimensione di almeno tre volte il lato maggiore dell'elemento piastra componente la sezione.

L'instabilità insorge quando l'elemento piastra più debole, solitamente la flangia, raggiunge il suo carico critico, nonostante in alcuni casi più elementi possono raggiungere simultaneamente l'instabilità.

Quando ciò si verifica, i vincoli rotazionali dovuti ad elementi adiacenti l'uno all'altro scompaiono e le piastre si comportano come se fossero semplicemente appoggiate lungo i bordi comuni.

Questo è il caso più semplice da analizzare e si riscontra in travi con sezione a T, a croce, o a tubi quadrati con spessore costante.

I valori di tensione critica locale per travi aventi le sezioni appena descritte viene determinato con l'equazione (2.16) con gli appropriati valori di k .

Per esempio, per una trave a sezione circolare compressa, si può considerare una piastra con tre lati semplicemente appoggiati ed uno libero; Dato il parametro geometrico a/b della piastra dal grafico in **Fig. 2.3** si determina il valore di k che rispetta le condizioni di carico e vincolo, se la deformazione è in campo elastico si pone il parametro $\eta = 1$ e si utilizza per il calcolo della tensione critica la formula:

$$\sigma_{cr} = \frac{\eta k \pi^2 E}{12(1 - \nu^2)} \left(\frac{t}{b}\right)^2$$

Un ulteriore metodologia è riportata nell' *L'Aeronautical Structure Manual* [NASA,1976] e Bruhn [1973] [7], che semplifica la relazione (2.15).

Questa metodologia è valida nel caso di piastre o fogli in alluminio relativamente lunghi (poiché il rapporto dimensionale a/b influenza in modo significativo il parametro k per piastre corte). La relazione (2.15) si può semplificare come:

$$\sigma_{cr} = k'E \left(\frac{t}{b}\right)^2 \quad (2.22)$$

dove k' è una costante che dipende unicamente dalle condizioni di vincolo dei bordi piastra scarichi. In **Fig. 2.5** sono riportati i valori di k' per differenti condizioni vincolari dei lati scarichi della piastra esaminata.

L'espressione (2.22) è molto accurata per valori di $a/b > 1$ con i lati caricati in semplice appoggio e per $a/b > 4$ con i lati caricati incastrati.

Anche se la (2.22) deriva da approssimazioni risulta fornire tensioni con errori trascurabili per materiali aventi modulo di Poisson compreso tra $0.27 \leq \nu \leq 0.37$.

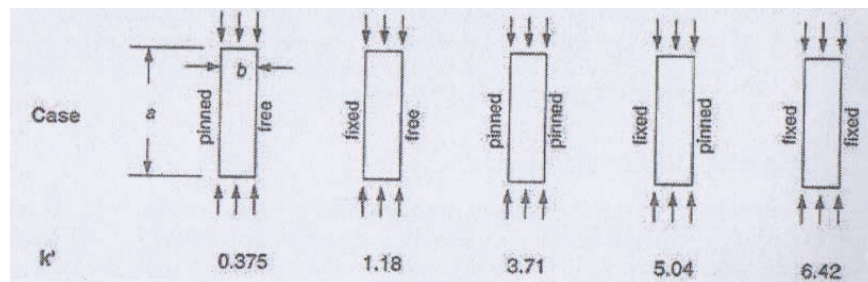


Fig.2.5 Valori della costante k' per diverse condizioni vincolari di una piastra metallica relativamente lunga sottoposta a compressione [23]

E' evidente che il calcolo del carico critico è in generale complicato e non esiste un metodologia universale e, le informazioni riguardo a questo fenomeno derivano per lo più da prove sperimentali specifiche su determinate forme, carichi e condizioni vincolari.

Per le tipologie di sezioni più comuni si può determinare il valore della tensione di instabilità (*buckling*) con delle espressioni ricercabili in letteratura.

Di seguito si riportano degli esempi per differenti tipologie di sezione riportati nell' *L'Aeronautical Structure Manual* per il calcolo della tensioni di instabilità elastica locale.

- Sezione a I in compressione:

Considerando una sezione come in **Fig. 2.6** la tensione di instabilità elastica può essere ricavata dalla relazione:

$$\sigma_{cr,min} = k_w \frac{\pi^2 E}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{t_w}{b_w} \right)^2$$

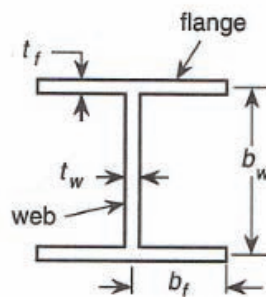


Fig. 2.6 Sezione trave ad I [23]

dove k_w viene ricavato dal grafico sperimentale di **Fig. 2.7**, che mostra inoltre quale parte della sezione (*web* o *flange*) raggiunge l'instabilità.

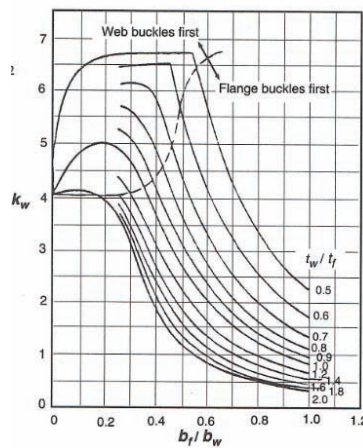


Fig. 2.7 Coefficiente di instabilità rispetto al rapporto dimensionale $\frac{b_f}{b_w}$ e $\frac{t_w}{t_f}$ per una sezione ad I [23]

- Sezione a Z o a channel

Considerando una sezione come in **Fig. 2.8** la tensione di instabilità elastica può essere ricavata dalla relazione:

$$\sigma_{cr,min} = k_w \frac{\pi^2 E}{12(1 - \nu^2)} \left(\frac{t_w}{b_w} \right)^2$$

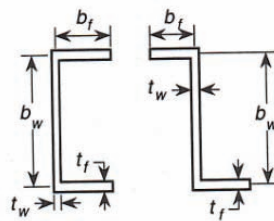


Fig. 2.8 Sezione trave con sezione a Z o channel [23]

dove k_w viene ricavato dal grafico sperimentale di **Fig. 2.9**.

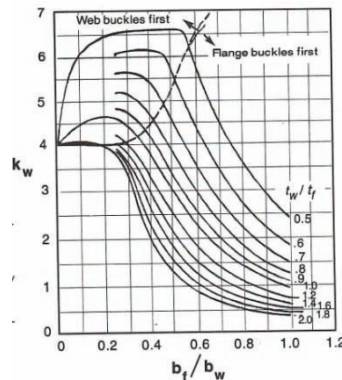


Fig. 2.9 Coefficiente di instabilità rispetto al rapporto dimensionale $\frac{b_f}{b_w}$ e $\frac{t_w}{t_f}$ per una sezione a channel [23]

- Tubo rettangolare in compressione (box section)

Considerando una sezione come in **Fig. 2.10** la tensione di instabilità elastica può essere ricavata dalla relazione:

$$\sigma_{cr,min} = k_w \frac{\pi^2 E}{12(1 - \nu^2)} \left(\frac{t_h}{h} \right)^2$$

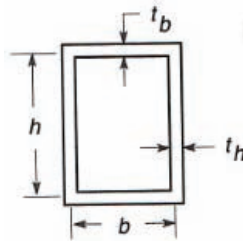


Fig. 2.10 Sezione trave con sezione a box [23]

dove k_w viene ricavato dal grafico sperimentale di Fig. 2.11.

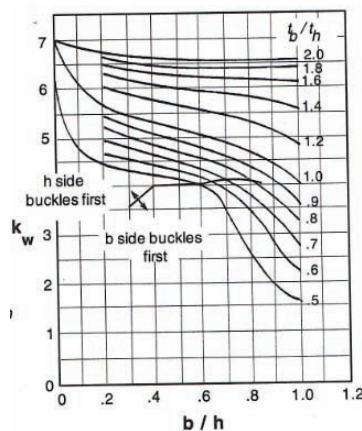


Fig. 2.11 Coefficiente di instabilità rispetto al rapporto dimensionale $\frac{b_f}{b_w}$ e $\frac{t_w}{t_f}$ per una sezione a box [23]

2.5 Tensione di crippling

Una volta raggiunta la tensione critica di *buckling* locale nella sezione di interesse, possono verificarsi due fenomeni:

- La struttura può raggiungere la tensione critica di *buckling* primario. Questo può avvenire poiché l'instabilità secondaria, variando localmente la sezione, cambia le caratteristiche inerziali dell'intera struttura.
- Non viene raggiunta la tensione critica di *buckling* primario. Le piastre componenti la sezione della struttura sono ancora in grado di supportare una ulteriore tensione detta: “*tensione di crippling*”.

La tensione di *crippling* rappresenta la tensione media massima che può supportare una piastra raggiunta la condizione di instabilità locale ossia la sua ultima riserva di carico.

Per spiegarne il significato si prenda in esame una piastra rettangolare compressa lungo i due lati e corti e vincolata lungo gli altri due come in **Fig. 2.12**.

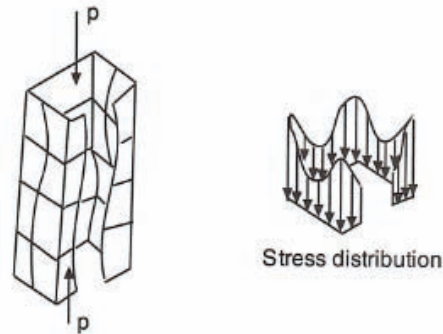


Fig. 2.12 Piastra vincolata sui due lati scarichi sottoposta a compressione [23]

Uno dei lati scarichi presenta un vincolo che impedisce gli spostamenti lungo la direzione z (direzione ortogonale alla superficie superiore della piastra). Ad un determinato valore del carico di compressione insorgerà l'instabilità con una conseguente deformazione stabile della piastra. In questa configurazione, le tensioni sulla piastra non avranno un andamento costante ma, risulteranno maggiori in vicinanza del bordo vincolato. Con l'aumento progressivo del carico di compressione, il picco di tensioni localizzato in prossimità del lato vincolato, può raggiungere il valore limite di resistenza per il materiale. La tensione media raggiunta prima del superamento del limite di resistenza del materiale rappresenta la tensione di *crippling*.

Di seguito sono riportate due metodologie di calcolo approssimato per la tensione di *crippling* ipotizzando sempre di essere in campo elastico (le metodologie per l'instabilità locale elasto-plastica non fanno parte degli obiettivi posti per questo elaborato):

1) Metodologia Astronautical Manual:

Presentata appunto nel testo : *Astronautical Manual*, è utilizzabile per tutti i materiali in caso di instabilità elastica.

$$\sigma_{cc} = 10^x \sigma_{snerv} \quad (2.23)$$

dove σ_{cc} è la tensione di *crippling*, σ_{snerv} è la tensione di snervamento del materiale e x è un parametro che dipende dalle condizioni al contorno.

-Un lato libero ed uno in appoggio:

$$x = -0.25 - 0.81 \log \left[\left(\frac{b}{t} \right) \sqrt{\frac{\sigma_{snerv}}{E}} \right]$$

-Entrambi i lati in semplice appoggio:

$$x = -0.14 - 0.81 \log \left[\left(\frac{b}{t} \right) \sqrt{\frac{\sigma_{snerv}}{E}} \right]$$

2) Metodologia di Clark & Jombock

Espressione ricavata da *Clark e Jombock* valida solo per leghe di alluminio e con la condizione che la snellezza della piastra λ_p sia maggiore di una costante C_p definita empiricamente.

$$\sigma_{cc} = k_2 \frac{\sqrt{B_p E}}{\lambda_p} \quad (2.24)$$

dove B_p è una costante definita empiricamente e k_2 è una costante relativa agli stati di lavorazione subita dalla lega di alluminio:

- $k_2 = 2.04$ stati di lavorazione -H, -T1, -T2, -T3, -T4

- $k_2 = 2.27$ stati di lavorazione -T5, -T6, -T7, -T8, -T9

In base alla sezione si può quindi determinare quale delle sue parti (*flange* o *web*) raggiunga per prima la condizione di instabilità grazie ai grafici sopra riportati (Figure grafici sarafin).

Si definisce poi una snellezza relativa alla piastra (*flange* o *web*) che raggiunge il buckling come:

$$\lambda_p = \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_{cr}}} \quad (2.25)$$

ed una snellezza per le piastre che non raggiungono l'instabilità come:

$$\lambda_p = \pi \sqrt{\frac{1}{k'_i} \left(\frac{b_i}{t_i}\right)} \quad (2.26)$$

con k'_i parametro funzione delle condizioni al contorno sui lati scarichi della piastra.

Si calcoleranno poi per ogni piastra le relative tensioni di *crippling* tramite una delle due metodologie (*Aeronautical Manual* o *Clark & Jomcock*).

Infine la tensione media di *crippling* su tutta la sezione sarà data da:

$$\sigma_{cc,sez} = \frac{\sum_{i=1}^n b_i t_i \sigma_{cc,i}}{\sum_{i=1}^n b_i t_i} \quad (2.27)$$

con n numero delle piastre componenti la sezione, $b_i t_i$ dimensioni della piastra i -esima e $\sigma_{cc,i}$ tensione di *crippling* per la piastra i -esima.

2.6 Metodo dello spessore efficace per sezioni a box e channel

Di seguito si riporterà una metodologia per il calcolo della tensione critica delle sezioni a *box* e a *channel* presentate nel manuale BS 5950 (British Standard for the design, fabrication and erection of structural steelwork) valida per profili in alluminio.

Uno vantaggi dei profili in alluminio è la possibilità di una facile formabilità in differenti forme tramite piegatura o accoppiamenti di piastre o lamine sottili. L'alluminio ha un valore del modulo elastico ridotto di circa un terzo rispetto all'acciaio comportando valori di tensioni critiche per l'instabilità locale inferiori. Per i profili in alluminio, l'instabilità locale, è il fenomeno dominante che provoca il fallimento della struttura.

Il metodo di seguito riportato per il calcolo del carico critico, tiene conto degli effetti dovuti all'accoppiamento di piastre sottili a formare una sezione per un profilo a *box* e a *channel*.

Considerando k_0 il coefficiente di instabilità di una piastra indipendente e, con k il coefficiente di instabilità di interazione per piastre assemblate, si definisce un coefficiente di restrizione:

$$\psi = \frac{k}{k_0} \quad (2.28)$$

La tensione critica per una piastra considerando l'effetto dell'accoppiamento sarà.

$$\sigma_{cr} = \frac{\psi k_0 \pi^2 E}{12(1 - \nu^2)} \left(\frac{t}{b}\right)^2 \quad (2.29)$$

Quando insorge l'instabilità, sia le flange che le nervature che compongono il profilo hanno lo stesso valore di tensione critica per cui:

$$\sigma_{Cr} = \frac{k_w \pi^2 E}{12(1 - \nu^2)} \left(\frac{t_w}{h}\right)^2 = \frac{k_f \pi^2 E}{12(1 - \nu^2)} \left(\frac{t_f}{b}\right)^2 \quad (2.30)$$

dove t_w e t_f sono rispettivamente gli spessori di nervatura (*web*) e flangia (*flange*), h e b sono rispettivamente gli spessori di nervatura e flangia. k_w e k_f sono i coefficienti di instabilità per la nervatura e la flangia.

Dalla (2.30) si ricava la relazione tra i due coefficienti di instabilità:

$$k_w = k_f \left(\frac{h}{b}\right)^2 \left(\frac{t_f}{t_w}\right)^2 \quad (2.31)$$

Definendo con k_{w0} e k_{f0} i coefficienti di instabilità di nervatura (*web*) e flangia (*flange*) senza l'effetto dell'accoppiamento si ottengono i rispettivi coefficienti di restrizione:

$$\psi_w = \frac{k_w}{k_{w0}} \quad \psi_f = \frac{k_f}{k_{f0}} \quad (2.32)$$

Si prenda in esempio un tubo a sezione quadrata (*box section*) in parete sottile sottoposto a compressione come in **Fig.2.13**.

Si può considerare come formato da quattro piastre sottili.

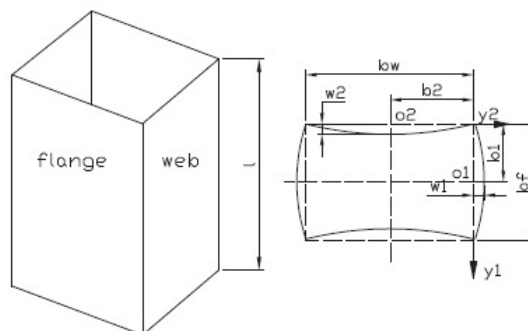


Fig. 2.13 Sezione a tubo quadrato (*box*) e relativo modello rappresentante la deformazione [59]

Come da teoria, l'instabilità locale della sezione ha le seguenti caratteristiche:

- L'instabilità di tutte e quattro le piastre avviene simultaneamente;
- I bordi di connessione tra piastre adiacenti rimangono rettilinei prima e dopo l'instabilità
- L'angolo di connessione tra piastre adiacenti rimane rettilineo prima e dopo l'instabilità
- Le piastre in una sezione hanno la stessa deformata a semionda come in **Fig.2.13**.
- Ogni punto nel bordo di connessione tra le piastre adiacenti avrà lo stesso valore di tensione o di rotazione angolare delle due piastre.

Si assume l'asse x della piastra lungo la direzione longitudinale del carico e, l'asse y trasversale alla sezione con l'origine posta al centro.

La deformazione dovuta all'instabilità della flangia e della nervatura è definita dall'equazione:

$$w_i = \sin \frac{\pi m x}{L} \sum_{n=1}^N F_n Y_{in}(y_i) \quad (2.33)$$

dove $Y_{in}(y) = A_i \cosh \alpha_i y + C_i \cos \beta_i y$

I coefficienti α_i e β_i sono definiti come:

$$\alpha_i = \left[\lambda_m^2 + \lambda_m \sqrt{\frac{P_{cr,i}}{D}} \right]^{\frac{1}{2}} \quad \beta_i = \left[-\lambda_m^2 + \lambda_m \sqrt{\frac{P_{cr,i}}{D}} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (2.34)$$

con $\lambda_m = m\pi/L$ dove m indica il numero di onde di deformazione lungo la direzione del carico ed L la lunghezza della piastra.

Il carico critico è pari a $P_{cr,i} = \sigma_{cr} t_i$, dove t_i è lo spessore mentre l'indice i discrimina tra la flangia ($i = 1$) la nervatura ($i = 2$).

D indica la rigidità flessionale della piastra definita precedentemente dalla (), A_i e C_i sono coefficienti di integrazione ed F_n è il coefficiente di amplificazione di deflessione.

Le equazioni (2.33) e (2.34) derivano dalla soluzione di Levy per l'equazione differenziale di equilibrio per una piastra deformata elasticamente:

$$\left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) + \frac{\sigma_x \cdot t}{D} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad (2.35)$$

Per determinare il carico critico si impongono le condizioni al contorno:

$$w_1|_{y_1=-b_1} = 0 \Rightarrow A_1 \cosh \alpha_1(-b_1) + C_1 \cos \beta_1(-b_1) = 0$$

$$w_2|_{y_2=b_2} = 0 \Rightarrow A_2 \cosh \alpha_2(b_2) + C_2 \cos \beta_2(b_2) = 0$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial w_1}{\partial y_1} |_{y_1=-b_1} &= \frac{\partial w_2}{\partial y_2} |_{y_2=b_2} \\ &\Rightarrow A_1 \alpha_1 \sinh \alpha_1 b_1 - C_1 \beta_1 \sin \beta_1 b_1 + A_2 \alpha_2 \sinh \alpha_2 b_2 - C_2 \beta_2 \sin \beta_2 b_2 \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$M_y|_{y_1=-b_1} = M_y|_{y_2=2} \Rightarrow \frac{\partial^2 w_1}{\partial y_1^2} |_{y_1=-b_1} = \frac{\partial^2 w_2}{\partial y_2^2} |_{y_2=b_2} \Rightarrow$$

$$A_1 \alpha_1^2 \cosh \alpha_1 b_1 - C_1 \beta_1^2 \cos \beta_1 b_1 - A_2 \alpha_2^2 \cosh \alpha_2 b_2 + C_2 \beta_2^2 \cos \beta_2 b_2 = 0$$

per ottenere una soluzione non banale si deve risolvere il sistema imponendo uguale a zero il determinante della matrice:

$$\begin{vmatrix} \cosh \alpha_1 b_1 & \cos \beta_1 b_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cosh \alpha_2 b_2 & \cos \beta_2 b_2 \\ \alpha_1 \sinh \alpha_1 b_1 & -\beta_1 \sin \beta_1 b_1 & \alpha_2 \sinh \alpha_2 b_2 & -\beta_2 \sin \beta_2 b_2 \\ \alpha_1^2 \cosh \alpha_1 b_1 & -\beta_1^2 \cos \beta_1 b_1 & \alpha_2^2 \cosh \alpha_2 b_2 & -\beta_2^2 \cos \beta_2 b_2 \end{vmatrix} = 0 \quad (2.36)$$

Dati i parametri geometrici delle piastre l'equazione (2.36) può essere risolta numericamente fornendo i valori dei parametri $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2$ utili per

determinare il valore del carico critico della flangie e della nervatura. Il carico di instabilità locale della struttura sarà poi il minore tra i due.

In maniera analoga si può ottenere il valore del carico critico per un profilo a sezione a C (*channel section*) come in **Fig. 2.14**, per brevità per tale sezione si riporteranno solo i risultati ottenuti.

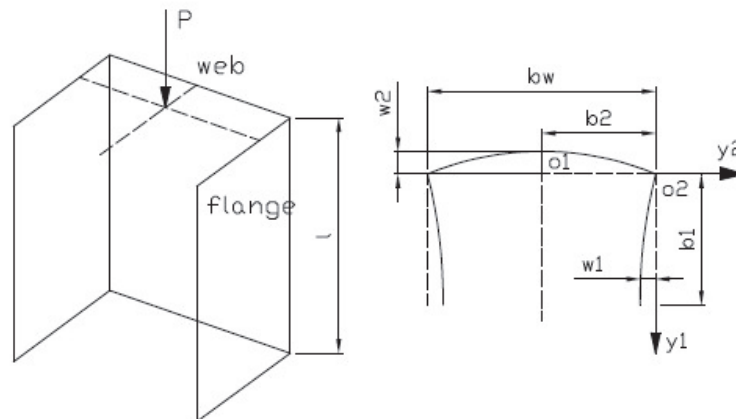


Fig.2.14 Sezione a canale (*channel*) e relativo modello rappresentante la deformazione [59]

Il coefficiente di instabilità “di interazione” e il coefficiente di restrizione possono essere determinati a partire dal carico critico con le espressioni:

$$k = \frac{12(1 - \nu^2)}{\pi^2 E} \left(\frac{b}{t}\right)^2 \sigma_{Cr} \quad (2.37)$$

$$\psi = \frac{k}{k_0}$$

Analisi sperimentali provano che il coefficiente di interazione di instabilità non dipende dal modulo elastico e dalla rigidità del materiale ma, dipende solo dal rapporto di forma (b/h) e dal rapporto di spessore (t_f/t_w) tra flangia e nervatura della sezione analizzata.

Per una compressione unitaria in travi con sezione a *box* formate da piastre dello stesso spessore il coefficiente di instabilità per la nervatura si può

quindi derivare dall'espressione alternativa (metodo derivato dal manuale BS5950):

$$k_w = 7 - \frac{2 \left(\frac{b}{h}\right)}{0.11 + \frac{b}{h}} - 1.2 \left(\frac{b}{h}\right)^3 \quad (2.38)$$

mentre per una sezione a *channel* :

$$k_w = \frac{2}{\sqrt{1 + 15 \left(\frac{b}{h}\right)^3}} + \frac{2 + 4.8(b/h)}{1 + 15 \left(\frac{b}{h}\right)^3} \quad (2.39)$$

Il coefficiente di interazione per la flangia viene determinato a partire dal coefficiente relativo alla nervatura tramite la relazione:

$$k_w = k_f \left(\frac{h}{b}\right)^2 \left(\frac{t_f}{t_w}\right)^2 \quad (2.40)$$

Si analizzino due travi sottoposte a compressione assiale con sezione a *box* e a *channel*, con le proprietà riportate in tabella **Tab. 2.1**.

Section type	Web width h (mm)	Web thickness t_w (mm)	Stub length l (mm)	Elastic modulus E (N/mm ²)	Poisson's ratio ν
Box section	180	4	720	70000	0.3
Channel section	180	4	720	70000	0.3

Tab. 2.1 Dimensioni geometriche e caratteristiche del materiale per le due sezioni box e channel [59]

In **fig 2.15** è rappresentata la relazione tra il coefficiente di restrizione ψ_w e il rapporto di forma b/h con $t_f = t_w$ per le due differenti sezioni dove m rappresenta il numero di onde di deformazione. Nei due grafici vengono messi a confronto gli andamenti dal coefficiente di restrizione ricavati a partire dall'equazione (2.37) (con differenti valori di m) e dall'equazione modificata (2.38).

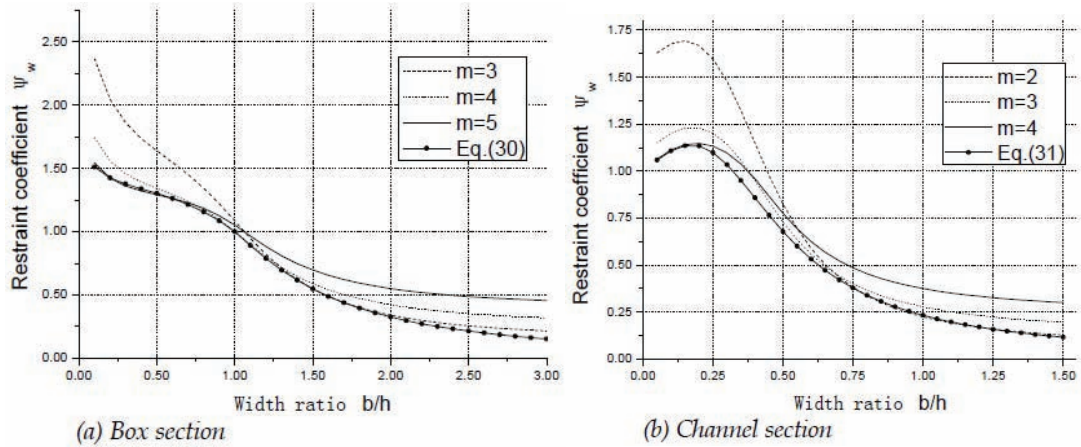


Fig. 2.15 Coefficiente di restrizione in funzione del parametro geometrico b/h per le due sezioni [59]

Per valori di $\psi_w = 1$ si ha una instabilità indipendente dall'iterazione tra le diverse piastre che compongono la sezione. Si osserva come l'andamento ottenuto con l'equazione modificata () non si discosti molto per piccoli valori di m dall'andamento ottenuto con la relazione classica ().

