

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA CIVILE, EDILE E AMBIENTALE

Department Of Civil, Environmental and Architectural Engineering

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Civile

8 1222 • 2022
ANNI



TESI DI LAUREA MAGISTRALE

**Metodo di Decomposizione Adomia (ADM) per la
soluzione di problematiche di diffusione ed
avvezione frazionarie in spazio-tempo**

Relatore

Chiar.ma Prof.ssa Valentina Salomoni

Laureando

Antonini Alberto

Matricola 1218945

Anno Accademico 2021 - 2022

...ad Oliver, Zoe e Liv

*Se una scrivania in disordine è segno di una mente disordinata,
di cosa, allora, è segno una scrivania vuota?*

Albert Einstein

Indice

1. Funzioni speciali	5
1.1 Introduzione.....	5
1.2 Funzione Gamma di Eulero.....	5
1.2.1 Definizione	5
1.2.2 Alcune proprieta' della funzione Gamma	5
1.2.3 Rappresentazione limite della funzione Gamma.....	6
1.3 Funzione Beta di Eulero	7
1.4 Funzione di Mittag-Leffler.....	7
1.4.1 Definizione e relazione con alcune altre funzioni.....	8
1.4.2 Derivazione della funzione di Mittag-Leffler.....	10
1.4.3 Integrazione della funzione di Mittag-Leffler	10
1.4.4 Funzione di Mittag-Leffler Generalizzata a tre parametri.....	11
1.5 Funzioni di Wright.....	12
1.6 La H-funzione di Fox.....	12
1.6.1 Formule di riduzione	17
2. Derivate ed Integrali frazionari	19
2.1 Introduzione.....	19
2.2 Derivata frazionaria di Grunwald-Letnikov	19
2.2.1 Unificazione della teoria per derivate ed integrali ad ordine intero	19
2.2.2 Integrazione di ordine arbitrario.....	23
2.2.3 Derivazione di ordine arbitrario	23
2.2.4 Derivata frazionaria di $(t - a)^{\nu}$	24
2.2.5 Composizione con derivate di ordine intero	25
2.2.6 Composizione con derivate frazionarie	26
2.3 Derivata frazionaria di Riemann-Liouville.....	28
2.3.1 Unificazione della teoria per derivate ed integrali ad ordine intero	28
2.3.2 Integrazione di ordine arbitrario.....	29
2.3.3 Derivazione di ordine arbitrario	29
2.3.4 Derivata frazionaria di $(t - a)^{\nu}$	30
2.3.5 Composizione con derivate di ordine intero	31
2.3.6 Composizione con derivate frazionarie	31
2.3.7 Link con la derivata di Grunwald-Letnikov	32
2.4 Altri approcci	33
2.4.1 Derivata frazionaria di Caputo.....	33
2.4.2 Generalized Functions Approach (GFA)	36
2.5 Derivate sequenziali.....	38
2.6 Proprieta' delle derivate frazionarie.....	39

2.6.1	Linearita'	39
2.6.2	Regola di Leibniz per derivate frazionarie	39
3.	Diffusivita' anomala: Continuous Time Random Walk	41
3.1	Introduzione.....	41
3.2	Da CTRW a FRDE	43
3.2.1	Introduzione	43
3.2.2	Moto Browiano.....	43
3.2.3	CTRW per FRDE	44
3.2.4	Ritorno al moto Browniano	46
3.2.5	Lunghe pause: FRDE per subdiffusione	47
3.2.6	Lunghi salti: Voli di Levy	50
3.2.7	Lunghe pause e lunghi salti.....	54
3.3	Fractional Advection-Diffusion Equations (FRADE).....	55
3.3.1	Introduzione	55
3.3.2	Trasformazione di Galileo per FRADE	55
3.3.3	Variante di Galileo per FRADE.....	57
3.3.4	Approccio alternativo per i voli di Levy.....	58
3.3.5	Equazione frazionaria di Fokker Plank.....	58
3.3.6	Equazione di Fokker Plank frazionaria.....	59
3.3.7	Derivazione della FFPE con CTRW	60
3.3.8	FFPE per voli di Levy	61
4.	Trasporto di soluto in mezzo poroso deformabile	63
4.1	Introduzione.....	63
4.2	Formulazione matematica.....	65
4.2.1	Equazioni costitutive e di bilancio per la matrice solida	65
4.2.2	Equazioni costitutive e di bilancio per il fluido	66
4.2.3	Equazioni di bilancio per il trasporto di soluto	66
4.2.4	Equazioni di bilancio per diffusione acquosa anomala	68
4.2.5	Consolidazione monodimensionale con equazioni di diffusione ed avvezione frazionarie in spazio	68
5.	Adomian Decomposition Method	73
5.1	Introduzione.....	73
5.2	ADM – Descrizione del metodo	73
5.3	ADM – Equazioni Differenziali Ordinarie.....	75
5.4	ADM – Equazioni Differenziali a derivate Parziali	76
5.5	ADM – Equazioni Differenziali Frazionarie.....	78
5.6	Vantaggi e svantaggi di ADM.....	80
5.7	Modifiche ad ADM	80
6.	ADM per Standard DE	83

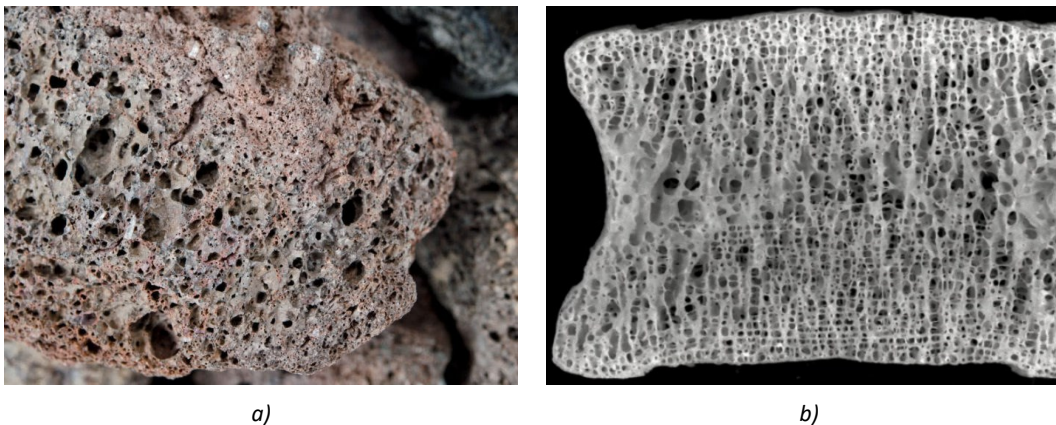
6.1	Introduzione.....	83
6.2	ADM - DE.....	83
6.3	Coefficiente di diffusione costante - $K = cost$	85
6.3.1	DE con condizioni iniziali $u(x, 0) = x^3$	85
6.3.2	DE con condizioni iniziali $u(x, 0) = \sin(x)$	87
6.3.3	DE con condizioni iniziali $u(x, 0) = \cos(x)$	90
6.3.4	DE con condizioni iniziali $u(x, 0) = e^{ax}$ $Re(a) \geq 0$	93
7.	ADM per Diffusione Anomala: S-FRDE ed i voli di Lèvy	97
7.1	Introduzione.....	97
7.2	ADM – S-FRDE.....	97
7.3	Coefficiente di diffusione costante - $K = cost$	100
7.3.1	S-FRADE con condizioni iniziali $u(x, 0) = x^\alpha$	100
7.3.2	S-FRADE con condizioni iniziali $u(x, 0) = \sin(x)$	111
7.3.3	S-FRADE con condizioni iniziali $u(x, 0) = \cos(x)$	114
7.3.4	S-FRADE con condizioni iniziali $u(x, 0) = e^{ax}$ $Re(a) \geq 0$	117
7.4	Coefficiente di diffusione - $K = K(t)$	120
7.4.1	$K = K(t) = t^\beta$	120
7.4.2	$K = K(t) = e^t$	129
7.4.3	$K = K(t) = \sin(t)$	144
7.4.4	$K = K(t) = \cos(t)$	160
7.4.5	$K = K(t) = \sinh(t)$	170
7.4.6	$K = K(t) = \cosh(t)$	186
8.	ADM per Diffusione Anomala: T-FRDE e fractal-TRW	197
8.1	Introduzione.....	197
8.2	Coefficiente di diffusione costante - $K = cost$	197
8.2.1	T-FRDE con condizioni iniziali $u(x, 0) = x^\alpha$	199
8.2.2	T-FRDE con condizioni iniziali $u(x, 0) = e^{ax}$	202
8.2.3	T-FRDE con condizioni iniziali $u(x, 0) = \sin(x)$	204
8.2.4	T-FRDE con condizioni iniziali $u(x, 0) = \cos(x)$	206
9.	ADM per Diffusione-Avvezione: Standard ADE	209
9.1	Introduzione.....	209
9.2	Standard ADE.....	209
9.2.1	ADE con condizioni iniziali $u(x, 0) = x^3$	212
9.2.2	ADE con condizioni iniziali $u(x, 0) = \sin(x)$	213
9.2.3	ADE con condizioni iniziali $u(x, 0) = \cos(x)$	214
9.2.4	ADE con condizioni iniziali $u(x, 0) = e^{ax}$	215
10.	ADM per Diffusione-Avvezione: ST-FRADE Lèvy fractal-TRW	217
10.1	Introduzione.....	217
10.2	ST-FRADE $\mu = cost$	217

10.2.1	S-FRADE	221
10.2.2	T-FRADE.....	238
10.3	ST - FRADE, $V = V(t) = g(t), D = D(t) = g(t)$	250
10.3.1	$V = D = g(t) = t^\omega$	253
10.3.2	$V = D = g(t) = \cos(t)$	274
10.3.3	$V = D = g(t) = \sin(t)$	295
10.3.4	$V = D = g(t) = \sinh(t)$	317
10.3.5	$V = D = g(t) = \cosh(t)$	339
10.3.6	$V = D = g(t) = e^t$	360
10.4	ST - FRADE, $V = V(t) = h(t), D = D(t) = g(t)$	382
10.4.1	$V = h(t) = \sin t, D = g(t) = \cosh(t)$	388

Introduzione

Motivazione e scopo della tesi

Lo studio del comportamento dei mezzi porosi, ed in particolare dei geomateriali, è da sempre oggetto di attenzione da parte della comunità scientifica, non solo di formazione geotecnica, ma anche da studiosi provenienti da altri settori della meccanica dei continui. Con il termine geomateriali si identificano tutti i materiali porosi di formazione geologica caratterizzati dalla presenza di una o più fasi come terreni, rocce e conglomerati cementizi. Essi sono caratterizzati da una risposta fortemente non lineare dovuta al loro comportamento meccanico. Anche la presenza di una o più fasi all'interno del solido gioca un ruolo fondamentale portando ad una modifica della risposta strutturale nel tempo. La porosità può essere individuata a differenti livelli di osservazione, variando dalla scala macroscopica di rocce ed altri materiali granulari con pori anche di notevoli dimensioni, sino a scala microscopica, mesoscopica od addirittura nanoscopica tipicamente riscontrabile nei materiali metallici, ceramici, vetrosi o strutture biologiche.



Diverse tipologie di strutture porose. a) struttura porosa di rocce. Si noti la dimensione consistente dei pori visibili anche a scala macroscopica. b) matrice porosa di un osso. Per poter cogliere la porosità della struttura ossea è bene effettuare analisi in mesoscala o microscala.

Lo scopo del presente lavoro di tesi non è quello di sviluppare un modello meccanico del mezzo poroso, bensì l'analisi di come altri fenomeni esterni di fondamentale importanza nelle applicazioni ingegneristiche, tra cui diffusione e trasporto, si dipanano nella matrice porosa e del modo con cui le non linearità accennate poche righe fa modificano sostanzialmente tali processi. Particolare attenzione verrà posta sul trasporto di soluto all'interno di mezzo poroso deformabile saturo multifase che, tradizionalmente, viene considerato isotropo con legge di flusso, di conseguenza, aderente alla legge di Fick. Tuttavia, i mezzi porosi, specialmente quelli naturali come i suoli, sono raramente isotropi e, quindi, una rivisitazione della legge di flusso è necessaria per cogliere il reale comportamento del mezzo. Il tassello mancante atto a tale generalizzazione è il calcolo frazionario che è un importante strumento matematico ampiamente utilizzato nell'ambito delle scienze applicate

grazie anche al fatto che equazioni differenziali frazionarie stanno divenendo oramai l'unica metodologia da utilizzare per una fedele descrizione della realtà. Il progresso scientifico e la sempre maggior necessità di accuratezza nelle trattazioni scientifiche spingono i ricercatori all'utilizzo di tecniche all'avanguardia che, nella maggior parte dei casi, richiedono un elevato impegno sia matematico che fisico per la modellazione del fenomeno considerato.

Nell'ambito del presente elaborato di tesi, la teoria della differenziazione frazionaria è utilizzata per modellare fenomeni dispersivi e diffusivi che si presentano quando il mezzo poroso non è più isotropo. Operativamente è molto semplice convertire la classica formulazione di diffusione ed avvezione ad ordini interi ad ordini di derivazione frazionari; basta infatti, sostituire tutti gli operatori differenziali interi nei rispettivi frazionari agendo sull'ordine di derivazione. Non con la stessa facilità è possibile individuare soluzioni analitiche delle equazioni frazionarie ottenute, specialmente quando si includono funzioni sorgente, generalmente considerate quando si tratta di problematiche di trasporto di soluto in falda, oppure non linearità connesse alla natura dei coefficienti di avvezione e diffusione i quali, per diverse ragioni, possono essere funzioni dello spazio-tempo rendendo talvolta impossibile l'ottenimento della soluzione cercata.

Diversi metodi numerici sono stati implementati senza, tuttavia, ottenere il successo atteso a causa della proprietà di non località degli operatori differenziali, spingendo sempre più i ricercatori verso nuovi metodi di risoluzione. Tra quelli di maggior riscontro si ritrovano i metodi semi-analitici che consentono di eliminare problematiche numeriche senza necessità di discretizzazione e linearizzazione.

Nella trattazione proposta verrà utilizzato il metodo di decomposizione Adomia per ottenere soluzioni approssimate di equazioni differenziali a derivate parziali frazionarie in spazio-tempo di avvezione-diffusione con coefficienti funzioni scalari dipendenti dalle variabili spaziali e temporali. Per semplicità di trattazione, la totalità delle equazioni considerate saranno sviluppate in ambito monodimensionale.

Organizzazione della tesi

Per una migliore consultazione del lavoro, la tesi è organizzata secondo la seguente struttura. La prima parte, consistente nei due capitoli iniziali, ha lo scopo di richiamare i risultati più significativi della teoria del calcolo frazionario, evidenziando le proprietà di maggior interesse per le applicazioni successive. In particolare, il capitolo 1 è dedicato allo studio delle funzioni speciali che rivestono un ruolo fondamentale per una adeguata formalizzazione dell'analisi frazionaria ponendo l'attenzione su quelle riscontrabili nella trattazione fisica dei processi frazionari, tra cui funzione Gamma di Eulero, funzione di Mittag-Leffler e funzione H di Fox.

Una delle maggiori difficoltà quando ci si avvicina per la prima volta al calcolo frazionario è la moltitudine di operatori frazionari che si traduce in una enorme difficoltà di scelta della trattazione adeguata alla descrizione di un determinato problema. Mentre gli operatori differenziali ad ordine intero sono definiti in modo univoco tramite il limite del rapporto incrementale, non vale lo stesso per la teoria

frazionaria, che gode di una grande varietà fra cui scegliere. Nel capitolo 2, infatti, si entra nel vivo dell'analisi differenziale ed integrale frazionaria e vengono definite le principali tipologie degli operatori differenziali con le rispettive proprietà e campi di applicazione. È bene ribadire fin da ora che non esiste una trattazione giusta o sbagliata quando si approccia al frazionario, l'importante è che sia sempre specificato il tipo di derivata od integrale frazionario considerato. Tra le trattazioni di maggior interesse applicativo si ricordano la derivata di Grunwald-Letnikov, Riemann-Liouville e Caputo.

Per comprendere al meglio il significato dell'operatore frazionario, al capitolo 3 viene presentato l'approccio stocastico ai problemi diffusivi secondo il quale ordini di derivazione frazionari per operatori spaziali si riferiscono a lunghi salti nella passeggiata causale stocastica della particella affetta da diffusione, mentre l'approccio frazionario sugli operatori temporali si concretizza in tempi di attesa variabili fra un salto ed un altro nel dominio di interesse. I primi fanno riferimento a distribuzioni di probabilità di Lévy, in comparazione all'andamento esponenziale gaussiano dei processi standard diffusivi Browniani, i secondi invece, sono responsabili della struttura frattale del processo, in quanto si generano delle "isole" dette "cluster" fra uno volo di Lévy ed il successivo.

L'analisi stocastica fornisce il quadro matematico di riferimento per la descrizione dei processi diffusivi e di trasporto nei mezzi porosi; tuttavia, ulteriori generalizzazioni possono essere possibili, in particolare agendo sulle leggi di bilancio e legami costitutivi delle differenti fasi del mezzo poroso in esame. Facendo riferimento alla recente pubblicazione di Salomoni e De Marchi [1], processi diffusivi frazionari sono descritti nell'ambito delle grandi deformazioni della matrice solida e ripresi nel capitolo 4. Considerare tale risposta non lineare per geometria conduce ad una maggior complessità del processo in quanto parametri meccanici del mezzo, tra cui permeabilità e coefficiente di diffusione, divengono funzioni del processo deformativo in atto. Tali risultati costituiscono il punto di partenza del presente lavoro di tesi, avendo infatti, considerato dipendenza temporale dei coefficienti di diffusione ed avvezione nei problemi differenziali considerati.

Nel capitolo 5 viene descritto il metodo di decomposizione Adomia (ADM), principale strumento utilizzato nella risoluzione delle equazioni differenziali scelte. Vantaggi e svantaggi del metodo sono presentati assieme ad una trattazione matematica esaustiva della procedura necessaria all'ottenimento della soluzione approssimata tramite serie infinita.

Successivamente si presentano schemi risolutivi ADM di vari processi diffusivi e di avvezione-diffusione. In primo luogo, al capitolo 6, vengono analizzate soluzioni per equazioni di diffusione standard (DE) e successivamente ad ordine frazionario in spazio e tempo (S-FRDE, T-FRDE), rispettivamente al capitolo 7 ed 8, con coefficiente diffusivo K costante per poi introdurre una dipendenza temporale del tipo $K = K(t)$. Il capitolo 10 è adibito a soluzioni ADM per processi di avvezione e diffusione standard (ADE), o frazionari in spazio-tempo (ST-FRADE) con coefficienti di avvezione e diffusione costanti oppure funzioni temporali.

Capitolo 1

Funzioni speciali

1.1 Introduzione

Nel seguente capitolo si riporta un breve cenno riguardante le funzioni speciali comunemente utilizzate nell'ambito del calcolo frazionario e soluzione di equazioni differenziali frazionarie. Verranno fornite informazioni sulla funzione Gamma di Eulero e funzioni beta, funzioni di Mittag-Leffler, funzioni di Wright e funzioni di Fox, che ricoprono un ruolo di fondamentale importanza nella teoria della differenziazione di ordine arbitrario.

Per la trattazione seguente si riporta fedelmente quanto enunciato in ([2]) e ([3]), capisaldi del calcolo frazionario ed equazioni differenziali a derivate parziali frazionarie.

1.2 Funzione Gamma di Eulero

Senza dubbio, una delle funzioni base del calcolo frazionario è la funzione Gamma di Eulero $\Gamma(z)$, che generalizza il concetto di fattoriale $n!$ ammettendo ad n di assumere valori non interi, od addirittura, complessi.

1.2.1 Definizione

La funzione Gamma $\Gamma(z)$ è definita dal seguente integrale

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt \quad (1.1)$$

che converge nella porzione destra del piano complesso caratterizzato da $Re(z) > 0$. Infatti, si ottiene

$$\begin{aligned} \Gamma(x + iy) &= \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x+iy-1} dt = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} e^{iy \log(t)} dt \\ &= \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} [\cos(y \log(t)) + i \sin(y \log(t))] dt \end{aligned} \quad (1.2)$$

L'espressione nella parentesi quadrata in (1.2) è limitata per ogni t ; la convergenza ad infinito è garantita da e^{-t} , e per la convergenza a $t = 0$ si deve imporre $x = Re(z) > 1$.

1.2.2 Alcune proprietà della funzione Gamma

Una delle proprietà basilari, ma anche una tra quelle di maggior rilievo ed utilità di impiego, è la seguente relazione funzionale

$$\Gamma(z + 1) = z\Gamma(z) \quad (1.3)$$

che può essere facilmente ricavata tramite integrazione per parti come nel seguito riportato

$$\Gamma(z + 1) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^z dt = -e^{-t} t^z \Big|_0^{\infty} + z \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt = z\Gamma(z)$$

Ovviamente $\Gamma(1) = 0! = 1$, ed usando la (1.3) per $z = 1, 2, 3, \dots$ si ottiene

$$\Gamma(2) = 1 \cdot \Gamma(1) = 1 = 1!$$

$$\Gamma(3) = 2 \cdot \Gamma(2) = 2 \cdot 1! = 2!$$

$$\Gamma(4) = 3 \cdot \Gamma(3) = 3 \cdot 2! = 3!$$

...

$$\Gamma(n + 1) = n \cdot \Gamma(n) = n \cdot (n - 1)! = n!$$

1.2.3 Rappresentazione limite della funzione Gamma

La funzione Gamma di Eulero può essere rappresentata anche attraverso il seguente limite

$$\Gamma(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! n^z}{z(z + 1) \cdots (z + n)} \quad (1.4)$$

dove si suppone in primo luogo $Re(z) > 0$. Per dimostrare la (1.4) si considera la seguente funzione ausiliaria

$$f_n(z) = \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{z-1} dt \quad (1.5)$$

utilizzando la sostituzione $\tau = t/n$ ed integrando per parti, si ottiene

$$\begin{aligned} f_n(z) &= n^z \int_0^1 (1 - \tau)^n \tau^{z-1} d\tau = \frac{n^z}{z} n \int_0^1 (1 - \tau)^{n-1} \tau^z d\tau \\ &= \frac{n! n^z}{z(z + 1) \cdots (z + n - 1)} \int_0^1 \tau^{z+n-1} d\tau \\ &= \frac{n! n^z}{z(z + 1) \cdots (z + n - 1)(z + n)} \end{aligned} \quad (1.6)$$

Tenendo in considerazione il ben noto limite notevole

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n = e^{-t}$$

si ottiene

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{z-1} dt = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt = \Gamma(z) \quad (1.7)$$

che conclude la dimostrazione.

1.3 Funzione Beta di Eulero

In molti casi è più conveniente utilizzare la funzione Beta di Eulero piuttosto che una combinazione di valori della Gamma di Eulero, in modo da snellire la scrittura o per facilitazioni algebriche. La funzione Beta è definita tramite il seguente integrale

$$B(z, \omega) = \int_0^1 \tau^{z-1} (1 - \tau)^{\omega-1} d\tau, \quad \operatorname{Re}(z) > 0 \quad \operatorname{Re}(\omega) > 0 \quad (1.8)$$

Per stabilire una relazione fra la funzione Beta e Gamma si utilizza la trasformata di Laplace. Si considera in primo luogo il seguente integrale

$$h_{z,\omega}(t) = \int_0^t \tau^{z-1} (1 - \tau)^{\omega-1} d\tau, \quad (1.9)$$

$h_{z,\omega}(t)$ si presenta nella forma di prodotto di convoluzione fra t^{z-1} e $t^{\omega-1}$ e $h_{z,\omega}(1) = B(z, \omega)$. Ricordando la proprietà della trasformata di Laplace del prodotto di convoluzione che sancisce che la trasformata della convoluzione di due funzioni è uguale al prodotto delle loro trasformate di Laplace, si ottiene la seguente

$$H_{z,\omega}(s) = \frac{\Gamma(z)}{s^z} \cdot \frac{\Gamma(\omega)}{s^\omega} = \frac{\Gamma(z)\Gamma(\omega)}{s^{z+\omega}} \quad (1.10)$$

dove $H_{z,\omega}(s)$ è la trasformata di $h_{z,\omega}(t)$.

È possibile anti-trasformare $H_{z,\omega}(s)$ tenendo conto che $\Gamma(z)\Gamma(\omega)$ è una costante ottenendo

$$h_{z,\omega}(t) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(\omega)}{\Gamma(z + \omega)} t^{z+\omega-1} \quad (1.11)$$

e ponendo $t = 1$ si ottiene l'espressione per la funzione Beta cercata

$$B(z, \omega) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(\omega)}{\Gamma(z + \omega)} \quad (1.12)$$

dalla quale si deduce anche la seguente simmetria

$$B(z, \omega) = B(\omega, z) \quad (1.13)$$

È importante evidenziare che la definizione (1.8) di funzione Beta è valida solo per $\operatorname{Re}(z) > 0, \operatorname{Re}(\omega) > 0$. La relazione (1.12) appena ricavata può essere intesa come una naturale estensione a tutto il piano complesso.

1.4 Funzione di Mittag-Leffler

La funzione di Mittag-Leffler, a differenza della Gamma e Beta di Eulero, è fornita in forma di serie infinita di funzioni potenza del tipo

$$E_{\alpha}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)} \quad (1.14)$$

Tale funzione è stata introdotta da G.M. Mittag-Leffler [4] e studiata da A. Wiman [5]. Una prima generalizzazione alla funzione di Mittag-Leffler a due parametri, che gioca un ruolo fondamentale nel calcolo frazionario, è stata introdotta da Agarwal [6], che attraverso la tecnica della trasformata di Laplace dedusse molte delle proprietà di tale funzione, che sarebbe dovuta essere chiamata funzione di Agarwal ma quest'ultimo, generosamente, lasciò la stessa denominazione utilizzata per la funzione di Mittag-Leffler ad un parametro.

1.4.1 Definizione e relazione con alcune altre funzioni

La funzione di Mittag-Leffler a due parametri è definita dalla seguente espansione in serie

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)} \quad \alpha, \beta > 0 \quad (1.15)$$

Segue dalla definizione

$$E_{1,1}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = e^z \quad (1.16)$$

$$E_{1,2}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+2)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{(k+1)!} = \frac{1}{z} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{k+1}}{(k+1)!} = \frac{e^z - 1}{z} \quad (1.17)$$

$$E_{1,3}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+3)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{(k+2)!} = \frac{1}{z^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{k+2}}{(k+2)!} = \frac{e^z - z - 1}{z^2} \quad (1.18)$$

Ed in generale

$$E_{1,m}(z) = \frac{1}{z^{m-1}} \left\{ e^z - \sum_{k=0}^{m-2} \frac{z^k}{k!} \right\} \quad (1.19)$$

Le funzioni seno e coseno iperbolico sono casi particolari

$$E_{2,1}(z^2) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{\Gamma(2k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{(2k)!} = \cosh(z) \quad (1.20)$$

$$E_{2,2}(z^2) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{\Gamma(2k+2)} = \frac{1}{z} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} = \frac{\sinh(z)}{z} \quad (1.21)$$

Inoltre si può ricavare la seguente

$$E_{\frac{1}{2},1}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma\left(\frac{k}{2} + 1\right)} = e^{z^2} \operatorname{erfc}(-z) \quad (1.22)$$

dove $\operatorname{erfc}(z)$ è la funzione errore complementare.

$$\operatorname{erfc}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_z^{\infty} e^{-t^2} dt \quad (1.23)$$

Per $\alpha = 1$ si ritrova la funzione di Mittag-Leffler ad un parametro

$$E_{\alpha,1}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)} \equiv E_{\alpha}(z) \quad (1.24)$$

Tramite la funzione di Mittag-Leffler a due parametri possono essere studiate funzioni meno comuni, tra cui la funzione $\mathcal{E}_t(\nu, a)$, introdotta per la risoluzione di equazioni differenziali a derivate parziali frazionarie con ordine razionale

$$\mathcal{E}_t(\nu, a) = t^{\nu} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(at)^k}{\Gamma(\nu + k + 1)} = t^{\nu} E_{1,\nu+1}(at) \quad (1.25)$$

E la funzione di Yu. N. Rabotnov

$$\mathfrak{E}_{\alpha}(\beta, t) = t^{\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\beta^k t^{k(\alpha+1)}}{\Gamma((k+1)(1+\alpha))} = t^{\alpha} E_{\alpha+1,\alpha+1}(\beta t^{\alpha+1}) \quad (1.26)$$

Plotnikov e Tseytlin usarono nelle loro ricerche due funzioni particolari, $Se_{\alpha}(z)$ e $Cs_{\alpha}(z)$ definendole seno e coseno frazionario. Queste funzioni sono un caso particolare della funzione di Mittag-Leffler a due parametri come di seguito riportato

$$Se_{\alpha}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{(2-\alpha)n+1}}{\Gamma((2-\alpha)n+2)} = z E_{2-\alpha,2}(-z^{2-\alpha}) \quad (1.27)$$

$$Cs_{\alpha}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{(2-\alpha)n}}{\Gamma((2-\alpha)n+1)} = E_{2-\alpha,1}(-z^{2-\alpha}) \quad (1.28)$$

Una ulteriore “frazionalizzazione” della funzione seno e coseno esprimibile tramite la funzione di Mittag-Leffler è stata suggerita da Luchko e Srivastava [7]

$$\sin_{\lambda,\mu}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k+1}}{\Gamma(2\mu k + 2\mu - \lambda + 1)} = z E_{2\mu,2\mu-\lambda+1}(-z^2) \quad (1.29)$$

$$\cos_{\lambda,\mu}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k}}{\Gamma(2\mu k + \mu - \lambda + 1)} = E_{2\mu,\mu-\lambda+1}(-z^2) \quad (1.30)$$

1.4.2 Derivazione della funzione di Mittag-Leffler

Si vuole calcolare la seguente derivata

$$\left(\frac{d}{dt}\right)^m (t^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}(t^\alpha)) = t^{\beta-m-1} E_{\alpha,\beta-m}(t^\alpha) \quad (1.31)$$

Ponendo la sostituzione $\alpha = m/n$, dove $m, n \in \mathbb{N}$, si ottiene

$$\left(\frac{d}{dt}\right)^m (t^{\beta-1} E_{\frac{m}{n},\beta}(t^{\frac{m}{n}})) = t^{\beta-1} E_{\frac{m}{n},\beta}(t^{\frac{m}{n}}) + t^{\beta-1} \sum_{k=1}^n \frac{t^{-\frac{m}{n}k}}{\Gamma(\beta - \frac{m}{n}k)} \quad (1.32)$$

Ponendo $n = 1$ ed utilizzando la seguente ben nota proprietà della funzione Gamma di Eulero

$$\frac{1}{\Gamma(-\nu)} = 0 \quad \nu = 0, 1, 2, \dots \quad (1.33)$$

si ottiene

$$\left(\frac{d}{dt}\right)^m (t^{\beta-1} E_{m,\beta}(t^m)) = t^{\beta-1} E_{m,\beta}(t^m) \quad \begin{array}{l} m = 1, 2, 3, \dots \\ \beta = 0, 1, 2, \dots, m \end{array} \quad (1.34)$$

Ed utilizzando la sostituzione $t = z^{n/m}$ in (1.32) si ottiene

$$\begin{aligned} \left(\frac{m}{n} z^{1-\frac{n}{m}} \frac{d}{dz}\right)^m (z^{(\beta-1)\frac{n}{m}} E_{\frac{m}{n},\beta}(z)) \\ = z^{(\beta-1)\frac{n}{m}} E_{\frac{m}{n},\beta}(z) + z^{(\beta-1)\frac{n}{m}} \sum_{k=1}^n \frac{z^{-k}}{\Gamma(\beta - \frac{m}{n}k)} \end{aligned} \quad (1.35)$$

Ponendo $m = 1$ in (1.35) si deduce

$$\frac{1}{n} \frac{d}{dz} (z^{(\beta-1)n} E_{\frac{1}{n},\beta}(z)) = z^{\beta n-1} E_{\frac{1}{n},\beta}(z) + z^{\beta n-1} \sum_{k=1}^n \frac{z^{-k}}{\Gamma(\beta - \frac{k}{n})} \quad (1.36)$$

1.4.3 Integrazione della funzione di Mittag-Leffler

Integrando la (1.15) componente per componente, si ottiene

$$\int_0^z E_{\alpha,\beta}(\lambda t^\alpha) t^{\beta-1} dt = z^\beta E_{\alpha,\beta+1}(\lambda z^\alpha) \quad (1.37)$$

Tale relazione è un caso particolare della relazione più generale riportata qui sotto, ottenuta dall'integrazione frazionaria componente per componente della serie (1.15)

$$\frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_0^z (z-t)^{\nu-1} E_{\alpha,\beta}(\lambda t^\alpha) t^{\beta-1} dt = z^{\beta+\nu-1} E_{\alpha,\beta+\nu}(\lambda z^\alpha) \quad \beta, \nu > 0 \quad (1.38)$$

Alcuni esempi sono riportati di seguito

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^z (z-t)^{\alpha-1} e^{\lambda t} dt = z^\alpha E_{1,\alpha+1}(\lambda z) \quad \alpha > 0 \quad (1.39)$$

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^z (z-t)^{\alpha-1} \cosh(\sqrt{\lambda} t) dt = z^\alpha E_{2,\alpha+1}(\lambda z^2) \quad \alpha > 0 \quad (1.40)$$

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^z (z-t)^{\alpha-1} \frac{\sinh(\sqrt{\lambda} t)}{\sqrt{\lambda} t} dt = z^{\alpha+1} E_{2,\alpha+2}(\lambda z^2) \quad \alpha > 0 \quad (1.41)$$

Si può dedurre, inoltre, la seguente formula generale per l'integrazione della funzione di Mittag-Leffler

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^z (z-t)^{\alpha-1} E_{2\alpha,\beta}(t^{2\alpha}) t^{\beta-1} dt \\ = -z^{\beta-1} E_{2\alpha,\beta}(z^{2\alpha}) + z^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}(z^\alpha) \end{aligned} \quad (1.42)$$

1.4.4 Funzione di Mittag-Leffler Generalizzata a tre parametri

Una naturale generalizzazione a tre parametri della funzione di Mittag-Leffler studiata ai paragrafi precedenti è fornita dall'espressione

$$E_{\alpha,\beta}^\gamma(z) = \frac{1}{\Gamma(\gamma)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\gamma+k)}{\Gamma(k+1)} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)} \quad (1.43)$$

Tale funzione è stata introdotta da Pabhakar [8] e le sue proprietà sono state studiate da Kilbas [9]. Assumendo $\gamma = 1$, si ritrova la funzione di Mittag-Leffler a due parametri

$$E_{\alpha,\beta}^1(z) = \frac{1}{\Gamma(1)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(1+k)}{\Gamma(k+1)} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)} = E_{\alpha,\beta}(z) \quad (1.44)$$

Per $\alpha = 1$ si ricava una connessione con la funzione Ipergeometrica confluyente di Kummer ${}_1F_1(\gamma; \beta; z)$, definita come segue

$${}_1F_1(\gamma; \beta; z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\gamma+k)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\gamma)\Gamma(\beta+k)} \frac{z^k}{\Gamma(k+1)} = \Gamma(\beta) E_{1,\beta}^\gamma(z) \quad (1.45)$$

1.5 Funzioni di Wright

La funzione di Wright, denominata anche funzione di Fox-Wright, $W(z; \alpha, \beta)$ è definita come

$$W(z; \alpha, \beta) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k! \Gamma(\alpha k + \beta)} \quad z, \alpha, \beta \in \mathbb{C} \quad (1.46)$$

Questa funzione venne definita dal matematico britannico Edward Maitland Wright che la introdusse per la prima volta in [10] ed investigò il suo comportamento asintotico all'infinito. Solo recentemente si è riscoperta la sua utilità nello studio delle equazioni differenziali a derivate parziali frazionarie. Se $\alpha > -1$, la serie risulta assolutamente convergente per tutti gli $z \in \mathbb{C}$. Quando, ad esempio, si ha $\alpha = 0$ e $\beta = 1$, si ottiene

$$W(z; 0, 1) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k! \Gamma(1)} = e^z \quad (1.47)$$

Quando, invece, $\alpha = 1$ e $\beta = \nu + 1$, la funzione di Wright può essere espressa in termini delle funzioni di Bessel $J_\nu(z)$ e $I_\nu(z)$.

$$W\left(1; \nu + 1, -\frac{z^2}{4}\right) = \left(\frac{2}{z}\right)^\nu J_\nu(z) \quad (1.48)$$

$$W\left(1; \nu + 1, \frac{z^2}{4}\right) = \left(\frac{2}{z}\right)^\nu I_\nu(z) \quad (1.49)$$

1.6 La H-funzione di Fox

La H-funzione di Fox, comunemente denominata funzione di Fox, H-funzione, funzione generalizzata di Mellin-Barnes o G-funzione generalizzata di Meijer, è stata introdotta nel 1961 da Charles Fox. Riveste una importanza inimmaginabile nella formalizzazione matematica del calcolo frazionario, in quanto include al suo interno la quasi totalità delle funzioni speciali già menzionate nei paragrafi precedenti ed altre. La definizione formale coinvolge gli integrali di Mellin-Barnes come segue

$$\begin{aligned} H_{p,q}^{m,n}(z) &= H_{p,q}^{m,n} \left[z \left| \begin{array}{l} (a_1, A_1), (a_2, A_2), \dots, (a_p, A_p) \\ (b_1, B_1), (b_2, B_2), \dots, (b_q, B_q) \end{array} \right. \right] \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_L h(s) z^{-s} ds \end{aligned} \quad (1.50)$$

per $z \neq 0$, e

$$z^{-s} = e^{-s[\ln(|z|) + i \arg(z)]} \quad (1.51)$$

Il kernel nella (1.50) è dato da

$$h(s) = \frac{h_m(s)h_n(s)}{h_p(s)h_q(s)} \quad (1.52)$$

dove

$$h_m(s) = \prod_{j=1}^m \Gamma(b_j + B_j s) \quad h_n(s) = \prod_{j=1}^n \Gamma(1 - a_j - A_j s) \quad (1.53)$$

$$h_p(s) = \prod_{j=n+1}^p \Gamma(a_j + A_j s) \quad h_q(s) = \prod_{j=m+1}^q \Gamma(1 - b_j - B_j s) \quad (1.54)$$

Nelle precedenti equazioni, $m, n, p, q \in \mathbb{N}$, con $1 \leq m \leq q, 0 \leq n \leq p, (A_j, B_j) \in \mathbb{R}^+$ e $(a_j, a_j) \in \mathbb{C}$. Alcune volte, i limiti inferiori nelle produttorie sono più grandi dei limiti superiori; in questi casi non si trovano fattori moltiplicativi generati dalla produttoria e, quindi, per convenzione, si pone uguale all'identità 1. In altri termini

$$n = 0 \leftrightarrow h_n(s) = 1 \quad m = q \leftrightarrow h_q(s) = 1 \quad n = p \leftrightarrow h_p(s) = 1$$

Si noti che l'integrale in (1.50) è dotato di poli (singolarità) in quanto la funzione Gamma di Eulero non è definita per interi negativi; per la funzione $\Gamma(b_j + B_j s)$ i poli sono dati da

$$\zeta_{jv} = -\left(\frac{b_j + v}{B_j}\right) \quad j = 1, 2, 3, \dots, m \quad v = 0, 1, 2, \dots \quad (1.55)$$

mentre per la funzione $\Gamma(1 - a_\lambda - A_\lambda s)$ i poli risultano

$$\omega_{\lambda k} = \left(\frac{1 - a_\lambda + k}{B_j}\right) \quad \lambda = 1, 2, 3, \dots, n \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (1.56)$$

Questi poli non coincidono. Quando $\prod_{j=1}^m \Gamma(b_j - B_j s)$ sono poli semplici, utilizzando il teorema dei residui per l'integrazione in campo complesso considerando il valore dei poli sopra esposti, la funzione di Fox può essere espressa nel modo seguente

$$H_{p,q}^{m,n}(z) = \sum_{h=1}^m \sum_{v=0}^{\infty} \frac{h_m(s_1)h_n(s_1)}{h_p(s_1)h_q(s_1)} \frac{(-1)^v z^{(b_h+v)/B_h}}{v! B_h} \quad (1.57)$$

definita per tutti gli $z \neq 0$, con

$$h_m(s_1) = \prod_{j=1}^m \Gamma(b_j + B_j s_1) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq h}}^m \Gamma\left(b_j - B_j \frac{b_h + v}{B_h}\right) \quad (1.58)$$

$$h_n(s_1) = \prod_{j=1}^n \Gamma(1 - a_j - A_j s_1) = \prod_{j=1}^n \Gamma\left(1 - a_j + A_j \frac{b_h + v}{B_h}\right)$$

$$h_p(s_1) = \prod_{j=n+1}^p \Gamma(a_j + A_j s_1) = \prod_{j=n+1}^p \Gamma\left(a_j - A_j \frac{b_h + \nu}{B_h}\right)$$

$$h_q(s_1) = \prod_{j=m+1}^q \Gamma(1 - b_j - B_j s_1) = \prod_{j=m+1}^q \Gamma\left(1 - b_j + B_j \frac{b_h + \nu}{B_h}\right)$$

In modo del tutto analogo, quando $\prod_{j=1}^n \Gamma(1 - b_j - B_j s)$, utilizzando nuovamente il teorema dei residui, si ottiene

$$H_{p,q}^{m,n}(z) = \sum_{h=1}^m \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{h_m(s_2) h_n(s_2) (-1)^\nu (1/z)^{(1-a_h+\nu)/A_h}}{h_p(s_2) h_q(s_2) \nu! A_h} \quad (1.59)$$

definita per tutti gli $z \neq 0$, con

$$h_m(s_2) = \prod_{j=1}^m \Gamma(b_j + B_j s_2) = \prod_{j=1}^m \Gamma\left(b_j + B_j \frac{1 - a_h + \nu}{A_h}\right)$$

$$h_n(s_2) = \prod_{j=1}^n \Gamma(1 - a_j - A_j s_2) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq h}}^n \Gamma\left(1 - a_j - A_j \frac{1 - a_h + \nu}{A_h}\right)$$

$$h_p(s_2) = \prod_{j=n+1}^p \Gamma(a_j + A_j s_2) = \prod_{j=n+1}^p \Gamma\left(a_j + A_j \frac{1 - a_h + \nu}{A_h}\right)$$

$$h_q(s_2) = \prod_{j=m+1}^q \Gamma(1 - b_j - B_j s_2) = \prod_{j=m+1}^q \Gamma\left(1 - b_j + B_j \frac{1 - a_h + \nu}{A_h}\right)$$
(1.60)

Si consideri, ad esempio, la seguente funzione di Fox

$$H_{1,2}^{1,1}(-z) = H_{1,2}^{1,1} \left[-z \left| \begin{matrix} (1 - \gamma, 1) \\ (0, 1), (1 - \beta, \alpha) \end{matrix} \right. \right] \quad (1.61)$$

Possiamo identificare i parametri

$$m = n = 1 \quad a_1 = 1 - \gamma \quad b_1 = 0 \quad b_2 = 1 - \beta$$

$$p = 1 \quad q = 2 \quad A_1 = 1 \quad B_1 = 1 \quad B_2 = \alpha$$

ed usando la (1.57) si ottiene

$$H_{1,2}^{1,1}(-z) = \sum_{h=1}^1 \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{h_{m=1}(s_1) h_{n=1}(s_1) (-1)^\nu (-z)^{(b_h+\nu)/B_h}}{h_{p=1}(s_1) h_{q=2}(s_1) \nu! B_h}$$

con

$$h_{m=1}(s_1) = \prod_{j=1}^1 \Gamma(b_j + B_j s_1) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq h}}^1 \Gamma\left(b_j - B_j \frac{b_h + \nu}{B_h}\right) = 1$$

$$h_{p=1}(s_1) = \prod_{j=n+1}^1 \Gamma(a_j + A_j s_1) = \prod_{j=1+1}^1 \Gamma\left(a_j - A_j \frac{b_h + \nu}{B_h}\right) = 1$$

Si ottiene

$$H_{1,2}^{1,1}(-z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1 \cdot \prod_{j=1}^1 \Gamma\left(1 - a_j + A_j \frac{b_1 + \nu}{B_1}\right) (-1)^\nu (-z)^{(b_1 + \nu)/B_1}}{\prod_{j=2}^2 \Gamma\left(1 - b_j + B_j \frac{b_1 + \nu}{B_1}\right) \cdot 1 \nu! B_1}$$

$$= \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(1 - a_1 + A_1 \frac{b_1 + \nu}{B_1}\right) (-1)^\nu (-z)^{(b_1 + \nu)/B_1}}{\Gamma\left(1 - b_2 + B_2 \frac{b_1 + \nu}{B_1}\right) \nu! B_1}$$

Sostituendo i coefficienti, si deriva

$$H_{1,2}^{1,1}(-z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(1 - (1 - \gamma) + 1 \frac{0 + \nu}{1}\right) (-1)^\nu (-z)^{(0 + \nu)/1}}{\Gamma\left(1 - (1 - \beta) + \alpha \frac{0 + \nu}{1}\right) \nu! 1} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\gamma + \nu) (-1)^{2\nu} z^\nu}{\Gamma(\alpha\nu + \beta) \nu!}$$

Dal momento che $(-1)^{2\nu} = 1$, $\nu! = \Gamma(\nu + 1)$ e moltiplicando e dividendo per $\Gamma(\gamma)$ si ricava

$$H_{1,2}^{1,1}(-z) = H_{1,2}^{1,1} \left[-z \left| \begin{matrix} (1 - \gamma, 1) \\ (0, 1), (1 - \beta, \alpha) \end{matrix} \right. \right] = \Gamma(\gamma) \frac{1}{\Gamma(\gamma)} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\gamma + \nu)}{\Gamma(\nu + 1) \Gamma(\alpha\nu + \beta)} z^\nu$$

per comparazione con la (1.43)

$$H_{1,2}^{1,1}(-z) = H_{1,2}^{1,1} \left[-z \left| \begin{matrix} (1 - \gamma, 1) \\ (0, 1), (1 - \beta, \alpha) \end{matrix} \right. \right] = \Gamma(\gamma) E_{\alpha, \beta}^\gamma(z) \quad (1.62)$$

Come precedentemente enunciato, un gran numero di funzioni sono casi particolari della funzione di Fox, Infatti, per valori di $A_i = 1$ e $B_i = 1$ si ritrovano le G-funzioni di Meijer $G_{p,q}^{m,n}(z)$

$$H_{p,q}^{m,n}(z) = H_{p,q}^{m,n} \left[z \left| \begin{matrix} (a_1, 1), (a_2, 1), \dots, (a_p, 1) \\ (b_1, 1), (b_2, 1), \dots, (b_q, 1) \end{matrix} \right. \right] = G_{p,q}^{m,n} \left[z \left| \begin{matrix} a_1, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_q \end{matrix} \right. \right]$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_L h_M(s) z^{-s} ds \quad (1.63)$$

dove

$$h_M(s) = \frac{\prod_{j=1}^m \Gamma(b_j + s) \prod_{j=1}^n \Gamma(1 - a_j - s)}{\prod_{j=m+1}^p \Gamma(a_j + s) \prod_{j=m+1}^q \Gamma(1 - b_j - s)} \quad (1.64)$$

È inoltre possibile ottenere le funzioni speciali di Bessels, polinomi di Legendre, funzioni di Whitakker e Struve, le ordinarie funzioni ipergeometriche generalizzate e molte altre. Non sono invece ricavabili tramite l'H-funzione la funzione Zeta di Riemann ed i polilogaritmi. Ulteriori generalizzazioni, quindi, sono possibili. Si consideri, per esempio, la seguente funzione ipergeometrica generalizzate

$$\begin{aligned} {}_pF_q(a_1, \dots, a_p; b_1, \dots, b_q; z) &= \frac{\prod_{j=1}^q \Gamma(b_j)}{\prod_{j=1}^p \Gamma(a_j)} H_{p,q+1}^{1,p} \left[-z \left| \begin{matrix} (1-a_1, 1), \dots, (1-a_p, 1) \\ (0,1), (1-b_1, 1), \dots, (1-b_q, 1) \end{matrix} \right. \right] \\ &= \frac{\prod_{j=1}^q \Gamma(b_j)}{\prod_{j=1}^p \Gamma(a_j)} G_{p,q+1}^{1,p} \left[-z \left| \begin{matrix} 1-a_1, \dots, 1-a_p \\ 0, 1-b_1, \dots, 1-b_q \end{matrix} \right. \right] \end{aligned}$$

La funzione di Bessel del primo tipo è ottenuta come

$$J_\nu(z) = 2^{-\nu} \sqrt{\pi} H_{1,2}^{1,0} \left[z \left| \begin{matrix} (\frac{1+\nu}{2}, \frac{1}{2}) \\ (\nu, 1), (-\frac{\nu}{2}, \frac{1}{2}) \end{matrix} \right. \right] \quad (1.65)$$

mentre, la funzione di Macdonald risulta

$$K_\nu(z) = 2^{-\nu-1} \sqrt{\pi} H_{1,2}^{2,0} \left[z \left| \begin{matrix} (\frac{1+\nu}{2}, \frac{1}{2}) \\ (\nu, 1), (-\frac{\nu}{2}, \frac{1}{2}) \end{matrix} \right. \right] \quad (1.66)$$

La funzione di Mittag-Leffler a due parametri può essere ricavata dalla seguente funzione di Fox

$$H_{1,2}^{1,1}(-z) = H_{1,2}^{1,1} \left[-z \left| \begin{matrix} (0,1) \\ (0,1), (1-\beta, \alpha) \end{matrix} \right. \right] = E_{\alpha,\beta}^1(z) = E_{\alpha,\beta}(z) \quad (1.67)$$

In aggiunta, si può ulteriormente ridurre ponendo $\beta = 1$, da cui segue che

$$H_{1,2}^{1,1}(-z) = H_{1,2}^{1,1} \left[-z \left| \begin{matrix} (0,1) \\ (0,1), (0, \alpha) \end{matrix} \right. \right] = E_{\alpha,1}^1(z) = E_\alpha(z) \quad (1.68)$$

La funzione esponenziale è ritrovata nel caso limite per $\alpha = 1$

$$H_{1,2}^{1,1}(-z) = H_{1,2}^{1,1} \left[-z \left| \begin{matrix} (0,1) \\ (0,1), (0,1) \end{matrix} \right. \right] = E_1(z) = e^z \quad (1.69)$$

che può essere anche espressa mediante la seguente

$$H_{0,1}^{1,0}(-z) = H_{0,1}^{1,0} \left[-z \left| \begin{matrix} (0,0) \\ (0,1) \end{matrix} \right. \right] = e^z \quad (1.70)$$

quindi

$$H_{1,2}^{1,1} \left[-z \left| \begin{matrix} (0,1) \\ (0,1), (0,1) \end{matrix} \right. \right] = H_{0,1}^{1,0} \left[-z \left| \begin{matrix} (0,0) \\ (0,1) \end{matrix} \right. \right] = e^z \quad (1.71)$$

1.6.1 Formule di riduzione

Di seguito sono riportate alcune importanti formule di riduzione per la funzione di Fox, senza entrare troppo nel merito dei calcoli

$$\begin{aligned} H_{p,q}^{m,n} \left[z \left| \begin{matrix} (a_1, A_1), (a_2, A_2), \dots, (a_p, A_p) \\ (b_1, B_1), (b_2, B_2), \dots, (b_{q-1}, B_{q-1}), (a_1, A_1) \end{matrix} \right. \right] \\ = H_{p-1,q-1}^{m,n-1} \left[z \left| \begin{matrix} (a_2, A_2), \dots, (a_p, A_p) \\ (b_1, B_1), (b_2, B_2), \dots, (b_{q-1}, B_{q-1}) \end{matrix} \right. \right] \end{aligned} \quad (1.72)$$

valida per $n \geq 1$ e $q > m$, e

$$\begin{aligned} H_{p,q}^{m,n} \left[z \left| \begin{matrix} (a_1, A_1), (a_2, A_2), \dots, (a_{p-1}, A_{p-1}), (b_1, B_1) \\ (b_1, B_1), (b_2, B_2), \dots, (b_q, B_q) \end{matrix} \right. \right] \\ = H_{p-1,q-1}^{m-1,n} \left[z \left| \begin{matrix} (a_1, A_1), (a_2, A_2), \dots, (a_{p-1}, A_{p-1}) \\ (b_2, B_2), \dots, (b_q, B_q) \end{matrix} \right. \right] \end{aligned} \quad (1.73)$$

valida per $m \geq 1$ e $p > n$. Altre importanti proprietà utili nel calcolo sono

$$H_{p,q}^{m,n} \left[z \left| \begin{matrix} (a_p, A_p) \\ (b_q, B_q) \end{matrix} \right. \right] = H_{q,p}^{n,m} \left[\frac{1}{z} \left| \begin{matrix} (1 - b_q, B_q) \\ (1 - a_p, A_p) \end{matrix} \right. \right] \quad (1.74)$$

$$H_{p,q}^{m,n} \left[z \left| \begin{matrix} (a_p, A_p) \\ (b_q, B_q) \end{matrix} \right. \right] = k H_{p,q}^{m,n} \left[z^k \left| \begin{matrix} (a_p, kA_p) \\ (b_q, kB_q) \end{matrix} \right. \right] \quad (1.75)$$

$$z^k H_{p,q}^{m,n} \left[z \left| \begin{matrix} (a_p, A_p) \\ (b_q, B_q) \end{matrix} \right. \right] = H_{p,q}^{m,n} \left[z \left| \begin{matrix} (a_p + kA_p, A_p) \\ (b_q + kB_q, B_q) \end{matrix} \right. \right] \quad (1.76)$$

con $k \in \mathbb{C}$.

Il comportamento asintotico della funzione di Fox per $n = 0$, è dato da

$$H_{p,q}^{m,0} \left[z \left| \begin{matrix} (a_j, A_j) \\ (b_j, B_j) \end{matrix} \right. \right] \sim F z^{\gamma/\mu} e^{-\mu \left(\frac{z}{\beta'} \right)^{\frac{1}{\mu}}} \quad (1.77)$$

per grandi valori di $|z|$. Se invece siamo nel caso in cui $n \neq 1$ il comportamento asintotico è differente dal precedente e può essere espresso mediante funzioni potenza connesse alle distribuzioni di Lèvy. Per esempio si consideri la seguente funzione di Fox

$$H_{2,2}^{1,1} \left[z \left| \begin{matrix} (1, \frac{1}{\mu}), (1, \frac{1}{2}) \\ (1,1), (1, \frac{1}{2}) \end{matrix} \right. \right] \quad (1.78)$$

che può essere utilizzata per rappresentare una distribuzione di Lèvy simmetrica del tipo

$$L_{\mu}(z) = \frac{1}{\mu|z|} H_{2,2}^{1,1} \left[|z| \left| \begin{matrix} (1, \frac{1}{\mu}), (1, \frac{1}{2}) \\ (1,1), (1, \frac{1}{2}) \end{matrix} \right. \right] \quad (1.79)$$

Il comportamento asintotico è definito come segue

$$H_{2,2}^{1,1} \left[z \left| \begin{matrix} (1, \frac{1}{\mu}), (1, \frac{1}{2}) \\ (1,1), (1, \frac{1}{2}) \end{matrix} \right. \right] \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Gamma(1 - \mu n)}{\Gamma(1 + n) \Gamma(-\frac{\mu}{2}n) \Gamma(1 + \frac{\mu}{2}n)} \left(-\frac{1}{z^{\mu}} \right)^n \quad (1.80)$$

per grandi valori di $|z|$, che implica il fatto che $L_{\mu}(z) \sim 1/|z|^{1+\mu}$.

Capitolo 2

Derivate ed Integrali frazionari

2.1 Introduzione

Nel presente capitolo si propongono diversi approcci volti alla formalizzazione di generalizzazioni del concetto di derivazione ed integrazione per ordini frazionari. Verranno presentati i risultati che più trovano utilità nelle applicazioni, specialmente nella teoria delle equazioni differenziali frazionarie e nei vari metodi risolutivi di varia natura (numerici, analitici, semi-analitici). Si seguirà quanto riportato nel [3], caposaldo del calcolo frazionario

Cosa vuol dire calcolo frazionario? Con il termine *calcolo frazionario* si intende una teoria matematica in grado di generalizzare il calcolo differenziale ed integrale di ordine intero per funzioni di variabile reale o complessa ad ordini arbitrari. Si considerino le seguenti formulazioni

$$\dots \int_a^t d\tau_2 \int_a^{\tau_2} f(\tau_1) d\tau_1, \int_a^t f(\tau_1) d\tau_1, f(t), \frac{df(t)}{dt}, \frac{d^2 f(t)}{dt^2} \dots$$

La derivata di ordine arbitrario $\alpha \in \mathbb{R}$ può essere considerata come una interpolazione degli operatori sopra presentati ed indicata tramite la seguente notazione generalizzata

$${}_a D_t^\alpha f(t)$$

Il nome comune con il quale si chiama l'operatore ${}_a D_t^\alpha f(t)$ è derivata frazionaria. I due limiti a e t sono denominati terminali ed in particolare il primo assume il significato di punto base. L'indicazione dei terminali nella definizione della derivata frazionaria è di fondamentale importanza; ciò evita di creare ambiguità nell'applicazione del calcolo frazionario a problemi reali.

D'altro canto, con il termine integrale frazionario si intende l'operatore integrale esteso ad ordini frazionari corrispondente a valori negativi di α . Si denomineranno gli integrali frazionari tramite la seguente notazione

$${}_a D_t^{-\beta} f(t)$$

Con il calcolo frazionario si abbatte il modo di pensare la derivazione come un meccanismo indipendente dall'integrazione e viceversa. Grazie a questa teoria unificata si parlerà in generale di Differintegrale di una funzione.

2.2 Derivata frazionaria di Grunwald-Letnikov

2.2.1 Unificazione della teoria per derivate ed integrali ad ordine intero

Prima di poter dare la definizione della derivata di Grunwald-Letnikov si generalizza quanto già conosciuto con il calcolo differenziale ed integrale per ordini

interi. Si considera, a tal proposito una funzione continua $y = f(t)$. Seguendo la ben nota definizione di derivata prima di $f(t)$ si ottiene

$$f'(t) = \frac{df}{dt} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t) - f(t-h)}{h} \quad (2.1)$$

Applicando nuovamente la definizione

$$\begin{aligned} f''(t) &= \frac{d^2f}{dt^2} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(t) - f'(t-h)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t) - 2f(t-h) + f(t-2h)}{h^2} \end{aligned} \quad (2.2)$$

Ancora,

$$\begin{aligned} f'''(t) &= \frac{d^3f}{dt^3} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f''(t) - f''(t-h)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t) - 3f(t-h) + 3f(t-2h) - f(t-3h)}{h^3} \end{aligned} \quad (2.3)$$

e, generalizzando per induzione,

$$f^{(n)}(t) = \frac{d^n f}{dt^n} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^n} \sum_{r=0}^n (-1)^r \binom{n}{r} f(t-rh) \quad (2.4)$$

dove

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{r!} \quad (2.5)$$

è l'usuale definizione di coefficiente binomiale. Per chiarezza espositiva e per considerazione future si considera il rapporto incrementale

$$f_h^{(p)}(t) = \frac{1}{h^p} \sum_{r=0}^n (-1)^r \binom{p}{r} f(t-rh) \quad (2.6)$$

dove p, n sono numeri interi. Per $p \leq n$ si ottiene

$$\lim_{h \rightarrow 0} f_h^{(p)}(t) = f^{(p)}(t) = \frac{d^p f}{dt^p} \quad (2.7)$$

perché in questo caso, come segue dalla (2.5), tutti i coefficienti al numeratore dopo $\binom{p}{p}$ sono uguali a 0.

Se si considerano valori di $p < 0$ si ottiene

$$\binom{-p}{r} = (-1)^r \binom{p}{r} = (-1)^r \frac{p(p+1)\cdots(p+r-1)}{r!} \quad (2.8)$$

e sostituendo p con $-p$ in (2.6) si può scrivere la seguente

$$f_h^{(-p)}(t) = \frac{1}{h^{-p}} \sum_{r=0}^n \binom{p}{r} f(t - rh) \quad (2.9)$$

dove p è un numero intero positivo. Si può considerare $h = \frac{t-a}{n}$, dove a è una costante reale, ed assumere il limite, finito od infinito, di $f_h^{(-p)}(t)$, nel modo seguente

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ nh=t-a}} f_h^{(-p)}(t) = {}_a D_t^{-p} f(t) \quad (2.10)$$

Dove ${}_a D_t^{-p} f(t)$ denota un certo operatore agente su $f(t)$; a e t sono i terminali costituenti i limiti di questa operazione.

Si consideri il caso particolare $p = 1$. Si ottiene

$$f_h^{(-1)}(t) = h \sum_{r=0}^n f(t - rh) \quad (2.11)$$

tenendo conto che $t - nh = a$ e che la funzione $f(t)$ è per definizione assunta continua, si conclude che

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ nh=t-a}} f_h^{(-1)}(t) = {}_a D_t^{-1} f(t) = \int_0^{t-a} f(t-z) dz = \int_a^t f(\tau) d\tau \quad (2.12)$$

Per $p = 2$, procedendo allo stesso modo si ottiene in questo caso a

$$\binom{2}{r} = \frac{2(2+1) \cdots (2+r-1)}{r!} = r+1$$

$$f_h^{(-2)}(t) = h \sum_{r=0}^n (rh) f(t - rh) \quad (2.13)$$

e facendo tendere $h \rightarrow 0$ si giunge a

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ nh=t-a}} f_h^{(-2)}(t) = {}_a D_t^{-2} f(t) = \int_0^{t-a} z f(t-z) dz = \int_a^t (t-\tau) f(\tau) d\tau \quad (2.14)$$

L'ultimo caso per $p = 3$, condurrà al riconoscimento di una struttura generale. In questo caso si ha

$$\binom{3}{r} = \frac{3(3+1) \cdots (3+r-1)}{r!} = \frac{(r+1)(r+2)}{1 \cdot 2}$$

$$f_h^{(-3)}(t) = \frac{h}{1 \cdot 2} \sum_{r=0}^n (r+1)(r+2) h^2 f(t - rh) \quad (2.15)$$

Operando con la sostituzione $t + h = y$ si ottiene

$$f_h^{(-3)}(t) = \frac{h}{1 \cdot 2} \sum_{r=1}^{n+1} r(r+1)h^2 f(y - rh) \quad (2.16)$$

che può essere riscritta nel seguente modo

$$f_h^{(-3)}(t) = \frac{h}{1 \cdot 2} \sum_{r=1}^{n+1} (rh)^2 f(y - rh) + \frac{h^2}{1 \cdot 2} \sum_{r=1}^{n+1} rh f(y - rh) \quad (2.17)$$

Facendo tendere $h \rightarrow 0$ si giunge a

$${}_a D_t^{-3} f(t) = \frac{1}{2!} \int_0^{t-a} z^2 f(t-z) dz = \int_a^t (t-\tau)^2 f(\tau) d\tau \quad (2.18)$$

Le relazioni sopra riportate suggeriscono la seguente espressione generale

$$\begin{aligned} {}_a D_t^{-p} f(t) &= \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ nh=t-a}} \frac{1}{h^{-p}} \sum_{r=0}^n \binom{p}{r} f(t-rh) \\ &= \frac{1}{(p-1)!} \int_a^t (t-\tau)^{p-1} f(\tau) d\tau \end{aligned} \quad (2.19)$$

che rappresenta p integrazioni della funzione $f(t)$. Per dimostrare ciò si consideri l'integrazione della seguente relazione

$$\frac{d}{dt} ({}_a D_t^{-p} f(t)) = \frac{1}{(p-2)!} \int_a^t (t-\tau)^{p-2} f(\tau) d\tau = {}_a D_t^{-p+1} f(t) \quad (2.20)$$

da a a t ottenendo

$$\begin{aligned} {}_a D_t^{-p} f(t) &= \int_a^t ({}_a D_t^{-p+1} f(t)) dt \\ {}_a D_t^{-p+1} f(t) &= \int_a^t ({}_a D_t^{-p+2} f(t)) dt \end{aligned}$$

e quindi

$$\begin{aligned} {}_a D_t^{-p} f(t) &= \int_a^t dt \int_a^t ({}_a D_t^{-p+2} f(t)) dt \\ &= \int_a^t dt \int_a^t dt \int_a^t ({}_a D_t^{-p+3} f(t)) dt \\ &= \underbrace{\int_a^t dt \int_a^t dt \cdots \int_a^t f(t) dt}_{p\text{-volte}} \end{aligned} \quad (2.21)$$

Si noti che la (2.4) e (2.19) sono casi particolari dell'espressione più generale

$${}_a D_t^p f(t) = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ nh=t-a}} h^{-p} \sum_{r=0}^n (-1)^r \binom{p}{r} f(t-rh) \quad (2.22)$$

che rappresenta la derivata di ordine m se $p = m$ e l'integrale di ordine m se $p = -m$. Questa osservazione conduce in modo del tutto naturale all'idea di generalizzazione del concetto di derivata ed integrale ammettendo che $p \in \mathbb{R}, \mathbb{C}$ e non più $p \in \mathbb{N}$.

2.2.2 Integrazione di ordine arbitrario

Si consideri il caso di $p < 0$. Per convenienza si sostituisce p con $-p$ nell'espressione (2.22) che assume ora la seguente forma

$${}_a D_t^{-p} f(t) = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ nh=t-a}} h^p \sum_{r=0}^n \binom{p}{r} f(t-rh) \quad (2.23)$$

che si può scrivere anche come segue

$${}_a D_t^{-p} f(t) = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ nh=t-a}} h^p \sum_{r=0}^n \binom{p}{r} f(t-rh) = \frac{1}{\Gamma(p)} \int_a^t (t-\tau)^{p-1} f(\tau) d\tau \quad (2.24)$$

Se la derivata $f'(t)$ è continua in $[a, b]$, integrando per parti si ottiene

$${}_a D_t^{-p} f(t) = \frac{f(a)(t-a)^p}{\Gamma(p+1)} + \frac{1}{\Gamma(p+1)} \int_a^t (t-\tau)^p f'(\tau) d\tau \quad (2.25)$$

e se la funzione $f(t)$ ha $m+1$ derivate continue si può generalizzare la precedente nel seguente modo

$${}_a D_t^{-p} f(t) = \left\{ \sum_{k=0}^m \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{p+k}}{\Gamma(p+k+1)} + \frac{1}{\Gamma(p+k+1)} \int_a^t (t-\tau)^{p+m} f^{(m+1)}(\tau) d\tau \right\} \quad (2.26)$$

2.2.3 Derivazione di ordine arbitrario

Si consideri ora il caso di $p > 0$ ed il seguente limite

$$\begin{aligned} {}_a D_t^p f(t) &= \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ nh=t-a}} h^{-p} \sum_{r=0}^n (-1)^r \binom{p}{r} f(t-rh) \\ &= \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ nh=t-a}} h^{-p} \sum_{r=0}^n (-1)^r \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(r+1)\Gamma(p-r+1)} f(t-rh) \end{aligned} \quad (2.27)$$

che può anche essere scritto nella seguente forma

$$\begin{aligned}
 {}_aD_t^p f(t) &= \sum_{k=0}^m \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{-p+k}}{\Gamma(-p+k+1)} \\
 &\quad + \frac{1}{\Gamma(-p+m+1)} \int_a^t (t-\tau)^{m-p} f^{(m+1)}(\tau) d\tau
 \end{aligned} \tag{2.28}$$

La formula (2.28) è stata ottenuta assumendo che $f^{(k)}(t)$, ($k = 1, 2, \dots, m+1$) sono derivate continue in $[a, t]$ e che m è l'intero che soddisfa $m > p - 1$. Il valore più piccolo di m è ottenuto dalla seguente

$$m < p < m + 1$$

2.2.4 Derivata frazionaria di $(t-a)^\nu$

Nel presente paragrafo si intende valutare la derivata di Grunwald-Letnikov ${}_aD_t^p f(t)$ della seguente funzione potenza

$$f(t) = (t-a)^\nu$$

dove ν è un numero reale.

Si comincia considerando valori negativi di p , che significa valutare integrali frazionari, della seguente forma

$${}_aD_t^p (t-a)^\nu = \frac{1}{\Gamma(-p)} \int_a^t (t-\tau)^{-p-1} (\tau-a)^\nu d\tau \tag{2.29}$$

e supponendo $\nu > -1$ per la convergenza dell'integrale. Operando con la sostituzione $\tau = a + \xi(t-a)$ ed usando la definizione di funzione Beta di Eulero, si ottiene

$$\begin{aligned}
 {}_aD_t^p (t-a)^\nu &= \frac{1}{\Gamma(-p)} (t-a)^{\nu-p} \int_a^t \xi^\nu (1-\xi)^{-p-1} d\xi \\
 &= \frac{1}{\Gamma(-p)} B(-p, \nu+1) (t-a)^{\nu-p} \\
 &= \frac{\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(\nu+1-p)} (t-a)^{\nu-p}
 \end{aligned} \tag{2.30}$$

Si consideri ora il caso $0 \leq m \leq p \leq m+1$. Per applicare la formula (2.28) si deve richiedere $\nu > m$ per la convergenza dell'integrale. Si ottiene

$${}_aD_t^p (t-a)^\nu = \frac{1}{\Gamma(-p+m+1)} \int_a^t (t-\tau)^{m-p} \frac{d^{m+1}}{d\tau^{m+1}} (\tau-a)^\nu d\tau \tag{2.31}$$

dovuto al fatto che tutti i termini non all'interno dell'integrale sono nulli. Tenendo in considerazione la seguente proprietà

$$\frac{d^{m+1}}{d\tau^{m+1}} (\tau-a)^\nu = \nu(\nu-1) \cdots (\nu-m) (\tau-a)^{\nu-m-1} = \frac{\Gamma(\nu+1)}{\nu-m} (\tau-a)^{\nu-m-1}$$

Ed effettuando la sostituzione $\tau = a + \xi(t-a)$ si ottiene

$$\begin{aligned}
 {}_aD_t^p(t-a)^\nu &= \frac{\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(\nu-m)\Gamma(-p+m+1)} \int_a^t (t-\tau)^{m-p} (\tau-a)^{\nu-m-1} d\tau \\
 &= \frac{\Gamma(\nu+1)B(-p+m+1, \nu-m)}{\Gamma(\nu-m)\Gamma(-p+m+1)} (t-a)^{\nu-p} \\
 &= \frac{\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(\nu+1-p)} (t-a)^{\nu-p}
 \end{aligned} \tag{2.32}$$

Si noti che (2.32) è identica alla (2.30) conducendo, senza ombra di dubbio, al fatto che la derivata di Grunwald-Letnikov della funzione potenza $f(t) = (t-a)^\nu$ è data dalla seguente espressioni

$${}_aD_t^p(t-a)^\nu = \frac{\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(\nu+1-p)} (t-a)^{\nu-p} \tag{2.33}$$

con $p < 0, \nu > -1$.

2.2.5 Composizione con derivate di ordine intero

Si noti come nella formula (2.28) si abbia solo una restrizione per m , cioè $m > p-1$. Si sostituisca s alla m e si riscrive

$$\begin{aligned}
 {}_aD_t^p f(t) &= \sum_{k=0}^s \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{-p+k}}{\Gamma(-p+k+1)} \\
 &\quad + \frac{1}{\Gamma(-p+s+1)} \int_a^t (t-\tau)^{s-p} f^{(s+1)}(\tau) d\tau
 \end{aligned} \tag{2.34}$$

con $m < p < m+1$. Si valuta in primo luogo la derivata di ordine n della derivata frazionaria di cui sopra, con $s \geq m+n-1$ nel seguente modo

$$\begin{aligned}
 \frac{d^n}{dt^n} ({}_aD_t^p f(t)) &= \sum_{k=0}^s \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{-p-n+k}}{\Gamma(-p-n+k+1)} \\
 &\quad + \frac{1}{\Gamma(-p-n+s+1)} \int_a^t (t-\tau)^{s-p-n} f^{(s+1)}(\tau) d\tau \\
 &= {}_aD_t^{p+n} f(t)
 \end{aligned} \tag{2.35}$$

Consideriamo ora un diverso ordine degli operatori differenziali volendo calcolare la derivata frazionaria di ordine p della derivata di ordine intero n . Usando la formula (2.34)

$$\begin{aligned}
 {}_aD_t^p \left(\frac{d^n f(t)}{dt^n} \right) &= \sum_{k=0}^s \frac{f^{(n+k)}(a)(t-a)^{-p+k}}{\Gamma(-p+k+1)} \\
 &\quad + \frac{1}{\Gamma(-p+s+1)} \int_a^t (t-\tau)^{s-p} f^{(n+s+1)}(\tau) d\tau
 \end{aligned} \tag{2.36}$$

Ponendo qui $s = m-1$ si ottiene

$$\begin{aligned}
 {}_a D_t^p \left(\frac{d^n f(t)}{dt^n} \right) &= \sum_{k=0}^{m-1} \frac{f^{(n+k)}(a)(t-a)^{-p+k}}{\Gamma(-p+k+1)} \\
 &\quad + \frac{1}{\Gamma(m-p)} \int_a^t (t-\tau)^{m-p-1} f^{(m+n)}(\tau) d\tau
 \end{aligned} \tag{2.37}$$

e comparando la (2.37) con la (2.35) si giunge alla conclusione che

$$\frac{d^n}{dt^n} ({}_a D_t^p f(t)) = {}_a D_t^p \left(\frac{d^n f(t)}{dt^n} \right) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{-p-n+k}}{\Gamma(-p-n+k+1)} \tag{2.38}$$

La relazione (2.38) mostra che le operazioni $\frac{d^n}{dt^n}$ e ${}_a D_t^p$ sono commutative, cioè

$$\frac{d^n}{dt^n} ({}_a D_t^p f(t)) = {}_a D_t^p \left(\frac{d^n f(t)}{dt^n} \right) = {}_a D_t^{p+n} f(t) \tag{2.39}$$

solo se

$$f^{(k)}(a) = 0 \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1 \tag{2.40}$$

2.2.6 Composizione con derivate frazionarie

Si considera ora la composizione fra derivate di ordine frazionario del tipo

$${}_a D_t^q ({}_a D_t^p f(t))$$

Due casi saranno considerati esplicitamente: $p < 0$ e $p > 0$. Il primo caso significa che, dipendentemente dal segno di q , la derivazione di ordine $q > 0$ od integrazione di ordine $-q > 0$ è applicata all'integrale frazionario di ordine $-p > 0$. Nel secondo caso, invece, il differintegrale di ordine q viene applicato alla derivata frazionaria di ordine $p > 0$. In entrambi i casi si otterrà una espressione analoga a quella già bene nota per la derivazione ad ordine intero:

$$\frac{d^n}{dt^n} \left(\frac{d^m f(t)}{dt^m} \right) = \frac{d^m}{dt^m} \left(\frac{d^n f(t)}{dt^n} \right) = \frac{d^{m+n} f(t)}{dt^{m+n}}$$

Nel caso in cui $p < 0$ e $q < 0$, infatti, si ottiene

$$\begin{aligned}
 {}_a D_t^q ({}_a D_t^p f(t)) &= \frac{1}{\Gamma(-q)} \int_a^t (t-\tau)^{-q-1} ({}_a D_t^p f(t)) d\tau \\
 &= \frac{1}{\Gamma(-q)\Gamma(-p)} \int_a^t (t-\tau)^{-q-1} d\tau \int_a^\tau (\tau-\xi)^{-p-1} f(\xi) d\xi \\
 &= \frac{1}{\Gamma(-q)\Gamma(-p)} \int_a^t f(\xi) d\xi \int_\xi^t (t-\tau)^{-q-1} (\tau-\xi)^{-p-1} d\tau \\
 &= \frac{1}{\Gamma(-q-p)} \int_a^t (t-\xi)^{-p-q-1} f(\xi) d\xi = {}_a D_t^{p+q} f(t)
 \end{aligned} \tag{2.41}$$

Supponiamo ora $0 < n < q < n + 1$. Si noti che $q = (n + 1) + (q - n - 1)$, dove $q - n - 1 < 0$, ed usando la formula (2.35) e (2.41) si ottiene

$$\begin{aligned} {}_aD_t^q({}_aD_t^p f(t)) &= \frac{d^{n+1}}{dt^{n+1}} \{ {}_aD_t^{q-n-1}({}_aD_t^p f(t)) \} \\ &= \frac{d^{n+1}}{dt^{n+1}} \{ {}_aD_t^{p+q-n-1} f(t) \} = {}_aD_t^{p+q} f(t) \end{aligned} \quad (2.42)$$

Combinando le (2.41), (2.42) si conclude che per $p < 0$ e per ogni $q \in \mathbb{R}$ si ha

$${}_aD_t^q({}_aD_t^p f(t)) = {}_aD_t^{p+q} f(t)$$

Nel caso, invece, di $p > 0$, ed in particolare $0 \leq m \leq p \leq m + 1$ si ottiene, in accordo con (2.28)

$$\begin{aligned} {}_aD_t^p f(t) &= \sum_{k=0}^m \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{-p+k}}{\Gamma(-p+k+1)} \\ &\quad + \frac{1}{\Gamma(m-p+1)} \int_a^t (t-\tau)^{m-p} f^{(m+1)}(\tau) d\tau \end{aligned} \quad (2.43)$$

che può essere riscritta

$${}_aD_t^p f(t) = \frac{f^{(m)}(a)(t-a)^{-p+m}}{\Gamma(-p+m+1)} + {}_aD_t^{p-m-1} f^{(m+1)}(t) \quad (2.44)$$

Nel caso in cui si voglia computare la derivata di ordine $q < 0$ si ottiene

$$\begin{aligned} {}_aD_t^q({}_aD_t^p f(t)) &= \frac{f^{(m)}(a)(t-a)^{-p-q+m}}{\Gamma(-p-q+m+1)} \\ &\quad + \frac{1}{\Gamma(m-p-q+1)} \int_a^t \frac{f^{(m+1)}(\tau) d\tau}{(t-\tau)^{p+q-m}} \end{aligned} \quad (2.45)$$

dato che

$$\begin{aligned} {}_aD_t^q({}_aD_t^{p-m-1} f^{(m+1)}(t)) &= {}_aD_t^{p+q-m-1} f^{(m+1)}(t) \\ &= \frac{1}{\Gamma(m-p-q+1)} \int_a^t \frac{f^{(m+1)}(\tau) d\tau}{(t-\tau)^{p+q-m}} \end{aligned} \quad (2.46)$$

Esaminando il secondo membro delle (2.43) si nota come la funzione $(t-a)^{-p+k}$ possiede singolarità per $k = 0, 1, \dots, m-1$. Quindi la derivata di ordine q di ${}_aD_t^p f(t)$ esiste se e solo se

$$f^{(k)}(a) = 0, \quad k = 0, 1, \dots, m-1 \quad (2.47)$$

e tenendo conto della (2.43) e (2.47) si ottiene

$${}_a D_t^q ({}_a D_t^p f(t)) = {}_a D_t^{p+q} f(t) \quad (2.48)$$

Si consideri $0 \leq n < q < n + 1$. Assumendo che $f(t)$ soddisfi le condizioni (2.47) e tenendo in considerazione che $q - n - 1 < 0$ assieme alla formula (2.48), si ottiene

$$\begin{aligned} {}_a D_t^q ({}_a D_t^p f(t)) &= \frac{d^{n+1}}{dt^{n+1}} \{ {}_a D_t^{q-n-1} ({}_a D_t^p f(t)) \} \\ &= \frac{d^{n+1}}{dt^{n+1}} \{ {}_a D_t^{p+q-n-1} f(t) \} = {}_a D_t^{p+q} f(t) \end{aligned} \quad (2.49)$$

Quindi, come nel caso di $p < 0$

$${}_a D_t^q ({}_a D_t^p f(t)) = {}_a D_t^p ({}_a D_t^q f(t)) = {}_a D_t^{p+q} f(t) \quad (2.50)$$

2.3 Derivata frazionaria di Riemann-Liouville

Per scopi analitici la definizione di differintegrale secondo Grunwald-Letnikov risulta scomoda. La (2.28) sembra essere migliore per la presenza dell'integrale ma sono presenti dei termini non sotto il simbolo di integrale da analizzare. Il punto cruciale è considerare la (2.28) come caso particolare della seguente espressione integro-differenziale

$${}^{RL}{}_a D_t^p f(t) = \left(\frac{d}{dt} \right)^{m+1} \int_a^t (t - \tau)^{m-p} f(\tau) d\tau \quad m \leq p \leq m + 1 \quad (2.51)$$

nota comunemente con il nome di derivata frazionaria di Riemann-Liouville.