Per sezioni a *box* con flangia e nervatura dello stesso spessore, una relazione approssimata che lega il coefficiente di restrizione ψ_f con il rapporto tra gli spessori t_f/t_w , è data da:

$$\psi_w = 1.34 - \frac{1.16}{1 + 2.37 \left(\frac{t_f}{t_w}\right)^4} \quad (2.41)$$

mentre per una sezione a *channel*:

$$\psi_w = 1.45 - \frac{1.41}{1 + 0.9 \left(\frac{t_f}{t_w}\right)^3} \quad (2.42)$$

In Fig. 2.16 è mostrata la relazione approssimata tra ψ_w e t_f/t_w , per le due sezioni, messa a confronto con l'equazione data dalla teoria classica. Risulta evidente come ci sia un'ottima coincidenza tra il coefficiente approssimato e quello teorico per piccoli valori di m .

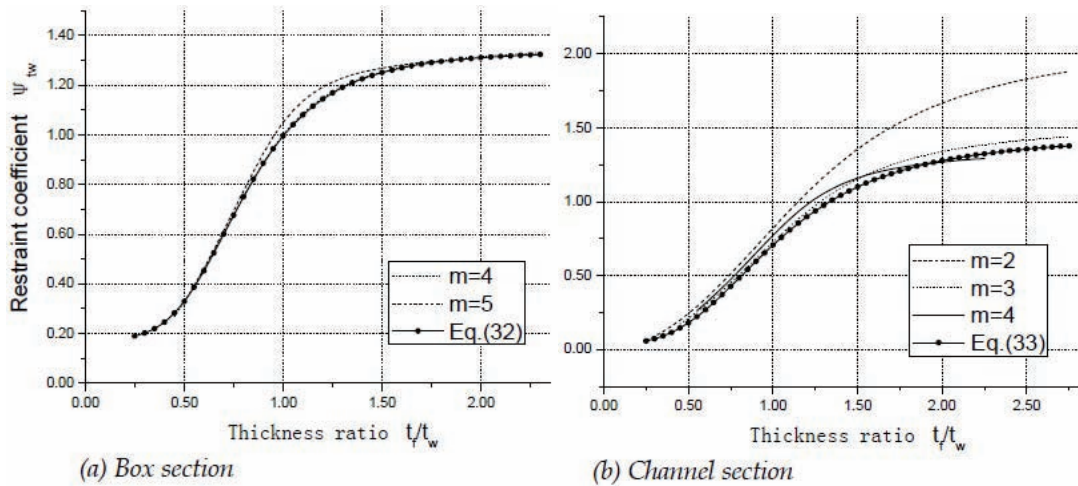


Fig. 2.16 Coefficiente di restrizione in funzione del rapporto tra gli spessori t_f/t_w per le due sezioni [59]

Infine per generiche sezioni a *box* e a *channel* con differenti valori di spessore tra flangia e nervatura, si può determinare il valore del coefficiente di restrizione approssimato tramite i grafici in fig. 2.17.

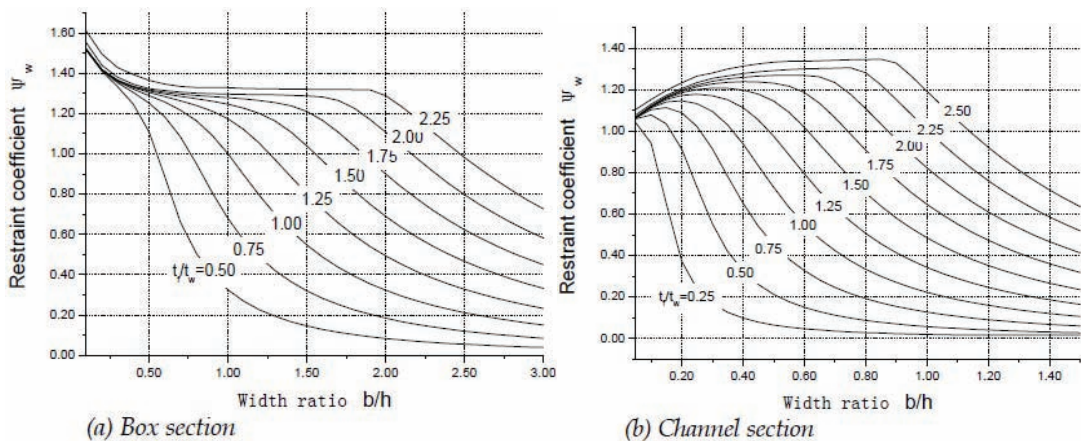


Fig. 2.17 Coefficiente di restrizione in funzione del rapporto tra gli spessori t_f/t_w e del rapporto b/h per le due sezioni [59]

I risultati ottenuti dai grafici sono riportati nelle tue tabelle **Tab. 2.2**, **Tab. 2.3** relative alle due sezioni analizzate.

Width ratio b/h	Thickness ratio t_f/t_w							
	0.50	0.75	1.00	1.25	1.50	1.75	2.00	2.25
0.10	1.519	1.519	1.519	1.519	1.519	1.519	1.553	1.611
0.20	1.411	1.416	1.417	1.418	1.418	1.418	1.440	1.496
0.30	1.334	1.354	1.360	1.363	1.364	1.365	1.381	1.429
0.40	1.246	1.305	1.322	1.329	1.333	1.335	1.346	1.395
0.50	1.108	1.252	1.290	1.305	1.313	1.317	1.324	1.364
0.60	0.885	1.183	1.257	1.284	1.298	1.305	1.315	1.346
0.70	0.658	1.084	1.217	1.264	1.285	1.297	1.307	1.335
0.80	0.505	0.951	1.164	1.241	1.274	1.291	1.302	1.330
0.90	0.400	0.807	1.092	1.212	1.261	1.285	1.299	1.330
1.00	0.324	0.678	1.000	1.174	1.247	1.279	1.297	1.328
1.10	0.268	0.572	0.896	1.121	1.228	1.273	1.295	1.326
1.20	0.226	0.488	0.793	1.052	1.201	1.266	1.294	1.324
1.30	0.193	0.420	0.700	0.971	1.162	1.255	1.293	1.323
1.40	0.167	0.365	0.618	0.885	1.108	1.239	1.291	1.322
1.50	0.145	0.320	0.547	0.802	1.040	1.211	1.288	1.321
1.60	0.128	0.283	0.487	0.725	0.965	1.166	1.282	1.320
1.70	0.114	0.251	0.436	0.656	0.890	1.107	1.266	1.320
1.80	0.102	0.225	0.393	0.595	0.818	1.039	1.227	1.319
1.90	0.092	0.203	0.355	0.541	0.751	0.969	1.172	1.318
2.00	0.083	0.184	0.322	0.493	0.690	0.900	1.108	1.289
2.10	0.076	0.167	0.294	0.452	0.635	0.835	1.042	1.236
2.20	0.069	0.153	0.269	0.415	0.585	0.775	0.976	1.173
2.30	0.063	0.141	0.248	0.382	0.541	0.720	0.913	1.109
2.40	0.058	0.130	0.229	0.353	0.502	0.670	0.853	1.045
2.50	0.054	0.120	0.212	0.327	0.466	0.624	0.798	0.983
2.60	0.050	0.111	0.196	0.304	0.433	0.582	0.747	0.924
2.70	0.047	0.103	0.183	0.284	0.405	0.544	0.701	0.870
2.80	0.044	0.096	0.171	0.265	0.378	0.510	0.657	0.818
2.90	0.041	0.090	0.160	0.248	0.355	0.478	0.618	0.771
3.00	0.038	0.084	0.150	0.233	0.333	0.449	0.581	0.727

Tab. 2.2 Coefficienti di restrizione per differenti valori dei rapporti dimensionali t_f/t_w e b/h per sezioni a box [59]

Width ratio b/h	Thickness ratio t_f/t_w									
	0.25	0.50	0.75	1.00	1.25	1.50	1.75	2.00	2.25	2.50
0.05	1.041	1.060	1.063	1.064	1.065	1.065	1.065	1.066	1.077	1.104
0.10	0.942	1.079	1.104	1.112	1.116	1.119	1.120	1.121	1.129	1.152
0.15	0.652	1.035	1.114	1.140	1.152	1.158	1.162	1.165	1.172	1.196
0.20	0.372	0.913	1.088	1.147	1.172	1.185	1.193	1.198	1.205	1.233
0.25	0.239	0.731	1.023	1.132	1.178	1.201	1.214	1.222	1.234	1.265
0.30	0.169	0.552	0.915	1.095	1.171	1.208	1.228	1.240	1.255	1.281
0.35	0.125	0.419	0.782	1.030	1.151	1.207	1.236	1.252	1.267	1.300
0.40	0.098	0.326	0.652	0.939	1.113	1.198	1.239	1.260	1.278	1.314
0.45	0.078	0.260	0.541	0.833	1.055	1.179	1.237	1.266	1.286	1.325
0.50	0.064	0.212	0.452	0.728	0.975	1.145	1.231	1.269	1.293	1.333
0.55	0.054	0.177	0.382	0.632	0.885	1.091	1.217	1.270	1.297	1.337
0.60	0.045	0.149	0.326	0.550	0.794	1.019	1.187	1.269	1.300	1.337
0.65	0.040	0.128	0.281	0.481	0.708	0.937	1.134	1.262	1.303	1.339
0.70	0.035	0.111	0.245	0.423	0.632	0.854	1.064	1.234	1.304	1.342
0.75	0.031	0.097	0.216	0.374	0.565	0.775	0.987	1.179	1.305	1.344
0.80	0.027	0.086	0.191	0.334	0.507	0.703	0.909	1.109	1.283	1.346
0.85	0.025	0.077	0.171	0.299	0.457	0.638	0.835	1.035	1.223	1.347
0.90	0.023	0.069	0.154	0.269	0.413	0.581	0.766	0.960	1.153	1.329
0.95	0.020	0.062	0.139	0.244	0.375	0.530	0.703	0.889	1.080	1.264
1.00	0.019	0.056	0.126	0.222	0.343	0.485	0.647	0.823	1.008	1.193
1.05	0.017	0.051	0.115	0.203	0.314	0.446	0.596	0.762	0.939	1.121
1.10	0.016	0.047	0.105	0.186	0.288	0.410	0.551	0.706	0.874	1.051
1.15	0.016	0.043	0.097	0.172	0.266	0.379	0.510	0.656	0.815	0.985
1.20	0.016	0.040	0.090	0.159	0.246	0.351	0.473	0.610	0.761	0.922
1.25	0.016	0.037	0.083	0.147	0.228	0.326	0.440	0.569	0.711	0.864
1.30	0.016	0.034	0.077	0.137	0.213	0.304	0.411	0.532	0.665	0.810
1.35	0.016	0.032	0.072	0.127	0.198	0.284	0.384	0.497	0.623	0.761
1.40	0.016	0.030	0.067	0.119	0.185	0.266	0.360	0.466	0.585	0.716
1.45	0.016	0.028	0.063	0.112	0.174	0.249	0.338	0.438	0.551	0.674
1.50	0.016	0.026	0.059	0.105	0.163	0.234	0.317	0.412	0.518	0.635

Tab. 2.3 Coefficienti di restrizione per differenti valori dei rapporti dimensionali t_f/t_w e b/h per sezioni a channel [59]

2.7 Esempio: collasso elastico di tubi in parete sottile

Si consideri un tubo omogeneo a spessore sottile come in mostrato in **Fig.2.18** sottoposto ad un carico assiale di compressione.

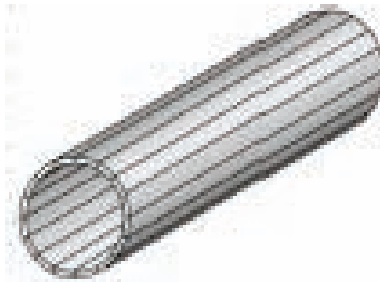


Fig.2.18 Tubo omogeneo in parete sottile

In **Fig. 2.19 a)** è mostrata la deformazione del tubo ricavata tramite un'analisi ad elementi finiti e, in **Fig.2.19 b)** una sezione assiale del tubo dove è visibile la deformazione ad onda sulla parete dovuta all'insorgere dell'instabilità.

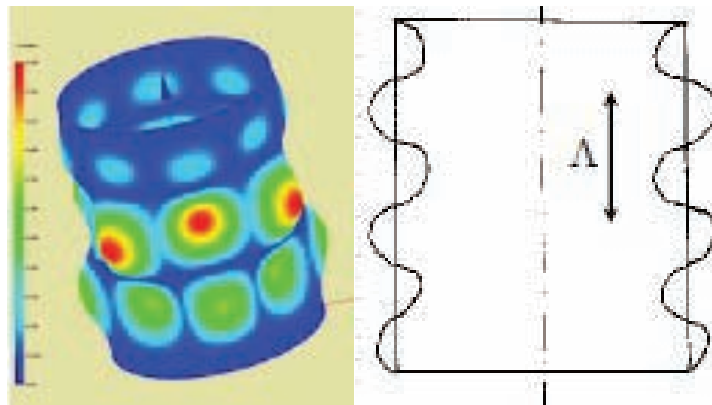


Fig. 2.19 Deformazione del tubo in parete sottile sottoposto a compressione assiale

Si definisce con Δ la lunghezza d'onda della deformazione. Per poter osservare il fenomeno è necessario che la lunghezza assiale del tubo sia sufficiente a contenere (almeno 3) lunghezze d'onda per poter trascurare l'irrigidimento dovuto agli effetti bordo e, il raggio medio deve essere molto maggiore dello spessore (almeno 20 volte).

Si vuole determinare la tensione critica del tubo in parete sottile in funzione dello spessore e del raggio medio.

La lunghezza d'onda della deformazione per un cilindro di raggio medio r e spessore s si può definire come:

$$\Delta = \frac{2\pi}{\sqrt[4]{12(1-\nu^2)}} \sqrt{Rs} \quad (2.43)$$

Un tubo sottile può pensarsi come formato da una serie di elementi monodimensionali lateralmente connessi come mostrato in **Fig. 2.20**.

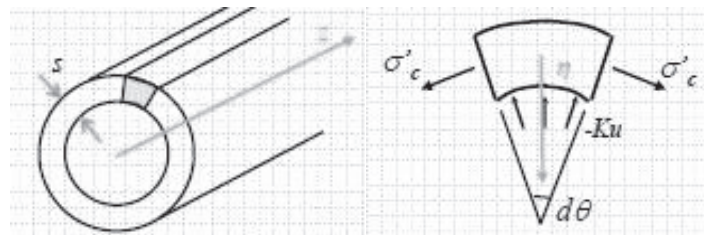


Fig.2.20 Equilibrio di un elemento infinitesimo di tubo

Se i carichi sono assiali e simmetrici, il comportamento di un singolo elemento può caratterizzare l'intero tubo e il problema diviene monodimensionale.

Si considera un elemento infinitesimo $d\theta$ (in coordinate cilindriche) del tubo rappresentato in **Fig.2.20**.

Si scrive l'equilibrio radiale per una lunghezza assiale unitaria:

$$KuRd\theta = 2\sigma_c s \frac{d\theta}{2} \quad (2.44)$$

dove con σ_c si considera la tensione circonferenziale definita dal legame tensione-deformazione come:

$$\sigma_c = E\varepsilon_c = E \frac{2\pi(R-u) - 2\pi R}{2\pi R} = -E \frac{u}{R} \quad (2.45)$$

e con K rappresentante la rigidità dovuta al trattenimento circonferenziale del mantello definito dall'equazione:

$$K = \frac{Es}{R^2} \quad (2.46)$$

che considerato per unità di superficie porge il valore della rigidezza equivalente:

$$k = 2\pi RK = 2\pi \frac{Es}{R} \quad (2.47)$$

La tubazione sottile, caricata in maniera assialsimmetrica, si può trattare come una trave su fondazione elastica (**Fig.2.1**)

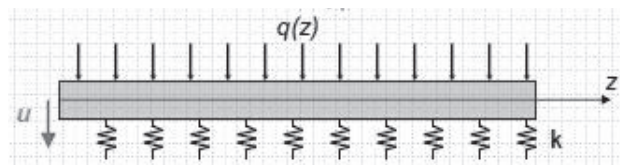


Fig.2.21 Trave su fondazione elastica: modello equivalente al tubo in parete sottile

Si può studiare ora il comportamento di un conio di trave su fondazione elastica con rigidezza (per unità di superficie) k soggetto a carico assiale P come in **Fig.2.22**. $M(z)$ rappresenta il momento, $V(z)$ il taglio, e $w(z)$ il carico distribuito.

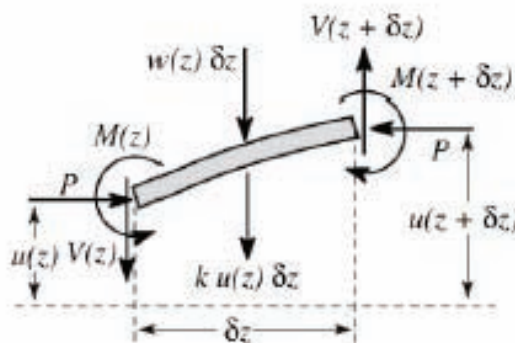


Fig.2.22 Equilibrio di un conio di trave su fondazione elastica

Per l'equilibrio la variazione del taglio è pari a:

$$\frac{dV}{dz} = w + ku \quad (2.48)$$

la variazione del momento:

$$\frac{dM}{dz} = P \frac{du}{dz} + V \quad (2.49)$$

con M definito come:

$$M = -E'I \frac{d^2u}{dz^2} \quad (2.50)$$

Il momento di inerzia complessivo del tubo vale:

$$I = \frac{2\pi R S^3}{12} \quad (2.51)$$

Nelle sollecitazioni bidimensionali, il rapporto tra tensione e deformazione relativa assume il valore:

$$E' = \frac{E}{1 - \nu^2} \quad (2.52)$$

Considerando assente il carico distribuito $w(z)$, combinando le tre equazioni (2.48), (2.49) e (2.52) si ottiene l'equazione differenziale di equilibrio per il concio di trave:

$$\frac{d^4u}{dz^4} + \frac{P}{E'I} \frac{d^2u}{dz^2} + \frac{ku}{E'I} = 0 \quad (2.53)$$

La soluzione è del tipo: $u = Ae^{az}$ e si determina ricavando gli zeri dalla soluzione algebrica:

$$a^4 + \frac{P}{E'I} a^2 + \frac{k}{E'I} = 0 \Rightarrow a^2 = \frac{1}{2} \left(-\frac{P}{E'I} \pm \sqrt{\frac{4k}{E'I} - \left(\frac{P}{E'I}\right)^2} \right)$$

Nella soluzione che si ricava, il termine di decadenza esponenziale si annulla se si annulla la precedente radice, il valore del carico critico risulterà:

$$P_0 = \sqrt{4kE'I} \quad (2.54)$$

Il carico critico comporta l'instabilità estesa a tutto lo sviluppo longitudinale della trave su fondazione elastica, con l'apparire, di numerose piegature in tutta la sua estensione.

Le due deformazioni assiale e circonferenziale del tubo sono definite come:

$$\begin{cases} \varepsilon_c = \frac{\sigma_c - \nu\sigma_a}{E} = 0 \\ \varepsilon_a = \frac{\sigma_a - \nu\sigma_c}{E} \end{cases} \Rightarrow \sigma_a = \frac{E}{1-\nu^2} \varepsilon_a = E' \varepsilon_a \quad (2.55)$$

$$P_0 = \sqrt{4 \left(2\pi \frac{ES}{R}\right) E' \left(\frac{2\pi R s^3}{12}\right)} \Rightarrow P_0 = \sqrt{(2\pi)^2 \frac{E^2}{3(1-\nu^2)} s^4} \quad (2.56)$$

Passando ora alla tensione critica assiale si ottiene:

$$\sigma_{cr} = \frac{P_0}{2\pi R s} = \frac{E}{\sqrt{3(1-\nu^2)}} \left(\frac{s}{R}\right) \quad (2.57)$$

valida purché la lunghezza assiale del tubo sia sufficientemente lunga per assicurare la formazione di piegature.

Si può infine calcolare, per un tubo in parete sottile, la lunghezza libera di inflessione che comporta il passaggio tra una instabilità locale elastica ed una globale elastica. Per fare ciò si eguaglia il valore di tensione critica di una trave a sezione rettangolare di lunghezza L con la tensione critica ricavata sopra per il tubo in parete sottile ovvero:

$$\sigma_{Cr,Trave} = \sigma_{Cr,Tubo} \Rightarrow \frac{\pi^2 EJ}{AL^2} = \frac{E}{\sqrt{3(1-\nu^2)}} \left(\frac{s}{R} \right) \quad (2.58)$$

che svolta per L^2 porge:

$$L^2 = \frac{\pi^2 \sqrt{3(1-\nu^2)} (R_e + R_i)(R_e^2 + R_i^2)}{8(R_e - R_i)} \quad (2.59)$$

con R_e e R_i li raggio esterno e interno del tubo.

Per un tubo in alluminio ($\nu = 0.33$), raggio esterno $R_e = 50 \text{ mm}$, $R_i = 48 \text{ mm}$, risulta $L = 689 \text{ mm}$, a cui corrisponde una tensione critica di $197,5 \text{ MPa}$..

3. L'instabilità in materiali compositi

In questo capitolo si tratterà brevemente dell'instabilità nei materiali compositi.

Rispetto a materiali isotropi, nei compositi risulta difficile ricavare teorie universalmente valide per spiegare e prevedere il fenomeno dell'instabilità.

In letteratura è possibile però ritrovare studi specifici e mirati a particolari casi di interesse di cui si riporterà qualche esempio.

3.1 Richiami sulla teoria del laminato

Si consideri la piastra in laminato di **Fig. 3.1**, essa è composta da più lamine che si assumano essere perfettamente legate tra di loro.

Come da figura il sistema di riferimento xyz ha origine nel piano medio della piastra. Gli spostamenti del punto lungo le direzioni x , y , z sono rispettivamente u, v, w .

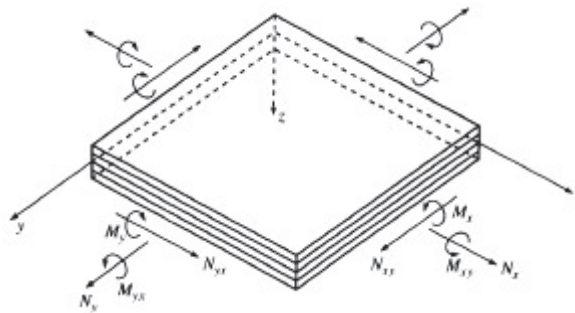


Fig. 3.1 Piastra rettangolare in materiale composito, con relativo sistema di riferimento [13]

Vengono fatte le seguenti assunzioni:

- Lo spessore t della piastra, è molto minore rispetto alle dimensioni dei due lati a, b , ed è costante
- Gli spostamenti u, v, w sono piccoli rispetto allo spessore della piastra.

- Le deformazioni nel piano $\varepsilon_x, \varepsilon_y$ e γ_{xy} sono piccole rispetto all'unità.
- Le deformazioni trasversali di taglio γ_{xz} e γ_{yz} sono trascurabili
- Gli spostamenti tangenziali u e v sono funzioni lineari della coordinata z .
- La deformazione normale ε_z è trascurabile.
- E' valida la legge do Hooke per le deformazioni.
- Le tensioni di taglio τ_{xz} e τ_{yz} svaniscono sulla superficie della piastra definita dalla coordinata $z = \pm t/2$.

Date le assunzioni sopra riportate, è come considerare uno stato di tensione piana su ogni lamina che compone la piastra, e definire l'ipotesi di Kirchhoff ovvero che le sezioni inizialmente normali al piano medio rimangono piane e ortogonali ad esso dopo la deflessione.

Gli spostamenti possono esprimersi come:

$$\begin{aligned} u &= u^0(x, y) + zF_1(x, y) \\ v &= v^0(x, y) + zF_2(x, y) \\ w &= w^0(x, y) = w(x, y) \end{aligned} \tag{3.1}$$

dove u^0 e v^0 sono rispettivamente gli spostamenti lungo x e y del piano.

Le deformazioni di taglio sono definite come:

$$\begin{aligned} \gamma_{xz} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = F_1(x, y) + \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \\ \gamma_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = F_2(x, y) + \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \end{aligned} \tag{3.2}$$

e quindi:

$$F_1(x, y) = -\frac{\partial w}{\partial x} \quad F_2(x, y) = -\frac{\partial w}{\partial y} \tag{3.3}$$

Sostituendo la nella relazione deformazione-spostamenti per tensioni piane si ottiene:

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} = \varepsilon_x^0 + z\kappa_x \\
 \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} = \varepsilon_y^0 + z\kappa_y \\
 \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \gamma_{xy}^0 + z\kappa_{xy}
 \end{aligned} \tag{3.4}$$

dove con ε^0 si indicano le deformazioni del piano medio:

$$\varepsilon_x^0 = \frac{\partial u^0}{\partial x} \quad \varepsilon_y^0 = \frac{\partial v^0}{\partial y} \quad \gamma_{xy}^0 = \frac{\partial u^0}{\partial y} + \frac{\partial v^0}{\partial x} \tag{3.5}$$

mentre con κ le curvature del piano medio:

$$\kappa_x = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad \kappa_y = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad \kappa_{xy} = -2\frac{\partial^2 w}{\partial xy} \tag{3.6}$$

con κ_x curvatura del piano medio nel piano xz e κ_y curvatura del piano medio nel piano yz . κ_{xy} è la curvatura torsionale fuori dal piano della superficie media del laminato.

L'equazione (3.) fornisce lo spostamento ad ogni distanza z dalla superficie media.

La tensione lungo un asse arbitrario xy nella lamina k -esima del laminato può essere trovata sostituendo l'equazione (3.5) nella relazione tensione-deformazione della lamina:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}_k = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}_k = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 + z\kappa_x \\ \varepsilon_y^0 + z\kappa_y \\ \gamma_{xy}^0 + z\kappa_{xy} \end{Bmatrix} \tag{3.7}$$

dove l'indice k è riferito alla lamina k -esima, e \bar{Q}_{ij} ($i, j = 1, 2, 6$) sono gli elementi della matrice di rigidità della lamina k -esima

Le forze per unità di lunghezza sono date da:

$$N_x = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_x dz = \sum_{k=1}^N \left\{ \int_{z_{k-1}}^{z_k} (\sigma_x)_k dz \right\} \quad (3.8)$$

con: $-t$ = spessore del laminato

$-(\sigma_x)_k$ = tensione nella lamina k-esima

$-z_k - 1$ = distanza dalla superficie media della superficie interna della lamina k-esima

$-z_k$ = distanza dalla superficie media della superficie esterna della lamina k-esima

Le espressioni per N_y ed N_{xy} sono le medesime sostituite le direzioni corrispondenti.

I momenti per unità di lunghezza sono definiti da:

$$M_x = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_x z dz = \sum_{k=1}^N \left\{ \int_{z_{k-1}}^{z_k} (\sigma_x)_k z dz \right\} \quad (3.9)$$

le espressioni per M_y ed M_{xy} sono le medesime sostituite le direzioni corrispondenti.

In **Fig. 3.2** è rappresentato il riferimento usato per le lamine.

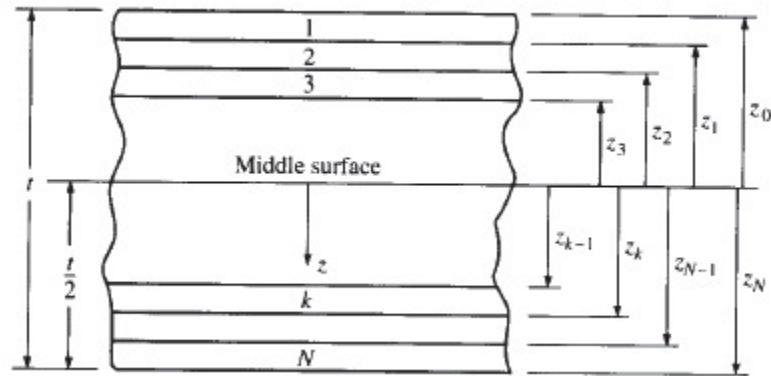


Fig. 3.2 Rappresentazione del sistema di riferimento per le N lamine del laminato [13]

Sostituendo la relazione tensione-deformazione (3.7) nelle due equazioni (3.8) (3.9) e riscrivendo in forma matriciale, i carichi e i momenti si esprimono (esempio solo nella direzione x):

$$N_x = A_{11}\varepsilon_x^0 + A_{12}\varepsilon_y^0 + A_{16}\gamma_{xy}^0 + B_{11}\kappa_x + B_{12}\kappa_y + B_{16}\kappa_{xy} \quad (3.11)$$

$$M_x = B_{11}\varepsilon_x^0 + B_{12}\varepsilon_y^0 + B_{16}\gamma_{xy}^0 + D_{11}\kappa_x + D_{12}\kappa_y + D_{16}\kappa_{xy} \quad (3.12)$$

dove si indica con $[A]$ la matrice di rigidità estensionale del laminato con componenti:

$$A_{ij} = \int_{-t/2}^{t/2} (\bar{Q}_{ij})_k dz = \sum_{k=1}^N (\bar{Q}_{ij})_k (z_k - z_{k-1}) \quad (3.13)$$

con $[B]$ la matrice di accoppiamento del laminato con elementi:

$$B_{ij} = \int_{-t/2}^{t/2} (\bar{Q}_{ij})_k z dz = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N (\bar{Q}_{ij})_k (z_k^2 - z_{k-1}^2) \quad (3.14)$$

e con $[D]$ la matrice di rigidità flessionale del laminato con termini:

$$D_{ij} = \int_{-t/2}^{t/2} (\bar{Q}_{ij})_k z^2 dz = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^N (\bar{Q}_{ij})_k (z_k^3 - z_{k-1}^3) \quad (3.15)$$

con gli indici $i, j = 1, 2, 6$.

Gli altri carichi risultanti possono scriversi in maniera analoga, e la relazione tra carichi e deformazioni del laminato si può scrivere in forma matriciale come

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} \\ C_{11} & C_{12} & C_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ C_{12} & C_{22} & C_{26} & D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ C_{16} & C_{26} & C_{66} & D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix} \quad (3.16)$$

3.2 Equazione di equilibrio per la piastra in laminato

Si prende in considerazione un elemento infinitesimo di una piastra in laminato come in **Fig. 3.3**.

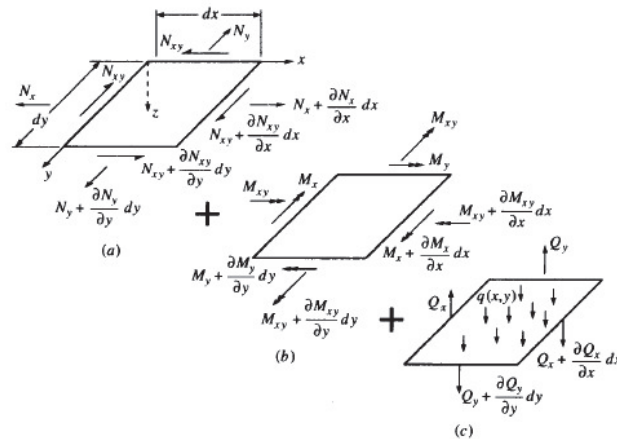


Fig.3.3 Elemento infinitesimo di piastra in laminato con le possibili sollecitazioni [13]

In **Fig. 3.3(a)** sono raffigurati le risultanti dei carichi nel piano, in **Fig. 3.3(b)** sono rappresentati i momenti risultanti agenti sull'elemento infinitesimo e in **Fig. 3.3(c)** le risultanti dei carichi trasversali di taglio.

In questa trattazione si assume l'ipotesi di piccola deflessione per la piastra, per cui le componenti fuori dal piano dei carichi risultanti nel piano N_x , N_y e N_{xy} sono trascurabili.

Tuttavia, queste componenti fuori dal piano verranno considerate nella prossima sezione per l'analisi dell'instabilità.

Le risultanti dei carichi trasversali di taglio Q_x e Q_y sono definiti come:

$$Q_x = \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{xz} dz \quad (3.16)$$

$$Q_y = \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{yz} dz \quad (3.17)$$

Con $q(x, y)$ si indica il carico distribuito trasversale.

Per l'equilibrio statico, la somma delle forze lungo la direzione x è:

$$N_x dy + \frac{\partial N_x}{\partial x} dx dy + N_{xy} dx + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} dx dy - N_x dy - N_{xy} dx = 0 \quad (3.18)$$

L'equazione (318) può essere semplificata come:

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = 0 \quad (3.19)$$

Analogamente la somma delle forze lungo y porge:

$$\frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} = 0 \quad (3.20)$$

Mentre lungo la direzione z :

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + q(x, y) = 0 \quad (3.21)$$

La somma dei momenti attorno all'asse x e y , trascurando i prodotti differenziali, è rispettivamente:

$$\frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} = Q_y \quad \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} = Q_x \quad (3.22)$$

Sostituendo le equazioni (3.22) nella (3.21) si ottiene:

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_x}{\partial y^2} + q(x, y) = 0 \quad (3.23)$$

Le equazioni (3.19), (3.20) e (3.23) sono le tre equazioni differenziali di equilibrio per la piastra in termini di tensioni e momenti risultanti. La corrispondente equazione di equilibrio in termine di spostamenti può essere

derivata sostituendo la relazioni deformazione-forza. (), tensione-deformazione () e curvatura-spostamenti () nelle tre equazioni sopra. L'equazione risultante sarà:

$$\begin{aligned}
 & A_{11} \frac{\partial^2 u^0}{\partial x^2} + 2A_{16} \frac{\partial^2 u^0}{\partial x \partial y} + A_{66} \frac{\partial^2 u^0}{\partial y^2} + A_{16} \frac{\partial^2 v^0}{\partial x^2} + (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 v^0}{\partial x \partial y} \\
 & \quad + A_{26} \frac{\partial^2 v^0}{\partial y^2} - B_{11} \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - 3B_{16} \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \\
 & \quad - (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} - B_{26} \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} = 0 \\
 & A_{16} \frac{\partial^2 u^0}{\partial x^2} + (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 u^0}{\partial x \partial y} + A_{26} \frac{\partial^2 u^0}{\partial y^2} + A_{66} \frac{\partial^2 v^0}{\partial x^2} \\
 & \quad + 2A_{26} \frac{\partial^2 v^0}{\partial x \partial y} + A_{22} \frac{\partial^2 v^0}{\partial y^2} - B_{16} \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \\
 & \quad - 3B_{26} \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} - B_{22} \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} = 0 \\
 & D_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 4D_{16} \frac{\partial^4 w}{\partial x^3 \partial y} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + 4D_{26} \frac{\partial^4 w}{\partial x \partial y^3} \\
 & \quad + D_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} - B_{11} \frac{\partial^3 u^0}{\partial x^3} - 3B_{16} \frac{\partial^3 u^0}{\partial x^2 \partial y} - (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 u^0}{\partial x \partial y^2} \\
 & \quad - B_{26} \frac{\partial^3 u^0}{\partial y^3} - B_{16} \frac{\partial^3 v^0}{\partial x^3} - (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 v^0}{\partial x^2 \partial y} - 3B_{26} \frac{\partial^3 v^0}{\partial x \partial y^2} \\
 & \quad - B_{22} \frac{\partial^3 v^0}{\partial y^3} = q(x, y)
 \end{aligned} \tag{3.24}$$

Si noti che gli spostamenti nel piano u^0 e v^0 sono accoppiati con gli spostamenti trasversali w , quando la matrice di accoppiamento $[B]$ è diversa da zero.

3.3 Instabilità del laminato

Nella trattazione precedente l'accoppiamento tra le forze nel piano N_x, N_y e N_{xy} e la deflessione fuori dal piano, w , è stata ignorata per l'assunzione di piccoli spostamenti.

Per sviluppare le equazioni di instabilità per carichi nel piano, tuttavia, questo accoppiamento deve essere considerato.

Si consideri l'elemento infinitesimo di **Fig. 3.3(a)** orientato in una arbitraria posizione fuori dal piano come in **Fig. 3.4**.

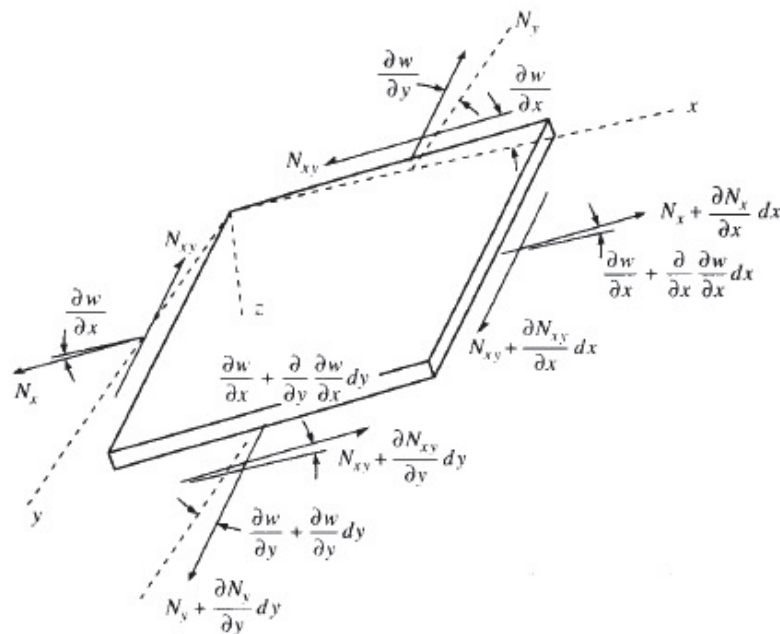


Fig. 3.4 Elemento infinitesimo di lamina

L'equilibrio delle forze in direzione z in questa nuova configurazione è:

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + q(x, y) + N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \quad (3.25)$$

Sostituendo le equazioni di equilibrio per i momenti (3.22) ricavate precedentemente si ottiene:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_x}{\partial y^2} + N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + q(x, y) \\ = 0 \end{aligned} \quad (3.23)$$

Si sostituiscono poi le equazioni (7.141), (7.29) e (7.30) nella (3.23) ottenendo:

$$\begin{aligned} D_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 4D_{16} \frac{\partial^4 w}{\partial x^3 \partial y} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + 4D_{16} \frac{\partial^4 w}{\partial x \partial y^3} + D_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \\ - B_{11} \frac{\partial^3 u^0}{\partial x^3} - B_{16} \frac{\partial^3 u^0}{\partial x^2 \partial y} - (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 u^0}{\partial x \partial y^2} - B_{26} \frac{\partial^3 u^0}{\partial y^3} \\ - B_{16} \frac{\partial^3 v^0}{\partial x^3} - (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 v^0}{\partial x^2 \partial y} - 3B_{26} \frac{\partial^3 v^0}{\partial x \partial y^2} - B_{22} \frac{\partial^3 v^0}{\partial y^3} \\ = q(x, y) + N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \end{aligned} \quad (3.24)$$

Si considera ora il problema dell'instabilità per una piastra rettangolare ortotropa semplicemente appoggiata, sottoposta ad un carico assiale di compressione, $N_x = -N$, come mostrato in **Fig.3.5**.

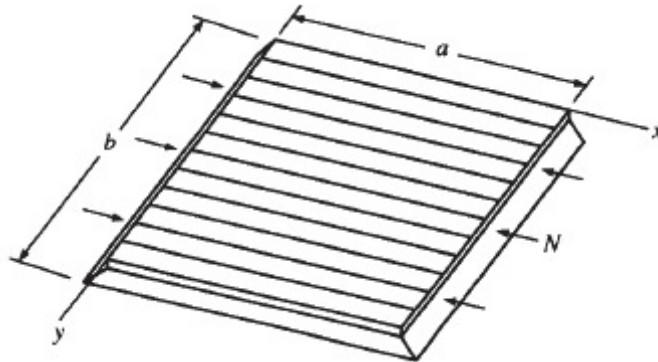


Fig. 3.5 Piastra rettangolare ortotropa semplicemente appoggiata in compressione [13]

In questa configurazione i carichi $N_y, N_{xy}, q(x, y)$ saranno nulli e la matrice di rigidezza che esprime il legame tra tensione e deformazione della piastra ortotropa avrà i termini $B_{i,j}, A_{16}, A_{26}, D_{16}, D_{26}$ uguali a zero.

L'equazione differenziale caratteristica della piastra deformata data dalla (7.143) diventerà:

$$D_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = -N \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (3.25)$$

Per le condizioni vincolari di semplice appoggio, si assume che la soluzione sia data dalla serie trigonometrica:

$$w(x, y) = W_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (3.26)$$

che descrive la deformata della piastra, dove m ed n indicano rispettivamente i numeri di semionde in direzione x e y .

Sostituendo l'equazione (3.26) nella (3.25) si ottiene l'espressione:

$$W_{mn} \pi^2 [(D_{11} m^4 + 2(D_{12} + 2D_{66})(mnR)^2 + D_{22}(bR)^4)] = W_{mn} N a^2 b^2 \quad (3.27)$$

con $R = a/b$.

Questa equazione ha una soluzione banale per $W_{mn} = 0$ che non è di interesse pratico, per ottenere una soluzione non banale il carico critico deve essere:

$$N_{cr} = \frac{\pi^2}{a^2 m^2} [(D_{11} m^4 + 2(D_{12} + 2D_{66})(mnR)^2 + D_{22}(bR)^4)] \quad (3.28)$$

come per il caso della piastra isotropa, il carico critico sarà dato dal minimo valore ottenuto da questa relazione.

Il più piccolo carico di instabilità si verifica per $n = 1$, è necessario però ricavare il valore minimo di m .

Dati i parametri geometrici a, b della piastra e la configurazione del laminato (D_{ij}) si procede come nel caso della piastra isotropa analizzando il grafico in

Fig. 3.6 dove è rappresentato l'andamento del carico critico in funzione di a/b . Sono valide le stesse considerazioni fatte per il caso isotropo.

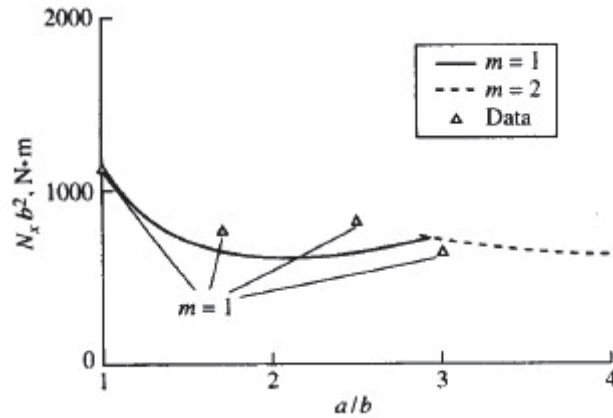


Fig. 3.6 Grafico dell'andamento del carico critico in funzione del rapporto geometrico a/b [13]

Nel grafico di **Fig. 3.6** sono mostrati, con punti triangolari, i valori sperimentali ottenuti da Hatcher and Tuttle per la medesima configurazione di vincolo e carico per una piastra a fibre di carbonio in ,matrice epossidica.

Si osserva come nel caso studiato ci sia una buona corrispondenza tra i dati sperimentali e quelli teorici ma, prove sperimentali su ulteriori laminati con differenti configurazioni, non sono state altrettanto congrue con la teoria.

Tale difficoltà di corrispondenza è da attribuirsi alle inevitabili imperfezioni delle piastre ortotrope dovute alla difficoltà e alla tecnologia di fabbricazione. Inoltre si è studiato un caso di carico e vincolo molto semplice, variando queste condizioni è difficile ottenere una teoria generale che possa prevedere il fenomeno dell'instabilità.

Lo studio dell'instabilità dei materiali compositi è quindi circoscritto a casi mirati e specifici adottando prove sperimentali ad Hoc o utilizzando simulazioni ad elementi finiti.

Di seguito si riporterà brevemente in maniera qualitativa i risultati ottenuti da studi e ricerche disponibili in letteratura.

3.4 Prove sperimentali di un cilindro in materiale composito sottoposto a compressione assiale ^[51]

Il cilindro compresso assialmente è uno dei problemi ricorrenti nella meccanica strutturale ed è difficile ottenere risultati compatibili tra le prove sperimentali e le previsioni ottenute con analisi numeriche e teorie analitiche. Per un cilindro isotropo in parete sottile posto a compressione assiale, la tensione critica per la quale si ottiene instabilità per la teoria classica lineare è data dalla relazione:

$$\sigma_{Cr} = \frac{E}{\sqrt{3(1-\nu^2)}} \frac{t}{r} \quad (3.29)$$

con E , ν rispettivamente modulo di Young e di Poissons del materiale, t spessore e r raggio medio del cilindro.

L'equazione (3.29) è stata ottenuta indipendentemente da Lorenz, Timoshenko e Southwell ed è conosciuta come tensione elastica di instabilità.

In accordo con la teoria lineare, la tensione critica per un cilindro perfetto anisotropo in parete sottile è:

$$\sigma_{Cr} = \frac{E_1}{\sqrt{3(1-\nu_1\nu_2)}} \sqrt{\frac{E_2}{E_1}} \frac{t}{r} \quad (3.29)$$

dove con E_1 ed E_2 si indicano i moduli elastici del materiale lungo la direzione parallela e perpendicolare al carico e, ν_1 e ν_2 i rispettivi moduli di Poissons.

Il carico critico per un cilindro perfetto isotropo caricato assialmente a compressione è invece:

$$P_{Cr} = 2\pi r t \sigma_{Cr} = 2\pi t^2 \frac{E}{\sqrt{3(1-\nu^2)}} \quad (3.30)$$

si osserva come non dipenda né dalla lunghezza del cilindro né dal raggio. Queste relazioni forniscono previsioni spesso non compatibili con i dati sperimentali.

E' stato ampiamente accettato, a seguito di differenti studi, che tale discrepanza tra risultati teorici e sperimentali è fortemente legata alla presenza di difetti.

Le imperfezioni sono dipendenti dal processo di produzione ed è pertanto impossibile ottenere un cilindro che ne sia privo.

Rispetto al cilindro ideale, quello reale presenta infatti difetti geometrici, tensioni residue interne e le applicazioni prevedono eccentricità dei carichi e condizioni vincolari non ideali.

Sono stati effettuati molti studi per valutare la sensibilità dell'instabilità rispetto ai difetti ed imperfezioni.

Negli anni settanta ed ottanta, l'Istituto per gli Studi Aerospaziali (*Institute for Aerospace Studies*) dell'università di Toronto ha condotto degli studi sperimentali ed analitici su cilindri compositi in fibra di carbonio. Particolare attenzione è stata rivolta agli effetti dovuti alle imperfezioni geometriche iniziali sul cilindro, determinate tramite uno speciale strumento dotato di trasduttori sensibili alle deformazioni sul cilindro.

Le imperfezioni rilevate sono state analizzate statisticamente in modo da poter creare un modello per poterle rappresentare.

Le imperfezioni geometriche rilevate erano dell'ordine dello spessore del cilindro e, eseguendo prove a compressione si è evidenziato un calo drastico del valore del carico critico con il loro aumento.

Un ulteriore studio su un cilindro composito sottoposto a compressione si è svolto più recentemente presso il Dipartimento di Ingegneria Aerospaziale del politecnico di Milano.

Sono stati analizzati cilindri di lunghezza pari a 700 [mm] in materiale composito con differenti layup: Cross-ply $(0/90)_s$, angle-ply $(\pm 45)_s$ ed eight-ply ovvero un layup quasi isotropo.

La prova sperimentale prevedeva la compressione dei provini tramite un macchinario che applicava il carico a spostamento controllato con un'ottima accuratezza.

Le superfici del cilindro venivano analizzate tramite trasduttori ottici che registravano le imperfezioni dei provini e il loro sviluppo durante il corso del test.

I risultati ottenuti, hanno evidenziato una sovrastima dei valori di carico critico dati dalla formula lineare dell' 86% per i cilindri angle-ply e dell'88% per cilindri cross-ply.

Di seguito verrà descritto un ulteriore studio svolto da E. Eglitis, Kalnins, Ozolins che tratta l'analisi numerica e sperimentale di un cilindro in parete sottile in compressione assiale.

Per lo studio, sono stati fabbricati differenti tubi con spessore di 1.1 mm in materiale composito con fibre di vetro E e resina in Poliestere con densità pari a $290 \frac{g}{m^2}$.

Ogni cilindro è stato realizzato avvolgendo 4 layers di laminato fino al raggiungimento dello spessore.

I provini sono stati suddivisi per diametro (D): 300 mm e 500 mm e per lunghezza (L): 400 mm, 560 mm, 660mm come mostrato in **tab. 3.1**.

LUNGHEZZA	DIAMETRO	
	300 mm	500 mm
400 mm	#6 #12 #13 #16	-
560 mm	#3 #4 #5 #7	-
660 mm	#9 # 10 #11	#1.1 #1.2 #1.3 #1.4 #1.5 #1.6 #1.7

Tab 3.1 Configurazione geometrica e nomenclatura dei provini

Sono state determinate le proprietà del materiale usato tramite prove a trazione che hanno fornito valori di:

$$E^0 = 18.28 \text{ GPa}$$

$$E^{90} = 18.66 \text{ GPa}$$

$$\sigma_{max}^0 = 219 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{max}^{90} = 296 \text{ MPa}$$

Per le prove a compressione è stata utilizzata una particolare macchina rappresentata in **Fig. 3.7** con le sue componenti principali. Il carico viene trasmesso tramite due piastre: quella superiore fissata all'attuatore idraulico, e quella inferiore fissata ad un supporto sferico per permettere la distribuzione del carico nel caso in cui il provino da testare e le piastre non fossero state strettamente parallele.

Per misurare il carico la macchina era dotata di una cella di carico sotto il supporto sferico.

Per poter verificare la deformazione all'instabilità ogni provino è stato verniciato con uno spray acrilico bianco ed è stato creato un setup interferometrico applicando in fronte al provino una "pellicola" con linee rettilinee di spessore 1 mm e distanziate tra loro di 1mm per sfruttare l'effetto *Moiré*.

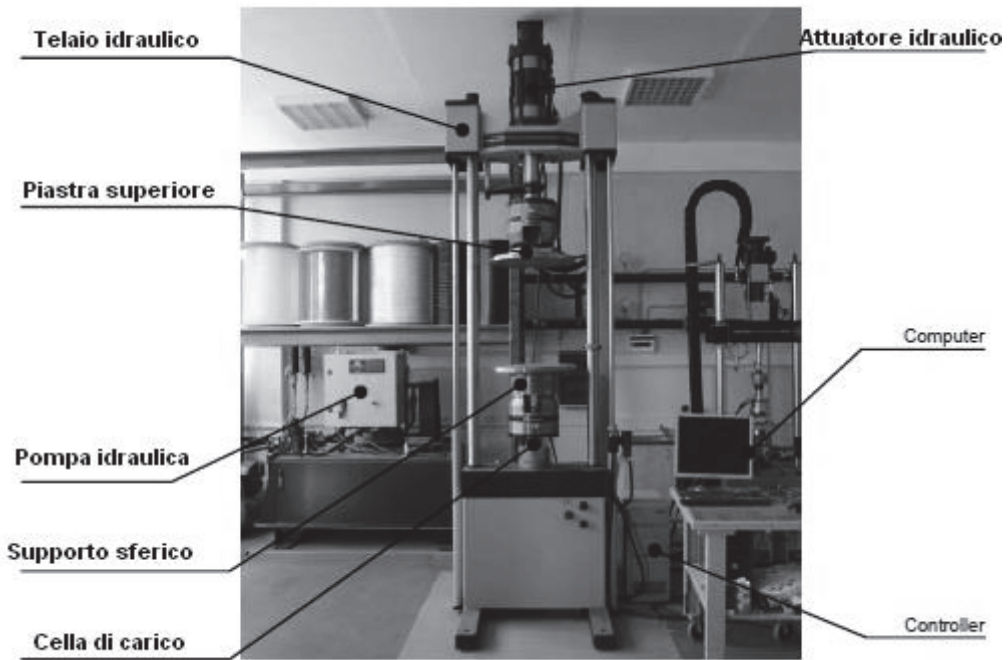


Fig. 3.7 Dispositivo per le prove sperimentali a compressione assiale [51]

Tutti i provini sono stati ripetutamente caricati fino al raggiungimento dell'instabilità in modo da verificare il valore del carico critico e le corrispondenti deformazioni.

In Fig.3.8 e Fig, 3.9 sono rappresentati i valori dei carichi critici ottenuti rispettivamente per i provini con diametro di 300 e 500 mm.