2.3.1 Unificazione della teoria per derivate ed integrali ad ordine intero

Supponiamo che la funzione $f(\tau)$ sia continua ed integrabile in ogni intervallo finito (a, t) ; quindi l'integrale

$$f^{(-1)}(t) = \int_a^t f(\tau) d\tau \quad (2.52)$$

esiste ed è finito, con valore nullo per $t \rightarrow a$. Consideriamo ora l'integrale del secondo ordine del tipo

$$f^{(-2)}(t) = \int_a^t d\tau_1 \int_a^{\tau_1} f(\tau) d\tau = \int_a^t f(\tau) d\tau \int_a^{\tau_1} d\tau_1 = \int_a^t (t - \tau) f(\tau) d\tau \quad (2.53)$$

e del terzo

$$\begin{aligned} f^{(-3)}(t) &= \int_a^t d\tau_1 \int_a^{\tau_1} d\tau_2 \int_a^{\tau_2} f(\tau_3) d\tau_3 = \int_a^t d\tau_1 \int_a^{\tau_1} (\tau_1 - \tau) f(\tau) d\tau \\ &= \frac{1}{2} \int_a^t (t - \tau)^2 f(\tau) d\tau \end{aligned} \quad (2.54)$$

da cui si può, per induzione, dedurre la seguente struttura generale

$$f^{(-n)}(t) = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_a^t (t - \tau)^{n-1} f(\tau) d\tau \quad (2.55)$$

Supponiamo che $n \geq 1$ sia fissato e si consideri un intero $k \geq 0$. Derivando entrambi i membri si ottiene

$$f^{(-k-n)}(t) = \frac{1}{\Gamma(n)} D^{-k} \int_a^t (t - \tau)^{n-1} f(\tau) d\tau \quad (2.56)$$

dove D^{-k} ($k \geq 0$) denota k integrazioni iterate.

D'altro canto, per valori fissati di $n \geq 1$ e $k \geq n$, $k \in \mathbb{N}$ la derivata di ordine $(k - n)$ della funzione $f(t)$ può essere scritta come

$$f^{(k-n)}(t) = \frac{1}{\Gamma(n)} D^k \int_a^t (t - \tau)^{n-1} f(\tau) d\tau \quad (2.57)$$

dove il simbolo D^k ($k \geq 0$) denota k derivazioni successive.

Si può osservare che le formule (2.56) e (2.57) possono essere considerate come un caso particolare di una di esse, per esempio la (2.57), dove $n \geq 1$ è fissato e D^k sta ad indicare k integrazioni se $k \leq 0$ e k derivazioni se $k > 0$.

2.3.2 Integrazione di ordine arbitrario

Senza entrare troppo nei dettagli, per estendere il concetto di integrazione di ordine intero ad ordini arbitrari si considera la formula (2.55) sostituendo il valore intero n con il parametro reale $p > 0$ ottenendo

$${}^{RL}D_t^{-p} f(t) = \frac{1}{\Gamma(p)} \int_a^t (t - \tau)^{p-1} f(\tau) d\tau \quad (2.58)$$

Si noti come nella (2.55) l'intero n debba soddisfare la condizione $n \geq 1$; la corrispondente condizione per p è più debole in quanto per l'esistenza dell'integrale (2.58) si deve avere $p > 0$.

Se $f(t)$ è continua per $t \geq a$, l'integrazione di Riemann-Liouville per ordini arbitrari gode della seguente proprietà

$${}^{RL}D_t^{-p} ({}^{RL}D_t^{-q} f(t)) = {}^{RL}D_t^{-p-q} f(t) \quad (2.59)$$

Ovviamente possiamo intercambiare i valori di p e q in modo da ottenere

$${}^{RL}D_t^{-p} ({}^{RL}D_t^{-q} f(t)) = {}^{RL}D_t^{-q} ({}^{RL}D_t^{-p} f(t)) = {}^{RL}D_t^{-p-q} f(t) \quad (2.60)$$

2.3.3 Derivazione di ordine arbitrario

La formulazione (2.57) per la derivata di ordine intero $k - n$ fornisce lo spunto per estendere il concetto ad ordini frazionari. Si procede lasciando l'intero k e sostituire l'intero n con il parametro reale α in modo che $k - \alpha > 0$. Ciò comporta

$${}^{RL}D_t^{k-\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(p)} \frac{d^k}{dt^k} \int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau \quad (2.61)$$

dove l'unica sostanziale restrizione per α è $\alpha > 0$ che è necessaria per la convergenza dell'integrale (2.61). Denotando $p = k - \alpha$ si ottiene

$${}^{RL}D_t^p f(t) = \frac{1}{\Gamma(k-p)} \frac{d^k}{dt^k} \int_a^t (t-\tau)^{k-p-1} f(\tau) d\tau \quad k-1 \leq p < k \quad (2.62)$$

oppure

$${}^{RL}D_t^p f(t) = \frac{d^k}{dt^k} \left({}^{RL}D_t^{-(k-p)} f(t) \right) \quad k-1 \leq p < k \quad (2.63)$$

Se $p = k - 1$ si ottiene una derivata ad ordine intero convenzionale come segue

$${}^{RL}D_t^{k-1} f(t) = \frac{d^k}{dt^k} \left({}^{RL}D_t^{-(k-(k-1))} f(t) \right) = \frac{d^k}{dt^k} \left({}^{RL}D_t^{-1} f(t) \right) = f^{(k-1)}(t)$$

Se $p = k \geq 1$

$${}^{RL}D_t^k f(t) = \frac{d^k}{dt^k} \left({}^{RL}D_t^{-(k-k)} f(t) \right) = \frac{d^k}{dt^k} \left({}^{RL}D_t^0 f(t) \right) = f^{(k)}(t)$$

Inoltre, per il differintegrale di Riemann-Liouville valgono le seguenti

$${}^{RL}D_t^p \left({}^{RL}D_t^{-p} f(t) \right) = f(t) \quad (2.64)$$

$${}^{RL}D_t^{-p} \left({}^{RL}D_t^p f(t) \right) = f(t) - \sum_{j=1}^k \left[{}^{RL}D_t^{p-j} f(t) \right]_{t=a} \frac{(t-a)^{p-j}}{\Gamma(p-j+1)} \quad (2.65)$$

Un caso particolare della (2.65) valido per $0 < p < 1$.

$${}^{RL}D_t^{-p} \left({}^{RL}D_t^p f(t) \right) = f(t) - \left[{}^{RL}D_t^{p-1} f(t) \right]_{t=a} \frac{(t-a)^{p-1}}{\Gamma(p)} \quad (2.66)$$

Le proprietà (2.64) e (2.65) sono un caso particolare delle seguenti più generali

$${}^{RL}D_t^p \left({}^{RL}D_t^{-q} f(t) \right) = {}^{RL}D_t^{p-q} f(t) \quad (2.67)$$

$${}^{RL}D_t^{-p} \left({}^{RL}D_t^q f(t) \right) = {}^{RL}D_t^{q-p} f(t) - \sum_{j=1}^k \left[{}^{RL}D_t^{q-j} f(t) \right]_{t=a} \frac{(t-a)^{p-j}}{\Gamma(p-j+1)} \quad (2.68)$$

2.3.4 Derivata frazionaria di $(t-a)^v$

Nel paragrafo seguente si vuole valutare la derivata di Riemann-Liouville ${}^{RL}D_t^p f(t)$ della funzione potenza

$$f(t) = (t-a)^v$$

dove ν è un numero reale. A questo scopo si assume $n - 1 \leq p < n$ e la definizione di derivata frazionaria di Riemann-Liouville

$${}^{RL}D_t^p f(t) = \frac{d^n}{dt^n} \left({}^{RL}D_t^{-(n-p)} f(t) \right) \quad n - 1 \leq p \leq n \quad (2.69)$$

Sostituendo nella formula di cui sopra l'espressione (2.69) per l'integrale frazionario di ordine $\alpha = n - p$ si ottiene

$${}^{RL}D_t^{-\alpha} ((t - a)^\nu) = \frac{\Gamma(\nu + 1)}{\Gamma(\nu + 1 + \alpha)} (t - a)^{\nu + \alpha} \quad (2.70)$$

da cui

$${}^{RL}D_t^p ((t - a)^\nu) = \frac{\Gamma(\nu + 1)}{\Gamma(\nu + 1 - p)} (t - a)^{\nu - p} \quad (2.71)$$

con l'integrabilità di $(t - a)^\nu$ l'unica restrizione per $f(t)$, vale a dire $\nu > -1$.

2.3.5 Composizione con derivate di ordine intero

In molte applicazioni pratiche si necessita la valutazione della composizione della derivata frazionaria di Riemann-Liouville con derivate di ordine intero. Senza riportare eccessive calcolazioni, si consideri la derivata di ordine n della derivata di Riemann-Liouville di ordine reale p . Dopo semplici calcolazioni, come nel caso della derivata frazionaria di Grunwald-Letnikov si evince che l'operatore ${}^{RL}D_t^p$ gode di commutativa con l'operatore $\frac{d^n}{dt^n}$ secondo la relazione seguente

$$\frac{d^n}{dt^n} \left({}^{RL}D_t^p f(t) \right) = {}^{RL}D_t^p \left(\frac{d^n f(t)}{dt^n} \right) = {}^{RL}D_t^{p+n} f(t) \quad (2.72)$$

se e solo se la funzione $f(t)$ soddisfa le condizioni

$$f^{(k)}(a) = 0 \quad k = 0, 1, 2, \dots, n - 1 \quad (2.73)$$

2.3.6 Composizione con derivate frazionarie

Si consideri la composizione fra due derivate frazionarie di Riemann-Liouville del tipo ${}^{RL}D_t^p$ $m - 1 \leq p < m$, e ${}^{RL}D_t^q$ $n - 1 \leq q < n$. Facendo uso della definizione di derivata di RL e della formula di composizione con derivate di ordine intero si può scrivere

$$\begin{aligned}
 {}^{RL}D_t^p({}^{RL}D_t^q f(t)) &= \frac{d^m}{dt^m} \left\{ {}^{RL}D_t^{-(m-p)} ({}^{RL}D_t^q f(t)) \right\} \\
 &= \frac{d^m}{dt^m} {}^{RL}D_t^{p+q-m} f(t) \\
 &\quad - \sum_{j=1}^n [{}^{RL}D_t^{q-j} f(t)]_{t=a} \frac{(t-a)^{m-p-j}}{\Gamma(1+m-p-j)} \\
 &= {}^{RL}D_t^{p+q} f(t) - \sum_{j=1}^n [{}^{RL}D_t^{q-j} f(t)]_{t=a} \frac{(t-a)^{-p-j}}{\Gamma(1-p-j)}
 \end{aligned} \tag{2.74}$$

Facendo gli stessi passaggi ma invertendo p e q e quindi m ed n si ottiene

$${}^{RL}D_t^q({}^{RL}D_t^p f(t)) = {}^{RL}D_t^{p+q} f(t) - \sum_{j=1}^m [{}^{RL}D_t^{p-j} f(t)]_{t=a} \frac{(t-a)^{-q-j}}{\Gamma(1-q-j)} \tag{2.75}$$

La comparazione tra la (2.74) e la (2.75) suggerisce che nel caso generale la derivata frazionaria di Riemann-Liouville ${}^{RL}D_t^p$ e ${}^{RL}D_t^q$ non godono di proprietà commutativa, con l'unica eccezione dove vale la seguente

$${}^{RL}D_t^p({}^{RL}D_t^q f(t)) = {}^{RL}D_t^q({}^{RL}D_t^p f(t)) = {}^{RL}D_t^{p+q} f(t) \tag{2.76}$$

se e solo se valgono simultaneamente

$$[{}^{RL}D_t^{p-j} f(t)]_{t=a} = 0 \quad j = 1, 2, \dots, m \tag{2.77}$$

$$[{}^{RL}D_t^{q-j} f(t)]_{t=a} = 0 \quad j = 1, 2, \dots, n \tag{2.78}$$

in modo che le sommatorie al secondo membro delle (2.74), (2.75) si annullino.

2.3.7 Link con la derivata di Grunwald-Letnikov

C'è un collegamento tra la derivata frazionaria di Riemann-Liouville e quella di Grunwald-Letnikov. Si suppone che la funzione $f(t)$ sia $(n-1)$ volte derivabile con continuità nell'intervallo $[a, T]$ e che $f^{(n)}(t)$ sia integrabile in $[a, T]$. Per ogni p , $(0 < p < n)$ la derivata di Riemann-Liouville ${}^{RL}D_t^p$ esiste e coincide con quella di Grunwald-Letnikov ${}^{GL}D_t^p$, e se $0 \leq m-1 \leq p \leq m \leq n$, per $a < t < T$, vale la seguente formulazione

$$\begin{aligned}
 {}^{RL}D_t^p f(t) &= {}^{GL}D_t^p f(t) \\
 &= \sum_{j=0}^{m-1} \frac{f^{(j)}(a)(t-a)^{j-p}}{\Gamma(1+j-p)} + \frac{1}{\Gamma(m-p)} \int_a^t \frac{f^{(m)}(\tau) d\tau}{(t-\tau)^{p-m+1}}
 \end{aligned} \tag{2.79}$$

Nel caso particolare di $f(t)$ continua e $f'(t)$ integrabile in $[a, T]$, per ogni p $(0 < p < 1)$ sia la derivata frazionaria di Riemann-Liouville che quella di Grunwald-Letnikov esistono e si possono essere espresse mediante

$${}^{RL}D_t^q f(t) = {}^{GL}D_t^q f(t) = \frac{f(a)(t-a)^{-p}}{\Gamma(1-p)} + \frac{1}{\Gamma(1-p)} \int_a^t \frac{f'(\tau)d\tau}{(t-\tau)^p} \quad (2.80)$$

2.4 Altri approcci

Nel presente paragrafo si presenteranno due generalizzazioni del concetto di differenziazione ed integrazione particolarmente importanti per lo sviluppo di metodologie atte alla risoluzione di problemi pratici: la derivata frazionaria di Caputo e l'approccio basato sulle funzioni generalizzate (distribuzioni).

L'approccio sviluppato da Caputo permette la formulazione di problemi ai valori iniziali per equazioni differenziali frazionarie coinvolgendo nelle condizioni iniziali derivate di ordine intero valutate al terminale $t = a$, come $y'(a), y''(a) \dots$

L'approccio alle funzioni generalizzate permette l'utilizzo della funzione $\delta(t)$ frequentemente utilizzata come modello per segnali.

2.4.1 Derivata frazionaria di Caputo

La definizione (2.62) della derivata frazionaria di Riemann-Liouville gioca un ruolo di fondamentale importanza nello sviluppo della teoria delle derivate ed integrali frazionari e delle loro applicazioni matematiche. Tuttavia, per le applicazioni fisiche emergono delle problematiche. Nella teoria della viscoelasticità e nella teoria dei materiali a memoria di forma, le derivate frazionarie sono utilizzate per una migliore descrizione della proprietà del materiale mediante set di equazioni differenziali. C'è la necessità, quindi, per la soluzione di tali equazioni, di definire condizioni iniziali che abbiano senso fisico ed interpretabile. Sfortunatamente, l'approccio di Riemann-Liouville conduce a condizioni al contorno che contengono valori assunti dalla derivata frazionaria rispetto al terminale $t = a$, per esempio

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow a} {}^{RL}D_t^{\alpha-1} f(t) &= b_1, \\ \lim_{t \rightarrow a} {}^{RL}D_t^{\alpha-2} f(t) &= b_2 \\ &\dots \\ \lim_{t \rightarrow a} {}^{RL}D_t^{\alpha-n} f(t) &= b_n \end{aligned} \quad (2.81)$$

con $b_k, k = 1, 2, \dots, n$ costanti.

Sebbene problemi differenziali a valori iniziali con queste condizioni possono essere risolte con successo, le loro soluzioni sono di poca utilità perché non c'è interpretazione fisica di tali valori iniziali. C'è, quindi, un conflitto tra l'aspetto matematico-teorico e le esigenze pratiche. Una soluzione a questo conflitto venne fornita da Caputo per la prima volta in [11] tramite la sua definizione di derivata frazionaria che porta il suo nome

$${}_a^C D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha-n)} \int_a^t \frac{f^{(n)}(\tau)d\tau}{(t-\tau)^{\alpha+1-n}} \quad n-1 < \alpha < n \quad (2.82)$$

Per $\alpha \rightarrow n$ la derivata di Caputo diviene la convenzionale derivata di ordine n della funzione $f(t)$. Infatti, assumendo $0 \leq n-1 < \alpha < n$ e che la funzione $f(t)$ abbia $n+1$ derivate limitate e continue in $[a, T]$ per ogni $T > a$ sia

$$\begin{aligned}
 \lim_{\alpha \rightarrow n} {}^c D_t^\alpha f(t) &= \lim_{\alpha \rightarrow n} \left(\frac{f^{(n)}(a)(t-a)^{n-\alpha}}{\Gamma(n-\alpha+1)} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{\Gamma(n-\alpha+1)} \int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha} f^{(n+1)}(\tau) d\tau \right) \\
 &= f^{(n)}(a) + \int_a^t f^{(n+1)}(\tau) d\tau = f^{(n)}(t)
 \end{aligned} \tag{2.83}$$

L'espressione di cui sopra, similmente alle derivate frazionarie di Grunwald-Letnikov e Riemann-Liouville, fornisce, quindi, una interpolazione tra ordini di differenziazione interi e frazionari.

Un'altra differenza tra la derivata di Riemann-Liouville e Caputo è che la derivata di Caputo di una costante è 0, mentre, nel caso di punto base a finito, la derivata di Riemann-Liouville della costante C è uguale a

$${}^c D_t^\alpha(C) = \frac{Ct^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} \tag{2.84}$$

Ponendo, invece, $a = -\infty$ nelle definizioni delle due derivate frazionarie si ottiene la medesima espressione

$${}^{RL} D_t^\alpha f(t) = {}^c D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_{-\infty}^t \frac{f^{(n)}(\tau) d\tau}{(t-\tau)^{\alpha+1-n}} \quad n-1 < \alpha < n \tag{2.85}$$

2.4.1.1 Derivata frazionaria di t^p

Si considera la definizione di derivata frazionaria di Caputo e $p \in \mathbb{R}, n-1 < \alpha < n, p > n-1$

$$\begin{aligned}
 {}^c D_t^\alpha(t^p) &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^t \frac{(\tau^p)^{(n)}}{(t-\tau)^{\alpha+1-n}} d\tau \\
 &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^t \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p-n+1)} \tau^{p-n} (t-\tau)^{n-\alpha-1} d\tau
 \end{aligned} \tag{2.86}$$

Operando con la sostituzione $\tau = \lambda t, 0 \leq \lambda \leq 1$ porta ad

$$\begin{aligned}
 {}^c D_t^\alpha(t^p) &= \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p-n+1)\Gamma(n-\alpha)} \int_0^1 (\lambda t)^{p-n} ((1-\lambda)t)^{n-\alpha-1} t d\lambda \\
 &= \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p-n+1)\Gamma(n-\alpha)} t^{p-\alpha} B(p-n+1, n-\alpha) \\
 &= \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p-\alpha+1)} t^{p-\alpha}
 \end{aligned} \tag{2.87}$$

Nel caso in cui $p \leq n-1, p, n \in \mathbb{N}$ si ottiene semplicemente $(t^p)^{(n)} = 0$.

Riassumendo si ottiene

$${}^c D_t^\alpha(t^p) = \begin{cases} \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p-\alpha+1)} t^{p-\alpha} & n-1 < \alpha < n, p > n-1 \\ 0 & p \in \mathbb{N}, n-1 < \alpha < n, p \leq n-1 \end{cases} \tag{2.88}$$

2.4.1.2 Derivata frazionaria di $e^{\lambda t}$

Per dedurre l'espressione voluta si considera in primo luogo il seguente teorema omettendone la dimostrazione, che fornisce un collegamento tra la derivata frazionaria di Riemann-Liouville e quella di Caputo:

Sia $t > 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $n - 1 < \alpha < n \in \mathbb{N}$, vale il seguente risultato

$${}_a^C D_t^\alpha f(t) = {}_a^R D_t^\alpha f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^{k-\alpha}}{\Gamma(k+1-\alpha)} f^{(k)}(0) \quad (2.89)$$

Si consideri ora la definizione () di cui sopra

$$\begin{aligned} {}_0^C D_t^\alpha (e^{\lambda t}) &= {}_0^R D_t^\alpha (e^{\lambda t}) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^{k-\alpha}}{\Gamma(k+1-\alpha)} (e^{\lambda t})^{(k)}(0) \\ &= t^{-\alpha} E_{1,1-\alpha}(\lambda t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^{k-\alpha}}{\Gamma(k+1-\alpha)} \lambda^k \\ &= \sum_{k=n}^{\infty} \frac{\lambda^k t^{k-\alpha}}{\Gamma(k+1-\alpha)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^{k+n} t^{k+n-\alpha}}{\Gamma(k+n+1-\alpha)} \\ &= \lambda^n t^{n-\alpha} E_{1,n-\alpha+1}(\lambda t) \end{aligned} \quad (2.90)$$

Come si può notare, la derivata di Caputo non è più una funzione esponenziale. È possibile ripristinare la sua natura agendo sul valore del terminale a ottenendo

$${}_{-\infty}^C D_t^\alpha (e^{\lambda t}) = \lambda^\alpha e^{\lambda t} \quad (2.91)$$

2.4.1.3 Derivata frazionaria di $\sin(\lambda t)$

Si consideri la seguente definizione in campo complesso di $\sin(\lambda t)$

$$\sin(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \quad z \in \mathbb{C}$$

da cui

$$\begin{aligned} {}_0^C D_t^\alpha (\sin(\lambda t)) &= {}_0^C D_t^\alpha \left(\frac{e^{i\lambda t} - e^{-i\lambda t}}{2i} \right) = \frac{1}{2i} \left({}_0^C D_t^\alpha (e^{i\lambda t}) - {}_0^C D_t^\alpha (e^{-i\lambda t}) \right) \\ &= \frac{1}{2i} \left((i\lambda)^n t^{n-\alpha} E_{1,n-\alpha+1}(i\lambda t) \right. \\ &\quad \left. - (-i\lambda)^n t^{n-\alpha} E_{1,n-\alpha+1}(-i\lambda t) \right) \\ &= -\frac{1}{2} i (i\lambda)^n t^{n-\alpha} \left(E_{1,n-\alpha+1}(i\lambda t) \right. \\ &\quad \left. - (-1)^n E_{1,n-\alpha+1}(-i\lambda t) \right) \end{aligned} \quad (2.92)$$

Anche in questo caso la derivata di Caputo non conserva la natura della funzione di partenza. Si agisce sul terminare a in modo che si ottenga

$${}_{-\infty}^C D_t^\alpha (\sin(\lambda t)) = \sin\left(t + \frac{\alpha\pi}{2}\right) \quad (2.93)$$

2.4.1.4 Derivata frazionaria di $\cos(\lambda t)$

Si consideri la seguente definizione in campo complesso di $\cos(\lambda t)$

$$\cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2i} \quad z \in \mathbb{C}$$

Procedendo con la stessa metodologia adottata per il calcolo della derivata frazionaria di $\sin(\lambda t)$ si ottiene

$$\begin{aligned} {}_0^C D_t^\alpha (\cos(\lambda t)) &= \\ &= \frac{1}{2} (i\lambda)^n t^{n-\alpha} \left(E_{1,n-\alpha+1}(i\lambda t) + (-1)^n E_{1,n-\alpha+1}(-i\lambda t) \right) \end{aligned} \quad (2.94)$$

Anche in questo caso la derivata di Caputo non conserva la natura della funzione di partenza. Si agisce sul terminare a in modo che si ottenga

$${}_{-\infty}^C D_t^\alpha (\cos(\lambda t)) = \cos\left(t + \frac{\alpha\pi}{2}\right) \quad (2.95)$$

2.4.2 Generalized Functions Approach (GFA)

Tale approccio si basa sull'osservazione che l'espressione

$$f^{(-n)}(t) = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_a^t (t-\tau)^{n-1} f(\tau) d\tau$$

può essere espressa tramite il prodotto di convoluzione tra la funzione $f(t)$ e la funzione potenza t^{n-1} :

$$f^{(-n)}(t) = f(t) * \frac{t^{n-1}}{\Gamma(n)} \quad (2.96)$$

con il simbolo $*$ prodotto di convoluzione così definito

$$f(t) * g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) g(t-\tau) d\tau$$

Si consideri la funzione $\Phi_p(t)$ definita nel modo seguente

$$\Phi_p(t) = \begin{cases} \frac{t^{p-1}}{\Gamma(p)} & t > 0 \\ 0 & t \leq 0 \end{cases} \quad (2.97)$$

Utilizzando tale funzione, la (2.96) può essere vista come un caso particolare della convoluzione più generale tra la funzione $f(t)$ e $\Phi_p(t)$:

$$f^{(-p)}(t) = f(t) * \Phi_p(t) \quad (2.98)$$

Per maneggiare allo stesso modo sia valori positivi che negativi di p è conveniente considerare la funzione $\Phi_p(t)$ come una funzione generalizzata con la seguente proprietà essenziale

$$\lim_{p \rightarrow -k} \Phi_p(t) = \Phi_{-k}(t) \delta^{(k)}(t) \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (2.99)$$

dove $\delta(t)$ è la funzione Delta di Dirac. La convoluzione della derivata k – esima della funzione $\delta(t)$ è fornita dalla seguente espressione

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \delta^{(k)}(t - \tau) d\tau = f^{(k)}(t) \quad (2.100)$$

Ovviamente se $p = n$, intero positivo, la formula (2.98) si riduce a (2.96). In accordo alle proprietà della funzione Delta di Dirac si ottiene

$$\begin{aligned} f^{(0)}(t) &= f(t) * \Phi_0(t) = f(t) * \delta(t) = f(t) \\ f^{(1)}(t) &= f(t) * \Phi_{-1}(t) = f(t) * \delta'(t) = f'(t) \\ &\dots \\ f^{(k)}(t) &= f(t) * \Phi_{-k}(t) = f(t) * \delta^{(k)}(t) = f^{(k)}(t) \end{aligned}$$

Quindi, sia derivate che integrali di ordine intero di funzioni generalizzate possono essere ottenute come caso particolare del prodotto di convoluzione (2.98) e ciò suggerisce la naturale estensione a $p \in \mathbb{R}$ come segue

$${}_a \tilde{D}_t^p f(t) = f(t) * \Phi_p(t) \quad (2.101)$$

In aggiunta, usando il GFA, si può stabilire un interessante link tra l'approccio di Caputo e quello di Riemann-Liouville. Considerando la funzione $\Phi_p(t)$, la derivata di Riemann-Liouville (2.62) può essere riscritta

$${}^{RL}D_t^p f(t) = \frac{d^n}{dt^n} \left(f(t) * \Phi_{n-p}(t) \right) \quad (2.102)$$

e la derivata di Caputo

$${}_a^C D_t^p f(t) = \left(\frac{d^n}{dt^n} f(t) * \Phi_{n-p}(t) \right) \quad (2.103)$$

La relazione (2.79) assume, pertanto, la forma seguente

$${}^{RL}D_t^p f(t) = {}_a^C D_t^p f(t) + \sum_{k=0}^{n-1} \Phi_{k-p+1}(t-a) f^{(k)}(a) \quad (2.104)$$

Assumendo $p \rightarrow n$, dove n è un intero positivo, ed usando la (2.99) si ottiene la seguente relazione

$${}^{RL}D_t^p f(t) = {}^cD_t^p f(t) + \sum_{k=0}^{n-1} \delta^{(n-k-1)}(t-a) f^{(k)}(a) \quad (2.105)$$

Comparando la (2.105) con la relazione tra derivate classiche $f_c^{(n)}(t)$ e derivate generalizzate $\tilde{f}^{(n)}(t)$

$$\tilde{f}^{(n)}(t) = f_c^{(n)}(t) + \sum_{k=0}^{n-1} \delta^{(n-k-1)}(t-a) f^{(k)}(a) \quad (2.106)$$

si conclude che la definizione di Riemann-Liouville è una generalizzazione della nozione di derivata di funzione generalizzata, mentre la derivata di Caputo è una generalizzazione del concetto di derivazione in senso classico.

2.5 Derivate sequenziali

In tutti gli approcci utilizzati sino ad ora, lo scopo principale risulta essere la “sostituzione” del parametro intero n di un operatore del tipo

$$\frac{d^n}{dt^n}$$

con un altro parametro non intero p . Tuttavia, c’è un altro modo, meno conosciuto ma con una grande importanza in molte applicazioni, tra cui il metodo semianalitico di decomposizione Adomia presentato nel seguito, per effettuare tale “sostituzione”. L’approccio nuovo è basato sull’osservazione che, infatti, la derivazione sino all’ordine n è semplicemente una serie di derivazioni del primo ordine del tipo

$$\frac{d^n}{dt^n} f(t) = \underbrace{\frac{d}{dt} \frac{d}{dt} \cdots \frac{d}{dt}}_n f(t) \quad (2.107)$$

Se ci fosse un modo elegante per “sostituire” la derivata del primo ordine $\frac{d}{dt}$ con la derivata di ordine non intero D^α , dove $0 \leq \alpha \leq 1$, sarebbe possibile considerare un analogo della (2.107) come segue

$$D^{n\alpha} f(t) = \underbrace{D^\alpha D^\alpha \cdots D^\alpha}_n f(t) \quad (2.108)$$

Tale struttura viene chiamata differenziazione sequenziale. Diversi approcci possono essere ottenuto interpretando l’operatore D^α come derivata di Grunwald-Letnikov, Riemann-Liouville, Caputo od altri tipi di derivate frazionarie non considerate in questa trattazione.

Seguendo l’approccio della derivazione sequenziale, è possibile esprimere la derivata frazionaria di Riemann-Liouville come segue

$${}^{RL}D_t^p f(t) = \underbrace{\frac{d}{dt} \frac{d}{dt} \cdots \frac{d}{dt}}_n {}_aD_t^{-(n-p)} f(t) \quad n-1 \leq p \leq n \quad (2.109)$$

mentre la derivata frazionaria di Caputo può essere enunciata come

$${}_a^c D_t^p f(t) = {}_a^{RL} D_t^{-(n-p)} \underbrace{\frac{d}{dt} \frac{d}{dt} \dots \frac{d}{dt}}_n f(t) \quad n-1 \leq p \leq n \quad (2.110)$$

2.6 Proprietà' delle derivate frazionarie

Questo breve paragrafo pone l'attenzione su alcune proprietà comuni dei diversi approcci per derivazione ed integrazione frazionaria, frequentemente utilizzate nelle applicazioni

2.6.1 Linearità'

Similmente all'integrazione e derivazione di ordine intero, gli operatori differenziali frazionari godono della ben nota proprietà di linearità

$$D^p(\lambda f(t) + \mu g(t)) = \lambda D^p f(t) + \mu D^p g(t) \quad (2.111)$$

dove D^α denota una qualsiasi tipologia di derivazione frazionaria.

2.6.2 Regola di Leibniz per derivate frazionarie

Se $f(\tau)$ è continua in $[a, t]$ e $\varphi(\tau)$ ha $n + 1$ derivate continue in $[a, t]$, la derivata frazionaria del prodotto $\varphi(t)f(t)$ è data dalla seguente formulazione

$${}_a D_t^p (\varphi(t)f(t)) = \sum_{k=0}^n \binom{p}{k} \varphi^{(k)}(t) {}_a D_t^{p-k} f(t) - R_n^p(t) \quad (2.112)$$

dove $n \geq p + 1$ e

$$R_n^p(t) = \frac{1}{n! \Gamma(-p)} \int_a^t (t - \tau)^{-p-1} f(\tau) d\tau \int_\tau^t \varphi^{(n+1)}(\xi) (\tau - \xi)^n d\xi \quad (2.113)$$

La somma (2.112) può essere considerata come una somma parziale di una serie infinita e $R_n^p(t)$ il resto.

Capitolo 3

Diffusivita' anomala: Continuous Time Random Walks

Nel presente Capitolo si vuole fornire una panoramica generale in merito a problematiche di diffusione ed avvezione frazionarie in spazio e tempo da un punto di vista statistico. Lo strumento matematico principale è la teoria dei Continuous Time Random Walks (CTRW), la quale consente di formalizzare analiticamente processi di carattere stocastico tipici dei processi diffusivi standard (Diffusion Equation – DE) ed anomali (Fractional Diffusion Equation - FRDE). La trattazione di seguito riportata viene interamente ripresa dal Report di [12].

3.1 Introduzione

La diffusività anomala è un campo ben consolidato nel panorama scientifico globale ed ancor oggi suscita particolare interesse per la sua versatilità di impiego e capacità di giustificare numerosi fenomeni che altrimenti con le trattazioni standard non sarebbe possibile. I sistemi complessi e lo studio delle loro proprietà dinamiche, dunque, sono divenuti priorità per studiosi in tutto il mondo.

Questi fenomeni sono caratterizzati da una grande diversità delle unità elementari coinvolte, solide interazioni fra loro ed un comportamento evolutivo nel tempo non prevedibile o anomalo. I sistemi complessi ed il loro studio occupano un ruolo dominante nelle scienze abbracciando un ampio range di applicazioni, tra cui l'ottica, cristalli liquidi, polimeri, proteine, biopolimeri, organismi ed ecosistemi.

In generale, l'evoluzione temporale di, ed all'interno, di questi sistemi, devia dalle leggi standard. Con lo sviluppo di sistemi di sperimentazione più avanzati o con la combinazione di diverse metodologie di ricerca, queste deviazioni sono divenute più evidenti, anche grazie all'acquisizione continua di dati in materia.

Quindi la decadenza temporale di tali eventi non segue la classica formulazione di Debye

$$\Phi(t) = \Phi_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (3.1)$$

ma spesso può essere descritta dalla legge esponenziale di Kohlrausch-Williams-Watts

$$\Phi(t) = \Phi_0 e^{-\left(\frac{t}{\tau}\right)^\alpha} \quad (3.2)$$

con valori di $0 < \alpha < 1$, o tramite la seguente

$$\Phi(t) = \Phi_0 \left(1 + \frac{t}{\tau}\right)^{-n} \quad (3.3)$$

con $n > 0$. È comunque possibile osservare comportamenti intermedi fra la legge a decadimento esponenziale e quella polinomiale.

Allo stesso modo, solitamente, i processi diffusivi in vari sistemi complessi non seguono più la statistica basata sulla distribuzione Gaussiana, e quindi, la seconda legge di Fick fallisce nel tentativo di descrivere fisicamente tali fenomeni. Si possono osservare, infatti, deviazioni dalla dipendenza lineare dello Spostamento Medio Quadratico (Mean Squared Displacement – MSD) descritta da

$$\langle x^2(t) \rangle \sim K_1 t \quad (3.4)$$

che è caratteristica del moto Browniano e, come tale, è una conseguenza del teorema del limite centrale e della natura Markoviana del processo stocastico di partenza.

Nel caso di diffusività anomala, invece, si evince una dipendenza non più lineare del MSD nel corso del tempo che può assumere diversi andamenti. Nel corso della trattazione si considererà la dipendenza non lineare con funzione potenza del tipo seguente

$$\langle x^2(t) \rangle \sim K_\alpha t^\alpha \quad (3.5)$$

I problemi che seguono andamenti non lineari di questo tipo, indipendentemente dalla tipologia di funzione assegnata per MSD, sono caratterizzati dalla non applicabilità del teorema del limite centrale a causa della natura statistica delle distribuzioni di probabilità coinvolta nella descrizione del fenomeno considerato. Una generalizzazione di tale teorema è stata proposta da Lèvy-Gnedenko, di cui problemi di diffusività anomala soddisfano le ipotesi, ammettendo nella trattazione anche situazioni in cui non tutti i momenti statistici sono definiti.

In relazione al valore dell'esponente di diffusività anomala α si possono distinguere diversi tipi di domini per il trasporto anomalo di sostanza come rappresentato in figura 3.1 Nella trattazione seguente, maggiore attenzione verrà posta nella descrizione dei fenomeni subdiffusivi, corrispondenti a valori $0 < \alpha < 1$.

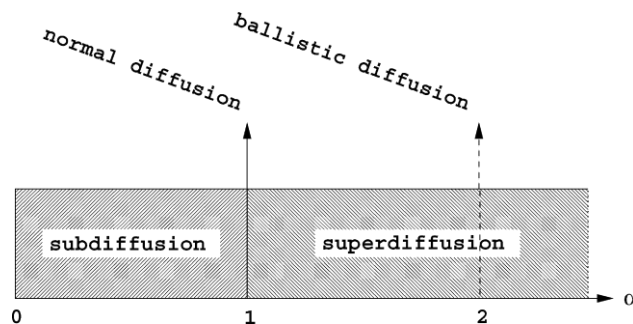


Figura 3-1 differenti domini di diffusività anomala definiti attraverso MSD di equazione (5) dove si ha subdiffusione per $0 < \alpha < 1$ e superdiffusione per $\alpha > 1$. Per $\alpha = 1$ si ritrova il classico moto Browniano. Un altro caso speciale si ha per $\alpha = 2$ che prende il nome di diffusione balistica

3.2 Da CTRW a FRDE

3.2.1 Introduzione

Scopo del presente paragrafo è quello di derivare l'equazione differenziale a derivate parziali frazionaria in spazio-tempo per fenomeni di diffusività anomala usufruendo degli strumenti forniti dalla teoria dei Cammini Casuali (Continuous Time Random Walks - CTRW). Si ricava in primo luogo l'equazione governante i problemi di diffusività classica, per poi rilassare le ipotesi e, ripercorrendo i medesimi passaggi algebrici, ottenere la FRDE.

3.2.2 Moto Browniano

Con il termine moto browniano si fa riferimento al moto disordinato di particelle sufficientemente piccole (aventi diametro dell'ordine del micrometro) da essere sottoposte a una forza di gravità trascurabile, presenti in fluidi o sospensioni fluide o gassose, ad esempio il fumo, e osservabile al microscopio. Il fenomeno fu scoperto agli inizi dell'Ottocento dal botanico scozzese Robert Brown, e modellizzato nel 1905 dal fisico teorico tedesco Albert Einstein.

Il termine viene usato per indicare sia il fenomeno naturale sia la sua rappresentazione matematica, la quale può descrivere l'andamento temporale di una classe molto ampia di fenomeni casuali.

Un tipico moto Browniano è schematizzato tramite un traliccio bidimensionale come in figura 3.2 sottostante.

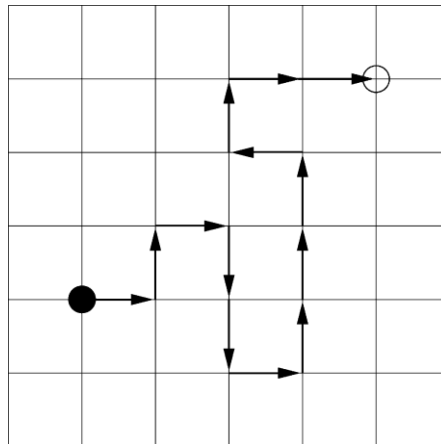


Figura 3-2 Rappresentazione schematica di un cammino casuale e moto Browniano. La particella salta ad ogni step temporale costante $t = 0, \Delta t, 2\Delta t, \dots, n\Delta t, \dots$ seguendo una direzione casuale e coprendo la distanza Δx costante

Considerando una suddivisione discreta degli intervalli di tempo (time steps) di ampiezza costante Δt , la particella test ha la possibilità di “saltare” in una delle posizioni immediatamente prossime alla posizione corrente, immaginando il traliccio suddiviso discretamente tramite una griglia di ampiezza costante Δx , in modo del tutto casuale. Un tale processo è descritto dalla seguente equazione governante

$$W_j(t + \Delta t) = \frac{1}{2} W_{j-1}(t) + \frac{1}{2} W_{j+1}(t) \quad (3.6)$$

dove il pedice denota la posizione del corpo supposto in una griglia monodimensionale. Tale equazione definisce la funzione densità di probabilità (pdf) di essere nella posizione j al tempo $t + \Delta t$ in funzione della popolazione dei due posti immediatamente adiacenti $j \pm 1$ al tempo t . Il fattore moltiplicativo $1/2$ esprime l'isotropia dei "salti" e quindi, la stessa probabilità di scelta di un cammino piuttosto che l'altro. Passando al continuo tramite il limite $\Delta t \rightarrow 0$ e $\Delta x \rightarrow 0$, sviluppando in serie di Taylor in Δt e Δx si ottiene

$$W_j(t + \Delta t) = W_j(t) + \Delta t \frac{\partial W_j}{\partial t} + O([\Delta t]^2) \quad (3.7)$$

e

$$W_{j\pm 1}(t) = W(x, t) \pm \Delta x \frac{\partial W}{\partial x} + \frac{(\Delta x)^2}{2} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + O([\Delta x]^3) \quad (3.8)$$

conducendo alla classica Equazione di diffusione DE

$$\frac{\partial W(x, t)}{\partial t} = K_1 \frac{\partial^2 W(x, t)}{\partial x^2} \quad (3.9)$$

dove

$$K_1 \equiv \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta t \rightarrow 0}} \frac{(\Delta x)^2}{2\Delta t} \quad (3.10)$$

e K_1 è chiamata costante di diffusione che ha dimensioni fisiche $[K_1] = cm^2s^{-1}$.

L'equazione appena ricavata è una delle più importanti relazioni in fisica, essendo una diretta conseguenza del teorema del limite centrale. Supponendo che i primi due momenti di pdf, che descrivono appropriatamente la distanza normalizzata coperta in un "salto" e la varianza, $\bar{X} = \sum_i X_i$ e $\overline{X^2}$, come anche il tempo medio Δt fra due eventi successivi, esistano, il teorema del limite centrale assicura che il processo casuale è caratterizzato da una velocità media $V = \bar{X}/\Delta t$ e da un coefficiente di diffusione $K = (2\Delta t)^{-1}[\overline{X^2} - \bar{X}^2]$.

Per tempi di analisi lunghi, considerando un elevato numero di time steps, la probabilità di occupare la posizione x al tempo t di un fenomeno governato dall'equazione DE sopra ricavata, è data da una funzione con andamento di una Gaussiana del tipo

$$W(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi K_1 t}} e^{\left(-\frac{x^2}{4K_1 t}\right)} \quad (3.11)$$

valida per condizioni iniziali del tipo $W_0(x) \equiv \lim_{t \rightarrow 0^+} W(x, t) = \delta(x)$.

3.2.3 CTRW per FRDE

Con lo scopo di generalizzare quanto desunto nei paragrafi precedenti, si sceglie nuovamente la teoria CTRW come punto di partenza. L'idea di fondo è che la

lunghezza di un determinato “salto”, come il tempo trascorso fra due eventi successivi sono definiti in relazione ad una pdf $\psi(x, t)$ che sarà indicata come “jump pdf”. Da questa possono essere dedotte, la “jump length pdf”

$$\lambda(x) = \int_0^{\infty} \psi(x, t) dt \quad (3.12)$$

e “waiting time pdf”

$$w(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x, t) dx \quad (3.13)$$

$\lambda(x)dx$ indica la probabilità di avere una lunghezza del “salto” nell’intervallo $(x, x + dx)$ e $w(t)dt$ la probabilità di manifestarsi un tempo di attesa nell’intervallo $(t, t + dt)$. Se la lunghezza dei salti e la distribuzione dei tempi fra un evento e l’altro sono variabili stocastiche indipendenti si ottiene la seguente formulazione decomposta $\psi(x, t) = w(t)\lambda(x)$ per la jump pdf. Se, al contrario, sono dipendenti valgono le seguenti relazioni $\psi(x, t) = p(x|t)w(t)$ oppure $\psi(x, t) = p(t|x)\lambda(x)$, dove un salto di una certa lunghezza impiega un certo lasso di tempo per essere effettuato, o viceversa, in un prefissato time step, il “passeggiatore” può percorrere una al massimo una certa distanza. Nella trattazione seguente si considererà il caso di variabili indipendenti. Una visualizzazione schematica del CTRW considerato è rappresentata nell’immagine seguente.

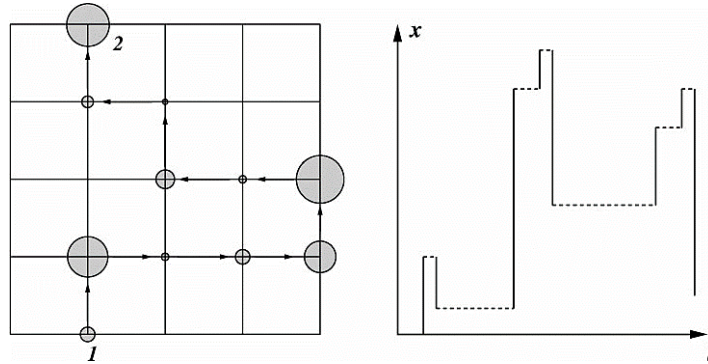


Figura 3-3 un modello di Continuous time random walk (CTRW). A sinistra un CTRW su un dominio bidimensionale generalizzando la situazione presentata nella figura 3.2. I tempi di attesa sono rappresentati da dei cerchi in cui il diametro di ciascuno è proporzionale al tempo di attesa speso in una determinata posizione prima di saltare al prossimo evento. La lunghezza dei salti è costante. Sulla destra un diagramma (x, t) monodimensionale di un processo CTRW dove sia la lunghezza dei salti che i tempi di attesa sono determinati da funzioni di probabilità specifiche.

Differenti tipi di CTRW possono essere modellati dal seguente tempo caratteristico

$$T = \int_0^{\infty} w(t) t dt \quad (3.14)$$

e dalla varianza della lunghezza dei salti

$$\Sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda(x)x^2 dx \quad (3.15)$$

Queste possono essere finite o divergenti rispettivamente. Seguendo tali definizioni uno specifico CTRW può essere modellato attraverso la seguente equazione generalizzata [13]

$$\eta(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \eta(x', t') \psi(x - x', t - t') dx' dt' + \delta(x) \delta(t) \quad (3.16)$$

che lega la pdf $\eta(x, t)$ della posizione x appena raggiunta al tempo t con l'evento legato alla posizione x' appena raggiunta al tempo t' , $\eta(x', t')$. La seconda somma al secondo membro è legata alla condizione iniziale scelta, che nel caso in esame è la Delta di Dirac $\delta(x)$.

Di conseguenza, la pdf $W(x, t)$ di giungere in x al tempo t è data dalla seguente

$$W(x, t) = \int_0^t \eta(x, t') \Psi(t - t') dt' \quad (3.17)$$

dove

$$\Psi(t) = 1 - \int_0^t w(t') dt' \quad (3.18)$$

definisce la probabilità che nessun salto avvenga durante l'intervallo $(0, t)$. Nello spazio di Laplace-Fourier la pdf $W(x, t)$ obbedisce alla seguente relazione algebrica

$$W(k, u) = \frac{1 - w(u)}{u} \frac{W_0(k)}{1 - \psi(k, u)} \quad (3.19)$$

dove $W_0(k)$ è la trasformata di Fourier della condizione iniziale $W_0(x)$.

3.2.4 Ritorno al moto Browniano

Si considerano ora differenti casi di CTRW definiti tramite la jump pdf disaccoppiata $\psi(x, t) = w(t)\lambda(x)$. Se sia T che Σ^2 sono finiti, il passaggio al limite per tempi molto lunghi restituisce un moto Browniano. Si consideri, ad esempio, una $w(t) = \tau^{-1} \exp(-t/\tau)$ con $T = \tau$, assieme ad una pdf Gaussiana per la lunghezza dei salti $\lambda(x) = (4\pi\sigma^2)^{-1/2} \exp(-x^2/(4\sigma^2))$ con $\Sigma^2 = 2\sigma^2$. Le corrispondenti trasformate di Laplace e Fourier assumono le forme

$$w(u) \sim 1 - u\tau + O(\tau^2) \quad (3.20)$$

$$\lambda(k) \sim 1 - \sigma^2 k^2 + O(k^4) \quad (3.21)$$

Ogni coppia di pdfs con T e Σ^2 finiti conducono allo stesso risultato. Inserendo $w(u)$ e $\lambda(k)$ all'interno dell'espressione di $W(k, u)$ si può riottenere, per condizioni iniziali $W_0(x) = \delta(x)$,

$$W(k, u) = \frac{1}{u + K_1 k^2} \quad (3.22)$$

con $K_1 \equiv \sigma^2/\tau$. Anti-trasformando alle coordinate (x, t) si ottiene la classica Gaussiana

3.2.5 Lunghe pause: FRDE per subdiffusione

Nel caso in cui il tempo caratteristico T diverga, ma la varianza Σ^2 risulti finita si ottengono processi denominati Fractal Time Random Walk (FTRW). Per questo fine si utilizzano delle waiting-time pdf caratterizzate da lunghe code e con comportamento asintotico

$$w(t) \sim A_\alpha (\tau/t)^{1+\alpha} \quad (3.23)$$

per $0 < \alpha < 1$. La sua trasformata di Laplace risulta

$$w(u) \sim 1 - (u\tau)^\alpha \quad (3.24)$$

Conseguentemente, assieme ad una Gaussiana jump length pdf caratterizzata dall'equazione (3.21), la pdf $W(k, u)$ nello spazio di Fourier-Laplace diviene

$$W(k, u) = \frac{W_0(k)/u}{1 + K_\alpha u^{-\alpha} k^2} \quad (3.25)$$

con $(k, u) \rightarrow (0, 0)$. Utilizzando le regole di integrazione per il calcolo frazionario

$$\mathcal{L}\{ {}_0D_t^{-p} W(x, t) \} = u^{-p} W(x, u), \quad p \geq 0 \quad (3.26)$$

si ottiene l'equazione integrale frazionaria seguente

$$W(x, t) - W_0(x) = {}_0D_t^{-\alpha} K_\alpha \frac{\partial^2}{\partial x^2} W(x, t) \quad (3.27)$$

Applicando l'operatore differenziale $\partial/\partial t$ si ricava la FRDE

$$\frac{\partial}{\partial t} W(x, t) = {}_0D_t^{1-\alpha} K_\alpha \frac{\partial^2}{\partial x^2} W(x, t) \quad (3.28)$$

con ${}_0D_t^{1-\alpha}$ l'operatore di Riemann-Liouville.

Calcolando il MSD attraverso la relazione $\langle x^2 \rangle = \lim_{k \rightarrow 0} \{ -(d^2/dk^2) W(k, u) \}$ e successivamente anti-trasformando secondo Laplace si ottiene

$$\langle x^2(t) \rangle = \frac{2K_\alpha}{\Gamma(1 + \alpha)} t^\alpha \quad (3.29)$$

Riscrivendo in modo alternativo la FRDE

$${}_0D_t^\alpha W(x, t) - \frac{t^{-\alpha}}{\Gamma(1 - \alpha)} W_0(x) = K_\alpha \frac{\partial^2}{\partial x^2} W(x, t) \quad (3.30)$$

si nota che il termine $W_0(x)$ decade con legge potenza negativa $t^{-\alpha}$ e non con velocità esponenziale tipica della diffusività standard. Inoltre, per $\alpha \rightarrow 1$, la FRDE si riduce alla classica seconda legge di Fick.

La costante generalizzata di diffusione K_α è definita come segue

$$K_\alpha \equiv \sigma^2/\tau^2 \quad (3.31)$$

Una soluzione analitica in forma chiusa della FRDE può essere ottenuta in termini delle funzioni di Fox

$$W(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi K_\alpha t^\alpha}} H_{1,2}^{2,0} \left[\frac{x^2}{4K_\alpha t^\alpha} \middle| \begin{matrix} (1 - \alpha/2, \alpha) \\ (0,1), (\frac{1}{2}, 1) \end{matrix} \right] \quad (3.32)$$

oppure in forma alternativa

$$W(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4K_\alpha t^\alpha}} H_{1,1}^{1,0} \left[\frac{|x|}{\sqrt{K_\alpha t^\alpha}} \middle| \begin{matrix} (1 - \alpha/2, \alpha/2) \\ (0,1) \end{matrix} \right] \quad (3.33)$$

avendo usato la definizione di funzioni di Fox e legge di duplicazione della funzione Gamma.

A causa delle potenze di ordine non intero della variabile di Laplace u nell'espressione di $W(k, u)$, una diretta anti-trasformazione non è tabellata. Ci sono tre metodologie per tale scopo: il primo si basa sugli studi di Wyss [14] e Schneider & Wyss [15] e sull'uso della trasformata di Mellin, che può aggirare il problema in modo efficace; il secondo si basa sulla definizione diretta di funzioni di Fox e sulle proprietà relative alla sua trasformata di Laplace e Fourier; il terzo metodo prevede che prima si inverta secondo Fourier $W(k, u)$ ottenendo

$$W(x, u) = \frac{1}{2} u^{\alpha/2 - 1} e^{-|x|u^{\alpha/2}} \quad (3.34)$$

espandere la funzione esponenziale secondo Taylor e successivamente invertire ogni singolo termine. Il risultato finale è una serie di potenze con struttura molto simile alla (3.33).

Utilizzando alcuni teoremi standard riguardanti le funzioni di Fox, si può derivare il comportamento asintotico

$$\begin{aligned} W(x, t) &= \frac{1}{\sqrt{4\pi K_\alpha t^\alpha}} \sqrt{\frac{1}{2 - \alpha}} \left(\frac{2}{\alpha}\right)^{\frac{1-\alpha}{2-\alpha}} \left(\frac{|x|}{\sqrt{K_\alpha t^\alpha}}\right)^{-\frac{1-\alpha}{2-\alpha}} e^{\left(-\frac{2-\alpha}{2} \left(\frac{\alpha}{2}\right)^{\frac{\alpha}{2-\alpha}} \left(\frac{|x|}{\sqrt{K_\alpha t^\alpha}}\right)^{\frac{1-\alpha}{2-\alpha}}\right)} \end{aligned} \quad (3.35)$$

valido per $|x| \gg \sqrt{K_\alpha t^\alpha}$. Si può, inoltre, esprimere attraverso una espansione in serie della forma seguente

$$W(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4K_\alpha t^\alpha}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! \Gamma(1 - \alpha[n + 1]/2)} \left(\frac{x^2}{K_\alpha t^\alpha}\right)^{n/2} \quad (3.36)$$

rendendola più appetibile per impegni computazionali. Se α è un numero razionale piuttosto che reale, la funzione di Fox $H_{1,2}^{2,0}$ e $H_{1,1}^{1,0}$ possono essere semplificate. Ad

esempio, considerando un valore di $\alpha = 1/2$ ed utilizzando la funzione G di Meijer si ottiene

$$\begin{aligned}
 W(x, t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi^2 K_{1/2} t^{1/2}}} H_{0,2}^{2,0} \left[\frac{x^2}{8K_{1/2} t^{1/2}} \middle| \overline{(0,1)}, \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right) \right] \\
 &= \frac{1}{\sqrt{8\pi^3 K_{1/2} t^{1/2}}} H_{0,3}^{3,0} \left[\left(\frac{x^2}{16K_{1/2} t^{1/2}}\right)^2 \middle| \overline{(0,1)}, \left(\frac{1}{4}, 1\right), \left(\frac{1}{2}, 1\right) \right] \\
 &= \frac{1}{\sqrt{8\pi^3 K_{1/2} t^{1/2}}} G_{0,3}^{3,0} \left[\left(\frac{x^2}{16K_{1/2} t^{1/2}}\right)^2 \middle| 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2} \right]
 \end{aligned} \tag{3.37}$$

avendo utilizzato due volte la formula di duplicazione della funzione Gamma di Eulero nell'integrale di Mellin-Barnes.

Una rappresentazione grafica del "propagatore" $W(x, t)$ è considerata qui sotto per un caso di subdiffusione con $\alpha = 1/2$, comparata con la diffusione standard la cui pdf è, come precedentemente dimostrato, governata da una Gaussiana in cui si vedono chiaramente cuspidi pronunciate nel caso anomalo.

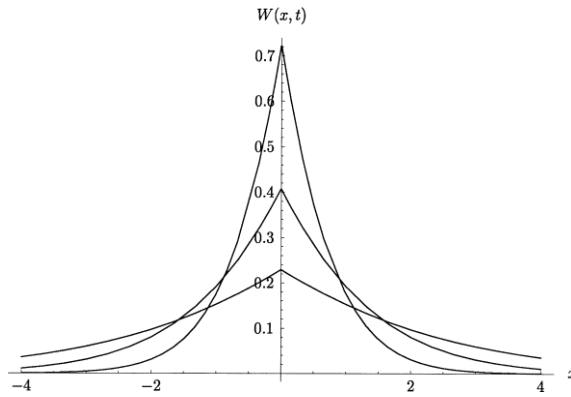


Figura 3-4 la funzione $W(x, t)$ per processi subdiffusivi con esponente $\alpha = 1/2$ rappresentata per $t = 0.1, 1, 10$. La forma a cuspidi è ben distinta

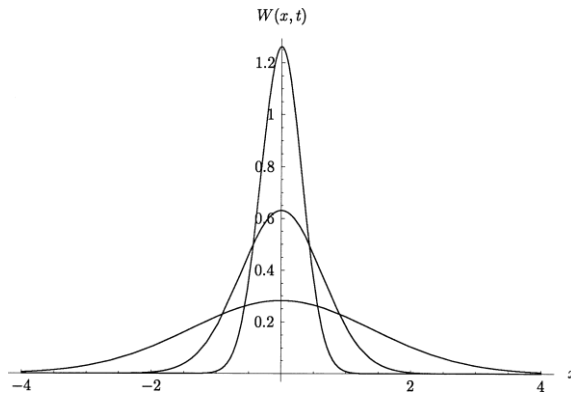


Figura 3-5 la funzione $W(x, t)$ per un moto Browniano ($\alpha = 1$) per i tempi $t = 0.05, 0.2, 1$. La forma più arrotondata e liscia vicino all'origine è evidente rispetto alla soluzione in figura 3.4

Si noti, inoltre, il diverso decadimento della soluzione tra il comportamento esponenziale della Gaussiana e quello “power-like” tipico dei fenomeni subdiffusivi anomali. In particolare, i singoli modi dell’operatore differenziale governante l’equazione frazionaria in tempo della diffusione (3.28) decade secondo un andamento del tipo Mittag-Leffler seguente

$$W(k, t) = E_{\alpha}(-K_{\alpha}k^2t^{\alpha}) \quad (3.38)$$

con un comportamento asintotico $W(k, t) \sim (K_{\alpha}k^2t^{\alpha}\Gamma(1 - \alpha))^{-1}$, completamente diverso dal rilassamento esponenziale di norma registrato in fenomeni standard diffusivi.

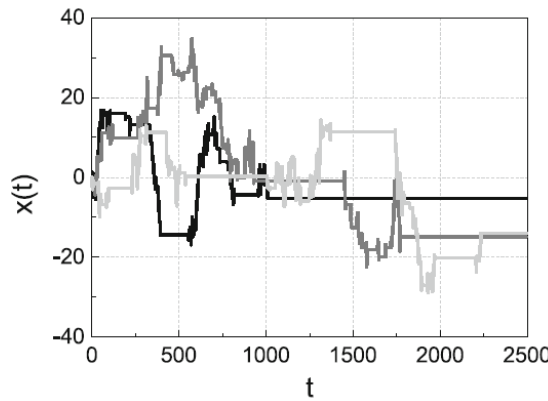


Figura 3-6 tre differenti rappresentazioni di fractal time random walk in una dimensione per un ordine di derivazione frazionario $\alpha = 0.8$ in equazione (3.28) [16]

3.2.6 Lunghi salti: Voli di Levy

Il caso opposto di tempo caratteristico T finito e varianza Σ^2 divergente può essere modellato attraverso una funzione di attesa Poissoniana ed una distribuzione di Lèvy per la lunghezza dei salti della tipologia seguente

$$\lambda(k) = e^{-\sigma^{\mu}|k|^{\mu}} \sim 1 - \sigma^{\mu}|k|^{\mu} \quad (3.39)$$

per valori $1 < \mu < 2$, da cui si deduce il comportamento asintotico

$$\lambda(x) \sim A_{\mu}\sigma^{-\mu}|x|^{-1-\mu} \quad (3.40)$$

per $|x| \gg \sigma$. Il processo è Markoviano grazie a, valore finito di T . Sostituendo l’espansione asintotica nella relazione (3.19) si ottiene

$$W(k, u) = \frac{1}{u + K^{\mu}|k|^{\mu}} \quad (3.41)$$

dalla quale, una volta anti-trasformato secondo Fourier e Laplace, si desume la FRDE

$$\frac{\partial}{\partial t} W(x, t) = K^{\mu} {}_{-\infty}D_x^{\mu} W(x, t) \quad (3.42)$$

dove ${}_{-\infty}D_x^{\mu}$ è l’operatore di Weyl che nel caso monodimensionale è equivalente all’operatore ∇^{μ} di Riesz.

Il coefficiente di diffusione generalizzato si esprime ora secondo l'espressione

$$K^\mu \equiv \sigma^\mu / \tau \quad (3.43)$$

ed assume le dimensioni fisiche di $[K^\mu] = cm^\mu s^{-1}$. La trasformata di Fourier del "propagatore" $W(x, t)$ può essere prontamente computata, ottenendo

$$W(k, t) = e^{(-K^\mu t |k|^\mu)} \quad (3.44)$$

che non è altro che la funzione caratteristica di una distribuzione di Levy centrata e simmetrica.

In fig. 3.7 è rappresentata una simulazione computazionale di un "volo" di Levy sulla destra, in comparazione alla traiettoria di un cammino casuale dotato di varianza Σ^2 finita, per lo stesso numero di step. A causa della natura del comportamento asintotico della jump length pdf, salti molto lunghi possono presentarsi con una maggiore probabilità rispetto al decadimento esponenziale delle pdf legate a fenomeni diffusivi Gaussiani. Un'altra conseguenza della natura matematica dell'espressione (3.42) è la formazione dei cosiddetti "cluster" in cui il moto della particella che percorre la sua traiettoria è interrotta da lunghe pause in cui il moto locale continua ad una scala inferiore. È possibile trovare cluster all'interno dei cluster stessi dando al processo diffusivo anomalo un carattere frattale. Al contrario, la traiettoria rappresentante $\Sigma^2 < \infty$ riempie completamente il dominio nel quale avviene il processo, senza condurre a cluster, dato che, tutti i salti sono circa della stessa lunghezza.

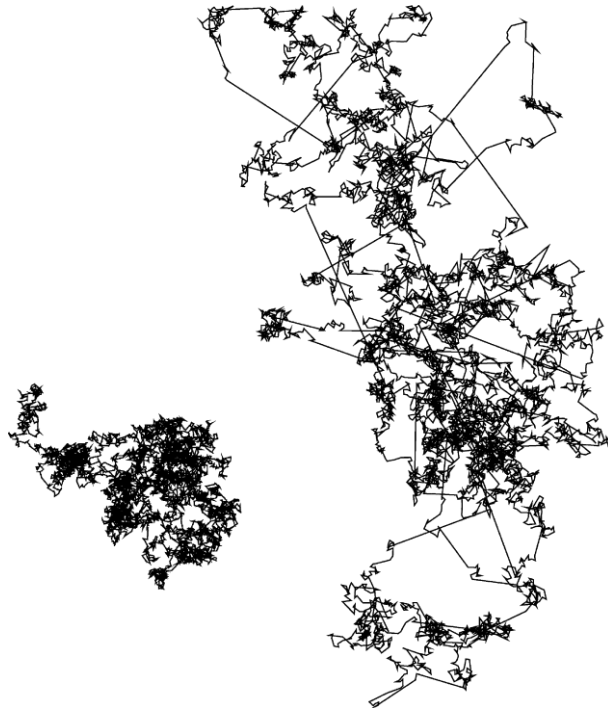


Figura 3-7 Comparazione fra traiettorie di un processo Browniano a sinistra ed un cammino di Lévy con $\mu = 1.5$ sulla destra. Sebbene le traiettorie siano statisticamente simili, i cammini descritti dal processo di Lévy possiedono una struttura frattale caratterizzata da "cluster" composti da step molto piccoli e connessi da lunghi salti. Entrambi i cammini fanno riferimento allo stesso numero di step (approssimativamente 7000)

La soluzione della FRDE (3.42) nello spazio delle coordinate (x, t) può essere nuovamente ottenuta analiticamente facendo uso ancora una volta delle funzioni di Fox, ottenendo la seguente formulazione.

$$W(x, t) = \frac{1}{\mu|x|} H_{2,2}^{1,1} \left[\frac{|x|}{(K^\mu t)^{1/\mu}} \middle| \begin{matrix} (1, \frac{1}{\mu}), (1, \frac{1}{2}) \\ (1, 1), (1, \frac{1}{2}) \end{matrix} \right] \quad (3.45)$$

che è una rappresentazione in forma chiusa di una legge stabile di Lèvy. Si noti, inoltre, che per $\mu \rightarrow 2$ si ottiene la classica soluzione Gaussiana già studiata in precedenza. Come ci si aspetta, dall'equazione (3.45) si può ottenere il comportamento asintotico tipico delle distribuzioni di Lèvy.

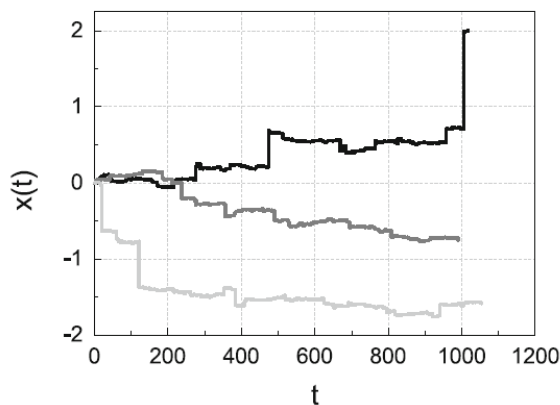


Figura 3-8 tre differenti rappresentazioni di un processo di Lèvy in una dimensione per un ordine di derivazione frazionario $\mu = 1.3$ in equazione (3.42) [16]

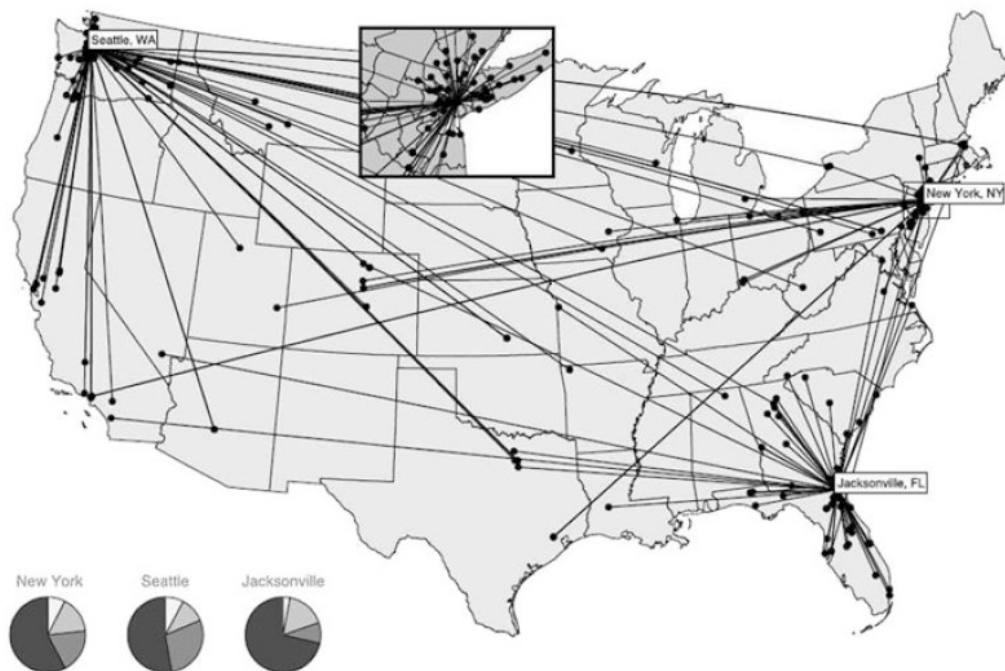


Figura 3-9 Comportamento umano in viaggio

$$W(k, t) = \frac{K^\mu t}{|x|^{1+\mu}}, \quad \mu < 2, \quad (3.46)$$

A causa di questa proprietà, MSD diverge:

$$\langle x^2(t) \rangle \rightarrow \infty \quad (3.47)$$

Tale condizione ha causato diverse controversie in quanto per dare una giustificazione matematica alla trattazione considerata è stato necessario utilizzare uno strumento chiama momento probabilistico frazionario della forma seguente

$$\langle |x|^\delta \rangle \propto t^{\delta/\mu} \quad (3.48)$$

per $0 < \delta < \mu \leq 2$ e comunemente denominato anch'esso MSD. L'esatto calcolo del momento frazionario deriva dalla definizione di funzioni di Fox e si esprime mediante la seguente formulazione

$$\langle |x|^\delta \rangle = 2 \int_0^\infty x^\delta W(x, t) dx \quad (3.49)$$

con $\delta > 0$. Tenendo conto della (3.46) l'integrale improprio converge solo per valori di $\delta < \mu$. In questo caso si noti che utilizzando la (3.45), l'integrale definisce la trasformazione di Mellin

$$\mathcal{M}\{f(t); s\} = \int_0^\infty t^{s-1} f(t) dt \quad (3.50)$$

della funzione di Fox:

$$\begin{aligned} \langle |x|^\delta \rangle &= \frac{2}{\mu} \int_0^\infty x^{\delta-1} H_{2,2}^{1,1} \left[\frac{|x|}{(K^\mu t)^{1/\mu}} \middle| \begin{matrix} (1, \frac{1}{\mu}), (1, \frac{1}{2}) \\ (1, 1), (1, \frac{1}{2}) \end{matrix} \right] dx \\ &\equiv \frac{2}{\mu} \mathcal{M} \left\{ H_{2,2}^{1,1} \left(\frac{|x|}{(K^\mu t)^{1/\mu}} \right) \right\} \end{aligned} \quad (3.51)$$

Utilizzando la proprietà

$$\int_0^\infty x^{s-1} H_{p,q}^{m,n} \left[ax \middle| \begin{matrix} (a_p, A_p) \\ (b_q, B_q) \end{matrix} \right] dx = a^{-s} \chi(-s) \quad (3.52)$$

dove $\chi(s) = h(s)$ già definito dalla (1.52), si ottiene

$$\langle |x|^\delta \rangle = \frac{2}{\mu} (K^\mu t)^{\frac{\delta}{\mu}} \chi(-\delta) = \frac{2}{\mu} (K^\mu t)^{\frac{\delta}{\mu}} \frac{\Gamma(-\frac{\delta}{\mu}) \Gamma(1 + \delta)}{\Gamma(-\frac{\delta}{2}) \Gamma(1 + \frac{\delta}{2})} \quad (3.53)$$

A seguito della condizione $0 < \delta < \mu$, $\langle |x|^\delta \rangle$ è sempre positiva ed inoltre il comportamento asintotico $\langle |x|^\delta \rangle \propto t^{\delta/\mu}$ è sempre sub-lineare in t . Consideriamo due casi limite. Per $\delta \rightarrow 0$ si ottiene

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \langle |x|^\delta \rangle = 1 \quad (3.54)$$

con l'uso del fatto che $1/\Gamma(z) \sim z$ per $z \ll 1$. Mentre per $\mu \rightarrow 2$ si ottiene la nota dipendenza lineare

$$\lim_{\substack{\delta \rightarrow 2 \\ \mu \rightarrow 2}} \langle |x|^\delta \rangle = 2K_1 t \quad (3.55)$$

3.2.7 Lunghe pause e lunghi salti

Come già precedentemente notato, il problema di MSD divergente nell'ambito dei voli di Lévy è spesso ovviata considerando una relazione di scala $(x-t)$ o misurando la larghezza della pdf $W(x, t)$ piuttosto che la sua varianza. Un metodo alternativo, facendo uso della definizione

$$\langle x^2(t) \rangle_L \sim \int_{L_1 t^{1/\mu}}^{L_2 t^{1/\mu}} x^2 W(x, t) dx \sim t^{2/\mu} \quad (3.56)$$

Si noti che gli estremi di integrazione sono funzioni del tempo t . Usando tale espressione e considerando pdfs con T e Σ^2 infiniti si giunge alla FRDE seguente

$$\frac{\partial}{\partial t} W(x, t) = {}_0D_t^{1-\alpha} K_\alpha^\mu \nabla^\mu W(x, t) \quad (3.57)$$

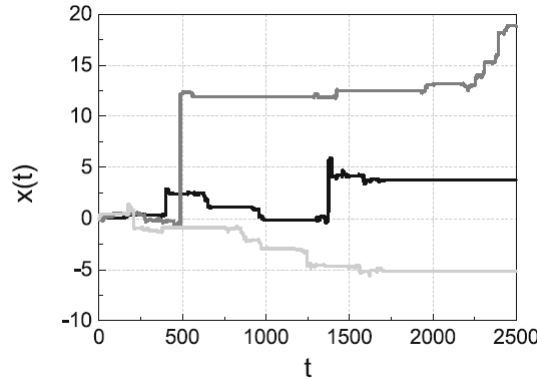


Figura 3-10 tre possibili rappresentazioni di fractal time Lévy flight in una dimensione con ordini di derivazione frazionari $\alpha = 0.8$ e $\mu = 1.3$ [16]

con $K_\alpha^\mu \equiv \sigma^\mu / \tau^\alpha$. In questo caso la quantità $\langle x^2(t) \rangle_L$, generalmente chiamata pseudo o immaginario spostamento medio quadratico MSD, assume la dipendenza temporale

$$\langle x^2(t) \rangle_L \sim t^{2\alpha/\mu} \quad (3.58)$$

Conseguentemente il diagramma di fase sottostante può essere descritto per riassumere le casistiche analizzate.