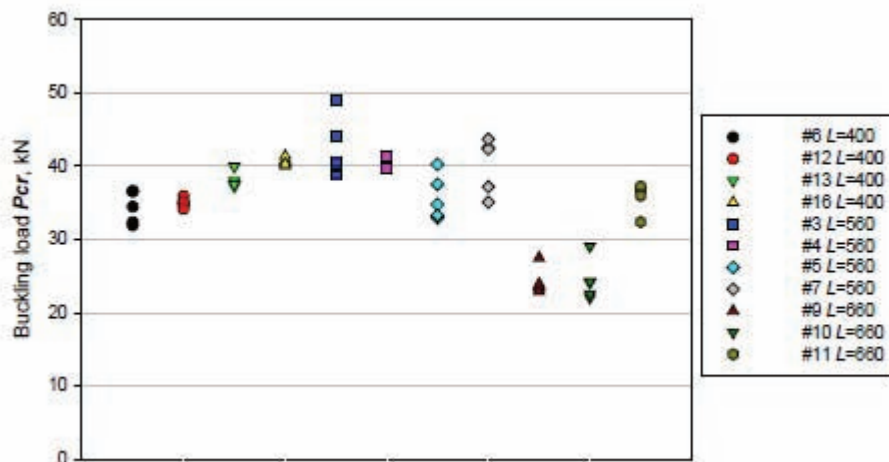


Fig. 3.8 Valore dei carichi critici ottenuti per prove ripetute sui cilindri test con diametro D=300mm [51]

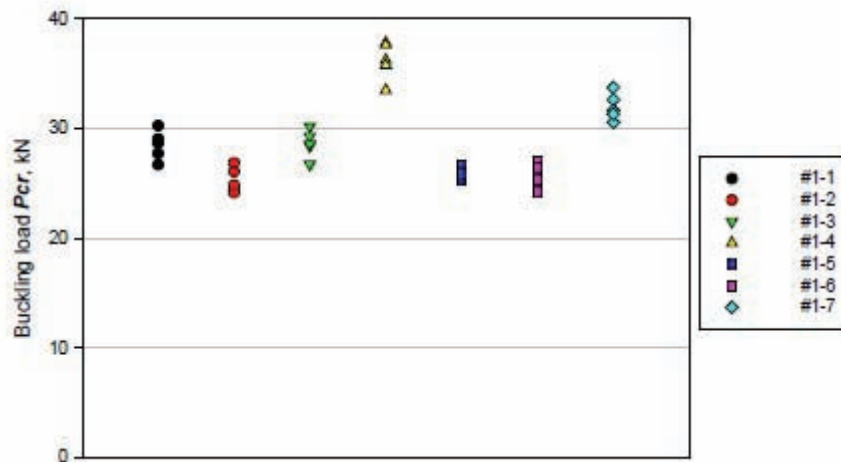


Fig. 3.9 Valore dei carichi critici ottenuti per prove ripetute sui cilindri test con diametro D=300mm [51]

Si può notare, in accordo alle teoria lineare elastica, che il carico critico per un cilindro assile non dipenda in maniera significativa dalla sua lunghezza.

Confrontando i risultati per cilindri aventi lo stesso diametro, si verifica uno scarto massimo del valore del carico critico del 60% per provini con diametro di 300 mm mentre del 40% per i provini con diametro di 500 mm.

Analizzando invece i risultati ottenuti per ogni singolo provino con successive misurazioni lo scarto tende a essere minore. In particolare ciò si verifica per i cilindri #1.5, #7, #12, #13, #16 mentre per i cilindri #3, #5 e #7 il carico critico varia significativamente anche se non sono stati osservati danneggiamenti nel materiale.

Non solo il carico critico varia a parità di configurazione e geometria, ma anche la deformazione dovuta all'instabilità. In **Fig.3.10** e in **Fig. 3.11** sono rappresentate rispettivamente le deformazioni ottenute per i provini di diametro di 300 mm e 500 mm. Risulta evidente che le deformazioni sono differenti tra i vari provini anche se idealmente sono geometricamente uguali.

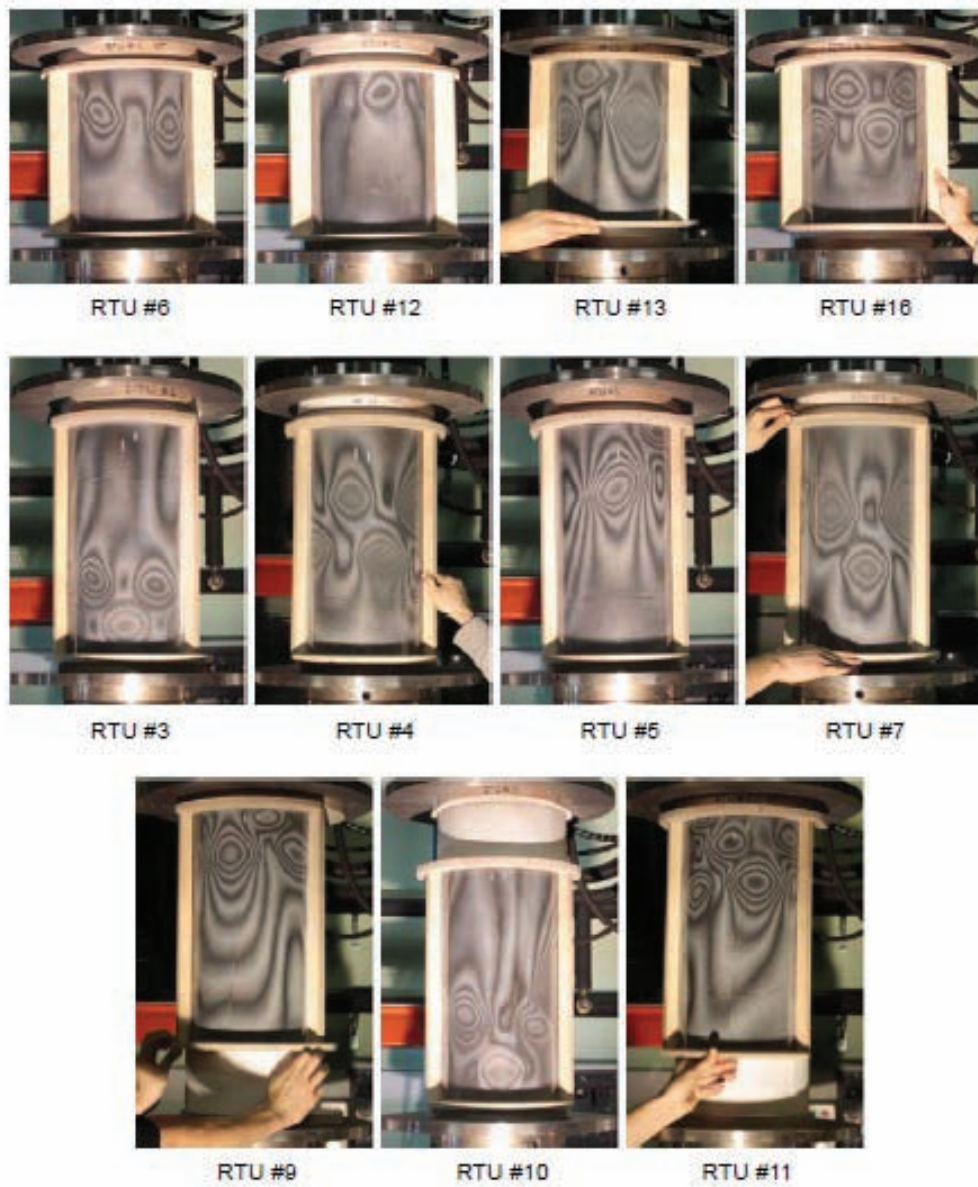


Fig. 3.10 Deformazioni ottenute sui provini con diametro $D=300$ mm durante le prove sperimentali [51]

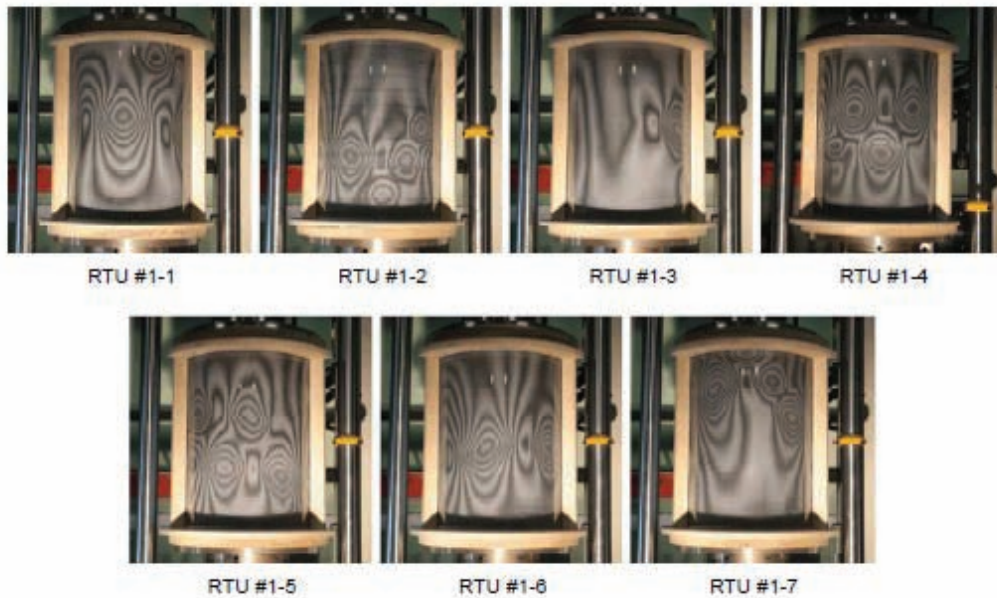


Fig. 3.11 Deformazioni ottenute sui provini con diametro $D=500$ mm durante le prove sperimentali [51]

Oltre all'analisi sperimentale, lo studio prevedeva la creazione di un modello ad elementi finiti (FEM) in modo da poter confrontare i dati sperimentali con quelli ottenuti tramite simulazione numerica.

I modelli per l'analisi FEM sono stati realizzati tramite due software ANSYS e ABAQUS., con l'utilizzo di elementi piastra a 4 nodi (S4R) con un rapporto tra la dimensione dell'elemento e il raggio di elemento pari a $1/20$.

Il modello è stato vincolato tramite una configurazione creata ad hoc per rappresentare più realisticamente la prova sperimentale. Il bordo inferiore del cilindro è stato collegato rigidamente con un punto di riferimento posizionato al centro del supporto sferico mentre, il bordo superiore è stato vincolato con un semplice appoggio. E' stata inoltre inserita un'eccentricità sul punto di riferimento pari a 10 mm per modellizzare l'eccentricità random presente nel test sperimentale. La condizione di vincolo utilizzata è rappresentata **Fig.3.12.**

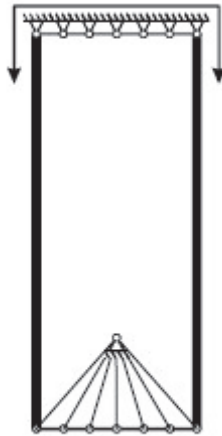


Fig. 3.12 Rappresentazione delle condizioni di vincolo utilizzate nel modello FEM [51]

Inizialmente è stata svolta un'analisi lineare (senza considerare l'eccentricità) su tutte le forme dei provini ottenendo i relativi modi di vibrare (qualche esempio in **Fig.3.13**) che, sono risultati molto differenti rispetto alle deformazioni ottenute nel test sperimentale. Questo a dimostrazione che un'analisi lineare agli autovalori e ai modi di vibrare della struttura non è comparabile con i test. Tuttavia l'analisi lineare è stata utilizzata poi per modellizzare le imperfezioni sul cilindro.

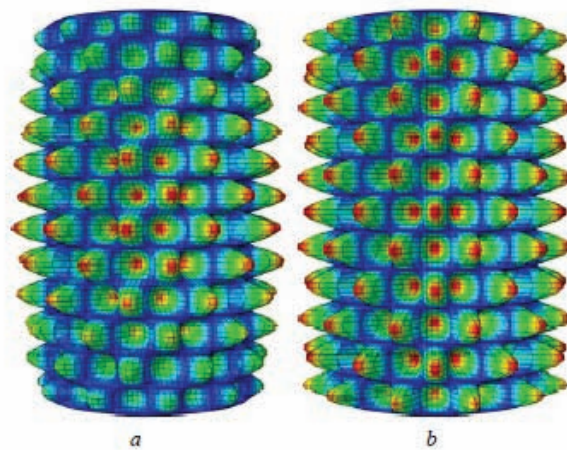


Fig.3.13 Modi di vibrare e deformate di instabilità per cilindri con diametro $D=300\text{mm}$: a) Primo modo di vibrare ($P_{Cr} = 69.9 \text{ kN}$); b) 50^{th} modo di vibrare $P_{Cr} = 72.5 \text{ kN}$ [51]

Per ogni forma dei provini, è stato considerato uno tra i primi dieci modi di vibrare ottenuti dall'analisi lineare e, la deformata corrispondente è stata usata come modellizzazione delle imperfezioni iniziali considerando delle

ampiezze di deformata massima differenti rapportate allo spessore del cilindro per cui: $t/8, t/4, \dots, t$.

Successivamente è stata svolta un'analisi non lineare dei modi di vibrare sui modelli vincolati e realizzati come sopra descritto.

In **Fig.3.14** sono presentate le deformazioni ottenute tramite l'analisi non lineare al variare dell'ampiezza delle imperfezioni per il provino di diametro 300 mm e lunghezza di 560 mm.

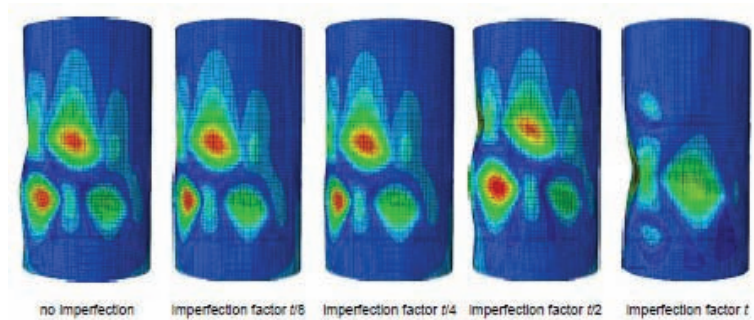


Fig. 3.14 Deformazioni ottenute con analisi numerica non lineare, per diversi gradi di imperfezione, sul cilindro con diametro $D=300\text{mm}$ e lunghezza $L=560\text{mm}$ [51]

Lo spessore di tutti i provini analizzati è costante, la formulazione lineare elastica data dall'equazione (3.29) fornisce dunque il medesimo valore di carico critico per tutti i provini ovvero: 84.09 kN .

In **Tab. 3.2** sono riportati i carichi critici ottenuti dall'analisi non lineare per differenti valori di imperfezioni su alcuni dei provini.

	D=300mm L=400mm	D=300mm L=600mm	D=300mm L=660mm	D=500mm L=660mm
Formula analitica	84.09 kN	84.09 kN	84.09 kN	84.09 kN
No imperfezioni	63.14 kN	64.36 kN	64.52 kN	66.94 kN
Fattore di imperfezione $t/8$	44.39 kN	44.99 kN	45.27 kN	48.46 kN
Fattore di imperfezione $t/4$	37.09 kN	37.15 kN	36.90 kN	39.54 kN
Fattore di imperfezione $t/2$	34.12 kN	31.82 kN	32.47 kN	34.80 kN
Fattore di imperfezione t	33.31 kN	28.59 kN	28.18 kN	31.97 kN

Tab. 3.2 Carichi critici ottenuti tramite analisi numerica non lineare per diversi gradi di imperfezioni

Analizzando i risultati si è osservato come il raggio del cilindro e la sua lunghezza influenzino in maniera modesta il valore del carico critico, variandolo al massimo del 5%.

Inoltre è evidente la differenza del valore calcolato con analisi numerica non lineare che, fornisce valori più bassi del 18% rispetto alla teoria analitica lineare.

Le deformate e i differenti modi di instabilità, ottenuti dall'analisi non lineare, sono comparabili con quelli ottenuti nel test sperimentale anche se non le medesime poichè nel modello numerico sono state modellizzate delle imperfezioni random e non quelle reali presenti sui provini (**Fig. 3.13**).

Per quanto riguarda il valore del carico critico, nell'analisi non lineare, se non si considerano le imperfezioni, si ottengono delle sovrastime. Inserendo invece le imperfezioni il valore del carico critico decade avvicinandosi a quello ottenuto sperimentalmente.

In **Tab. 3.3** sono riportati i valori del carico critico medio ottenuto nei test sperimentali, confrontati con i valori più congruenti ottenuti dall'analisi numerica con il relativo fattore di imperfezione.

CONFIGURAZIONI PROVINO	RISULTATI SPERIMENTALI P_{cr} [kN]	DEVIAZIONE STANDARD [kN]	RISULTATI NUMERICI P_{cr} [kN]	FATTORE DI IMPERFEZIONE
D=300mm L=400mm	36.99	2.84	37.09	t/4
D=300mm L=560mm	39.73	3.90	37.15	t/4
D=300mm L=660mm	28.15	6.00	28.18	t
D=500mm L=660mm	28.87	3.93	31.97	t

Tab. 3.3 Valori del carico critico ottenuti sperimentalmente e con analisi numerica

In questo studio sono stati sottoposti a prove sperimentali 18 provini con diametri di 300 e 500 mm e lunghezze di 400, 660 mm.

Ognuno di essi è stato ripetutamente a compresso fino al raggiungimento dell'instabilità.

E' stato inoltre realizzato un modello ad elementi finiti che potesse simulare la prova sperimentale tenendo conto delle imperfezioni intrinseche presenti sui provino.

Dall'analisi dei dati si evidenzia come la teoria lineare sovrastimi eccessivamente il valore del carico critico, si va infatti da una sovrastima del 25% del provino #10 fino ad una del 58% per il provino #3.

Con un analisi lineare del modello ad elementi finiti, i valori di carico critico sono ridotti rispetto a quelli forniti dalla teorica lineare ma in ogni caso si sovrastimano i dati sperimentali ed inoltre la deformazione risultante non è comparabile con quella rilevata sperimentalmente.

L'analisi numerica non lineare del modello FEM presenta valori e forme di deformazioni simili a quelle visibili nelle prove sperimentali ma, il valore del carico critico è sovrastimato. Infine applicando al modello delle imperfezioni iniziali di differente entità, si ottengono valori di carico critico compatibili con quelli sperimentali. Le deformazioni ottenute in quest'ultimo caso sono comparabili con quelle reali a livello di modulo ma non sono le stesse ottenute sperimentalmente in quanto la modellizzazione delle imperfezioni non è stata basata sui provini reali ma si è considerata come random.

4. Setup sperimentale per test a compressione su provini in parete sottile

In questa sezione verrà descritta l'attività di progettazione utile a realizzare una prova sperimentale di instabilità locale su provini in parete sottile con differenti geometrie e composizione.

Lo strumento principale per la realizzazione dei test è la macchina a compressione in **Fig. 4.1** che permette grazie ad un attuatore di comprimere tra due piastre rigide un provino.

Inizialmente l'attività di progettazione ha riguardato uno studio preliminare per la scelta della geometria e composizione dei provini da realizzare, in modo da poter osservare il fenomeno dell'instabilità con carichi compatibili con la portata della macchina.

Successivamente, sono stati ricercati e definiti gli strumenti di misura necessari per la raccolta dati durante il test e, sono stati progettati i relativi supporti cercando di soddisfare i requisiti di precisione e ripetibilità della misura.

Infine, scelte le varie tipologie di provino, si sono progettati dei vincoli da apporre sulle piastre originali della macchina a compressione per garantire la stabilità durante la prova dei provini da testare

4.1 Descrizione della macchina per il test di compressione

In **Fig. 4.1** è presentata la macchina Dyno a compressione prodotta dalla Easydur®.

La macchina nasce per applicazioni industriali per il test di molle per ammortizzatori. E' in grado di condurre sia a prove a trazione che a compressione con una portata massima del carico di $10[kN]$ con un'incertezza di misura dello 0.5% sulla portata massima ($\pm 5N$).

Principalmente è composta da una piastra fissa inferiore, una piastra mobile superiore inserite all'interno di un box protettivo, una struttura metallica che sostiene il corpo centrale e da un Pc che funge da controllore tramite un software proprietario.

La macchina è inoltre provvista di tasti fisici di arresto ed emergenza in modo da soddisfare gli adeguati requisiti di sicurezza.

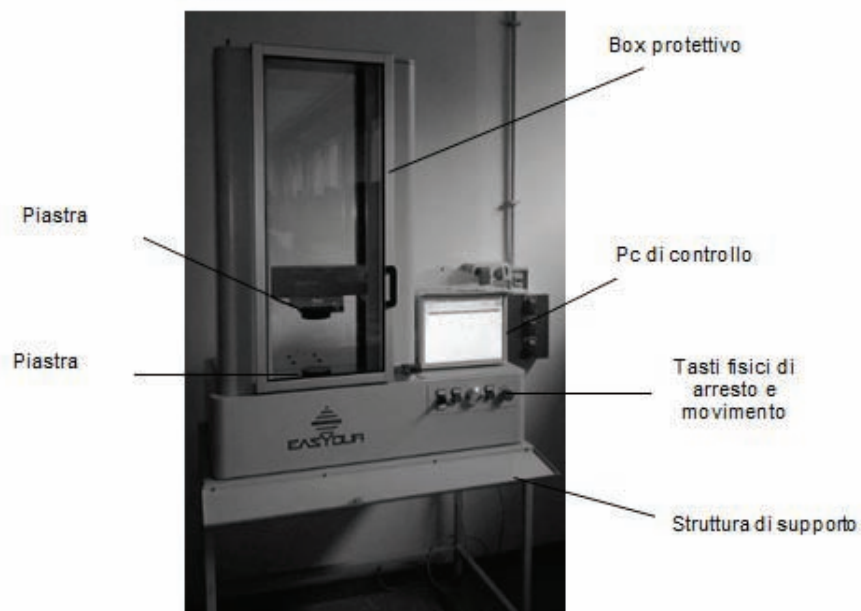


Fig. 4.1 Macchina Dyno a compressione della Easydur

Capitolo 4: Setup sperimentala per test a compressione su provini in parete sottile

La piastra superiore è vincolata ad una trave mobile collegata ad un attuatore che ne premette il movimento in direzione verticale (**Fig. 4.2**), a seconda del verso del movimento si possono realizzare quindi prove a trazione o a compressione.



Fig. 4.2 Particolare delle due piastre della macchina a compressione

Il macchinario è dotato di una cella di carico posta sulla piastra superiore e di sensori di posizione in modo da rilevare la forza applicata e lo spostamento relativo tra le due piastre durante i test, si può quindi controllare sia in forza che in spostamento.

Gli input e gli output della macchina sono controllati dal Pc tramite un software che permette una facile programmazione a step delle funzioni da svolgere tramite comandi prestabiliti (esempio **Fig. 4.3**).

	Cmd	Description	Condition		Result	Tolerances
R00	F0	Zero Force				METTERE A ZERO LA FORZA
R01	Inp	Insert L1			40	INSERIRE MANUALMENTE LA POSIZIONE PER L1
R02	Inp	Insert L2			30	INSERIRE MANUALMENTE LA POSIZIONE PER L2
R03	L0	Spring Length	0.1 Kg		45.120 mm	VAI A CONTATTO L0
R04	F(P)	Force at Position	=R1 mm		0.713 Kg	FORZA AD UNA POSIZIONE NOTA, USANDO R1 COME POSIZIONE
R05	F(P)	Force at Position	=R2 mm		1.964 Kg	FORZA AD UNA POSIZIONE NOTA, USANDO R2 COME POSIZIONE
R06	Sin	Stress Cycles	5 mm			ESEGUI 5 CICLI DI STRESS RELATIVI AL PASSO PRECEDENTE
R07	Calc	SpringRate = $(R5-R4)/(R1-R2)$			0.125	CALCOLA LA RIGIDITA' USANDO IL DELTA FORZA E DELTA POSIZIONE
R08	M(P)	Move to Position	=R3+5 mm			VAI ALLA POSIZIONE R3+5MM (SENZA OTTENERE LA FORZA)
R09	L0	Spring Length	0.1 Kg		45.130 mm	VAI A CONTATTO DI NUOVO L0
R10	Calc	Spring Yielding	=R3-R9		-0.01	CALCOLA IL CEDIMENTO DELLA MOLLA FRA I DUE L0
R11	M(P)	Move to Position	=R2 mm			VAI ALLA POSIZIONE R2 (SENZA OTTENERE LA FORZA)
R12	Pc	Position at Block			14.295 mm	ESEGUI POSIZIONE A BLOCCO

Fig. 4.3 Esempio di un programma per la macchina a compressione

4.2 Scelta dei sensori e configurazione della catena di misura

Per una maggiore accuratezza dei test e per misurare le variabili in gioco nel fenomeno dell'instabilità sui provini, è stato necessario elaborare una catena di misura che completasse, tramite sensori aggiuntivi, quella prevista dalla macchina a compressione dotata di cella di carico e sensori di posizione.

Si è scelto quindi di aggiungere un sensore laser, un LVDT e una riga metrica digitale.

I sensori sono stati accoppiati ad una scheda di acquisizione della National Instruments® NIcDAQ 9171 (**Fig. 4.4**) che, collegata ad un Pc tramite USB consente di convertire il segnale da analogico a digitale per una successiva rielaborazione dei dati.

Generali	
Prodotti	cDAQ-9171
Formato	USB , CompactDAQ
Tipo di prodotto	Chassis
Codice Prodotto	781425-01
Sistema operativo/Target	Real-Time , Windows
Operating Relative Humidity	10 percent - 90 percent
Chassis	
Numero di slot	1
Alimentazione totale disponibile	2.6 W
Intervallo di tensione di input	4.75 V - 6.25 V
Trigger incluso	No
Counter/Timers	
Numero di Contatori/Timer	4
Risoluzione	32 bits
Bus di interfaccia	
Trasferimento dati a prestazioni elevate	6
Tipi disponibili	Input Analogico , Output digitale , Input Contatore/Temporizzatore , Input digitale , Output analogico
Resistenza agli urti e vibrazioni	
Urti in fase operativa	30 g
Random Operating Frequency Range	5 Hz - 500 Hz
Vibrazioni casuali	0.3 g
Specifiche fisiche	
Lunghezza	13.1 cm
Ampiezza	8.86 cm
Altezza	3.33 cm
Temperatura di funzionamento	-20 °C



Fig. 4.4 Modulo di acquisizione USB National Instruments NI cDaq con relative caratteristiche

E' stata fatta una breve ricerca di mercato per selezionare i sensori che soddisfacessero al meglio i requisiti di accuratezza necessari per i test in rapporto al prezzo.

Di seguito i sensori scelti con i relativi *datasheet*:

Capitolo 4: Setup sperimentale per test a compressione su provini in parete sottile

- Sensore laser:

Sensore laser OPTONCDT 1302-20 della MICROEPSILON® (**fig.4.5**), dotato di un range di misura di circa [50 mm].



Fig. 4.5 Sensore laser OPTONCDT 1302-50
NI 9234



Fig. 4.6 Modulo di acquisizione NI 9234

Il sensore è stato alimentato grazie ad un alimentatore esterno, ed è stato accoppiato al modulo di acquisizione NI 9234 **Fig. 4.6** per convertire il segnale in tensione in uscita dal sensore in digitale.

In **Fig. 4.7** è presentato il relativo *date sheet* con le relative caratteristiche metrologiche.

Type	ILD1302-	20	50	100	200
Measuring principle		Laseroptical triangulation			
Measuring range	mm (inches)	20 (0.79)	50 (2.0)	100 (3.9)	200 (7.9)
Start of measuring range	mm (inches)	30 (1.2)	45 (1.8)	50 (2.0)	60 (2.4)
Midrange	mm (inches)	40 (1.6)	70 (2.8)	100 (3.9)	160 (6.3)
End of measuring range	mm (inches)	50 (2.0)	95 (3.7)	150 (5.9)	200 (7.9)
Linearity	μm (mils)	40 (1.57)	100 (3.94)	200 (7.87)	400 (15.74)
	% FSO	± 0.2			
	Averaged over 64 values	4 (1.6)	10 (3.9)	20 (7.9)	40 (1.6)
Resolution	% FSO	0.02			
	dynamic at 750 Hz μm (mils)	10 (3.9)	25 (9.8)	50 (2.0)	100 (3.9)
	% FSO	0.05			
Measuring rate		750 Hz			
Light source		Semiconductor laser < 1 mW, 670 nm (red)			
Laser class		2 (DIN EN 60825-1 2007)			
Spot diameter	SMR, μm (mils)	210 (8.27)	1100 (43.3)	1400 (55.1)	2300 (90.5)
	MMR, μm (mils)	530 (20.87)	110 (4.33)	130 (5.12)	2200 (86.61)
	EMR, μm (mils)	630 (24.8)	1100 (43.3)	1400 (55.1)	2100 (82.68)
Protection class		IP 67			
Vibration		15 g / 10 Hz...1 kHz			
Shock		15 g / 6 ms (IEC 68-2-29)			
Weight		approximately 83 g, without cable			
Temperature stability	% FSO/°C	0.03		0.08	

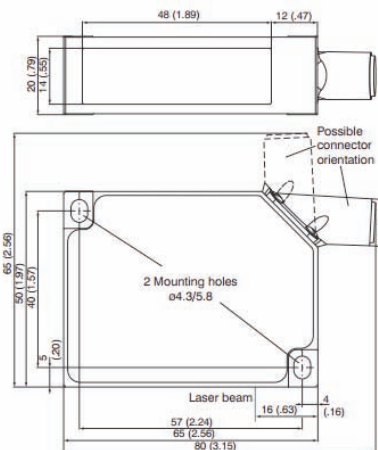


Fig. 4.7 Caratteristiche metrologiche e dimensionali del sensore OPTONCDT 1302-20

Il sensore laser è necessario per una misura accurata delle deformazioni localizzate che si formano sulle parete dei provini all'insorgere dell'instabilità.

- LVDT

Sensore di spostamento DTA-10G8 della MICROEPSILON® (**Fig. 4.8**) della MICROEPSILON con la relativa elettronica di controllo (**Fig. 4.9**)



Fig. 4.8 Sensore di spostamento DTA-10G



Fig. 4.9 Elettronica di controllo del sensore

Il sensore è stato alimentato con un sensore esterno e collegato ed è stato accoppiato al modulo di acquisizione NI 9234 (**Fig.4.6**), per convertire il segnale in tensione in uscita dall'elettronica di controllo.

In **Fig. 4.10** è presentato il datasheet del sensore con le relative caratteristiche metrologiche (si faccia riferimento al DTA 10G8).

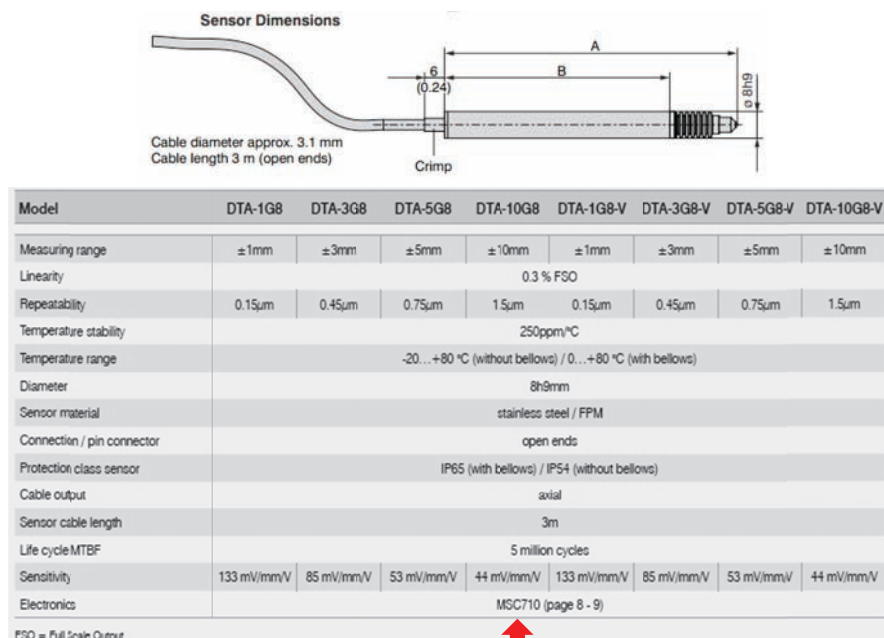


Fig. 4.10 Caratteristiche metrologiche del sensore DTA-10G8

Durante i test il sensore viene utilizzato per misurare l'effettiva posizione della piastra superiore del macchinario in modo da correggere eventuali errori commessi dal sensore di posizione presente nella macchina.

- Riga metrica digitale

Riga metrica Digimatic 572-202-20 della Mitutoyo® (**Fig. 4.11**).



Fig. 4.11 Riga metrica digital Digimatic 572-202-20

Il sensore è provvisto di una uscita digitale USB che permette la diretta connessione al Pc fornendo direttamente i valori dello spostamento in scala millimetrica.

In **Fig. 4.12** è presentato il *data sheet* dello strumento con le caratteristiche metrologiche (si faccia riferimento al modello 572-202-20).

Range	Order No.		Accuracy	Resolution
	Horizontal	Vertical		
100mm	572-200-20	572-300-10	0.03mm	0.01mm
	572-460*	572-560*	0.03mm	0.01mm
	572-480-10**	572-580-10**	0.03mm	0.01mm
150mm	572-201-20	572-301-10	0.03mm	0.01mm
	572-461*	572-561*	0.03mm	0.01mm
	572-481-10**	572-581-10**	0.03mm	0.01mm
200mm	572-202-20	572-302-10	0.03mm	0.01mm
	572-462*	572-562*	0.03mm	0.01mm
	572-482-10**	572-582-10**	0.03mm	0.01mm
300mm	572-203-10	572-303-10	0.04mm	0.01mm
	572-463*	572-563*	0.04mm	0.01mm
	572-483-10**	572-583-10**	0.04mm	0.01mm
450mm	572-464*	572-564*	0.04mm	0.01mm
	572-484-10**	572-584-10**	0.04mm	0.01mm
600mm	572-465*	572-565*	0.05mm	0.01mm
	572-485-10**	572-585-10**	0.05mm	0.01mm
800mm	572-466*	572-566*	0.06mm	0.01mm
	572-486-10**	572-586-10**	0.06mm	0.01mm
1000mm	572-467*	572-567*	0.07mm	0.01mm
	572-487-10**	572-587-10**	0.07mm	0.01mm

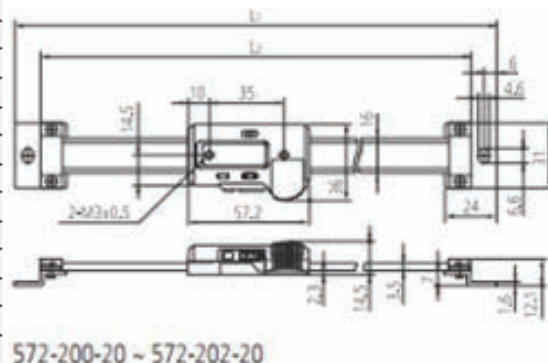


Fig. 4.12 Caratteristiche metrologiche e dimensioni della riga metrica digital Digimatic 572-202-20

La riga metrica è necessaria per avere un riferimento di posizione lungo la direzione verticale del provino, per stabilire accuratamente la locazione della formazione di onde e imbozzamenti all'insorgere dell'instabilità.

4.3 Progettazione dei supporti per i sensori e delle piastre vincolari

L'utilizzo dei sensori acquistati per la prova sperimentale, ha richiesto la progettazione di adeguati supporti che ne permettessero un impiego agevole. In questo caso i requisiti di progettazioni sono stati quelli di garantire un'ottima stabilità ai trasduttori in modo da non incidere sulla misura, ed una elevata flessibilità con la possibilità di posizionare i sensori in differenti punti il tutto cercando di minimizzare i costi.

Sono stati progettati due supporti tramite l'utilizzo del software CAD Solid Works®: uno per il sensore di spostamento LVDT ed uno per sostenere la barra metrica Mitutoyo ed il sensore laser.

Sono state inoltre progettate due ulteriori piastre da applicare sopra le due piastre di compressione della macchina in modo da allargare le superfici di appoggio per gli eventuali provini garantendo le corrette condizioni vincolari.

- Supporto per barra metrica e sensore laser

La prova sperimentale richiede un'accurata misurazione, lungo l'asse provino, della posizione in cui si verifica l'imbozzamento durante la compressione e, il relativo spostamento ortogonale della superficie.

Si è pensato quindi di creare un supporto che permettesse di misurare contemporaneamente lo spostamento normale alla superficie, dovuto all'imbozzamento e, la relativa posizione assiale accoppiando la barra metrica al sensore laser.

Così facendo è possibile determinare con la barra metrica la posizione assiale del punto di interesse sulla superficie del provino e, con il sensore laser il relativo spostamento normale.

In **Fig. 4.13** è mostrato l'insieme del supporto che consta di componenti reperibili in commercio come: i carrelli, la trave con doppia guida e il profilato di supporto più dei componenti fatti realizzare su misura da un'officina meccanica per vincolare tra loro i due sensori e permetterne lo spostamento relativo.

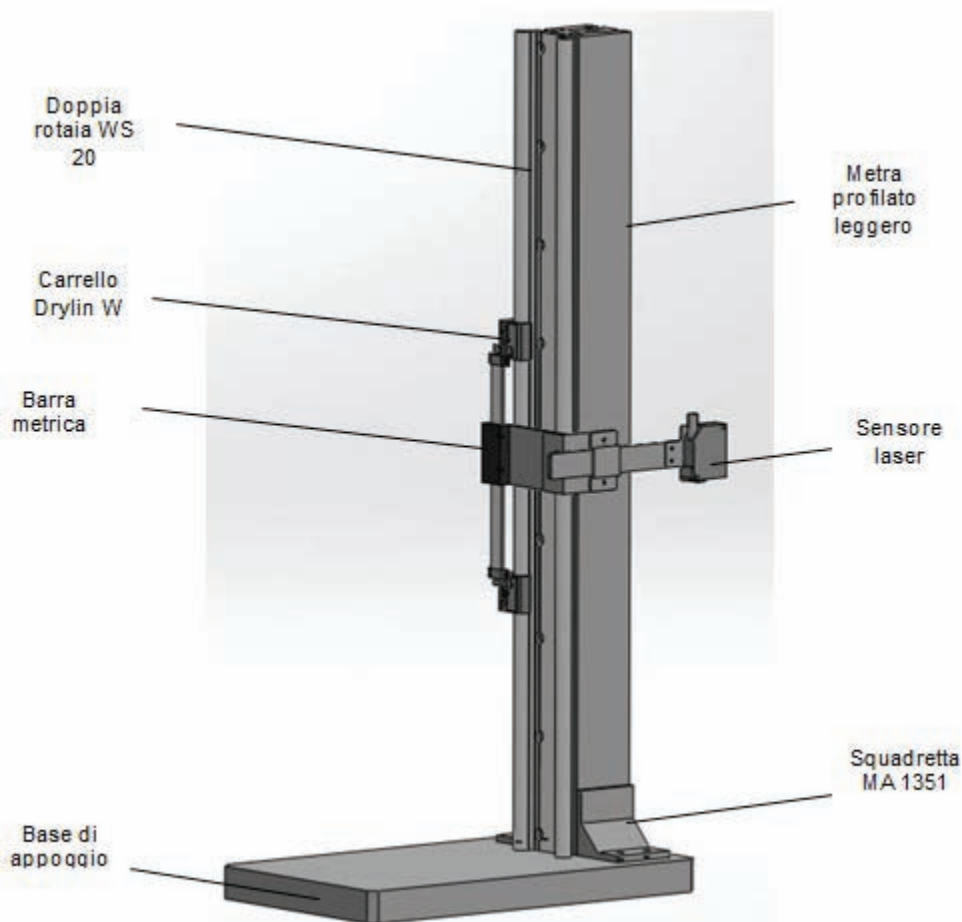


Fig. 4.13 Insieme del supporto per il sensore laser e per la barra metrica

La struttura è composta da una base in acciaio alla quale è vincolato tramite due squadrette MA1351 un profilato di altezza 600 [mm] reperibile nel catalogo METRA® (sezione in **Fig. 4.14**).

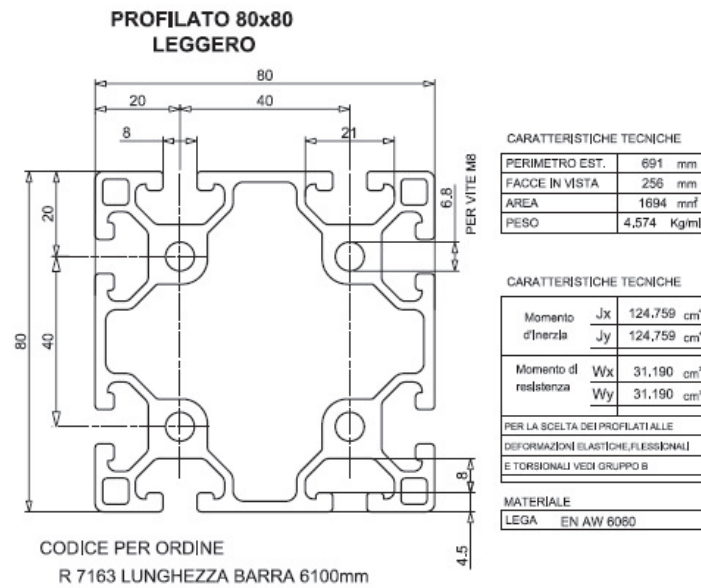


Fig. 4.14 Sezione del profilato leggero Metra R 7163

Al profilato in acciaio viene calettata tramite dei cursori Metra® MA 1336 e MA 1344 (**Fig. 4.15**) una trave della (Iigus® Double Rail WS 20 in **Fig. 4.16**) provvista di una doppia rotaia di altezza [600 mm] .

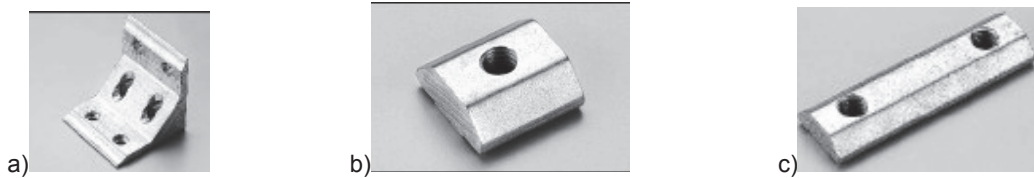


Fig. 4.15 Componenti presi dal catalogo Metra: a) Squadretta MA 1351; b) cursore MA 1344; c) cursore doppio MA 1351



Fig. 4.17 Trave a doppia rotaia Iigus Double Rail WS 20 di lunghezza L=600 [mm]

Le due rotaie presenti sulla trave fungono da guida per i carrelli Drylin W20 (**Fig. 4.18**) compatibili costruiti sempre dalla Igus® che, sono provvisti di un sistema di serraggio che consente di fissarli lungo la guida alla posizione desiderata.



Fig. 4.18 Carrello Drylin W20 Igus

Come mostrato in **Fig. 4.19**, la barra metrica Mitutoyo è collegata ai suoi estremi a due carrelli Drylin grazie agli appositi fori di aggancio, ciò consente un movimento verticale della barra che permette un posizionamento ottimale rispetto al provino da misurare.

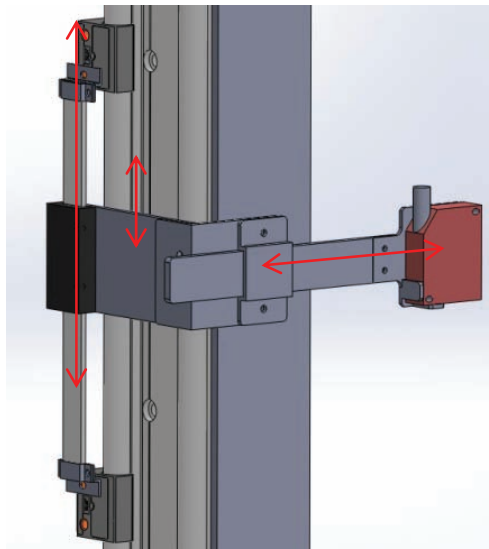


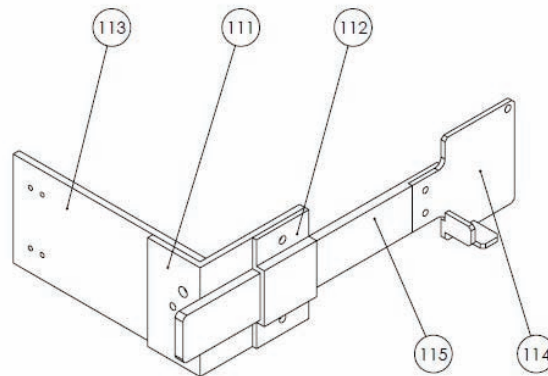
Fig. 4.19 Particolare del sistema vincolare tra barra metrica e sensore laser

Il sensore laser viene collegato al cursore mobile della barra metrica tramite una struttura ad “L” in alluminio disegnata appositamente, in questo modo è possibile posizionarlo alla quota desiderata con precisione millimetrica.

Per garantire la corretta distanza tra il sensore laser e la superficie da misurare, la piastra di vincolo del sensore laser è dotata di un braccio mobile estensibile.

La struttura di collegamento tra il cursore della barra metrica e il sensore laser è sostenuta da un ulteriore carrello Drylin posto sulla seconda rotaia per evitare che il peso del sensore laser incida sulla misura flettendo il supporto.

In **Fig. 4.20** è presentato il disegno tridimensionale della struttura realizzata con semplici piastre in alluminio commissionata a una officina meccanica.



Numero bolla	Disegno	Nome	Quantità
111	Disegno111	111_Angolare	1
112	Disegno112	112_Blocco_Piastro	1
113	Disegno113	113_Piastro_collegamento	1
114	Disegno114	114_Piastro_Laser	1
115	Disegno115	115_Braccio	1

Fig. 4.20 Disegno 3D dei componenti della struttura di vincolo tra sensore laser e barra metrica

- Supporto per LVDT

Il supporto per LVDT è stato progettato con gli stessi criteri utilizzati per il supporto del sensore laser e della barra metrica, in questo caso però è sufficiente un solo grado di libertà ovvero lo spostamento verticale del sensore in modo da raggiungere la quota del provino.

In **Fig. 4.21** è mostrato l'assieme del supporto composto, come nel caso precedente, di componenti reperibili in commercio: trave a doppia rotaia, carrelli Drylin, profilato in acciaio ed una struttura composta in piastre di alluminio fatta realizzare su specifiche.

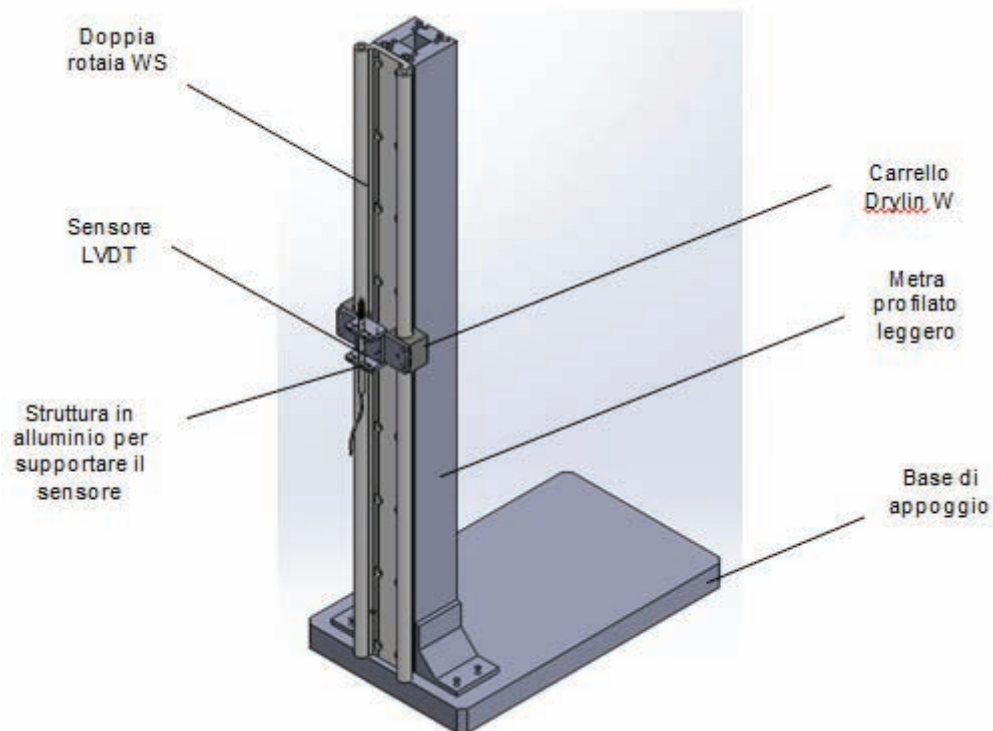


Fig. 4.21 Assieme del supporto per il sensore LVDT

La struttura è composta da una base in acciaio alla quale è vincolato tramite due squadre MA1351 un profilato di altezza 600 [mm].

Al profilato in acciaio viene calettata tramite dei cursori Metra® MA 1336 e MA1344 (Fig. 4.15) una trave della (Igus® Double Rail WS 20 in Fig. 4.16) provvista di una doppia rotaia di altezza [600 mm] .

Le due rotaie fungono da guida per due carrelli Drylin W20 (Fig. 4.18) ai quali è collegata la struttura in alluminio progettata per vincolare il sensore di movimento LVDT.

Come mostrato in (Fig.4.22) questo supporto permette la sola traslazione verticale del sensore in modo da poterlo posizionare in linea con la piastra della macchina che comprime il provino.

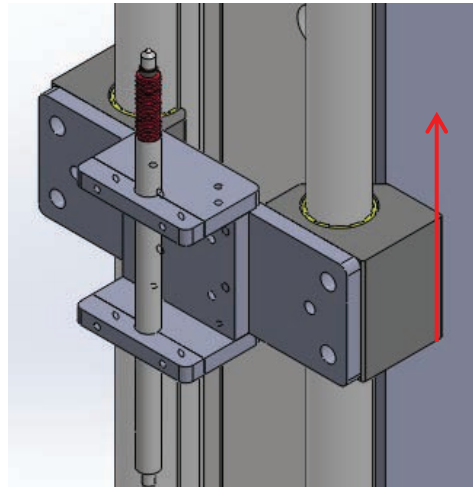
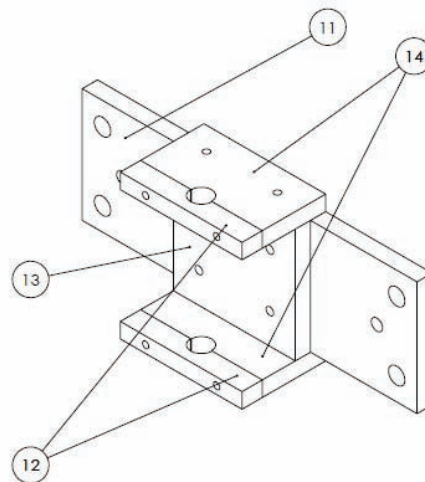


Fig. 4.22 Particolare del supporto per il sensore LVDT

Infine in **Fig. 4.23** è presentato il disegno tridimensionale della struttura in alluminio progetta che vincola il sensore LVDT ai due carrelli mobili.



Numero Bolla	Disegno	Nome	Quantità
11	Disegno11	11_Piastro_Lvdt	1
12	Disegno12	12_SemaggiolVDT_1	2
13	Disegno13	13_SemaggiolVDT_2	1
14	Disegno14	14_SemaggiolVDT_3	2

Fig. 4.23 Struttura in alluminio per il supporto al sensore LVDT con le differenti piastre

- Piastre vincolari

Le piastre presenti sulla macchina a compressione si sono dimostrate di dimensioni troppo ridotte per poter fungere da vincoli stabili per i provini descritti nei capitoli successivi. Si sono quindi progettate due ulteriori piastre maggiorate da collegare, tramite una vite M8 passante, al foro preesistente sui supporti della macchina.

Le due piastre hanno dimensioni analoghe ma, quella superiore è provvista di una spianatura con due fori M3 per l'eventuale fissaggio di ulteriori sensori.

In **Fig. 4.24** sono rappresentate le due piastre e l'assieme visto con uno dei provini da utilizzare per i test.

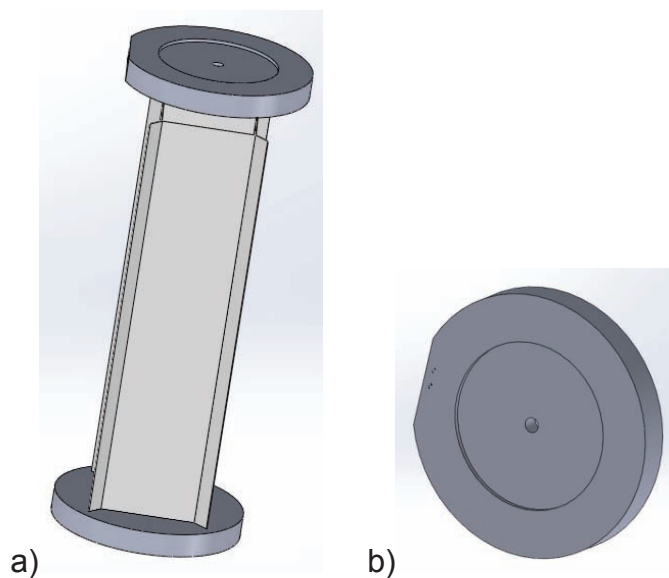


Fig. 4.24 Piastre maggiorate: a) Assieme con un provino b) Piastra superiore

4.4 Scelta dei provini da testare

Prima di effettuare i test sperimentali, si è effettuato un pre-dimensionamento tramite analisi numerica ad elementi finiti per scegliere geometrie, spessori e materiali per i provini da far realizzare.

Sono stati selezionati per i test: un provino a sezione quadrata alettato, una comune lattina per uso alimentare e in tubo in composito.

Per quanto concerne la scelta e il dimensionamento del provino alettato, si fa riferimento al lavoro di svolto da Casarin Francesco nel suo elaborato di tesi riportando, in **Fig. 4. 25**, la sezione selezionata con la relativa deformata ricavata dalle analisi FEM.