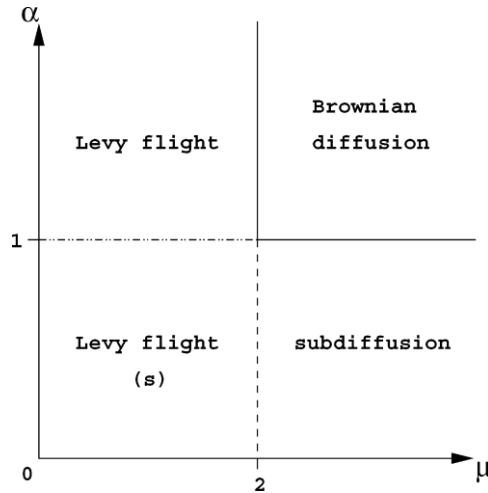


Figura 3-11 Diagramma di fase per l'equazione (3.57). I differenti quadranti del diagramma fanno riferimento alla possibilità o meno di ottenere tempo di attesa caratteristico T o varianza dei salti Σ^2 infiniti o finiti. Se i parametri α e μ diventano maggiori di 1 e 2 rispettivamente si ottiene un processo Browniano standard caratterizzato da T e Σ^2 finiti.

3.3 Fractional Advection-Diffusion Equations (FRADE)

3.3.1 Introduzione

Processi diffusivi con un campo di velocità v aggiuntivo e diffusione sotto l'influenza di una forzante esterna, sono modellati, nel caso Browniano, dall'equazione di Avvezione-Diffusione (ADE) seguente

$$\frac{\partial}{\partial t} W(x, t) + v \frac{\partial}{\partial x} W(x, t) = K_1 \frac{\partial^2}{\partial x^2} W(x, t) \quad (3.59)$$

Nel caso di diffusività anomala questo non è più corretto e generalizzazioni al calcolo frazionario sono necessarie. Si comincia considerando un campo di velocità esterno. Nel caso stazionario, cioè senza termini inerziali, il problema è invariante sotto trasformazioni di Galileo del tipo $x \rightarrow x - vt$. Richiedendo che questa proprietà sia verificata nel caso anomalo, una estensione dello schema CTRW conduce in modo elegante all'equazione frazionaria di Avvezione-Diffusione cercata (FRADE)

3.3.2 Trasformazione di Galileo per FRADE

Il processo stocastico della particella all'interno di un campo di velocità v omogeneo è governato dalla usuale jump pdf $\psi(x, t)$. Applicando la trasformazione di Galileo $x \rightarrow x - vt$ si ottiene

$$\phi(x, t) = \psi(x - vt, t) \quad (3.60)$$

che conduce, dopo aver applicato la trasformata di Fourier e di Laplace all'espressione

$$\phi(k, u) = \psi(k, u + ivk) \quad (3.61)$$

che crea un legame funzionale tra $\phi(k, u)$ e $\psi(k, u)$. Nel caso di tempo caratteristico di attesa T infinito ed una varianza Σ^2 finita relativa alla jump pdf, la trasformata di Fourier – Laplace del propagatore $W(k, u)$ è

$$W(k, u) = \frac{1}{u + ivk + K_\alpha k^2 u^{1-\alpha}} \quad (3.62)$$

che può essere direttamente dedotta dalla (3.19) per il limite $k \rightarrow 0, u \rightarrow 0$. Procedendo in maniera analoga a quanto fatto per la sola diffusione, si giunge alla seguente FRADE

$$\frac{\partial}{\partial t} W(x, t) + v \frac{\partial}{\partial x} W(x, t) = {}_0D_t^{1-\alpha} K_\alpha \frac{\partial^2}{\partial x^2} W(x, t) \quad (3.63)$$

A causa della necessaria invarianza sotto trasformazioni di Galileo, la soluzione è fornita dalla “Galileo-shifted solution”

$$W(x, t) = W_{v=0}(x - vt, t) \quad (3.64)$$

dove $W_{v=0}(x, t)$ denota il propagatore libero in accordo con le equazioni (3.32) e (3.33) e per condizioni iniziali $W_0(x) = \delta(x)$.
i momenti relativi alla FRADE sono i seguenti

$$\langle x(t) \rangle = vt \quad (3.65)$$

$$\langle x^2(t) \rangle = \frac{2K_\alpha}{\Gamma(1 + \alpha)} t^\alpha + v^2 t^2 \quad (3.66)$$

$$\langle (\Delta x(t))^2 \rangle = \frac{2K_\alpha}{\Gamma(1 + \alpha)} t^\alpha \quad (3.67)$$

Quindi, il MSD $\langle (\Delta x(t))^2 \rangle$ contiene solamente il contributo molecolare, cioè al mix interno al sistema in movimento con velocità costante v , mentre il primo momento tiene conto del semplice trascinarsi lungo il campo di velocità esterno. Questo comportamento si ritrova, inoltre, osservando l’evoluzione temporale della pdf in figura 3.12 e figura 3.13

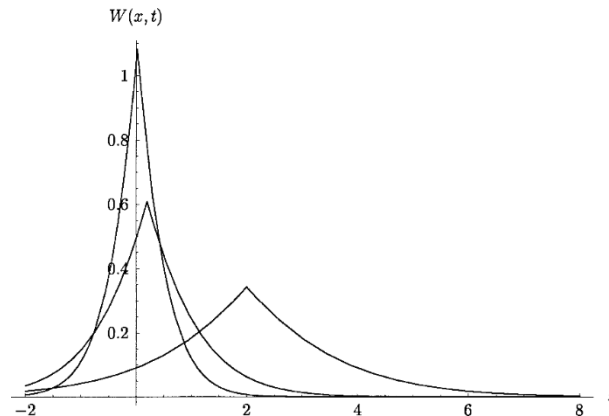


Figura 3-12 il modello invariante di Galileo per subdiffusione. La soluzione $W(x, t)$ viene rappresentata per un tempo $t = 0.002, 0.2, 2$. Il “propagatore” risulta asimmetrico rispetto al suo massimo traslato con velocità $v = 1$. La forma a cuspide in prossimità della condizione iniziale è ben distinta in comparazione ai risultati di un classico moto Browniano

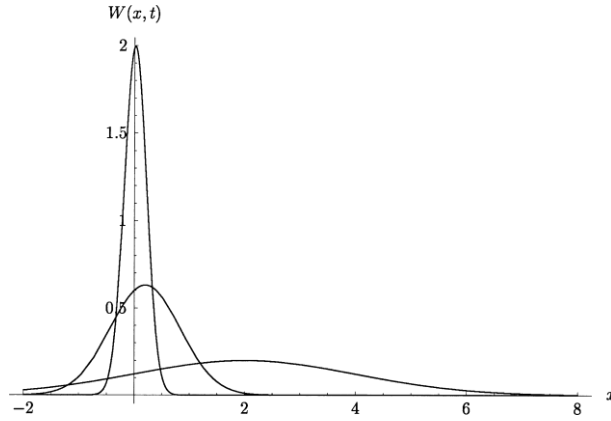


Figura 3-13 Il modello invariante di Galileo per moto Browniano. La soluzione $W(x, t)$ viene rappresentata per un tempo $t = 0.02, 0.2, 2$. Il “propagatore” risulta simmetrico rispetto al suo massimo traslato con velocità $v = 1$. Il veloce decadimento della condizione iniziale si rispecchia nel picco arrotondato della distribuzione, diversamente da quanto accade in figura 3.12

3.3.3 Variante di Galileo per FRADE

Invece di assumere il principio di invarianza di Galileo espresso dall’equazione $\phi(x, t) = \psi(x - vt, t)$, Compte assume la relazione

$$\phi(x, t; x_0) = \psi(x - \tau_\alpha v(x_0), t) \quad (3.68)$$

Tra la jump pdf ϕ e la jump pdf ψ per diffusione libera. In aggiunta, un microscopico tempo di avvezione τ_α è introdotto nella trattazione.

L’equazione frazionaria risultante

$$\frac{\partial}{\partial t} W(x, t) = {}_0D_t^{1-\alpha} \left[-A_\alpha \frac{\partial}{\partial x} v(x) + K_\alpha \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right] W(x, t) \quad (3.69)$$

ha la stessa struttura dell’equazione di Fokker-Planck. Considerando un campo di velocità costante si ottiene

$$\frac{\partial}{\partial t} W(x, t) = {}_0D_t^{1-\alpha} \left[-A_\alpha \frac{\partial}{\partial x} v + K_\alpha \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right] W(x, t) \quad (3.70)$$

Si può dimostrare che la soluzione non soddisfa una relazione di invarianza di Galileo generalizzata del tipo $W(x - v^* t^\alpha, t)$. Tuttavia, la soluzione generale $W_\alpha(x, t)$ può essere espressa in funzione della soluzione Browniana $W_1(x, t)$

$$W_1(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi Kt}} e^{\left(-\frac{(x-vt)^2}{4Kt}\right)} \quad (3.71)$$

In figura 3.14 l’andamento pdf relativa alla FRADE (3.70). Si noti come, a differenza dei processi di avvezione diffusione Galileo invarianti, la soluzione evidenzia una asimmetria più pronunciata al crescere del tempo. Le differenze con i fenomeni Galileo invarianti si riflettono anche nelle espressioni dei momenti, che ora divengono i seguenti

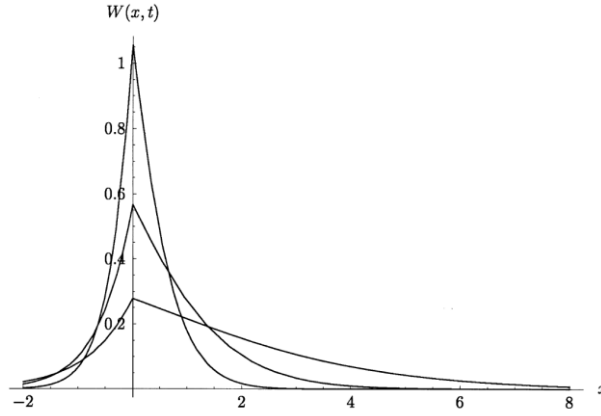


Figura 3.14 il modello invariante di Galileo. Il propagatore è rappresentato per un tempo $t = 0.02, 0.2, 2$. Il profilo è asimmetrico rispetto al suo massimo che rimane fissato all'origine

$$\langle x(t) \rangle = \frac{A_\alpha v t^\alpha}{\Gamma(1 + \alpha)} \quad (3.72)$$

$$\langle x^2(t) \rangle = \frac{2A_\alpha^2 v^2 t^{2\alpha}}{\Gamma(1 + 2\alpha)} + \frac{2K_\alpha t^\alpha}{\Gamma(1 + \alpha)} \quad (3.73)$$

dove ora il primo momento aumenta in modo sublineare in tempo. Questo modello descrive fisicamente sistemi dove fenomeni di intrappolamento incorrono nel processo. Ad esempio, la particella viene ripetutamente immobilizzata nell'ambiente per un tempo di cattura desunto dalla waiting time pdf $w(t)$, prima di essere rilanciata nuovamente nel flusso a velocità costante v .

3.3.4 Approccio alternativo per i voli di Levy

Per quanto riguarda fenomeni descrivibili tramite voli di Lèvy immersi in un campo di velocità esterno v , dotati quindi di tempo caratteristico T finito ma varianza infinita Σ^2 infinita, la FRADE risulta

$$\frac{\partial}{\partial t} W(x, t) + v \frac{\partial}{\partial x} W(x, t) = K^\mu \nabla^\mu W(x, t) \quad (3.74)$$

che descrive un processo Markoviano con MSD divergente. Il termine di avvezione è lo stesso dell'ADE e quindi la soluzione è semplicemente data in accordo al caso subdiffusivo di equazione (3.64), con $W_v(x, t) = W_{v=0}(x - vt, t)$ dove in questo caso $W_{v=0}(x, t)$ è la soluzione stabile di Lèvy (3.45).

3.3.5 Equazione frazionaria di Fokker Plank

Molti problemi di trasporto fisicamente avvengono sotto l'influenza di una o più forzanti esterne. Nel caso di fenomeni diffusivi, l'equazione che governa il processo è spesso rappresentata dall'equazione di Fokker - Planck (FPE)

$$\frac{\partial}{\partial t} W(x, t) = \left[\frac{\partial}{\partial x} \frac{V'(x)}{m\eta_1} + K_1 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right] W(x, t) \quad (3.75)$$

dove m è la massa della particella che diffonde, η_1 denota il coefficiente di attrito caratteristico tra la particella test e l'ambiente nel quale è immersa, la forzante esterna è legata ad un potenziale esterno attraverso la relazione $F(x) = -dV(x)/dx$. Le principali proprietà di FPE sono:

- Nel caso di forzante esterna nulla, FPE si riduce alla classica seconda legge di Fick e quindi MSD evolve linearmente nel tempo;
- I singoli modi di FPE decadono esponenzialmente nel tempo secondo la relazione

$$T_n(t) = e^{(-\lambda_{n,1}t)} \quad (3.76)$$

- La soluzione stazionaria

$$W_{st}(x) \equiv \lim_{t \rightarrow \infty} W(x, t) \quad (3.77)$$

è fornita in funzione della distribuzione di Gibbs - Boltzmann

$$W_{st}(x) \equiv N e^{(-\beta V(x))} \quad (3.78)$$

dove N è una costante di normalizzazione e $\beta \equiv (k_B T)^{-1}$ denota il fattore di Boltzmann

- La FPE soddisfa inoltre la relazione di Einstein - Stokes - Smoluchowski

$$K_1 = \frac{k_B T}{m \eta_1} \quad (3.79)$$

- La seconda relazione di Einstein

$$\langle x(t) \rangle_F = \frac{1}{2} \frac{F \langle x^2(t) \rangle_0}{k_B T} \quad (3.80)$$

è riottenuta dalla (3.75) che connette il primo momento in presenza di una forzante $F \langle x(t) \rangle_F$ con il secondo momento in assenza di forza $\langle x^2(t) \rangle_0$

$$\langle x^2(t) \rangle_0 = 2K_1 t \quad (3.81)$$

3.3.6 Equazione di Fokker Plank frazionaria

La FPE è stata studiata approfonditamente per diverse tipologie di potenziali ed i risultati ottenuti hanno trovato ampie applicazioni in diversi campi. In questo paragrafo si vuole introdurre una generalizzazione della FPE denominata Equazione di Fokker - Planck frazionaria (FFPE) del tipo seguente

$$\frac{\partial}{\partial t} W(x, t) = {}_0 D_t^{1-\alpha} \left[\frac{\partial}{\partial x} \frac{V'(x)}{m \eta_1} + K_\alpha \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right] W(x, t) \quad (3.82)$$

con l'operatore di Fokker - Planck definito

$$L_{FP} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{V'(x)}{m \eta_\alpha} + K_\alpha \frac{\partial^2}{\partial x^2} \quad (3.83)$$

contenente la costante di diffusione generalizzata K_α ed il coefficiente generalizzato di attrito η_α con dimensioni $[\eta_\alpha] = s^{\alpha-2}$. Per $\alpha \rightarrow 1$ viene ritrovata la classica FPE e per $V = cost$, cioè senza forzante esterna, emerge la FDE (3.28). La FFPE soddisfa le seguenti proprietà:

- Descrive processi subdiffusivi in accordo con il valore di MSD

$$\langle x^2(t) \rangle_0 = \frac{2K_\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} t^\alpha \quad (3.84)$$

nel caso limite di forzante esterna nulla (potenziale costante)

- Il rilassamento dei modi singoli dell'operatore in FFPE è governato da un comportamento alla Mittag - Leffler

$$T_n(t) = E_\alpha(-\lambda_{n,\alpha} t^\alpha) \quad (3.85)$$

- La soluzione stazionaria è data dalla distribuzione di Gibbs – Boltzmann.
- Una generalizzazione della relazione di Einstein – Stokes – Smoluchowski connette il coefficiente di attrito generalizzato ed i coefficienti di diffusione.
- La seconda relazione di Einstein risulta valida anche per FFPE.

3.3.7 Derivazione della FFPE con CTRW

Per la derivazione della FFPE per la subdiffusione e per una ulteriore generalizzazione a lunghi salti, nuovamente si considera la teoria dei cammini casuali come punto di partenza. Ripercorrendo in modo del tutto analogo quanto già svolto per la FDE si considera la seguente equazione master in forma discreta

$$W_j(t + \Delta t) = A_{j-1} W_{j-1}(t) + B_{j-1} W_{j+1}(t) \quad (3.86)$$

con A_j e B_j le probabilità locali di saltare a destra o a sinistra funzioni della posizione j occupato dalla particella. L'espansione di Taylor in tempo ed in spazio

$$\begin{aligned} A_{j-1} W_{j-1}(t) &= A(x) W(x, t) - \Delta x \frac{\partial A(x) W(x, t)}{\partial x} \\ &+ \frac{(\Delta x)^2}{2} \frac{\partial^2 A(x) W(x, t)}{\partial x^2} + O([\Delta x]^3) \end{aligned} \quad (3.87)$$

conduce alla FPE dove valgono

$$\frac{V'(x)}{m\eta_1} \equiv \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta t \rightarrow 0}} \frac{\Delta x}{\Delta t} [B(x) - A(x)] \quad (3.88)$$

$$K_1 \equiv \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta t \rightarrow 0}} \frac{(\Delta x)^2}{2\Delta t} \quad (3.89)$$

Per calcolare i limiti di cui sopra, si impone la normalizzazione $A(x) + B(x) = 1$ e si nota che l'inomogeneità nella scelta di saltare a sinistra o destra, $A(x) - B(x)$, diviene molto piccola per $\Delta x \rightarrow 0$ in accordo con la distribuzione di Boltzmann per un sistema vicino all'equilibrio termico in modo che

$$B(x) - A(x) \cong \frac{\Delta x V'(x)}{2k_B T} + O([\Delta x]^2) \quad (3.90)$$

L'equazione master (3.86) coinvolge step locali in tempo ed in spazio, quindi permetto l'espansione in serie. Considerando, invece, waiting time pdf oppure jump length pdf tale espansione non è più permessa in quanto tali distribuzioni sono correlate da "long-range steps" e quindi Δx e Δt non possono più essere considerato "piccoli" parametri.

Una estensione dello schema soprastante per la subdiffusione in un campo di forze esterne è stato recentemente presentato da Barkai et al. in cui si tiene conto anche di lunghi salti nel dominio. L'equazione master diviene

$$W_j(t + \Delta t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_{j,n} W_{j-n}(t) + \sum_{n=1}^{\infty} B_{j,n} W_{j+n}(t) \quad (3.91)$$

permettendo salti da qualunque posizione $j \pm n$ alla nuova posizione j , utilizzando la normalizzazione

$$\sum_{n=1}^{\infty} (A_{j,n} + B_{j,n}) = 1 \quad (3.92)$$

Dopo una serie di passaggi algebrici si ottiene la seguente FFPE

$$\frac{\partial}{\partial t} W(x, t) = {}_0D_t^{1-\alpha} \left[\frac{\partial}{\partial x} \frac{V'(x)}{m\eta_1} + K_\alpha^\mu \nabla^\mu \right] W(x, t) \quad (3.93)$$

per cui si determinano le seguenti entità

$$\frac{V'(x)}{m\eta_1} \equiv \frac{2\sigma}{\mu\tau^\alpha} [B(x) - A(x)] \quad (3.94)$$

$$K_\alpha^\mu \equiv \frac{\sigma^\mu}{\tau^\alpha} \quad (3.95)$$

La FFPE (3.93) descrive la contemporanea presenza di voli di Lèvy e subdiffusione.

3.3.8 FFPE per voli di Levy

La FFPE (3.93) per $\mu = 2$, cioè per il caso di varianza Σ^2 finita, si riduce alla FFPE (3.82) per problemi subdiffusivi. Si considera di seguito il caso opposto, dotato di un tempo caratteristico T finito ma $\Sigma^2 \rightarrow \infty$ ottenendo la seguente FFPE

$$\frac{\partial}{\partial t} W(x, t) = \left[\frac{\partial}{\partial x} \frac{V'(x)}{m\eta_1} + K_{1-\infty}^\mu D_x^\mu \right] W(x, t) \quad (3.96)$$

Quest'ultima descrive processi diffusivi di Lèvy in presenza di una forzante esterna anche molto lontani dalla condizione di equilibrio termico di Boltzmann. Considerando un potenziale del tipo $V(x) = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$, la soluzione stazionaria assume la forma

$$W_{st}(x) = \frac{1}{|x|} H_{2,2}^{1,1} \left[\frac{|x|^\mu \mu \omega^2}{K_1^\mu m \eta_1} \middle| \begin{matrix} (1,1), (1, \frac{\mu}{2}) \\ (1, \mu), (1, \frac{\mu}{2}) \end{matrix} \right] \quad (3.97)$$

e la sua trasformata di Fourier

$$W_{st}(k) = e \left(-\frac{K_1^\mu m \eta_1 |k|^\mu}{\mu \omega^2} \right) \quad (3.98)$$

da cui il suo comportamento asintotico

$$W_{st}(x) \sim \frac{K_1^\mu m \eta_1}{\mu \omega^2 |x|^{1+\mu}} \quad (3.99)$$

quindi MSD diverge anche per il caso stazionario.

Considerando, invece, il caso in cui $F(x) = -\omega^2 x + F$ si ottiene

$$W_{\omega,F} = W_0 \left(x - \frac{F}{\omega^2} \left[1 - e \left(-\frac{\omega^2 t}{m \eta_1} \right) \right], \frac{m \eta_1}{\mu \omega^2} \left[1 - e \left(-\frac{\omega^2 t}{m \eta_1} \right) \right] \right) \quad (3.100)$$

dove $W_0(x, t)$ denota la soluzione nel caso di diffusione libera da forzante esterna

$$W_0(x, t) = \frac{1}{\mu |x|} H_{2,2}^{1,1} \left[\frac{|x|}{(K^\mu t)^{1/\mu}} \middle| \begin{matrix} (1, \frac{1}{\mu}), (1, \frac{1}{2}) \\ (1,1), (1, \frac{1}{2}) \end{matrix} \right] \quad (3.101)$$

che è, nuovamente, una distribuzione stabile di Lèvy

Capitolo 4

Trasporto di soluto in mezzo poroso deformabile

4.1 Introduzione

Nel presente paragrafo si fornisce una breve descrizione qualitativa del processo di trasporto e diffusione di soluto all'interno di un mezzo poroso saturo bifase deformabile, mentre, una trattazione analitica accurata verrà proposta nel paragrafo successivo.

Nella teoria classica dei mezzi porosi multifase è comune considerare sia lo scheletro solido che la componente fluida come mezzi continui in spazio e tempo, sebbene realmente questi non lo siano. Conseguentemente è necessario adottare un modello macroscopico di quantità locali come tensione e gradiente di deformazione individuando un opportuno Elemento di Volume Rappresentativo (REV) con volume V come rappresentato in figura sottostante in cui si vedono chiaramente i costituenti solidi e liquidi e la loro omogeneizzazione in scala macroscopica.

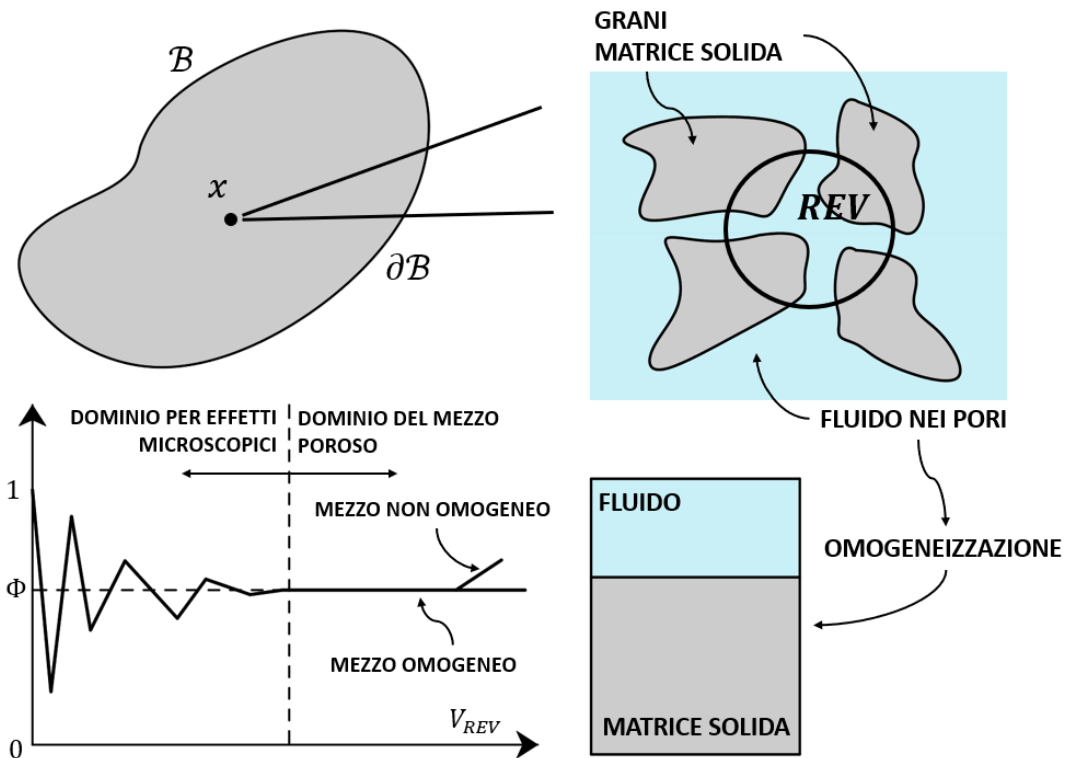


Figura 4-1 fasi di definizione del REV di riferimento per la trattazione analitica delle fasi di un mezzo poroso

La scelta del volume rappresentativo deve essere tale da includere abbastanza materiale per una corretta valutazione del comportamento macroscopico, ma allo

stesso tempo piccolo abbastanza per cogliere la dipendenza locale delle quantità tensionali e deformative.

I soluti, invece, sono materiali che dissolvono nei liquidi formando soluzioni, come ad esempio il sale non in elevate concentrazioni disciolto nell'acqua (solvente). Il trasporto di soluto all'interno del mezzo poroso dipende da molti fattori, tra cui le proprietà del soluto e solvente, il campo di velocità del fluido nel mezzo poroso, la microgeometria cioè forma, dimensioni, distribuzione dei grani e dei vuoti. Il fenomeno del trasporto di soluto gioca un ruolo fondamentale in una moltitudine di applicazioni, tra le quali si ricorda il trasporto di contaminanti nel suolo, trasporto di nutrienti nelle ossa, l'intrusione di scorie radioattive all'interno di materiali cementizi, l'uso di tracciatori in ingegneria petrolifera ed idrologia.

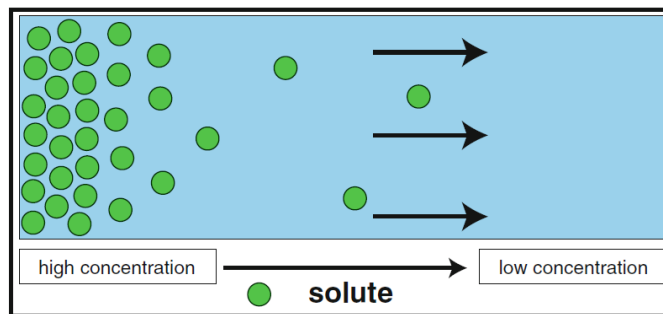


Figura 4-2 diffusione di soluto: legge di Fick

La modellazione di sistemi accoppiati multifase con mezzi porosi saturi o parzialmente saturi e matrice solida deformabile è un ampio ed attuale campo di ricerca sin dai lavori pionieristici di Biot [17,18] nel tentativo di stabilire una solida teoria matematica in grado di descrivere sistemi multicomponente in condizioni isoterme e non isoterme, sino alle trattazioni più recenti di, ad esempio [19]

Tuttavia, numerose campagne sperimentali nell'ambito del trasporto e diffusione di soluto in mezzi porosi fortemente eterogenei, esibiscono dei profili di concentrazione che non seguono la classica legge di diffusione di Fick; inoltre, emergono le cosiddette "heavy tails", effetti che non possono essere predetti dall'equazione standard della diffusione, bensì tramite equazioni differenziali frazionarie in spazio e tempo [20]. Allo stesso modo, l'equazione classica di avvezione e diffusione (ADE) viene convertita in equazione di avvezione-diffusione frazionarie (FRADE), approccio che potenzialmente consente di predire processi non Fickiani, ma con la pesante problematica di identificare soluzioni analitiche, specialmente quando termini di reazione vengono incorporati.

In aggiunta, quando si considera il flusso di fluido in mezzo poroso con bassa permeabilità, si dovrebbe considerare una relazione non lineare tra il flusso ed il gradiente idraulico modificano opportunamente la relazione di Darcy rendendola frazionaria [21], in modo da poter registrare effetti di memoria.

Nel presente capitolo, basandosi sulla recente pubblicazione [], viene presentato un modello tridimensionale frazionario idro-meccanico in deformazioni finite per la descrizione del trasporto e diffusione di soluto in mezzo poroso saturo multifase.

4.2 Formulazione matematica

Nel presente paragrafo vengono riportate brevemente le equazioni governanti il problema del trasporto di soluto all'interno di un mezzo poroso saturo bifase con matrice solida deformabile. Si farà riferimento interamente alla trattazione riportata in [1] e [22].

4.2.1 Equazioni costitutive e di bilancio per la matrice solida

Le equazioni di equilibrio per un mezzo poroso saturo possono essere descritte dalla seguente formulazione considerando l'incomprimibilità della componente solida e liquida

$$\rho \mathbf{g} + \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0} \quad (4.1)$$

dove $\rho = \rho_s(1 - \varphi) + \rho_w\varphi$ è la densità efficace del mezzo poroso considerato essendo φ la porosità e $\boldsymbol{\sigma}$ il tensore di tensione di Cauchy soddisfacente la relazione fondamentale

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}' - p\mathbb{I} \quad (4.2)$$

con $\boldsymbol{\sigma}'$ il tensore di stress efficace e p la pressione dei pori.

Considerando la formulazione Lagrangiana, l'equazione (4.1) può essere riscritta nella configurazione di riferimento, denominata da lettere maiuscole X , utilizzando la trasformazione di Piola come

$$J\rho\mathbf{G} + \nabla_X \cdot \mathbf{P} \quad (4.3)$$

dove \mathbf{P} è il primo tensore di stress di Piola-Kirchhoff ottenuto tramite l'operazione di pullback del tensore di stress di Cauchy $\boldsymbol{\sigma}$

$$\mathbf{P} = J\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{F}^{-T} \quad (4.4)$$

e $J = \det(\mathbf{F}) > 0$, essendo $\mathbf{F}(\mathbf{X}, t)$ il gradiente di deformazione dello scheletro solido

$$\mathbf{F} = \frac{\partial \phi(\mathbf{X}, t)}{\partial \mathbf{X}} \quad (4.5)$$

con $\phi(\mathbf{X}, t)$ la mappa di moto locale.

Si assume nel proseguo il tensore di deformazione di Hencky, generalmente utilizzato per caratterizzare materiali iperelastici isotropi in cinematica finita, come misura di deformazione [23]

$$\mathbf{h} = \frac{1}{2} \ln \mathbf{b} \quad (4.6)$$

Nel quale \mathbf{b} è il tensore sinistro di Cauchy-Green, $\mathbf{b} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^T$, e sviluppando la sua decomposizione spettrale si ottiene

$$\mathbf{h} = \frac{1}{2} \sum_{A=1}^3 \ln \lambda_A \mathbf{n}_A \otimes \mathbf{n}_A \quad (4.7)$$

dove λ_A ed \mathbf{n}_A autovalori ed autovettori di \mathbf{b} rispettivamente.

Inoltre, la relazione incrementale tensione-deformazione può essere definita nel seguente modo [24]

$$d\boldsymbol{\sigma} = \left(\kappa - \frac{2}{3}G \right) \frac{1 - \vartheta}{J} d\vartheta \mathbb{I} + 2G \frac{1 - \vartheta}{J} d\mathbf{h} - dp_w \mathbb{I} \quad (4.8)$$

con G modulo tangenziale di taglio del mezzo poroso.

4.2.2 Equazioni costitutive e di bilancio per il fluido

L'equazione di continuità relativa al contenuto di fluido nel mezzo poroso in condizioni isoterme può essere scritta nella seguente forma

$$\nabla \cdot \mathbf{v} - \frac{1}{\rho_w} \nabla \cdot \left(\rho_w \frac{\mathbf{k}}{\mu} \cdot (\nabla p - \rho_w \mathbf{g}) \right) = 0 \quad (4.9)$$

4.2.3 Equazioni di bilancio per il trasporto di soluto

Partendo dalla formulazione monodimensionale di Zhang riportata in [19], l'equazione di conservazione della massa per il soluto nella fase solida è espressa da

$$\frac{D}{Dt} [(1 - \varphi) \rho_s m_s J] = \dot{M}_{a \rightarrow s} \quad (4.10)$$

dove m_s è la massa di soluto assorbita dalla matrice solida per unità di massa di fase solida e $\dot{M}_{a \rightarrow s}$ denota il rateo di perdita di soluto nella fase acquosa per assorbimento in fase solida; quindi, considerando la stazionarietà del contenuto di matrice solida, l'equazione (4.10) si riduce a

$$(1 - \varphi) \rho_s \dot{m}_s J = \dot{M}_{a \rightarrow s} \quad (4.11)$$

L'equazione di conservazione della massa per il soluto nella fase liquida risulta

$$\frac{D}{Dt} [\varphi C J] = -\nabla \cdot \mathbf{q}_f - \dot{M}_{a \rightarrow s} \quad (4.12)$$

dove C è la concentrazione di soluto nei pori saturi di fluido e \mathbf{q}_f rappresenta il flusso di soluto nella fase acquosa. La (4.12), usando la regola di Leibniz, può essere riscritta come

$$J\dot{C} + J(\varphi - 1)\dot{C} = -\nabla \cdot \mathbf{q}_f - \dot{M}_{a \rightarrow s} \quad (4.13)$$

Utilizzando l'espressione, generalizzata al campo tridimensionale, di \mathbf{q}_f in accordo con [25]

$$\mathbf{q}_f = \varphi \mathbf{w} C - \frac{\varphi \mathbf{D}}{J} \cdot \nabla C \quad (4.14)$$

dove \mathbf{D} è il tensore di dispersione idrodinamica, dato dalla somma del tensore di diffusione efficace \mathbf{D}_e ed il tensore di dispersione meccanica \mathbf{D}_m . Tuttavia, nel caso di suoli a grana fine dove la velocità di Darcy è bassa (approssimativamente circa 10^{-6} m/s), la dispersione meccanica risulta relativamente bassa. Quindi, l'equazione relativa al trasporto di soluto nel sistema composto da matrice solida e fluido diviene

$$\begin{aligned} & (1 - \varphi) J \dot{C} (\rho_s K_d - 1) + J \dot{C} \nabla \cdot \mathbf{v} \\ & = -\nabla \cdot \left[\varphi \rho_w C \left(\frac{\mathbf{k}}{\mu} \cdot (\nabla p - \rho_w \mathbf{g}) \right) \right] + \nabla \cdot \left(\frac{\varphi \mathbf{D}}{J} \cdot \nabla C \right) \end{aligned} \quad (4.15)$$

Nell'equazione di cui sopra è stato trascurato il contributo di assorbimento dall'esterno nel mezzo poroso, essendo il mezzo in condizioni sature, in modo che la concentrazione di soluto nella fase solida può essere assunto come linearmente dipendente dalla concentrazione di soluto nel soluto all'interno dei pori attraverso il coefficiente di partizione K_d come descritto in [26].

4.2.3.1 Approccio frazionario per il flusso di soluto

È di fondamentale importanza notare che il secondo termine della (4.14) assume che il mezzo poroso nel quale avviene il processo diffusivo sia isotropo, che raramente avviene nella realtà. Quindi seguendo quanto sancito da [20], si presenta una legge di flusso molecolare basata su una rivisitazione della classica legge diffusiva di Fick. In accordo a questa teoria, il flusso di soluto è decomposto in una parte prodotta dalla diffusione molecolare, una parte prodotta dal fenomeno di diffusione turbolenta ed infine una parte prodotta dalla dispersione del flusso di taglio. È dimostrato, tuttavia, che i primi due contributi espressi come una combinazione lineare dell'operatore derivata frazionaria di Riemann-Liouville e Weyl [27,28] sono trascurabili rispetto all'ultimo [29] ed assumendo che il contributo dispersivo rappresentato dalla derivata di Riemann-Liouville prevalga rispetto alla diffusione molecolare, il secondo termine della [4.14] si può scrivere come

$$\mathbf{q}_\alpha = -\frac{\varphi \mathbf{D}}{J} \cdot \nabla^{\alpha-1} C \quad (4.16)$$

dove α è l'ordine di derivazione frazionario e $\nabla^{\alpha-1}$ l'operatore laplaciano frazionario descritto da una delle possibili formulazioni espresse dai vari operatori frazionari presenti in letteratura.

Equazione (4.15) può essere riscritta nel seguente modo

$$\begin{aligned}
 & (1 - \varphi)J\dot{C}(\rho_s K_d - 1) + J\dot{C}\nabla \cdot \mathbf{v} \\
 & = -\nabla \cdot \left[\varphi \rho_w C \left(\frac{\mathbf{k}}{\mu} \cdot (\nabla p - \rho_w \mathbf{g}) \right) \right] + \nabla \cdot \left(\frac{\varphi \mathbf{D}}{J} \right) \cdot \nabla^{\alpha-1} C \\
 & + \frac{\varphi \mathbf{D}}{J} \cdot \nabla^\alpha C
 \end{aligned} \quad (4.17)$$

Come esaurientemente descritto da Deng in [20] l'ordine di differenziazione frazionario α riflette fisicamente l'eterogeneità del mezzo poroso nel quale avviene il processo di trasporto e diffusione di soluto e vale $\alpha = 2$ per mezzi isotropi. Più eterogeneo è il mezzo poroso e più piccolo è il valore di α rispetto all'intero 2 e la sua diminuzione riproduce un incremento della resistenza del mezzo al trasporto di soluto e diffusione conducendo ad un ritardo del fenomeno.

4.2.4 Equazioni di bilancio per diffusione acquosa anomala

È importante evidenziare il fatto che anche la legge di Darcy può essere contestualizzata nel calcolo frazionario se il fenomeno di diffusività anomala è, in aggiunta, associato ad un processo di trasporto di fluido con effetti di memoria osservati [30]. Assumendo una variazione temporale della permeabilità è possibile cogliere tali fenomeni essendo equivalente a considerare una dipendenza del flusso dalla derivata frazionaria della pressione; in particolare, l'effetto della pressione di fluido agli estremi del flusso nel mezzo poroso è affetto da ritardo ed è come se il flusso avesse memoria della storia del percorso [31]. Analisi sperimentali sono state effettuate sul flusso in rocce e diversi mezzi porosi ed evidenziarono, infatti, che alcuni fluidi possono trasportare piccole componenti solide che, con il passare del tempo, possono ostruire pori diminuendo la loro dimensione o addirittura chiuderli completamente. Quindi, il sistema reso completamente frazionario per le equazioni di trasporto per il fluido e soluto è dato dalla seguente

$$\rho_w \nabla \cdot \mathbf{v} - \nabla \cdot \left(\rho_w \frac{\mathbf{k}}{\mu} \cdot (\nabla^{\alpha-1} p - \rho_w \mathbf{g}) \right) = 0 \quad (4.18)$$

assieme alla (4.17).

4.2.5 Consolidazione monodimensionale con equazioni di diffusione ed avvezione frazionarie in spazio

4.2.5.1 Equazione frazionaria del trasporto di fluido – caso lineare

Quando si considera consolidazione 1D nessun cambiamento nella tensione verticale e permeabilità indipendente dalla deformazione ed il modello può assumere delle semplificazioni. La deformazione logaritmica può essere scritta come

$$\vartheta \cong \frac{p - p_0 - \sigma_0}{\kappa + \frac{4}{3}G} \quad (4.19)$$

con p_0 e σ_0 valori iniziali della pressione nei pori e stress verticale assiale rispettivamente. Corrispondentemente, la FRDE per il fluido (4.18) diviene, assumendo densità indipendente dallo spazio $\rho_w = \rho_0$,

$$\frac{1}{\kappa + \frac{4}{3}G} \left(\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial \sigma}{\partial t} \right) - \frac{k}{\mu} (-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}} p = 0 \quad (4.20)$$

In caso di σ_0 applicato istantaneamente, quest'ultima equazione si riduce in

$$\frac{1}{\kappa + \frac{4}{3}G} \frac{\partial p}{\partial t} - \frac{k}{\mu} (-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}} p = 0 \quad (4.21)$$

Nella forma presentata, l'equazione (4.21) per il bilancio del contenuto di fluido nei pori non include termini di avvezione equivalente alle situazioni nelle quali i processi diffusivi predominano. $(-\Delta)^\beta$ può essere considerato come l'operatore frazionario del laplaciano rappresentato, per esempio, attraverso il potenziale di Riesz

$$(-\Delta)^\beta u(x) = C_{N,\beta} PV \int_{\mathbb{R}^n} \frac{u(x) - u(y)}{|x - y|^{N+2\beta}} dx \quad \beta \in (0,1), N \geq 1 \quad (4.22)$$

Dove $u: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, PV sta per "valore principale" e $C_{N,\beta} > 0$ è una costante appropriata di normalizzazione [32]. La proprietà straordinaria di $(-\Delta)^\beta$ è la "non località", che corrisponde alla proprietà di $(-\Delta)^\beta u(x)$ di non dipendere solo dai valori di $u(x)$ in un intorno di $u(x)$ stessa, come nel caso del laplaciano standard, ma anche da valori di $u(x)$ in ogni punto $y \in \mathbb{R}^n$ del dominio. Considerando il limite per $\beta \rightarrow 1$, cioè $\alpha \rightarrow 2$ l'operatore standard di Laplace viene ritrovato, ma c'è una grossa differenza tra l'operatore locale $(-\Delta)$ che appare nella classica equazione del calore e rappresentante un moto Browniano statisticamente, e la famiglia degli operatori non locali $(-\Delta)^\beta, 0 < \beta < 1$. Come ampiamente discusso nel capitolo 3, gli ultimi generano processi di Lévy che includono lunghi salti ed interazioni a lunga distanza tipici dei processi di diffusività anomala. Ulteriori definizioni del laplaciano frazionario possono essere considerate in accordo ai diversi operatori frazionari presenti in letteratura.

È inoltre significativo sottolineare il fatto che nell'equazione (4.20) la pressione di fluido è accoppiata con il processo deformativo mediante l'equazione (4.19), che rende il problema molto più difficile da risolvere, ma, ci sono situazioni in cui queste due variabili risultano disaccoppiate, ad esempio quando il campo di spostamenti è irrotazionale o quando il fluido è molto compressibile.

In forma compatta la (4.21) può essere riscritta come

$$\frac{\partial p}{\partial t} = K_0 (-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}} p \quad (4.23)$$

dove $K_0 = \frac{k}{\mu} \left(\kappa + \frac{4}{3}G \right)$ è denominato coefficiente di diffusione equivalente.

4.2.5.2 Equazione frazionaria del trasporto di fluido – caso non lineare

La formulazione al paragrafo precedente è valida esclusivamente quando si suppone una permeabilità costante in tutto il dominio; nel caso, invece, non sia più valida tale assunzione, l'equazione (4.9) diviene la seguente equazione parabolica degenera

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \left(\kappa + \frac{4}{3}G \right) \nabla \cdot \left(\frac{k}{\mu} (\nabla p - \rho_w g) \right) \quad (4.24)$$

A meno di una costante, il coefficiente di diffusione assume la forma

$$D(p) = \frac{k}{\mu} = |p|^{m-1} \quad m > 1 \quad (4.25)$$

nella quale, per $m \rightarrow 1$, si ritrova l'equazione di diffusione standard. Considerando [33], l'equazione (4.24) assume la forma seguente

$$\frac{\partial p}{\partial t} = (-\Delta)^{\frac{1}{2}} (|p|^{m-1} p) \quad (4.26)$$

Ottenere una soluzione analitica in forma chiusa dell'equazione presentata sopra è ancora un problema matematico aperto, e particolari metodi numerici sono necessari per ottenere una approssimazione di tale soluzione.

4.2.5.3 Diffusione anomala ed avvezione di soluto

Il sistema di FRDE (4.17) e (4.18) risulta in parte disaccoppiato a causa dell'indipendenza dell'equazione di trasporto di fluido dalla concentrazione di soluto, quindi, la pressione può essere considerato un termine noto all'interno della (4.17). Introducendo la (4.18) nella (4.17) e trascurando effetti non lineari spaziali delle proprietà del fluido, il modello monodimensionale saturo in deformazioni finite è governato dalla seguente espressione

$$(1 - \varphi)J\dot{C}(\rho_s K_d - 1) + \left(\varphi \rho_w \frac{k}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \right) \frac{\partial C}{\partial x} + (J + \varphi \rho_w) \frac{k}{\mu} \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} C - \frac{\varphi D}{J} \cdot (-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}} C \quad (4.27)$$

una osservazione simile può essere effettuata per lo Jacobiano che introduce un accoppiamento ulteriore con la componente meccanica del processo; infatti, ricordando che $\vartheta = \ln J$, lo jacobiano risulta direttamente collegato con la pressione dei pori, equazione (4.19), quindi può essere considerato come termine noto. Per semplicità la proprietà di non località in equazione (4.27) è attribuita solo al trasporto di soluto, ma può essere assegnata anche al trasporto di fluido utilizzando i risultati espressi nei paragrafi 4.2.5.2.

L'equazione (4.27) coinvolge tre processi nel fenomeno di trasporto di soluto: il secondo termine denota avvezione causata dal flusso di fluido, il terzo termine riflette il trasferimento di soluto risultante dall'eccesso di liquido nei pori e la derivata di

ordine frazionario rappresenta il contributo di diffusione in mezzo poroso eterogeneo. Sostituendo C con CQ_f/Q_f

$$\begin{aligned}
 (1 - \varphi)J \frac{\partial \bar{C}}{\partial t} (\rho_s K_d - 1) + \left(\varphi \rho_w \frac{k \partial p}{\mu \partial x} \right) \frac{\partial \bar{C}}{\partial x} \\
 + Q_f \left[(1 - \varphi)J (\rho_s K_d - 1) \frac{\partial(1/Q_f)}{\partial t} + \left(\varphi \rho_w \frac{k \partial p}{\mu \partial x} \right) \frac{\partial(1/Q_f)}{\partial x} \right. \\
 \left. - \frac{\varphi D}{J} \cdot (-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}} \left(\frac{1}{Q_f} \right) \right] \bar{C} + (J + \varphi \rho_w) \frac{k \partial^2 p}{\mu \partial x^2} \bar{C} - \frac{\varphi D}{J} \cdot (-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}} \bar{C} \\
 = 0
 \end{aligned} \tag{4.28}$$

con $\bar{C} = CQ_f$ denominata velocità di trasporto di soluto e

$$\begin{aligned}
 \bar{Q}_f = Q_f \left[(1 - \varphi)J (\rho_s K_d - 1) \frac{\partial(1/Q_f)}{\partial t} + \left(\varphi \rho_w \frac{k \partial p}{\mu \partial x} \right) \frac{\partial(1/Q_f)}{\partial x} - \frac{\varphi D}{J} \right. \\
 \left. \cdot (-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}} \left(\frac{1}{Q_f} \right) \right]
 \end{aligned} \tag{4.29}$$

si ottiene

$$\begin{aligned}
 (1 - \varphi)J \frac{\partial \bar{C}}{\partial t} (\rho_s K_d - 1) + \left(\varphi \rho_w \frac{k \partial p}{\mu \partial x} \right) \frac{\partial \bar{C}}{\partial x} + \left[\bar{Q}_f + (J + \varphi \rho_w) \frac{k \partial^2 p}{\mu \partial x^2} \right] \bar{C} \\
 - \frac{\varphi D}{J} \cdot (-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}} \bar{C} = 0
 \end{aligned} \tag{4.30}$$

che può essere riscritta in forma compatta

$$\frac{\partial \bar{C}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{C}}{\partial x} + \bar{Y} \bar{C} - \bar{K} (-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}} \bar{C} = 0 \tag{4.31}$$

con

$$\bar{u} = \frac{\varphi \rho_w k}{(1 - \varphi)J (\rho_s K_d - 1) \mu} \frac{\partial p}{\partial x} \quad \bar{Y} = \frac{\bar{Q}_f + (J + \varphi \rho_w) \frac{k \partial^2 p}{\mu \partial x^2}}{(1 - \varphi)J (\rho_s K_d - 1)} \quad \bar{K} = \frac{\varphi D}{J^2 (1 - \varphi) (\rho_s K_d - 1)} \tag{4.32}$$

È da notare che l'equazione (4.31), considerando le espressioni (4.32), mostra coefficienti variabili, risultando una struttura matematica non lineare, con conseguente grande difficoltà nell'ottenimento di soluzioni senza l'utilizzo di metodi numerici o semi-analitici.

Capitolo 5

Adomian Decomposition Method

5.1 Introduzione

Il Metodo di Decomposizione Adomia (ADM) è un metodo semi-analitico introdotto per la prima volta da George Adomian nel 1980 per la risoluzione di sistemi di equazioni stocastiche. Può essere un metodo efficace per ottenere in modo elegante soluzioni analitiche di problemi differenziali senza necessità di linearizzazioni, perturbazioni, discretizzazioni ed altre assunzioni che normalmente si adottano nei classici metodi numerici. Il presente metodo può essere utilizzato per risolvere equazioni integrali, differenziali ed integro-differenziali con ordini interi o frazionari, ordinarie o parziali, con condizioni iniziali o condizioni al contorno, con coefficienti costanti o variabili, lineari o non lineari, omogenee o non omogenee. ADM è, inoltre, una potente tecnica per la risoluzione delle equazioni che maggiormente si riscontrano nelle applicazioni pratiche, tra cui l'equazione del calore, delle onde, l'equazione di Black-Scholes. Usando la derivata frazionaria di Caputo, mediante ADM, si possono risolvere equazioni frazionarie di Korteweg de Vries e Burger.

Lo scopo del presente capitolo è di presentare una panoramica della teoria alla base del Metodo di Decomposizione Adomia, applicandolo, nei capitoli successivi, a diverse tipologie di equazioni e discutendone la convergenza. Verranno forniti cenni sulle numerose modifiche al metodo possono essere effettuate integrando l'accuratezza di ADM con tecniche analitiche di diversa natura, tra cui le trasformate integrali.

5.2 ADM – Descrizione del metodo

Nel presente paragrafo si riportano i principali passaggi per una corretta descrizione di ADM, in riferimento ad [34,35]. Sia il seguente problema differenziale nella sua descrizione operatoriale

$$Mu + Nu + Ru = g \quad (5.1)$$

dove u è la funzione incognita, M è un operatore lineare facilmente invertibile e con inversa denominata M^{-1} , generalmente coincidente con la derivata di ordine maggiore in riferimento alle condizioni al contorno e condizioni iniziali, N è l'operatore non lineare ed R è un operatore differenziale contenente la rimanente parte dell'equazione, g è una funzione nota. Nel caso in cui g sia nulla, l'equazione si dice omogenea, in caso contrario si dice non omogenea. Risolvendo l'equazione (5.1) per Mu si ottiene la seguente

$$Mu = g - Nu - Ru \quad (5.2)$$

ed applicando M^{-1} ad entrambi i membri

$$M^{-1}Mu = M^{-1}(g - Nu - Ru) \quad (5.3)$$

si ottiene

$$u = \Phi + M^{-1}g - M^{-1}(Nu + Ru) \quad (5.4)$$

dove Φ è il termine che tiene conto delle condizioni al contorno o condizioni iniziali del problema differenziale considerato. Il metodo di Decomposizione Adomia assume che la soluzione u possa scriversi come serie infinita del tipo

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} u_n = u_0 + u_1 + \dots u_n \quad (5.5)$$

ed il termine non lineare Nu come la serie infinita seguente

$$Nu = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(u_0 + u_1 + \dots u_n) = A_0 + A_1 + \dots A_n \quad (5.6)$$

dove $A_n = A_n(u_0 + u_1 + \dots u_n)$ sono i polinomi di Adomian così definiti

$$A_n = \frac{1}{n!} \frac{d^n}{d\lambda^n} \left[N \left(\sum_{i=0}^n \lambda^i u_i \right) \right]_{\lambda=0} \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (5.7)$$

e per componenti

$$\begin{aligned} A_0 &= \frac{1}{0!} \frac{d^0}{d\lambda^0} \left[N \left(\sum_{i=0}^0 \lambda^i u_i \right) \right]_{\lambda=0} = N(u_0) \\ A_1 &= \frac{1}{1!} \frac{d^1}{d\lambda^1} \left[N \left(\sum_{i=0}^1 \lambda^i u_i \right) \right]_{\lambda=0} = u_1 N'(u_0) \\ A_2 &= \frac{1}{2!} \frac{d^2}{d\lambda^2} \left[N \left(\sum_{i=0}^2 \lambda^i u_i \right) \right]_{\lambda=0} = u_2 N'(u_0) + \frac{1}{2!} u_1^2 N''(u_0) \\ A_3 &= \frac{1}{3!} \frac{d^3}{d\lambda^3} \left[N \left(\sum_{i=0}^3 \lambda^i u_i \right) \right]_{\lambda=0} = u_3 N'(u_0) + u_1 u_2 N''(u_0) + \frac{1}{3!} u_1^3 N'''(u_0) \\ &\dots \end{aligned} \quad (5.8)$$

Due importanti osservazioni possono essere svolte. Innanzitutto, A_0 dipende solo da u_0 , A_1 dipende solo da u_0 ed u_1 , A_2 dipende solo da u_0 , u_1 ed u_2 e così via. In secondo luogo, sostituendo (5.8) nella (5.6) si ottiene

$$\begin{aligned}
 N(u) &= A_0 + A_1 + A_2 + A_3 + \dots \\
 &= N(u_0) + (u_1 + u_2 + u_3 + \dots)N'(u_0) \\
 &\quad + \frac{1}{2!}(u_1^2 + 2u_1u_2 + 2u_1u_3 + u_2^2 + \dots)N''(u_0) \\
 &\quad + \dots \frac{1}{3!}(u_1^3 + 3u_1^2u_2 + 3u_1^2u_3 + 6u_1u_2u_3 + \dots)N'''(u_0) + \dots \\
 &= N(u_0) + (u - u_0)N'(u_0) + \frac{1}{2!}(u - u_0)^2N''(u_0) + \frac{1}{3!}(u - u_0)^3N'''(u_0) \\
 &\quad + \dots
 \end{aligned}$$

dalla quale si conferma il fatto che la serie di A_n è una serie di Taylor riferita ad una funzione u_0 e non ad un punto come è solito. I pochi polinomi di Adomian calcolati in (5.8) mostrano, inoltre, che la somma degli esponenti delle singole componenti di u in ogni termine di A_n è uguale ad n .

Sostituendo sia la (5.5) che la (5.6) nella (5.4) si ottiene

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = \Phi + M^{-1}g - M^{-1} \left(\sum_{n=0}^{\infty} A_n + \sum_{n=0}^{\infty} Ru_n \right) \quad (5.9)$$

dalla quale si deduce il seguente schema ricorsivo

$$\begin{aligned}
 u_0 &= \Phi + M^{-1}g \\
 u_{n+1} &= -M^{-1}(A_n + Ru_n) \quad n = 0, 1, 2, \dots
 \end{aligned} \quad (5.10)$$

Vale il seguente risultato

$$u(x, t) = \lim_{M \rightarrow \infty} U_M(x, t) = \lim_{M \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^M u_n(x, t) \quad (5.11)$$

Quindi man mano che vengono aggiunti termini alla decomposizione, se la serie è convergente, si ottiene una migliore approssimazione della soluzione del problema differenziale considerato.

5.3 ADM – Equazioni Differenziali Ordinarie

Una equazione differenziale ordinaria (ODE) è una equazione differenziale contenente una funzione di una variabile indipendente e le sue derivate di qualsiasi ordine. Dehghan e Tatari [36] applicarono il metodo di Decomposizione Adomia per calcolare soluzioni di ODEs derivanti da problemi del calcolo delle variazioni. Si consideri il seguente problema differenziale non lineare

$$Mu(x) + Nu(x) + Ru(x) = g(x) \quad (5.12)$$

dove M è la derivata $\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}$ da cui deriva l'operatore inverso $M^{-1} = \int_0^x \dots \int_0^x [\cdot] \underbrace{dx \dots dx}_{n+1}$,

N è il termine non lineare, R il termine lineare rimanente e g una data funzione di una variabile. Risolvendo per $Mu(x)$ si può riscrivere

$$Mu(x) = g(x) - Nu(x) - Ru(x) \quad (5.13)$$

ed applicando M^{-1} ad entrambi i membri dell'equazione (5.13) si può dedurre

$$\begin{aligned} M^{-1}Mu(x) &= M^{-1}(g(x) - Nu(x) - Ru(x)) \\ &\rightarrow \int_0^x \cdots \int_0^x \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} u(x) \underbrace{dx \cdots dx}_{n+1} \\ &= \int_0^x \cdots \int_0^x g(x) dx \cdots dx \\ &\quad - \int_0^x \cdots \int_0^x (Nu(x) + Ru(x)) dx \cdots dx \end{aligned} \quad (5.14)$$

da cui

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} u_n &= \varphi_0 + \int_0^x \cdots \int_0^x g(x) dx \cdots dx \\ &\quad - \int_0^x \cdots \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} A_n + \sum_{n=0}^{\infty} Ru_n \right) dx \cdots dx \end{aligned} \quad (5.15)$$

dove il termine φ_0 dipende dall'ordine dell'operatore differenziale M secondo lo schema seguente

$$\varphi_0 = \begin{cases} u(0), & M = \frac{d}{dx} \\ u(0), +xu'(0) & M = \frac{d^2}{dx^2} \\ u(0) + xu'(0) + \frac{x^2}{2!}u''(0) & M = \frac{d^3}{dx^3} \\ \vdots \\ u(0) + xu'(0) + \frac{x^2}{2!}u''(0) + \cdots + \frac{x^n}{n!}u^{(n)}(0) & M = \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} \end{cases} \quad (5.16)$$

Basandosi sulla (5.15) si ottiene, per confronto, la seguente relazione ricorsiva:

$$\begin{aligned} u_0 &= c + \int_0^x \cdots \int_0^x g(x) dx \cdots dx \\ u_{n+1} &= - \int_0^x \cdots \int_0^x (A_n + Ru_n) dx \cdots dx \end{aligned} \quad n = 0,1,2, \dots \quad (5.17)$$

5.4 ADM – Equazioni Differenziali a derivate Parziali

Una equazione differenziale a derivate parziali (PDE) è una equazione differenziale che contiene una funzione di più variabili indipendenti e le sue derivate parziali di qualsiasi ordine e combinazioni. Bougoffa e Rach in [37] presentarono un nuovo approccio per ADM usando la serie di Fourier per la risoluzione di problemi

differenziali parabolici ed iperbolici. Altri contributi sono quelli di Pourgholi e Saeedi [38] per la risoluzione di problemi mal posti e Al awawdah [39] per l'ottenimento di soluzioni di PDEs considerando differenti tipologie di operatore inverso, condizioni al contorno ed iniziali e coefficienti variabili. Si consideri il seguente problema differenziale non lineare

$$M_t u(x, t) + Nu(x, t) + Ru(x, t) = g(x, t) \quad (5.18)$$

dove M_t è l'operatore contenente derivate parziali temporali della funzione incognita $u(x, t)$ e gli altri termini assumo il significato già precedentemente definito. Risolvendo per $M_t u(x, t)$ si ottiene

$$M_t u(x, t) = g(x, t) - Nu(x, t) - Ru(x, t) \quad (5.19)$$

ed applicando M_t^{-1} ad entrambi i membri si deduce

$$\begin{aligned} M_t^{-1} M_t u(x, t) &= M_t^{-1} (g(x, t) - Nu(x, t) - Ru(x, t)) \\ &\rightarrow \int_0^t \cdots \int_0^t M_t u(x) \frac{dt \cdots dt}{M_t = \frac{\partial^{n+1}}{\partial x^{n+1}} \rightarrow n+1} \\ &= \int_0^t \cdots \int_0^t g(x) dt \cdots dt \\ &\quad - \int_0^t \cdots \int_0^t (Nu(x) + Ru(x)) dt \cdots dt \end{aligned} \quad (5.20)$$

da cui

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} u_n &= \varphi_0 + \int_0^t \cdots \int_0^t g(x, t) dt \cdots dt \\ &\quad - \int_0^t \cdots \int_0^t \left(\sum_{n=0}^{\infty} A_n + \sum_{n=0}^{\infty} Ru_n \right) dt \cdots dt \end{aligned} \quad (5.21)$$

dove il termine φ_0 dipende dall'ordine dell'operatore differenziale M_t secondo lo schema seguente

$$\varphi_0 = \begin{cases} u(x, 0), & M = \frac{\partial}{\partial x} \\ u(x, 0) + tu'(x, 0) & M = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \\ u(x, 0) + tu'(x, 0) + \frac{t^2}{2!} u''(x, 0) & M = \frac{\partial^3}{\partial x^3} \\ \vdots \\ u(x, 0) + tu'(x, 0) + \frac{t^2}{2!} u''(x, 0) + \cdots + \frac{t^n}{n!} u^{(n)}(x, 0) & M = \frac{\partial^{n+1}}{\partial x^{n+1}} \end{cases} \quad (5.22)$$

Basandosi sulla (5.21) si ottiene, per confronto, la seguente relazione ricorsiva:

$$\begin{aligned}
 u_0 &= \varphi_0 + \int_0^t \cdots \int_0^t g(x, t) dt \cdots dt \\
 u_{n+1} &= - \int_0^t \cdots \int_0^t (A_n + Ru_n) dt \cdots dt
 \end{aligned}
 \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (5.23)$$

5.5 ADM – Equazioni Differenziali Frazionarie

Se una equazione differenziale ordinaria o a derivate parziali contiene operatori differenziali con ordini di derivazione frazionari viene chiamata equazione differenziale frazionaria (FDE). Ray e Bera [40] applicarono ADM per la soluzione di una equazione differenziale frazionaria non lineare con derivate frazionarie di Riemann-Liouville. Gepreel [41] usò ADM per costruire una soluzione approssimata per equazioni differenziali a derivate parziali tramite derivate frazionarie di Caputo, tra cui l'equazione delle onde e di Burger. Si consideri, ora, la seguente equazione differenziale frazionaria

$$D_t^\alpha u(x, t) + Nu(x, t) + Ru(x, t) = g(x, t) \quad (5.24)$$

in cui D_t^α è un qualsiasi operatore frazionario da specificare di volta in volta, $D_t^{-\alpha} = J_t^\alpha$ l'operatore inverso della derivata frazionarie di ordine α denominato integrale frazionario e gli altri termini assumo il significato già precedentemente definito. Risolvendo per $D_t^\alpha u$ si ottiene

$$D_t^\alpha u(x, t) = g(x, t) - Nu(x, t) - Ru(x, t) \quad (5.25)$$

ed applicando J_t^α ad entrambi i membri si deduce

$$\begin{aligned}
 J_t^\alpha D_t^\alpha u(x, t) &= J_t^\alpha (g(x, t) - Nu(x, t) - Ru(x, t)) \\
 &\rightarrow u(x, t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^k}{k!} u^{(k)}(x, 0) \\
 &= J_t^\alpha g(x, t) - J_t^\alpha (Nu(x, t) - Ru(x, t))
 \end{aligned}
 \quad (5.26)$$

da cui

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = \underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^k}{k!} u^{(k)}(x, 0)}_{\varphi_0} + J_t^\alpha g(x, t) - J_t^\alpha \left(\sum_{n=0}^{\infty} A_n + \sum_{n=0}^{\infty} Ru_n \right) \quad (5.27)$$

Basandosi sulla (5.27) si ottiene, per confronto, la seguente relazione ricorsiva

$$\begin{aligned}
 u_0 &= \varphi_0 + J_t^\alpha g(x, t) \\
 u_{n+1} &= -J_t^\alpha (A_n + Ru_n)
 \end{aligned}
 \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (5.28)$$

Per poter trattare l'integrale frazionario di $g(x, t)$ che a volte può risultare scomodo, se non impossibile, da calcolare, Dhaigude e Bhadgaonkar [42] proposero una

modifica ad ADM basata sull'assunzione che $g(x, t)$ sia una funzione analitica. Il suo sviluppo di Taylor frazionario [43] risulta quindi:

$$g(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{h=0}^{\infty} G_{\alpha, \alpha}(k, h) x^{k\alpha} t^{h\alpha} \quad (5.29)$$

dove

$$G_{\alpha, \alpha}(k, h) = \frac{1}{\Gamma(k\alpha + 1)\Gamma(h\alpha + 1)} (D_x^\alpha)^k (D_t^\alpha)^h g(x, t)|_{x=t=0} \quad (5.30)$$

$$(D_x^\alpha)^k = \underbrace{D_x^\alpha D_x^\alpha \dots D_x^\alpha}_k \quad (5.31)$$

Sostituendo (5.29) nella (5.27) si ottiene

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} u_n = & \underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^k}{k!} u^{(k)}(x, 0)}_{\varphi_0} + J_t^\alpha \left(\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{h=0}^{\infty} G_{\alpha, \alpha}(k, h) x^{k\alpha} t^{h\alpha} \right) \\ & - J_t^\alpha \left(\sum_{n=0}^{\infty} A_n + \sum_{n=0}^{\infty} R u_n \right) = \end{aligned} \quad (5.32)$$

che può essere riscritto nella seguente forma:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} u_n = & \underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^k}{k!} u^{(k)}(x, 0)}_{\varphi_0} \\ & + J_t^\alpha \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} G_{\alpha, \alpha}(k, 0) x^{k\alpha} t^{h\alpha} + \sum_{k=0}^{\infty} G_{\alpha, \alpha}(k, 1) x^{k\alpha} t^{h\alpha} \right. \\ & \left. + \dots \right\} - J_t^\alpha \left(\sum_{n=0}^{\infty} A_n + \sum_{n=0}^{\infty} R u_n \right) \end{aligned} \quad (5.33)$$

Per comparazione tra i due membri delle (5.33) si perviene a

$$\begin{aligned} u_0 = & \underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^k}{k!} u^{(k)}(x, 0)}_{\varphi_0} \\ u_1 = & J_t^\alpha \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} G_{\alpha, \alpha}(k, 0) x^{k\alpha} t^{h\alpha} - (A_0 + R u_0) \right\} \\ u_2 = & J_t^\alpha \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} G_{\alpha, \alpha}(k, 1) x^{k\alpha} t^{h\alpha} - (A_1 + R u_1) \right\} \\ & \dots \end{aligned} \quad (5.34)$$

da cui il seguente schema ricorsivo

$$u_0 = \varphi_0$$

$$u_{n+1} = -J_t^\alpha \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} G_{\alpha,\alpha}(k, n) x^{k\alpha} t^{h\alpha} - (A_n + Ru_n) \right\} \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (5.35)$$

5.6 Vantaggi e svantaggi di ADM

Tra i maggiori vantaggi del Metodo di Decomposizione Adomia si ritrova l'abilità di risolvere problemi differenziali fortemente non lineari senza processi di linearizzazione, perturbazione, discretizzazione o costruzione di mesh adatte allo scopo, l'applicabilità ad una numerosa classe di problemi in differenti ambiti scientifici e, quando possibile, l'abilità di costruire una soluzione in forma chiusa. ADM non linearizza le equazioni governanti il problema né assume restrizioni sulle caratteristiche delle non linearità e, pertanto, può maneggiare abilmente operatori non lineari abbastanza generali e generare soluzioni che possono essere più realistiche di quelle ottenute con altri metodi che, al contrario, richiedono linearizzazione.

Sono presenti, tuttavia, degli svantaggi. In prima istanza, il metodo fornisce la soluzione in termini di serie, che per ovvie ragioni non può essere computata per intero e quindi troncata per le applicazioni pratiche. ADM richiede l'uso dei polinomi di Adomian che sono computazionalmente molto onerosi ed infine, la regione di convergenza del metodo può essere anche molto ridotta. Sebbene, infatti, la serie abbia una velocità di convergenza considerevole, può accadere che tale convergenza sia raggiunta solo in un certo intervallo ridotto del dominio di interesse. Altri problemi possono insorgere quando si opera con condizioni al contorno o condizioni iniziali che non si è in grado di integrare o derivare ricorsivamente; ciò accade principalmente nel contesto delle equazioni differenziali frazionarie, dove, la forma chiusa degli operatori differenziali considerati si conosce solo per alcune funzioni e per alcuni terminali. Nel caso in cui non ci si ritrovi nei casi notevoli si potrebbe optare per tecniche di approssimazione delle derivate frazionarie che, tuttavia, potrebbero condurre ad instabilità numeriche dell'algoritmo non pensato per applicazioni ricorsive, come evidenziato nei capitoli successivi.

5.7 Modifiche ad ADM

ADM ha subito negli anni numerose modifiche da vari ricercatori nel tentativo di migliorare l'accuratezza del metodo od espandere il campo di applicazione. Nel presente paragrafo si vuole dare una panoramica generale delle principali modifiche proposte con l'obiettivo di far comprendere l'importanza e lo studio dedicato al metodo ADM sin dalla sua origine.

In primo luogo, Adomian e Rach [44] introdussero modifiche ai polinomi di Adomian in modo che la convergenza fosse leggermente più veloce dei polinomi standard e che questi potessero essere valutati computazionalmente in modo più conveniente. I primi termini dei polinomi di Adomian modificati risultano identici ai classici ma per ordini superiori emergono differenze. In [44,45] sono introdotti i

polinomi di Adomian accelerati che garantiscono una maggiore velocità di convergenza, ma, risultano più onerosi da ricavare. Sebbene siano state introdotte tali modifiche alla struttura dei polinomi di Adomian, i vantaggi non sono molto evidenti, portando i ricercatori ad utilizzare, per la maggior parte delle loro applicazioni, i polinomi standard essendo semplici da generare anche senza l'utilizzo di calcolatori ed una convergenza sufficientemente rapida per i problemi considerati comunemente.

Altre modifiche sono state proposte da Wazwaz [46] in cui la componente u_0 , che nella trattazione standard di ADM viene calcolata come $u_0 = \varphi_0 + M^{-1}$, si assume possa essere suddivisa in due parti $u_0 = f_0 + f_1$ in modo da assegnare ad u_0 solo f_0 e ad u_1 la rimanente parte. Il successo del presente metodo dipende principalmente da una scelta adeguata delle due componenti in cui dividere la funzione iniziale. Nel 2001 Wazwaz e Al-sayed [47] proposero una nuova modifica al metodo di Decomposizione Adomia sostituendo ad u_0 non solamente due componenti, bensì una serie infinita.

Altre modifiche più recenti sono quelle presentate da Luo [48] con il metodo ADM a due step e con [49] nel quale il termine iniziale viene ripetutamente generato e modificato. A tutte queste modifiche si aggiungono le infinite applicazioni delle trasformate integrali in ADM, in cui si prevede l'applicazione di una trasformata integrale, per esempio Laplace, Fourier, Shedu..., all'equazione differenziale e solo dopo si inserisce la approssimazione della soluzione prevista da ADM, anti-trasformando in ultima istanza.

Nella prosecuzione della trattazione, per tutti i casi analizzati, si farà riferimento alla trattazione classica del metodo di Decomposizione Adomia, ben consci che un ipotetico fallimento potrebbe essere superato adottando una opportuna modifica del metodo.

Capitolo 6

ADM per Standard DE

6.1 Introduzione

Nel presente capitolo si risolverà la classica equazione di diffusione (DE) con diverse condizioni iniziali attraverso la tecnica di decomposizione Adomia (ADM) descritta dettagliatamente nel capitolo 5 del presente lavoro di tesi. Nel caso di DE il metodo ADM fornisce, per tutte le condizioni iniziali, la soluzione analitica esatta e può essere, quindi, utilizzata come comparazione con la soluzione numerica ADM.

Le condizioni iniziali considerate sono $u(x, 0) = x^3, \sin(x), \cos(x), e^{ax}$ ed un coefficiente di diffusione costante $K = cost$. La dipendenza funzionale del coefficiente di diffusione legato ad eterogeneità, effetti di memoria del mezzo poroso o processi a grandi deformazioni verranno trattati dettagliatamente nei capitoli successivi.

6.2 ADM - DE

Nel caso di equazione della diffusione standard è possibile dedurre una formulazione di carattere generale data una qualsiasi condizione iniziale del tipo $u(x, 0) = f(x)$ derivabile nel proprio dominio di definizione. È possibile estendere la formulazione nel qual caso siano considerate condizioni iniziali od al contorno dotate di singolarità, ma non in questa sede. Si noti che le condizioni iniziali scelte per le analisi sono tutte infinitamente derivabili nel proprio campo di esistenza $[a, b]$ essendo funzioni di classe $C^\infty[a, b]$.

Si consideri il seguente problema differenziale

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = K \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(x, 0) = f(x) \end{cases} \quad (x, t) \in [a, b] \times (0, T) \quad (6.1)$$

che può essere scritta nella seguente forma attraverso gli operatori differenziali, essendo una scrittura più agevole nell'ottica dell'applicazione di ADM

$$L_t u(x, t) = K L_{xx} u(x, t) \quad (6.2)$$

con gli operatori definiti come

$$L_t = \frac{\partial}{\partial t} \quad L_{xx} = \frac{\partial^2}{\partial x^2}$$

e gli operatori integrali

$$L_t^{-1}(\cdot) = \int_0^t (\cdot) dt \quad L_{xx}^{-1} = \int_0^x \int_0^x (\cdot) dx dx$$

Applicando ambo i membri L_t^{-1} si ottiene

$$L_t^{-1}L_t u(x, t) = L_t^{-1}KL_{xx}u(x, t) \quad (6.3)$$

$$u(x, t) = u(x, 0) + L_t^{-1}KL_{xx}u(x, t) \quad (6.4)$$

e ricordando l'ipotesi base del Metodo di Decomposizione Adomia

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x, t)$$

si ottiene

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x, t) = u(x, 0) + L_t^{-1}KL_{xx} \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x, t) \quad (6.5)$$

da cui si deduce l'algoritmo ricorsivo

$$\begin{cases} u_0(x, t) = u(x, 0) \\ u_{n+1}(x, t) = L_t^{-1}KL_{xx}u_n(x, t) \end{cases} \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (6.6)$$

$$\begin{cases} u_0(x, t) = u(x, 0) = f(x) \\ u_1(x, t) = L_t^{-1}KL_{xx}u_0(x, 0) = L_t^{-1}KL_{xx}f(x) = Kt f^{(2)}(x) \\ u_2(x, t) = L_t^{-1}KL_{xx}u_1(x, t) = L_t^{-1}KL_{xx} \left[Kt f^{(2)}(x) \right] = K^2 \frac{t^2}{2} f^{(4)}(x) \\ u_3(x, t) = L_t^{-1}KL_{xx}u_2(x, t) = L_t^{-1}KL_{xx} \left[K^2 \frac{t^2}{2} f^{(4)}(x) \right] = K^3 \frac{t^3}{6} f^{(6)}(x) \\ \vdots \\ u_n(x, t) = L_t^{-1}KL_{xx}u_{n-1}(x, t) = K^n \frac{t^n}{n!} f^{(2n)}(x) \end{cases} \quad (6.7)$$

Considerando un numero maggiore di termini della serie infinita, se convergente, si ottiene un grado di approssimazione maggiore essendo valide le seguenti asserzioni

$$U_M(x, t) = \sum_{n=0}^M u_n(x, t) = \sum_{n=0}^M K^n \frac{t^n}{n!} \cdot f^{(2n)}(x) \quad (6.8)$$

$$u(x, t) = \lim_{M \rightarrow \infty} U_M(x, t) = \lim_{M \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^M u_n(x, t) = \lim_{M \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^M K^n \frac{t^n}{n!} \cdot f^{(2n)}(x) \quad (6.9)$$

la convergenza di tale serie è dimostrata numericamente al paragrafo successivo.

6.3 Coefficiente di diffusione costante - $K = cost$

6.3.1 DE con condizioni iniziali $u(x, 0) = x^3$

Si considera ora la DE del tipo seguente

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = K \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(x, 0) = x^3 \end{cases} \quad (6.10)$$

ricordando che

$$u_n(x, t) = L_t^{-1} K L_{xx} u_{n-1}(x, t) = K^n \frac{t^n}{n!} f^{(2n)}(x) \quad (6.11)$$

si ottiene quanto riportato nella tabella sottostante

n	u_n
0	$u_0(x, t) = u(x, 0) = x^3$
1	$u_1(x, t) = L_t^{-1} K L_{xx} u_0(x, t) = K^1 \frac{t^1}{1!} f^{(2)}(x) = 6xt$
\vdots	\vdots
$n \geq 2$	$u_n(x, t) = L_t^{-1} K L_{xx} u_{n-1}(x, t) = 0$

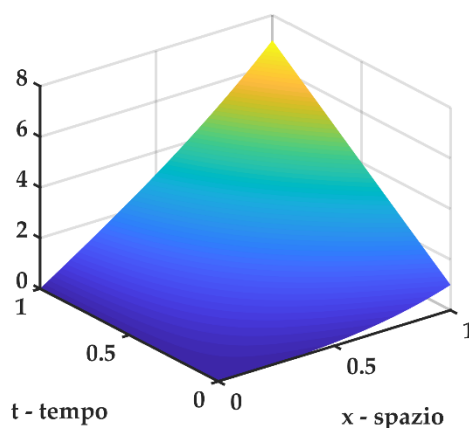


Figura 6-1 soluzione dell'equazione standard di diffusione (DE) con condizioni iniziali $u(x, 0) = x^3$ e coefficiente di diffusione costante $\rightarrow K = cost$. In questo caso risulta anche essere la soluzione analitica esatta del problema differenziale considerato

Quindi in questo caso la decomposizione Adomia ha fornito la soluzione esatta rappresentata qui sotto, verificabile per diretta sostituzione:

$$u_{esatta}(x, t) = x(x^2 + 6t) \quad (6.12)$$

Si noti che è stato utilizzato l'operatore inverso del tempo in quanto il problema originario forniva condizioni iniziali. Qualora fossero state fornite condizioni al contorno si sarebbe invertito l'operatore differenziale spaziale. In aggiunta, essendo l'equazione non dotata di termini non lineari, non è stato necessario calcolare alcun polinomio di Adomian.

6.3.2 DE con condizioni iniziali $u(x, 0) = \sin(x)$

Si considera ora la DE del tipo seguente

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = K \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(x, 0) = \sin(x) \end{cases} \quad (6.13)$$

la cui soluzione esatta, verificabile per diretta sostituzione è:

$$u(x, t) = \sin(x)e^{-Kt} \quad (6.14)$$

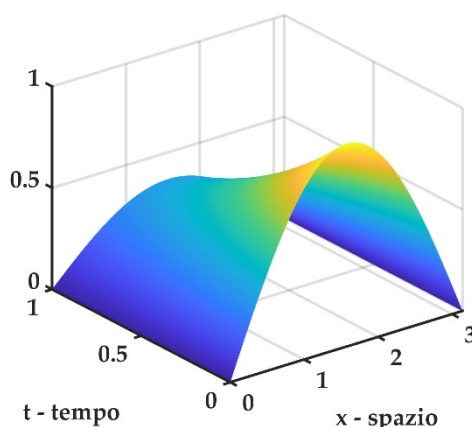


Figura 6-2 plot 3D della soluzione esatta del problema differenziale considerato

Ricordando che

$$u_n(x, t) = L_t^{-1} K L_{xx} u_{n-1}(x, t) = K^n \frac{t^n}{n!} f^{(2n)}(x) \quad (6.15)$$

si ottengono le seguenti componenti

n	u_n
0	$u_0(x, t) = \sin(x) = f(x)$
1	$u_1(x, t) = L_t^{-1} K L_{xx} u_0(x, t) = K^1 \frac{t^1}{1!} f^{(2)}(x) = -Kt \sin(x)$
2	$u_2(x, t) = L_t^{-1} K L_{xx} u_1(x, t) = K^2 \frac{t^2}{2!} f^{(4)}(x) = K^2 \frac{t^2}{2!} \sin(x)$
3	$u_3(x, t) = L_t^{-1} K L_{xx} u_2(x, t) = K^3 \frac{t^3}{3!} f^{(6)}(x) = -K^3 \frac{t^3}{3!} \sin(x)$
4	$u_4(x, t) = L_t^{-1} K L_{xx} u_3(x, t) = K^4 \frac{t^4}{4!} f^{(8)}(x) = K^4 \frac{t^4}{4!} \sin(x)$
\vdots	\vdots

10	$u_{10}(x, t) = L_t^{-1} K L_{xx} u_9(x, t) = K^{10} \frac{t^{10}}{10!} f^{(20)}(x) = K^{10} \frac{t^{10}}{10!} \sin(x)$
⋮	⋮
20	$u_{20}(x, t) = L_t^{-1} K L_{xx} u_9(x, t) = K^{20} \frac{t^{20}}{20!} f^{(40)}(x) = K^{20} \frac{t^{20}}{20!} \sin(x)$

Successivamente si considererà un valore di K costante pari ad 1 avendo compreso il suo contributo come fattore di scala nella soluzione.

$$u(x, t) = \lim_{M \rightarrow \infty} U_M(x, t) = \lim_{M \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^M u_n(x, t) = \lim_{M \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^M K^n \frac{t^n}{n!} \sin(x) \quad (6.16)$$

Di seguito si considera una tabella di confronto fra i valori ottenuti dalla soluzione analitica e la soluzione ADM per un valore di termini della serie infinita $M = 30$.

M = 30				
x	t	u_{exact}	$u_{numerica}$	$ u_{exact} - u_{numerico} $
0	0.0	0.000000000E+00	0.000000000E+00	0.000000000E+00
	0.2	0.000000000E+00	0.000000000E+00	0.000000000E+00
	0.4	0.000000000E+00	0.000000000E+00	0.000000000E+00
	0.6	0.000000000E+00	0.000000000E+00	0.000000000E+00
	0.8	0.000000000E+00	0.000000000E+00	0.000000000E+00
	1.0	0.000000000E+00	0.000000000E+00	0.000000000E+00
$\frac{\pi}{2}$	0.0	1.000000000E+00	1.000000000E+00	0.000000000E+00
	0.2	8.187307531E-01	8.187307531E-01	0.000000000E+00
	0.4	6.703200460E-01	6.703200460E-01	2.220446049E-16
	0.6	5.488116361E-01	5.488116361E-01	1.110223025E-16
	0.8	4.493289641E-01	4.493289641E-01	0.000000000E+00
	1.0	3.678794412E-01	3.678794412E-01	1.110223025E-16
π	0.0	1.224646799E-16	1.224646799E-16	0.000000000E+00
	0.2	1.002655996E-16	1.002655996E-16	1.232595164E-32
	0.4	8.209052988E-17	8.209052988E-17	1.232595164E-32
	0.6	6.721004135E-17	6.721004135E-17	3.697785493E-32
	0.8	5.502692777E-17	5.502692777E-17	1.848892747E-32
	1.0	4.505223801E-17	4.505223801E-17	6.162975822E-33

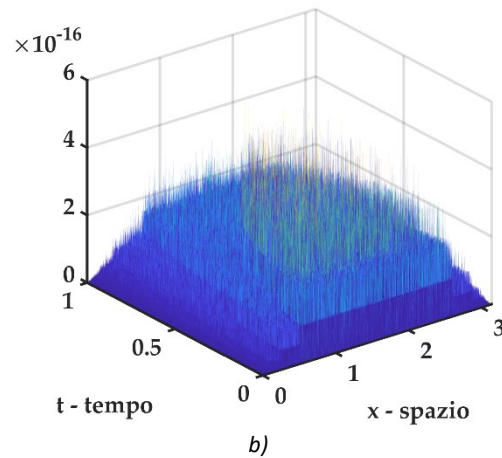
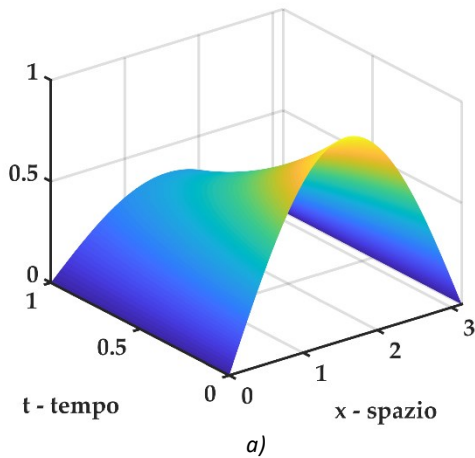


Figura 6-3 soluzione dell'equazione standard di diffusione (DE) con condizioni iniziali $u(x, 0) = \sin(x)$ e coefficiente di diffusione costante $\rightarrow K = cost$ con $M = 30$. a) plot 3D, b) errore fra la soluzione analitica e numerica ADM con $M = 30$

Come si può notare dai plot sopra riportati, la decomposizione Adomia fornisce risultati sempre più accurati man mano che vengono considerati più componenti nella serie infinita utilizzata per l'approssimazione della soluzione. Ciò ci porta a concludere che il metodo semi-analitico considerato ben si presta a risolvere equazioni differenziali a derivate parziali paraboliche come quelle della diffusione considerate.

Il fatto che ADM conduca alla soluzione esatta è dimostrabile anche con il ragionamento seguente. Consideriamo l' n -esimo termine della decomposizione Adomia

$$u(x, t) = \sin(x) - Kt \sin(x) + K^2 \frac{t^2}{2!} \sin(x) - K^3 \frac{t^3}{3!} \sin(x) + \dots \quad (6.17)$$

raccogliendo a fattor comune si ottiene

$$u(x, t) = \sin(x) \left(1 - Kt + K^2 \frac{t^2}{2!} - K^3 \frac{t^3}{3!} + \dots \right) = \sin(x) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-Kt)^n}{n!} \quad (6.18)$$

si riconosce lo sviluppo di Taylor della funzione esponenziale, e dunque si ottiene

$$u(x, t) = \sin(x) e^{-Kt} \quad (6.19)$$

coincidente perfettamente con la soluzione analitica inizialmente considerata.

6.3.3 DE con condizioni iniziali $u(x, 0) = \cos(x)$

Si considera ora la DE del tipo seguente

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = K \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(x, 0) = \cos(x) \end{cases} \quad (6.20)$$

la cui soluzione esatta, verificabile per diretta sostituzione è:

$$u(x, t) = \cos(x)e^{-Kt} \quad (6.21)$$

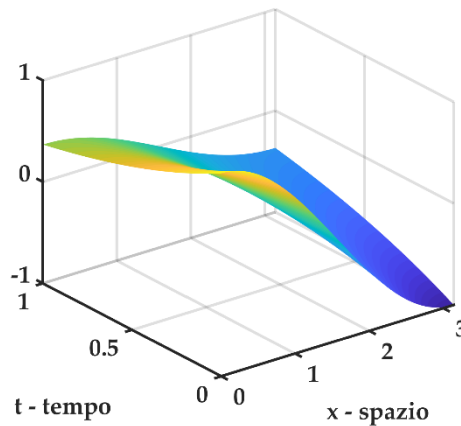


Figura 6-4 plot 3D della soluzione esatta del problema differenziale considerato

Ricordando che

$$u_n(x, t) = L_t^{-1} K L_{xx} u_{n-1}(x, t) = K^n \frac{t^n}{n!} f^{(2n)}(x) \quad (6.22)$$

si ottengono le seguenti componenti

n	u_n
0	$u_0(x, t) = \cos(x) = f(x)$
1	$u_1(x, t) = L_t^{-1} K L_{xx} u_0(x, t) = K^1 \frac{t^1}{1!} f^{(2)}(x) = -Kt \cos(x)$
2	$u_2(x, t) = L_t^{-1} K L_{xx} u_1(x, t) = K^2 \frac{t^2}{2!} f^{(4)}(x) = K^2 \frac{t^2}{2!} \cos(x)$
3	$u_3(x, t) = L_t^{-1} K L_{xx} u_2(x, t) = K^3 \frac{t^3}{3!} f^{(6)}(x) = -K^3 \frac{t^3}{3!} \cos(x)$
4	$u_4(x, t) = L_t^{-1} K L_{xx} u_3(x, t) = K^4 \frac{t^4}{4!} f^{(8)}(x) = K^4 \frac{t^4}{4!} \cos(x)$
\vdots	\vdots

10	$u_{10}(x, t) = L_t^{-1}KL_{xx}u_9(x, t) = K^{10} \frac{t^{10}}{10!} f^{(20)}(x) = K^{10} \frac{t^{10}}{10!} \cos(x)$
⋮	⋮
20	$u_{20}(x, t) = L_t^{-1}KL_{xx}u_9(x, t) = K^{20} \frac{t^{20}}{20!} f^{(40)}(x) = K^{20} \frac{t^{20}}{20!} \cos(x)$

Successivamente si considererà un valore di K costante pari ad 1 avendo compreso il suo contributo come fattore di scala nella soluzione.

$$u(x, t) = \lim_{M \rightarrow \infty} U_M(x, t) = \lim_{M \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^M u_n(x, t) = \lim_{M \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^M K^n \frac{t^n}{n!} \cos(x) \quad (6.23)$$

Di seguito si considera una tabella di confronto fra i valori ottenuti dalla soluzione analitica e la soluzione ADM per un valore di termini della serie infinita $M = 30$.

$M = 30$				
x	t	u_{exact}	$u_{numerica}$	$ u_{exact} - u_{numerica} $
0	0.0	1.000000000E+00	1.000000000E+00	0.000000000E+00
	0.2	8.187307531E-01	8.187307531E-01	0.000000000E+00
	0.4	6.703200460E-01	6.703200460E-01	2.220446049E-16
	0.6	5.488116361E-01	5.488116361E-01	1.110223025E-16
	0.8	4.493289641E-01	4.493289641E-01	0.000000000E+00
	1.0	3.678794412E-01	3.678794412E-01	1.110223025E-16
$\frac{\pi}{2}$	0.0	6.123233996E-17	6.123233996E-17	0.000000000E+00
	0.2	5.013279981E-17	5.013279981E-17	6.162975822E-33
	0.4	4.104526494E-17	4.104526494E-17	6.162975822E-33
	0.6	3.360502067E-17	3.360502067E-17	1.848892747E-32
	0.8	2.751346388E-17	2.751346388E-17	9.244463733E-33
	1.0	2.252611901E-17	2.252611901E-17	3.081487911E-33
π	0.0	-1.000000000E+00	-1.000000000E+00	0.000000000E+00
	0.2	-8.187307531E-01	-8.187307531E-01	0.000000000E+00
	0.4	-6.703200460E-01	-6.703200460E-01	2.220446049E-16
	0.6	-5.488116361E-01	-5.488116361E-01	1.110223025E-16
	0.8	-4.493289641E-01	-4.493289641E-01	0.000000000E+00
	1.0	-3.678794412E-01	-3.678794412E-01	1.110223025E-16

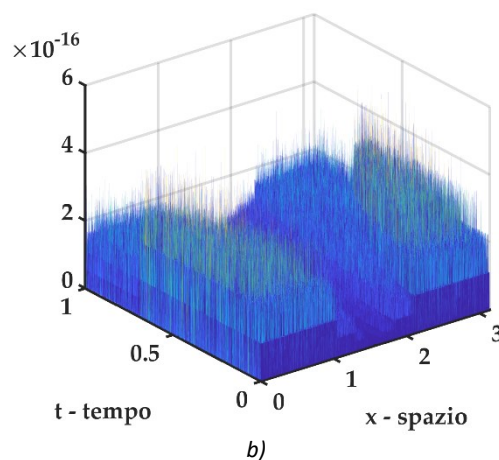
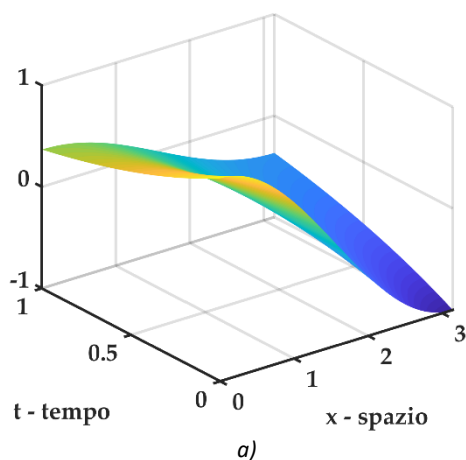


Figura 6-5 soluzione dell'equazione standard di diffusione (DE) con condizioni iniziali $u(x,0) = \cos(x)$ e coefficiente di diffusione costante $\rightarrow K = cost$ con $M = 30$. a) plot 3D, b) errore fra la soluzione analitica e numerica ADM con $M = 30$

Come si può notare dai plot sopra riportati, la decomposizione Adomia fornisce risultati sempre più accurati man mano che vengono considerati più componenti nella serie infinita utilizzata per l'approssimazione della soluzione, come al paragrafo precedente.

Il fatto che ADM conduca alla soluzione esatta è dimostrabile anche con il ragionamento seguente. Consideriamo l' n -esimo termine della decomposizione Adomia

$$u(x, t) = \cos(x) - Kt \cos(x) + K^2 \frac{t^2}{2!} \cos(x) - K^3 \frac{t^3}{3!} \cos(x) + \dots \quad (6.24)$$

raccogliendo a fattor comune si ottiene

$$u(x, t) = \cos(x) \left(1 - Kt + K^2 \frac{t^2}{2!} - K^3 \frac{t^3}{3!} + \dots \right) = \cos(x) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-Kt)^n}{n!} \quad (6.25)$$

si riconosce lo sviluppo di Taylor della funzione esponenziale, e dunque si ottiene

$$u(x, t) = \cos(x) e^{-Kt} \quad (6.26)$$

coincidente perfettamente con la soluzione analitica inizialmente considerata.

6.3.4 DE con condizioni iniziali $u(x, 0) = e^{ax}$ $Re(a) \geq 0$

Si consideri ora la DE del tipo seguente

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = K \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(x, 0) = e^{ax} \quad Re(a) \geq 0 \end{cases} \quad (6.27)$$

La cui soluzione esatta, verificabile per diretta sostituzione è:

$$u(x, t) = e^{a(Kta+x)} \quad (6.28)$$

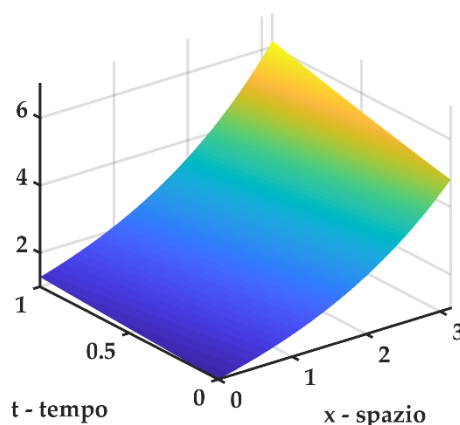


Figura 6-6 plot 3D della soluzione esatta del problema differenziale considerato con $a = 0.50$

Ricordando che

$$u_n(x, t) = L_t^{-1} K L_{xx} u_{n-1}(x, t) = K^n \frac{t^n}{n!} f^{(2n)}(x) \quad (6.29)$$

si ottengono le seguenti componenti

n	u_n
0	$u_0(x, t) = e^{ax} = f(x)$
1	$u_1(x, t) = L_t^{-1} K L_{xx} u_0(x, t) = K^1 \frac{t^1}{1!} f^{(2)}(x) = a^2 K t e^{ax}$
2	$u_2(x, t) = L_t^{-1} K L_{xx} u_1(x, t) = K^2 \frac{t^2}{2!} f^{(4)}(x) = a^4 K^2 \frac{t^2}{2!} e^{ax}$
3	$u_3(x, t) = L_t^{-1} K L_{xx} u_2(x, t) = K^3 \frac{t^3}{3!} f^{(6)}(x) = a^6 K^3 \frac{t^3}{3!} e^{ax}$
4	$u_4(x, t) = L_t^{-1} K L_{xx} u_3(x, t) = K^4 \frac{t^4}{4!} f^{(8)}(x) = a^8 K^4 \frac{t^4}{4!} e^{ax}$
\vdots	\vdots

20	$u_{20}(x, t) = L_t^{-1} K L_{xx} u_{19}(x, t) = K^{20} \frac{t^{20}}{20!} f^{(40)}(x) = a^{40} K^{20} \frac{t^{20}}{20!} e^{ax}$
----	---

Successivamente si considererà un valore di K costante pari ad 1 avendo compreso il suo contributo come fattore di scala nella soluzione e $a = 1$ per semplicità di trattazione.

$$u(x, t) = \lim_{M \rightarrow \infty} U_M(x, t) = \lim_{M \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^M u_n(x, t) = \lim_{M \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^M a^n K^n \frac{t^n}{n!} e^{ax} \quad (6.29)$$

Di seguito si considera una tabella di confronto fra i valori ottenuti dalla soluzione analitica e la soluzione ADM per un valore di termini della serie infinita $M = 30$.

$M = 30$				
x	t	u_{exact}	$u_{numerica}$	$ u_{exact} - u_{numerico} $
0	0.0	1.000000000E+00	1.000000000E+00	0.000000000E+00
	0.2	1.051271096E+00	1.051271096E+00	2.220446049E-16
	0.4	1.105170918E+00	1.105170918E+00	4.440892099E-16
	0.6	1.161834243E+00	1.161834243E+00	2.220446049E-16
	0.8	1.221402758E+00	1.221402758E+00	2.220446049E-16
	1.0	1.284025417E+00	1.284025417E+00	4.440892099E-16
0.5	0.0	2.193280051E+00	2.193280051E+00	0.000000000E+00
	0.2	2.305731924E+00	2.305731924E+00	4.440892099E-16
	0.4	2.423949327E+00	2.423949327E+00	4.440892099E-16
	0.6	2.548227867E+00	2.548227867E+00	4.440892099E-16
	0.8	2.678878303E+00	2.678878303E+00	0.000000000E+00
	1.0	2.816227331E+00	2.816227331E+00	8.881784197E-16
1.0	0.0	4.810477381E+00	4.810477381E+00	0.000000000E+00
	0.2	5.057115830E+00	5.057115830E+00	0.000000000E+00
	0.4	5.316399704E+00	5.316399704E+00	8.881784197E-16
	0.6	5.588977345E+00	5.588977345E+00	0.000000000E+00
	0.8	5.875530341E+00	5.875530341E+00	8.881784197E-16
	1.0	6.176775224E+00	6.176775224E+00	0.000000000E+00

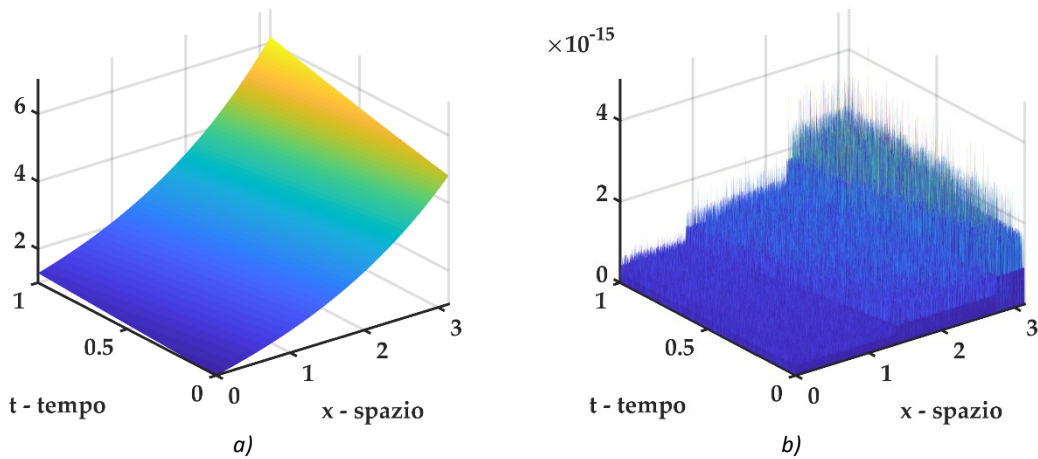


Figura 6-7 soluzione dell'equazione standard di diffusione (DE) con condizioni iniziali $u(x, 0) = e^{ax}$ con $a = 0.50$ e coefficiente di diffusione costante $\rightarrow K = cost$ con $M = 30$. a) plot 3D, b) errore fra la soluzione analitica e numerica ADM con $M = 30$

Come si può notare dai plot sopra riportati, la decomposizione Adomia fornisce risultati sempre più accurati man mano che vengono considerati più componenti

nella serie infinita utilizzata per l'approssimazione della soluzione, come al paragrafo precedente.

Il fatto che ADM conduca alla soluzione esatta è dimostrabile anche con il ragionamento seguente. Consideriamo l' n -esimo termine della decomposizione Adomia

$$u(x, t) = e^{ax} + a^2 K t e^{ax} + a^4 K^2 \frac{t^2}{2!} e^{ax} + a^6 K^3 \frac{t^3}{3!} e^{ax} + \dots \quad (6.30)$$

raccogliendo a fattor comune si ottiene

$$\begin{aligned} u(x, t) &= e^{ax} \left(1 + a^2 K t + a^4 K^2 \frac{t^2}{2!} + a^6 K^3 \frac{t^3}{3!} + \dots \right) \\ &= e^{ax} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a^2 K t)^n}{n!} \end{aligned} \quad (6.31)$$

si riconosce lo sviluppo di Taylor della funzione esponenziale, e dunque si ottiene

$$u(x, t) = e^{ax} e^{a^2 K t} = e^{a(Kt+ax)} \quad (6.32)$$

coincidente perfettamente con la soluzione analitica inizialmente considerata.

Capitolo 7

ADM per Diffusione Anomala

S-FRDE ed i voli di Lèvy

7.1 Introduzione

Recentemente il Metodo di Decomposizione Adomia ha trovato applicazione nel campo delle equazioni differenziali frazionarie in spazio-tempo come già esposto nel paragrafo 5.5. Numerosi sono gli studiosi che hanno proposto soluzioni in forma di serie delle più note equazioni rese frazionarie tra i quali si ricorda [40,41].

In questo capitolo si vuole studiare l'andamento della soluzione dell'equazione della diffusione monodimensionale frazionaria in spazio (S-FRDE) con diverse condizioni iniziali attraverso ADM per poi dedurre conclusioni sul ruolo che il frazionario occupa nell'ambito della meccanica del mezzo poroso tramite comparazione con la soluzione esatta ottenuta dal laplaciano standard.

Le condizioni iniziali considerate sono le medesime di quelle considerate per la standard DE, ovvero $u(x, 0) = x^3, \sin(x), \cos(x), e^{ax}$ ed un coefficiente di diffusione costante $K = cost$ in primo luogo. La dipendenza funzionale del coefficiente di diffusione legato ad eterogeneità, effetti di memoria del mezzo poroso o processi a grandi deformazioni verranno trattati dettagliatamente dal paragrafo 7.3 e successivi del presente capitolo.

7.2 ADM – S-FRDE

Nel caso di FRDE è possibile dedurre una formulazione di carattere generale data una qualsiasi condizione iniziale del tipo $u(x, 0) = f(x)$ derivabile in senso frazionario nel proprio dominio di definizione. È possibile estendere la formulazione nel qual caso siano considerate condizioni iniziali od al contorno dotate di singolarità, ma non in questa sede. Si noti che le condizioni iniziali scelte per le analisi sono tutte infinitamente derivabili nel proprio campo di esistenza $[a, b]$ essendo funzioni di classe $C^\infty[a, b]$.

Si consideri in primo luogo il seguente problema differenziale frazionario con condizioni iniziali

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = K \frac{\partial^F u}{\partial x^F} & (x, t) \in [a, b] \times (0, T) \\ u(x, 0) = f(x) & 1 < F \leq 2 \end{cases} \quad (7.1)$$

che può essere scritta anche nel seguente modo

$$L_t u(x, t) = K D^F u(x, t) \quad (7.2)$$

con gli operatori differenziali definiti come

$$L_t = \frac{\partial}{\partial t} \quad D^F = \frac{\partial^F}{\partial x^F}$$

e gli operatori integrali

$$L_t^{-1}(\cdot) = \int_0^t (\cdot) dt \quad D^{-F} = J^F$$

Con J^F una specifica forma di integrale frazionario da specificare volta per volta. Nella presente trattazione verrà utilizzato l'integrale frazionario di Riemann-Liouville essendo legato alla derivata frazionaria di Caputo, utilizzata per gli operatori di derivazione frazionaria.

Applicando ambo i membri L_t^{-1} , avendo a disposizione condizioni iniziali, si ottiene

$$L_t^{-1}L_t u(x, t) = L_t^{-1}KD^F u(x, t) \quad (7.3)$$

$$u(x, t) = u(x, 0) + L_t^{-1}KD^F u(x, t) \quad (7.4)$$

Ricordando l'ipotesi base del Metodo di Decomposizione Adomia

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x, t)$$

si ottiene

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x, t) = u(x, 0) + L_t^{-1}KD^F \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x, t) \quad (7.5)$$

da cui si deduce l'algoritmo ricorsivo

$$\begin{cases} u_0(x, t) = u(x, 0) \\ u_{n+1}(x, t) = L_t^{-1}KD^F u_n(x, t) \end{cases} \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (7.6)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} u_0(x, t) = u(x, 0) = f(x) \\ u_1(x, t) = L_t^{-1}KD^F u_0(x, 0) = L_t^{-1}KD^F f(x) = KtD^F f(x) \\ u_2(x, t) = L_t^{-1}KD^F u_1(x, t) = L_t^{-1}KD^F [KtD^F f(x)] = K^2 \frac{t^2}{2} D^{2F} f(x) \\ u_3(x, t) = L_t^{-1}KD^F u_2(x, t) = L_t^{-1}KD^F \left[K^2 \frac{t^2}{2} D^{2F} f(x) \right] = K^3 \frac{t^3}{6} D^{3F} f(x) \\ \vdots \\ u_n(x, t) = L_t^{-1}KD^F u_{n-1}(x, t) = K^n \frac{t^n}{n!} D^{nF} f(x) \end{array} \right. \quad (7.7)$$

Considerando un numero maggiore di termini della serie infinita, se convergente, si ottiene un grado di approssimazione maggiore essendo valide le seguenti asserzioni

$$U_M(x, t) = \sum_{n=0}^M u_n(x, t) = \sum_{n=0}^M K^n \frac{t^n}{n!} \cdot D^{nF} f(x) \quad (7.8)$$

$$u(x, t) = \lim_{M \rightarrow \infty} U_M(x, t) = \lim_{M \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^M u_n(x, t) = \lim_{M \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^M K^n \frac{t^n}{n!} \cdot D^{nF} f(x) \quad (7.9)$$

La serie di cui sopra potrebbe non essere convergente semplicemente in tutto il dominio di interesse ma solo in una certa regione. Per poter riuscire ad indentificare tale regione si può operare in diversi metodi: come prima scelta si può eseguire una analisi di convergenza del metodo ADM verificando, tramite gli strumenti dell'analisi funzionale, la convergenza della serie infinita ottenuta dalla decomposizione dell'equazione differenziale di partenza. Tale operazione, nel caso vengano coinvolti operatori differenziali frazionari non risulta agevole. In secondo luogo, si potrebbe considerare un metodo numerico in modo da ottenere una soluzione approssimata utilizzando, citandone alcuni, il Metodo delle Differenze Finite (FDM) o Metodo degli Elementi Finiti (FEM). Anche quest'ultima opzione trova difficoltà di applicazione nell'ambito di equazioni frazionarie, in quanto la proprietà di non località degli operatori differenziali frazionari rendono il problema numerico molto oneroso e talvolta impossibile da risolvere; oltre al fatto che una teoria unificata FEM per il calcolo frazionario non è ancora definita avendo difficoltà nella definizione della matrice \mathbf{B} , matrice delle derivate delle funzioni di forma. La strategia adottata nel presenta lavoro di tesi

7.3 Coefficiente di diffusione costante - $K = cost$

7.3.1 S-FRADE con condizioni iniziali $u(x, 0) = x^\alpha$

Si considera ora il seguente problema differenziale in cui è stato sostituito l'ordine di derivazione intero del laplaciano $1D$ al secondo membro con un frazionario F in modo da studiarne l'effetto.

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = K \frac{\partial^F u}{\partial x^F} \\ u(x, 0) = x^\alpha \end{cases} \quad 1 < F \leq 2 \quad (7.10)$$

come dettagliatamente enunciato nei capitoli introduttivi riguardanti il calcolo frazionario, è necessario specificare sempre con quale tipologia di derivata od integrale frazionario si sta lavorando non essendo tali definizioni univoche. In questo caso verrà utilizzata la derivata di Caputo con punto base $a = 0$:

$${}_0^c D_t^\alpha [f(t)] = \frac{1}{\Gamma(m - \alpha)} \int_0^t \frac{f^{(n)}(\tau)}{(t - \tau)^{\alpha+1-n}} d\tau$$

con $n - 1 < \alpha < n$, $n \in \mathbb{N}$.

Nel caso in esame si ha $1 < F \leq 2$ ottenendo la seguente espressione per l'operatore laplaciano $1D$ tramite derivata frazionaria di Caputo:

$${}_0^c D_t^F [f(t)] = \frac{1}{\Gamma(2 - F)} \int_0^t \frac{f^{(2)}(\tau)}{(t - \tau)^{F-1}} d\tau = \frac{1}{\Gamma(2 - F)} \int_0^t \frac{\partial^2 f(\tau)}{\partial \tau^2} \cdot (t - \tau)^{1-F} d\tau$$

da cui, come riportato in (2.88)

$${}_0^c D_t^F (t^\alpha) = \begin{cases} \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\Gamma(\alpha - F + 1)} t^{\alpha-F} & n - 1 < F < n, \alpha > n - 1 \\ 0 & \alpha \in \mathbb{R}, n - 1 < F < n, \alpha \leq n - 1 \end{cases}$$

È bene ribadire che tali risultati sono validi esclusivamente per valore del punto base $a = 0$.

si ottengono le seguenti componenti

n	u_n
0	$u_0(x, t) = x^\alpha = f(x)$
1	$u_1(x, t) = L_t^{-1} K D^F u_0(x, t) = K^1 \frac{t^1}{1!} D^F f(x) = K t \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\Gamma(\alpha + 1 - F)} x^{\alpha-F}$
2	$u_2(x, t) = L_t^{-1} K D^F u_1(x, t) = K^2 \frac{t^2}{2!} D^{2F} f(x) = K^2 \frac{t^2}{2!} \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\Gamma(\alpha + 1 - 2F)} x^{\alpha-2F}$

3	$u_3(x, t) = L_t^{-1} K D^F u_2(x, t) = K^3 \frac{t^3}{3!} \cdot D^{3F} f(x)$ $= K^3 \frac{t^3}{3!} \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\Gamma(\alpha + 1 - 3F)} x^{\alpha - 3F}$
4	$u_4(x, t) = L_t^{-1} K D^F u_3(x, t) = K^4 \frac{t^4}{4!} D^{4F} f(x)$ $= K^4 \frac{t^4}{4!} \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\Gamma(\alpha + 1 - 4F)} x^{\alpha - 4F}$
⋮	⋮
n	$u_n(x, t) = L_t^{-1} K D^F u_{n-1}(x, t) = K^n \frac{t^n}{n!} D^{nF} f(x)$ $= K^n \frac{t^n}{n!} \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\Gamma(\alpha + 1 - nF)} x^{\alpha - nF}$

In vista dell'applicazione del metodo di decomposizione Adomia, il fatto che l'esponente $\alpha - nF$ rimanga maggiore di 0 è di notevole importanza in quanto si andrebbero ad aggiungere dei termini con asintoto verticale per coordinate spaziali prossime allo zero.

7.3.1.1 S-FRADE condizioni iniziali $u(x, 0) = x^3$

Considerando il caso particolare in cui $u(x, 0) = x^3$ si ottengono le seguenti espressioni per l'approssimazione della soluzione riferita alla definizione (2.88)

F	ADM
1.2	$u_{ADM} = x^3 + Kt \frac{\Gamma(4)}{\Gamma(2.8)} x^{1.8} + K^2 \frac{t^2}{2!} \frac{\Gamma(4)}{\Gamma(1.6)} x^{0.6}$
1.4	$u_{ADM} = x^3 + Kt \frac{\Gamma(4)}{\Gamma(2.6)} x^{1.6} + K^2 \frac{t^2}{2!} \frac{\Gamma(4)}{\Gamma(1.2)} x^{0.2}$
1.6	$u_{ADM} = x^3 + Kt \frac{\Gamma(4)}{\Gamma(2.4)} x^{1.4}$
1.8	$u_{ADM} = x^3 + Kt \frac{\Gamma(4)}{\Gamma(2.2)} x^{1.2}$
2.0	$u_{ADM} = x^3 + Kt \frac{\Gamma(4)}{\Gamma(2.0)} x^{1.0}$

Si noti come la decomposizione Adomia utilizzando la formulazione della derivata frazionaria della funzione potenza con esponente frazionario $F = 2.0$ conduca alla soluzione analitica precedentemente studiata (6.12).

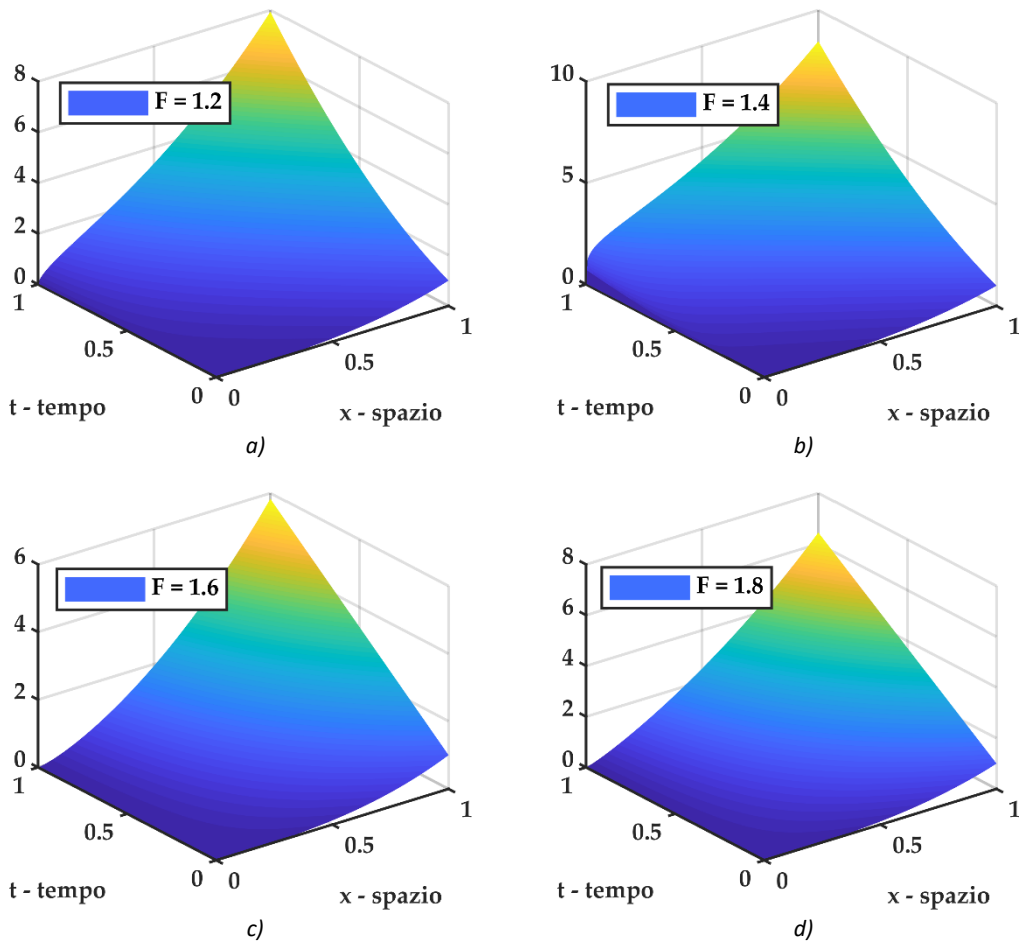


Figura 7-1 plot 3D della soluzione $u(x, t)$ del problema differenziale frazionario S-FRDE con $u(x, 0) = x^\delta$ con $\delta = 3$ e coefficiente di diffusione costante $\rightarrow K = \text{cost}$ per diversi valori dell'ordine di derivazione frazionario per operatore laplaciano. a) soluzione S-FRDE per $F = 1.2$, b) soluzione S-FRDE per $F = 1.4$, c) soluzione S-FRDE per $F = 1.6$, d) soluzione S-FRDE per $F = 1.8$

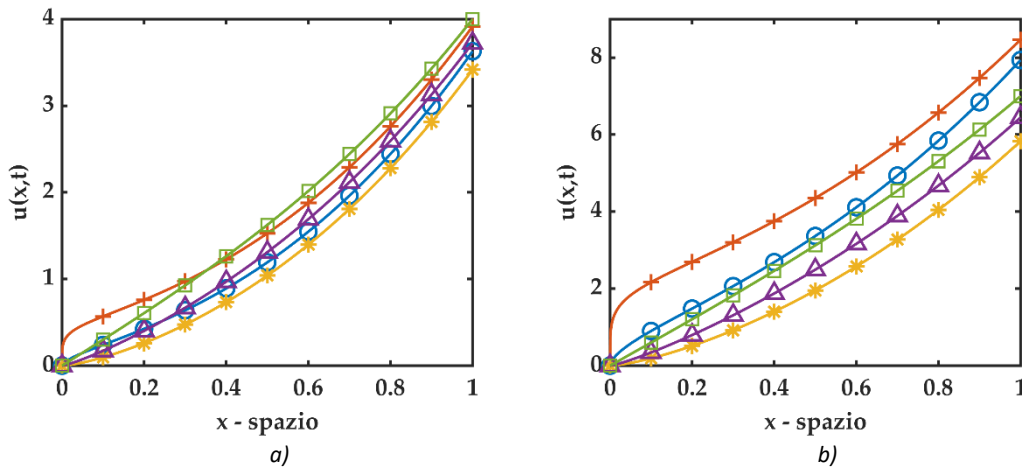


Figura 7-2 plot 2D di confronto fra soluzioni del problema differenziale frazionario S-FRDE con $u(x, 0) = x^\delta$ con $\delta = 3$ e coefficiente di diffusione costante $\rightarrow K = \text{cost}$. (\odot cerchio - blu) rappresenta la soluzione per $F = 1.2$, ($+$ croce - rosso) rappresenta la soluzione per $F = 1.4$, ($*$ asterisco - giallo) rappresenta la soluzione per $F = 1.6$, (Δ triangolo - viola) rappresenta la soluzione per $F = 1.8$, (\square quadrato - verde) rappresenta la soluzione della standard DE. a) plot 2D per $t = 0.5$, b) plot 2D per $t = 1.0$

7.3.1.2 Considerazioni numeriche

Si vuole studiare l'affidabilità delle tecniche numeriche di approssimazione della derivata frazionaria, con ordine F fissato, in vista di una possibile definizione di un algoritmo numerico ricorsivo per il Metodo di Decomposizione Adomia. L'integrazione temporale verrà effettuata attraverso la tecnica dei trapezi, mentre la derivazione frazionaria attraverso lo schema L2.

7.3.1.2.1 Metodo L2 e L2C

La definizione della derivata frazionaria di Caputo in equazione (2.82) indica che tale operatore può essere considerato come un integrale di Riemann-Liouville di una derivata di ordine intero suggerendo l'idea di poter utilizzare le stesse idee di approssimazione dedotte per problematiche di integrazione numerica. Si riporta di seguito la trattazione per l'algoritmo L2 ed L2C, entrambi efficienti algoritmi utilizzati per la valutazione numerica della derivata di Caputo quando l'ordine di derivazione è $1 < \alpha < 2$. Si noti come per valore di $\alpha = 2$ l'algoritmo perda efficacia [50]

Come riportato in [], quando $1 < \alpha < 2$ e punto base $a = 0$ la derivata di Caputo può essere definita come segue

$$\begin{aligned} {}_0^C D_x^\alpha f(x) &= \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \int_0^x \frac{f^{(2)}(t) dt}{(x-t)^{\alpha-1}} \rightarrow [{}_0^C D_x^\alpha f(x)]_{x=x_j} \\ &= \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{k=0}^{j-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} (x_j-t)^{1-\alpha} f''(t) dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{k=0}^{j-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} t^{1-\alpha} f''(x_j-t) dt \end{aligned} \quad (7.11)$$

dove si è definita una griglia uniforme del tipo $\{x_k\}_{k=0}^N$ con $x_k = a + kh$, $h = \frac{b-a}{N}$, ed approssimando la derivata del secondo ordine $f''(x_j-t)$ con due differenti schemi a differenze finite si ottengono i due metodi sopraccitati L2 ed L2C.

Per ottenere il metodo L2 si utilizza lo schema a differenze centrali del tipo

$$f''(x_j-t) \cong \frac{f(x_j-x_{k+1}) - 2f(x_j-x_k) + f(x_j-x_{k-1}))}{h^2}$$

su ogni intervallo $[x_k, x_{k+1}]$. Si ottiene quindi

$$\begin{aligned} [{}_0^C D_x^\alpha f(x)]_{x=x_j} &= \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{k=0}^{j-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} t^{1-\alpha} f''(x_j-t) dt \\ &\cong \sum_{k=0}^{j-1} \frac{f(x_j-x_{k+1}) - 2f(x_j-x_k) + f(x_j-x_{k-1}))}{h^2 \Gamma(2-\alpha)} \int_{x_k}^{x_{k+1}} t^{1-\alpha} dt \end{aligned} \quad (7.12)$$

da cui

$$[{}_0^c D_x^\alpha f(x)]_{x=x_j} = \sum_{k=-1}^j W_{j,k} f(x_{j-k}) \quad (7.13)$$

dove

$$W_{j,k} = \frac{h^{-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)} \begin{cases} 1 & k = -1 \\ 2^{2-\alpha} - 3 & k = 0 \\ (k+2)^{2-\alpha} - 3(k+1)^{2-\alpha} + 3k^{2-\alpha} - (k-1)^{2-\alpha} & 1 \leq k \leq j-2 \\ -2j^{2-\alpha} + 3(j-1)^{2-\alpha} - (j-2)^{2-\alpha} & k = j-1 \\ j^{2-\alpha} - (j-1)^{2-\alpha} & k = j \end{cases} \quad (7.14)$$

Il metodo L2 risulta non molto accurato al tendere di $\alpha \rightarrow 1$, di conseguente un nuovo modo di sviluppare l'integrale $\int_{x_k}^{x_{k+1}} t^{1-\alpha} f''(x_j - t) dt$ in modo più simmetrico, è stato suggerito. Per $t \in [x_{k-1}, x_k]$ ed utilizzando l'approssimazione

$$f''(x_j - t) \cong \frac{f(x_j - x_{k+2}) - f(x_j - x_{k+1}) - f(x_j - x_k) + f(x_j - x_{k-1})}{2h^2}$$

si ottiene lo schema L2C nella forma

$$[{}_0^c D_x^\alpha f(x)]_{x=x_j} = \sum_{k=-1}^{j+1} \hat{W}_{j,k} f(x_{j-k}) \quad (7.15)$$

con

$$W_{j,k} = \frac{h^{-\alpha}}{2\Gamma(3-\alpha)} \begin{cases} 1 & k = -1 \\ 2^{2-\alpha} - 2 & k = 0 \\ 3^{2-\alpha} - 2 \cdot 2^{2-\alpha} & k = 1 \\ (k+2)^{2-\alpha} - 2(k+1)^{2-\alpha} & 1 \leq k \leq j-2 \\ +2(k-1)^{2-\alpha} - (k-2)^{2-\alpha} & \\ -j^{2-\alpha} - (j-3)^{2-\alpha} + 2(j-2)^{2-\alpha} & k = j-1 \\ -j^{2-\alpha} + 2(j-1)^{2-\alpha} - (j-2)^{2-\alpha} & k = j \\ j^{2-\alpha} - (j-1)^{2-\alpha} & k = j+1 \end{cases} \quad (7.16)$$

È interessante comparare i metodi L2 ed L2C quando α tende ad i valori interi. Quando $\alpha = 1$, i metodi L2 ed L2C si riducono al metodo alle differenze all'indietro e metodo alle differenze centrali per la derivata di ordine 1 rispettivamente. Se $\alpha = 2$, il metodo L2 si riduce al metodo alle differenze centrali per la derivata di ordine 2 ed il metodo L2C si riduce alla seguente

$$\frac{d^2 f(x_k)}{dx^2} \cong \frac{f(x_{k+1}) - f(x_k) - f(x_{k-1}) + f(x_{k-2}))}{2h^2}$$

con accuratezza del primo ordine. Analisi numeriche indicano che il metodo L2 è più accurato di L2C per valori di $1 < \alpha < 1.5$, mentre un risultato opposto per $1.5 < \alpha < 2$. Il comportamento risulta analogo quando $\alpha = 1.5$ [51].

7.3.1.2.2 Integrazione Cumulativa

Si voglia definire numericamente l'espressione

$$CI(x) = \int_a^x f(x)dx = F(x) - F(a) \quad (7.17)$$

dove $CI(x)$ è denominato integrale cumulativo. Ad un nodo arbitrario x_j , si può approssimare $CI(x_j) = CI_j$ usando la formula dei trapezi ottenendo

$$CI_j = \int_a^{x_j} f(x)dx \cong \sum_{i=1}^{j-1} \left[\frac{(y_{i+1} + y_i)(x_{i+1} - x_i)}{2} \right] \quad (7.18)$$

Similmente si può calcolare $CI(x_{j+1}) = CI_{j+1}$

$$CI_{j+1} = \int_a^{x_{j+1}} f(x)dx \cong \sum_{i=1}^j \left[\frac{(y_{i+1} + y_i)(x_{i+1} - x_i)}{2} \right] \quad (7.19)$$

dalla quale, riscrivendo la sommatoria si ottiene

$$\begin{aligned} CI_{j+1} &= \int_a^{x_j} f(x)dx \\ &\cong \sum_{i=1}^{j-1} \left[\frac{(y_{i+1} + y_i)(x_{i+1} - x_i)}{2} \right] + \frac{(y_{i+1} + y_j)(x_{i+1} - x_j)}{2} \end{aligned} \quad (7.20)$$

e sostituendo la (7.18) nella (7.20) si perviene alla seguente formulazione

$$CI_{j+1} \cong CI_j + \frac{(y_{i+1} + y_j)(x_{i+1} - x_j)}{2} \quad (7.21)$$

dalla quale si può derivare semplicemente l'algoritmo per l'integrazione cumulativa.

7.3.1.2.3 ADM numerico

L'espressione da approssimare è

$$\begin{cases} u_0(x, t) = f(x) = x^\alpha \\ u_{ADM}(x, t) = f(x) + \sum_{i=0}^{\infty} L_t^{-1} K D^F u_i(x, t) \end{cases} \quad (7.22)$$

Il numero di termini da considerare, come già evidenziato precedentemente, dipende dall'ordine di derivazione frazionario F e dall'esponente della funzione potenza da derivare.

Si considera ora $f(x) = x^8$

$$f(x) = x^8 \rightarrow u_{ADM}(x, t) = \quad (7.23)$$

$$\begin{aligned}
 &= u_0(x, t) + u_1(x, t) + u_2(x, t) + u_3(x, t) + u_4(x, t) + u_5(x, t) = \\
 &= f(x) + L_t^{-1}KD^F u_0(x, t) + L_t^{-1}KD^F u_1(x, t) + L_t^{-1}KD^F u_2(x, t) \\
 &\quad + L_t^{-1}KD^F u_3(x, t) + L_t^{-1}KD^F u_4(x, t)
 \end{aligned}$$

La soluzione ADM ottenuta tramite formule di derivazione analitiche analitica, fissato $F = 1.4$, è la seguente

$$\begin{aligned}
 u_{ADM}(x, t) = &x^8 + Kt \frac{\Gamma(9)}{\Gamma(7.6)} x^{6.6} + K^2 \frac{t^2 \Gamma(9)}{2! \Gamma(6.2)} x^{5.2} + K^3 \frac{t^3 \Gamma(9)}{3! \Gamma(4.8)} x^{3.8} \\
 &+ K^4 \frac{t^4 \Gamma(9)}{4! \Gamma(3.4)} x^{2.4} + K^5 \frac{t^5 \Gamma(9)}{5! \Gamma(2)} x^{1.0}
 \end{aligned} \tag{7.24}$$

Di seguito si riportano i plot relativi alla derivazione della componente spaziale tramite lo schema numerico L2 per l'approssimazione della derivata di Caputo, e l'integrazione della componente temporale tramite lo schema dei trapezi, definiti ai paragrafi precedenti, con i relativi errori rispetto alle soluzioni analitiche note.

$$u_1(x, t) = L_t^{-1}KD^F u_0(x, t)$$

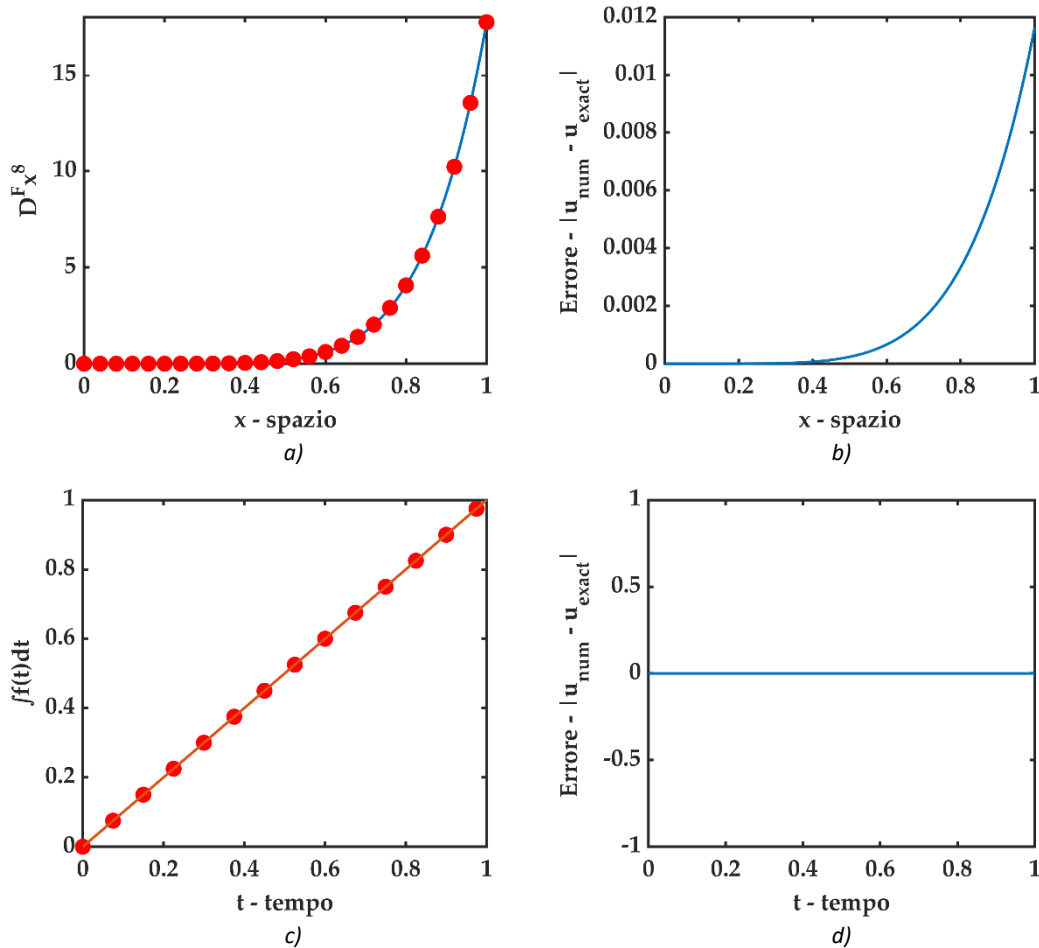


Figura 7-3 Prima derivazione frazionaria ed integrazione tramite schemi numerici L2 e trapezi rispettivamente. a) derivata $D^F f(t)$ analitica e numerica, b) errore fra derivata analitica e numerica, c) integrazione $\int_0^t f(t) dt$ analitico e numerico, d) errore fra integrale analitico e numerico

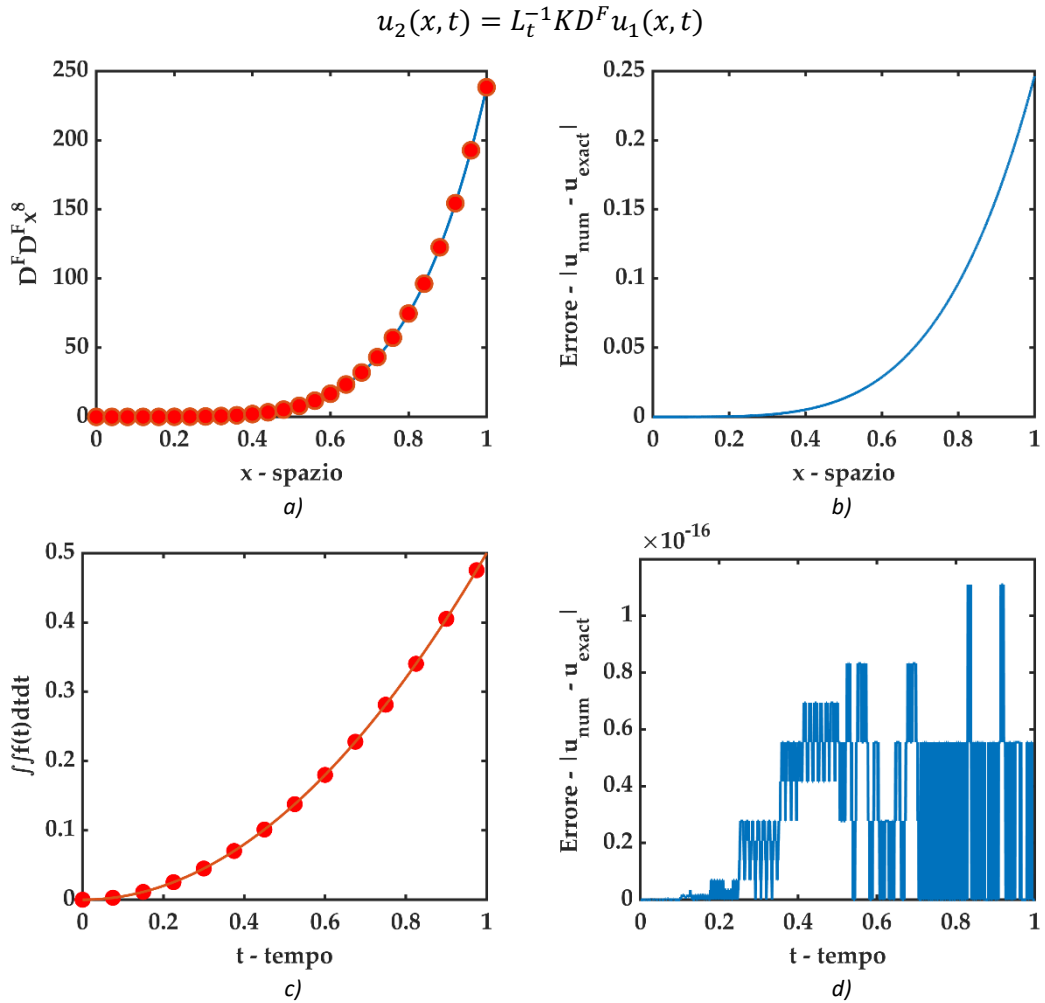
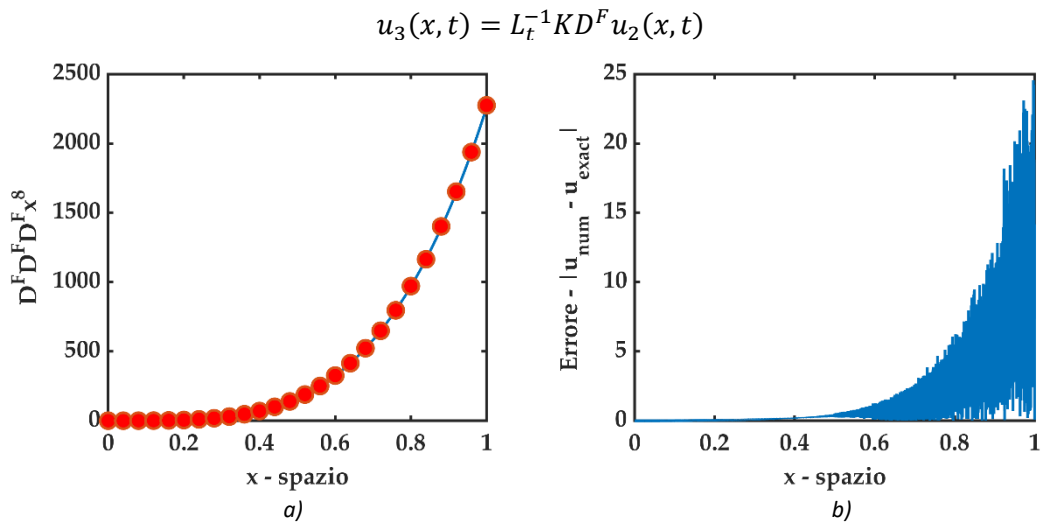


Figura 7-4 Seconda derivazione frazionaria ed integrazione tramite schemi numerici L2 e trapezi rispettivamente. a) derivata $D^F D^F f(t)$ analitica e numerica, b) errore fra derivata analitica e numerica, c) integrazione $\int_0^t \int_0^t f(t) dt dt$ analitico e numerico, d) errore fra integrale analitico e numerico



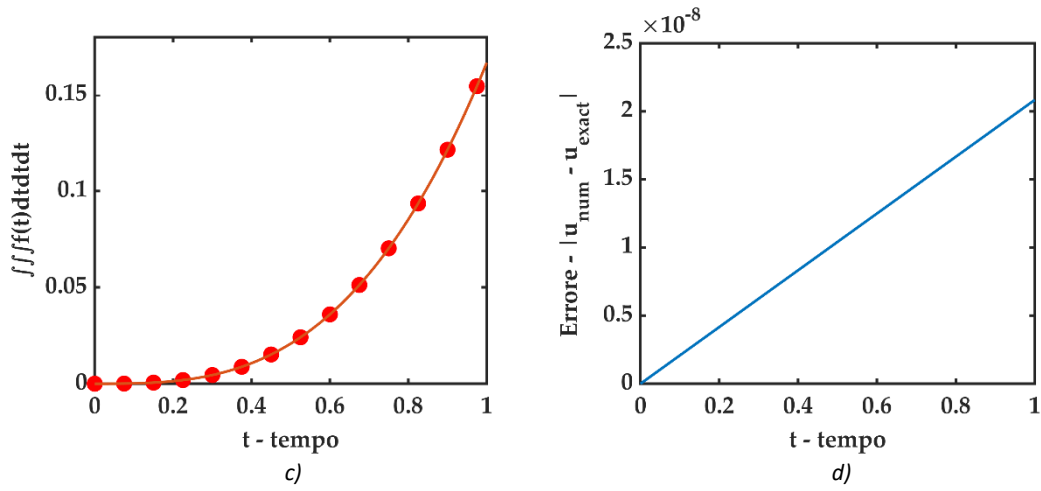


Figura 7-5 Terza derivazione frazionaria ed integrazione tramite schemi numerici L2 e trapezi rispettivamente. a) derivata $D^F D^F D^F f(t)$ analitica e numerica, b) errore fra derivata analitica e numerica, c) integrazione $\int_0^t \int_0^t \int_0^t f(t) dt dt dt$ analitico e numerico, d) errore fra integrale analitico e numerico

$$u_4(x, t) = L_t^{-1} K D^F u_3(x, t)$$

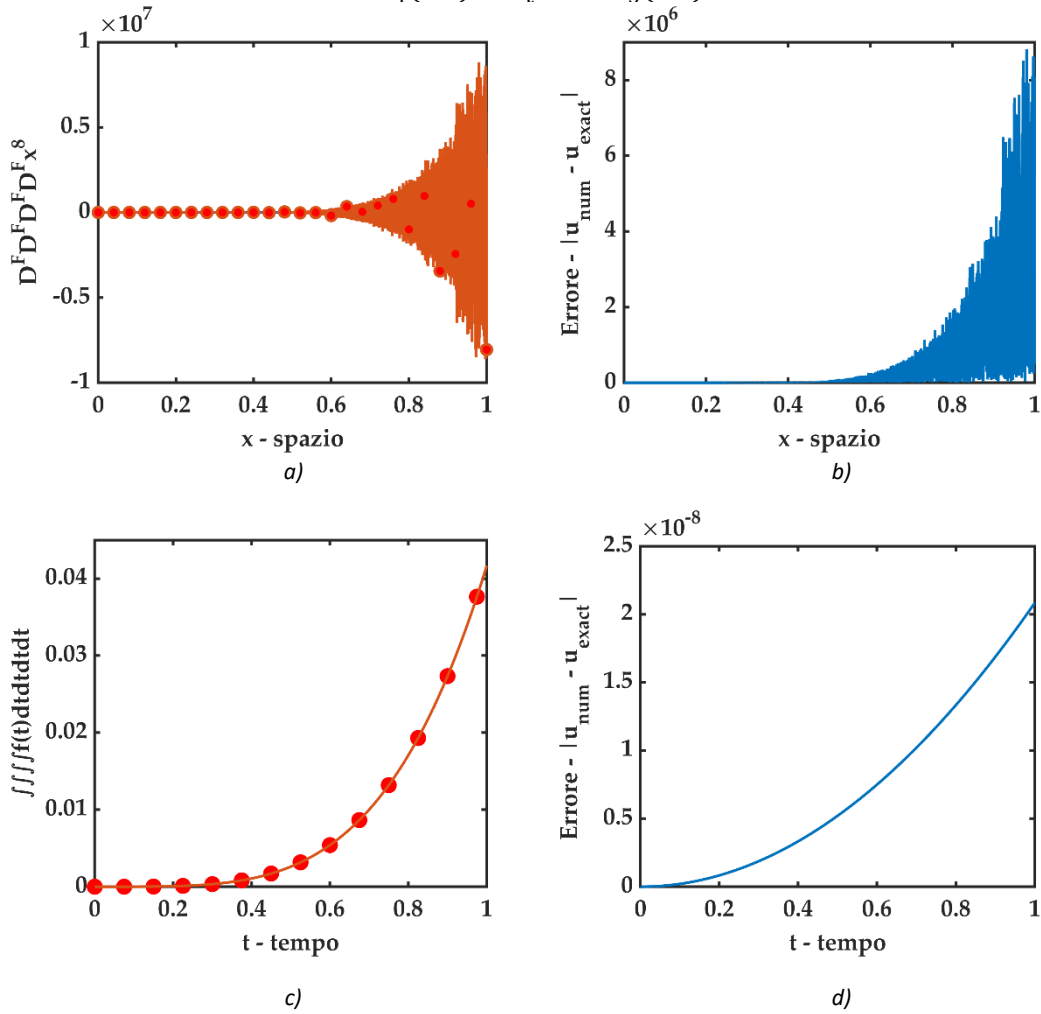


Figura 7-6 Quarta derivazione frazionaria ed integrazione tramite schemi numerici L2 e trapezi rispettivamente. a) derivata $D^F D^F D^F D^F f(t)$ analitica e numerica, b) errore fra derivata analitica e numerica, c) integrazione $\int_0^t \int_0^t \int_0^t \int_0^t f(t) dt dt dt dt$ analitico e numerico, d) errore fra integrale analitico e numerico

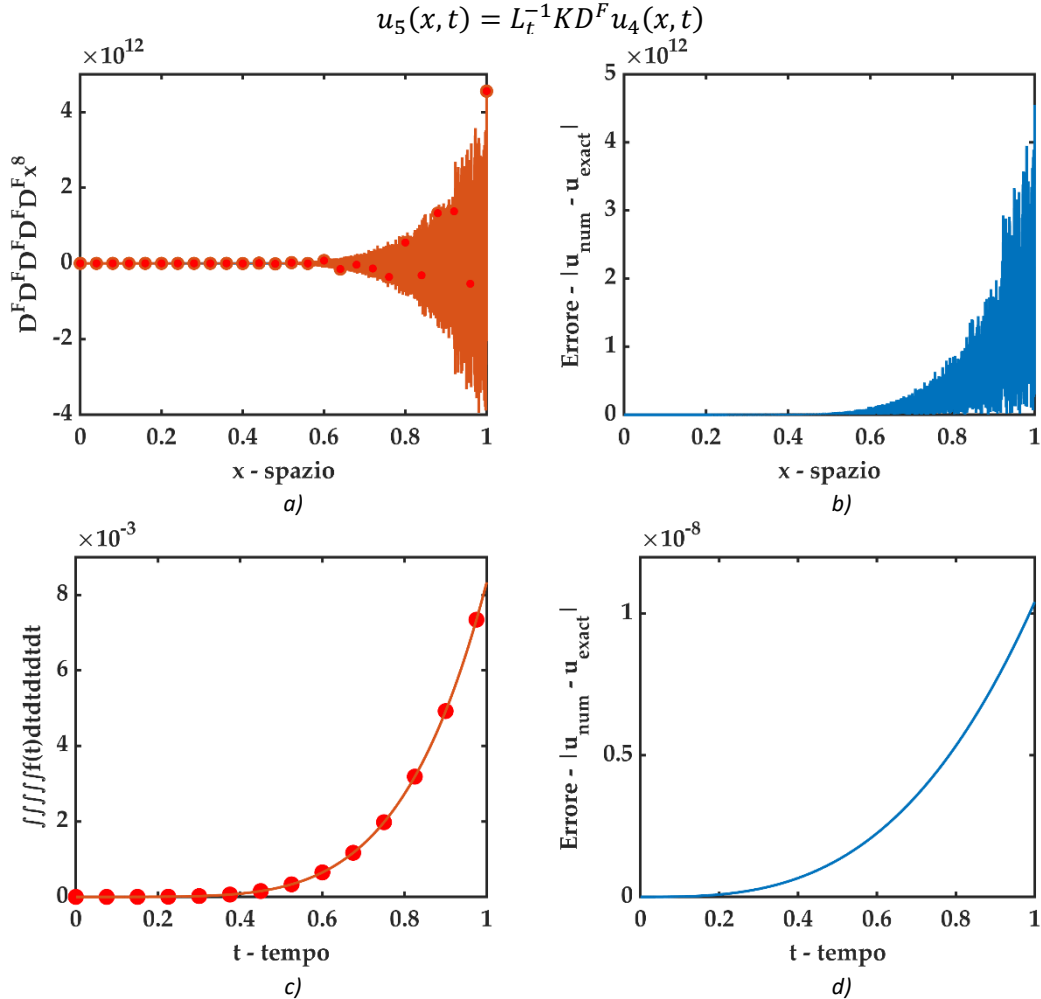


Figura 7-7 Quinta derivazione frazionaria ed integrazione tramite schemi numerici L2 e trapezi rispettivamente. a) derivata $D^F D^F D^F D^F D^F f(t)$ analitica e numerica, b) errore fra derivata analitica e numerica, c) integrazione $\int_0^t \int_0^t \int_0^t \int_0^t \int_0^t f(t) dt dt dt dt dt$ analitico e numerico, d) errore fra integrale analitico e numerico

Come si può notare dai plot, l'errore che si ritrova relativamente all'integrazione temporale è dell'ordine di 10^{-8} , segno di una buona affidabilità nell'utilizzo dell'algorithm dei trapezi in modo ricorsivo. La derivazione secondo Caputo spaziale, tuttavia, assume un andamento oscillatorio che evidenzia delle problematiche di stabilità dell'algorithm L2 utilizzato per l'approssimazione. Il motivo di tale oscillazione non è oggetto di studio in questo elaborato di tesi e sicuramente dovrà essere tema di accurate analisi di stabilità e convergenza future per comprendere meglio i parametri necessari da rispettare per una soluzione accettabile.

Alcune considerazioni di carattere generale possono comunque essere effettuate per giustificare, seppur in modo qualitativo, l'inefficacia dell'algorithm L2. Quest'ultimo, come specificato in [50], è un algorithm molto robusto per

L'approssimazione delle derivate frazionarie secondo Caputo avente esponente frazionario $1 < F \leq 2$, e la bontà dei risultati da esso ricavati si rivedono alle prime ricorsioni. Il fatto che L2 fallisca non è quindi indice dell'errato sviluppo dell'algoritmo, ma, semplicemente non è uno strumento numerico pensato per essere applicato in modo ricorsivo. Il successo, invece, dell'algoritmo nel metodo delle Differenze Finite (FDM) è dovuto al fatto che in quest'ultimo l'approssimazione della derivata frazionaria viene utilizzata una volta soltanto, mentre, in ADM si necessita di un uso ripetuto di L2 per computare le componenti della decomposizione.

Un ulteriore aspetto di fondamentale importanza è che il Metodo di Decomposizione Adomia è classificato come metodo semi-analitico e quindi non pensato per applicazioni numeriche come il metodo delle Differenze Finite (FDM) o Metodo degli Elementi Finiti (FEM).

Tenendo a mente le considerazioni sopra esposte, nel proseguo dell'elaborato di tesi, si utilizzeranno delle condizioni al contorno per i problemi differenziali analizzati tali da consentire un calcolo diretto degli operatori differenziali in ADM, e senza, quindi, aver bisogno di algoritmi ricorsivi per l'approssimazione della soluzione.

7.3.2 S-FRADE con condizioni iniziali $u(x, 0) = \sin(x)$

Si considera ora il seguente problema differenziale in cui è stato sostituito l'ordine di derivazione intero del laplaciano $1D$ al secondo membro con un frazionario F

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = K \frac{\partial^F u}{\partial x^F} & 1 < F \leq 2 \\ u(x, 0) = \sin(x) \end{cases} \quad (7.25)$$

Come dettagliatamente enunciato nei capitoli introduttivi riguardanti il calcolo frazionario, è necessario specificare sempre con quale tipologia di derivata od integrale frazionario si sta lavorando non essendo tali definizioni univoche. In questo caso verrà utilizzata la derivata di Caputo con punto base $a = -\infty$ particolarmente adatta per funzioni limitate secondo la seguente formulazione:

$${}_{-\infty}^C D_t^\alpha [f(t)] = \frac{1}{\Gamma(m - \alpha)} \int_{-\infty}^t \frac{f^{(n)}(\tau)}{(t - \tau)^{\alpha+1-n}} d\tau$$

con $n - 1 < \alpha < n, n \in \mathbb{N}$.