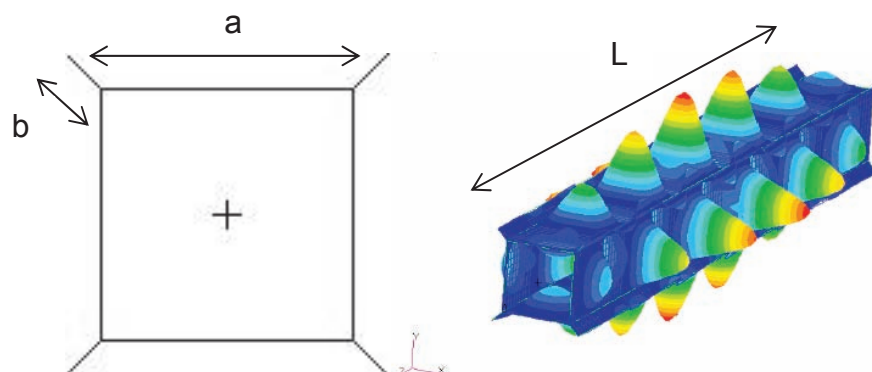


Fig. 4.25 Sezione e deformata di instabilità per il provino alettato selezionato [70]

E' stata così commissionata all'officina meccanica già contattata per i supporti dei sensori una serie di provini in lega AA 2024-T3 con dimensioni di:

$t = 0.5 [mm]$, $a = 80 [mm]$, $b = 15 [mm]$ $L = 350 [mm]$ con sezione quadrata alettata ai vertici.

Oltre ai provini a trave alettata, si è pensato ad altre strutture in parete sottile che potessero essere sottoposte al test a compressione.

Un ottimo esempio di struttura in parete sottile, assimilabile ad un cilindro isotropo, è la lattina di alluminio per contenere bibite (**Fig. 4.26**).



Fig. 4.25 Lattina utilizzata come provino

La lattina ha spessori molto ridotti che permettono l'osservazione di fenomeno di instabilità per valori di carico di compressione relativamente bassi inoltre, è facilmente reperibile a basso costo, anche se è molto soggetta alla presenza di difetti e deformazioni localizzate.

Nel capitolo 6 verrà analizzato un modello ad elementi finiti della lattina per la valutazione dei carichi di instabilità e delle deformazioni che saranno poi confrontati nel capitolo 7 con i valori ottenuti per via sperimentale grazie alla macchina a compressione sopra descritta.

La problematica principale nell'utilizzo delle lattine in qualità di provino è la grande presenza di difetti dovuti alla tecnologia produttiva ed ai cicli di stress subiti che, hanno portato ad una bassa ripetibilità e congruenza delle prove. Infine l'ultimo provino preso in considerazione è stato un cilindro in materiale composito in **Fig. 4.27** fornito dall'azienda SITA COMPOSITI®, realizzato da tre strati di tessuto in fibra di carbonio 0/90 in matrice epossidica più un ulteriore strato *prepreg* 0/90° di fibre di vetro.

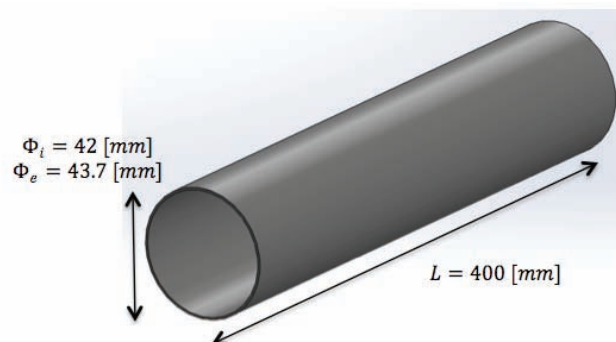


Fig. 4.27 Tubo in materiale composito realizzato da SITA COMPOSITI

Il tubo ha un diametro interno di 42 [mm], un diametro esterno di 43.7 [mm] ed una lunghezza di 400 [mm].

Per garantire una migliore condizione vincolare per evitare che durante il test a compressione il cilindro uscisse fuori sede a causa delle grandi forze in gioco, sono stati progettati due cilindri in alluminio del diametro interno del tubo avvitabili sulle due piastre della macchina a compressione.

Così facendo, il tubo si inserisce superiormente ed inferiormente nei due cilindri garantendo così maggiore stabilità.

In **Fig. 4.28** sono rappresentati i due supporti in alluminio fatti realizzare.



Fig. 4.28 Supporti vincolari per il tubo composito

Nel capitolo 5 sono descritte le analisi ad elementi finiti svolte sul cilindro in composito che, si è dimostrato eccessivamente resistente con un carico critico fuori dalla portata della macchina a compressione. Si è dovuto pensare quindi ad una strategia per la diminuzione del carico di instabilità dello stesso in modo da poter effettuare la prova a compressione.

5. Analisi FEM

Scelte le tipologie di provini da testare sulla macchina a compressione, si è svolta su ognuno di essi una simulazione numerica agli elementi finiti per simulare e prevedere il comportamento di *buckling* e *post-buckling* in modo tale da poter poi confrontare i risultati con quelli ottenuti sperimentalmente.

Per ogni tipologia di provino: trave alettata, lattina e tubo in composito si è creato un modello corrispondente agli elementi finiti tramite l'utilizzo del software Patran di MSC®.

Per tutti i modello si sono eseguite analisi di buckling con il solutore non lineare Marc (Sol 600) per ottenere un valore predittivo del carico critico.

Successivamente si sono poi svolte delle analisi statiche non lineari che riproducessero la prova a compressione dei test in modo da valutare le deformazioni e l'andamento carico/spostamento nel comportamento *post-buckling* dei provini.

Di seguito si descriveranno i modelli e le analisi FEM svolte sulle differenti tipologie di provino.

5.1 Analisi FEM della trave alettata

La geometria della trave aletta (**Fig. 5.1**) è stata create tramite l'accoppiamento di 8 superfici: 4 a comporre la sezione quadrata più ulteriori quattro a formare le alette laterali.

Si è poi definito un materiale isotropo elasto-plastico con le caratteristiche della lega d' alluminio 2024-T3 elencate in tabella **Tab. 5.1**.

Il tratto plastico è stato inserito grazie ad una funzione campo nel quale si è inserita la legge di Hollomon per la lega usata.

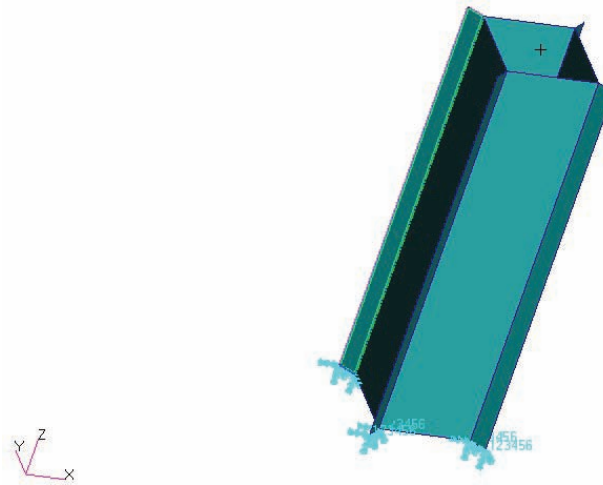


Fig. 5.1 Geometria della trave alettata creata con le funzioni *Geometry* interne a Patran

LEGA	E [GPa]	ρ [kg/m ³]	ν	σ_{Sner} [Mpa]	σ_{UTS} [MPa]
AA-2024	73.1	2780	0.33	345	483

Tab 5.1 Caratteristiche della lega utilizzata

Alle piastre è stata associata una proprietà *Shell* nella quale si è potuto definire lo spessore.

Alle 4 piastre che compongono la sezione quadrata è stato assegnato uno spessore di 0.5 [mm] mentre alle 4 piastre rappresentanti le alette uno spessore pari a 1.0 [mm] .

Il modello è stato discretizzato con elementi QUAD4 a quattro nodi che si sono dimostrati più accurati rispetto agli elementi TRIA a 3 nodi per un totale di 5320 elementi. Una *mesh* più raffinata con più elementi non ha dato risultati più accurati ma, ha solamente elevando il tempo necessario al calcolo.

La base della trave è stata vincolata tramite un incastro che bloccasse tutte le rotazioni e gli spostamenti mentre sulla sezione superiore è stato creato un elemento rigido MPC (*Multi Point Constrain*) che, collegasse tutti i nodi dipendenti della sezione ad un nodo centrale indipendente (**Fig. 5.2-5.3**).

I nodi dipendenti dell'MPC hanno tutti i gradi di libertà liberi, mentre il nodo centrale indipendente è stato vincolato alle traslazioni lungo il piano della sezione.

Infine è stato applicato un carico unitario di compressione sul nodo indipendente dell'MPC.

Utilizzare un elemento MPC anziché caricare e vincolare i nodi della sezione è del tutto analogo, ma permette di avere un nodo su cui valutare la forza totale e lo spostamento subito dall'intera sezione.

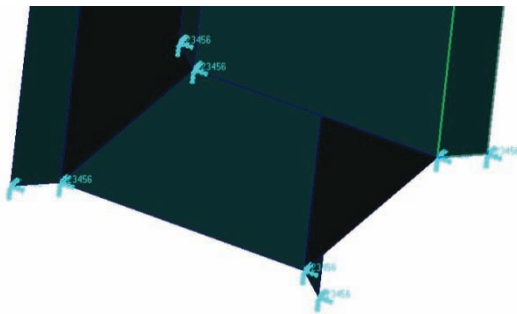


Fig. 5.2 Particolare della condizione vincolare applicata alla base

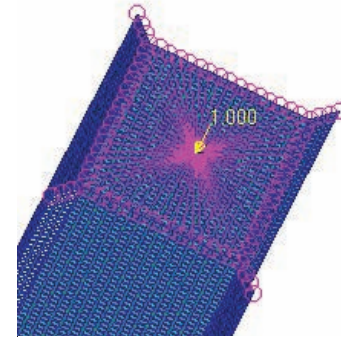


Fig. 5.3 Particolare dell'MPC

Terminato il modello, si è lanciata una analisi tramite la subroutine di *buckling* presente nel solutore MARC.

In Fig. 5.4 è rappresentata la soluzione ottenuta in termini di deformata della trave in condizioni di instabilità, mentre il valore del carico critico è risultato $P_{Cr} = 3300 N$.

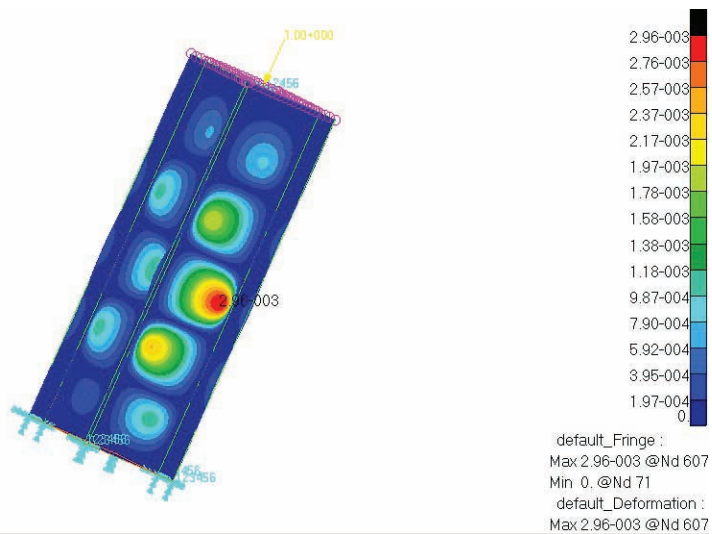


Fig. 5.4 Deformata in condizioni di instabilità risultante dall'analisi numerica

Come ultimo step, si è lanciata un'analisi statica con il solutore non lineare MARC (Sol600) per verificare il comportamento della trave al raggiungimento della condizione critica.

Per meglio confrontare questa simulazione con i test sperimentali, anziché applicare un carico di compressione al nodo dipendente dell'MPC, si è deciso di imporre uno spostamento negativo lungo l'asse della trave in quanto, la macchina a compressione per i test è stata controllata in termini di spostamento e non di forza.

Lo spostamento imposto lungo l'asse verticale del provino è stato imposto pari a 10 [mm], come previsto dal setup sperimentale.

Il solutore non lineare procede suddividendo lo spostamento in più incrementi, calcolando per ognuno la deformazione e i carichi applicati fino al raggiungimento dello spostamento obiettivo.

Dopo varie prove di configurazione per controllo degli incrementi, si è scelto di adottare un algoritmo adattivo più stabile dell'algoritmo a step fissati che ha più difficoltà a raggiungere la convergenza.

I fini dell'analisi sono stati quelli di verificare che l'andamento del carico applicato rispetto allo spostamento verticale fossero congrui con quelli ottenibili dall'analisi sperimentale.

In **Fig. 5.5** è rappresentato il grafico che mostra l'andamento della forza di reazione del nodo dipendente dell'MPC, ovvero la forza applicata alla sezione, rispetto allo spostamento verticale dello stesso.

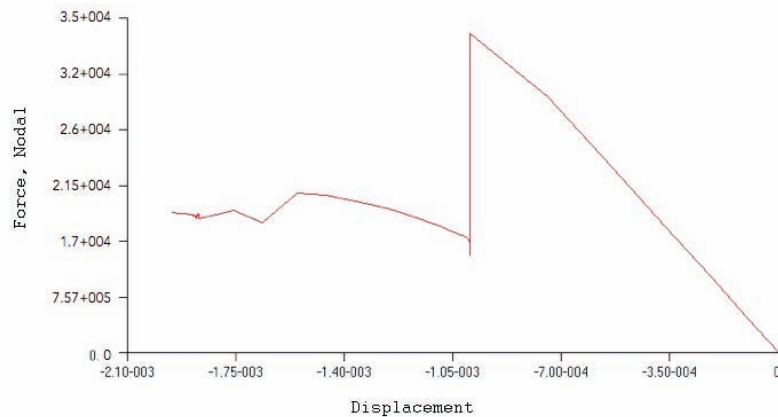


Fig. 5.5 Grafico che mostra l'andamento della forza di reazione del nodo indipendente dell'MPC rispetto allo spostamento verticale della sezione

Dalla lettura del grafico (si legga da sinistra a destra), si osserva un iniziale tratto lineare che, rappresenta il comportamento lineare del materiale prima che avvenga l'instabilità, successivamente si osserva un crollo repentino della forza in corrispondenza del valore del carico critico che si attesta ad un valore di 3300 [N] .

Successivamente la struttura riprende a caricarsi con valori di forza inferiori in quanto risulta essere deformata con caratteristiche geometriche ed inerziali differenti.

5.2 Analisi FEM della lattina

E' stato pensato di utilizzare come provino per i test a compressione una tipica lattina di alluminio per contenere bibite poiché, è un ottimo esempio di struttura in parete sottile e consente, grazie agli spessori molto ridotti di raggiungere valori modesti di carico critico mostrando in maniera evidente la formazione di imbozzamenti superficiali.

La lattina è inoltre un provino a basso costo e facilmente reperibile.

Si è scelti di utilizzare per i test sperimentali delle lattine di birra BAVARIA® (**Fig. 5.6**).



Fig. 5.6 Lattina Bavaria utilizzata per i test a compressione

In base alle dimensioni della lattina reale, tramite l'utilizzo del software CAD Solid Works si è realizzato il modello geometrico tridimensionale in **Fig. 5.7**.



Fig. 5.7 Modello Cad 3d della lattina

Il modello geometrico è stato poi importato in Patran e tramite la funzione *Break Solid*, è stato scomposto in modo da avere solo superfici a rappresentare il pezzo.

La lattina è costituita di una lega di alluminio serie 3000 nello specifico la AA3004, è stato così definito un materiale elasto-plastico con le caratteristiche in **Tab.5.3**. Il tratto plastico è stato definito con la legge di Hollomon.

LEGA	E [GPa]	ρ [kg/m ³]	ν	σ_{Sner} [MPa]	σ_{UTS} [MPa]
AA-3004	73.1	2700	0.33	170	215

Tab 5.3 Caratteristiche della lega AA 3004

Alle superfici sono state associate delle proprietà *Shell* in modo da poter ricreare lo spessore: alle superfici del fondo e del bordo superiore è stato assegnato uno spessore di 0.2 [mm], mentre per le restanti un valore di 0.1 [mm].

La lattina è stata discretizzata con elementi quad4 che si sono dimostrati più efficaci e stabili rispetto agli elementi Tria.

In **Fig. 5.8** è rappresentata la mesh della lattina che conta un totale di 6228 elementi.



Fig. 5.8 Mesh lattina ed elemento MPC

Come per le analisi svolte sulla trave si è adottato un elemento MPC che collegasse i nodi dipendenti della sezione ad un nodo indipendente sul quale è posto un vincolo che blocchi le traslazioni lungo il piano ortogonale alla lattina.

Anche in questo caso per meglio confrontare i dati sperimentali con quelli delle analisi FEM si è deciso di imporre uno spostamento al nodo dipendente dell'MPC pari a 20 [mm] in direzione verticale analogamente a quanto fatto nei test sperimentali dove, la discesa della piastra di compressione è stata impostata a 20 [mm].

La base della lattina è stata vincolata in modo da bloccare tutte i gradi di libertà.

Come per le altre prove, si è imposto uno spostamento verticale al nodo indipendente dell'MPC in modo da poter confrontare i risultati sperimentali dove la macchina a compressione viene controllata in termini di spostamento.

L'analisi ha portato alla determinazione di un carico critico pari a 1500 N ed una deformata di instabilità visibile in **Fig.5.9**.

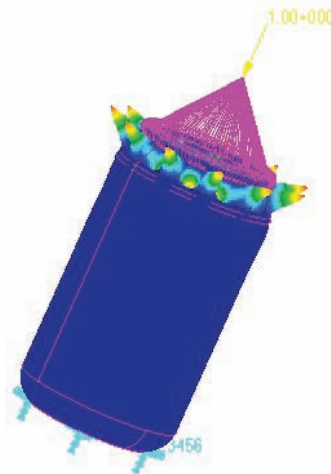


Fig. 5.9 Deformata data dall'analisi di Buckling svolta con il solutore SOL102

Dall'immagine risulta evidente come questa deformata non rispecchi la realtà, si è quindi effettuata con gli stessi parametri un'analisi statica di *post-buckling*, dove il solutore suddivide lo spostamento imposto in differenti step incrementali calcolando per ognuno le deformazioni e i carichi in gioco.

In **Fig. 5.10** è mostrato l'andamento del carico (visto dal nodo indipendente dell'MPC rispetto allo spostamento verticale risultante dalle analisi).

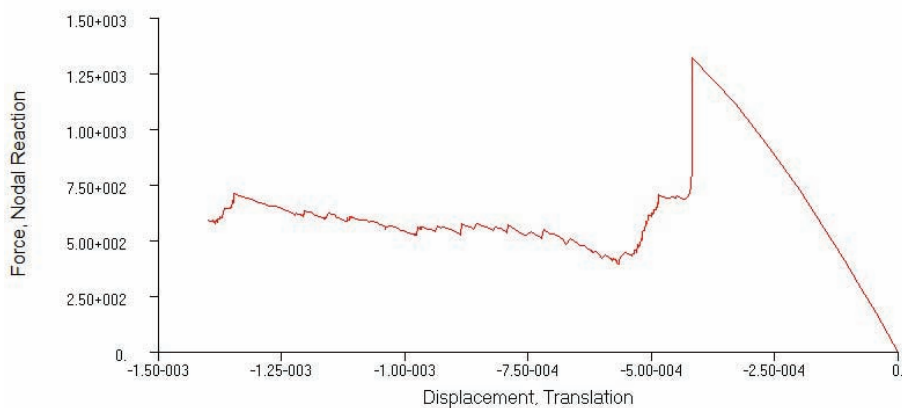


Fig. 5.10 Grafico delle forze in funzione dello spostamento

Osservando il grafico, che si legge da destra a sinistra, si nota un primo tratto lineare fino ad un punto di massimo ove avviene il fenomeno dell'instabilità con un repentino calo della forza.

Successivamente la lattina prende a ricaricarsi aumentando la sua deformazione.

L'andamento ottenuto è in accordo con i dati sperimentali rilevati con la macchina a compressione che, sono riportati nel capitolo successivo.

Il valore di forza in corrispondenza del massimo della curva rappresenta il carico critico che risulta di 1305 [N].

Il carico critico ottenuto con l'analisi statica non lineare risulta minore rispetto al carico ottenuto con una più semplice analisi di *buckling* (1500 N) poiché, quest'ultima è meno veritiera e accurata anche se richiede tempi di calcolo molto inferiori.

Ciò è confermato dai test sperimentali che hanno portato a valori di carico critico inferiori, mediamente si è infatti verificato un carico di circa 1000 N.

Inoltre le deformazioni ottenute tramite l'analisi non lineare statica risultano molto più congrue con quelle ottenute sperimentalmente.

In **Fig. 5.11** sono rappresentate due viste della lattina deformata ottenuta tramite l'analisi non lineare, si notano i tipici imbozzamenti caratteristici dell'instabilità secondaria.

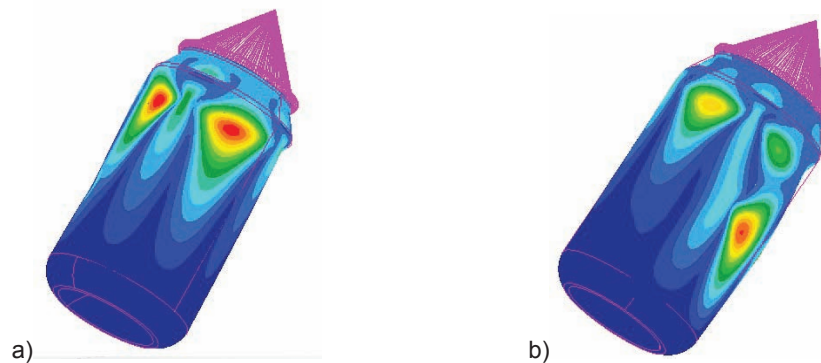


Fig. 5.11 Deformazioni ottenute tramite un'analisi non lineare statica:
a)Fronte della lattina b)Retro della lattina

L'analisi non lineare porta in ogni caso ad una sovrastima del carico critico del 36% rispetto ai test sperimentali (Cap. 6), tale condizione non è accettabile in quanto la stima non è a favore di sicurezza.

A seguito delle prove sperimentali effettuate sulla lattina, si è identificata una possibile causa della differenza tra il valore di carico critico atteso e quello rilevato.

E' stato osservato come, le lattine che presentavano difetti superficiali visibili come imbozzamenti o deformazioni prima dell'effettuazione dei test, dimostrassero una resistenza al molto inferiore alle lattine perfettamente integre raggiungendo l'instabilità per bassi valori di carico.

Si è pensato quindi di inserire dei difetti all'interno del modello FEM per verificarne l'influenza nell'instabilità.

- Influenza di difetti nel valore del carico critico

Si sono considerati due tipologie di difetto: un difetto di tipo geometrico ovvero eventuali imbozzamenti superficiali ed uno legato alle proprietà del materiale e allo spessore.

L'errore geometrico si è ottenuto creando un *offset* di alcuni nodi nella zona della lattina evidenziata in rosso (**Fig. 5.12**).

L'*offset* realizzato è dell'ordine dello spessore della lattina quindi di circa $0.1[mm]$ in direzione ortogonale alla superficie di verso entrante.



Fig. 5.12 Nodi della mesh ai quali è stato associato un offset

E' stata quindi lanciata l'analisi statica non lineare sul modello con difetti e si è così ottenuto un valore di carico critico di $1090 [N]$, più congruo al valore sperimentale.

In **Fig. 5.13** è riportato il grafico forza spostamento del modello numerico in presenza del difetti di Offset.

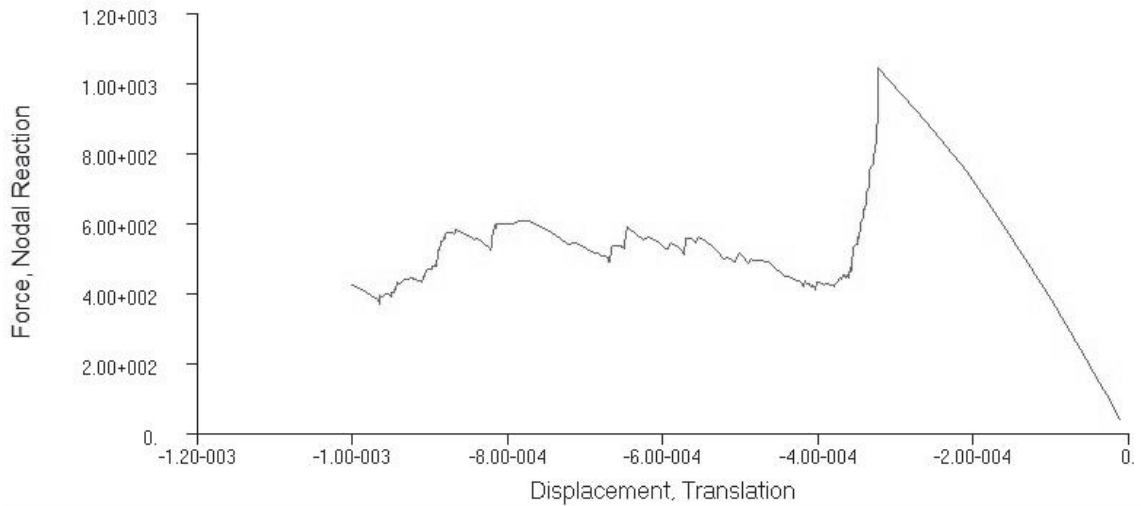


Fig. 5.13 Grafico forza spostamento del nodo indipendente dell'MPC nel modello con difetto di offset

Il difetto simulato, anche se di lieve entità, ha dimostrato un'importante influenza nel valore del carico critico, riducendolo del 27%.

Inoltre le deformazioni della lattina risultano essere più vicine a quelle reali con la creazione di 4 onde di imbozzamento principali distribuite sulla superficie della lattina in posizioni non simmetriche.

In **Fig. 5.13** sono mostrati dei frame estratti dall'analisi non lineare che mostra la deformazione incrementale della lattina.

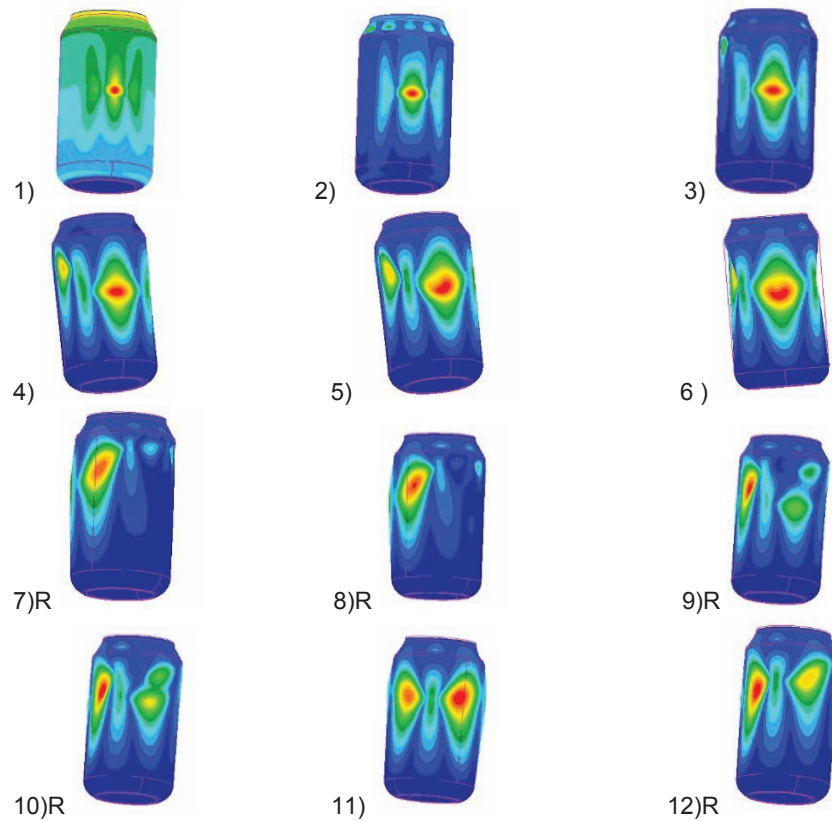


Fig. 5.13 Deformazioni incrementali del modello FEM con presenza di difetto, le immagini con la lettera (R) si riferiscono alla vista del retro della lattina

Nell'immagine di **Fig. 5.13** si osserva come l'imbozzamento parta esattamente dalla posizione del difetto di offset (1) e, successivamente si propaghi espandendosi. All'avanzare della compressione (4) iniziano a formarsi altre due onde principali ai due lati della lattina (6) mentre la zona opposta al difetto rimane quasi indeformata (7).