Nel caso in esame si ha $1 < F \leq 2$ ottenendo la seguente espressione per l'operatore laplaciano $1D$ tramite derivata frazionaria di Caputo:

$${}_{-\infty}^C D_t^F [f(t)] = \frac{1}{\Gamma(2 - F)} \int_{-\infty}^t \frac{f^{(2)}(\tau)}{(t - \tau)^{F-1}} d\tau = \frac{1}{\Gamma(2 - F)} \int_{-\infty}^t \frac{\partial^2 f(\tau)}{\partial \tau^2} \cdot (t - \tau)^{1-F} d\tau$$

da cui, come riportato alla (2.93)

$${}_{-\infty}^C D_t^F [\sin(t)] = \sin\left(t + \frac{F \cdot \pi}{2}\right)$$

È bene ribadire che tali risultati sono validi esclusivamente per valore del punto base $a = -\infty$.

si ottengono le seguenti componenti

n	u_n
0	$u_0(x, t) = \sin(x) = f(x)$
1	$u_1(x, t) = L_t^{-1} K D^F u_0(x, t) = K^1 \frac{t^1}{1!} D^F f(x) = K t \sin\left(x + \frac{F \cdot \pi}{2}\right)$
2	$u_2(x, t) = L_t^{-1} K D^F u_1(x, t) = K^2 \frac{t^2}{2!} D^{2F} f(x) = K^2 \frac{t^2}{2!} \sin\left(x + \frac{2F \cdot \pi}{2}\right)$
3	$u_3(x, t) = L_t^{-1} K D^F u_2(x, t) = K^3 \frac{t^3}{3!} D^{3F} f(x) = K^3 \frac{t^3}{3!} \sin\left(x + \frac{3F \cdot \pi}{2}\right)$
4	$u_4(x, t) = L_t^{-1} K D^F u_3(x, t) = K^4 \frac{t^4}{4!} D^{4F} f(x) = K^4 \frac{t^4}{4!} \sin\left(x + \frac{4F \cdot \pi}{2}\right)$

⋮	⋮
30	$u_{30}(x, t) = L_t^{-1} K D^F u_{29}(x, t) = K^{30} \frac{t^{30}}{30!} D^{30F} f(x)$ $= K^{30} \frac{t^{30}}{30!} \sin\left(x + \frac{30F \cdot \pi}{2}\right)$
⋮	⋮
n	$u_n(x, t) = L_t^{-1} K D^F u_{n-1}(x, t) = K^n \frac{t^n}{n!} D^{nF} f(x) = K^n \frac{t^n}{n!} \sin\left(x + \frac{nF \cdot \pi}{2}\right)$

Successivamente si considererà un valore di K costante pari ad 1 avendo compreso il suo contributo come fattore di scala nella soluzione. si considerano i primi 30 termini per l'approssimazione della soluzione

$$u(x, t) = \lim_{M \rightarrow \infty} U_M(x, t) = \lim_{M \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^M u_n(x, t) = \lim_{M \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^M K^n \frac{t^n}{n!} \sin\left(x + \frac{nF \cdot \pi}{2}\right) \quad (7.26)$$

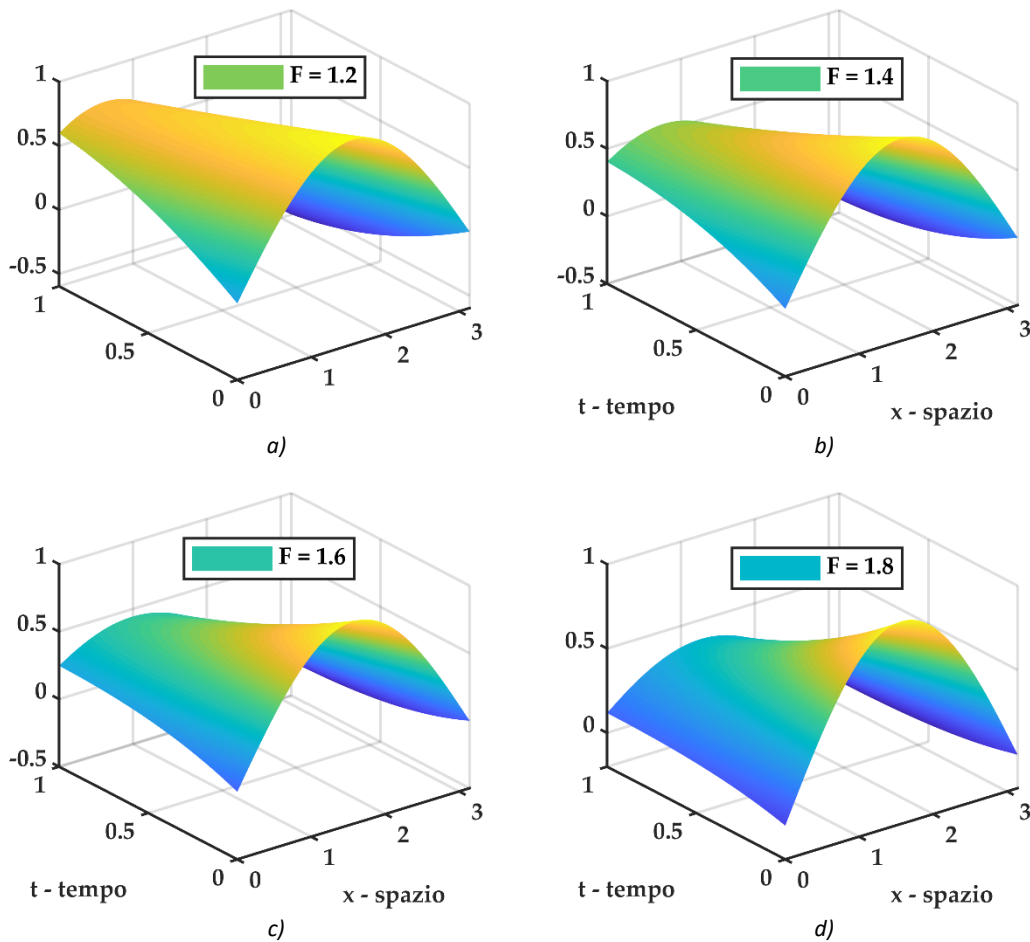


Figura 7-8 plot 3D della soluzione $u(x, t)$ del problema differenziale frazionario S-FRDE con $u(x, 0) = \sin(x)$ con $a = 0.50$ e coefficiente di diffusione costante $\rightarrow K = cost$ per diversi valori dell'ordine di derivazione frazionario per operatore laplaciano. a) soluzione S-FRDE per $F = 1.2$, b) soluzione S-FRDE per $F = 1.4$, c) soluzione S-FRDE per $F = 1.6$, d) soluzione S-FRDE per $F = 1.8$

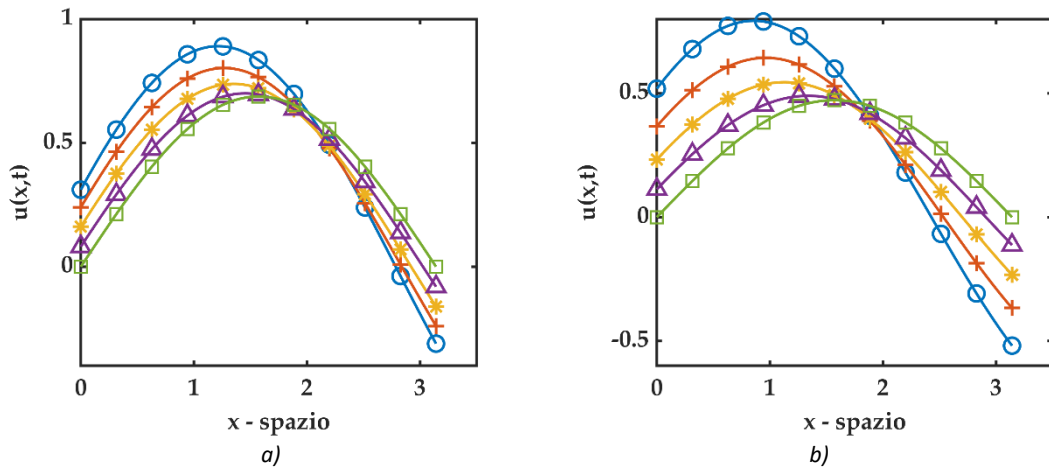


Figura 7-9 plot 2D di confronto fra soluzioni del problema differenziale frazionario S-FRDE con $u(x, 0) = \sin(x)$ e coefficiente di diffusione costante $\rightarrow K = \text{cost.}$ (○ cerchio - blu) rappresenta la soluzione per $F = 1.2$, (+ croce - rosso) rappresenta la soluzione per $F = 1.4$, (* asterisco - giallo) rappresenta la soluzione per $F = 1.6$, (△ triangolo - viola) rappresenta la soluzione per $F = 1.8$, (□ quadrato - verde) rappresenta la soluzione della standard DE. a) plot 2D per $t = 0.5$, b) plot 2D per $t = 1.0$

7.3.3 S-FRADE con condizioni iniziali $u(x, 0) = \cos(x)$

Si considera ora il seguente problema differenziale in cui è stato sostituito l'ordine di derivazione intero del laplaciano $1D$ al secondo membro con un frazionario F in modo da studiarne l'effetto.

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = K \frac{\partial^F u}{\partial x^F} \\ u(x, 0) = \cos(x) \end{cases} \quad 1 < F \leq 2 \quad (7.27)$$

Anche in questa situazione, come per la funzione sinusoidale, l'espressione della derivata di Caputo con punto base $a = -\infty$ risulta adatta essendo funzione limitata.

Nel caso in esame si ha $1 < F \leq 2$ ottenendo la seguente espressione per l'operatore laplaciano $1D$ tramite derivata frazionaria di Caputo:

$${}_{-\infty}^C D_t^F [f(t)] = \frac{1}{\Gamma(2-F)} \int_{-\infty}^t \frac{f^{(2)}(\tau)}{(t-\tau)^{F-1}} d\tau = \frac{1}{\Gamma(2-F)} \int_{-\infty}^t \frac{\partial^2 f(\tau)}{\partial \tau^2} \cdot (t-\tau)^{1-F} d\tau$$

da cui, come riportato alla (2.95)

$${}_{-\infty}^C D_t^F [\cos(t)] = \cos\left(t + \frac{F \cdot \pi}{2}\right)$$

È bene ribadire che tali risultati sono validi esclusivamente per valore del punto base $a = -\infty$.

Si ottengono le seguenti componenti

n	u_n
0	$u_0(x, t) = \cos(x) = f(x)$
1	$u_1(x, t) = L_t^{-1} K D^F u_0(x, t) = K^1 \frac{t^1}{1!} D^F f(x) = K t \cos\left(x + \frac{F \cdot \pi}{2}\right)$
2	$u_2(x, t) = L_t^{-1} K D^F u_1(x, t) = K^2 \frac{t^2}{2!} D^{2F} f(x) = K^2 \frac{t^2}{2!} \cos\left(x + \frac{2F \cdot \pi}{2}\right)$
3	$u_3(x, t) = L_t^{-1} K D^F u_2(x, t) = K^3 \frac{t^3}{3!} D^{3F} f(x) = K^3 \frac{t^3}{3!} \cos\left(x + \frac{3F \cdot \pi}{2}\right)$
4	$u_4(x, t) = L_t^{-1} K D^F u_3(x, t) = K^4 \frac{t^4}{4!} D^{4F} f(x) = K^4 \frac{t^4}{4!} \cos\left(x + \frac{4F \cdot \pi}{2}\right)$
⋮	⋮
30	$u_{30}(x, t) = L_t^{-1} K D^F u_{29}(x, t) = K^{30} \frac{t^{30}}{30!} D^{30F} f(x)$ $= K^{30} \frac{t^{30}}{30!} \cos\left(x + \frac{30F \cdot \pi}{2}\right)$
⋮	⋮
n	$u_n(x, t) = L_t^{-1} K D^F u_{n-1}(x, t) = K^n \frac{t^n}{n!} D^{nF} f(x) = K^n \frac{t^n}{n!} \cos\left(x + \frac{nF \cdot \pi}{2}\right)$

Successivamente si considererà un valore di K costante pari ad 1 avendo compreso il suo contributo come fattore di scala nella soluzione.

Si considerano i primi 30 termini per l' approssimazione della soluzione

$$u(x, t) = \lim_{M \rightarrow \infty} U_M(x, t) = \lim_{M \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^M u_n(x, t) = \lim_{M \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^M K^n \frac{t^n}{n!} \cos\left(x + \frac{nF \cdot \pi}{2}\right) \quad (7.28)$$

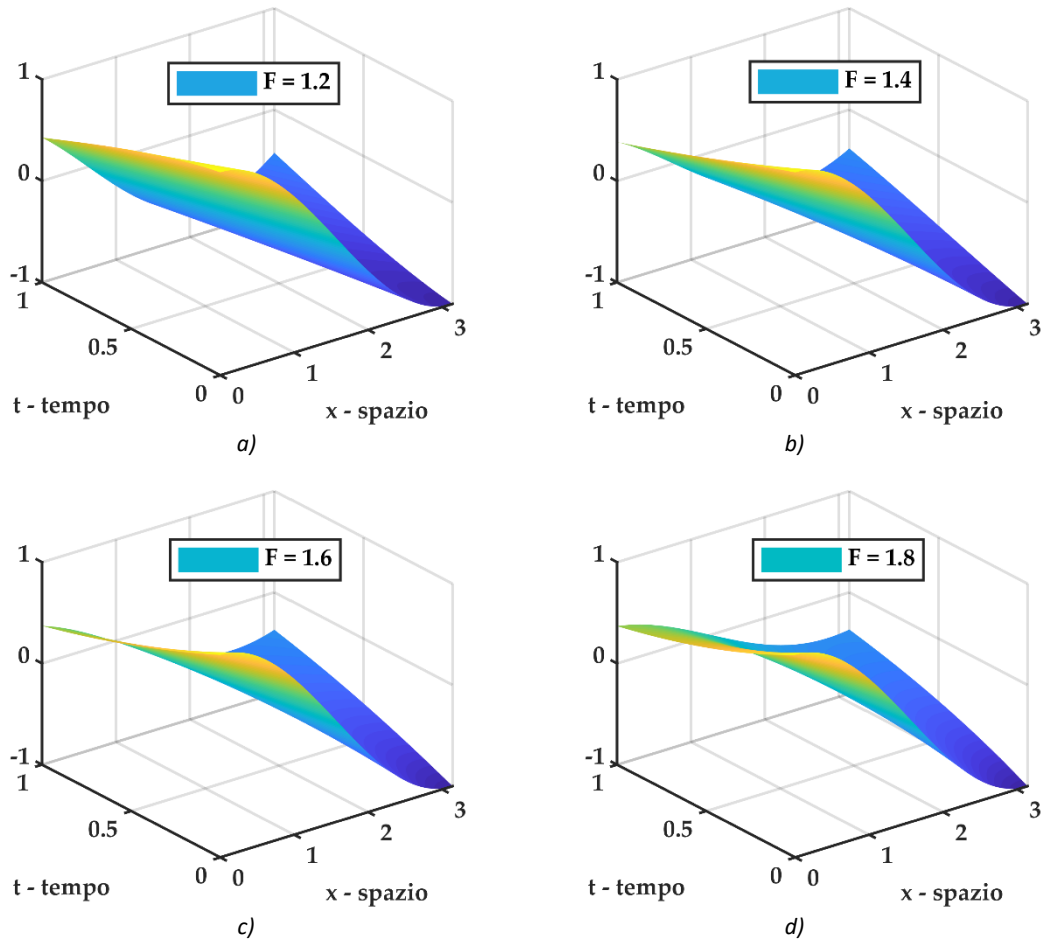


Figura 7-10 plot 3D della soluzione $u(x, t)$ del problema differenziale frazionario S-FRDE con $u(x, 0) = \cos(x)$ e coefficiente di diffusione costante $\rightarrow K = \text{cost}$ per diversi valori dell'ordine di derivazione frazionario per operatore laplaciano. a) soluzione S-FRDE per $F = 1.2$, b) soluzione S-FRDE per $F = 1.4$, c) soluzione S-FRDE per $F = 1.6$, d) soluzione S-FRDE per $F = 1.8$

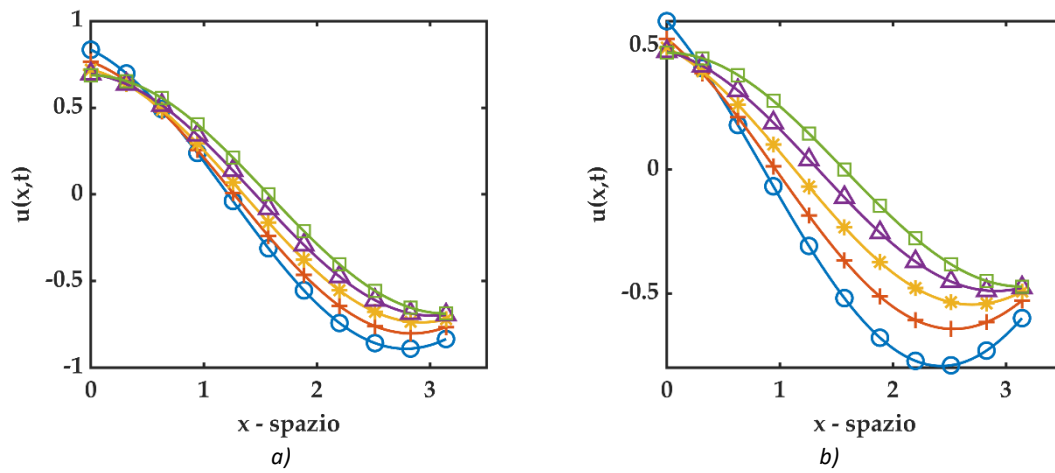


Figura 7-11 plot 2D di confronto fra soluzioni del problema differenziale frazionario S-FRDE con $u(x, 0) = \cos(x)$ e coefficiente di diffusione costante $\rightarrow K = \text{cost.}$ (○ cerchio - blu) rappresenta la soluzione per $F = 1.2$, (+ croce - rosso) rappresenta la soluzione per $F = 1.4$, (* asterisco - giallo) rappresenta la soluzione per $F = 1.6$, (△ triangolo - viola) rappresenta la soluzione per $F = 1.8$, (□ quadrato - verde) rappresenta la soluzione della standard DE. a) plot 2D per $t = 0.5$, b) plot 2D per $t = 1.0$

7.3.4 S-FRADE con condizioni iniziali $u(x, 0) = e^{ax}$ $Re(a) \geq 0$

Si considera ora il seguente problema differenziale in cui è stato sostituito l'ordine di derivazione intero del laplaciano $1D$ al secondo membro con un frazionario F in modo da studiarne l'effetto.

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = K \frac{\partial^F u}{\partial x^F} \\ u(x, 0) = e^{ax} \end{cases} \quad 1 < F \leq 2 \quad (7.29)$$

Anche in questa situazione, essendo la funzione esponenziale con $Re(a) > 0$ una funzione con asintoto orizzontale sinistro $y = 0$, l'espressione della derivata di Caputo con punto base $a = -\infty$ risulta adatta.

Nel caso in esame si ha $1 < F \leq 2$ ottenendo la seguente espressione per l'operatore laplaciano $1D$ tramite derivata frazionaria di Caputo:

$$-{}_{-\infty}^C D_t^F [f(t)] = \frac{1}{\Gamma(2-F)} \int_{-\infty}^t \frac{f^{(2)}(\tau)}{(t-\tau)^{F-1}} d\tau = \frac{1}{\Gamma(2-F)} \int_{-\infty}^t \frac{\partial^2 f(\tau)}{\partial \tau^2} \cdot (t-\tau)^{1-F} d\tau$$

Da cui, come riportato alla (2.91)

$$-{}_{-\infty}^C D_t^F [e^{ax}] = a^F e^{ax}$$

È bene ribadire che tali risultati sono validi esclusivamente per valore del punto base $a = -\infty$.

Si ottengono le seguenti componenti

n	u_n
0	$u_0(x, t) = e^{ax} = f(x)$
1	$u_1(x, t) = L_t^{-1} K D^F u_0(x, t) = K^1 \frac{t^1}{1!} \cdot D^F f(x) = K t a^F e^{ax}$
2	$u_2(x, t) = L_t^{-1} K D^F u_1(x, t) = K^2 \frac{t^2}{2!} \cdot D^{2F} f(x) = K^2 \frac{t^2}{2!} a^{2F} e^{ax}$
3	$u_3(x, t) = L_t^{-1} K D^F u_2(x, t) = K^3 \frac{t^3}{3!} \cdot D^{3F} f(x) = K^3 \frac{t^3}{3!} a^{3F} e^{ax}$
4	$u_4(x, t) = L_t^{-1} K D^F u_3(x, t) = K^4 \frac{t^4}{4!} \cdot D^{4F} f(x) = K^4 \frac{t^4}{4!} a^{4F} e^{ax}$
⋮	⋮
30	$u_{30}(x, t) = L_t^{-1} K D^F u_{29}(x, t) = K^{30} \frac{t^{30}}{30!} \cdot D^{30F} f(x) = K^{30} \frac{t^{30}}{30!} a^{30F} e^{ax}$
⋮	⋮
n	$u_n(x, t) = L_t^{-1} K D^F u_{n-1}(x, t) = K^n \frac{t^n}{n!} \cdot D^{nF} f(x) = K^n \frac{t^n}{n!} a^{nF} e^{ax}$

Successivamente si considererà un valore di K costante pari ad 1 avendo compreso il suo contributo come fattore di scala nella soluzione ed un valore di a variabile.

Si considerano i primi 30 termini per l'approssimazione della soluzione

$$u(x, t) = \lim_{M \rightarrow \infty} U_M(x, t) = \lim_{M \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^M u_n(x, t) = \lim_{M \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^M K^n \frac{t^n}{n!} a^{nF} e^{ax} \quad (7.30)$$

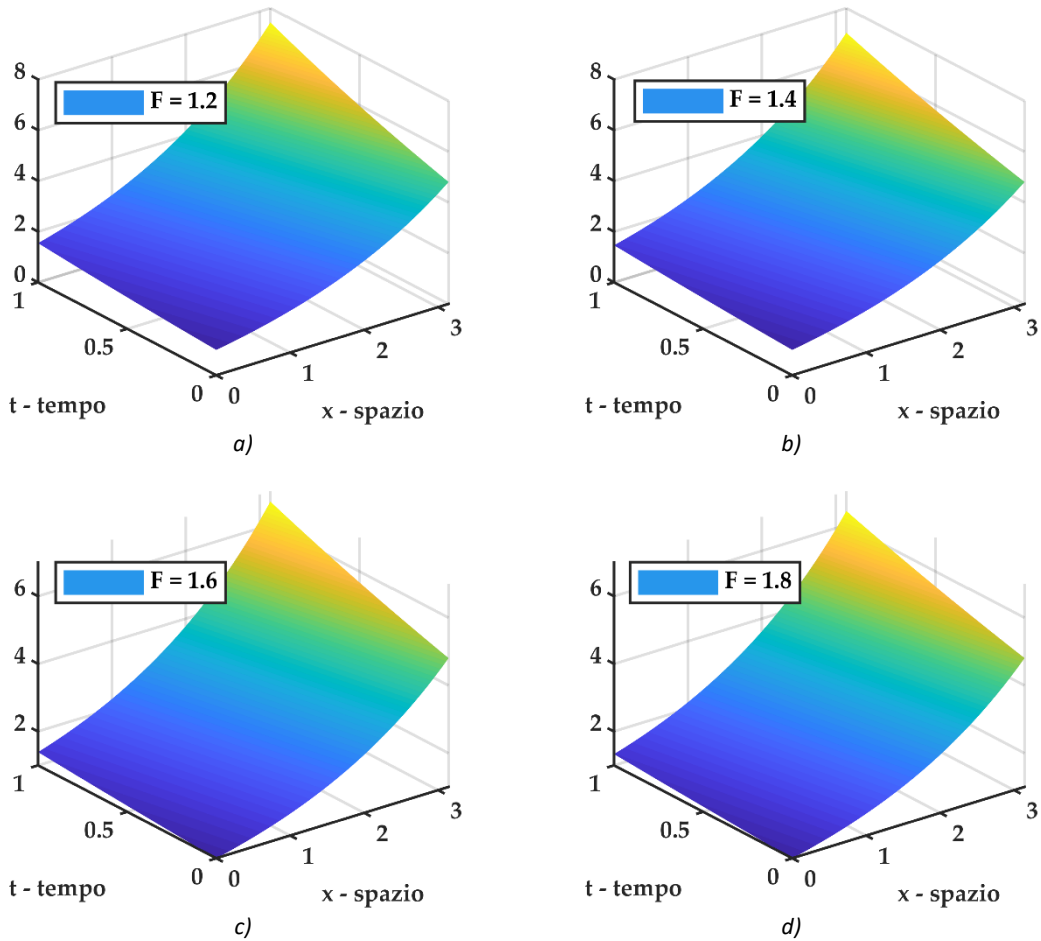


Figura 7-12 plot 3D della soluzione $u(x, t)$ del problema differenziale frazionario S-FRDE con $u(x, 0) = e^{ax}$ con $a = 0.50$ e coefficiente di diffusione costante $\rightarrow K = cost$ per diversi valori dell'ordine di derivazione frazionario per operatore laplaciano. a) soluzione S-FRDE per $F = 1.2$, b) soluzione S-FRDE per $F = 1.4$, c) soluzione S-FRDE per $F = 1.6$, d) soluzione S-FRDE per $F = 1.8$

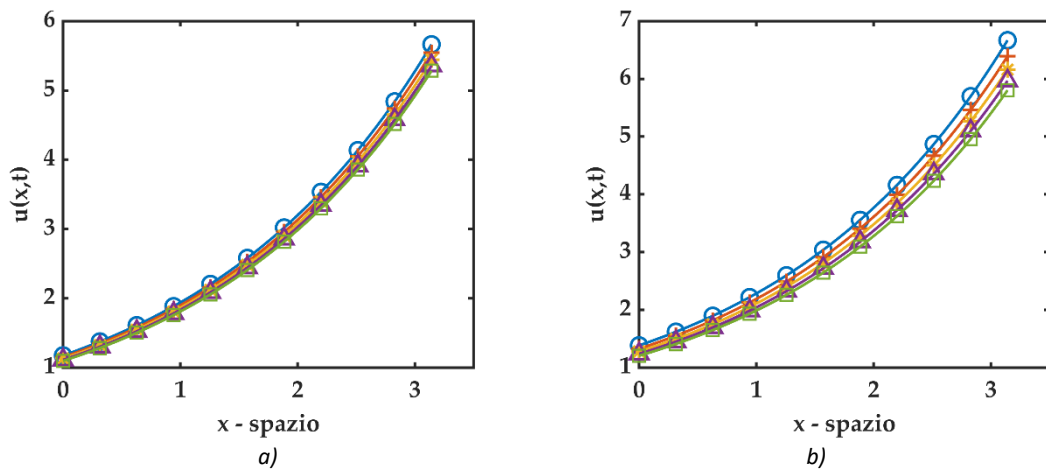


Figura 7-13 plot 2D di confronto fra soluzioni del problema differenziale frazionario S-FRDE con $u(x, 0) = e^{ax}$ con $a = 0.50$ e coefficiente di diffusione costante $\rightarrow K = cost.$ (○ cerchio - blu) rappresenta la soluzione per $F = 1.2$, (+ croce - rosso) rappresenta la soluzione per $F = 1.4$, (* asterisco - giallo) rappresenta la soluzione per $F = 1.6$, (△ triangolo - viola) rappresenta la soluzione per $F = 1.8$, (□ quadrato - verde) rappresenta la soluzione della standard DE. a) plot 2D per $t = 0.5$, b) plot 2D per $t = 1.0$

Si noti che se poniamo $a = 1$ tutte le curve coincidono in quanto

$$-{}_{\infty}^C D_t^F [e^x] = e^x \quad (7.31)$$

si ottiene infatti che la soluzione frazionaria e con laplaciano standard sono le medesime.

7.4 Coefficiente di diffusione - $K = K(t)$

Nel presente paragrafo si considera la dipendenza temporale del coefficiente di diffusione. Come specificato al capitolo 4 del presente lavoro di tesi, l'equazione di diffusione frazionaria (4.23) e di avvezione-diffusione (4.31) godono di struttura non lineare a causa di una relazione funzionale fra i coefficienti di diffusione ed avvezione e $\frac{\partial p}{\partial x}, J$ essendo rispettivamente il gradiente di pressione e lo Jacobiano del processo deformativo. Quest'ultimi, a loro volta, risultano funzioni delle coordinate spaziali e temporali (x, t) . Fisicamente tale dipendenza funzionale del coefficiente di diffusione è legata ad eterogeneità, effetti di memoria del mezzo poroso o processi a grandi deformazioni.

Nel presente elaborato si considererà esclusivamente una dipendenza temporale in quanto una variabilità spaziale di K significherebbe una dipendenza della permeabilità dal vettore posizione \mathbf{x} . In tal modo il mezzo poroso risulterebbe eterogeneo; tuttavia, l'eterogeneità risulta considerata nella trattazione grazie all'utilizzo dell'approccio frazionario delle equazioni governanti il problema fisico in esame. Verranno, a tal scopo, considerate diverse funzioni temporali Riemann-integrabili: $K(t) = t^\beta, e^t, \sin(t), \cos(t), \sinh(t), \cosh(t)$. La decisione di considerare tali espressioni per il coefficiente di diffusione si basa sul fatto che, anche nell'ipotesi che la funzione scalare $K(t)$ sia legata ad altre relazioni funzionali, comunque, attraverso tecniche analitiche (ad esempio la nota serie di Fourier) è possibile ricavare una approssimazione di $K(t)$ come combinazione lineare di funzioni base.

7.4.1 $K = K(t) = t^\beta$

7.4.1.1 S-FRDE con condizioni iniziali $u(x, 0) = x^\alpha$

Si considera ora il seguente problema differenziale

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = t^\beta \cdot \frac{\partial^F u}{\partial x^F} \\ u(x, 0) = x^\alpha \end{cases} \quad 1 < F \leq 2 \quad (7.32)$$

Nel caso in esame verrà utilizzata la derivata di Caputo con punto base $a = 0$, con $1 < F \leq 2$ ottenendo la seguente espressione per l'operatore laplaciano $1D$

$${}_0^C D_t^F [f(t)] = \frac{1}{\Gamma(2-F)} \int_0^t \frac{f^{(2)}(\tau)}{(t-\tau)^{F-1}} d\tau = \frac{1}{\Gamma(2-F)} \int_0^t \frac{\partial^2 f(\tau)}{\partial \tau^2} \cdot (t-\tau)^{1-F} d\tau$$

da cui, come riportato alla (2.88)

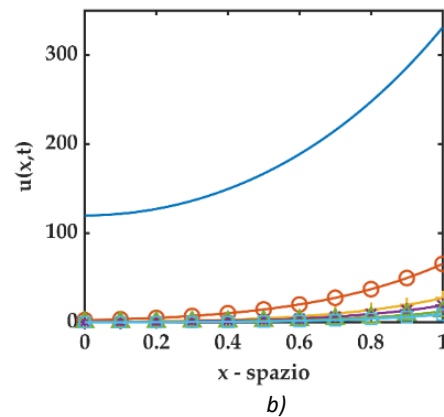
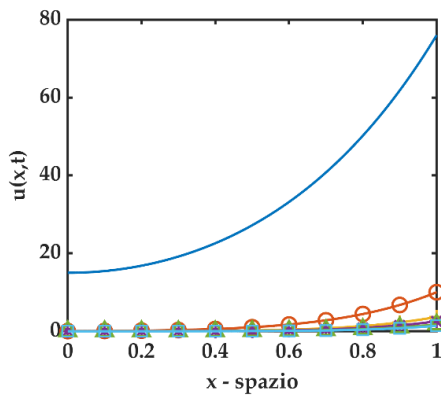
$${}_a^C D_t^F (t^\alpha) = \begin{cases} \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha-F+1)} t^{\alpha-F} & n-1 < F < n, \alpha > n-1 \\ 0 & \alpha \in \mathbb{R}, n-1 < F < n, \alpha \leq n-1 \end{cases}$$

È bene ribadire che tali risultati sono validi esclusivamente per valore del punto base $a = 0$.

Si ottengono le seguenti componenti

n	u_n
0	$u_0(x, t) = x^\alpha = f(x)$
1	$u_1(x, t) = L_t^{-1}(t^\beta)D^F u_0(x, t) = \int_0^t t^\beta dt \cdot D^F f(x)$ $= \frac{t^{\beta+1}}{\beta+1} \cdot \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+1-F)} \cdot x^{\alpha-F}$
2	$u_2(x, t) = L_t^{-1}(t^\beta)D^F u_1(x, t) = L_t^{-1} \left[(t^\beta)D^F \left\{ \frac{t^{\beta+1}}{\beta+1} \cdot \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+1-F)} \cdot x^{\alpha-F} \right\} \right]$ $= \int_0^t \frac{t^{2\beta+1}}{\beta+1} dt \cdot \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+1-F)} D^F \{x^{\alpha-F}\}$ $= \frac{t^{2\beta+2}}{(2\beta+2)(\beta+1)} \cdot \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+1-F)} \cdot \frac{\Gamma(\alpha+1-F)}{\Gamma(\alpha+1-2F)} \cdot x^{\alpha-2F}$ $= \frac{t^{2(\beta+1)}}{2(\beta+1)^2} \cdot \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+1-2F)} \cdot x^{\alpha-2F}$
3	$u_3(x, t) = L_t^{-1}(t^\beta)D^F u_2(x, t)$ $= L_t^{-1} \left[(t^\beta)D^F \left\{ \frac{t^{2(\beta+1)}}{2(\beta+1)^2} \cdot \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+1-2F)} \cdot x^{\alpha-2F} \right\} \right]$ $= \int_0^t \frac{t^{3\beta+2}}{2(\beta+1)^2} dt \cdot \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+1-2F)} D^F \{x^{\alpha-2F}\}$ $= \frac{t^{3\beta+3}}{(3\beta+3)2(\beta+1)^2} \cdot \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+1-2F)} \cdot \frac{\Gamma(\alpha+1-2F)}{\Gamma(\alpha+1-3F)} \cdot x^{\alpha-3F}$ $= \frac{t^{3(\beta+1)}}{3!(\beta+1)^3} \cdot \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+1-3F)} \cdot x^{\alpha-3F}$
\vdots	\vdots
n	$u_n(x, t) = L_t^{-1}(t^\beta)D^F u_{n-1}(x, t) = \frac{t^{n(\beta+1)}}{n!(\beta+1)^n} \cdot \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+1-nF)} \cdot x^{\alpha-nF}$

Si decide di studiare il la soluzione del problema differenziale dato al variare del valore di $\beta = 0.2, 0.7, 1.0, 1.5, 2.0$ fissando $x^\alpha = x^6$.



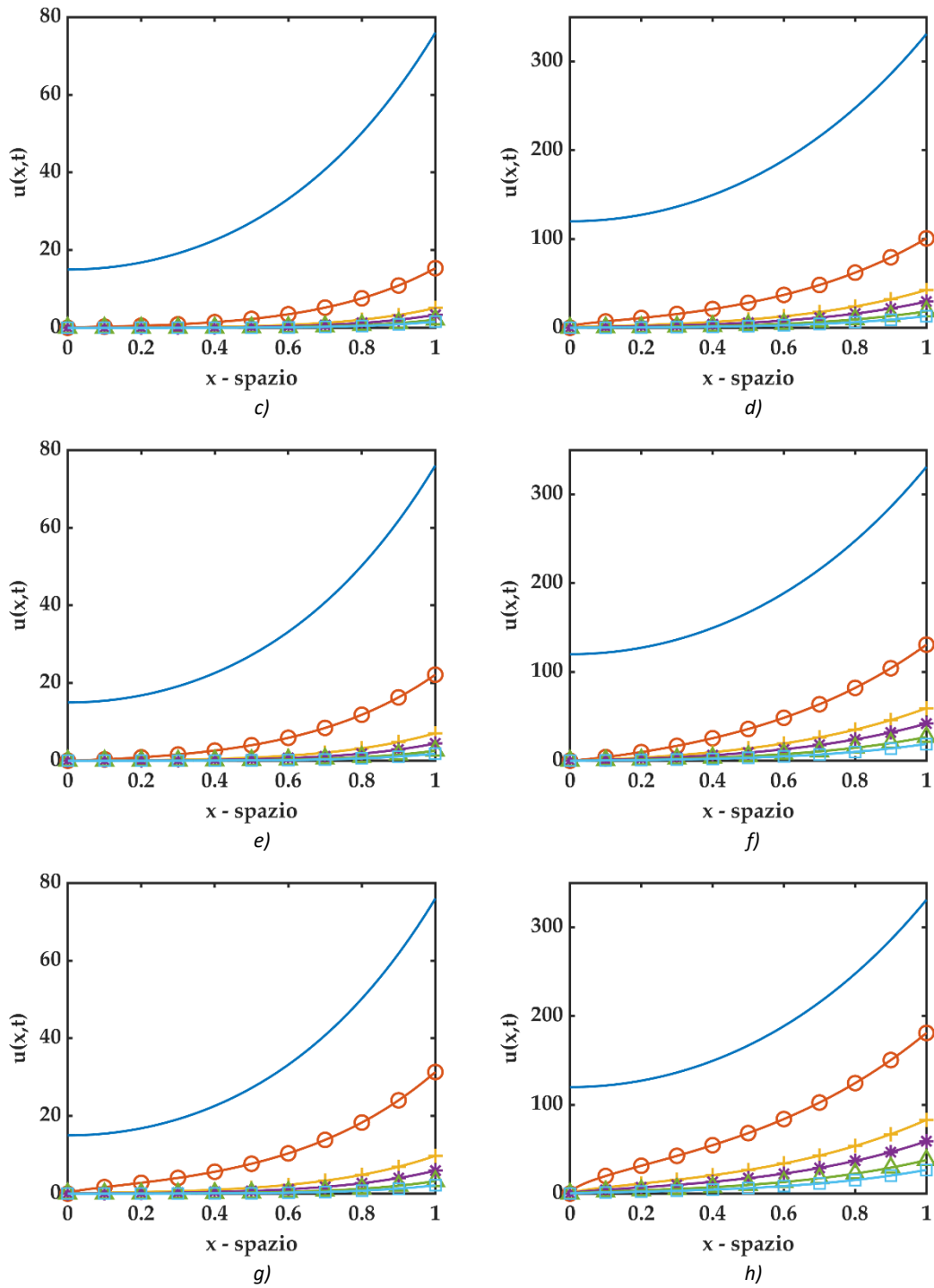
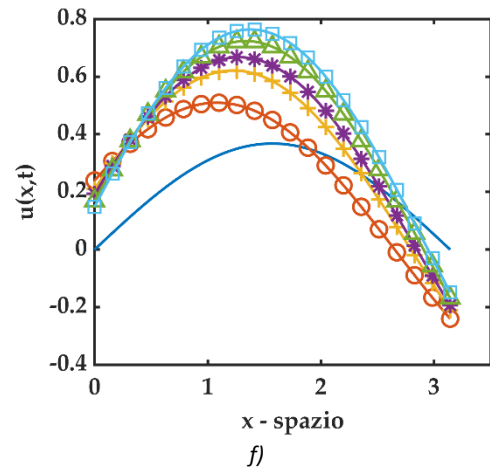
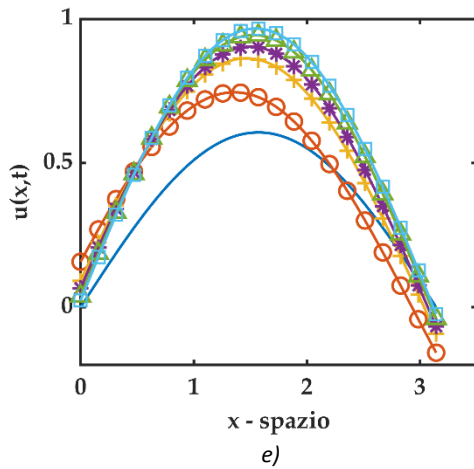
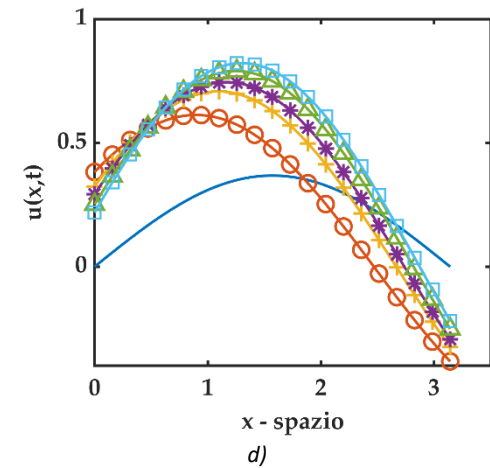
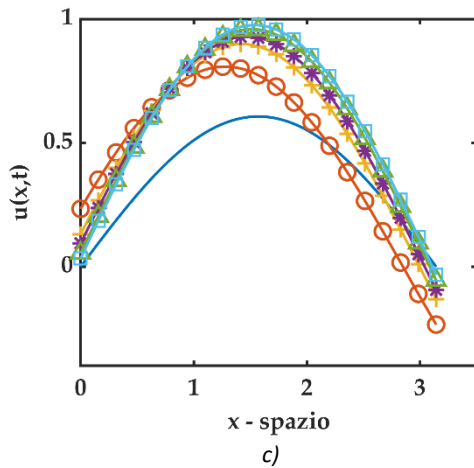
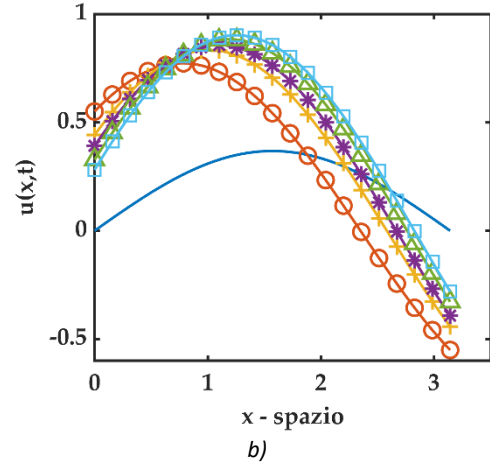
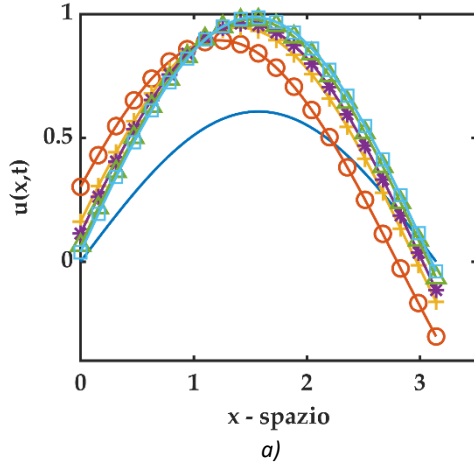


Figura 7-14 plot 2D di confronto fra soluzioni del problema differenziale frazionario S-FRDE con $u(x, 0) = x^\delta$ con $\delta = 3$ e coefficiente di diffusione funzione del tempo $K = t^\beta$ per diversi valori dell'ordine di derivazione frazionario e (© cerchio - rosso) rappresenta la soluzione per $\beta = 0.2$, (+ croce - giallo) rappresenta la soluzione per $\beta = 0.7$, (* asterisco - viola) rappresenta la soluzione per $\beta = 1.0$, (Δ triangolo - verde) rappresenta la soluzione per $\beta = 1.5$, (\square quadrato - azzurro) rappresenta la soluzione per $\beta = 2.0$, (— linea continua - blu) rappresenta la soluzione della standard DE. a) $F = 1.2 - t = 0.5$, b) $F = 1.2 - t = 1.0$, c) $F = 1.4 - t = 0.5$, d) $F = 1.4 - t = 1.0$, e) $F = 1.6 - t = 0.5$, f) $F = 1.6 - t = 1.0$, g) $F = 1.8 - t = 0.5$, h) $F = 1.8 - t = 1.0$

7.4.1.2 S-FRDE con condizioni iniziali $u(x, 0) = \sin(x)$

Ripercorrendo la procedura ADM si giunge al seguente termine generale

$$u_n(x, t) = L_t^{-1}(t^\beta) D^F u_{n-1}(x, t) = \frac{t^{n(\beta+1)}}{n! (\beta + 1)^n} \sin\left(x + \frac{nF \cdot \pi}{2}\right) \quad (7.33)$$



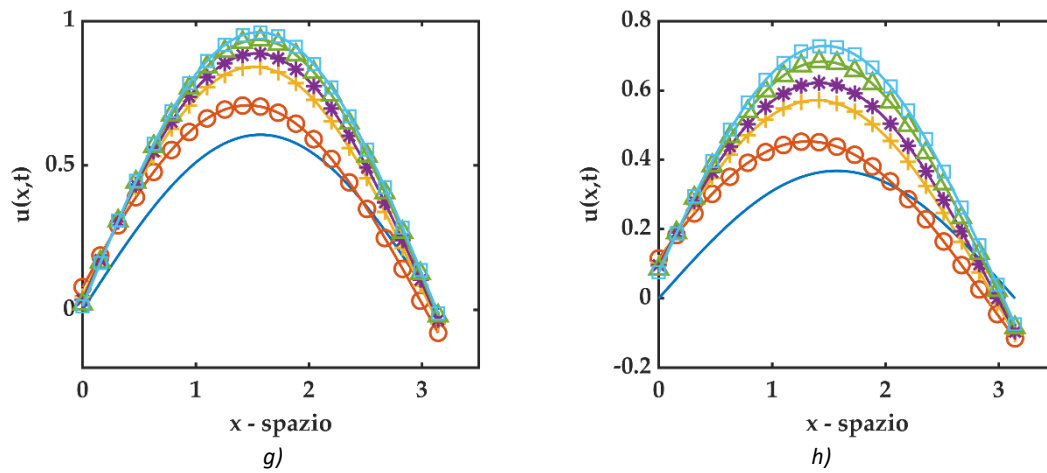
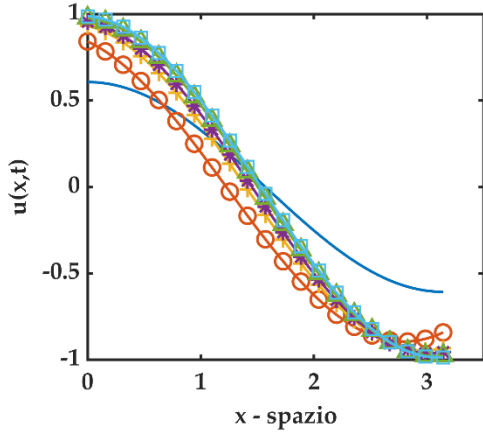


Figura 7-15 plot 2D di confronto fra soluzioni del problema differenziale frazionario S-FRDE con $u(x, 0) = \sin(x)$ e coefficiente di diffusione funzione del tempo $K = t^\beta$ per diversi valori dell'ordine di derivazione frazionario e $(\odot$ cerchio - rosso) rappresenta la soluzione per $\beta = 0.2$, $(+$ croce - giallo) rappresenta la soluzione per $\beta = 0.7$, $(*$ asterisco - viola) rappresenta la soluzione per $\beta = 1.0$, $(\Delta$ triangolo - verde) rappresenta la soluzione per $\beta = 1.5$, $(\square$ quadrato - azzurro) rappresenta la soluzione per $\beta = 2.0$, $(-)$ linea continua - blu) rappresenta la soluzione della standard DE. a) $F = 1.2 - t = 0.5$, b) $F = 1.2 - t = 1.0$, c) $F = 1.4 - t = 0.5$, d) $F = 1.4 - t = 1.0$, e) $F = 1.6 - t = 0.5$, f) $F = 1.6 - t = 1.0$, g) $F = 1.8 - t = 0.5$, h) $F = 1.8 - t = 1.0$

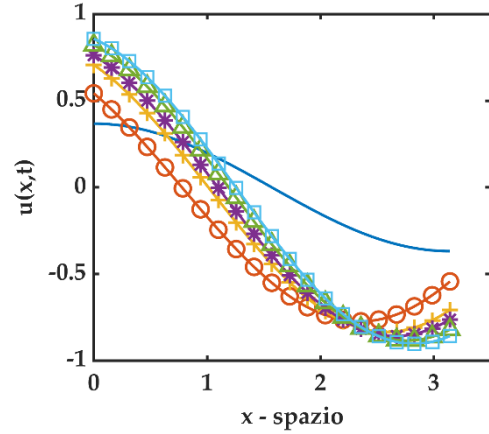
7.4.1.3 S-FRDE con condizioni iniziali $u(x, 0) = \cos(x)$

Ripercorrendo la procedura ADM si giunge al seguente termine generale

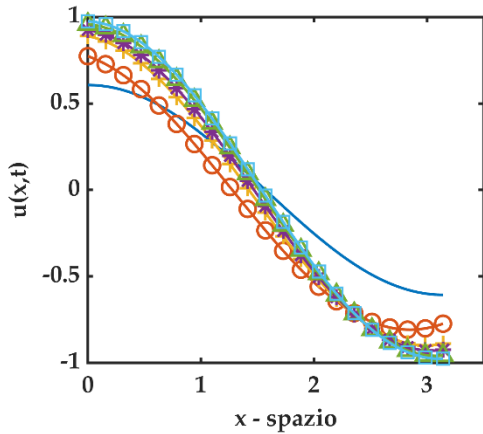
$$u_n(x, t) = L_t^{-1}(t^\beta) D^F u_{n-1}(x, t) = \frac{t^{n(\beta+1)}}{n! (\beta + 1)^n} \cos\left(x + \frac{nF \cdot \pi}{2}\right) \quad (7.34)$$



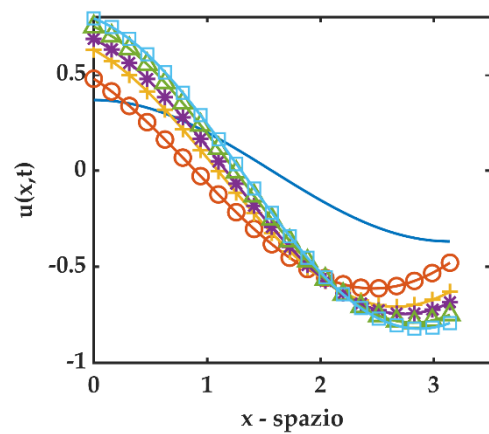
a)



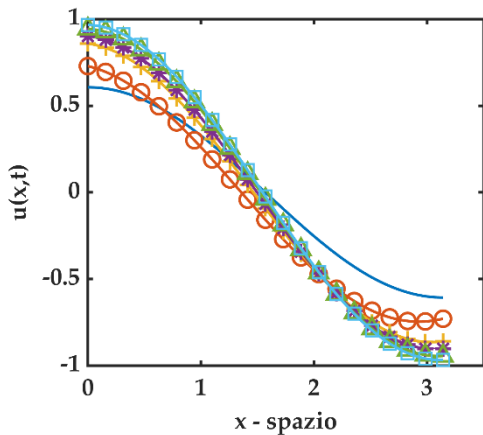
b)



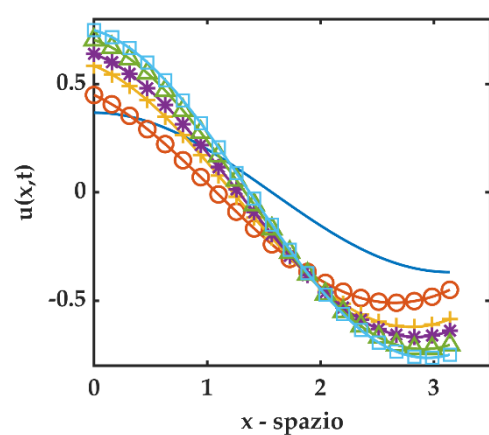
c)



d)



e)



f)

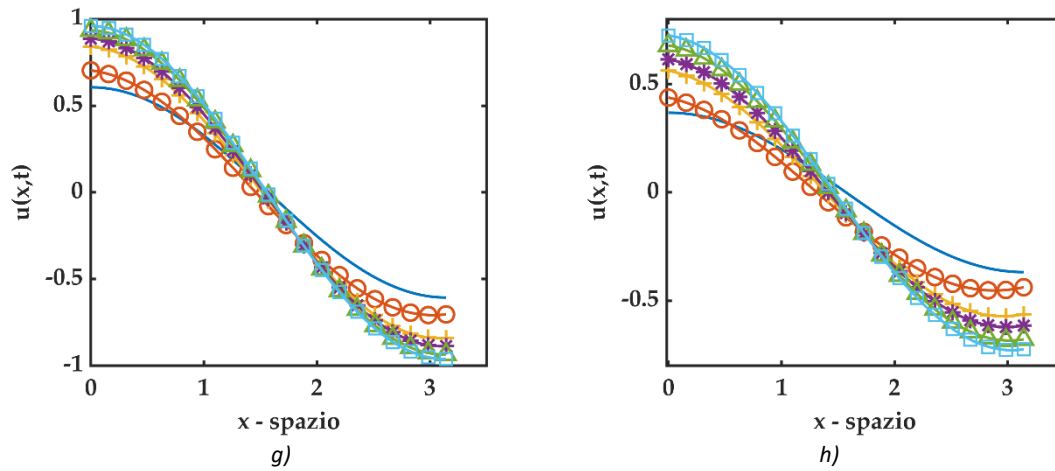
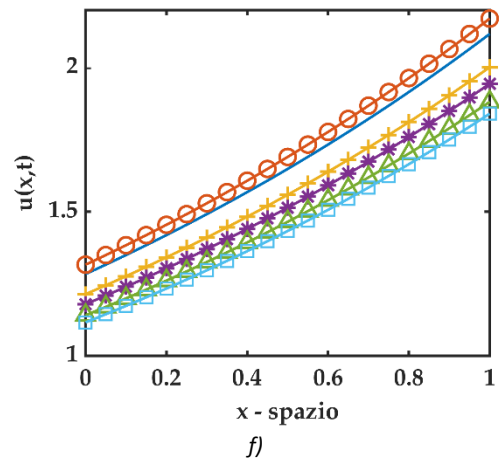
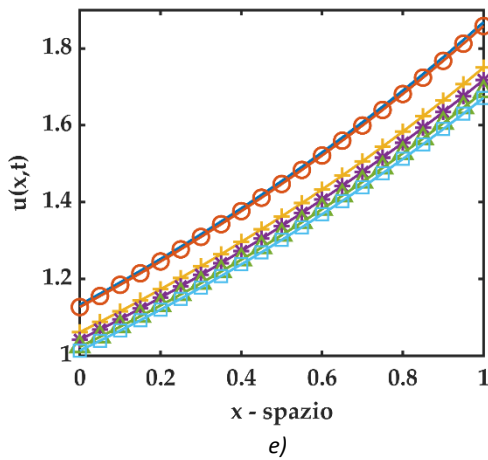
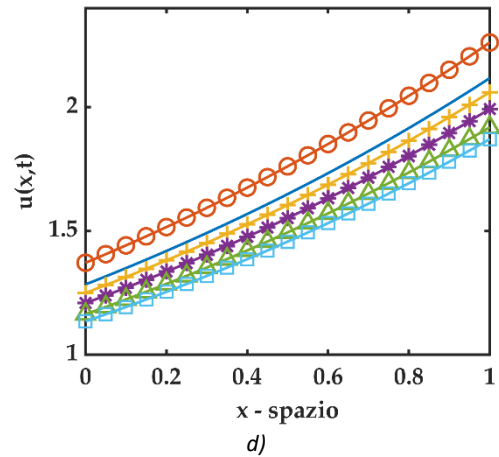
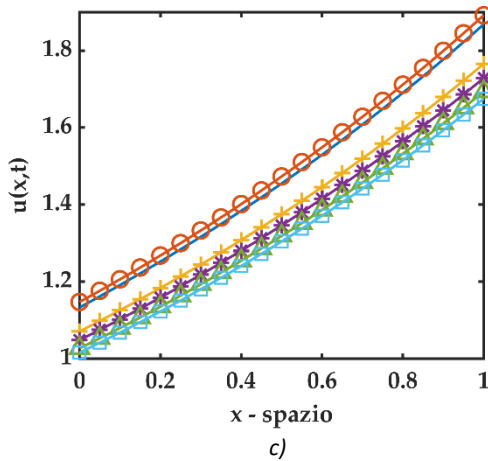
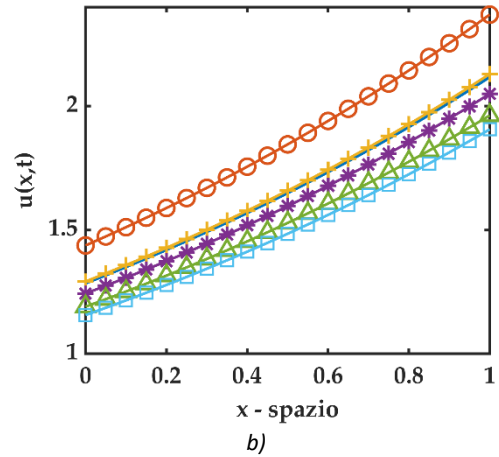
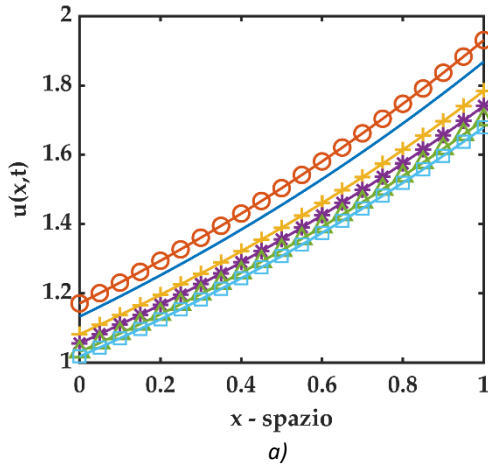


Figura 7-16 plot 2D di confronto fra soluzioni del problema differenziale frazionario S-FRDE con $u(x, 0) = \cos(x)$ e coefficiente di diffusione funzione del tempo $K = t^\beta$ per diversi valori dell'ordine di derivazione frazionario e (⊙ cerchio - rosso) rappresenta la soluzione per $\beta = 0.2$, (+ croce - giallo) rappresenta la soluzione per $\beta = 0.7$, (* asterisco - viola) rappresenta la soluzione per $\beta = 1.0$, (Δ triangolo - verde) rappresenta la soluzione per $\beta = 1.5$, (\square quadrato - azzurro) rappresenta la soluzione per $\beta = 2.0$, (— linea continua - blu) rappresenta la soluzione della standard DE. a) $F = 1.2 - t = 0.5$, b) $F = 1.2 - t = 1.0$, c) $F = 1.4 - t = 0.5$, d) $F = 1.4 - t = 1.0$, e) $F = 1.6 - t = 0.5$, f) $F = 1.6 - t = 1.0$, g) $F = 1.8 - t = 0.5$, h) $F = 1.8 - t = 1.0$

7.4.1.4 S-FRDE con condizioni iniziali $u(x, 0) = e^{ax}$ $Re(a) \geq 0$

Ripercorrendo la procedura ADM si giunge al seguente termine generale

$$u_n(x, t) = L_t^{-1}(t^\beta) D^F u_{n-1}(x, t) = \frac{t^{n(\beta+1)}}{n! (\beta + 1)^n} a^{nF} e^{ax} \quad (7.35)$$



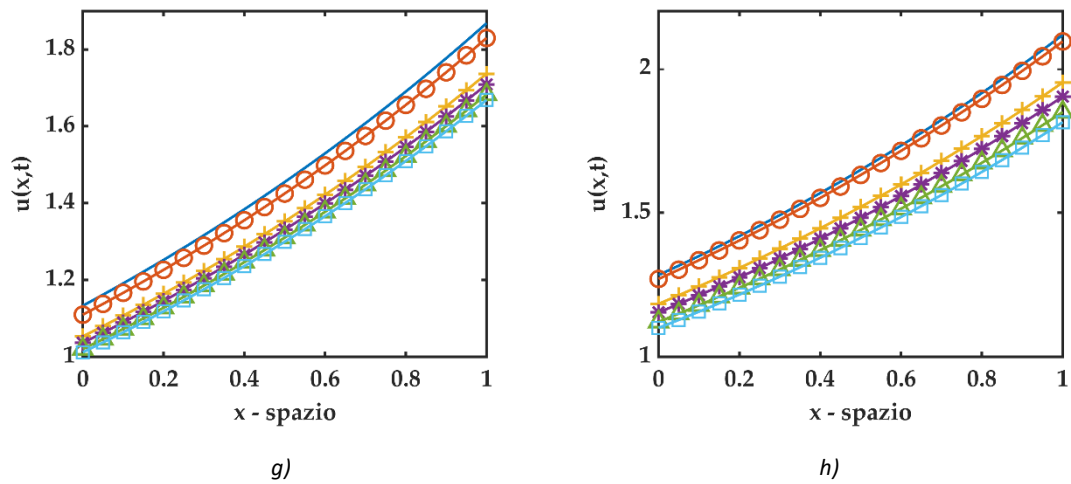


Figura 7-17 plot 2D di confronto fra soluzioni del problema differenziale frazionario S-FRDE con $u(x, 0) = e^{ax}$ con $a = 0.50$ e coefficiente di diffusione funzione del tempo $K = t^\beta$ per diversi valori dell'ordine di derivazione frazionario e (⊙ cerchio - rosso) rappresenta la soluzione per $\beta = 0.2$, (+ croce - giallo) rappresenta la soluzione per $\beta = 0.7$, (* asterisco - viola) rappresenta la soluzione per $\beta = 1.0$, (Δ triangolo - verde) rappresenta la soluzione per $\beta = 1.5$, (\square quadrato - azzurro) rappresenta la soluzione per $\beta = 2.0$, (— linea continua - blu) rappresenta la soluzione della standard DE. a) $F = 1.2 - t = 0.5$, b) $F = 1.2 - t = 1.0$, c) $F = 1.4 - t = 0.5$, d) $F = 1.4 - t = 1.0$, e) $F = 1.6 - t = 0.5$, f) $F = 1.6 - t = 1.0$, g) $F = 1.8 - t = 0.5$, h) $F = 1.8 - t = 1.0$

7.4.2 $K = K(t) = e^t$
7.4.2.1 S-FRDE con condizioni iniziali $u(x, 0) = x^\alpha$

Si considera ora il seguente problema differenziale

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = e^t \cdot \frac{\partial^F u}{\partial x^F} & 1 < F \leq 2 \\ u(x, 0) = x^\alpha \end{cases} \quad (7.36)$$

come per il problema precedente, si considera la derivata di Caputo con punto base $a = 0$. Si ottengono le seguenti componenti

n	u_n
0	$u_0(x, t) = x^\alpha = f(x)$
1	$u_1(x, t) = L_t^{-1}(e^t)D^F u_0(x, t) = \int_0^t e^t dt \cdot D^F f(x) = e^t \Big _0^t \cdot \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\Gamma(\alpha + 1 - F)} \cdot x^{\alpha - F}$ $= (e^t - 1) \cdot \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\Gamma(\alpha + 1 - F)} \cdot x^{\alpha - F}$ $= \left(\frac{e^t}{0! 1!} - \frac{1}{0! 1!} \right) \cdot \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\Gamma(\alpha + 1 - F)} \cdot x^{\alpha - F}$
2	$u_2(x, t) = L_t^{-1}(e^t)D^F u_1(x, t) = L_t^{-1} \left[(e^t)D^F \left\{ (e^t - 1) \cdot \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\Gamma(\alpha + 1 - F)} \cdot x^{\alpha - F} \right\} \right]$ $= \int_0^t (e^{2t} - e^t) dt \cdot \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\Gamma(\alpha + 1 - F)} D^F \{x^{\alpha - F}\}$ $= \left(\frac{e^{2t}}{2} - e^t \right) \Big _0^t \cdot \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\Gamma(\alpha + 1 - F)} \cdot \frac{\Gamma(\alpha + 1 - F)}{\Gamma(\alpha + 1 - 2F)} \cdot x^{\alpha - 2F}$ $= \left(\frac{e^{2t}}{2} - e^t + \frac{1}{2} \right) \cdot \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\Gamma(\alpha + 1 - 2F)} \cdot x^{\alpha - 2F}$ $= \left(\frac{e^{2t}}{0! 2!} - \frac{e^t}{1! 1!} + \frac{1}{2! 0!} \right) \cdot \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\Gamma(\alpha + 1 - 2F)} \cdot x^{\alpha - 2F}$
3	$u_3(x, t) = L_t^{-1}(e^t)D^F u_2(x, t)$ $= L_t^{-1} \left[(e^t)D^F \left\{ \left(\frac{e^{2t}}{2} - e^t + \frac{1}{2} \right) \cdot \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\Gamma(\alpha + 1 - 2F)} \cdot x^{\alpha - 2F} \right\} \right]$ $= \int_0^t \left(\frac{e^{3t}}{2} - e^{2t} + \frac{e^t}{2} \right) dt \cdot \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\Gamma(\alpha + 1 - 2F)} D^F \{x^{\alpha - 2F}\}$ $= \left(\frac{e^{3t}}{6} - \frac{e^{2t}}{2} + \frac{e^t}{2} \right) \Big _0^t \cdot \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\Gamma(\alpha + 1 - 2F)} \cdot \frac{\Gamma(\alpha + 1 - 2F)}{\Gamma(\alpha + 1 - 3F)} \cdot x^{\alpha - 3F}$ $= \left(\frac{e^{3t}}{6} - \frac{e^{2t}}{2} + \frac{e^t}{2} - \frac{1}{6} \right) \cdot \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\Gamma(\alpha + 1 - 3F)} \cdot x^{\alpha - 3F}$ $= \left(\frac{e^{3t}}{0! 3!} - \frac{e^{2t}}{1! 2!} + \frac{e^t}{2! 1!} - \frac{1}{3! 0!} \right) \cdot \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\Gamma(\alpha + 1 - 3F)} \cdot x^{\alpha - 3F}$

4	$ \begin{aligned} u_4(x, t) &= L_t^{-1}(e^t)D^F u_3(x, t) \\ &= L_t^{-1} \left[(e^t)D^F \left\{ \left(\frac{e^{3t}}{6} - \frac{e^{2t}}{2} + \frac{e^t}{2} - \frac{1}{6} \right) \cdot \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\Gamma(\alpha + 1 - 3F)} \cdot x^{\alpha - 3F} \right\} \right] \\ &= \int_0^t \left(\frac{e^{4t}}{6} - \frac{e^{3t}}{2} + \frac{e^{2t}}{2} - \frac{e^t}{6} \right) dt \cdot \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\Gamma(\alpha + 1 - 3F)} D^F \{x^{\alpha - 3F}\} = \\ &\left(\frac{e^{4t}}{24} - \frac{e^{3t}}{6} + \frac{e^{2t}}{4} - \frac{e^t}{6} \right) \Big _0^t \cdot \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\Gamma(\alpha + 1 - 3F)} \cdot \frac{\Gamma(\alpha + 1 - 3F)}{\Gamma(\alpha + 1 - 4F)} \cdot x^{\alpha - 4F} \\ &= \left(\frac{e^{4t}}{24} - \frac{e^{3t}}{6} + \frac{e^{2t}}{4} - \frac{e^t}{6} + \frac{1}{24} \right) \cdot \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\Gamma(\alpha + 1 - 4F)} \cdot x^{\alpha - 4F} \\ &= \left(\frac{e^{4t}}{0!4!} - \frac{e^{3t}}{1!3!} + \frac{e^{2t}}{2!2!} - \frac{e^t}{3!1!} + \frac{1}{4!0!} \right) \cdot \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\Gamma(\alpha + 1 - 4F)} \cdot x^{\alpha - 4F} \end{aligned} $
5	$ \begin{aligned} u_5(x, t) &= L_t^{-1}(e^t)D^F u_4(x, t) \\ &= L_t^{-1} \left[(e^t)D^F \left\{ \left(\frac{e^{4t}}{24} - \frac{e^{3t}}{6} + \frac{e^{2t}}{4} - \frac{e^t}{6} + \frac{1}{24} \right) \cdot \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\Gamma(\alpha + 1 - 4F)} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \cdot x^{\alpha - 4F} \right\} \right] \\ &= \int_0^t \left(\frac{e^{5t}}{24} - \frac{e^{4t}}{6} + \frac{e^{3t}}{4} - \frac{e^{2t}}{6} + \frac{e^t}{24} \right) dt \cdot \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\Gamma(\alpha + 1 - 4F)} D^F \{x^{\alpha - 4F}\} \\ &= \\ &\left(\frac{e^{5t}}{120} - \frac{e^{4t}}{24} + \frac{e^{3t}}{12} - \frac{e^{2t}}{12} + \frac{e^t}{24} \right) \Big _0^t \cdot \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\Gamma(\alpha + 1 - 4F)} \cdot \frac{\Gamma(\alpha + 1 - 4F)}{\Gamma(\alpha + 1 - 5F)} \cdot x^{\alpha - 5F} \\ &= \left(\frac{e^{5t}}{120} - \frac{e^{4t}}{24} + \frac{e^{3t}}{12} - \frac{e^{2t}}{12} + \frac{e^t}{24} - \frac{1}{120} \right) \cdot \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\Gamma(\alpha + 1 - 5F)} \cdot x^{\alpha - 5F} \\ &= \left(\frac{e^{5t}}{0!5!} - \frac{e^{4t}}{1!4!} + \frac{e^{3t}}{2!3!} - \frac{e^{2t}}{3!2!} + \frac{e^t}{4!1!} - \frac{1}{5!0!} \right) \cdot \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\Gamma(\alpha + 1 - 5F)} \\ &\quad \cdot x^{\alpha - 5F} \end{aligned} $
⋮	⋮
n	$ \begin{aligned} u_n(x, t) &= L_t^{-1}(e^t)D^F u_{n-1}(x, t) = \\ &= \frac{1}{\text{Diag}[\mathbb{A} \otimes (\text{Ref}\mathbb{A})^T]} \cdot \overbrace{\begin{pmatrix} +1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{ij} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (-1)^{j+1} \end{pmatrix}}^{[n+1] \times [n+1]} \cdot \begin{pmatrix} e^{n \cdot t} \\ e^{(n-1) \cdot t} \\ e^{(n-2) \cdot t} \\ \vdots \\ e^t \\ 1 \end{pmatrix} \\ &\quad \cdot \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\Gamma(\alpha + 1 - nF)} \cdot x^{\alpha - nF} \\ &\quad \text{con} \\ &\quad \mathbb{A} = [n! \quad (n-1)! \quad (n-2)! \quad \dots \quad 2! \quad 1! \quad 0!] \end{aligned} $

$$(Ref\mathbb{A})^T = \begin{pmatrix} 0! \\ 1! \\ 2! \\ \vdots \\ (n-2)! \\ (n-1)! \\ n! \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{A} \otimes (Ref\mathbb{A})^T = \begin{pmatrix} n!0! & n!1! & n!2! & \cdots & n!(n-1)! & n!n! \\ (n-1)!0! & (n-1)!1! & (n-1)!2! & \cdots & (n-1)!(n-1)! & (n-1)!n! \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1!0! & 1!1! & 1!2! & \cdots & 1!(n-1)! & 1!n! \\ 0!0! & 0!1! & 0!2! & \cdots & 0!(n-1)! & 0!n! \end{pmatrix}$$

$$Diag[\mathbb{A} \otimes (Ref\mathbb{A})^T] = [n!0! \quad (n-1)!1! \quad (n-2)!2! \quad \cdots \quad 2!(n-2)! \quad 1!(n-1)! \quad 0!n!]$$

Viene fissato il valore di $x^\alpha = x^6$.

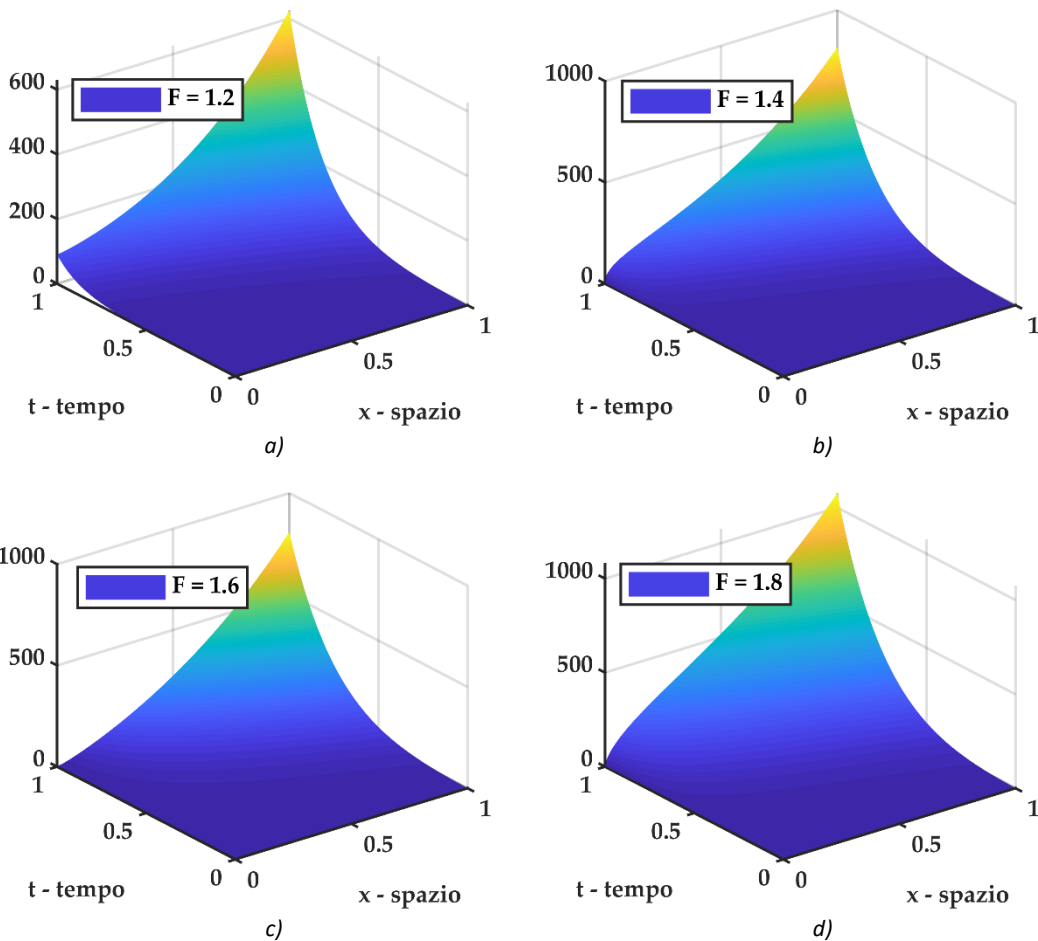


Figura 7-18 plot 3D della soluzione $u(x,t)$ del problema differenziale frazionario S-FRDE con $u(x,0) = x^\alpha$ e coefficiente di diffusione funzione del tempo $K = e^t$ per diversi valori dell'ordine di derivazione frazionario. a) soluzione S-FRDE per $F = 1.2$, b) soluzione S-FRDE per $F = 1.4$, c) soluzione S-FRDE per $F = 1.6$, d) soluzione S-FRDE per $F = 1.8$.