Successivamente con l'aumento del carico è visibile la formazione di un'ulteriore onda anche nel retro della lattina (9-10).

Il difetto funge quindi da innesco per il fenomeno dell'instabilità riducendo drasticamente il valore che la struttura può supportare senza imbozzarsi.

Un ulteriore difetto preso in considerazione riguarda le caratteristiche del materiale e di spessore localizzate nella struttura.

Si sono quindi cambiate le proprietà di alcuni elementi.

Nello specifico si è ridotto il modulo di elasticità di un 10% e lo spessore del 20%, la nuova proprietà è stata inserita in maniera random all'interno della

Mesh, creando due regioni più dense più altri difetti puntuali localizzati e dislocati sull'intera superficie(**Fig. 5.14**).



Fig. 5.14 Localizzazione dei difetti del materiale inseriti nel modello FEM

Si è svolta quindi l'analisi statica non lineare e si è ottenuto un valori del carico critico di 890 [N].

Anche in questo caso il carico critico è calato drasticamente di circa il 40%.

In **Fig. 5.15** è riportato il grafico forza/spostamento, che risulta essere molto frastagliato a causa della grande quantità di difetti inseriti nel modello.

Come verrà presentato nel capitolo seguente, si sono ottenuti grafici con andamento simile per lattine che hanno dimostrato valori di resistenza molto inferiori rispetto alla media dei campioni.

Questo comportamento si potrebbe quindi assimilare ad una grande presenza di difetti.

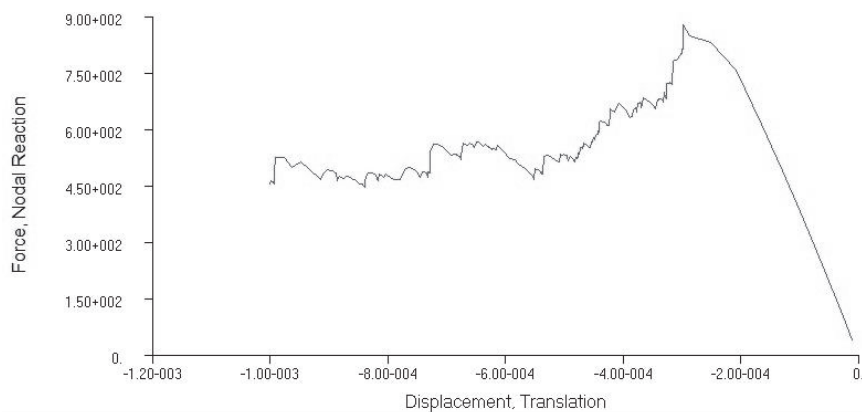


Fig. 5.15 Grafico forza spostamento del nodo indipendente dell'MPC nel modello con difetto di offset

In figura 5.15 è invece raffigurata la deformazione ottenuta, sono visibili due onde principali nella parte frontale corrispondenti alle due regioni con maggiori difetti. Nel retro della lattina invece sono visibili più onde di entità minore causate dalla dispersione dei difetti puntuali.

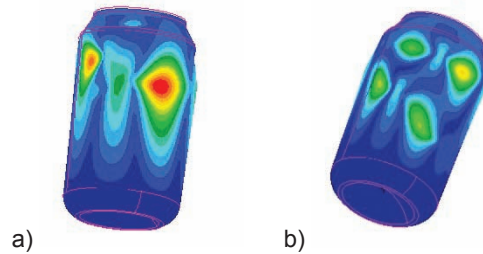


Fig. 5.15 Deformazione ottenuta nel modello con difetti nello spessore e caratteristiche del materiale disposti casualmente sulla superficie: a) Vista frontale; b) Vista del retro

Come verrà descritto nel capito seguente, l'influenza dei difetti è stata riscontrata anche nei test sperimentali poiché, le lattine, a causa della loro tecnologia produttiva, della loro composizione e dei cicli di stress subiti sono molte soggette alla presenza di difetti.

In **Fig. 5.16** è presentato il grafico forza/spostamento dei tre casi ovvero: modello senza difetti, modello con difetto di offset localizzato e modello con difetti nello spessore e nel modulo elastico dislocati.

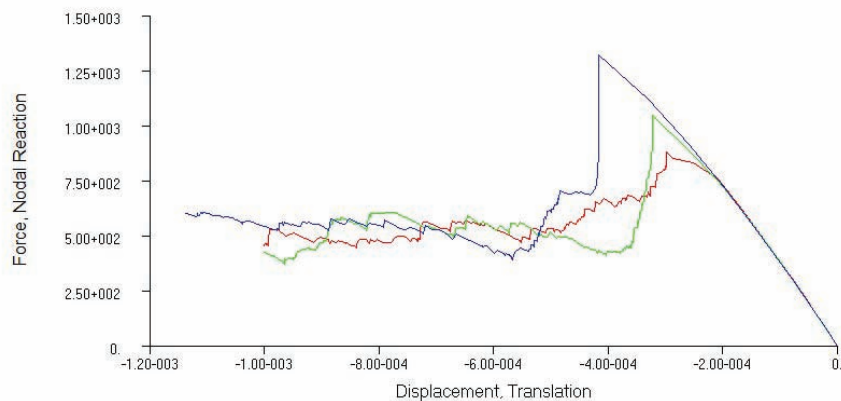


Fig. 5.16 Grafico forza/spostamento dei tre casi analizzati:
a)Modello privo di difetti; b)Modello con difetto di offset localizzato;
c)Modello con difetti di spessore e modulo inseriti random nell'intero modello

Dal grafico si evidenzia come l'influenza maggiore sia data dai difetti dislocati, poiché sono stati inseriti in grande quantità.

5.3 Analisi FEM del tubo in composito

L'ultimo provino preso in considerazione è stato un tubo in materiale composito fornito dalla SITA® compositi..

Il tubo ha una lunghezza di 400 [mm], un diametro interno di 42[mm] ed uno spessore di circa 1.5 [mm].

Il tubo è stato realizzato tramite l'applicazione di 3 fogli di tessuto 0-90° di fibre di carbonio T300 *prepreg* in matrice epossidica più un sottile strato di un tessuto *prepreg* di fibre di vetro.

Il tubo è raffigurato in **Fig. 5.17** con le relative dimensioni geometriche.

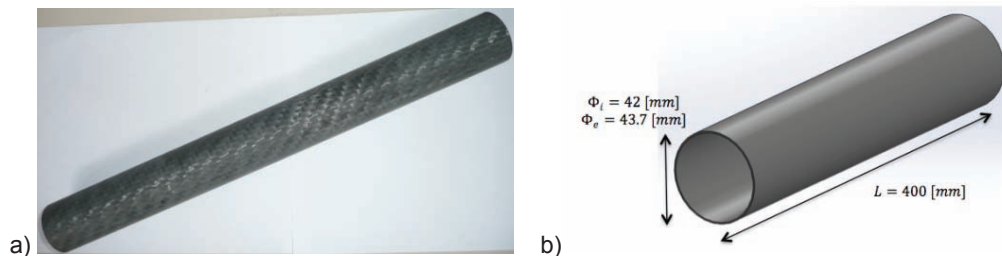


Fig. 5.17 Modello del tubo in composito con relative dimensioni: a)Foto del tubo; b)Modello CAD del tubo

La geometria del tubo è stata realizzata direttamente in Patran, con un'unica superficie del diametro medio del tubo.

Sono stati definiti due materiali ortotropi corrispondenti al *prepreg* di fibre di carbonio vetro, i valori delle caratteristiche meccaniche sono presentati nella tabella **Tab. 5.4**.

Materiale	E_{11} [GPa]	E_{22} [GPa]	ρ [kg/m ³]	ν_{12}	τ_{12}	Spessore [mm]
Prepreg Vetro	16	16	1800	0.13	4.5e+8	0.07
Prepreg carbonio	60	55	1475	0.05	5.3e+9	0.26

Tab 5.4 Caratteristiche dei due prepreg usati per la fabbricazione del tubo

Definiti i materiali ortotropi, si è creato con l'apposita funzione un materiale composito inserendo tre lamine di *prepreg* di carbonio e 1 lamina di *prepreg* di vetro.

Alla superficie è stata assegnata una proprietà *shell* in modo da definire uno spessore e il materiale nel modello FEM.

Il cilindro è stato poi discretizzato con un totale di 4320 elementi QUAD4 come mostrato in Fig. 5.18.

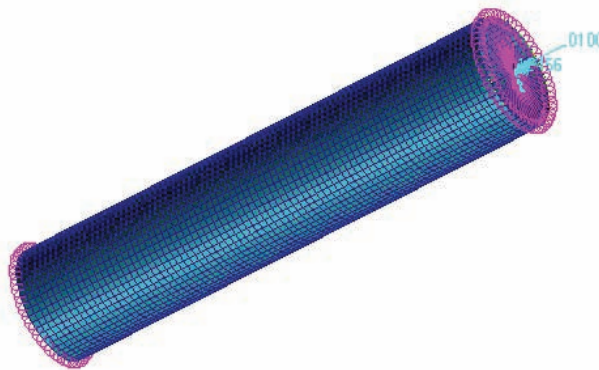


Fig. 5.18 Mesh del cilindro in composito

Come visibile nella figura Fig. 5.18, anche per il cilindro si è adottato un MPC che, collega i nodi dipendenti della sezione superiore (con tutti i gradi di libertà) ad un nodo indipendente centrale, il quale è sede dei carichi è vincolato nelle traslazioni nel piano ortogonale del cilindro.

La base del cilindro è stata vincolata con un incastro in modo da impedire tutti i gradi di libertà.

Inizialmente è stata svolta un analisi di *buckling* caricando il nodo indipendente dell'MPC con una forza di compressione unitaria, la deformata

risultante è presentata in figura **Fig. 5.19** e il valore del carico critico è risultato di 65000 [N].

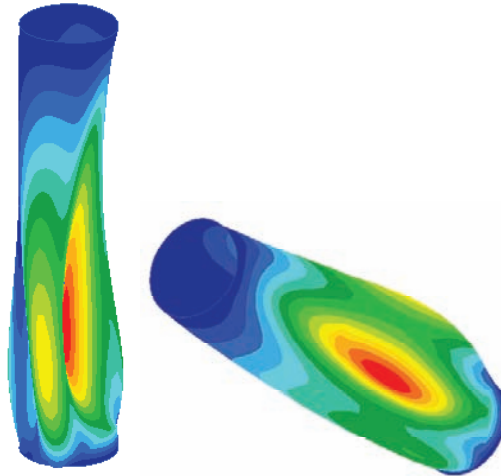


Fig. 5.19 Deformata data dall'analisi di buckling

In **Fig. 5.20** è riportato il grafico tensione/deformazione ottenuta dall'analisi, rispetto al nodo indipendente dell'MPC. Il grafico presenta il tipico punto di *snap* ovvero il massimo della curva dopo il tratto lineare che rappresenta il valore del carico critico, oltre al quale il carico cala bruscamente.

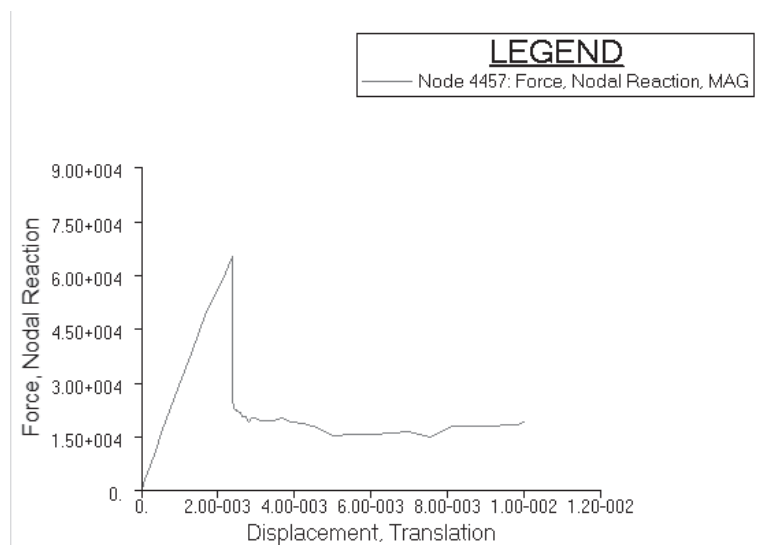


Fig. 5.20 Grafico forza/spostamento relativo al nodo indipendente dell'MPC

Il valore del carico critico, si è dimostrata troppo elevato per essere applicato dalla macchina a compressione che, ha una portata massima di 10 [kN], rendendo così impossibile un test sperimentale.

Si è pensato quindi ad una strategia che potesse abbattere il valore del carico critico.

La soluzione adottata è stata quella di simulare una foratura superficiale del tubo e procedere nuovamente alle analisi FEM su differenti configurazioni di foro in modo da capire la posizione e l'entità del foro o dei fori da far eseguire sul provino.

La geometria del tubo forato è stata ricreata grazie a Solid Works, in quanto essendo parametrico, risulta semplice un' eventuale modifica.

I modelli CAD sono stati poi importati in Patran dove si è configurata un'analisi di *buckling* del tutto analoga alla precedente.

In **Fig.5.21** sono raffigurate le varie configurazioni di foratura.

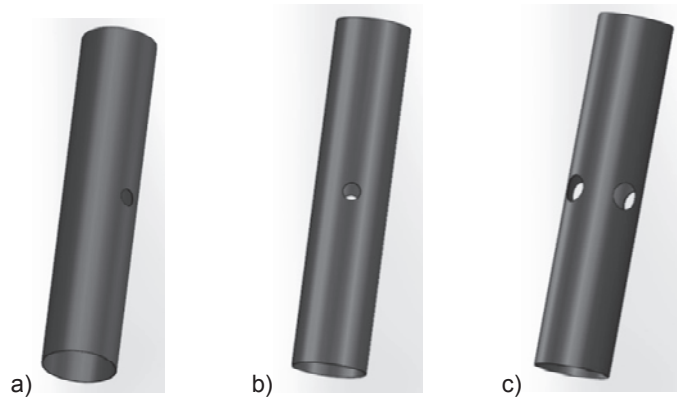


Fig. 5.21 Differenti condizioni di foratura considerata: a) Singolo foro centrale
b) Foro passante c) Doppio foro passante

Mentre in **Tab. 5.5** sono riportati i valori dei carichi critici ottenuti.

Configurazione	P_{cr} [N]
Modello perfetto	65463
Unico foro $\Phi = 10$ [mm]	39278
Unico foro $\Phi = 20$ [mm]	32732
Unico foro passante $\Phi = 20$ [mm]	18457
Unico foro passante $\Phi = 30$ [mm]	13718
Doppio foro passante $\Phi = 20$ [mm]	9563
Doppio foro passante $\Phi = 30$ [mm]	7834

Tab. 5.5 Valori del carico critico

Osservando i valori tabulati si verifica una drastica diminuzione del carico critico all'aumentare dell'entità della foratura.

Essendo la macchina a compressione certificata per un carico massimo di $10[kN]$ le uniche configurazioni utili risultano le ultime due.

Si ritiene quindi opportuno eseguire una foratura passante di diametro $30 [mm]$ sul tubo da testare in modo, da poter osservare l'insorgere dell'instabilità per carichi applicabili dalla macchina.

6. Prova sperimentale di compressione di una lattina

Nel capitolo seguente si descriveranno dei test sperimentali di compressione di una lattina, effettuati con la macchina DYNO della EASYDOUR®.

L'obiettivo della prova di laboratorio è stato quello di osservare e rilevare dati utili sul fenomeno del *buckling* in strutture con sezioni in parete sottile, considerando come provino la lattina già descritta nel capitolo precedente.

I dati ottenuti sperimentalmente sono stati confrontati con quelli risultanti dalle analisi numeriche descritte nel capitolo 6 in modo da verificarne la bontà e l'accuratezza predittiva.

Di seguito verrà descritto il setup sperimentale, i risultati dei test ed il confronto con i modelli FEM del capitolo 6.

6.1 Configurazione della prova sperimentale

Per la prova è stata utilizzata la macchina Easydur già descritta nel capitolo 5.

Grazie al software di controllo è stato compilato un programma utile alla prova da realizzare.

Si è deciso di controllare la compressione in termini di spostamento e non di forza in quanto non si era sicuri del carico critico da applicare alla lattina per l'insorgere dell'instabilità.

La macchina è stata configurata in modo da far scendere la piastra superiore di compressione di una quota pari a 2 [mm] con una velocità impostata di 0.02 mm/s.

Al termine della prova lo strumento fornisce i parametri di forza spostamento rilevati durante la compressione.

Di seguito si riportano i comandi inseriti nel programma compilato per i test:

F0: comando che azzerla la lettura della cella di carico

L0: comando che permette di definire una forza minima di contatto (nel nostro caso 3 [N])

P0: comando che azzerla la posizione

M0: comando che azzerla la forza massima

E0: comando che azzerla la lettura dell'estensimetro integrato

Chr.C: comando che permette un reset del grafico

F(P): comando che definisce lo spostamento relativo da imporre alla piastra mobile (per il test 2 [mm]) insieme ad altri parametri addizionali quali la velocità (0.02 [mm/s])

Peak: Lettura del picco massimo registrato dalla cella di carico

Stop: arresto del moto della piastra mobile e conclusione del test

Si è scelto di utilizzare le lattine di birra BAVARIA ® (**Fig. 6.6**) in quanto di facile reperibilità e basso costo. Tramite un controllo visivo sono state scartate le lattine che presentavano troppi difetti e, si sono numerate quelle selezionate in base alla configurazione della prova da effettuare.

la procedura sperimentale, prevede l'inserimento della lattina tra le due piastre di compressione e, dopo aver chiuso il box protettivo della macchina, l'avvio del programma.

A termine di ogni test sono stati salvati tramite un dispositivo di massa USB i dati relativi alla forza e allo spostamento.

Nel paragrafo successivo si riporteranno i risultati ottenuti dalle prove sperimentali che, verranno confrontati con le analisi FEM trattate nel capitolo 5.

6.2 Risultati sperimentali e confronto con le analisi FEM

Sono state eseguite diverse prove con le stesse condizioni nominali e parametri della prova per cercare di attenuare la dispersione dei dati dalle molteplici imperfezioni rilevate sulle lattine.

In **Fig. 6.1** è riportata la foto della deformazione ottenuta per un abbassamento di 2 [mm], affiancata alla deformata ottenuta dall'analisi numerica.

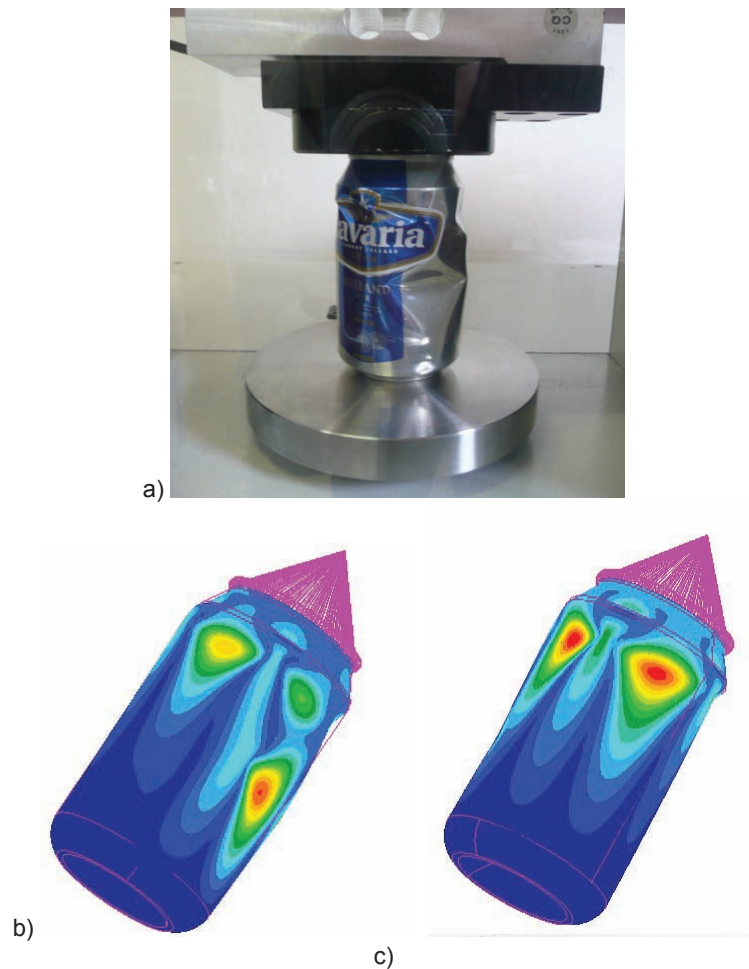


Fig. 6.1 Deformazioni della lattina a seguito della compressione assiale nel caso di eccentricità nulla E0a) Foto del test; b)Vista frontale dell'analisi FEM; c)Vista posteriore dell'analisi FEM

Come è visibile nelle immagini sopra, la tipologia e forma di deformazione del modello FEM risulta compatibile con quella ottenuta sperimentalmente, con

una dislocazione di imbozzamenti lungo la superficie. Il numero delle onde che si formano e la loro forma è circa il medesimo.

I grafici forza/spostamento sono invece riportati nelle **Fig. 6.2-6.3** rispettivamente per il test sperimentale e per il modello FEM.

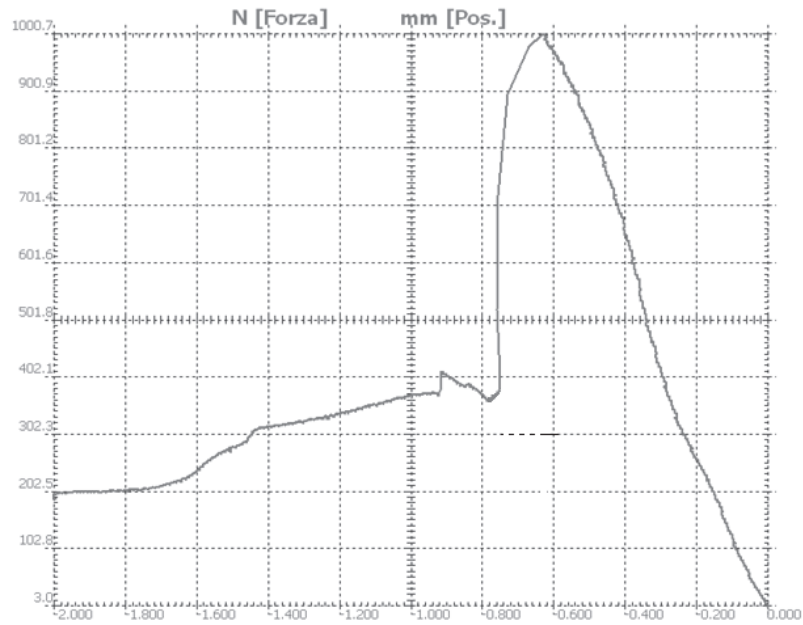


Fig. 6.2 Grafico spostamento(forza)/forza nel caso di eccentricità nulla E0

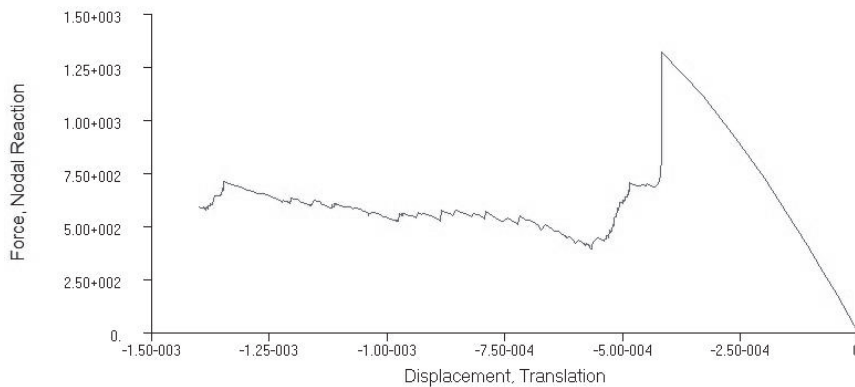


Fig. 6.3 Grafico delle forze in funzione dello spostamento nel modello FEM

Considerando che la lattina non è costruita e pensata come provino, ed ha quindi una qualità di produzione molto variabile, l'andamento del grafico dato dall'analisi FEM sembra assimilabile e comparabile a quello reale.

Si ritrova infatti un primo tratto lineare che termina in un massimo che rappresenta il valore del carico critico.

A seguito di questo punto si vede un crollo repentino della forza (*snap*), la parte successiva rappresenta poi il comportamento *post-buckling* molto difficile da rappresentare in quanto intervengono anche fenomeni di deformazioni plastiche.

Osservando il valore del carico critico ottenuto dalle analisi numeriche, si osserva però come risulti significativamente più alto (di circa il 25%).

Infatti i due valori ottenuti dalle analisi e dalle simulazioni sono rispettivamente di:

$$P_{cr,FEM} = 1305 [N]$$
$$\bar{P}_{cr,TEST} = 980 [N]$$

dove per i test si è considerata la media ottenuta per tutte le prove.

Osservando le lattine testate, si è potuto constatare come fossero soggette ad una grande presenza di difetti (esempio **Fig. 6.4**) causati dal processo produttivo, trasporto e cicli di stress.

Si è quindi ipotizzato che la minor resistenza reale fosse dovuta alla grande presenza di difetti mentre, il modello FEM è stato costituito considerando geometrie e proprietà meccaniche perfette.

Come descritto nel capitolo 5 si sono inseriti dei difetti puntuali all'interno del modello FEM.

Sono stati considerati due tipologie di difetti, uno geometrico ottenuto traslando dell'ordine dello spessore della lattina (*offset*) qualche nodo superficiale e, uno legato alle caratteristiche del materiale e allo spessore riducendo in qualche del 10% il modulo di elasticità e del 20% lo spessore.