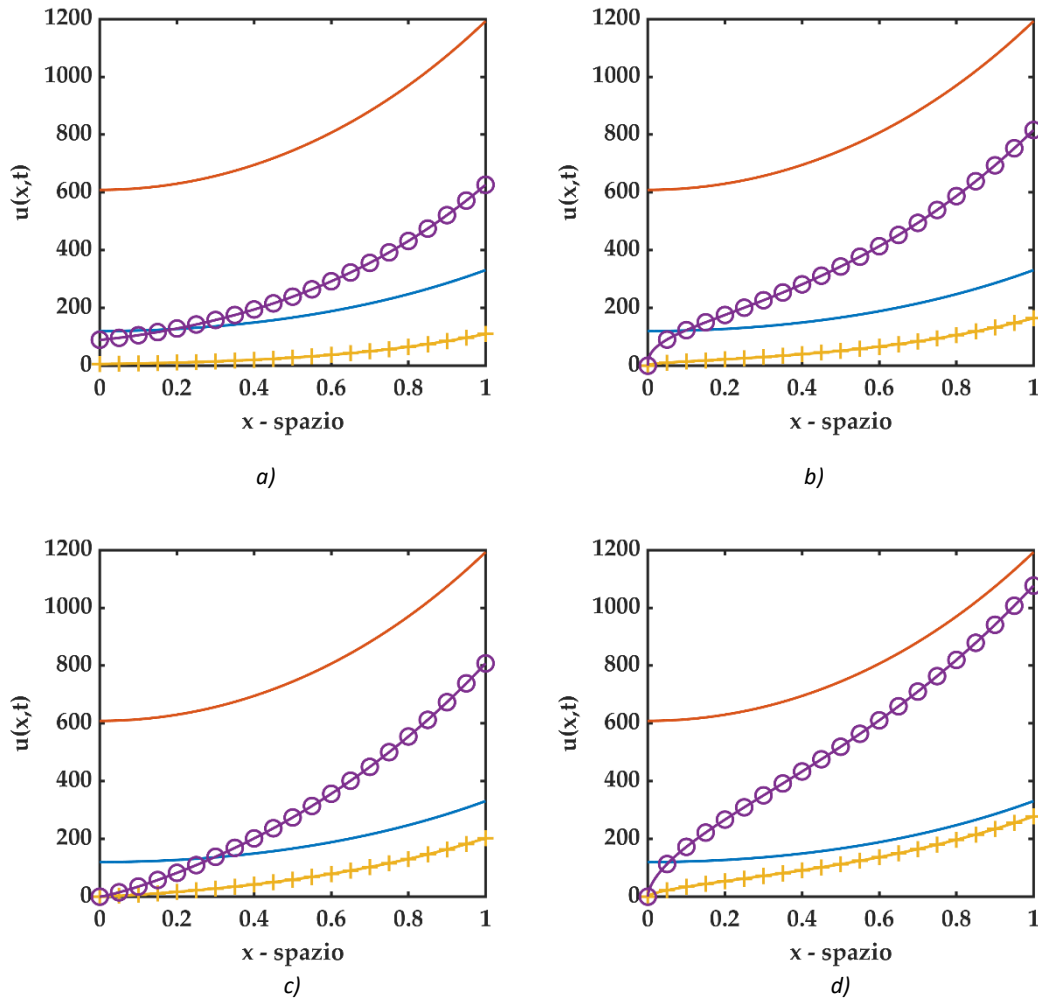


Figura 7-19 plot 2D di confronto fra soluzioni del problema differenziale frazionario S-FRDE con $u(x, 0) = x^\alpha$ e $t = 1.0$ dove (– linea continua - blu) rappresenta la soluzione standard DE con Laplaciano standard e $K = \text{cost}$, (– linea continua - rosso) rappresenta la soluzione standard DE con Laplaciano standard e $K = e^t$, (+ croce - giallo) rappresenta la soluzione S-FRDE con Laplaciano frazionario di ordine F e $K = \text{cost}$, (© cerchio - viola) rappresenta la soluzione S-FRDE con Laplaciano frazionario di ordine F e $K = e^t$. a) soluzione S-FRDE per $F = 1.2$, b) soluzione S-FRDE per $F = 1.4$, c) soluzione S-FRDE per $F = 1.6$, d) soluzione S-FRDE per $F = 1.8$.

7.4.2.1.1 Algoritmo Matlab

Di seguito viene riportato un estratto dello script Matlab utilizzato per i plot sopra riportati, soffermandosi sul calcolo della soluzione inerente il problema differenziale S-FRDE.

```
% calcolo delle componenti dell'integrazione temporale
% C sta per COMPONENTE ed il numero davanti è il riferimento a
% quale componente della decomposizione Adomia si riferisce
C1 = -cos(t1) + 1;
C2 = (cos(t1)).^2./2 - cos(t1) + 1/2;
C3 = -(cos(t1)).^3./6 + (cos(t1)).^2./2 - cos(t1)./2 + 1/6;
C4 = (cos(t1)).^4./24 - (cos(t1)).^3./6 + (cos(t1)).^2./4 -
    cos(t1)./6 + 1/24;
C5 = -(cos(t1)).^5./120 + (cos(t1)).^4./24 - (cos(t1)).^3./12 +
```

```

        (cos(t1)).^2./12 - cos(t1)./24 + 1/120;
%-----
% laplaciano frazionario e K = K(t) = sin(t) soluzione ADM
% u,t = sin(t) u,F      con   1 < F <= 2
% u(x,0) = x^6
alpha = 6;
%-----

F1 = 1.2;
ufraz_sint_F1 = x1.^alpha + C1*gamma(alpha+1)/gamma(alpha+1-
F1)*x1.^(alpha-F1)+C2*gamma(alpha+1)/gamma(alpha+1-
2*F1)*x1.^(alpha-2*F1)+C3*gamma(alpha+1)/gamma(alpha+1-
3*F1)*x1.^(alpha-3*F1)+C4*gamma(alpha+1)/gamma(alpha+1-
4*F1)*x1.^(alpha-4*F1)+C5*gamma(alpha+1)/gamma(alpha+1-
5*F1)*x1.^(alpha-5*F1);

F2 = 1.4;
ufraz_sint_F2 = x1.^alpha + C1*gamma(alpha+1)/gamma(alpha+1-
F2)*x1.^(alpha-F2)+C2*gamma(alpha+1)/gamma(alpha+1-
2*F2)*x1.^(alpha-2*F2)+C3*gamma(alpha+1)/gamma(alpha+1-
3*F2)*x1.^(alpha-3*F2)+C4*gamma(alpha+1)/gamma(alpha+1-
4*F2)*x1.^(alpha-4*F2);

F3 = 1.6;
ufraz_sint_F3 = x1.^alpha + C1*gamma(alpha+1)/gamma(alpha+1-
F3)*x1.^(alpha-F3)+C2*gamma(alpha+1)/gamma(alpha+1-
2*F3)*x1.^(alpha-2*F3)+C3*gamma(alpha+1)/gamma(alpha+1-
3*F3)*x1.^(alpha-3*F3);

F4 = 1.8;
ufraz_sint_F4 = x1.^alpha + C1*gamma(alpha+1)/gamma(alpha+1-
F4)*x1.^(alpha-F4)+C2*gamma(alpha+1)/gamma(alpha+1-
2*F4)*x1.^(alpha-2*F4)+C3*gamma(alpha+1)/gamma(alpha+1-
3*F4)*x1.^(alpha-3*F4);

```

7.4.2.2 S-FRDE con condizioni iniziali $u(x, 0) = \sin(x)$

Ripercorrendo la procedura ADM si giunge al seguente termine generale

$$\begin{aligned}
 u_n(x, t) &= L_t^{-1}(e^t) D^F u_{n-1}(x, t) = \\
 &= \frac{1}{\text{Diag}[\mathbb{A} \otimes (\text{Ref } \mathbb{A})^T]} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} +1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{ij} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (-1)^{j+1} \end{pmatrix}}_{[n+1] \times [n+1]} \cdot \begin{pmatrix} e^{n \cdot t} \\ e^{(n-1) \cdot t} \\ e^{(n-2) \cdot t} \\ \vdots \\ e^t \\ 1 \end{pmatrix} \quad (7.37) \\
 &\cdot \sin\left(x + \frac{nF \cdot \pi}{2}\right)
 \end{aligned}$$

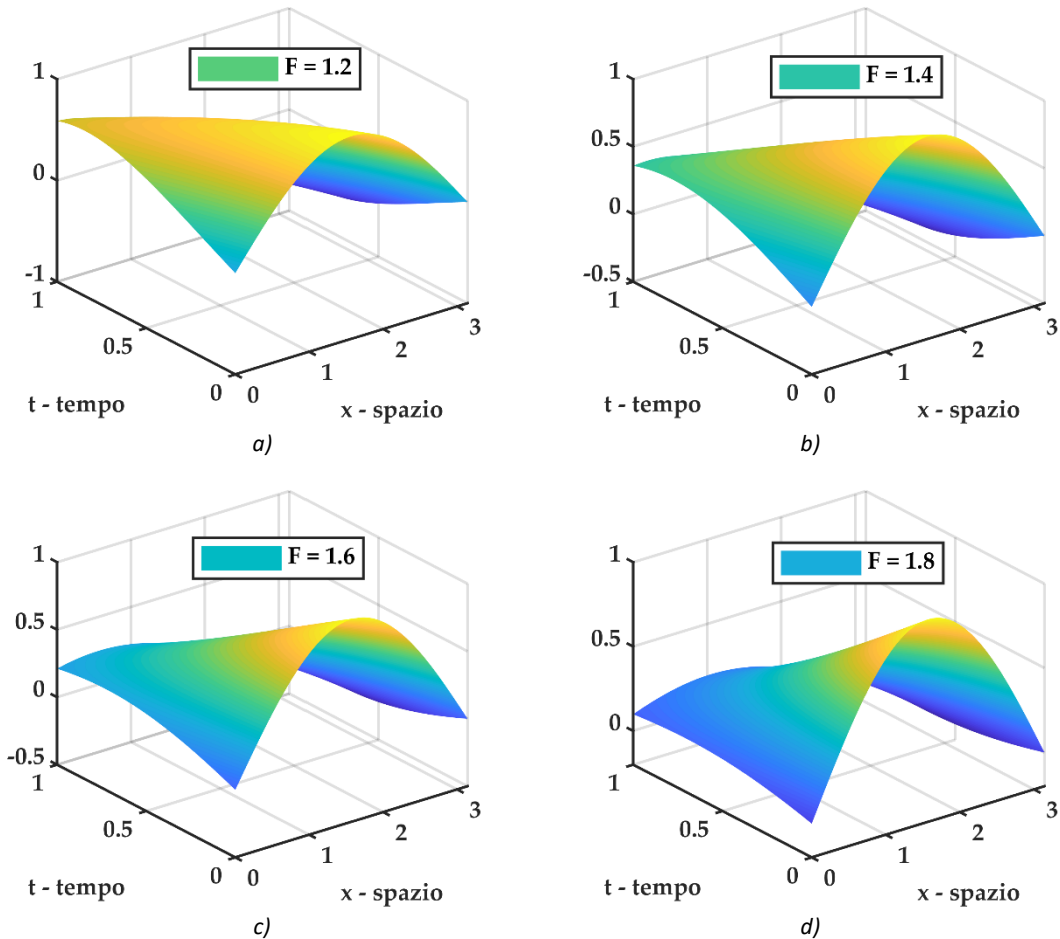


Figura 7-20 plot 3D della soluzione $u(x, t)$ del problema differenziale frazionario S-FRDE con $u(x, 0) = \sin(x)$ e coefficiente di diffusione funzione del tempo $K = e^t$ per diversi valori dell'ordine di derivazione frazionario. a) soluzione S-FRDE per $F = 1.2$, b) soluzione S-FRDE per $F = 1.4$, c) soluzione S-FRDE per $F = 1.6$, d) soluzione S-FRDE per $F = 1.8$.

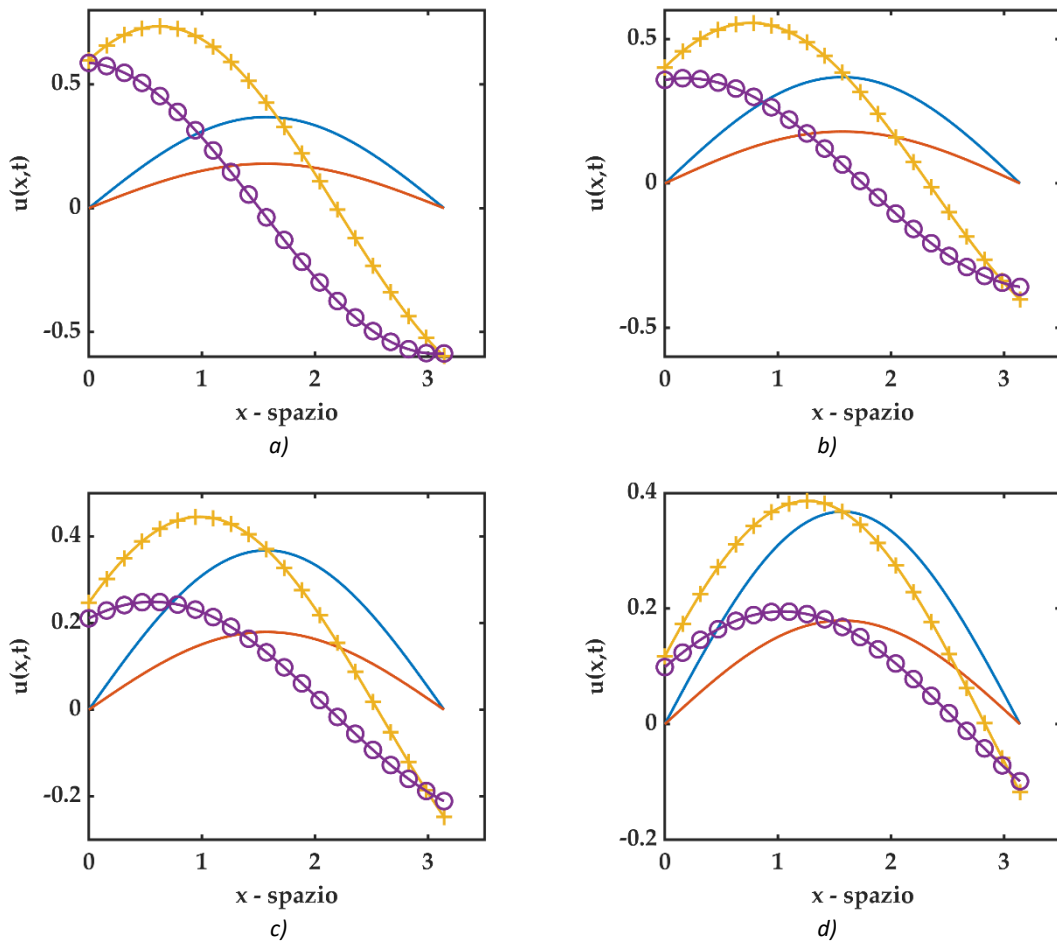


Figura 7-21 plot 2D di confronto fra soluzioni del problema differenziale frazionario S-FRDE con $u(x, 0) = \sin(x)$ e $t = 1.0$ dove (– linea continua - blu) rappresenta la soluzione standard DE con Laplaciano standard e $K = \text{cost}$, (– linea continua - rosso) rappresenta la soluzione standard DE con Laplaciano standard e $K = e^t$ (+ croce - giallo) rappresenta la soluzione S-FRDE con Laplaciano frazionario di ordine F e $K = \text{cost}$, (⊙ cerchio - viola) rappresenta la soluzione S-FRDE con Laplaciano frazionario di ordine F e $K = e^t$. a) soluzione S-FRDE per $F = 1.2$, b) soluzione S-FRDE per $F = 1.4$, c) soluzione S-FRDE per $F = 1.6$, d) soluzione S-FRDE per $F = 1.8$.

7.4.2.2.1 Algoritmo Matlab

Di seguito viene riportato un estratto dello script Matlab utilizzato per i plot sopra riportati, soffermandosi sul calcolo della soluzione inerente il problema differenziale S-FRDE.

```

function [f_et,Coeff] = Cr_et(n,x1,t1)
% function per il calcolo delle componenti dell' r-esimo
% coefficiente di integrazione temporale nella serie ADM
a = n;
b = 0;
c = n;
A = zeros(1,n+1);
RefA = zeros(1,n+1);
f_et = zeros(length(t1),n+1);

% ciclo per ricreare il vettore A = [n! (n-1)! ... 2! 1! 0!]
for i = 1:(n+1)
    A(i) = factorial(a);

```

```

    a = n-i;
end
% ciclo per ricreare il vettore Ref A = [0! 1! ... (n-2)! (n-1)!
n!]'
for i = 1:(n+1)
    RefA(i) = factorial(b);
    b = i;
end
Tensor_product = A'*RefA;
Coeff = diag(Tensor_product);
% con questo ciclo si genera una matrice dove nelle colonne ci
sono i valori di e^(nt)
% f_et(:,j) sono i valori di e^((n+1-j)*t)->f_et(:,1) = e^(nt)
%                                           f_et(:,2) = e^((n-1)t)
%                                           f_et(:,n) = e^(t)
%                                           f_et(:,n+1) = e^(0t)
for j = 1:(n+1)
    f_et(:,j) = (-1)^(j+1).*exp(c*t1);
    c = n-j;
end
end

```

```

% calcolo delle componenti dell'integrazione temporale
% C sta per COMPONENTE ed il numero davanti è il riferimento a
% quale componente della decomposizione Adomia si riferisce
% Costruisco la matrice C dove C(:,k) è Ck, cioè il k-esimo
% coefficiente di integrazione temporale nella serie ADM

```

```

n = 30; % numero di componenti serie ADM

```

```

% inizializzazione delle variabili
C = zeros(length(t1),n);
Cr = zeros(length(t1),1);

```

```

for r = 1:n
    % function per il calcolo delle componenti dell' r-esimo
    % coefficiente di integrazione temporale nella serie ADM
    [f_et,Coeff] = Cr_et(r,x1,t1);

    for l = 1:r+1
        Cr = Cr + f_et(:,l)./Coeff(l);
    end
    C(:,r) = Cr;
    Cr = zeros(length(t1),1);
end

```

```

%-----
% soluzione per laplaciano frazionario e  $K = e^t$ 
%  $u_t = e^t u, F$  con  $1 < F \leq 2$ 
%  $u(x,0) = \sin(x)$ 

```

```

N1 = n;
ufraz_et_F1 = zeros(length(t1),length(x1));
for F1 = 1.2:0.2:2.0
for n = 0 : N1
    if n == 0
        ufraz_et_F1 = ones(length(t1),1)*sin(x1);

```

```
    else
      ufraz_et_F1 = ufraz_et_F1 + C(:,n)*sin(x1+n*F1*pi/2);
    end
  end
end
end
```

7.4.2.3 S-FRDE con condizioni iniziali $u(x, 0) = \cos(x)$

Ripercorrendo la procedura ADM si giunge al seguente termine generale

$$\begin{aligned}
 u_n(x, t) &= L_t^{-1}(e^t) D^F u_{n-1}(x, t) = \\
 &= \frac{1}{\text{Diag}[\mathbb{A} \otimes (\text{Ref } \mathbb{A})^T]} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} +1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{ij} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (-1)^{j+1} \end{pmatrix}}_{[n+1] \times [n+1]} \cdot \begin{pmatrix} e^{n \cdot t} \\ e^{(n-1) \cdot t} \\ e^{(n-2) \cdot t} \\ \vdots \\ e^t \\ 1 \end{pmatrix} \quad (7.38) \\
 &\cdot \cos\left(x + \frac{nF \cdot \pi}{2}\right)
 \end{aligned}$$

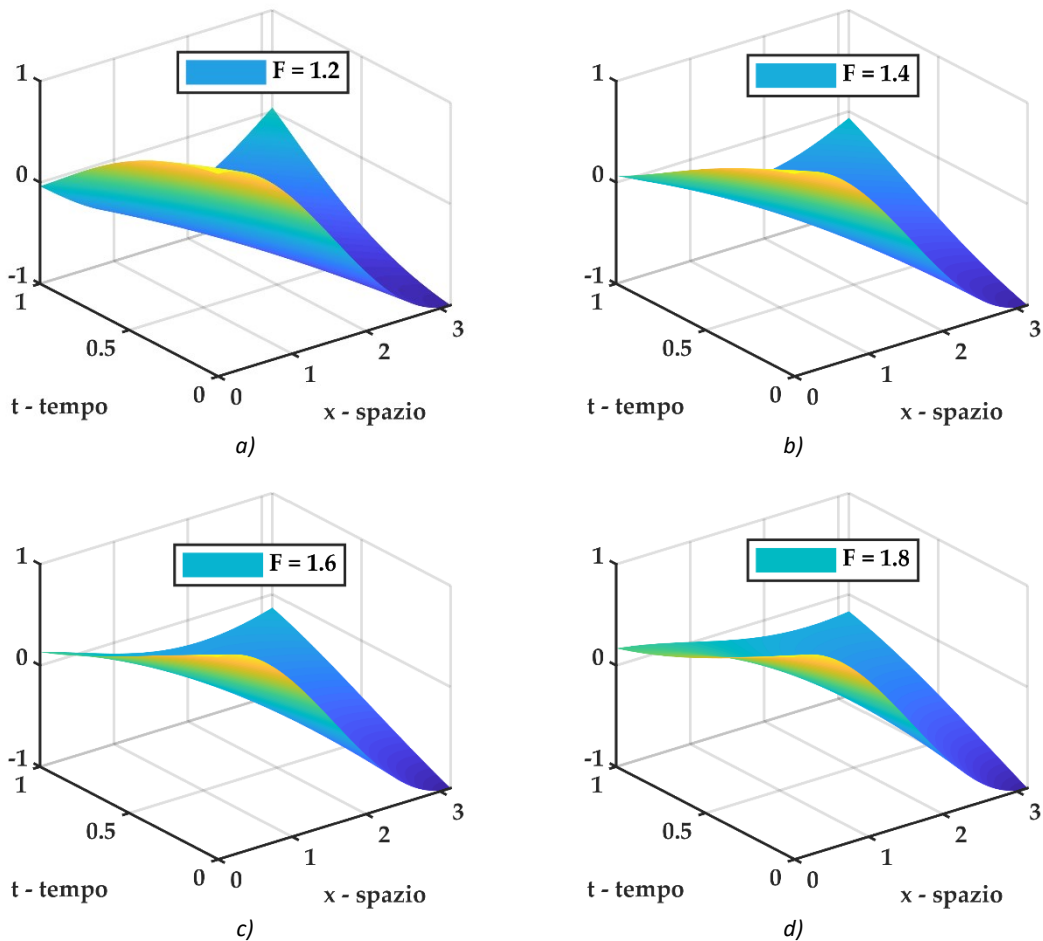


Figura 7-22 plot 3D della soluzione $u(x, t)$ del problema differenziale frazionario S-FRDE con $u(x, 0) = \cos(x)$ e coefficiente di diffusione funzione del tempo $K = e^t$ per diversi valori dell'ordine di derivazione frazionario. a) soluzione S-FRDE per $F = 1.2$, b) soluzione S-FRDE per $F = 1.4$, c) soluzione S-FRDE per $F = 1.6$, d) soluzione S-FRDE per $F = 1.8$.

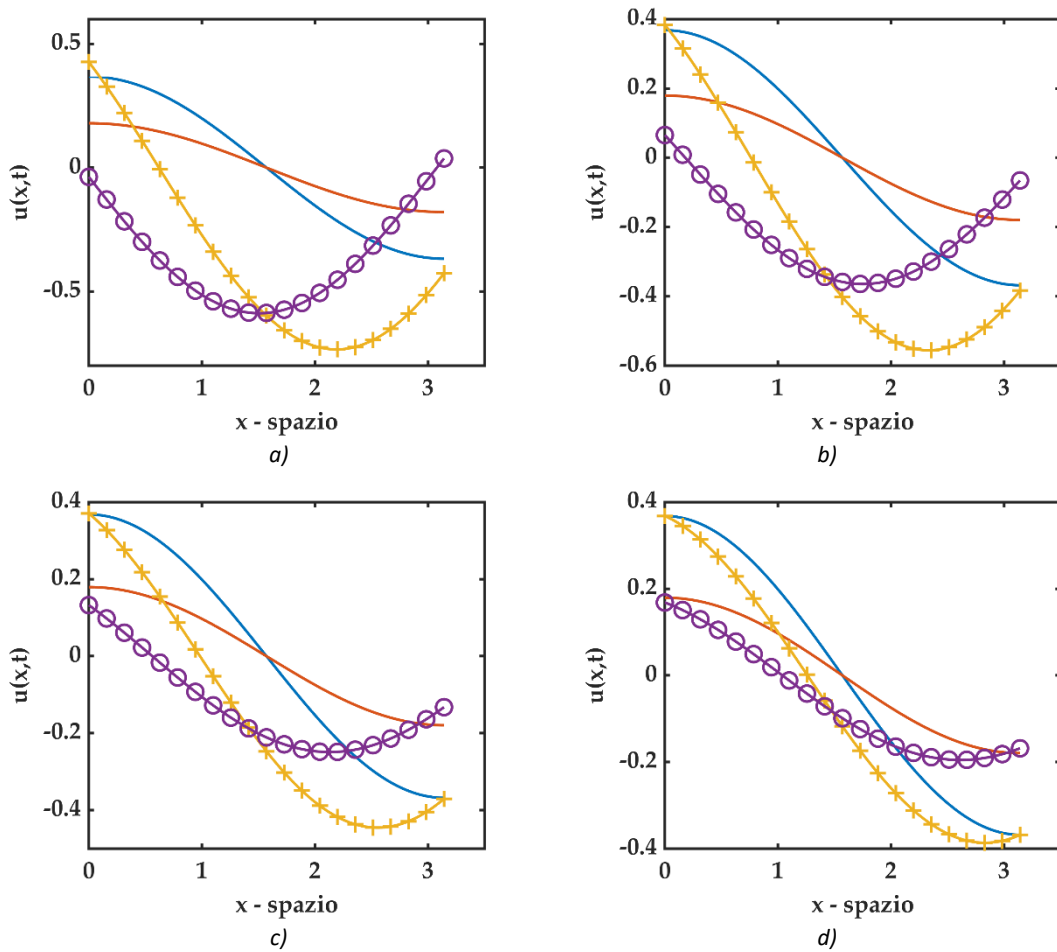


Figura 7-23 plot 2D di confronto fra soluzioni del problema differenziale frazionario S-FRDE con $u(x, 0) = \cos(x)$ e $t = 1.0$ dove (– linea continua - blu) rappresenta la soluzione standard DE con Laplaciano standard e $K = \cos t$, (– linea continua - rosso) rappresenta la soluzione standard DE con Laplaciano standard e $K = e^t$ (+ croce - giallo) rappresenta la soluzione S-FRDE con Laplaciano frazionario di ordine F e $K = \cos t$, (⊙ cerchio - viola) rappresenta la soluzione S-FRDE con Laplaciano frazionario di ordine F e $K = e^t$. a) soluzione S-FRDE per $F = 1.2$, b) soluzione S-FRDE per $F = 1.4$, c) soluzione S-FRDE per $F = 1.6$, d) soluzione S-FRDE per $F = 1.8$.

7.4.2.3.1 Algoritmo Matlab

Di seguito viene riportato un estratto dello script Matlab utilizzato per i plot sopra riportati, soffermandosi sul calcolo della soluzione inerente il problema differenziale S-FRDE. Il simbolo (:) sta ad indicare che la parte di codice precedente è esattamente la stessa di quella riportata al paragrafo 7.4.2.2 per il problema S-FRDE con $u(x, 0) = \sin(x)$, essendo adibita al calcolo delle componenti della matrice \mathbf{C} per l'integrazione temporale in ADM che non si modifica al variare delle condizioni al contorno.

```

:
%-----
% soluzione per laplaciano frazionario e K = e^(t)
% u,t = e^(t) u,F con 1 < F <= 2
% u(x,0) = cos(x)

N1 = n;
for F1 = 1.2:0.2:2.0
ufraz_et F1 = zeros(length(t1),length(x1));

```

```
for n = 0 : N1
    if n == 0
        ufraz_et_F1 = ones(length(t1),1)*cos(x1);
    else
        ufraz_et_F1 = ufraz_et_F1 + C(:,n)*cos(x1+n*F1*pi/2);
    end
end
end
```

7.4.2.4 S-FRDE con condizioni iniziali $u(x, 0) = e^{ax}$ $Re(a) \geq 0$

Ripercorrendo la procedura ADM si giunge al seguente termine generale

$$u_n(x, t) = L_t^{-1}(e^t) D^F u_{n-1}(x, t) =$$

$$= \frac{1}{Diag[A \otimes (RefA)^T]} \cdot \begin{matrix} & & & & & j \\ \begin{pmatrix} +1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{ij} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (-1)^{j+1} \end{pmatrix} & \cdot & \begin{pmatrix} e^{n \cdot t} \\ e^{(n-1) \cdot t} \\ e^{(n-2) \cdot t} \\ \vdots \\ e^t \\ 1 \end{pmatrix} \end{matrix} \quad (7.39)$$

$\cdot a^{nF} \cdot e^{ax}$ $[n+1] \times [n+1]$

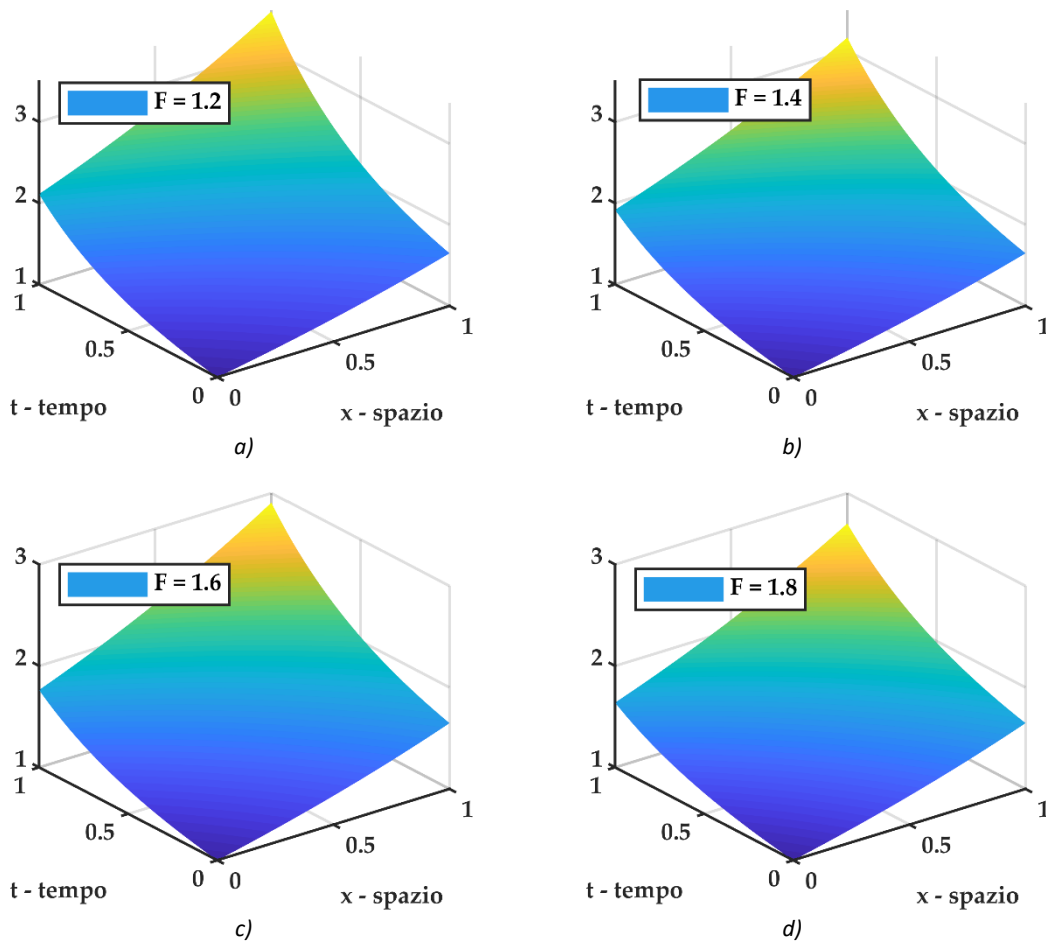


Figura 7-24 plot 3D della soluzione $u(x, t)$ del problema differenziale frazionario S-FRDE con $u(x, 0) = e^{ax}$ con $a = 0.50$ e coefficiente di diffusione funzione del tempo $K = e^t$ per diversi valori dell'ordine di derivazione frazionario. a) soluzione S-FRDE per $F = 1.2$, b) soluzione S-FRDE per $F = 1.4$, c) soluzione S-FRDE per $F = 1.6$, d) soluzione S-FRDE per $F = 1.8$.

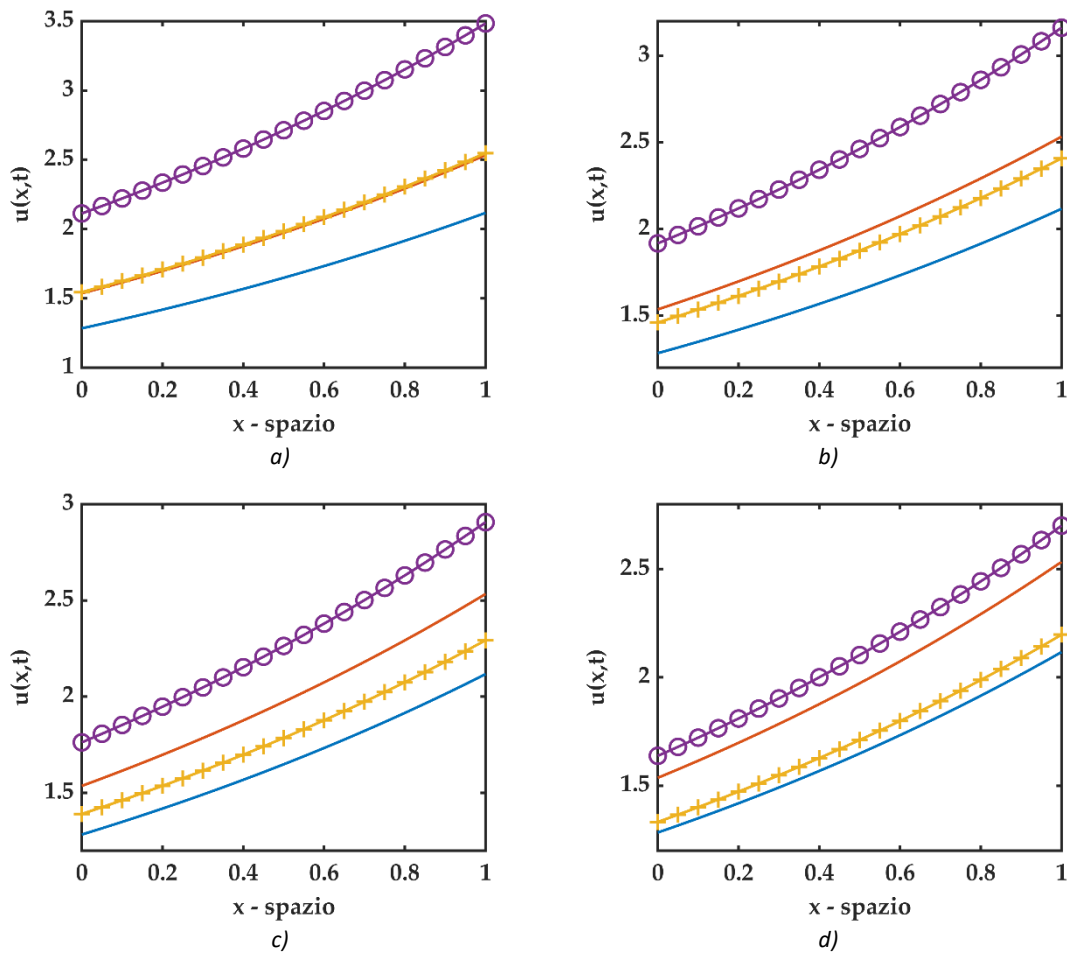


Figura 7-25 plot 2D di confronto fra soluzioni del problema differenziale frazionario S-FRDE con $u(x, 0) = e^{ax}$ e $t = 1.0$ dove (– linea continua - blu) rappresenta la soluzione standard DE con Laplaciano standard e $K = \text{cost}$, (– linea continua - rosso) rappresenta la soluzione standard DE con Laplaciano standard e $K = e^t$, (+ croce - giallo) rappresenta la soluzione S-FRDE con Laplaciano frazionario di ordine F e $K = \text{cost}$, (⊙ cerchio - viola) rappresenta la soluzione S-FRDE con Laplaciano frazionario di ordine F e $K = e^t$. a) soluzione S-FRDE per $F = 1.2$, b) soluzione S-FRDE per $F = 1.4$, c) soluzione S-FRDE per $F = 1.6$, d) soluzione S-FRDE per $F = 1.8$.

7.4.2.4.1 Algoritmo Matlab

Di seguito viene riportato un estratto dello script Matlab utilizzato per i plot sopra riportati, soffermandosi sul calcolo della soluzione inerente il problema differenziale S-FRDE. Il simbolo (:) sta ad indicare che la parte di codice precedente è esattamente la stessa di quella riportata al paragrafo 7.4.2.2 per il problema S-FRDE con $u(x, 0) = \sin(x)$, essendo adibita al calcolo delle componenti della matrice \mathbf{C} per l'integrazione temporale in ADM che non si modifica al variare delle condizioni al contorno.

```

:
%-----
% soluzione per laplaciano frazionario e K = e^(t)
% u,t = e^(t) u,F      con  1 < F <= 2
% u(x,0) = e^(ax)

N1 = n;
for F1 = 1.2:0.2:2.0
ufraz_et_F1 = zeros(length(t1), length(x1));

```

```
for n = 0 : N1
    if n == 0
        ufraz_et_F1 = ones(length(t1),1)*exp(a*x1);
    else
        ufraz_et_F1 = ufraz_et_F1 + C(:,n)*a^(F1*n)*exp(a*x1);
    end
end
end
```

7.4.3 $K = K(t) = \sin(t)$
7.4.3.1 S-FRDE con condizioni iniziali $u(x, 0) = x^\alpha$

Si considera ora il seguente problema differenziale

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \sin(t) \cdot \frac{\partial^F u}{\partial x^F} \\ u(x, 0) = x^\alpha \end{cases} \quad 1 < F \leq 2 \quad (7.40)$$

come per il problema precedente, si considera la derivata di Caputo con punto base $a = 0$.

Si ottengono le seguenti componenti

n	u_n
0	$u_0(x, t) = x^\alpha = f(x)$
1	$\begin{aligned} u_1(x, t) &= L_t^{-1}(\sin(t)) D^F u_0(x, t) = \int_0^t \sin(t) dt \cdot D^F f(x) \\ &= -\cos(t) \Big _0^t \cdot \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\Gamma(\alpha + 1 - F)} \cdot x^{\alpha - F} \\ &= (-\cos(t) + 1) \cdot \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\Gamma(\alpha + 1 - F)} \cdot x^{\alpha - F} \\ &= \left(-\frac{\cos(t)}{0! 1!} + \frac{1}{0! 1!} \right) \cdot \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\Gamma(\alpha + 1 - F)} \cdot x^{\alpha - F} \end{aligned}$
2	$\begin{aligned} u_2(x, t) &= L_t^{-1}(\sin(t)) D^F u_1(x, t) \\ &= L_t^{-1} \left[(\sin(t)) D^F \left\{ (-\cos(t) + 1) \cdot \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\Gamma(\alpha + 1 - F)} \cdot x^{\alpha - F} \right\} \right] \\ &= \int_0^t (-\sin(t) \cos(t) + \sin(t)) dt \cdot \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\Gamma(\alpha + 1 - F)} D^F \{x^{\alpha - F}\} \\ &= \left(\frac{\cos^2(t)}{2} - \cos(t) \right) \Big _0^t \cdot \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\Gamma(\alpha + 1 - F)} \cdot \frac{\Gamma(\alpha + 1 - F)}{\Gamma(\alpha + 1 - 2F)} \cdot x^{\alpha - 2F} \\ &= \left(\frac{\cos^2(t)}{2} - \cos(t) + \frac{1}{2} \right) \cdot \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\Gamma(\alpha + 1 - 2F)} \cdot x^{\alpha - 2F} \\ &= \left(\frac{\cos^2(t)}{0! 2!} - \frac{\cos(t)}{1! 1!} + \frac{1}{2! 0!} \right) \cdot \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\Gamma(\alpha + 1 - 2F)} \cdot x^{\alpha - 2F} \end{aligned}$

3	$ \begin{aligned} u_3(x, t) &= L_t^{-1}(\sin(t))D^F u_2(x, t) \\ &= L_t^{-1} \left[(\sin(t))D^F \left\{ \left(\frac{\cos^2(t)}{2} - \cos(t) + \frac{1}{2} \right) \cdot \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\Gamma(\alpha + 1 - 2F)} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \cdot x^{\alpha - 2F} \right\} \right] \\ &= \int_0^t \left(\frac{\sin(t) \cos^2(t)}{2} - \sin(t) \cos(t) + \frac{\sin(t)}{2} \right) dt \\ &\quad \cdot \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\Gamma(\alpha + 1 - 2F)} D^F \{x^{\alpha - 2F}\} \\ &= \left(-\frac{\cos^3(t)}{6} + \frac{\cos^2(t)}{2} - \frac{\cos(t)}{2} \right) \Big _0^t \cdot \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\Gamma(\alpha + 1 - 2F)} \\ &\quad \cdot \frac{\Gamma(\alpha + 1 - 2F)}{\Gamma(\alpha + 1 - 3F)} \cdot x^{\alpha - 3F} \\ &= \left(-\frac{\cos^3(t)}{6} + \frac{\cos^2(t)}{2} - \frac{\cos(t)}{2} + \frac{1}{6} \right) \cdot \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\Gamma(\alpha + 1 - 3F)} \cdot x^{\alpha - 3F} \\ &= \left(-\frac{\cos^3(t)}{0!3!} + \frac{\cos^2(t)}{1!2!} - \frac{\cos(t)}{2!1!} + \frac{1}{3!0!} \right) \cdot \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\Gamma(\alpha + 1 - 3F)} \\ &\quad \cdot x^{\alpha - 3F} \end{aligned} $
4	$ \begin{aligned} u_4(x, t) &= L_t^{-1}(\sin(t))D^F u_3(x, t) \\ &= L_t^{-1} \left[(\sin(t))D^F \left\{ \left(-\frac{\cos^3(t)}{6} + \frac{\cos^2(t)}{2} - \frac{\cos(t)}{2} + \frac{1}{6} \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \cdot \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\Gamma(\alpha + 1 - 3F)} \cdot x^{\alpha - 3F} \right\} \right] \\ &= \int_0^t \left(-\frac{\sin(t) \cos^3(t)}{6} + \frac{\sin(t) \cos^2(t)}{2} - \frac{\sin(t) \cos(t)}{2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\sin(t)}{6} \right) dt \cdot \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\Gamma(\alpha + 1 - 3F)} D^F \{x^{\alpha - 3F}\} = \\ &\quad \left(\frac{\cos^4(t)}{24} - \frac{\cos^3(t)}{6} + \frac{\cos^2(t)}{4} - \frac{\cos(t)}{6} \right) \Big _0^t \cdot \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\Gamma(\alpha + 1 - 3F)} \cdot \frac{\Gamma(\alpha + 1 - 3F)}{\Gamma(\alpha + 1 - 4F)} \\ &\quad \cdot x^{\alpha - 4F} \\ &= \left(\frac{\cos^4(t)}{24} - \frac{\cos^3(t)}{6} + \frac{\cos^2(t)}{4} - \frac{\cos(t)}{6} + \frac{1}{24} \right) \\ &\quad \cdot \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\Gamma(\alpha + 1 - 4F)} \cdot x^{\alpha - 4F} \\ &= \left(\frac{\cos^4(t)}{0!4!} - \frac{\cos^3(t)}{1!3!} + \frac{\cos^2(t)}{2!2!} - \frac{\cos(t)}{3!1!} + \frac{1}{4!0!} \right) \\ &\quad \cdot \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\Gamma(\alpha + 1 - 4F)} \cdot x^{\alpha - 4F} \end{aligned} $

5	$ \begin{aligned} u_5(x, t) &= L_t^{-1}(\sin(t))D^F u_4(x, t) \\ &= L_t^{-1} \left[(\sin(t))D^F \left\{ \left(\frac{\cos^4(t)}{24} - \frac{\cos^3(t)}{6} + \frac{\cos^2(t)}{4} - \frac{\cos(t)}{6} \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \left. + \frac{1}{24} \right) \cdot \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\Gamma(\alpha + 1 - 4F)} \cdot x^{\alpha - 4F} \right\} \right] \\ &= \int_0^t \left(\frac{\sin(t) \cos^4(t)}{24} - \frac{\sin(t) \cos^3(t)}{6} + \frac{\sin(t) \cos^2(t)}{4} \right. \\ &\quad \left. - \frac{\sin(t) \cos(t)}{6} + \frac{\sin(t)}{24} \right) dt \cdot \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\Gamma(\alpha + 1 - 4F)} D^F \{x^{\alpha - 4F}\} = \\ &\left(-\frac{\cos^5(t)}{120} + \frac{\cos^4(t)}{24} - \frac{\cos^3(t)}{12} + \frac{\cos^2(t)}{12} - \frac{\cos(t)}{24} \right) \Big _0^t \cdot \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\Gamma(\alpha + 1 - 4F)} \\ &\quad \cdot \frac{\Gamma(\alpha + 1 - 4F)}{\Gamma(\alpha + 1 - 5F)} \cdot x^{\alpha - 5F} \\ &= \left(-\frac{\cos^5(t)}{120} + \frac{\cos^4(t)}{24} - \frac{\cos^3(t)}{12} + \frac{\cos^2(t)}{12} - \frac{\cos(t)}{24} + \frac{1}{120} \right) \\ &\quad \cdot \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\Gamma(\alpha + 1 - 5F)} \cdot x^{\alpha - 5F} \\ &= \left(-\frac{\cos^5(t)}{0! 5!} + \frac{\cos^4(t)}{1! 4!} - \frac{\cos^3(t)}{2! 3!} + \frac{\cos^2(t)}{3! 2!} - \frac{\cos(t)}{4! 1!} + \frac{1}{5! 0!} \right) \\ &\quad \cdot \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\Gamma(\alpha + 1 - 5F)} \cdot x^{\alpha - 5F} \end{aligned} $
⋮	⋮
n	$ \begin{aligned} u_n(x, t) &= L_t^{-1}(\sin(t))D^F u_{n-1}(x, t) \\ &= \frac{1}{\text{Diag}[\mathbb{A} \otimes (\text{Ref} \mathbb{A})^T]} \cdot \overbrace{\begin{pmatrix} +1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{ij} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (-1)^{j+1} \end{pmatrix}}^{[n+1] \times [n+1]} \\ &\quad \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \cos t \\ \cos^2 t \\ \vdots \\ \cos^{(n-1)} t \\ \cos^n t \end{pmatrix} \cdot \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\Gamma(\alpha + 1 - nF)} \cdot x^{\alpha - nF} \end{aligned} $ <p style="text-align: center;">Con</p> $ \mathbb{A} = [n! \quad (n-1)! \quad (n-2)! \quad \dots \quad 2! \quad 1! \quad 0!] $

$$(RefA)^T = \begin{pmatrix} 0! \\ 1! \\ 2! \\ \vdots \\ (n-2)! \\ (n-1)! \\ n! \end{pmatrix}$$

$$A \otimes (RefA)^T = \begin{pmatrix} n! 0! & n! 1! & n! 2! & \dots & n! (n-1)! & n! n! \\ (n-1)! 0! & (n-1)! 1! & (n-1)! 2! & \dots & (n-1)! (n-1)! & (n-1)! n! \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1! 0! & 1! 1! & 1! 2! & \dots & 1! (n-1)! & 1! n! \\ 0! 0! & 0! 1! & 0! 2! & \dots & 0! (n-1)! & 0! n! \end{pmatrix}$$

$$Diag[A \otimes (RefA)^T] = [n! 0! \quad (n-1)! 1! \quad (n-2)! 2! \quad \dots \quad 2! (n-2)! \quad 1! (n-1)! \quad 0! n!]$$

Viene fissato il valore di $x^\alpha = x^6$.

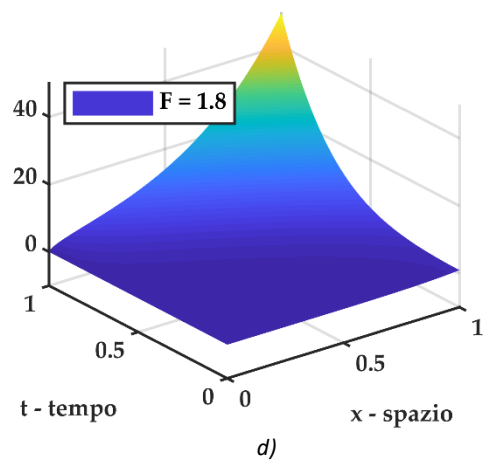
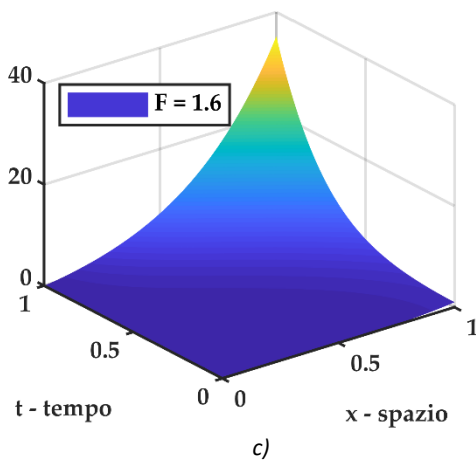
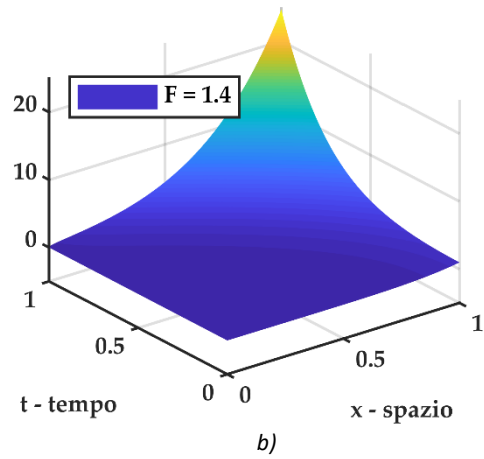
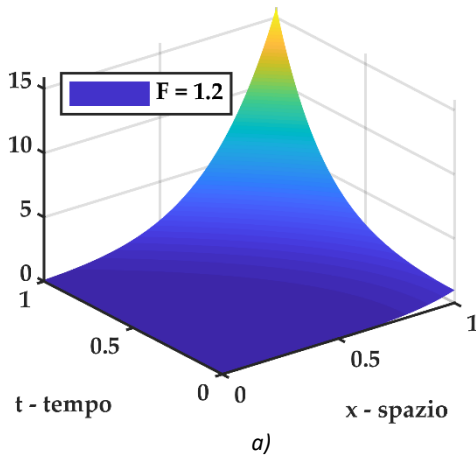


Figura 7-26 plot 3D della soluzione $u(x,t)$ del problema differenziale frazionario S-FRDE con $u(x,0) = x^\alpha$ e coefficiente di diffusione funzione del tempo $K = \sin(t)$ per diversi valori dell'ordine di derivazione frazionario. a)

soluzione S-FRDE per $F = 1.2$, b) soluzione S-FRDE per $F = 1.4$, c) soluzione S-FRDE per $F = 1.6$, d) soluzione S-FRDE per $F = 1.8$.

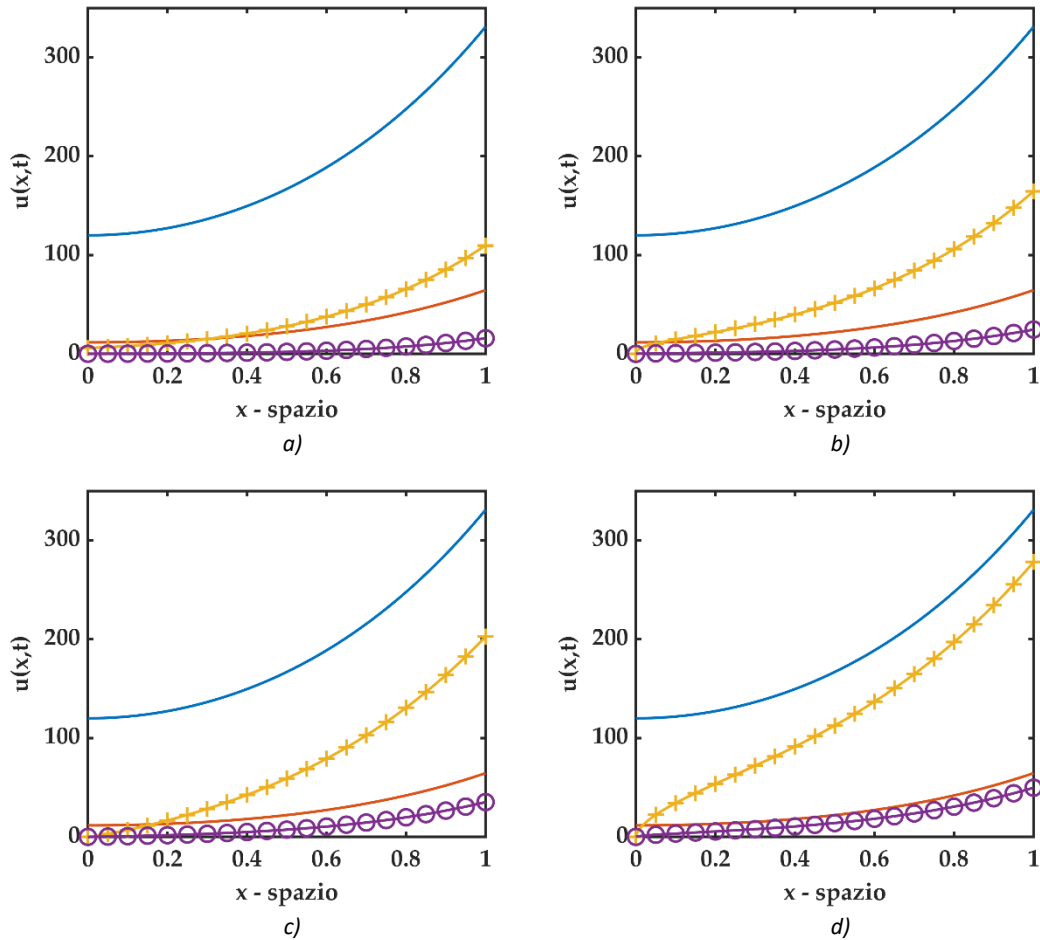


Figura 7-27 plot 2D di confronto fra soluzioni del problema differenziale frazionario S-FRDE con $u(x, 0) = x^\alpha$ e $t = 1.0$ dove (— linea continua - blu) rappresenta la soluzione standard DE con Laplaciano standard e $K = \cos t$, (— linea continua - rosso) rappresenta la soluzione standard DE con Laplaciano standard e $K = \sin(t)$, (+ croce - giallo) rappresenta la soluzione S-FRDE con Laplaciano frazionario di ordine F e $K = \cos t$, (⊙ cerchio - viola) rappresenta la soluzione S-FRDE con Laplaciano frazionario di ordine F e $K = \sin(t)$. a) soluzione S-FRDE per $F = 1.2$, b) soluzione S-FRDE per $F = 1.4$, c) soluzione S-FRDE per $F = 1.6$, d) soluzione S-FRDE per $F = 1.8$.

7.4.3.1.1 Algoritmo Matlab

Di seguito viene riportato un estratto dello script Matlab utilizzato per i plot sopra riportati, soffermandosi sul calcolo della soluzione inerente il problema differenziale S-FRDE.

```

% calcolo delle componenti dell'integrazione temporale
% C sta per COMPONENTE ed il numero davanti è il riferimento a
% quale componente della decomposizione Adomia si riferisce
C1 = -cos(t1) + 1;
C2 = (cos(t1)).^2./2 - cos(t1) + 1/2;
C3 = -(cos(t1)).^3./6 + (cos(t1)).^2./2 - cos(t1)./2 + 1/6;
C4 = (cos(t1)).^4./24 - (cos(t1)).^3./6 + (cos(t1)).^2./4 -
    cos(t1)./6 + 1/24;
C5 = -(cos(t1)).^5./120 + (cos(t1)).^4./24 - (cos(t1)).^3./12 +
    (cos(t1)).^2./12 - cos(t1)./24 + 1/120;
    
```

```

%-----
% laplaciano frazionario e K = K(t) = sin(t) soluzione ADM
% u,t = sin(t) u,F con 1 < F <= 2
% u(x,0) = x^6
alpha = 6;
%-----

F1 = 1.2;
ufraz_sint_F1 = x1.^alpha + C1*gamma(alpha+1)/gamma(alpha+1-
F1)*x1.^(alpha-F1)+C2*gamma(alpha+1)/gamma(alpha+1-
2*F1)*x1.^(alpha-2*F1)+C3*gamma(alpha+1)/gamma(alpha+1-
3*F1)*x1.^(alpha-3*F1)+C4*gamma(alpha+1)/gamma(alpha+1-
4*F1)*x1.^(alpha-4*F1)+C5*gamma(alpha+1)/gamma(alpha+1-
5*F1)*x1.^(alpha-5*F1);

F2 = 1.4;
ufraz_sint_F2 = x1.^alpha + C1*gamma(alpha+1)/gamma(alpha+1-
F2)*x1.^(alpha-F2)+C2*gamma(alpha+1)/gamma(alpha+1-
2*F2)*x1.^(alpha-2*F2)+C3*gamma(alpha+1)/gamma(alpha+1-
3*F2)*x1.^(alpha-3*F2)+C4*gamma(alpha+1)/gamma(alpha+1-
4*F2)*x1.^(alpha-4*F2);

F3 = 1.6;
ufraz_sint_F3 = x1.^alpha + C1*gamma(alpha+1)/gamma(alpha+1-
F3)*x1.^(alpha-F3)+C2*gamma(alpha+1)/gamma(alpha+1-
2*F3)*x1.^(alpha-2*F3)+C3*gamma(alpha+1)/gamma(alpha+1-
3*F3)*x1.^(alpha-3*F3);

F4 = 1.8;
ufraz_sint_F4 = x1.^alpha + C1*gamma(alpha+1)/gamma(alpha+1-
F4)*x1.^(alpha-F4)+C2*gamma(alpha+1)/gamma(alpha+1-
2*F4)*x1.^(alpha-2*F4)+C3*gamma(alpha+1)/gamma(alpha+1-
3*F4)*x1.^(alpha-3*F4);

```

7.4.3.2 S-FRDE con condizioni iniziali $u(x, 0) = \sin(x)$

Ripercorrendo la procedura ADM si giunge al seguente termine generale

$$\begin{aligned}
 u_n(x, t) &= L_t^{-1}(\sin(t))D^F u_{n-1}(x, t) = \\
 &= \frac{1}{\text{Diag}[\Lambda \otimes (\text{Ref}\Lambda)^T]} \cdot \overbrace{\begin{pmatrix} +1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{ij} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (-1)^{j+1} \end{pmatrix}}^{[n+1] \times [n+1]} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \cos t \\ \cos^2 t \\ \vdots \\ \cos^{(n-1)} t \\ \cos^n t \end{pmatrix} \quad (7.41) \\
 &\cdot \sin\left(x + \frac{nF \cdot \pi}{2}\right)
 \end{aligned}$$

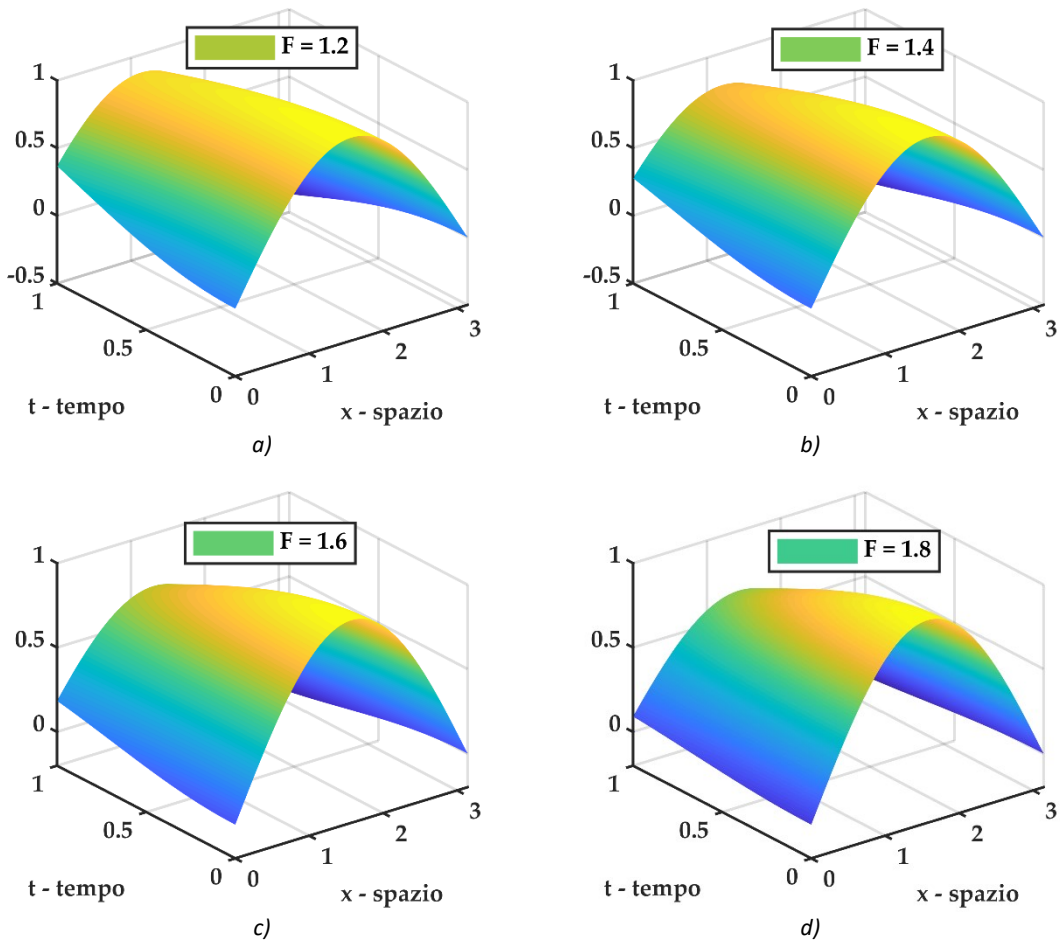


Figura 7-28 plot 3D della soluzione $u(x, t)$ del problema differenziale frazionario S-FRDE con $u(x, 0) = \sin(x)$ e coefficiente di diffusione funzione del tempo $K = \sin(t)$ per diversi valori dell'ordine di derivazione frazionario. a) soluzione S-FRDE per $F = 1.2$, b) soluzione S-FRDE per $F = 1.4$, c) soluzione S-FRDE per $F = 1.6$, d) soluzione S-FRDE per $F = 1.8$.

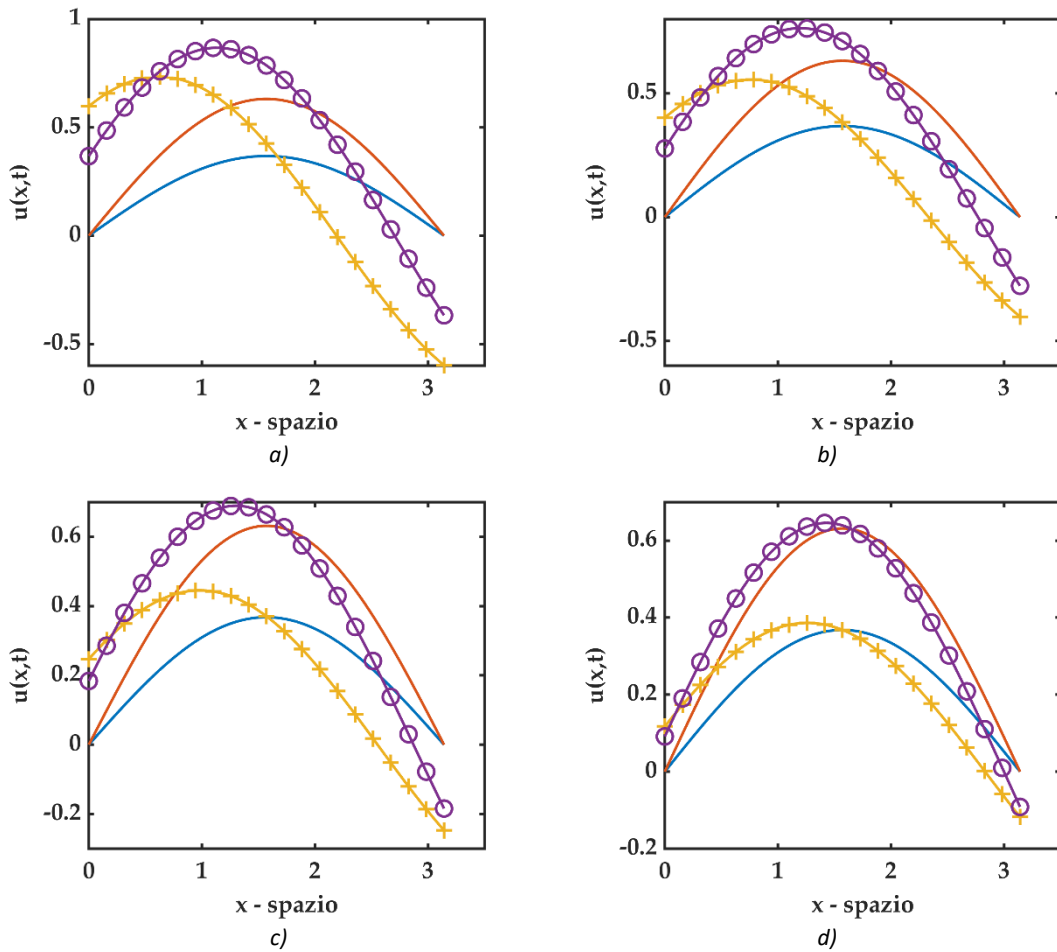


Figura 7-29 plot 2D di confronto fra soluzioni del problema differenziale frazionario S-FRDE con $u(x, 0) = \sin(x)$ e $t = 1.0$ dove (– linea continua - blu) rappresenta la soluzione standard DE con Laplaciano standard e $K = \text{cost}$, (– linea continua - rosso) rappresenta la soluzione standard DE con Laplaciano standard e $K = \sin(t)$, (+ croce - giallo) rappresenta la soluzione S-FRDE con Laplaciano frazionario di ordine F e $K = \text{cost}$, (o cerchio - viola) rappresenta la soluzione S-FRDE con Laplaciano frazionario di ordine F e $K = \sin(t)$. a) soluzione S-FRDE per $F = 1.2$, b) soluzione S-FRDE per $F = 1.4$, c) soluzione S-FRDE per $F = 1.6$, d) soluzione S-FRDE per $F = 1.8$.

7.4.3.2.1 Algoritmo Matlab

Di seguito viene riportato un estratto dello script Matlab utilizzato per i plot sopra riportati, soffermandosi sul calcolo della soluzione inerente il problema differenziale S-FRDE.

```

function [f_cost,Coeff] = Cr_cost(n,x1,t1)

% function per il calcolo delle componenti dell' r-esimo
% coefficiente di integrazione temporale nella serie ADM
a = n;
b = 0;
A = zeros(1,n+1);
RefA = zeros(1,n+1);
f_cost = zeros(length(t1),n+1);

% ciclo per ricreare il vettore A = [n! (n-1)! ... 2! 1! 0!]
for i = 1:(n+1)
    A(i) = factorial(a);

```

```

    a = n-i;
end
% ciclo per ricreare il vettore Ref A = [0! 1! ... (n-2)! (n-1)!
% n!]'
for i = 1:(n+1)
    RefA(i) = factorial(b);
    b = i;
end
Tensor_product = A'*RefA;
Coeff = diag(Tensor_product);

% con questo ciclo si genera una matrice dove nelle colonne ci
% sono i valori di [cos(t)]^(j-1)
% f_cost(:,j) sono i valori di [cos(t)]^(j-1) -->
% f_cost(:,1) = 1
% f_cost(:,2) = [cos(t)]^1
% f_cost(:,n) = [cos(t)]^(n-1)
% f_cost(:,n+1) = [cos(t)]^(n)

for j = 1:(n+1)
    f_cost(:,j) = (-1)^(j+1)*cos(t1).^ (j-1);
end
end

```

```

% calcolo delle componenti dell'integrazione temporale
% C sta per COMPONENTE ed il numero davanti è il riferimento a
% quale componente della decomposizione Adomia si riferisce
% Costruisco la matrice C dove C(:,r) è Cr, cioè l' r-esimo
% coefficiente di integrazione temporale nella serie ADM

```

```

n = 30; % numero di componenti serie ADM

```

```

% inizializzazione delle variabili

```

```

C = zeros(length(t1),n);

```

```

Cr = zeros(length(t1),1);

```

```

for r = 1:n

```

```

    % function per il calcolo delle componenti dell' r-esimo

```

```

    % coefficiente di integrazione temporale nella serie ADM

```

```

    [f_cost,Coeff] = Cr_cost(r,x1,t1);

```

```

    for l = 1:r+1

```

```

        Cr = Cr + f_cost(:,l)./Coeff(l);

```

```

    end

```

```

    C(:,r) = Cr;

```

```

    Cr = zeros(length(t1),1);

```

```

end

```

```

%-----
% soluzione per laplaciano frazionario e K = sin(t)
% u,t = sin(t) u,F con 1 < F <= 2
% u(x,0) = sin x

```

```

N1 = n;

```

```

ufraz_sin_t_F1 = zeros(length(t1),length(x1));

```

```

for F1 = 1.2:0.2:2.0

```

```

for n = 0 : N1

```

```
if n == 0
    ufraz_sin_t_F1 = ones(length(t1),1)*sin(x1);
else
    ufraz_sin_t_F1 = ufraz_sin_t_F1 + C(:,n)*sin(x1+n*F1*pi/2);
end
end
end
```

7.4.3.3 S-FRDE con condizioni iniziali $u(x, 0) = \cos(x)$

Ripercorrendo la procedura ADM si giunge al seguente termine generale

$$\begin{aligned}
 u_n(x, t) &= L_t^{-1}(\sin(t)) D^F u_{n-1}(x, t) = \\
 &= \frac{1}{\text{Diag}[\mathbb{A} \otimes (\text{Ref}\mathbb{A})^T]} \cdot \begin{matrix} j \\ \begin{pmatrix} +1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{ij} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (-1)^{j+1} \end{pmatrix} \end{matrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \cos t \\ \cos^2 t \\ \vdots \\ \cos^{(n-1)} t \\ \cos^n t \end{pmatrix} \quad (7.42) \\
 &\cdot \cos\left(x + \frac{nF \cdot \pi}{2}\right)
 \end{aligned}$$

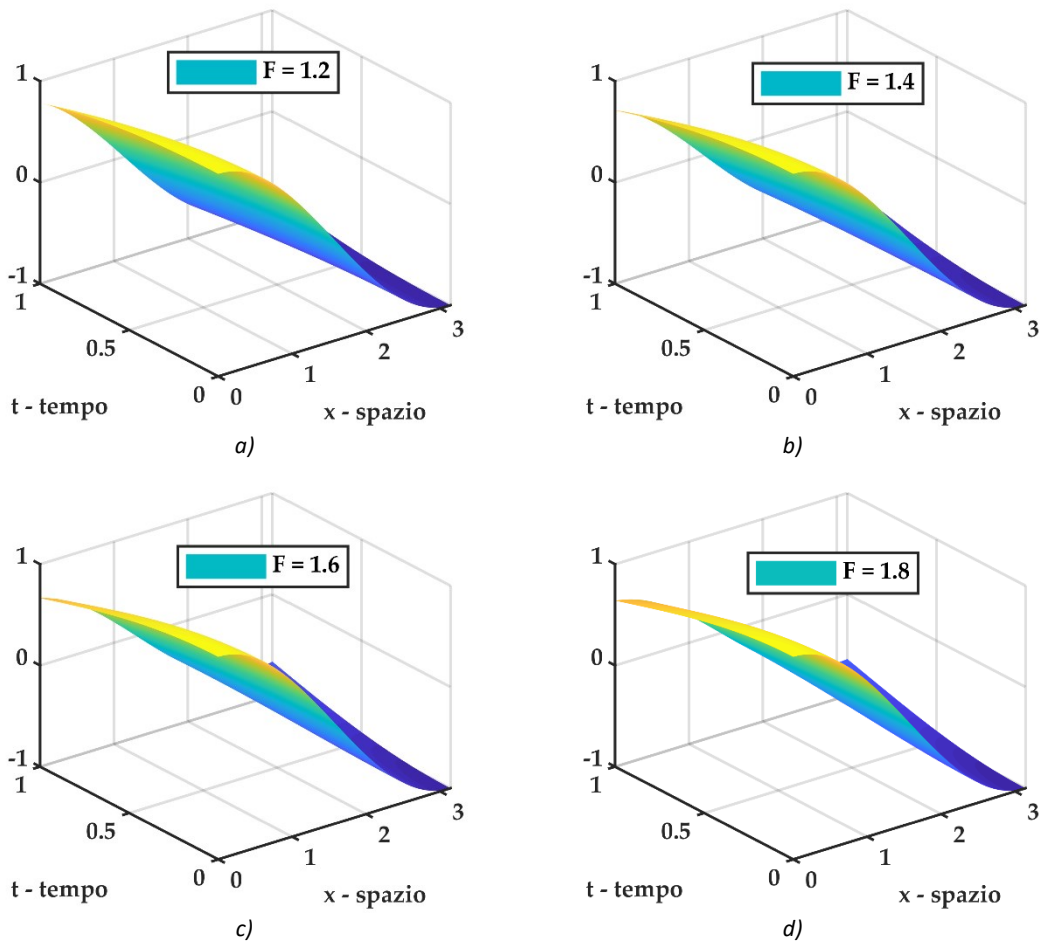


Figura 7-30 plot 3D della soluzione $u(x, t)$ del problema differenziale frazionario S-FRDE con $u(x, 0) = \cos(x)$ e coefficiente di diffusione funzione del tempo $K = \sin(t)$ per diversi valori dell'ordine di derivazione frazionario. a) soluzione S-FRDE per $F = 1.2$, b) soluzione S-FRDE per $F = 1.4$, c) soluzione S-FRDE per $F = 1.6$, d) soluzione S-FRDE per $F = 1.8$.

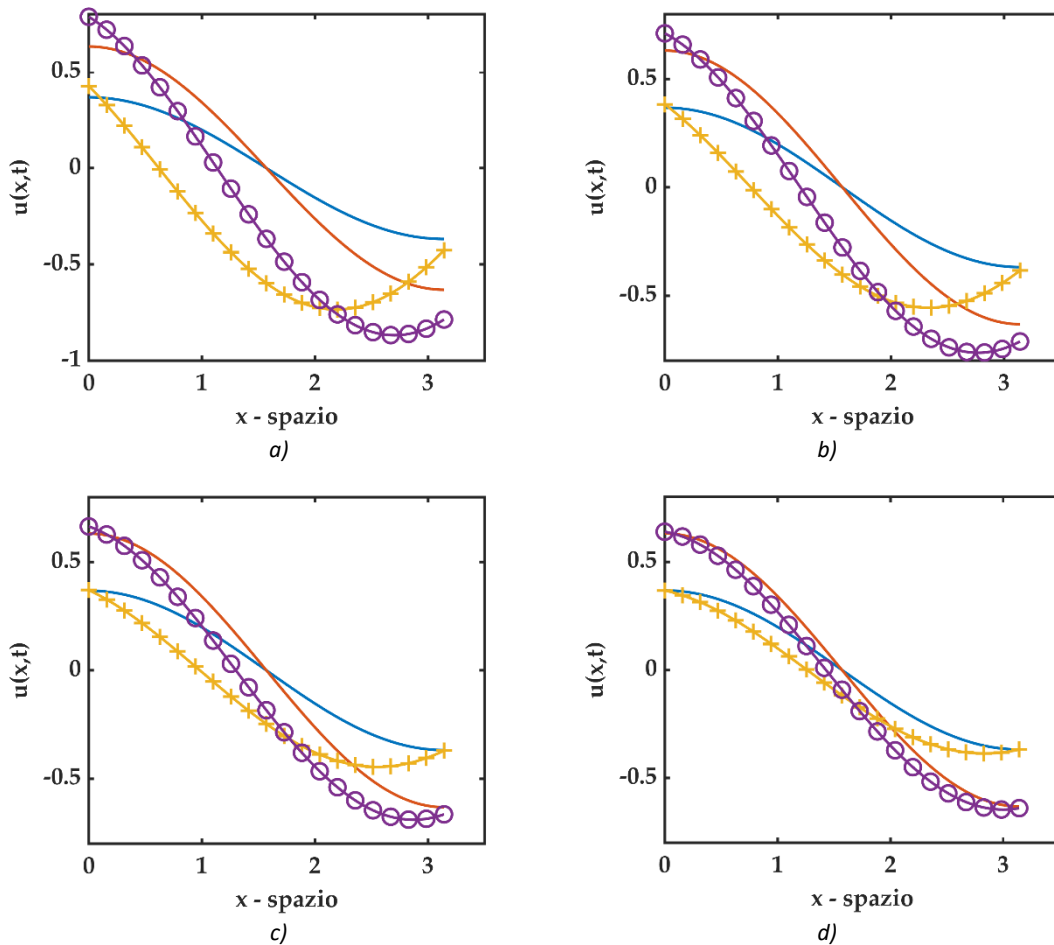


Figura 7-31 plot 2D di confronto fra soluzioni del problema differenziale frazionario S-FRDE con $u(x, 0) = \cos(x)$ e $t = 1.0$ dove (— linea continua - blu) rappresenta la soluzione standard DE con Laplaciano standard e $K = \cos(t)$, (— linea continua - rosso) rappresenta la soluzione standard DE con Laplaciano standard e $K = \sin(t)$, (+ croce - giallo) rappresenta la soluzione S-FRDE con Laplaciano frazionario di ordine F e $K = \cos(t)$, (⊙ cerchio - viola) rappresenta la soluzione S-FRDE con Laplaciano frazionario di ordine F e $K = \sin(t)$. a) soluzione S-FRDE per $F = 1.2$, b) soluzione S-FRDE per $F = 1.4$, c) soluzione S-FRDE per $F = 1.6$, d) soluzione S-FRDE per $F = 1.8$.

7.4.3.3.1 Algoritmo Matlab

Di seguito viene riportato un estratto dello script Matlab utilizzato per i plot sopra riportati, soffermandosi sul calcolo della soluzione inerente il problema differenziale S-FRDE. Il simbolo (:) sta ad indicare che la parte di codice precedente è esattamente la stessa di quella riportata al paragrafo 7.4.3.2 per il problema S-FRDE con $u(x, 0) = \sin(x)$, essendo adibita al calcolo delle componenti della matrice \mathbf{C} per l'integrazione temporale in ADM che non si modifica al variare delle condizioni al contorno.

```
:
```

```

%-----
% soluzione per laplaciano frazionario e K = sin(t)
% u,t = sin(t) u,F con 1 < F <= 2
% u(x,0) = cos(x)

N1 = n;
ufraz_sin_t_F1 = zeros(length(t1),length(x1));
for F1 = 1.2:0.2:2.0

```

```
for n = 0 : N1
    if n == 0
        ufraz_sin_t_F1 = ones(length(t1),1)*cos(x1);
    else
        ufraz_sin_t_F1 = ufraz_sin_t_F1 + C(:,n)*cos(x1+n*F1*pi/2);
    end
end
end
```

7.4.3.4 S-FRDE con condizioni iniziali $u(x, 0) = e^{ax}$ $Re(a) \geq 0$

Ripercorrendo la procedura ADM si giunge al seguente termine generale

$$u_n(x, t) = L_t^{-1}(\sin(t))D^F u_{n-1}(x, t) =$$

$$= \frac{1}{\text{Diag}[A \otimes (RefA)^T]} \cdot \begin{matrix} j \\ \begin{pmatrix} +1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{ij} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (-1)^{j+1} \end{pmatrix} \end{matrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \cos t \\ \cos^2 t \\ \vdots \\ \cos^{(n-1)} t \\ \cos^n t \end{pmatrix} a^{nF} e^{ax} \quad (7.43)$$

$[n+1] \times [n+1]$

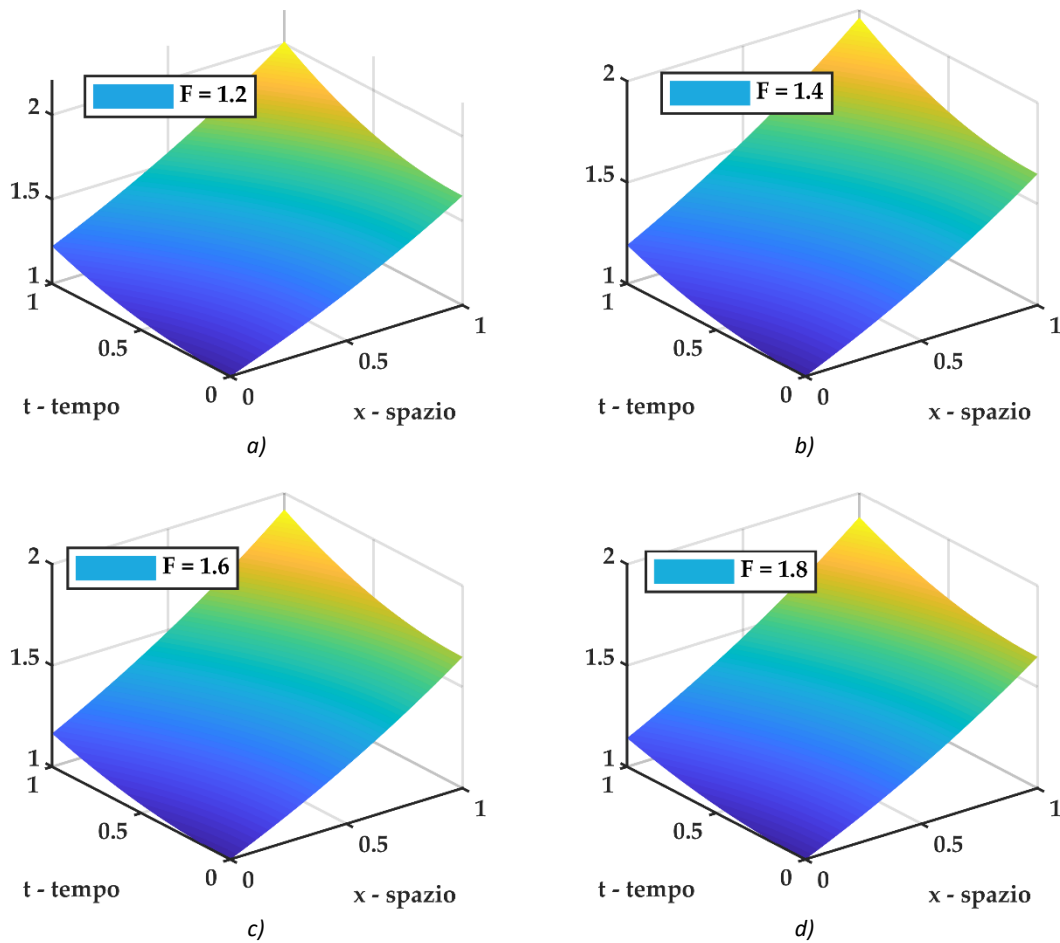


Figura 7-32 plot 3D della soluzione $u(x, t)$ del problema differenziale frazionario S-FRDE con $u(x, 0) = e^{ax}$ con $a = 0.50$ e coefficiente di diffusione funzione del tempo $K = \sin(t)$ per diversi valori dell'ordine di derivazione frazionario. a) soluzione S-FRDE per $F = 1.2$, b) soluzione S-FRDE per $F = 1.4$, c) soluzione S-FRDE per $F = 1.6$, d) soluzione S-FRDE per $F = 1.8$.

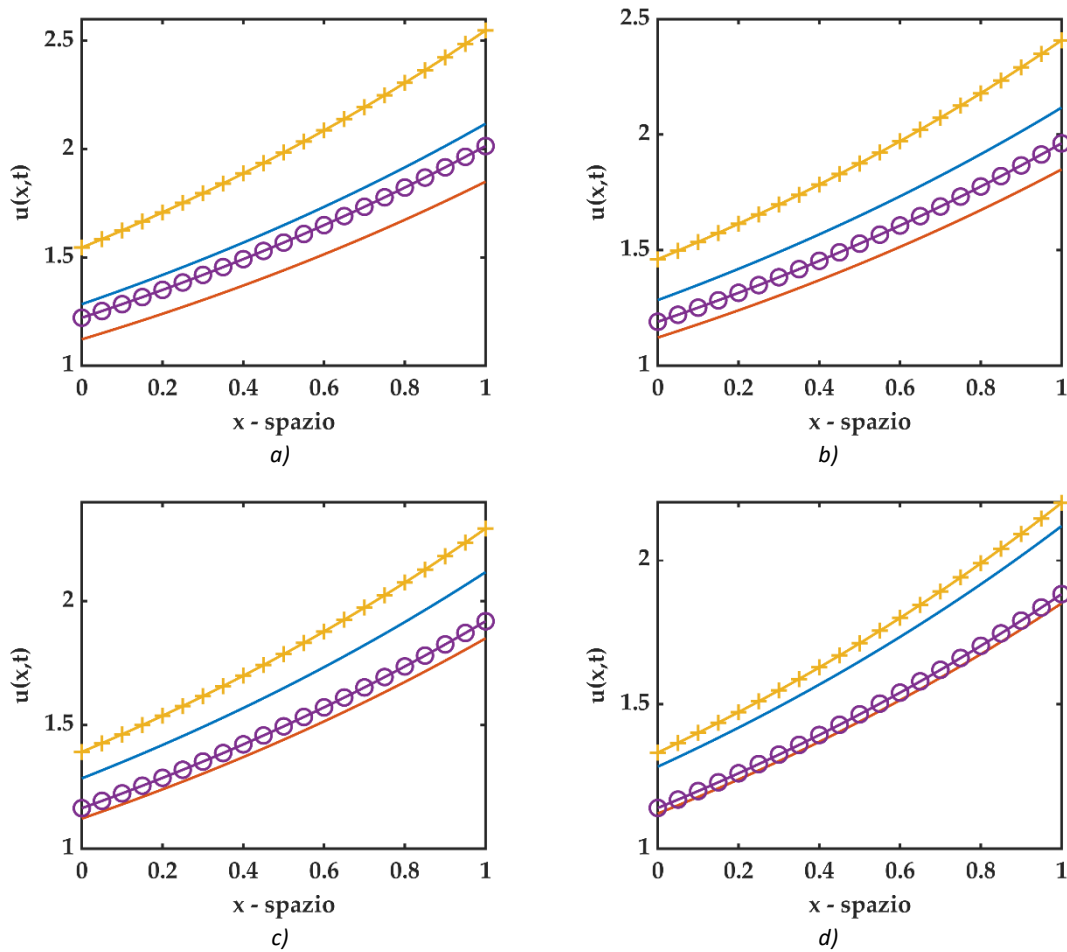


Figura 7-33 plot 2D di confronto fra soluzioni del problema differenziale frazionario S-FRDE con $u(x, 0) = e^{ax}$ con $a = 0.50$ e $t = 1.0$ dove (— linea continua - blu) rappresenta la soluzione standard DE con Laplaciano standard e $K = \text{cost}$, (— linea continua - rosso) rappresenta la soluzione standard DE con Laplaciano standard e $K = \sin(t)$, (+ croce - giallo) rappresenta la soluzione S-FRDE con Laplaciano frazionario di ordine F e $K = \text{cost}$, (⊙ cerchio - viola) rappresenta la soluzione S-FRDE con Laplaciano frazionario di ordine F e $K = \sin(t)$. a) soluzione S-FRDE per $F = 1.2$, b) soluzione S-FRDE per $F = 1.4$, c) soluzione S-FRDE per $F = 1.6$, d) soluzione S-FRDE per $F = 1.8$.

7.4.3.4.1 Algoritmo Matlab

Di seguito viene riportato un estratto dello script Matlab utilizzato per i plot sopra riportati, soffermandosi sul calcolo della soluzione inerente il problema differenziale S-FRDE. Il simbolo (:) sta ad indicare che la parte di codice precedente è esattamente la stessa di quella riportata al paragrafo 7.4.3.2 per il problema S-FRDE con $u(x, 0) = \sin(x)$, essendo adibita al calcolo delle componenti della matrice \mathbf{C} per l'integrazione temporale in ADM che non si modifica al variare delle condizioni al contorno.

```

:
%-----
% soluzione per laplaciano frazionario e  $K = \sin(t)$ 
%  $u, t = \sin(t)$   $u, F$  con  $1 < F \leq 2$ 
%  $u(x, 0) = e^{(ax)}$ 

N1 = n;
ufraz_sin_t_F1 = zeros(length(t1), length(x1));
for F1 = 1.2:0.2:2.0
for n = 0 : N1
    if n == 0
        ufraz_sin_t_F1 = ones(length(t1), 1)*exp(a*x1);
    else
        ufraz_sin_t_F1 = ufraz_sin_t_F1 +
C(:, n)*a^(F1*n)*exp(a*x1);
    end
end
end
end

```

7.4.4 $K = K(t) = \cos(t)$
7.4.4.1 S-FRDE con condizioni iniziali $u(x, 0) = x^\alpha$

Si considera ora il seguente problema differenziale

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \cos(t) \cdot \frac{\partial^F u}{\partial x^F} \\ u(x, 0) = x^\alpha \end{cases} \quad 1 < F \leq 2 \quad (7.44)$$

come per il problema precedente, si considera la derivata di Caputo con punto base $a = 0$.

Si ottengono le seguenti componenti considerando un valore di $x^\alpha = x^6$.

n	u_n
0	$u_0(x, t) = x^\alpha = f(x)$
1	$u_1(x, t) = L_t^{-1}(\cos(t))D^F u_0(x, t) = \int_0^t \cos(t) dt \cdot D^F f(x)$ $= \sin(t) _0^t \cdot \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\Gamma(\alpha + 1 - F)} \cdot x^{\alpha - F} = \sin(t) \cdot \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\Gamma(\alpha + 1 - F)} \cdot x^{\alpha - F}$
2	$u_2(x, t) = L_t^{-1}(\cos(t))D^F u_1(x, t)$ $= L_t^{-1} \left[(\cos(t))D^F \left\{ \sin(t) \cdot \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\Gamma(\alpha + 1 - F)} \cdot x^{\alpha - F} \right\} \right]$ $= \int_0^t \sin(t) \cos(t) dt \cdot \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\Gamma(\alpha + 1 - F)} D^F \{x^{\alpha - F}\}$ $= \frac{\sin^2(t)}{2} \Big _0^t \cdot \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\Gamma(\alpha + 1 - F)} \cdot \frac{\Gamma(\alpha + 1 - F)}{\Gamma(\alpha + 1 - 2F)} \cdot x^{\alpha - 2F}$ $= \frac{\sin^2(t)}{2} \cdot \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\Gamma(\alpha + 1 - 2F)} \cdot x^{\alpha - 2F} =$
3	$u_3(x, t) = L_t^{-1}(\cos(t))D^F u_2(x, t)$ $= L_t^{-1} \left[(\cos(t))D^F \left\{ \frac{\sin^2(t)}{2} \cdot \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\Gamma(\alpha + 1 - 2F)} \cdot x^{\alpha - 2F} \right\} \right]$ $= \int_0^t \frac{\cos(t) \sin^2(t)}{2} dt \cdot \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\Gamma(\alpha + 1 - 2F)} D^F \{x^{\alpha - 2F}\}$ $= \frac{\sin^3(t)}{6} \Big _0^t \cdot \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\Gamma(\alpha + 1 - 2F)} \cdot \frac{\Gamma(\alpha + 1 - 2F)}{\Gamma(\alpha + 1 - 3F)} \cdot x^{\alpha - 3F}$ $= \frac{\sin^3(t)}{6} \cdot \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\Gamma(\alpha + 1 - 3F)} \cdot x^{\alpha - 3F}$
\vdots	\vdots
n	$u_n(x, t) = L_t^{-1}(\cos(t))D^F u_{n-1}(x, t) = \frac{\sin^n(t)}{n!} \cdot \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\Gamma(\alpha + 1 - nF)} \cdot x^{\alpha - nF}$

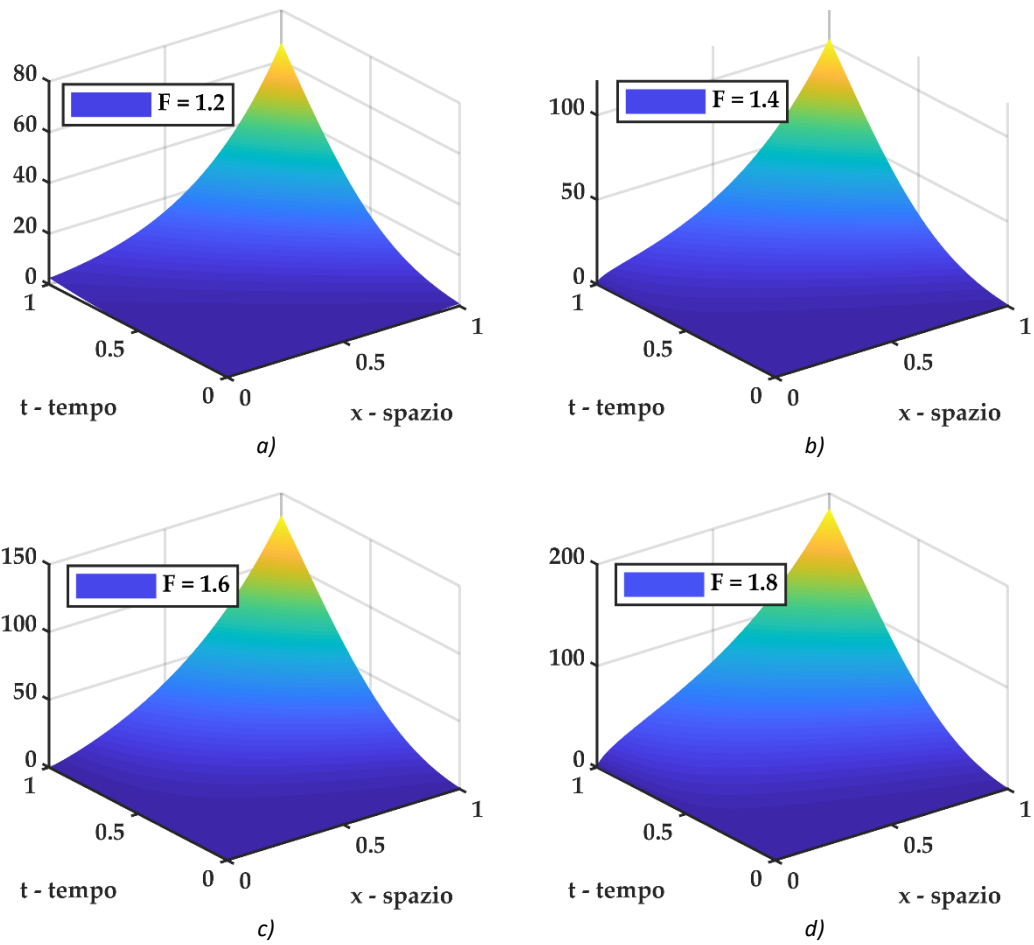
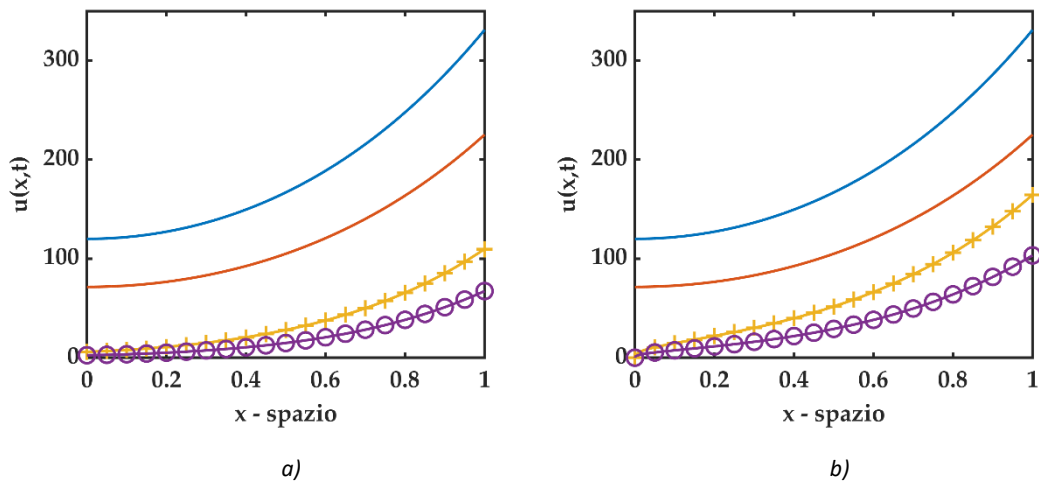


Figura 7-34 plot 3D della soluzione $u(x,t)$ del problema differenziale frazionario S-FRDE con $u(x,0) = x^\alpha$ e coefficiente di diffusione funzione del tempo $K = \cos(t)$ per diversi valori dell'ordine di derivazione frazionario. a) soluzione S-FRDE per $F = 1.2$, b) soluzione S-FRDE per $F = 1.4$, c) soluzione S-FRDE per $F = 1.6$, d) soluzione S-FRDE per $F = 1.8$.



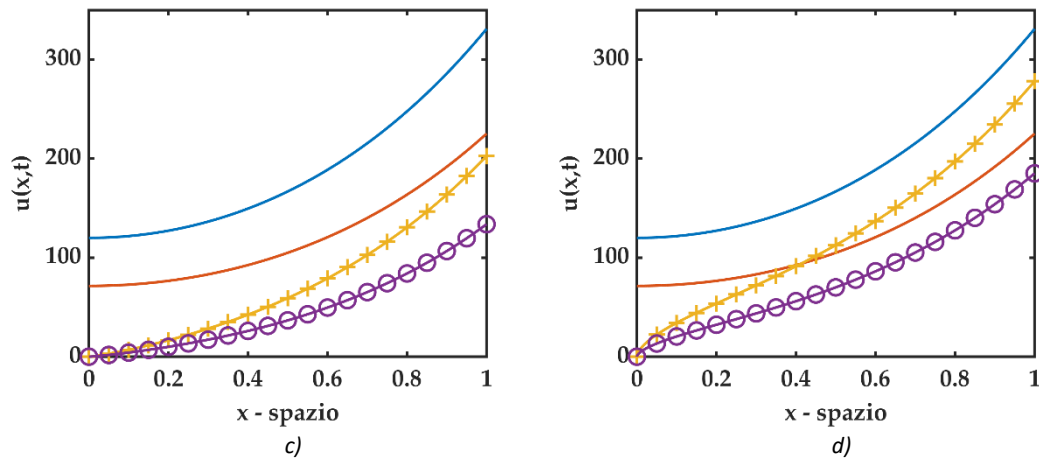


Figura 7-35 plot 2D di confronto fra soluzioni del problema differenziale frazionario S-FRDE con $u(x, 0) = x^\alpha$ dove $t = 1.0$ (– linea continua - blu) rappresenta la soluzione standard DE con Laplaciano standard e $K = \text{cost}$, (– linea continua - rosso) rappresenta la soluzione standard DE con Laplaciano standard e $K = \cos(t)$, (+ croce - giallo) rappresenta la soluzione S-FRDE con Laplaciano frazionario di ordine F e $K = \text{cost}$, (o cerchio - viola) rappresenta la soluzione S-FRDE con Laplaciano frazionario di ordine F e $K = \cos(t)$. a) soluzione S-FRDE per $F = 1.2$, b) soluzione S-FRDE per $F = 1.4$, c) soluzione S-FRDE per $F = 1.6$, d) soluzione S-FRDE per $F = 1.8$.

7.4.4.1.1 Algoritmo Matlab

Di seguito viene riportato un estratto dello script Matlab utilizzato per i plot sopra riportati, soffermandosi sul calcolo della soluzione inerente il problema differenziale S-FRDE.

```

% calcolo delle componenti dell'integrazione temporale
% C sta per COMPONENTE ed il numero davanti è il riferimento a
% quale componente della decomposizione Adomia si riferisce
C1 = sin(t1);
C2 = (sin(t1)).^2./2;
C3 = (sin(t1)).^3./6;
C4 = (sin(t1)).^4./24;
C5 = (sin(t1)).^5./120;

%-----
% laplaciano frazionario e K = K(t) = cos(t) soluzione ADM
% u,t = cos(t) u,F con 1 < F <= 2
% u(x,0) = x^6
alpha = 6;
%-----

F1 = 1.2;
ufraz_cos_t_F1 = x1.^alpha + C1*gamma(alpha+1)/gamma(alpha+1-
F1)*x1.^(alpha-F1)+C2*gamma(alpha+1)/gamma(alpha+1-
2*F1)*x1.^(alpha-2*F1)+C3*gamma(alpha+1)/gamma(alpha+1-
3*F1)*x1.^(alpha-3*F1)+C4*gamma(alpha+1)/gamma(alpha+1-
4*F1)*x1.^(alpha-4*F1)+C5*gamma(alpha+1)/gamma(alpha+1-
5*F1)*x1.^(alpha-5*F1);

F2 = 1.4;
ufraz_cos_t_F2 = x1.^alpha + C1*gamma(alpha+1)/gamma(alpha+1-
F2)*x1.^(alpha-F2)+C2*gamma(alpha+1)/gamma(alpha+1-
2*F2)*x1.^(alpha-2*F2)+C3*gamma(alpha+1)/gamma(alpha+1-

```

```
3*F2)*x1.^(alpha-3*F2)+C4*gamma(alpha+1)/gamma(alpha+1-
4*F2)*x1.^(alpha-4*F2);
```

F3 = 1.6;

```
ufraz_cos_t_F3 = x1.^alpha + C1*gamma(alpha+1)/gamma(alpha+1-
F3)*x1.^(alpha-F3)+C2*gamma(alpha+1)/gamma(alpha+1-
2*F3)*x1.^(alpha-2*F3)+C3*gamma(alpha+1)/gamma(alpha+1-
3*F3)*x1.^(alpha-3*F3);
```

F4 = 1.8;

```
ufraz_cos_t_F4 = x1.^alpha + C1*gamma(alpha+1)/gamma(alpha+1-
F4)*x1.^(alpha-F4)+C2*gamma(alpha+1)/gamma(alpha+1-
2*F4)*x1.^(alpha-2*F4)+C3*gamma(alpha+1)/gamma(alpha+1-
3*F4)*x1.^(alpha-3*F4);
```

7.4.4.2 S-FRDE con condizioni iniziali $u(x, 0) = \sin(x)$

Ripercorrendo la procedura ADM si giunge al seguente termine generale

$$u_n(x, t) = L_t^{-1}(\cos(t))D^F u_{n-1}(x, t) = \frac{\sin^n(t)}{n!} \cdot \sin\left(x + \frac{nF \cdot \pi}{2}\right) \quad (7.45)$$

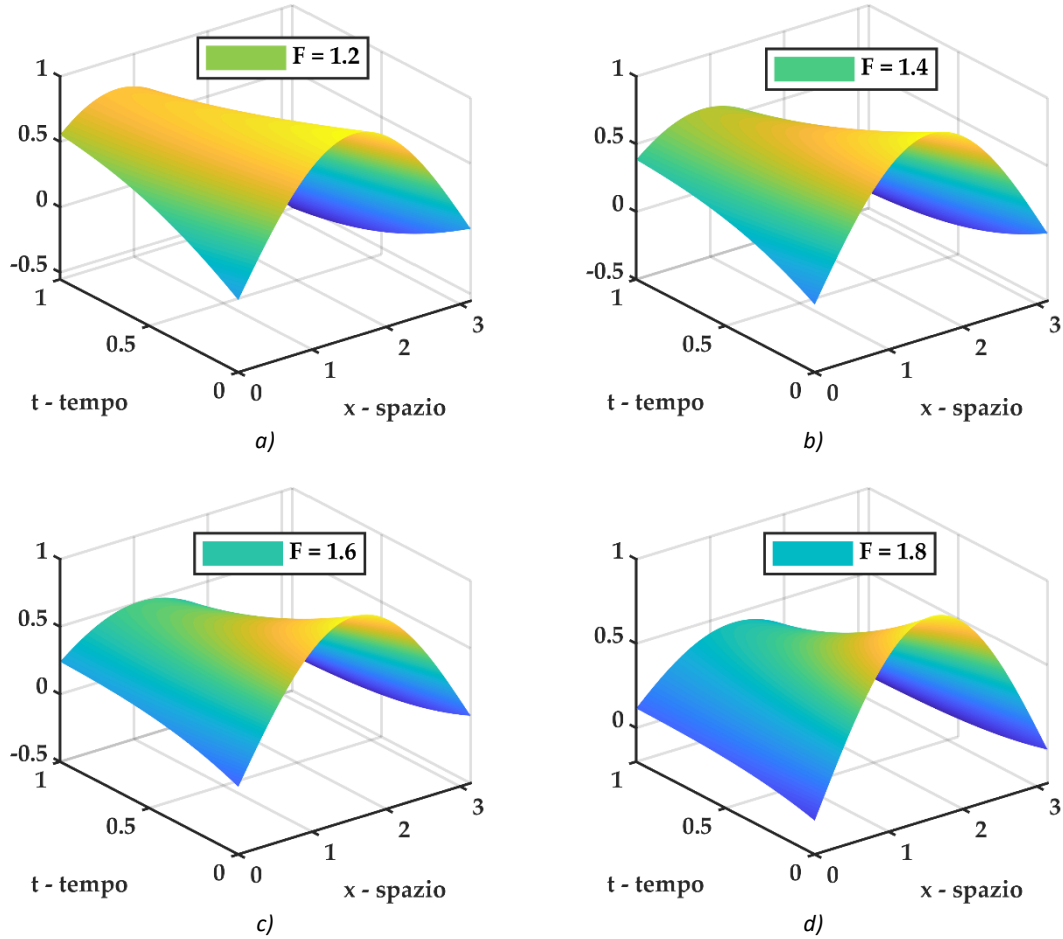
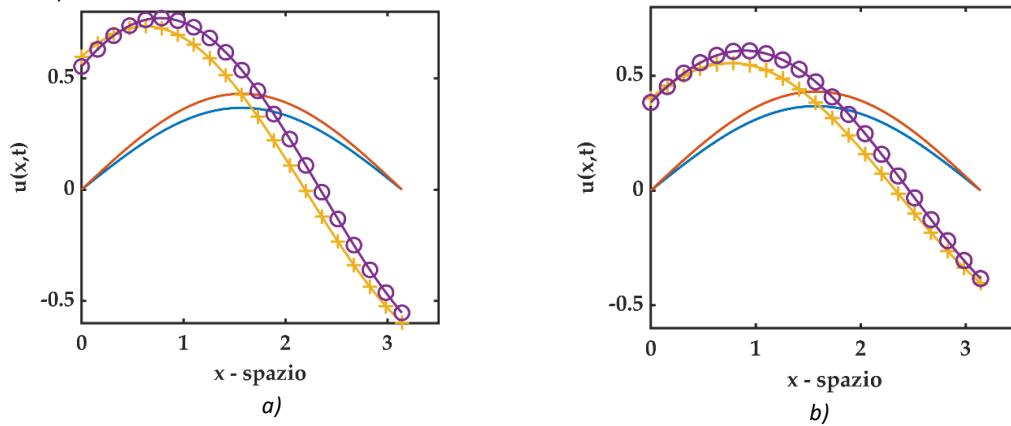


Figura 7-36 plot 3D della soluzione $u(x, t)$ del problema differenziale frazionario S-FRDE con $u(x, 0) = \sin(x)$ e coefficiente di diffusione funzione del tempo $K = \cos(t)$ per diversi valori dell'ordine di derivazione frazionario. a) soluzione S-FRDE per $F = 1.2$, b) soluzione S-FRDE per $F = 1.4$, c) soluzione S-FRDE per $F = 1.6$, d) soluzione S-FRDE per $F = 1.8$.



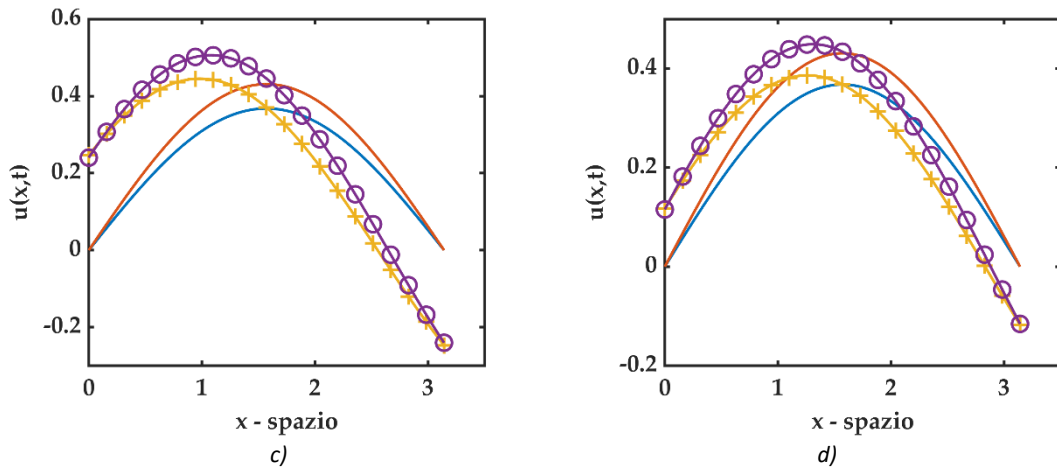


Figura 7-37 plot 2D di confronto fra soluzioni del problema differenziale frazionario S-FRDE con $u(x, 0) = \sin(x)$ e $t = 1.0$ dove (— linea continua - blu) rappresenta la soluzione standard DE con Laplaciano standard e $K = \cos t$, (— linea continua - rosso) rappresenta la soluzione standard DE con Laplaciano standard e $K = \cos(t)$, (+ croce - giallo) rappresenta la soluzione S-FRDE con Laplaciano frazionario di ordine F e $K = \cos t$, (⊙ cerchio - viola) rappresenta la soluzione S-FRDE con Laplaciano frazionario di ordine F e $K = \cos(t)$. a) soluzione S-FRDE per $F = 1.2$, b) soluzione S-FRDE per $F = 1.4$, c) soluzione S-FRDE per $F = 1.6$, d) soluzione S-FRDE per $F = 1.8$.

7.4.4.2.1 Algoritmo Matlab

Di seguito viene riportato un estratto dello script Matlab utilizzato per i plot sopra riportati, soffermandosi sul calcolo della soluzione inerente il problema differenziale S-FRDE.

```

%-----
% soluzione per laplaciano frazionario e K = cos(t)
% u,t = cos(t) u,F con 1 < F <= 2
% u(x,0) = sin(x)

n = 30; % numero di termini serie ADM
N1 = n;
ufraz_cos_t_F1 = zeros(length(t1),length(x1));
for F1 = 1.2:0.2:2.0
for n = 0 : N1
    ufraz_cos_t_F1 = ufraz_cos_t_F1 + sin(t1).^n./factorial(n)*
                    sin(x1+n*F1*pi/2);
end
end
    
```

7.4.4.3 S-FRDE con condizioni iniziali $u(x, 0) = \cos(x)$

Ripercorrendo la procedura ADM si giunge al seguente termine generale

$$u_n(x, t) = L_t^{-1}(\cos(t))D^F u_{n-1}(x, t) = \frac{\sin^n(t)}{n!} \cdot \cos\left(x + \frac{nF \cdot \pi}{2}\right) \quad (7.46)$$

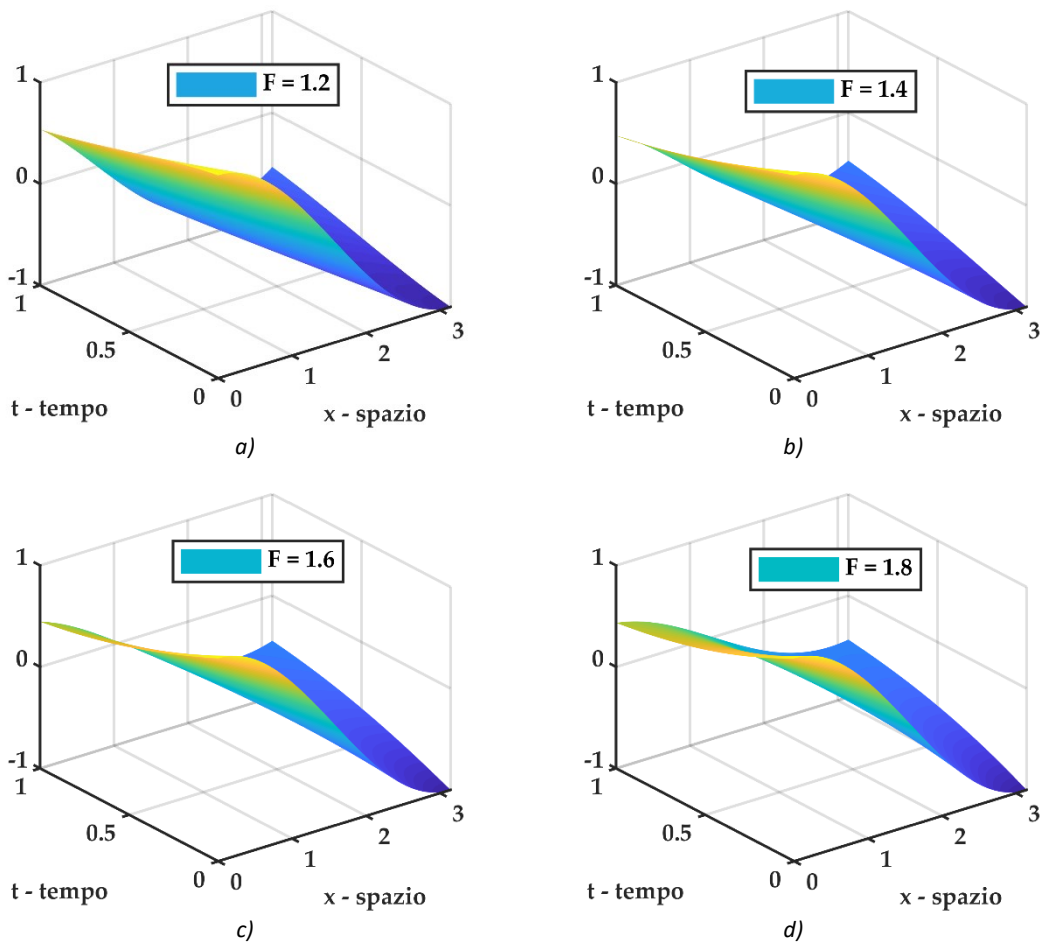


Figura 7-38 plot 3D della soluzione $u(x, t)$ del problema differenziale frazionario S-FRDE con $u(x, 0) = \cos(x)$ e coefficiente di diffusione funzione del tempo $K = \cos(t)$ per diversi valori dell'ordine di derivazione frazionario. a) soluzione S-FRDE per $F = 1.2$, b) soluzione S-FRDE per $F = 1.4$, c) soluzione S-FRDE per $F = 1.6$, d) soluzione S-FRDE per $F = 1.8$.

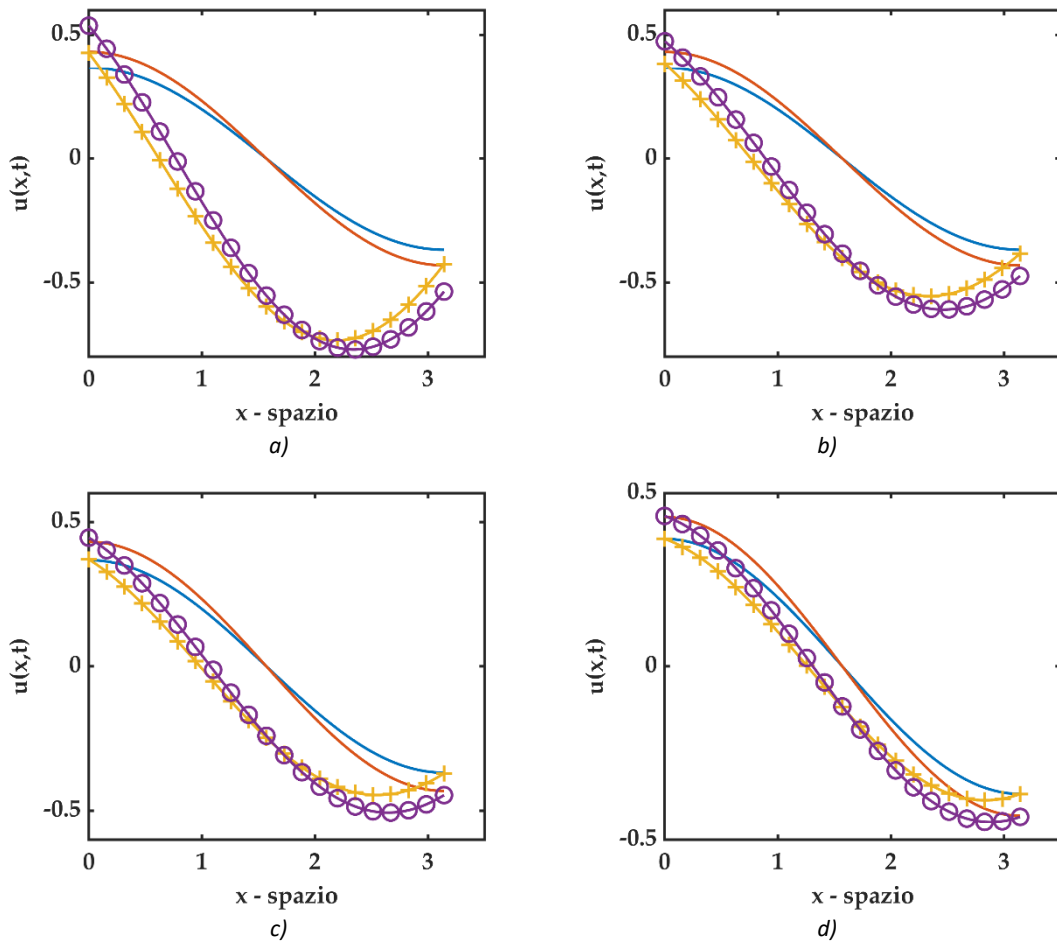


Figura 7-39 plot 2D di confronto fra soluzioni del problema differenziale frazionario S-FRDE con $u(x, 0) = \sin(x)$ e $t = 1.0$ dove (– linea continua - blu) rappresenta la soluzione standard DE con Laplaciano standard e $K = \cos(t)$, (– linea continua - rosso) rappresenta la soluzione standard DE con Laplaciano standard e $K = \cos(t)$, (+ croce - giallo) rappresenta la soluzione S-FRDE con Laplaciano frazionario di ordine F e $K = \cos(t)$, (⊙ cerchio - viola) rappresenta la soluzione S-FRDE con Laplaciano frazionario di ordine F e $K = \cos(t)$. a) soluzione S-FRDE per $F = 1.2$, b) soluzione S-FRDE per $F = 1.4$, c) soluzione S-FRDE per $F = 1.6$, d) soluzione S-FRDE per $F = 1.8$.

7.4.4.3.1 Algoritmo Matlab

Di seguito viene riportato un estratto dello script Matlab utilizzato per i plot sopra riportati, soffermandosi sul calcolo della soluzione inerente il problema differenziale S-FRDE.

```

%-----
% soluzione per laplaciano frazionario e K = cos(t)
% u,t = cos(t) u,F con 1 < F <= 2
% u(x,0) = cos(x)
n = 30; % numero di termini serie ADM
N1 = n;
ufraz_cos_t_F1 = zeros(length(t1),length(x1));
for F1 = 1.2:0.2:2.0
for n = 0 : N1
ufraz_cos_t_F1 = ufraz_cos_t_F1 +
sin(t1).^n./factorial(n)*cos(x1+n*F1*pi/2);
end
end
    
```

7.4.4.4 S-FRDE con condizioni iniziali $u(x, 0) = e^{ax}$ $Re(a) \geq 0$

Ripercorrendo la procedura ADM si giunge al seguente termine generale

$$u_n(x, t) = L_t^{-1}(\cos(t))D^F u_{n-1}(x, t) = \frac{\sin^n(t)}{n!} \cdot a^{nF} \cdot e^{ax} \quad (7.47)$$

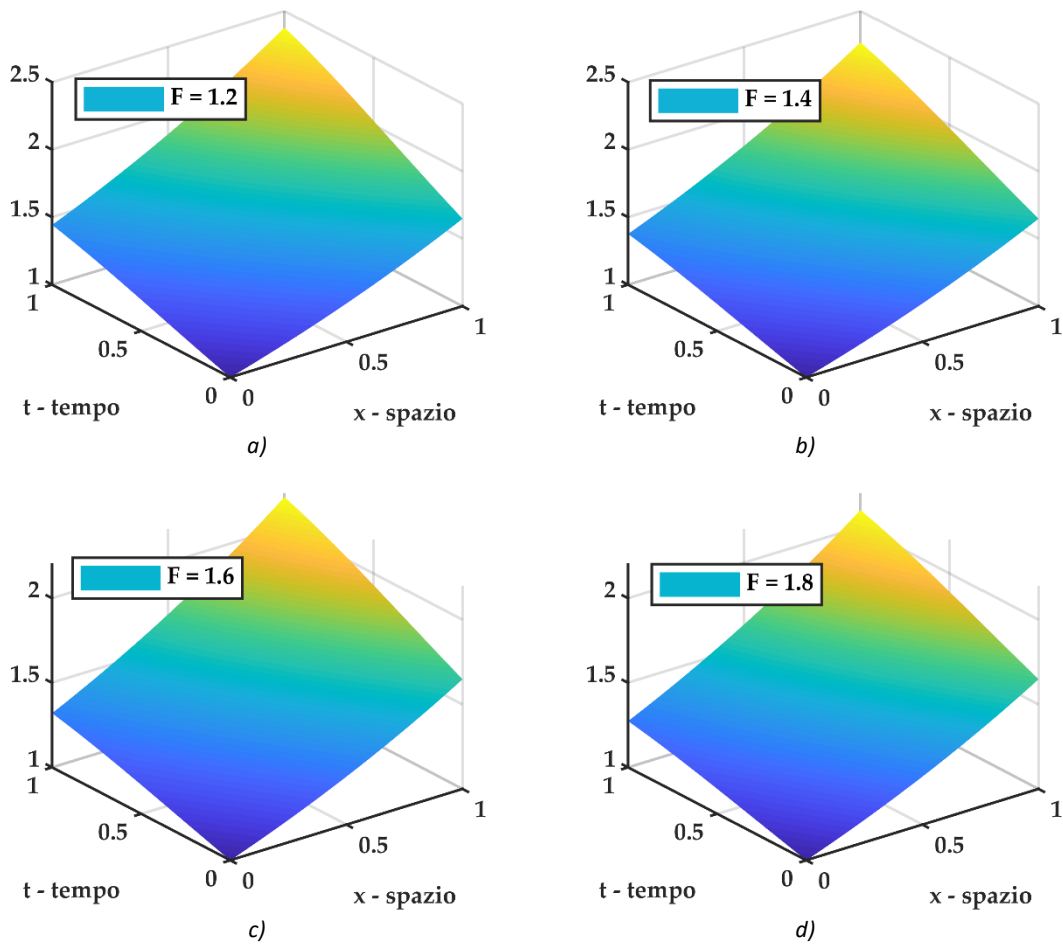


Figura 7-40 plot 3D della soluzione $u(x, t)$ del problema differenziale frazionario S-FRDE con $u(x, 0) = e^{ax}$ con $a = 0.50$ e coefficiente di diffusione funzione del tempo $K = \cos(t)$ per diversi valori dell'ordine di derivazione frazionario. a) soluzione S-FRDE per $F = 1.2$, b) soluzione S-FRDE per $F = 1.4$, c) soluzione S-FRDE per $F = 1.6$, d) soluzione S-FRDE per $F = 1.8$.

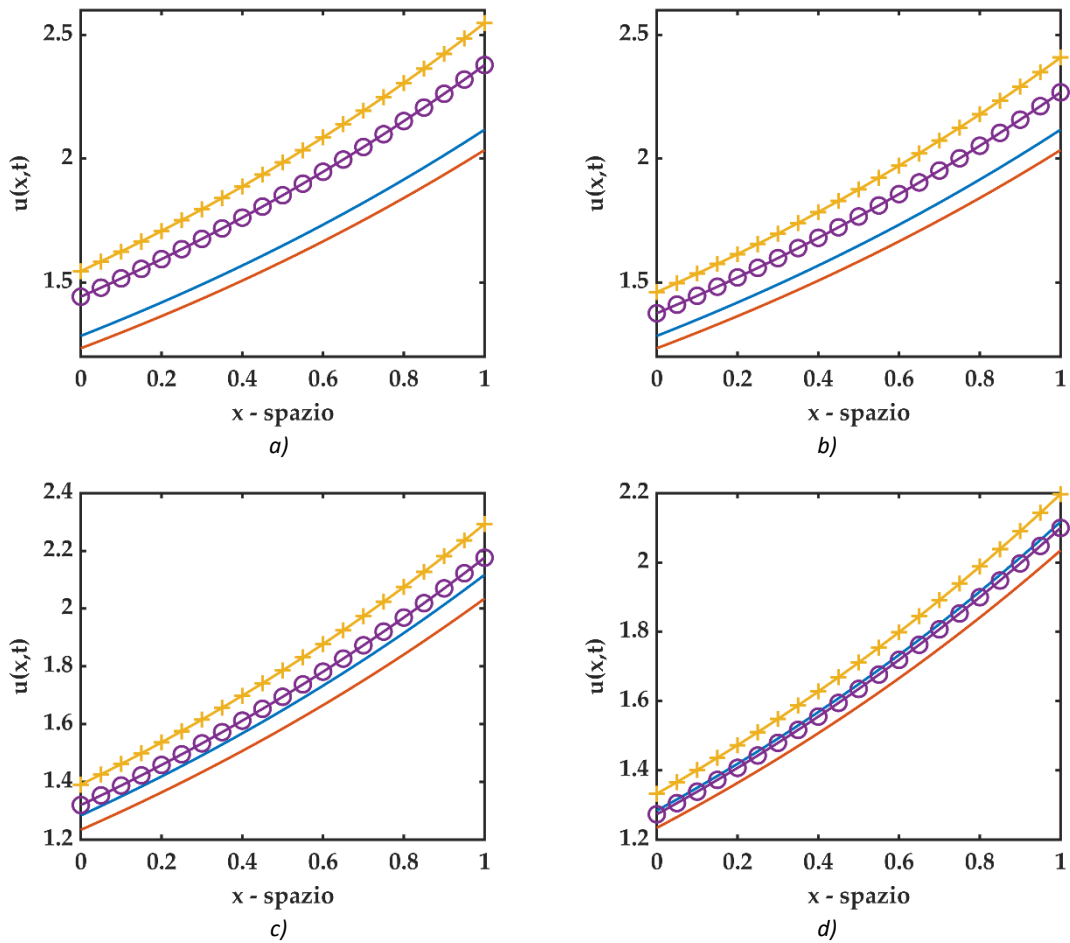


Figura 7-41 plot 2D di confronto fra soluzioni del problema differenziale frazionario S-FRDE con $u(x, 0) = e^{ax}$ con $a = 0.50$ e $t = 1.0$ dove (– linea continua - blu) rappresenta la soluzione standard DE con Laplaciano standard e $K = \cos t$, (– linea continua - rosso) rappresenta la soluzione standard DE con Laplaciano standard e $K = \cos(t)$, (+ croce - giallo) rappresenta la soluzione S-FRDE con Laplaciano frazionario di ordine F e $K = \cos t$, (⊙ cerchio - viola) rappresenta la soluzione S-FRDE con Laplaciano frazionario di ordine F e $K = \cos(t)$. a) soluzione S-FRDE per $F = 1.2$, b) soluzione S-FRDE per $F = 1.4$, c) soluzione S-FRDE per $F = 1.6$, d) soluzione S-FRDE per $F = 1.8$.

7.4.4.4.1 Algoritmo Matlab

Di seguito viene riportato un estratto dello script Matlab utilizzato per i plot sopra riportati, soffermandosi sul calcolo della soluzione inerente il problema differenziale S-FRDE.

```

%-----
% soluzione per laplaciano frazionario e K = cos(t)
% u,t = cos(t) u,F con 1 < F <= 2
% u(x,0) = e^(ax)
n = 30; % numero di termini serie ADM
N1 = n;
ufraz_cos_t_F1 = zeros(length(t1),length(x1));
for F1 = 1.2:0.2:2.0
for n = 0 : N1
ufraz_cos_t_F1 = ufraz_cos_t_F1 +
sin(t1).^n./factorial(n)*a^(F1*n)*exp(a*x1);
end
end
    
```

7.4.5 $K = K(t) = \sinh(t)$
7.4.5.1 S-FRDE con condizioni iniziali $u(x, 0) = x^\alpha$

Si considera ora il seguente problema differenziale

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \sinh(t) \cdot \frac{\partial^F u}{\partial x^F} \\ u(x, 0) = x^\alpha \end{cases} \quad 1 < F \leq 2 \quad (7.48)$$

come per il problema precedente, si considera la derivata di Caputo con punto base $a = 0$.

Si ottengono le seguenti componenti

n	u_n
0	$u_0(x, t) = x^\alpha = f(x)$
1	$\begin{aligned} u_1(x, t) &= L_t^{-1}(\sinh(t)) D^F u_0(x, t) = \int_0^t \sinh(t) dt \cdot D^F f(x) \\ &= \cosh(t) \Big _0^t \cdot \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\Gamma(\alpha + 1 - F)} \cdot x^{\alpha - F} \\ &= (\cosh(t) - 1) \cdot \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\Gamma(\alpha + 1 - F)} \cdot x^{\alpha - F} \\ &= \left(\frac{\cosh(t)}{0! 1!} - \frac{1}{0! 1!} \right) \cdot \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\Gamma(\alpha + 1 - F)} \cdot x^{\alpha - F} \end{aligned}$
2	$\begin{aligned} u_2(x, t) &= L_t^{-1}(\sinh(t)) D^F u_1(x, t) \\ &= L_t^{-1} \left[(\sinh(t)) D^F \left\{ (\cosh(t) - 1) \cdot \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\Gamma(\alpha + 1 - F)} \cdot x^{\alpha - F} \right\} \right] \\ &= \int_0^t (\sinh(t) \cosh(t) - \sinh(t)) dt \cdot \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\Gamma(\alpha + 1 - F)} D^F \{x^{\alpha - F}\} \\ &= \left(\frac{\cosh^2(t)}{2} - \cosh(t) \right) \Big _0^t \cdot \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\Gamma(\alpha + 1 - F)} \cdot \frac{\Gamma(\alpha + 1 - F)}{\Gamma(\alpha + 1 - 2F)} \\ &\cdot x^{\alpha - 2F} = \left(\frac{\cosh^2(t)}{2} - \cosh(t) + \frac{1}{2} \right) \cdot \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\Gamma(\alpha + 1 - 2F)} \cdot x^{\alpha - 2F} \\ &= \left(\frac{\cosh^2(t)}{0! 2!} - \frac{\cosh(t)}{1! 1!} + \frac{1}{2! 0!} \right) \cdot \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\Gamma(\alpha + 1 - 2F)} \cdot x^{\alpha - 2F} \end{aligned}$

3	$ \begin{aligned} u_3(x, t) &= L_t^{-1}(\sinh(t))D^F u_2(x, t) \\ &= L_t^{-1} \left[(\sinh(t))D^F \left\{ \left(\frac{\cosh^2(t)}{2} - \cosh(t) + \frac{1}{2} \right) \cdot \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\Gamma(\alpha + 1 - 2F)} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \cdot x^{\alpha - 2F} \right\} \right] \\ &= \int_0^t \left(\frac{\sinh(t) \cosh^2(t)}{2} - \sinh(t) \cosh(t) + \frac{\sinh(t)}{2} \right) dt \\ &\quad \cdot \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\Gamma(\alpha + 1 - 2F)} D^F \{x^{\alpha - 2F}\} \\ &= \left(\frac{\cosh^3(t)}{6} - \frac{\cosh^2(t)}{2} + \frac{\cosh(t)}{2} \right) \Big _0^t \cdot \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\Gamma(\alpha + 1 - 2F)} \\ &\quad \cdot \frac{\Gamma(\alpha + 1 - 2F)}{\Gamma(\alpha + 1 - 3F)} \cdot x^{\alpha - 3F} \\ &= \left(\frac{\cosh^3(t)}{6} - \frac{\cosh^2(t)}{2} + \frac{\cosh(t)}{2} - \frac{1}{6} \right) \cdot \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\Gamma(\alpha + 1 - 3F)} \\ &\quad \cdot x^{\alpha - 3F} \\ &= \left(\frac{\cosh^3(t)}{0! 3!} - \frac{\cosh^2(t)}{1! 2!} + \frac{\cosh(t)}{2! 1!} - \frac{1}{3! 0!} \right) \cdot \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\Gamma(\alpha + 1 - 3F)} \\ &\quad \cdot x^{\alpha - 3F} \end{aligned} $
4	$ \begin{aligned} u_4(x, t) &= L_t^{-1}(\sinh(t))D^F u_3(x, t) \\ &= L_t^{-1} \left[(\sinh(t))D^F \left\{ \left(\frac{\cosh^3(t)}{6} - \frac{\cosh^2(t)}{2} + \frac{\cosh(t)}{2} - \frac{1}{6} \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \cdot \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\Gamma(\alpha + 1 - 3F)} \cdot x^{\alpha - 3F} \right\} \right] \\ &= \int_0^t \left(\frac{\sinh(t) \cosh^3(t)}{6} - \frac{\sinh(t) \cosh^2(t)}{2} + \frac{\sinh(t) \cosh(t)}{2} \right. \\ &\quad \left. - \frac{\sinh(t)}{6} \right) dt \cdot \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\Gamma(\alpha + 1 - 3F)} D^F \{x^{\alpha - 3F}\} = \\ &\quad \left(\frac{\cosh^4(t)}{24} - \frac{\cosh^3(t)}{6} + \frac{\cosh^2(t)}{4} - \frac{\cosh(t)}{6} \right) \Big _0^t \cdot \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\Gamma(\alpha + 1 - 3F)} \\ &\quad \cdot \frac{\Gamma(\alpha + 1 - 3F)}{\Gamma(\alpha + 1 - 4F)} \cdot x^{\alpha - 4F} \\ &= \left(\frac{\cosh^4(t)}{24} - \frac{\cosh^3(t)}{6} + \frac{\cosh^2(t)}{4} - \frac{\cosh(t)}{6} + \frac{1}{24} \right) \\ &\quad \cdot \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\Gamma(\alpha + 1 - 4F)} \cdot x^{\alpha - 4F} \\ &= \left(\frac{\cosh^4(t)}{0! 4!} - \frac{\cosh^3(t)}{1! 3!} + \frac{\cosh^2(t)}{2! 2!} - \frac{\cosh(t)}{3! 1!} + \frac{1}{4! 0!} \right) \\ &\quad \cdot \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\Gamma(\alpha + 1 - 4F)} \cdot x^{\alpha - 4F} \end{aligned} $

5	$ \begin{aligned} u_5(x, t) &= L_t^{-1}(\sinh(t))D^F u_4(x, t) \\ &= L_t^{-1} \left[(\sinh(t))D^F \left\{ \left(\frac{\cosh^4(t)}{24} - \frac{\cosh^3(t)}{6} + \frac{\cosh^2(t)}{4} \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \left. - \frac{\cosh(t)}{6} + \frac{1}{24} \right) \cdot \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\Gamma(\alpha + 1 - 4F)} \cdot x^{\alpha - 4F} \right\} \right] \\ &= \int_0^t \left(\frac{\sinh(t) \cosh^4(t)}{24} - \frac{\sinh(t) \cosh^3(t)}{6} + \frac{\sinh(t) \cosh^2(t)}{4} \right. \\ &\quad \left. - \frac{\sinh(t) \cosh(t)}{6} + \frac{\sinh(t)}{24} \right) dt \cdot \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\Gamma(\alpha + 1 - 4F)} D^F \{x^{\alpha - 4F}\} = \\ &\left(\frac{\cosh^5(t)}{120} - \frac{\cosh^4(t)}{24} + \frac{\cosh^3(t)}{12} - \frac{\cosh^2(t)}{12} + \frac{\cosh(t)}{24} \right) \Big _0^t \cdot \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\Gamma(\alpha + 1 - 4F)} \\ &\quad \cdot \frac{\Gamma(\alpha + 1 - 4F)}{\Gamma(\alpha + 1 - 5F)} \cdot x^{\alpha - 5F} \\ &= \left(\frac{\cosh^5(t)}{120} - \frac{\cosh^4(t)}{24} + \frac{\cosh^3(t)}{12} - \frac{\cosh^2(t)}{12} + \frac{\cosh(t)}{24} \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{120} \right) \cdot \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\Gamma(\alpha + 1 - 5F)} \cdot x^{\alpha - 5F} \\ &= \left(\frac{\cosh^5(t)}{0! 5!} - \frac{\cosh^4(t)}{1! 4!} + \frac{\cosh^3(t)}{2! 3!} - \frac{\cosh^2(t)}{3! 2!} + \frac{\cosh(t)}{4! 1!} \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{5! 0!} \right) \cdot \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\Gamma(\alpha + 1 - 5F)} \cdot x^{\alpha - 5F} \end{aligned} $
⋮	⋮
n	$ \begin{aligned} u_n(x, t) &= L_t^{-1}(\sinh(t))D^F u_{n-1}(x, t) = \\ &= \frac{1}{\text{Diag}[\mathbb{A} \otimes (\text{Ref} \mathbb{A})^T]} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} +1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{ij} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (-1)^{j+1} \end{pmatrix}}_{[n+1] \times [n+1]} \cdot \begin{pmatrix} \cosh^n t \\ \cosh^{(n-1)} t \\ \cosh^{(n-2)} t \\ \vdots \\ \cosh t \\ 1 \end{pmatrix} \\ &\quad \cdot \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\Gamma(\alpha + 1 - nF)} \cdot x^{\alpha - nF} \end{aligned} $ <p style="text-align: center;">Con</p> $ \mathbb{A} = [n! \quad (n-1)! \quad (n-2)! \quad \dots \quad 2! \quad 1! \quad 0!] $ $ (\text{Ref} \mathbb{A})^T = \begin{pmatrix} 0! \\ 1! \\ 2! \\ \vdots \\ (n-2)! \\ (n-1)! \\ n! \end{pmatrix} $

$$\begin{aligned}
 & \mathbb{A} \otimes (\text{Ref} \mathbb{A})^T \\
 &= \begin{pmatrix} n! 0! & n! 1! & n! 2! & \cdots & n! (n-1)! & n! n! \\ (n-1)! 0! & (n-1)! 1! & (n-1)! 2! & \cdots & (n-1)! (n-1)! & (n-1)! n! \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1! 0! & 1! 1! & 1! 2! & \cdots & 1! (n-1)! & 1! n! \\ 0! 0! & 0! 1! & 0! 2! & \cdots & 0! (n-1)! & 0! n! \end{pmatrix} \\
 & \text{Diag}[\mathbb{A} \otimes (\text{Ref} \mathbb{A})^T] \\
 &= [n! 0! \quad (n-1)! 1! \quad (n-2)! 2! \quad \cdots \quad 2! (n-2)! \quad 1! (n-1)! \quad 0! n!]
 \end{aligned}$$

Viene fissato il valore di $x^\alpha = x^6$.

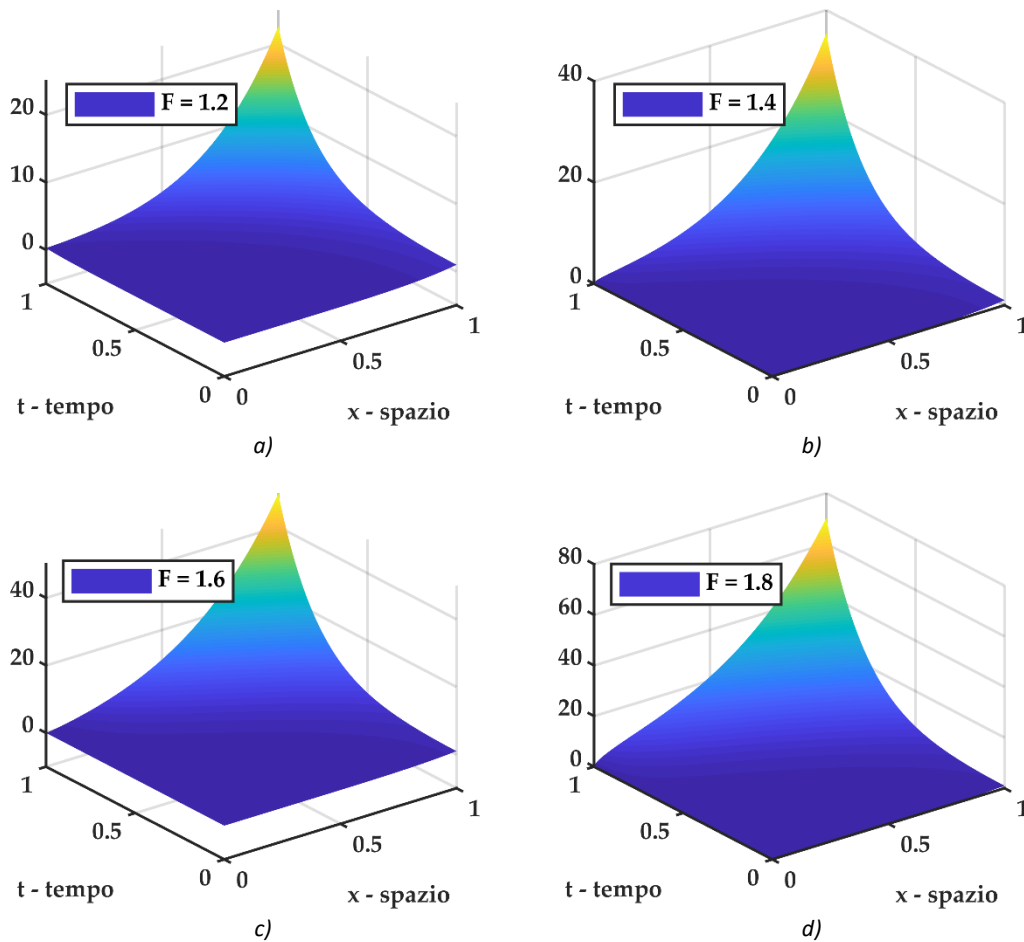


Figura 7-42 plot 3D della soluzione $u(x,t)$ del problema differenziale frazionario S-FRDE con $u(x,0) = x^\alpha$ e coefficiente di diffusione funzione del tempo $K = \sinh(t)$ per diversi valori dell'ordine di derivazione frazionario. a) soluzione S-FRDE per $F = 1.2$, b) soluzione S-FRDE per $F = 1.4$, c) soluzione S-FRDE per $F = 1.6$, d) soluzione S-FRDE per $F = 1.8$.

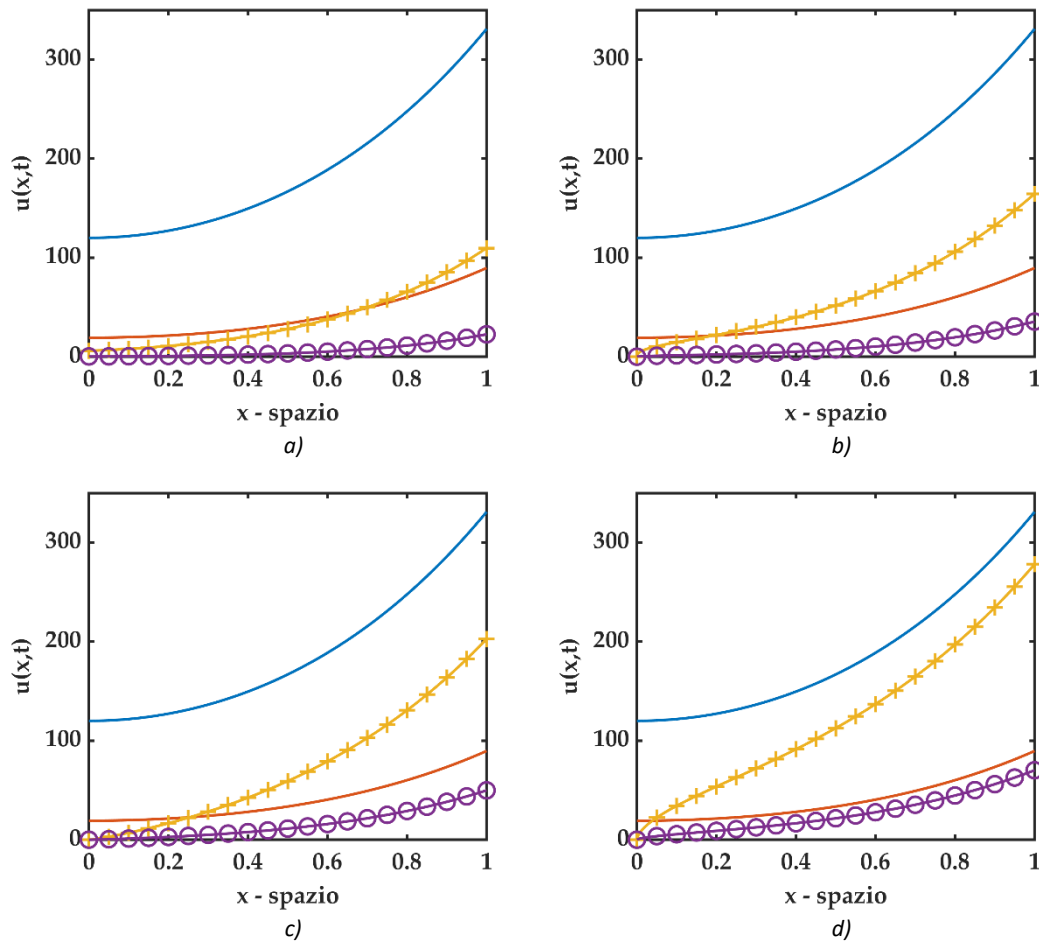


Figura 7-43 plot 2D di confronto fra soluzioni del problema differenziale frazionario S-FRDE con $u(x, 0) = x^\alpha$ e $t = 1.0$ dove (— linea continua - blu) rappresenta la soluzione standard DE con Laplaciano standard e $K = \text{cost}$, (— linea continua - rosso) rappresenta la soluzione standard DE con Laplaciano standard e $K = \sinh(t)$, (+ croce - giallo) rappresenta la soluzione S-FRDE con Laplaciano frazionario di ordine F e $K = \text{cost}$, (⊙ cerchio - viola) rappresenta la soluzione S-FRDE con Laplaciano frazionario di ordine F e $K = \sinh(t)$. a) soluzione S-FRDE per $F = 1.2$, b) soluzione S-FRDE per $F = 1.4$, c) soluzione S-FRDE per $F = 1.6$, d) soluzione S-FRDE per $F = 1.8$.

7.4.5.1.1 Algoritmo Matlab

Di seguito viene riportato un estratto dello script Matlab utilizzato per i plot sopra riportati, soffermandosi sul calcolo della soluzione inerente il problema differenziale S-FRDE.

```

% calcolo delle componenti dell'integrazione temporale
% C sta per COMPONENTE ed il numero davanti è il riferimento a
% quale componente della decomposizione Adomia si riferisce
C1 = cosh(t1) - 1;
C2 = (cosh(t1)).^2./2 - cosh(t1) + 1/2;
C3 = (cosh(t1)).^3./6 - (cosh(t1)).^2./2 + cosh(t1)./2 - 1/6;
C4 = (cosh(t1)).^4./24 - (cosh(t1)).^3./6 + (cosh(t1)).^2./4 -
    cosh(t1)./6 + 1/24;
C5 = (cosh(t1)).^5./120 - (cosh(t1)).^4./24 + (cosh(t1)).^3./12 -
    cosh(t1).^2./12 + cosh(t1)./24 - 1/120;
%-----
% laplaciano frazionario e K = K(t) = sinh(t) soluzione ADM
% u,t = sinh(t) u,F con 1 < F <= 2
    
```

```

% u(x,0) = x^6
alpha = 6;
%-----

F1 = 1.2;
ufraz_sinht_F1 = x1.^alpha + C1*gamma(alpha+1)/gamma(alpha+1-
F1)*x1.^(alpha-F1)+C2*gamma(alpha+1)/gamma(alpha+1-
2*F1)*x1.^(alpha-2*F1)+C3*gamma(alpha+1)/gamma(alpha+1-
3*F1)*x1.^(alpha-3*F1)+C4*gamma(alpha+1)/gamma(alpha+1-
4*F1)*x1.^(alpha-4*F1)+C5*gamma(alpha+1)/gamma(alpha+1-
5*F1)*x1.^(alpha-5*F1);

F2 = 1.4;
ufraz_sinht_F2 = x1.^alpha + C1*gamma(alpha+1)/gamma(alpha+1-
F2)*x1.^(alpha-F2)+C2*gamma(alpha+1)/gamma(alpha+1-
2*F2)*x1.^(alpha-2*F2)+C3*gamma(alpha+1)/gamma(alpha+1-
3*F2)*x1.^(alpha-3*F2)+C4*gamma(alpha+1)/gamma(alpha+1-
4*F2)*x1.^(alpha-4*F2);

F3 = 1.6;
ufraz_sinht_F3 = x1.^alpha + C1*gamma(alpha+1)/gamma(alpha+1-
F3)*x1.^(alpha-F3)+C2*gamma(alpha+1)/gamma(alpha+1-
2*F3)*x1.^(alpha-2*F3)+C3*gamma(alpha+1)/gamma(alpha+1-
3*F3)*x1.^(alpha-3*F3);

F4 = 1.8;
ufraz_sinht_F4 = x1.^alpha + C1*gamma(alpha+1)/gamma(alpha+1-
F4)*x1.^(alpha-F4)+C2*gamma(alpha+1)/gamma(alpha+1-
2*F4)*x1.^(alpha-2*F4)+C3*gamma(alpha+1)/gamma(alpha+1-
3*F4)*x1.^(alpha-3*F4);

```

7.4.5.2 S-FRDE con condizioni iniziali $u(x, 0) = \sin(x)$

Ripercorrendo la procedura ADM si giunge al seguente termine generale

$$\begin{aligned}
 u_n(x, t) &= L_t^{-1}(\sinh(t))D^F u_{n-1}(x, t) = \\
 &= \frac{1}{\text{Diag}[\mathbb{A} \otimes (\text{Ref } \mathbb{A})^T]} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} +1 & 0 & 0 & \overset{j}{0} & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{ij} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (-1)^{j+1} \end{pmatrix}}_{[n+1] \times [n+1]} \cdot \begin{pmatrix} \cosh^n t \\ \cosh^{(n-1)} t \\ \cosh^{(n-2)} t \\ \vdots \\ \cosh t \\ 1 \end{pmatrix} \quad (7.49) \\
 &\cdot \sin\left(x + \frac{nF \cdot \pi}{2}\right)
 \end{aligned}$$

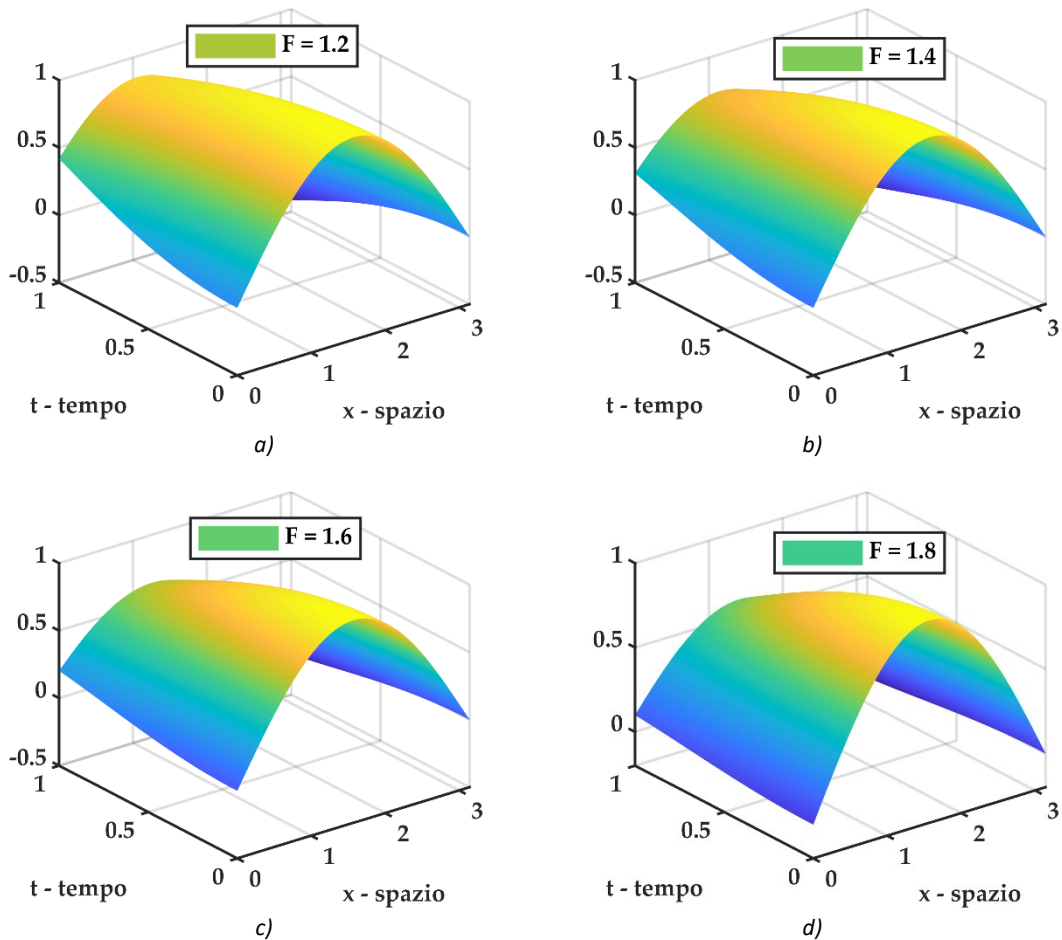


Figura 7-44 plot 3D della soluzione $u(x, t)$ del problema differenziale frazionario S-FRDE con $u(x, 0) = \sin(x)$ con e coefficiente di diffusione funzione del tempo $K = \sinh(t)$ per diversi valori dell'ordine di derivazione frazionario. a) soluzione S-FRDE per $F = 1.2$, b) soluzione S-FRDE per $F = 1.4$, c) soluzione S-FRDE per $F = 1.6$, d) soluzione S-FRDE per $F = 1.8$.