Fig. 6.4 Particolare del difetto sul provino

I risultati sono stati mostrati nel capitolo 5, e vengono qui di seguito riassunti. Per il modello con l'inserimento del difetto di offset il valore del carico critico ottenuto è stato di $P_{cr} = 1090 [N]$, mostrando un calo del 30% rispetto al modello perfetto.

Mentre per il difetto ottenuto variando lo spessore e il modulo elastico in zone differenti della superficie (vedi capitolo 5) si è ottenuto un valore del carico pari a $P_{cr} = 870 [N]$, ovvero il 40% inferiore al modello reale.

In **Fig. 6.5** è mostrato il grafico in cui sono sovrapposte le curve forza/spostamento ottenute nei modelli FEM senza difetti e con difetti.

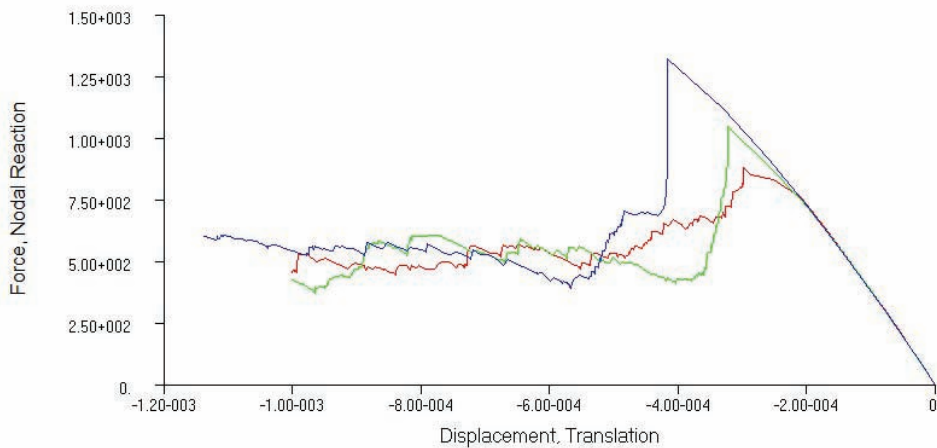


Fig. 6.5 Grafico forza/spostamento dei tre casi analizzati:
a)Modello privo di difetti; b)Modello con difetto di offset localizzato;
c)Modello con difetti di spessore e modulo dislocati

E' evidente dal grafico come l'inserimento di difetti sia localizzati (difetto di offset) sia distribuiti lungo l'intera superficie (difetto di materiale e spessore) influenzino negativamente in maniera importante il valore del carico di instabilità.

Il difetto di materiale e spessore sembra incidere maggiormente in quanto è stato inserito in grande quantità.

Con l'inserimento dei difetti nei modelli FEM , si riesce dunque a ottenere un carico critico predittivo che si discosta di circa il 10-11% dal valore medio rilevato sperimentalmente.

In termini di progettazione è sicuramente più adatto considerare il modello con difetti di spessore e materiale in quanto fornisce un valore in sicurezza.

Una ulteriore prova è stata quella di testare una lattina visivamente ricca di difetti per osservare come influenzino l'instabilità.

In **Fig. 6.6** è riportato il grafico forza/spostamento ottenuto dalla prova di compressione di una lattina difettosa.

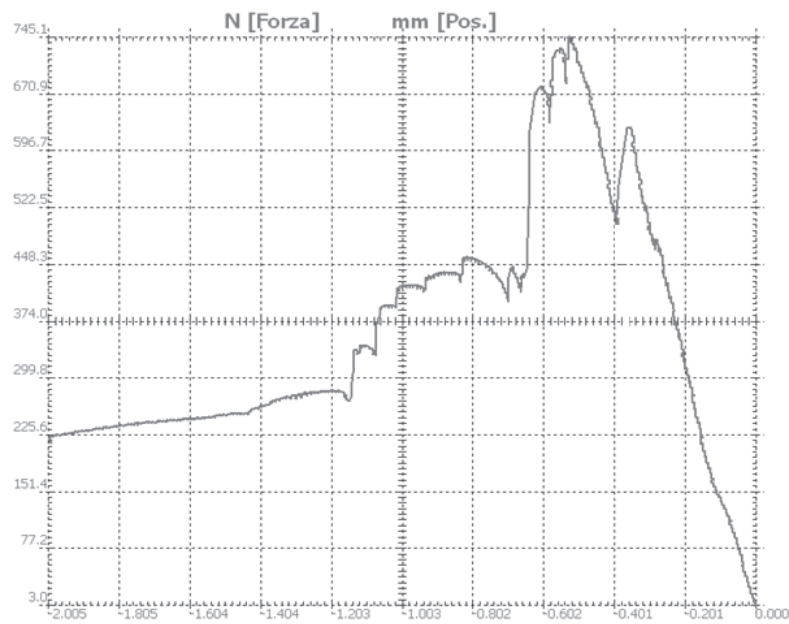


Fig. 6.6 Grafico spostamento(vericale)/forza nel test sperimentale di un provino difettoso

Si osserva dal grafico come l'andamento non sia più continuo e ben definito come quello ottenuto con un provino visivamente perfetto, ma presenti diversi punti di picco. Si è rilevato durante l'esperimento come questi picchi corrispondano a delle imbozzature localizzate (avvertite sonoramente e visivamente) che trovano l'innescio nei punti di difetto.

Il valore del carico critico si è dimostrato inferiore all'atteso fornendo un valore di carico di $P_{cr} = 745 [N]$.

Nel modello FEM con errori di spessore e materiale, si è voluto ricreare tale comportamento estendendo il difetto su tutta la superficie in maniera Random, il grafico forza spostamento è mostrato in **Fig. 6.7**.

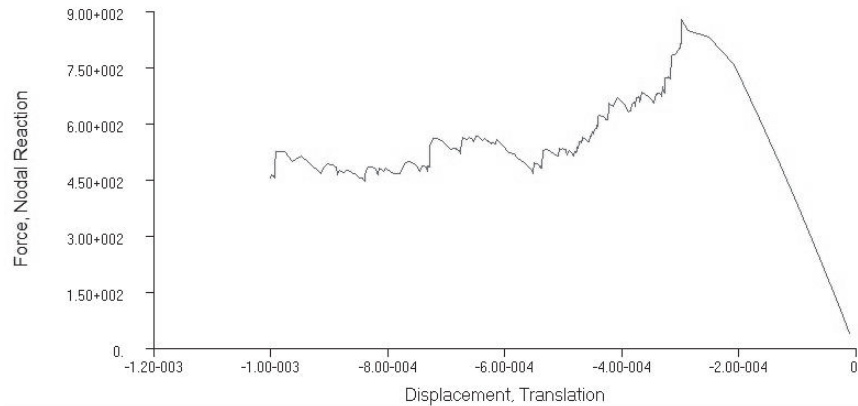


Fig. 6.7 Grafico delle forze in funzione dello spostamento nel modello FEM con difetti nel materiale e nello spessore

Anche nel modello FEM , si riscontra un calo del valore del carico rispetto al modello perfetto e, un andamento più frastagliato con un punto di *snap* non ben definito.

Anche le deformazioni risultano essere mediamente differenti con la formazione di molteplici imbozzamenti sulla superficie indotti dai difetti inseriti (**Fig. 6.8**).

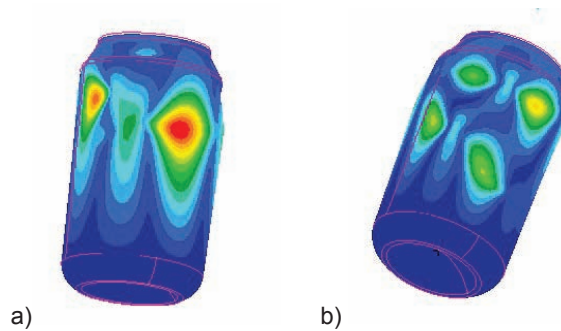


Fig. 6.8 Deformazione ottenuta nel modello con difetti nello spessore e caratteristiche del materiale disposti casualmente sulla superficie: a) Vista frontale; b) Vista del retro

Si riporta infine in **Fig 6.9** il grafico di dispersione che mostra i valori di carico critico ottenuti per le prove sperimentali effettuate con una incertezza di $\pm 5N$.

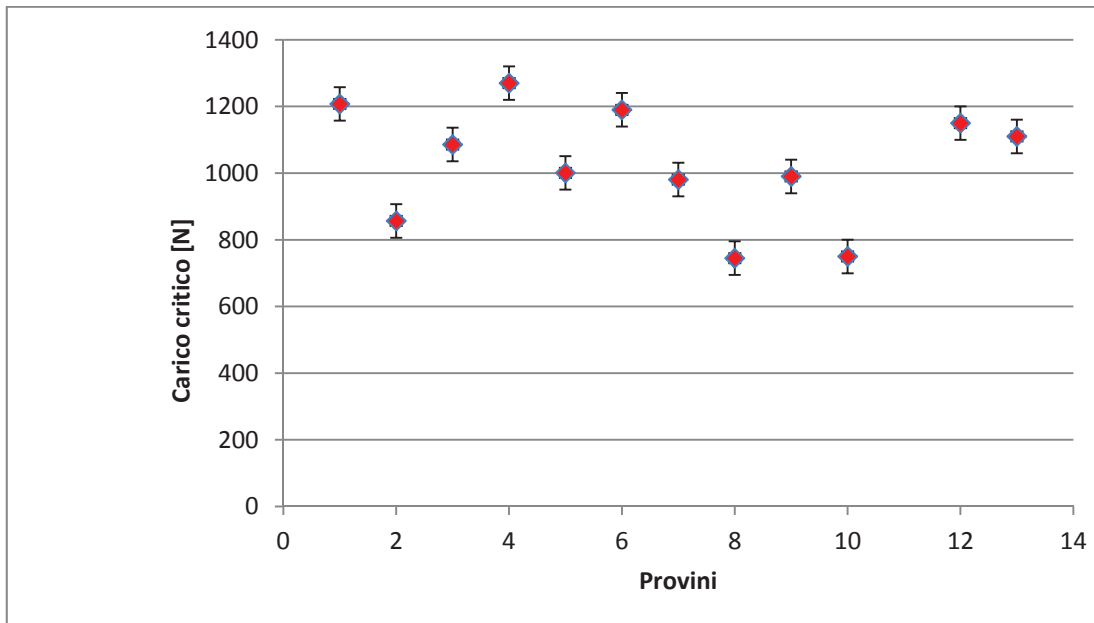


Fig. 6.9 Grafico raffigurante il valore del carico critico nei test sperimentali con un'incertezza di misura di $\pm 5N$

Dall'osservazione del grafico si evince che i dati sperimentali hanno una notevole dispersione a causa della grande quantità di difetti presenti nei campioni testati.

Per effettuare dei test più significativi sarebbe necessario analizzare un numero maggiore di provini in modo da abbattere statisticamente il valore di dispersione.

Conclusioni

In questo elaborato si è trattato il problema del fenomeno dell'instabilità in elementi strutturali.

Il fenomeno è stato analizzato nella sua forma locale riguardante strutture in parete sottile.

La tesi ha previsto inizialmente un'attività di ricerca in letteratura per lo studio delle principali teorie riguardanti il comportamento all'instabilità.

Successivamente è stata intrapresa un'attività di progettazione per poter realizzare un setup di prove sperimentali sull'instabilità secondaria per validare le teorie analizzate. E' stata inoltre effettuata un'intensa analisi numerica per simulare i test di laboratorio realizzati in modo, da poter confrontare e verificare le possibilità predittive di simulazioni FEM per l'instabilità.

L'attività di tesi è nata grazie alla possibilità di utilizzare una speciale macchina a compressione messa a disposizione presso il laboratorio di misure del Dipartimento di Ingegneria Meccanica.

Si è studiato un setup sperimentale per realizzare prove a compressione su provini in parete sottile.

Per la rilevazione dei dati sperimentali è stata necessaria la progettazione di una catena di misura adeguata, integrando i sensori già presenti nella macchina a compressione Easydur con dei trasduttori esterni quali un laser *sensor* ed un LVDT.

L'utilizzo di questi sensori ha richiesto la progettazione di adeguati supporti che ne permettessero un impiego agevole.

E' stato poi effettuato uno studio preliminare tramite analisi numeriche per selezionare la tipologia di provino in parete sottile che meglio potesse realizzare il fenomeno dell'instabilità locale con le caratteristiche di carico della macchina.

Si è così selezionata, a seguito delle analisi effettuate da Casrin Francesco nel suo elaborato di tesi, un trave a sezione rettangolare alettata ai vertici che, è sembrata il migliore compromesso tra facilità di realizzazione e visibilità del fenomeno di instabilità.

La prova sperimentale è stata poi modellizzata agli elementi finiti.

I risultati ottenuti dall'analisi numerica si sono dimostrati coerenti con la teoria. Anche in questo caso saranno necessari futuri test sperimentali per validare i risultati ottenuti dalle simulazioni Fem.

Come provino da testare per l'instabilità secondaria si è poi presa in esame una tipica lattina utilizzata in ambito alimentare per contenere bibite.

Grazie agli spessori molto ridotti, alla scarsa resistenza e alla facile reperibilità è sembrato, almeno inizialmente, un ottimo provino per la verifica del fenomeno di instabilità.

Anche in questo caso è stata svolta un'intensa simulazione numerica, ricreando il set up utilizzato poi nei test sperimentali.

Le simulazioni numeriche non sono risultate attendibili in quanto hanno sovrastimato i valori del carico critico del 36%.

Questo comportamento si pensa sia dovuto alla grande quantità di difetti presenti sulle lattine, molti dei quali visibili a occhio nudo.

Si è quindi analizzata l'influenza di difetti geometrici localizzati e caratteristici del materiale, sul valore del carico critico inserendoli nel modello ad elementi finiti.

Le analisi dei modelli numerici così modificati hanno dimostrato valori del carico di instabilità più congrui ai dati sperimentali ottenuti, sottolineando come l'inserimento di qualche difetto influenzi drasticamente sulla soluzione rendendola più attendibile.

Le lattine non essendo concepite per funzioni strutturali, si sono dimostrate ricche di imperfezioni probabilmente causate dalla tecnologia produttiva e dalle scarse proprietà dei materiali costituenti determinando una difficile ripetibilità delle prove sperimentali.

Le analisi FEM hanno comunque fornito un risultato attendibile per quanto concerne il comportamento all'instabilità registrando deformazioni di tipologia simile a quelle reali.

Il problema della scarsa ripetibilità della prova potrebbe essere risolto svolgendo un numero maggiore di prove mantenendo inalterato il setup sperimentale.

Infine è stato considerato come provino per i test un tubo in materiale composito fornito dall'azienda SITA COMPOSITI.

E' stata svolta, sulle specifiche del tubo, un'analisi numerica per determinare il carico critico che è risultato maggiore rispetto alla portata dello strumento.

Si è quindi svolto uno studio di fattibilità tramite analisi FEM per determinare intensità e tipo di difetto da inserire nel tubo in modo da abbatterne la resistenza. Si sono quindi realizzate differenti configurazioni di difetti nel tubo fino a determinare quella utile da realizzare per svolgere i test sperimentali.

In questo lavoro di tesi si sono quindi analizzate e realizzate possibili configurazioni di prove sperimentali per realizzare il fenomeno di instabilità in strutture in parete sottile sfruttabili in un futuro.

Si è valutata la grande incidenza che hanno i difetti sui valori critici di instabilità, cercando di implementarli in un modello FEM.

I risultati sperimentali ottenuti sulla lattina non sono stati soddisfacenti a causa della scarsa ripetibilità della prova ma, si è evidenziato come un'analisi FEM mirata, che consideri i difetti del provino, possa avvicinarsi alla descrizione della realtà.

Le analisi numeriche svolte, anche se non sono state sufficienti a predire in maniera accurata l'instabilità si spera possono fungere da spunto per sviluppi futuri di una modellizzazione FEM che consideri in maniera ottimale l'interazione tra i difetti e l'instabilità strutturale.

Bibliografia

Libri di testo

1. S. Timoshenko e S. Woinowsky-Krieger, *Theory of plates and shells*, McGraw-Hill, II edition, 1959
2. Hugh Lenneous Cox, *The buckling of plates and shells*, Pergamon Press, Vol. 4 of International series of monographs in aeronautics and astronautics, 1963
3. Stephen P. Timoshenko, James M. Gere, *Theory of elastic stability*, McGraw-Hill, *Engineering societies monographs*, 1963
4. Samuel Lubkin, *Buckling of a rectangular Column on the Basis of Murnaghan's Formula for Strain Energy*, New York University Courant Institute of Mathematical Sciences, 1965
5. James P. Peterson, *Nasa technical note*, National Aeronautics and space administration, Washington D.C., 1969
6. Arend Hendrik J. Hagedoorn, *An elastic finite element analysis of the buckling of eccentrically stiffened plates and shells*, Cornell University, August 1973
7. George C. Mashall, *Nasa Astronautic Structure Manual*, Aeronautics and space administration, Washington D.C., 1975
8. Don O. Brush e Bo O. Almroth, *Buckling of bars, plates and shells*, 1975
9. J. M. T. Thompson e G. W. Hunt, *Collapse: The buckling of structures in theory and practice*, Cambridge University Press, 1983
10. Julie Mark Cohen, *Local buckling behaviour of plate elements*, Cornell Univerity, August 1987
11. Gerardus Maria Van Erp, *Advanced buckling analyses of beams with arbitrary cross sections*, circa
12. J. F. Jullien, *Buckling of shell structures, on land, in the sea and in the air*, Elsevier applied science CRC Press, I edition, 1990
13. N. S. Trahair, *Flexural torsional buckling of structures*, CRC Press, 1993
14. Ronald F. Gibson, *Principles of composite material mechanics*, McGraw-Hill Series in Mechanical Engineering, 1994
15. G. J. Turvey e I. H. Marshall, *Buckling and postbuckling of composite plates*, Chapman & Hall, I edition, 1995
16. J. N. Reddy e Antonio Miravete, *Practical analysis of composite laminates*, CRC Press, 1995
17. S. J. Britvec, *Stability and optimization of flexible space structures*, Birkhäuser, 1995
18. R. C. Coates e M. G. Coutie e F. K. Kong, *Structural Analysis*, Chapman & Hall, III edition, 1997
19. J. Singer e J. Arbocz e T. Weller, *Buckling experiments: Experimental methods in buckling of thin-walled structures: Basic concepts, columns, beams and plates – Vol. 1*, John Wiley & Sons INC., 1998
20. T. Hoglund, *2301 Design of members*, EAA – European Aluminuim Association, 1999

21. Frederick Bloom e Douglas Coffin, *Handbook of thin plate buckling and postbuckling*, Chapman & Hall/CRC, 2001
22. J. Singer e J. Arbocz e T. Weller, *Buckling experiments: Experimental methods in buckling of thin-walled structures: Shells, built-up structures, composites and additional topics – Vol. 2*, John Wiley & Sons INC., 2002
23. J. Randolph Kissell e Robert L. Ferry, *Aluminium Structures: a guide to their specifications and design*, John Wiley & Sons, II edition, 2002
24. Thomas P. Sarafin e Wiley J. Larson, *Spacecraft Structures and Mechanism – From concept to Launch*, Microcosm INC. e Kluwer Academic Publishers, IV edition, 2003
25. Elio Sacco, *Argomenti di scienza delle costruzioni*, Aracne, 2004
26. M. Mukhopadhyay, *Mechanics of Composite Materials and Structures*, Universities Press, 2005
27. George J. Simitses e Dewey H. Hodges, *Fundamentals of structural stability*, Butterworth-Heinemann, I edition, 2005
28. Autar K. Kaw, *Mechanics of Composite Materials*, Taylor & Francis, II edition, 2006
29. Robert M. Jones, *Buckling of bars, plates and shells*, Bull Ridge Publishing, 2006
30. J. M. Rotter e J.G. Teng, *Buckling of thin metal shells*, Spon, 2007
31. Lars A. Samuelson e S. F. Eggwertz, *Shell stability handbook*, Taylor & Francis CRC, 2007
32. Michael F. Ashby, *La scelta dei materiali nella progettazione industriale*, Casa editrice Ambrosiana, 2007
33. Bjorn Akesson, *Plate buckling in bridges and other structures*, Taylor & Francis, 2007
34. J. N. Reddy, *Theory and analysis of elastic plates and shells*, CRC Press, 2007
35. B. G. Falzon e M. H. Aliabadi, *Buckling and postbuckling structures: experimental, analytical and numerical studies*, Imperial College press, 2008
36. C. M. Wang e C. Y. Wang e J. N. Reddy, *Exact solution for buckling of structural members*, CRC Press, 2009
37. N. S. Trahair, *Steel cantilever strength by inelastic lateral buckling*, Research report R912, ISSN 1853-2781, University of Sidney, March 2010
38. Lakshminarayana N. e Adeesha S. e Puneeth B. M., *Buckling of composites: practical approach*, LAP Lambert Academic Publishing, 2012
39. T. H. G. Megson, *Aircraft structures for engineering students*, Elsevier Aerospace Engineering series, V edition, 2013
40. Natalia I. Obodan e Olexandr G. Lebedeyev e Vasilii A. Gromov, *Nonlinear behaviour and stability of thin-walled shells*, Springer, 2013

Articoli Scientifici

41. M. Ohga, T. Hara, K. Kawaguchi, "Buckling mode shapes of thin-walled members"; in *Computers & Structures*, 54, 1995, pp.767-773
42. A. Teter, Z. Kolakowski, "Interactive buckling of thin-walled open elastic beam-columns with intermediate stiffeners", in *J. Solids Structures*, 33, 1995, pp. 315-330
43. G.J. Hancock, K.J.R. Rasmussen, "Recent research on thin-walled beam-columns"; in *Thin-Walled Structures*, 1998, pp. 3-18
44. M.A. Bradford, "Inelastic buckling of I-beams with continuous elastic tension flange restraint"; in *Journal of Constructional Steel Research*, 48, 1998, pp. 63-77
45. A. Aalberg, M. Langseth, P.K. Larsen, "Stiffened aluminium panels subject to axial compression"; in *Thin walled Structures*, 39, 2001, pp. 861-885
46. J.T. Mottram, "Determination of critical load for flange buckling in concentrically loaded pultruded columns"; in *Composites*, 35, 2004, pp. 35-47
47. A. Teter, Z. Kolakowski, "Interactive buckling and load carrying capacity of thin-walled beam-columns with intermediate stiffeners; in *Thin-Walled Structures*, 42, 2004, pp. 211-254
48. K. Magnucki, W. Szyk, P. Stasiewicz, "Stress state and elastic buckling of a thin-walled beam with monosymmetrical open cross-section"; in *Thin-Walled Structures*, 42, 2004, pp. 25-38
49. E. Eglitis, K. Kalnins, O. Ozolins, "Experimental and numerical study on buckling of axially compressed composite cylinders"; *Science Direct; 2005*
50. Tadeh Zirakian, Hossein Showkati, "Distortional buckling of castellated beams", in *Journal of Constructional Steel Research*, 62, 2006, pp. 863-871
51. P.B. Dinis, D. Camotim, N. Silvestre, "GBT formulation to analyse the buckling behavior of thin walled members with arbitrarily 'branched' open cross-section"; in *Thin-Walled Structures*, 44, 2006, pp. 20-38
52. A. Teter, "Static and dynamic interactive buckling of isotropic thin-walled closed columns with variable thickness", in *Science Direct; 2007*
53. Goutam Saha, Sajeda Banu, "Buckling load of a beam-column for different end conditions using multi-segment integration technique", in *Journal of Engineering and Applied Science*, 2, 2007
54. L. Boni, D. Fanteria, A. Lanciotti, "Comportamento Post-Buckling di Pannelli Irrigiditi in composito, realizzati con diverse tecnologie, soggetti a compressione"; in *Aeronautica Missili e spazio*, 87, 2008
55. R.E. Erkmén, M. Mohareb, "Buckling analysis of thin-walled open members – A finite element formulation"; in *Thin-Walled Structures*, 46, 2008, pp. 618-636

56. S. Avik, K. Ashwini, "Distortional buckling in braced-cantilever I-beams"; in *Thin-Walled Structures*, 46, 2008, pp. 637-645
57. Zhanf Qilin, Tang Hilin, Wu Yage, "Effective section calculation of aluminium plate assemblies under uniform compression considering interactive local buckling", in *Science Direct*, 2008
58. F. Mohri, A. Eddinari, N. Damil, M. Potier Ferry, "A beam finite element for non-linear analyses of thin walled elements"; in *Thin-Walled Structures*, 46, 2008, pp. 981-990
59. Qing Quan Liang, Brian Uy, J.Y. Richard Liew, "Nonlinear analysis of concrete-filled-thin-walled steel box columns with local buckling effects", in *Journal of Constructional Steel*
60. R. Priyadarsini, V. Kalyanaraman, S. Srinivasan, "Numerical and experimental study of buckling of advanced fibre composite cylinders under axial compression"; 2009
61. B. Dinis, D. Camotim, N. Silvestre, "T-section and cruciform thin walled members"; in *Thin-Walled Structures*, 48, 2010, pp. 786-797
62. Ma'en sari, Eric A. Butcher, "Natural frequencies and critical loads of beams and columns with damaged boundaries using Chebyshev polynomials"; in *International journal of Engigneering Science*, 48, 2010, pp. 862-873
63. D.G. Stamatelos, G:N. Labeas, K.I. Tserpes, "Analytical calculation of local buckling and post-buckling behavior of isotropic and orthotropic stiffened panels"; in *Thin-Walled Structures*, 49, 2011, pp. 422-430
64. R. Goncalves, D. Camotim, "Generalised beam theory-based finite elements for elastoplastic thin-walled metal members"; in *Thin-Walled Structures*, 49, 2011, pp. 1237-1245
65. Yong Huang, Qi-Zhi Luo, "A simple method to determine the critical buckling loads for axially inhomogeneous beams with elastic restraint"; in *Computers and Mathematics with Application*, 61, 2011, pp. 2510-2517
66. M. Casafont, F. Marimon, M. Pastor, M. Ferrer, "Linear buckling analysis of thin-walled members combining the generalized beam theory and the finite element method"; in *Computers and Structures*, 89, 2011
67. Zhiping Tang, Dan Li, "Quasi-static axial buckling of NiTi thin-walled cylindrical shells"; in *Thin-Walled Structures*, 51, 2012, pp. 130-138
68. Sàndor A'da'ny, "Global buckling of thin-walled simply supported columns: Analytical solutions based on shell model"; in *Thin-Walled Structures*, 55, 2012, pp. 64-75
69. Shi-Rong Li, Romesh C. Batra, "Relations between buckling loads of functionally graded Tomoshenko and homogeneous Euler-Bernoulli beams", in *Composite Structures*, 95, 2013, pp. 5-9
70. Casarin Francesco, "Instabilità di travi e piastre in presenza di travi eccentriche", *Università degli Studi di Padova*, 2013