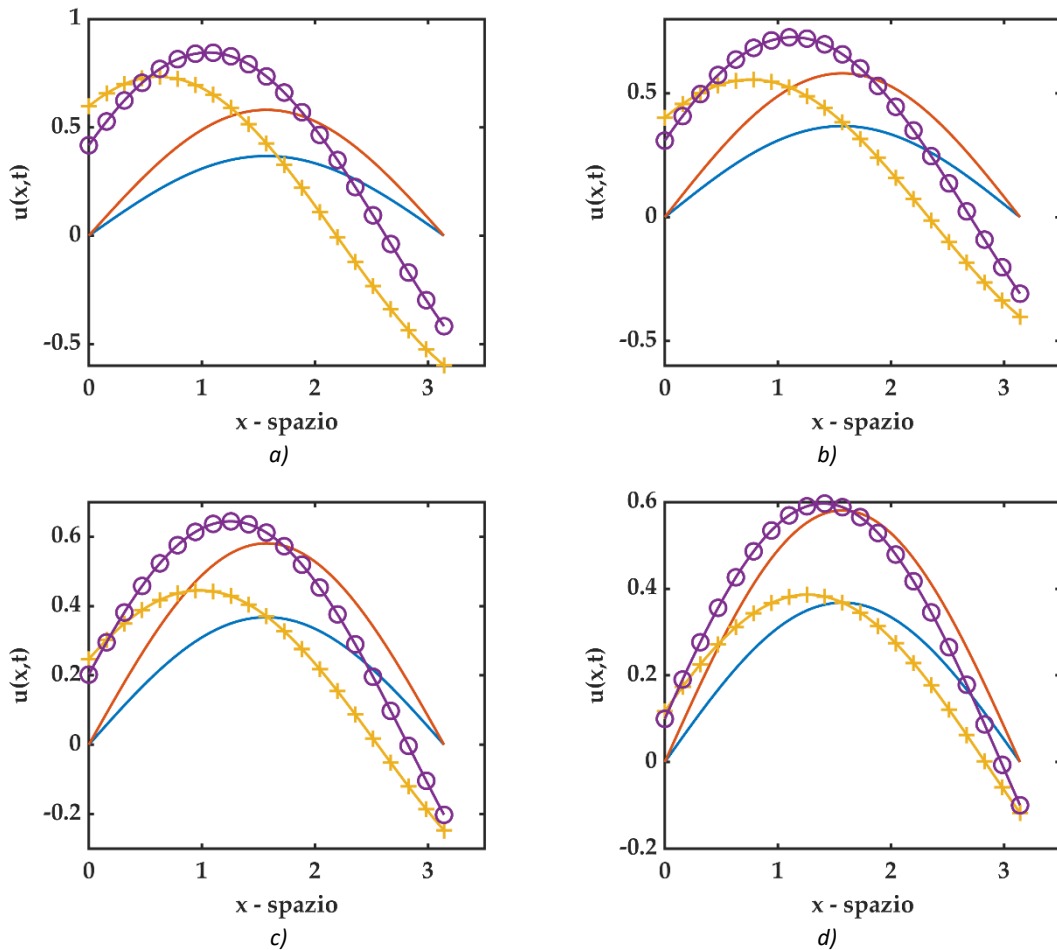


Figura 7-45 plot 2D di confronto fra soluzioni del problema differenziale frazionario S-FRDE con $u(x, 0) = \sin(x)$ e $t = 1.0$ dove (– linea continua - blu) rappresenta la soluzione standard DE con Laplaciano standard e $K = \cos t$, (– linea continua - rosso) rappresenta la soluzione standard DE con Laplaciano standard e $K = \sinh(t)$, (+ croce - giallo) rappresenta la soluzione S-FRDE con Laplaciano frazionario di ordine F e $K = \cos t$, (⊙ cerchio - viola) rappresenta la soluzione S-FRDE con Laplaciano frazionario di ordine F e $K = \sinh(t)$. a) soluzione S-FRDE per $F = 1.2$, b) soluzione S-FRDE per $F = 1.4$, c) soluzione S-FRDE per $F = 1.6$, d) soluzione S-FRDE per $F = 1.8$.

7.4.5.2.1 Algoritmo Matlab

Di seguito viene riportato un estratto dello script Matlab utilizzato per i plot sopra riportati, soffermandosi sul calcolo della soluzione inerente il problema differenziale S-FRDE.

```

function [f_cosht,Coeff] = Cr_cosht(n,x1,t1)
% function per il calcolo delle componenti dell' r-esimo
% coefficiente di integrazione temporale nella serie ADM
a = n;
b = 0;
c = n;
A = zeros(1,n+1);
RefA = zeros(1,n+1);
f_cosht = zeros(length(t1),n+1);

% ciclo per ricreare il vettore A = [n! (n-1)! ... 2! 1! 0!]
for i = 1:(n+1)
    A(i) = factorial(a);
    
```

```

    a = n-i;
end

% ciclo per ricreare il vettore Ref A = [0! 1! ... (n-2)! (n-1)!
% n!]'
for i = 1:(n+1)
    RefA(i) = factorial(b);
    b = i;
end
Tensor_product = A'*RefA;
Coeff = diag(Tensor_product);

% con questo ciclo si genera una matrice dove nelle colonne ci
% sono i valori di [cos(t)]^(j-1)
% f_cosht(:,j) sono i valori di (cosh(t))^(n+1-j) -->
% f_cosht(:,1) = (cosh(t))^(n)
% f_cosht(:,2) = (cosh(t))^(n-1)
% f_cosht(:,n) = cosh(t)
% f_cosht(:,n+1) = 1

for j = 1:(n+1)
    f_cosht(:,j) = (-1)^(j+1)*cosh(t1).^c;
    c = n-j;
end
end
end

```

```

% calcolo delle componenti dell'integrazione temporale
% C sta per COMPONENTE ed il numero davanti è il riferimento a
% quale componente della decomposizione Adomia si riferisce
% Costruisco la matrice C dove C(:,r) è Cr, cioè l' r-esimo
% coefficiente di integrazione temporale nella serie ADM

```

```

n = 30; % numero di componenti serie ADM

```

```

% inizializzazione delle variabili
C = zeros(length(t1),n);
Cr = zeros(length(t1),1);

```

```

for r = 1:n
    % function per il calcolo delle componenti dell' r-esimo
    % coefficiente di integrazione temporale nella serie ADM
    [f_cosht,Coeff] = Cr_cosht(r,x1,t1);

    for l = 1:r+1
        Cr = Cr + f_cosht(:,l)./Coeff(l);
    end
    C(:,r) = Cr;
    Cr = zeros(length(t1),1);
end

```

```

%-----
% soluzione per laplaciano frazionario e  $K = \sinh(t)$ 
%  $u, t = \sinh(t)$   $u, F$  con  $1 < F \leq 2$ 
%  $u(x,0) = \sin x$ 

```

```

N1 = n;
ufraz_sinh_t_F1 = zeros(length(t1),length(x1));

```

```
for F1 = 1.2:0.2:2.0
for n = 0 : N1
    if n == 0
        ufraz_sinh_t_F1 = ones(length(t1),1)*sin(x1);
    else
        ufraz_sinh_t_F1 = ufraz_sinh_t_F1 +
C(:,n)*sin(x1+n*F1*pi/2);
    end
end
end
```

7.4.5.3 S-FRDE con condizioni iniziali $u(x, 0) = \cos(x)$

Ripercorrendo la procedura ADM si giunge al seguente termine generale

$$\begin{aligned}
 u_n(x, t) &= L_t^{-1}(\sinh(t))D^F u_{n-1}(x, t) = \\
 &= \frac{1}{\text{Diag}[\mathbb{A} \otimes (\text{Ref}\mathbb{A})^T]} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} +1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{ij} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (-1)^{j+1} \end{pmatrix}}_{[n+1] \times [n+1]} \cdot \begin{pmatrix} \cosh^n t \\ \cosh^{(n-1)} t \\ \cosh^{(n-2)} t \\ \vdots \\ \cosh t \\ 1 \end{pmatrix} \quad (7.50) \\
 &\cdot \cos\left(x + \frac{nF \cdot \pi}{2}\right)
 \end{aligned}$$

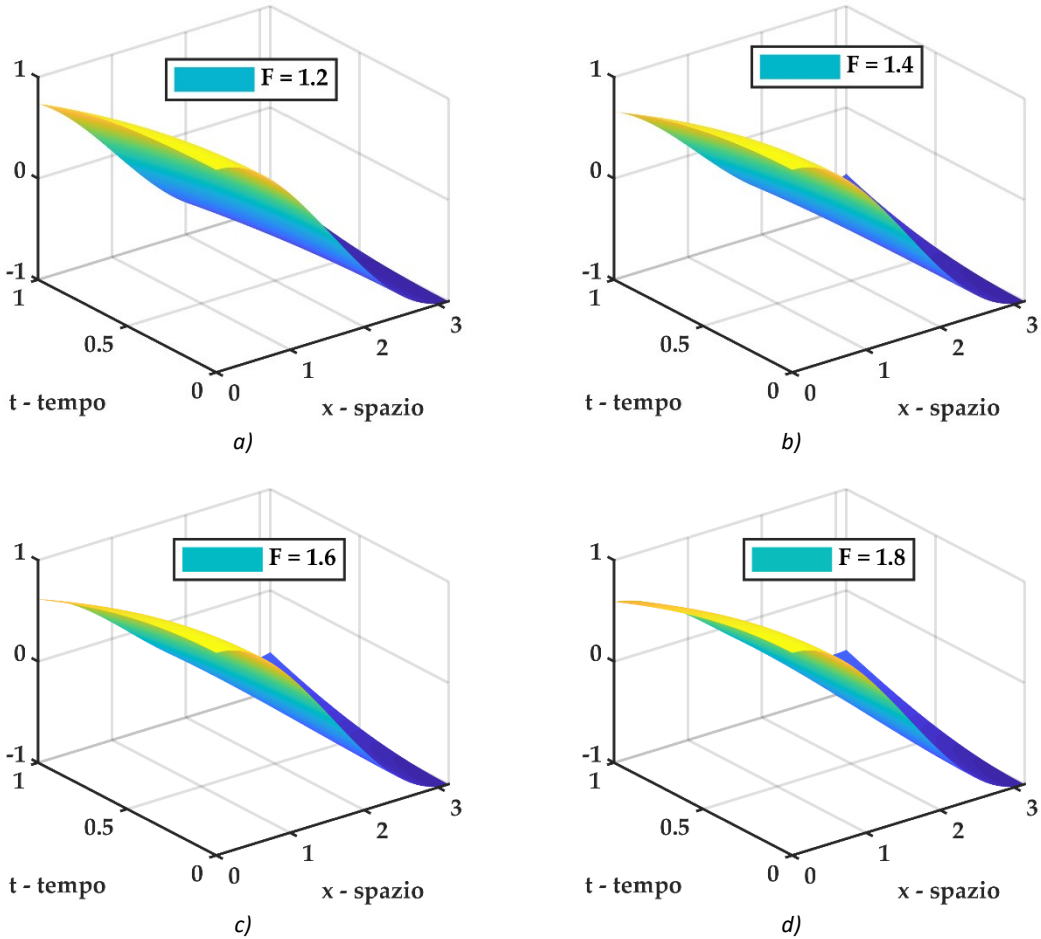


Figura 7-46 plot 3D della soluzione $u(x, t)$ del problema differenziale frazionario S-FRDE con $u(x, 0) = \cos(x)$ e coefficiente di diffusione funzione del tempo $K = \sinh(t)$ per diversi valori dell'ordine di derivazione frazionario. a) soluzione S-FRDE per $F = 1.2$, b) soluzione S-FRDE per $F = 1.4$, c) soluzione S-FRDE per $F = 1.6$, d) soluzione S-FRDE per $F = 1.8$.

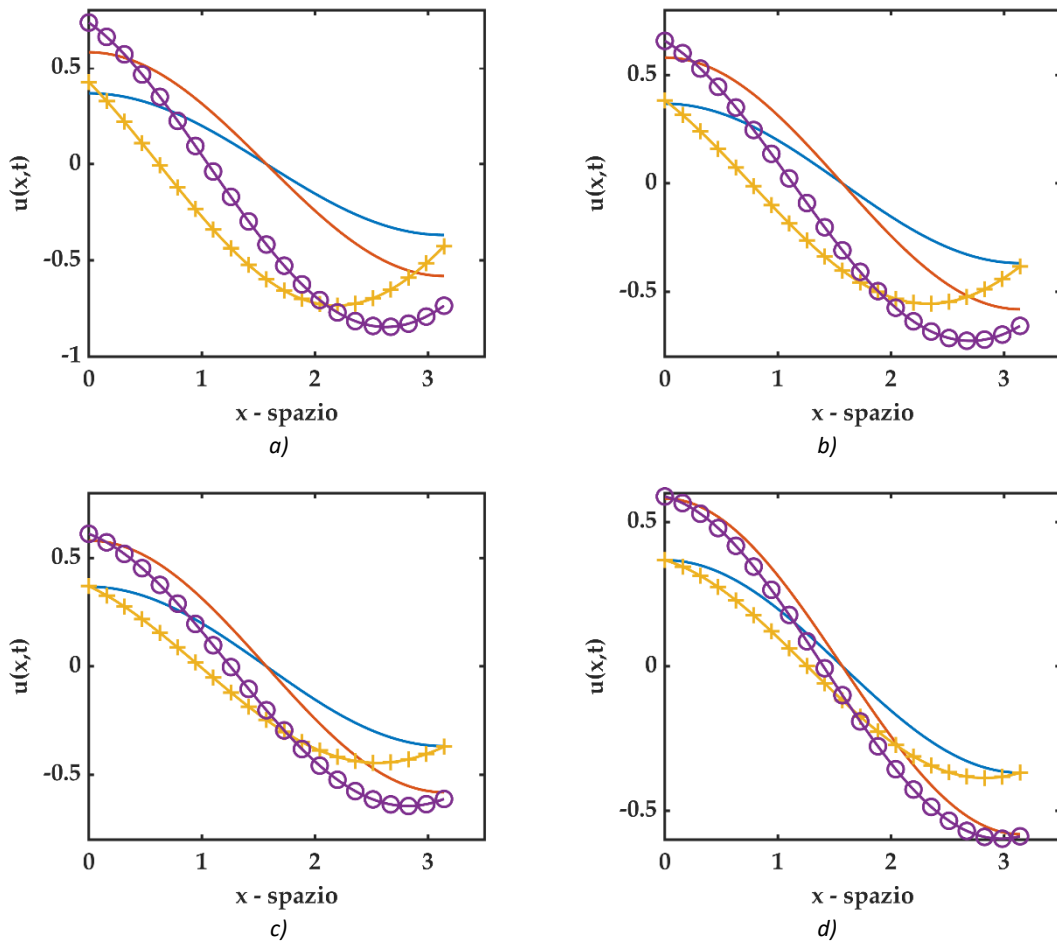


Figura 7-47 plot 2D di confronto fra soluzioni del problema differenziale frazionario S-FRDE con $u(x, 0) = \cos(x)$ e $t = 1.0$ dove (— linea continua - blu) rappresenta la soluzione standard DE con Laplaciano standard e $K = \cos(t)$, (— linea continua - rosso) rappresenta la soluzione standard DE con Laplaciano standard e $K = \sinh(t)$, (+ croce - giallo) rappresenta la soluzione S-FRDE con Laplaciano frazionario di ordine F e $K = \cos(t)$, (⊙ cerchio - viola) rappresenta la soluzione S-FRDE con Laplaciano frazionario di ordine F e $K = \sinh(t)$. a) soluzione S-FRDE per $F = 1.2$, b) soluzione S-FRDE per $F = 1.4$, c) soluzione S-FRDE per $F = 1.6$, d) soluzione S-FRDE per $F = 1.8$.

7.4.5.3.1 Algoritmo Matlab

Di seguito viene riportato un estratto dello script Matlab utilizzato per i plot sopra riportati, soffermandosi sul calcolo della soluzione inerente il problema differenziale S-FRDE. Il simbolo (:) sta ad indicare che la parte di codice precedente è esattamente la stessa di quella riportata al paragrafo 7.4.5.2 per il problema S-FRDE con $u(x, 0) = \sin(x)$, essendo adibita al calcolo delle componenti della matrice \mathbf{C} per l'integrazione temporale in ADM che non si modifica al variare delle condizioni al contorno.

```

:
%-----
% soluzione per laplaciano frazionario e K = sinh(t)
% u,t = sinh(t) u,F      con  1 < F <= 2
% u(x,0) = cos(x)

N1 = n;
ufraz_sinh_t_F1 = zeros(length(t1),length(x1));
for F1 = 1.2:0.2:2.0

```

```
for n = 0 : N1
    if n == 0
        ufraz_sinh_t_F1 = ones(length(t1),1)*cos(x1);
    else
        ufraz_sinh_t_F1 = ufraz_sinh_t_F1 +
            C(:,n)*cos(x1+n*F1*pi/2);
    end
end
end
```

7.4.5.4 S-FRDE con condizioni iniziali $u(x, 0) = e^{ax}$ $Re(a) \geq 0$

Ripercorrendo la procedura ADM si giunge al seguente termine generale

$$u_n(x, t) = L_t^{-1}(\sinh(t))D^F u_{n-1}(x, t) =$$

$$= \frac{1}{\text{Diag}[A \otimes (\text{Ref}A)^T]} \cdot \begin{matrix} & & & j \\ \begin{pmatrix} +1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{ij} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (-1)^{j+1} \end{pmatrix} & \cdot & \begin{pmatrix} \cosh^n t \\ \cosh^{(n-1)} t \\ \cosh^{(n-2)} t \\ \vdots \\ \cosh t \\ 1 \end{pmatrix} \end{matrix} \quad (7.51)$$

$$\cdot a^{nF} e^{ax}$$

$[n+1] \times [n+1]$

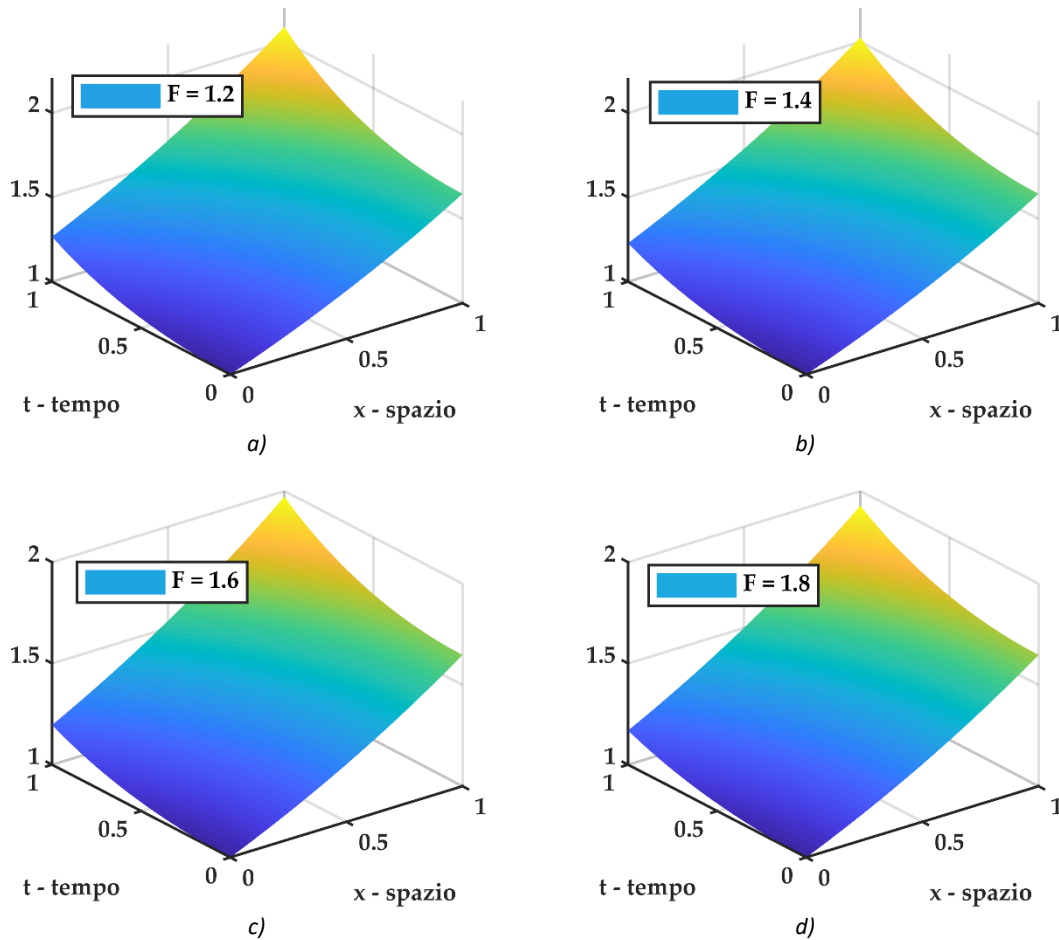


Figura 7-48 plot 3D della soluzione $u(x, t)$ del problema differenziale frazionario S-FRDE con $u(x, 0) = e^{ax}$ con $a = 0.50$ e coefficiente di diffusione funzione del tempo $K = \sinh(t)$ per diversi valori dell'ordine di derivazione frazionario. a) soluzione S-FRDE per $F = 1.2$, b) soluzione S-FRDE per $F = 1.4$, c) soluzione S-FRDE per $F = 1.6$, d) soluzione S-FRDE per $F = 1.8$.

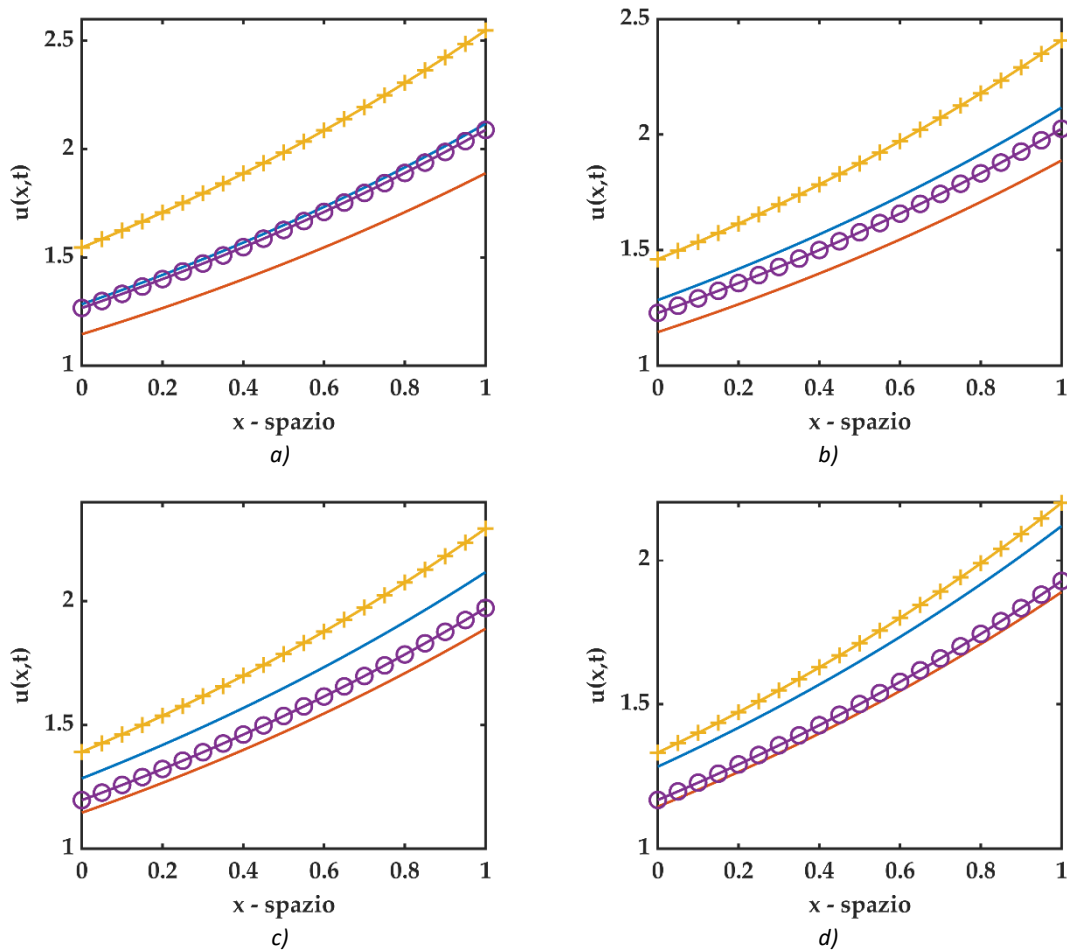


Figura 7-49 plot 2D di confronto fra soluzioni del problema differenziale frazionario S-FRDE con $u(x, 0) = e^{ax}$ con $a = 0.50$ e $t = 1.0$ dove (– linea continua - blu) rappresenta la soluzione standard DE con Laplaciano standard e $K = \text{cost}$, (– linea continua - rosso) rappresenta la soluzione standard DE con Laplaciano standard e $K = \sinh(t)$, (+ croce - giallo) rappresenta la soluzione S-FRDE con Laplaciano frazionario di ordine F e $K = \text{cost}$, (© cerchio - viola) rappresenta la soluzione S-FRDE con Laplaciano frazionario di ordine F e $K = \sinh(t)$. a) soluzione S-FRDE per $F = 1.2$, b) soluzione S-FRDE per $F = 1.4$, c) soluzione S-FRDE per $F = 1.6$, d) soluzione S-FRDE per $F = 1.8$.

7.4.5.4.1 Algoritmo Matlab

Di seguito viene riportato un estratto dello script Matlab utilizzato per i plot sopra riportati, soffermandosi sul calcolo della soluzione inerente il problema differenziale S-FRDE. Il simbolo (:) sta ad indicare che la parte di codice precedente è esattamente la stessa di quella riportata al paragrafo 7.4.5.2 per il problema S-FRDE con $u(x, 0) = \sin(x)$, essendo adibita al calcolo delle componenti della matrice **C** per l'integrazione temporale in ADM che non si modifica al variare delle condizioni al contorno.

```

:
%-----
% soluzione per laplaciano frazionario e K = sinh(t)
% u,t = sinh(t) u,F      con  1 < F <= 2
% u(x,0) = e^(ax)

N1 = n;
ufraz_sinh_t F1 = zeros(length(t1),length(x1));

```

```
for F1 = 1.2:0.2:2.0
for n = 0 : N1
    if n == 0
        ufraz_sinh_t_F1 = ones(length(t1),1)*exp(a*x1);
    else
        ufraz_sinh_t_F1 = ufraz_sinh_t_F1 +
C(:,n)*a^(F1*n)*exp(a*x1);
    end
end
end
```

7.4.6 $K = K(t) = \cosh(t)$
7.4.6.1 S-FRDE con condizioni iniziali $u(x, 0) = x^\alpha$

Si considera ora il seguente problema differenziale

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \cosh(t) \cdot \frac{\partial^F u}{\partial x^F} & 1 < F \leq 2 \\ u(x, 0) = x^\alpha \end{cases} \quad (7.52)$$

come per il problema precedente, si considera la derivata di Caputo con punto base $a = 0$.

Si ottengono le seguenti componenti

n	u_n
0	$u_0(x, t) = x^\alpha = f(x)$
1	$u_1(x, t) = L_t^{-1}(\cosh(t))D^F u_0(x, t) = \int_0^t \cosh(t) dt \cdot D^F f(x)$ $= \sinh(t) _0^t \cdot \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\Gamma(\alpha + 1 - F)} \cdot x^{\alpha - F}$ $= \sinh(t) \cdot \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\Gamma(\alpha + 1 - F)} \cdot x^{\alpha - F}$
2	$u_2(x, t) = L_t^{-1}(\cosh(t))D^F u_1(x, t)$ $= L_t^{-1} \left[(\cosh(t))D^F \left\{ \sinh(t) \cdot \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\Gamma(\alpha + 1 - F)} \cdot x^{\alpha - F} \right\} \right]$ $= \int_0^t \sinh(t) \cosh(t) dt \cdot \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\Gamma(\alpha + 1 - F)} D^F \{x^{\alpha - F}\}$ $= \frac{\sinh^2(t)}{2} \Big _0^t \cdot \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\Gamma(\alpha + 1 - F)} \cdot \frac{\Gamma(\alpha + 1 - F)}{\Gamma(\alpha + 1 - 2F)} \cdot x^{\alpha - 2F}$ $= \frac{\sinh^2(t)}{2} \cdot \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\Gamma(\alpha + 1 - 2F)} \cdot x^{\alpha - 2F} =$
3	$u_3(x, t) = L_t^{-1}(\cosh(t))D^F u_2(x, t)$ $= L_t^{-1} \left[(\cosh(t))D^F \left\{ \frac{\sinh^2(t)}{2} \cdot \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\Gamma(\alpha + 1 - 2F)} \cdot x^{\alpha - 2F} \right\} \right]$ $= \int_0^t \frac{\cosh(t) \sinh^2(t)}{2} dt \cdot \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\Gamma(\alpha + 1 - 2F)} D^F \{x^{\alpha - 2F}\}$ $= \frac{\sinh^3(t)}{6} \Big _0^t \cdot \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\Gamma(\alpha + 1 - 2F)} \cdot \frac{\Gamma(\alpha + 1 - 2F)}{\Gamma(\alpha + 1 - 3F)} \cdot x^{\alpha - 3F}$ $= \frac{\sinh^3(t)}{6} \cdot \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\Gamma(\alpha + 1 - 3F)} \cdot x^{\alpha - 3F}$
\vdots	\vdots
n	$u_n(x, t) = L_t^{-1}(\cosh(t))D^F u_{n-1}(x, t) = \frac{\sinh^n(t)}{n!} \cdot \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\Gamma(\alpha + 1 - nF)} \cdot x^{\alpha - nF}$

Viene fissato il valore di $x^\alpha = x^6$.

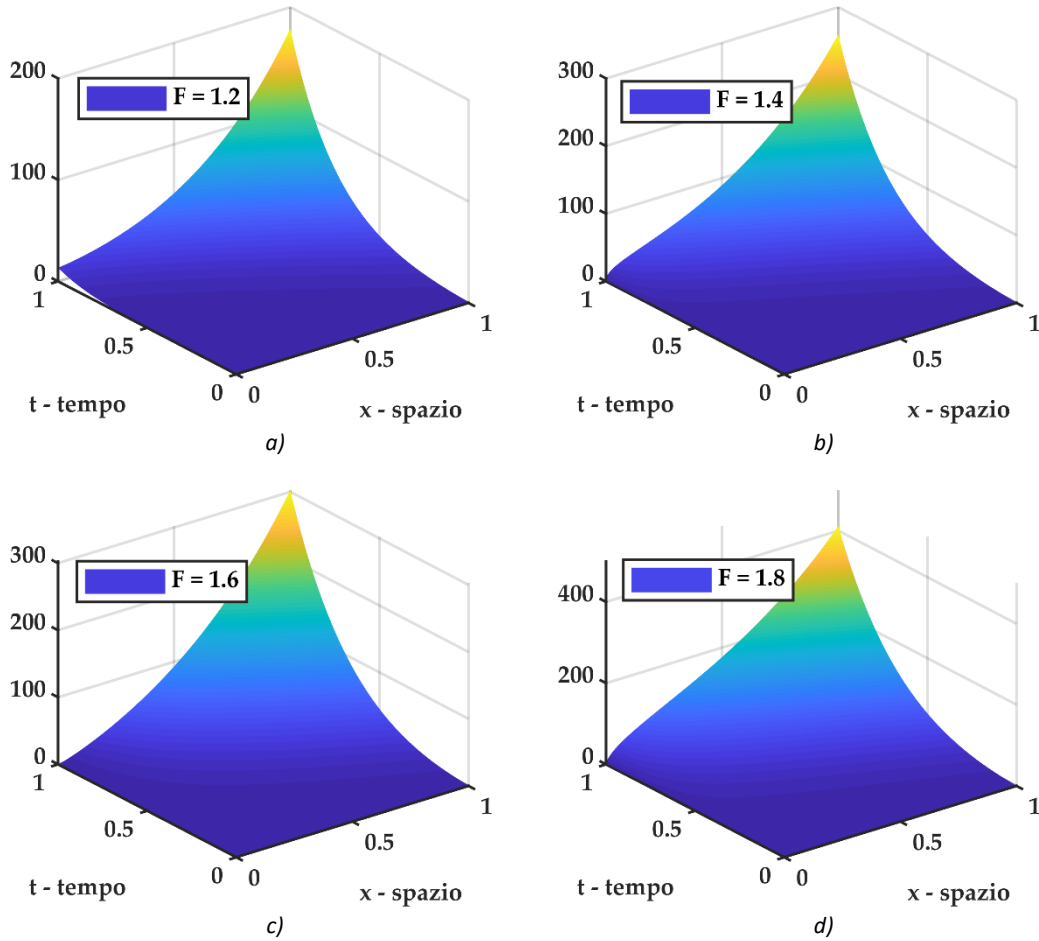


Figura 7-50 plot 3D della soluzione $u(x,t)$ del problema differenziale frazionario S-FRDE con $u(x,0) = x^\alpha$ e coefficiente di diffusione funzione del tempo $K = \cosh(t)$ per diversi valori dell'ordine di derivazione frazionario. a) soluzione S-FRDE per $F = 1.2$, b) soluzione S-FRDE per $F = 1.4$, c) soluzione S-FRDE per $F = 1.6$, d) soluzione S-FRDE per $F = 1.8$.

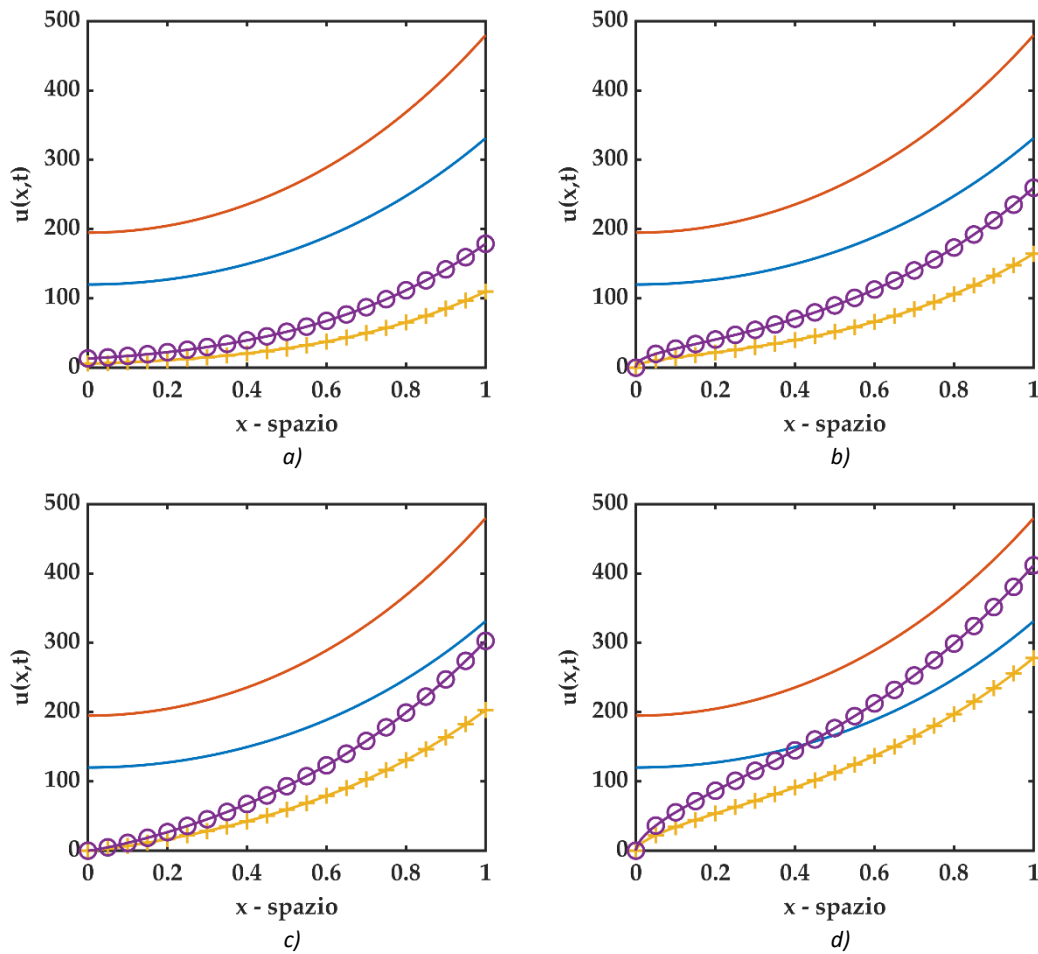


Figura 7-51 plot 2D di confronto fra soluzioni del problema differenziale frazionario S-FRDE con $u(x, 0) = x^\alpha$ e $t = 1.0$ dove (– linea continua - blu) rappresenta la soluzione standard DE con Laplaciano standard e $K = \text{cost}$, (– linea continua - rosso) rappresenta la soluzione standard DE con Laplaciano standard e $K = \text{cosh}(t)$, (+ croce - giallo) rappresenta la soluzione S-FRDE con Laplaciano frazionario di ordine F e $K = \text{cost}$, (⊙ cerchio - viola) rappresenta la soluzione S-FRDE con Laplaciano frazionario di ordine F e $K = \text{cosh}(t)$. a) soluzione S-FRDE per $F = 1.2$, b) soluzione S-FRDE per $F = 1.4$, c) soluzione S-FRDE per $F = 1.6$, d) soluzione S-FRDE per $F = 1.8$.

7.4.6.1.1 Algoritmo Matlab

Di seguito viene riportato un estratto dello script Matlab utilizzato per i plot sopra riportati, soffermandosi sul calcolo della soluzione inerente il problema differenziale S-FRDE.

```

% calcolo delle componenti deell'integrazione temporale
% C sta per COMPONENTE ed il numero davanti è il riferimento a
% quale componente della decomposizione Adomia si riferisce
C1 = sinh(t1);
C2 = (sinh(t1)).^2./2;
C3 = (sinh(t1)).^3./6;
C4 = (sinh(t1)).^4./24;
C5 = (sinh(t1)).^5./120;

%-----
% laplaciano frazionario e K = K(t) = cosh(t) soluzione ADM
% u,t = cosh(t) u,F con 1 < F <= 2
% u(x,0) = x^6
    
```

```

alpha = 6;
%-----

F1 = 1.2;
ufraz_cosh_t_F1 = x1.^alpha + C1*gamma(alpha+1)/gamma(alpha+1-
F1)*x1.^(alpha-F1)+C2*gamma(alpha+1)/gamma(alpha+1-
2*F1)*x1.^(alpha-2*F1)+C3*gamma(alpha+1)/gamma(alpha+1-
3*F1)*x1.^(alpha-3*F1)+C4*gamma(alpha+1)/gamma(alpha+1-
4*F1)*x1.^(alpha-4*F1)+C5*gamma(alpha+1)/gamma(alpha+1-
5*F1)*x1.^(alpha-5*F1);

F2 = 1.4;
ufraz_cosh_t_F2 = x1.^alpha + C1*gamma(alpha+1)/gamma(alpha+1-
F2)*x1.^(alpha-F2)+C2*gamma(alpha+1)/gamma(alpha+1-
2*F2)*x1.^(alpha-2*F2)+C3*gamma(alpha+1)/gamma(alpha+1-
3*F2)*x1.^(alpha-3*F2)+C4*gamma(alpha+1)/gamma(alpha+1-
4*F2)*x1.^(alpha-4*F2);

F3 = 1.6;
ufraz_cosh_t_F3 = x1.^alpha + C1*gamma(alpha+1)/gamma(alpha+1-
F3)*x1.^(alpha-F3)+C2*gamma(alpha+1)/gamma(alpha+1-
2*F3)*x1.^(alpha-2*F3)+C3*gamma(alpha+1)/gamma(alpha+1-
3*F3)*x1.^(alpha-3*F3);

F4 = 1.8;
ufraz_cosh_t_F4 = x1.^alpha + C1*gamma(alpha+1)/gamma(alpha+1-
F4)*x1.^(alpha-F4)+C2*gamma(alpha+1)/gamma(alpha+1-
2*F4)*x1.^(alpha-2*F4)+C3*gamma(alpha+1)/gamma(alpha+1-
3*F4)*x1.^(alpha-3*F4);

```

7.4.6.2 S-FRDE con condizioni iniziali $u(x, 0) = \sin(x)$

Ripercorrendo la procedura ADM si giunge al seguente termine generale

$$u_n(x, t) = L_t^{-1}(\cosh(t))D^F u_{n-1}(x, t) = \frac{\sinh^n(t)}{n!} \cdot \sin\left(x + \frac{nF \cdot \pi}{2}\right) \quad (7.53)$$

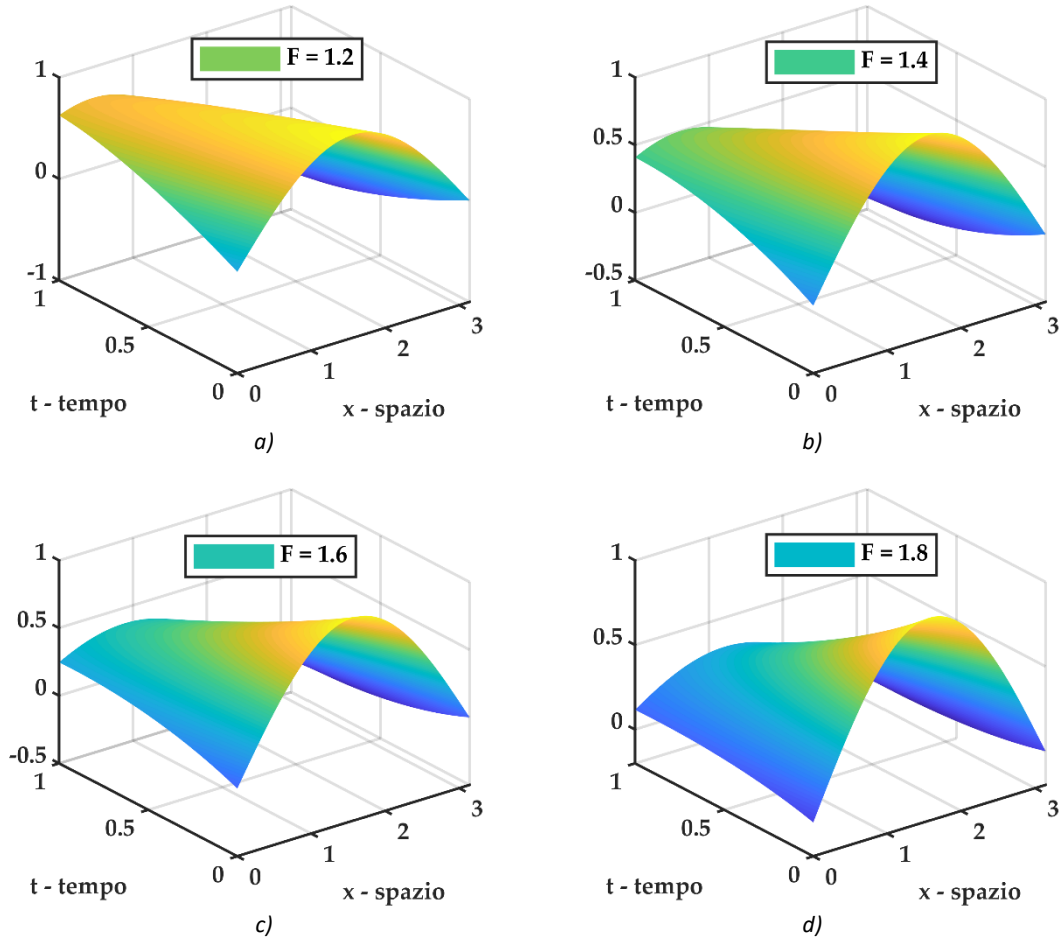


Figura 7-52 plot 3D della soluzione $u(x, t)$ del problema differenziale frazionario S-FRDE con $u(x, 0) = \sin(x)$ e coefficiente di diffusione funzione del tempo $K = \cosh(t)$ per diversi valori dell'ordine di derivazione frazionario. a) soluzione S-FRDE per $F = 1.2$, b) soluzione S-FRDE per $F = 1.4$, c) soluzione S-FRDE per $F = 1.6$, d) soluzione S-FRDE per $F = 1.8$.

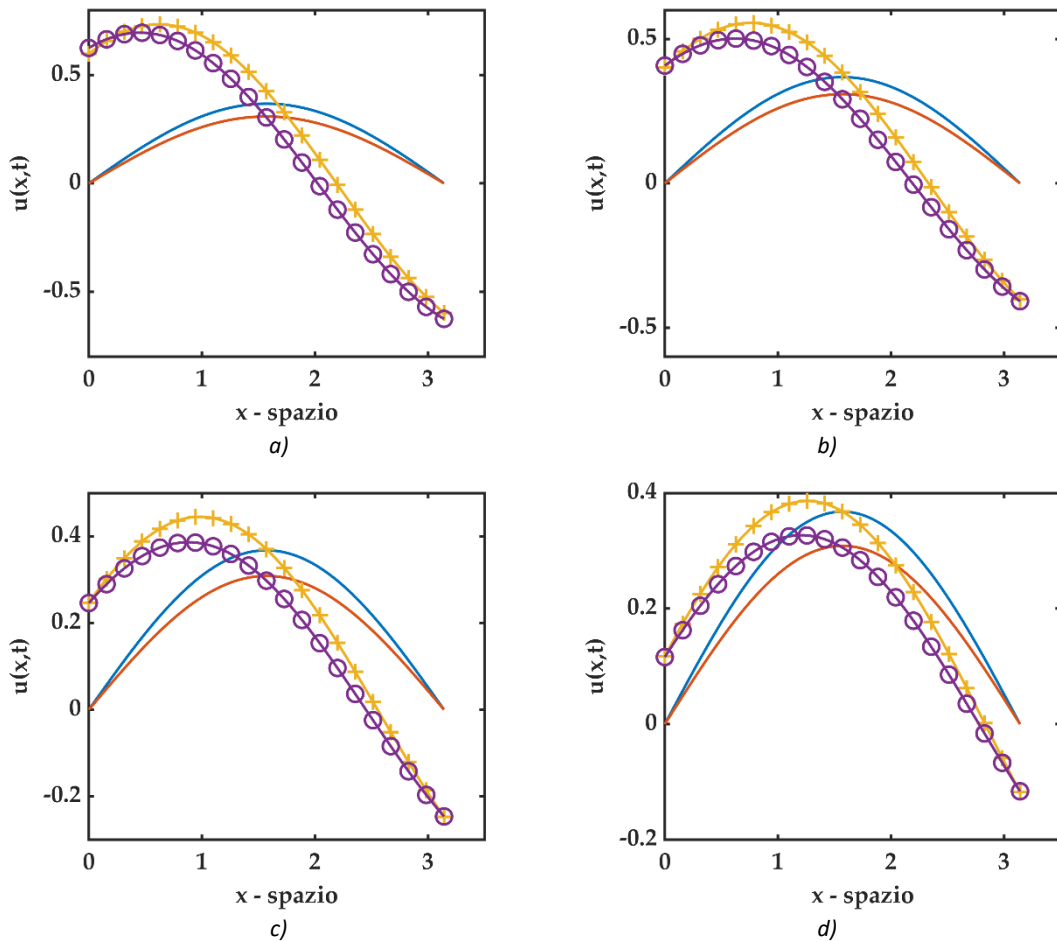


Figura 7-53 plot 2D di confronto fra soluzioni del problema differenziale frazionario S-FRDE con $u(x, 0) = \sin(x)$ e $t = 1.0$ dove (– linea continua - blu) rappresenta la soluzione standard DE con Laplaciano standard e $K = \cosh(t)$, (– linea continua - rosso) rappresenta la soluzione standard DE con Laplaciano standard e $K = \cos(t)$, (+ croce - giallo) rappresenta la soluzione S-FRDE con Laplaciano frazionario di ordine F e $K = \cosh(t)$, (⊙ cerchio - viola) rappresenta la soluzione S-FRDE con Laplaciano frazionario di ordine F e $K = \cos(t)$. a) soluzione S-FRDE per $F = 1.2$, b) soluzione S-FRDE per $F = 1.4$, c) soluzione S-FRDE per $F = 1.6$, d) soluzione S-FRDE per $F = 1.8$.

7.4.6.2.1 Algoritmo Matlab

Di seguito viene riportato un estratto dello script Matlab utilizzato per i plot sopra riportati, soffermandosi sul calcolo della soluzione inerente il problema differenziale S-FRDE.

```

%-----
% soluzione per laplaciano frazionario e K = cosh(t)
% u,t = cosh(t) u,F    con  1 < F <= 2
% u(x,0) = sin(x)
n = 30; % numero di termini serie ADM
N1 = n;
ufraz_cosh_t_F1 = zeros(length(t1),length(x1));
for F1 = 1.2:0.2:2.0
for n = 0 : N1
    ufraz_cosh_t_F1 = ufraz_cosh_t_F1 + sinh(t1).^n./factorial(n)
        *sin(x1+n*F1*pi/2);
end
end
    
```

7.4.6.3 S-FRDE con condizioni iniziali $u(x, 0) = \cos(x)$

Ripercorrendo la procedura ADM si giunge al seguente termine generale

$$u_n(x, t) = L_t^{-1}(\cosh(t))D^F u_{n-1}(x, t) = \frac{\sinh^n(t)}{n!} \cdot \cos\left(x + \frac{nF \cdot \pi}{2}\right) \quad (7.54)$$

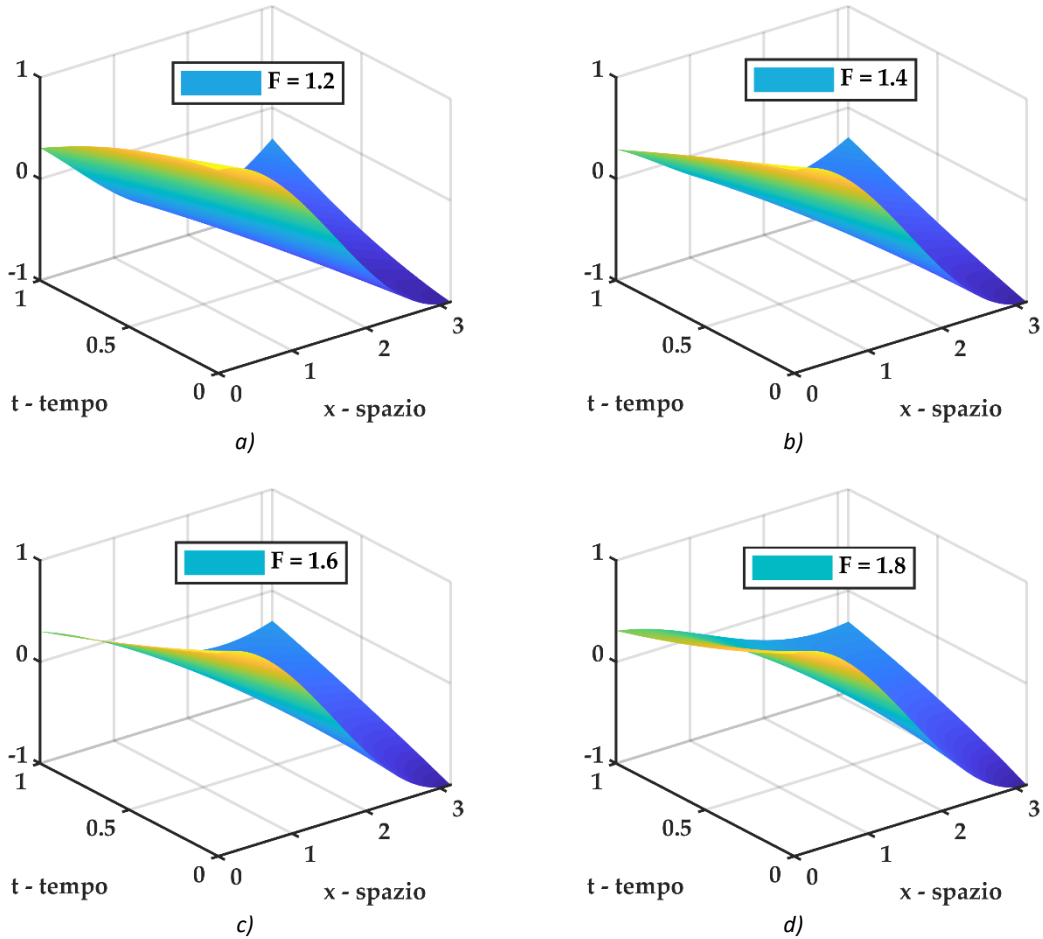


Figura 7-54 plot 3D della soluzione $u(x, t)$ del problema differenziale frazionario S-FRDE con $u(x, 0) = \cos(x)$ e coefficiente di diffusione funzione del tempo $K = \cosh(t)$ per diversi valori dell'ordine di derivazione frazionario. a) soluzione S-FRDE per $F = 1.2$, b) soluzione S-FRDE per $F = 1.4$, c) soluzione S-FRDE per $F = 1.6$, d) soluzione S-FRDE per $F = 1.8$.

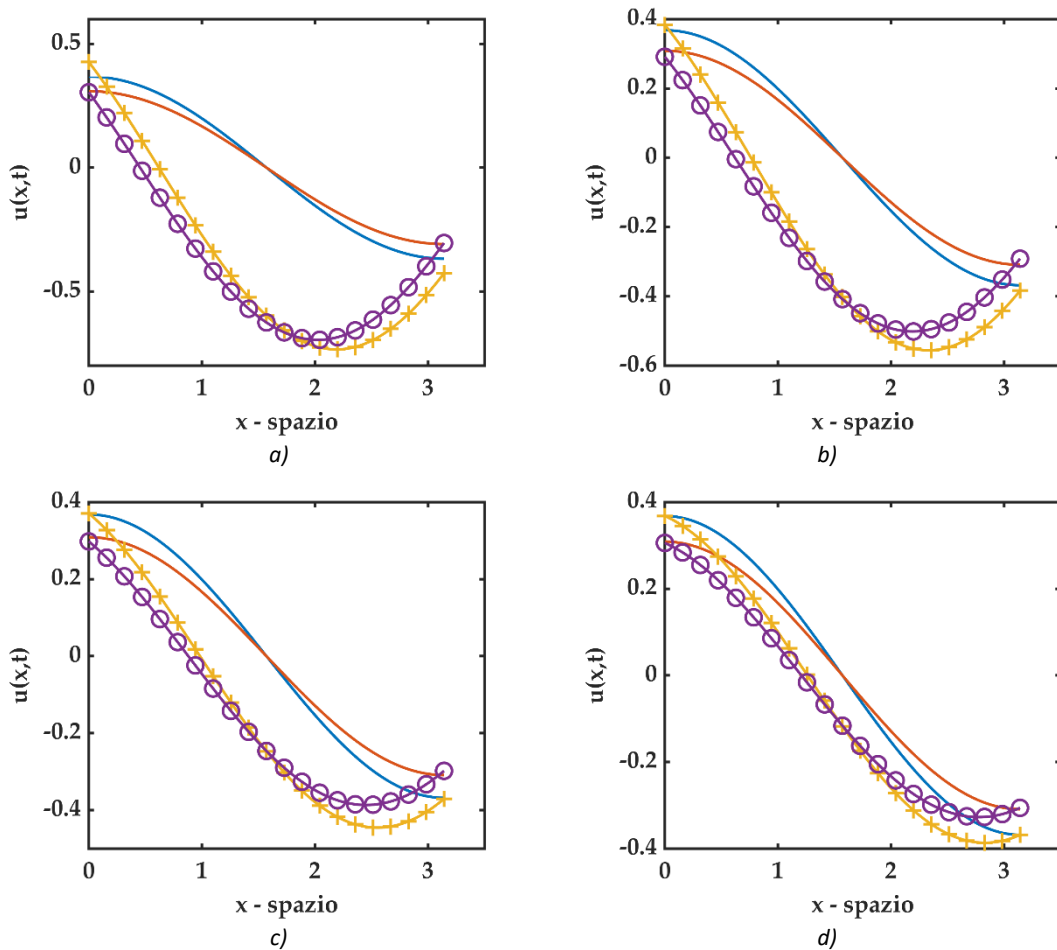


Figura 7-55 plot 2D di confronto fra soluzioni del problema differenziale frazionario S-FRDE con $u(x, 0) = \cos(x)$ e $t = 1.0$ dove (– linea continua - blu) rappresenta la soluzione standard DE con Laplaciano standard e $K = \cosh(t)$, (– linea continua - rosso) rappresenta la soluzione standard DE con Laplaciano standard e $K = \cos(t)$, (+ croce - giallo) rappresenta la soluzione S-FRDE con Laplaciano frazionario di ordine F e $K = \cosh(t)$, (⊙ cerchio - viola) rappresenta la soluzione S-FRDE con Laplaciano frazionario di ordine F e $K = \cos(t)$. a) soluzione S-FRDE per $F = 1.2$, b) soluzione S-FRDE per $F = 1.4$, c) soluzione S-FRDE per $F = 1.6$, d) soluzione S-FRDE per $F = 1.8$.

7.4.6.3.1 Algoritmo Matlab

Di seguito viene riportato un estratto dello script Matlab utilizzato per i plot sopra riportati, soffermandosi sul calcolo della soluzione inerente il problema differenziale S-FRDE.

```

%-----
% soluzione per laplaciano frazionario e K = cosh(t)
% u,t = cosh(t) u,F    con  1 < F <= 2
% u(x,0) = cos(x)
n = 30; % numero di termini serie ADM
N1 = n;
ufraz_cosh_t_F1 = zeros(length(t1),length(x1));
for F1 = 1.2:0.2:2.0
for n = 0 : N1
    ufraz_cosh_t_F1 = ufraz_cosh_t_F1 + sinh(t1).^n./factorial(n)
        *cos(x1+n*F1*pi/2);
end
end
    
```

7.4.6.4 S-FRDE con condizioni iniziali $u(x, 0) = e^{ax}$ $Re(a) \geq 0$

Ripercorrendo la procedura ADM si giunge al seguente termine generale

$$u_n(x, t) = L_t^{-1}(\cosh(t))D^F u_{n-1}(x, t) = \frac{\sinh^n(t)}{n!} \cdot a^{nF} \cdot e^{ax} \quad (7.55)$$

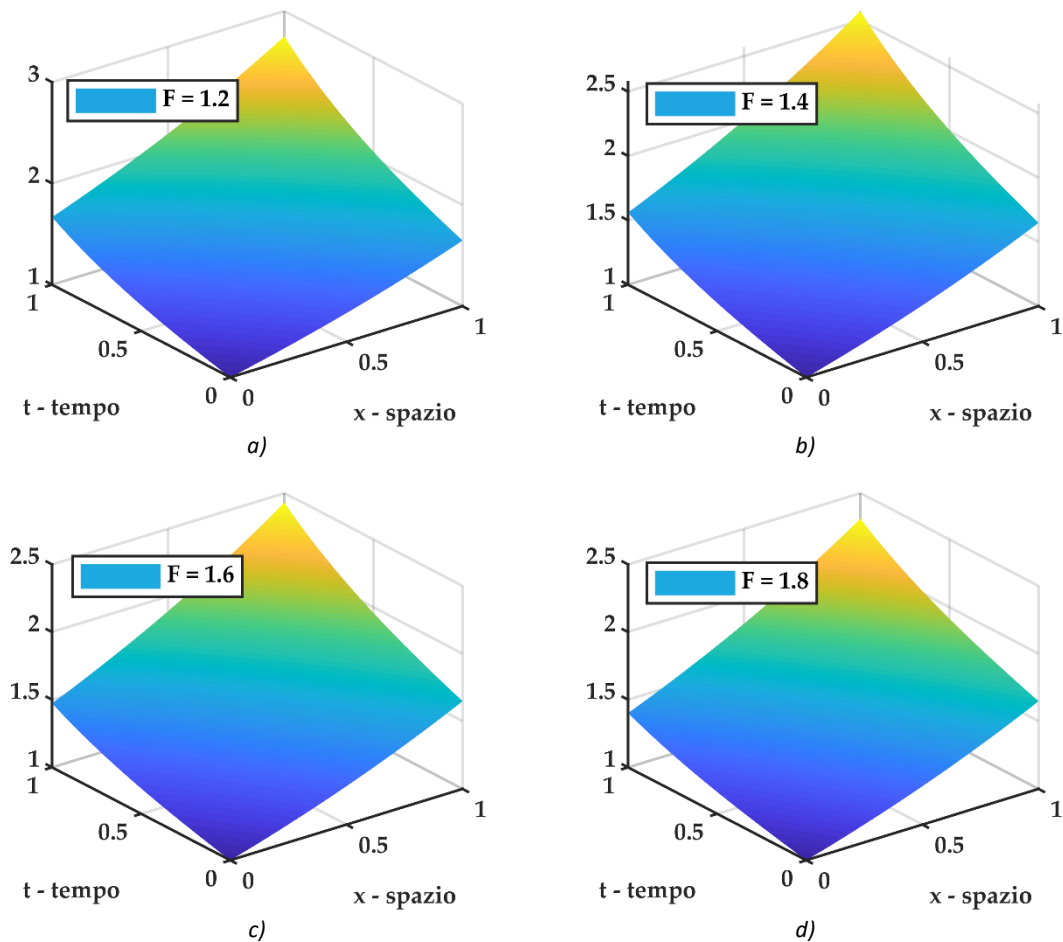


Figura 7-56 plot 3D della soluzione $u(x, t)$ del problema differenziale frazionario S-FRDE con $u(x, 0) = e^{ax}$ con $a = 0.50$ e coefficiente di diffusione funzione del tempo $K = \cosh(t)$ per diversi valori dell'ordine di derivazione frazionario. a) soluzione S-FRDE per $F = 1.2$, b) soluzione S-FRDE per $F = 1.4$, c) soluzione S-FRDE per $F = 1.6$, d) soluzione S-FRDE per $F = 1.8$.

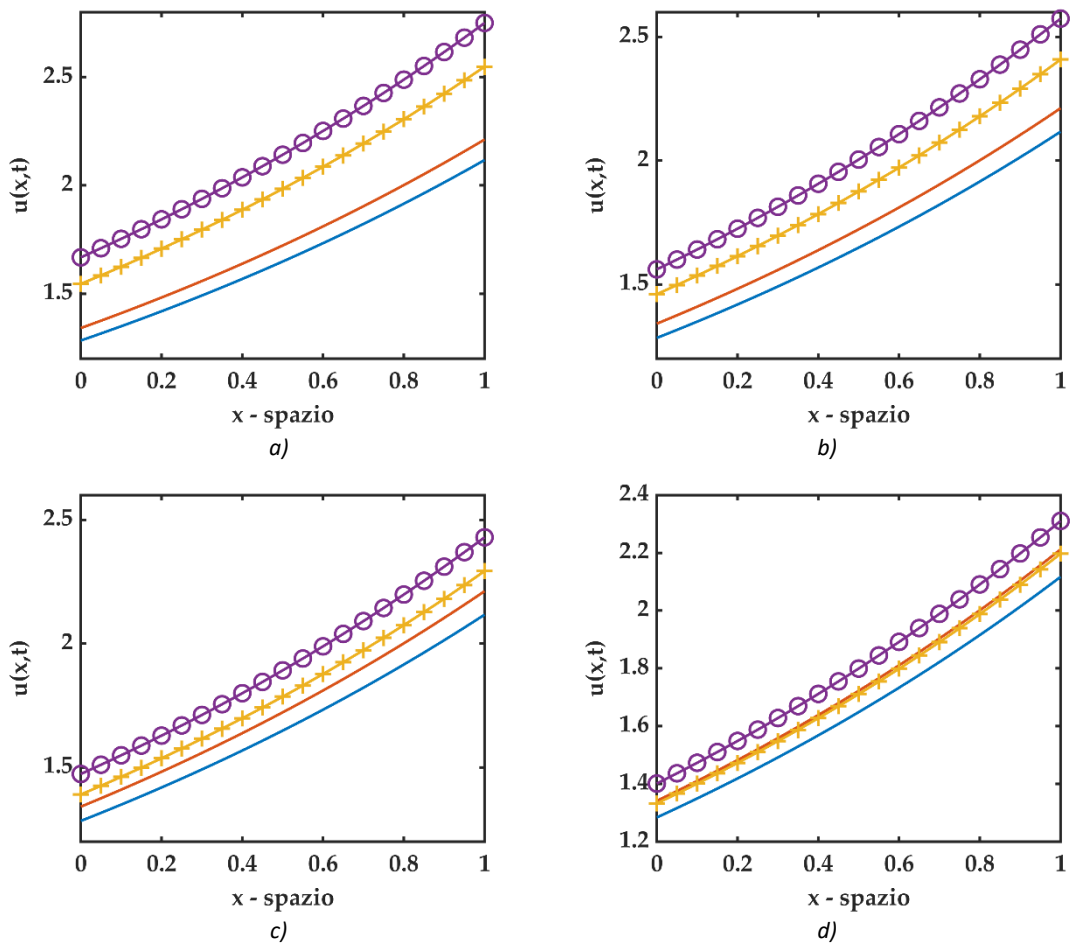


Figura 7-57 plot 2D di confronto fra soluzioni del problema differenziale frazionario S-FRDE con $u(x, 0) = e^{ax}$ con $a = 0.50$ e $t = 1.0$ dove (– linea continua - blu) rappresenta la soluzione standard DE con Laplaciano standard e $K = \text{cost}$, (– linea continua - rosso) rappresenta la soluzione standard DE con Laplaciano standard e $K = \cosh(t)$, (+ croce - giallo) rappresenta la soluzione S-FRDE con Laplaciano frazionario di ordine F e $K = \text{cost}$, (© cerchio - viola) rappresenta la soluzione S-FRDE con Laplaciano frazionario di ordine F e $K = \cosh(t)$. a) soluzione S-FRDE per $F = 1.2$, b) soluzione S-FRDE per $F = 1.4$, c) soluzione S-FRDE per $F = 1.6$, d) soluzione S-FRDE per $F = 1.8$.

7.4.6.4.1 Algoritmo Matlab

Di seguito viene riportato un estratto dello script Matlab utilizzato per i plot sopra riportati, soffermandosi sul calcolo della soluzione inerente il problema differenziale S-FRDE.

```

%-----
% soluzione per laplaciano frazionario e K = cosh(t)
% u,t = cosh(t) u,F    con    1 < F <= 2
% u(x,0) = e^(ax)
n = 30; % numero di termini serie ADM
N1 = n;
ufraz_cosh_t_F1 = zeros(length(t1),length(x1));
for F1 = 1.2:0.2:2.0
for n = 0 : N1
    ufraz_cosh_t_F1 = ufraz_cosh_t_F1 + sinh(t1).^n./factorial(n)
        *a^(F1*n)*exp(a*x1);
end
    
```


Capitolo 8

ADM per Diffusione Anomala

T-FRDE e fractal-TRW

8.1 Introduzione

In questo capitolo si vuole studiare l'andamento della soluzione dell'equazione della diffusione monodimensionale frazionaria in tempo (T-FRDE) con diverse condizioni iniziali attraverso ADM. L'approccio frazionario, in questo caso, al contrario del capitolo precedente, è applicato all'operatore temporale rappresentando fisicamente lunghi tempi di attesa fra uno step ed il successivo.

Le condizioni iniziali considerate sono le medesime di quelle considerate per la standard DE, ovvero $u(x, 0) = x^3, \sin(x), \cos(x), e^{ax}$ ed un coefficiente di diffusione costante $K = cost$ viene considerato per tutte le T-FRDE. La dipendenza funzionale del coefficiente di diffusione legato ad eterogeneità, effetti di memoria del mezzo poroso o processi a grandi deformazioni non verranno trattati nel caso di derivazione frazionaria temporale in quanto non si sarebbe in grado di computare analiticamente l'integrale frazionario di Riemann-Liouville ricorsivo.

8.2 Coefficiente di diffusione costante - $K = cost$

Si consideri in primo luogo il seguente problema differenziale frazionario con condizioni iniziali

$$\begin{cases} \frac{\partial^F u}{\partial t^F} = K \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(x, 0) = f(x) \end{cases} \quad \begin{matrix} (x, t) \in [a, b] \times (0, T) \\ 0 < F \leq 1 \end{matrix} \quad (8.1)$$

che può essere scritta anche nel seguente modo

$$D^F u(x, t) = K L_{xx} u(x, t) \quad (8.2)$$

con gli operatori differenziali definiti come

$$L_{xx} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \quad D^F = \frac{\partial^F}{\partial t^F}$$

e gli operatori integrali

$$L_{xx}^{-1}(\cdot) = \int_0^x \int_0^x (\cdot) dx dx \quad D^{-F} = J^F$$

con J^F una specifica forma di integrale frazionario da specificare volta per volta.

Applicando ambo i membri D^{-F} si ottiene

$$D^{-F}D^F u(x, t) = D^{-F}KL_{xx}u(x, t) \quad (8.3)$$

$$u(x, t) = u(x, 0) + D^{-F}KL_{xx}u(x, t) = u(x, 0) + J^F KL_{xx}u(x, t) \quad (8.4)$$

Ricordando l'ipotesi base del Metodo di Decomposizione Adomia

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x, t)$$

si ottiene

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x, t) = u(x, 0) + J^F KL_{xx} \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x, t) \quad (8.5)$$

da cui si deduce l'algoritmo ricorsivo

$$\begin{cases} u_0(x, t) = u(x, 0) \\ u_{n+1}(x, t) = J^F KL_{xx}u_n(x, t) \end{cases} \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (8.6)$$

Considerando un numero maggiore di termini della serie infinita, se convergente, si ottiene un grado di approssimazione maggiore essendo valide le seguenti asserzioni

$$U_M(x, t) = \sum_{n=0}^M u_n(x, t)$$

$$u(x, t) = \lim_{M \rightarrow \infty} U_M(x, t) = \lim_{M \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^M u_n(x, t)$$

8.2.1 T-FRDE con condizioni iniziali $u(x, 0) = x^\alpha$

Si considera ora il seguente problema differenziale

$$\begin{cases} \frac{\partial^F u}{\partial t^F} = K \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(x, 0) = x^\alpha \end{cases} \quad (8.7)$$

Come dettagliatamente enunciato nei capitoli introduttivi riguardanti il calcolo frazionario, è necessario specificare sempre con quale tipologia di derivata od integrale frazionario si sta lavorando non essendo tali definizioni univoche. In questo caso verrà utilizzata la derivata di Caputo con punto base $a = 0$:

$${}_0^C D_t^\alpha [f(t)] = \frac{1}{\Gamma(m - \alpha)} \int_0^t \frac{f^{(n)}(\tau)}{(t - \tau)^{\alpha+1-n}} d\tau$$

Con $n - 1 < \alpha < n, n \in \mathbb{N}$.

Nel caso in esame si ha $0 < F \leq 1$ ottenendo la seguente espressione per l'operatore differenziale temporale tramite derivata frazionaria di Caputo:

$${}_0^C D_t^F [f(t)] = \frac{1}{\Gamma(1 - F)} \int_0^t \frac{f^{(1)}(\tau)}{(t - \tau)^{F-1}} d\tau = \frac{1}{\Gamma(1 - F)} \int_0^t \frac{\partial f(\tau)}{\partial \tau} \cdot (t - \tau)^{1-F} d\tau$$

E dell'operatore inverso tramite l'integrale di Riemann-Liouville:

$${}^R L_t^F [f(t)] = \frac{1}{\Gamma(F)} \int_0^t f(\tau) \cdot (t - \tau)^{F-1} d\tau$$

da cui

$${}_a^C D_t^F (t^\alpha) = \begin{cases} \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\Gamma(\alpha - F + 1)} t^{\alpha-F} & n - 1 < F < n, \alpha > n - 1 \\ 0 & \alpha \in \mathbb{R}, n - 1 < F < n, \alpha \leq n - 1 \end{cases}$$

$${}^R L_t^F [t^\alpha] = \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\Gamma(\alpha + 1 + F)} \cdot t^{\alpha+F}$$

È bene ribadire che tali risultati sono validi esclusivamente per valore del punto base $a = 0$.

Si ottengono le seguenti componenti

n	u_n
0	$u_0(x, t) = x^\alpha = f(x)$
1	$u_1(x, t) = J^F K L_{xx} u_0(x, t) = J^F K L_{xx} \{x^\alpha\} = K \frac{t^F}{\Gamma(F + 1)} \alpha(\alpha - 1)x^{\alpha-2}$

2	$ \begin{aligned} u_2(x, t) &= J^F KL_{xx} u_1(x, t) = J^F KL_{xx} \left\{ K \frac{t^F}{\Gamma(F+1)} \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2} \right\} \\ &= K^2 \frac{1}{\Gamma(F+1)} \frac{\Gamma(F+1)}{\Gamma(2F+1)} t^{2F} \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)x^{\alpha-4} \\ &= K^2 \frac{t^{2F}}{\Gamma(2F+1)} \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)x^{\alpha-4} \end{aligned} $
3	$ \begin{aligned} u_3(x, t) &= J^F KL_{xx} u_2(x, t) = \\ &= J^F KL_{xx} \left\{ K^2 \frac{t^{2F}}{\Gamma(2F+1)} \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)x^{\alpha-4} \right\} \\ &= K^2 \frac{1}{\Gamma(2F+1)} \frac{\Gamma(2F+1)}{\Gamma(3F+1)} t^{3F} \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)(\alpha-4)(\alpha-5)x^{\alpha-6} \\ &= K^3 \frac{t^{3F}}{\Gamma(3F+1)} \alpha \cdot (\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)(\alpha-4)(\alpha-5)x^{\alpha-6} \end{aligned} $
⋮	⋮
n	$ u_n(x, t) = J^F KL_{xx} u_{n-1}(x, t) = K^n \frac{t^{nF}}{\Gamma(nF+1)} \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha-2n+1)} x^{\alpha-2n} $

si riporta di seguito una tabella contenente la decomposizione ADM per l'equazione considerata al (8.7) con condizioni iniziali $u(x, 0) = x^6$.

F	ADM
0.2	$ u_{ADM} = x^6 + K \frac{t^{0.2}}{\Gamma(1.20)} 30x^4 + K^2 \frac{t^{0.4}}{\Gamma(1.40)} 360x^2 + K^3 \frac{t^{0.6}}{\Gamma(1.60)} 720 $
0.4	$ u_{ADM} = x^6 + K \frac{t^{0.4}}{\Gamma(1.40)} 30x^4 + K^2 \frac{t^{0.8}}{\Gamma(1.80)} 360x^2 + K^3 \frac{t^{1.2}}{\Gamma(2.20)} 720 $
0.6	$ u_{ADM} = x^6 + K \frac{t^{0.6}}{\Gamma(1.60)} 30x^4 + K^2 \frac{t^{1.2}}{\Gamma(2.20)} 360x^2 + K^3 \frac{t^{1.8}}{\Gamma(2.80)} 720 $
0.8	$ u_{ADM} = x^6 + K \frac{t^{0.8}}{\Gamma(1.80)} 30x^4 + K^2 \frac{t^{1.6}}{\Gamma(2.60)} 360x^2 + K^3 \frac{t^{2.4}}{\Gamma(3.40)} 720 $
1.0	$ \begin{aligned} u_{ADM} &= x^6 + K \frac{t^1}{\Gamma(2.00)} 30x^4 + K^2 \frac{t^2}{\Gamma(3.00)} 360x^2 + K^3 \frac{t^3}{\Gamma(4.00)} 720 = \\ &= x^6 + Kt30x^4 + K^2 \frac{t^2}{2!} 360x^2 + K^3 \frac{t^3}{3!} 720 \end{aligned} $

Si noti come per il valore di $F = 1.0$ si ottiene la soluzione analitica esatta dell'equazione di diffusione standard, verificabile per diretta sostituzione, indice che la decomposizione ADM ben converge alla soluzione per ordini di derivazione interi.

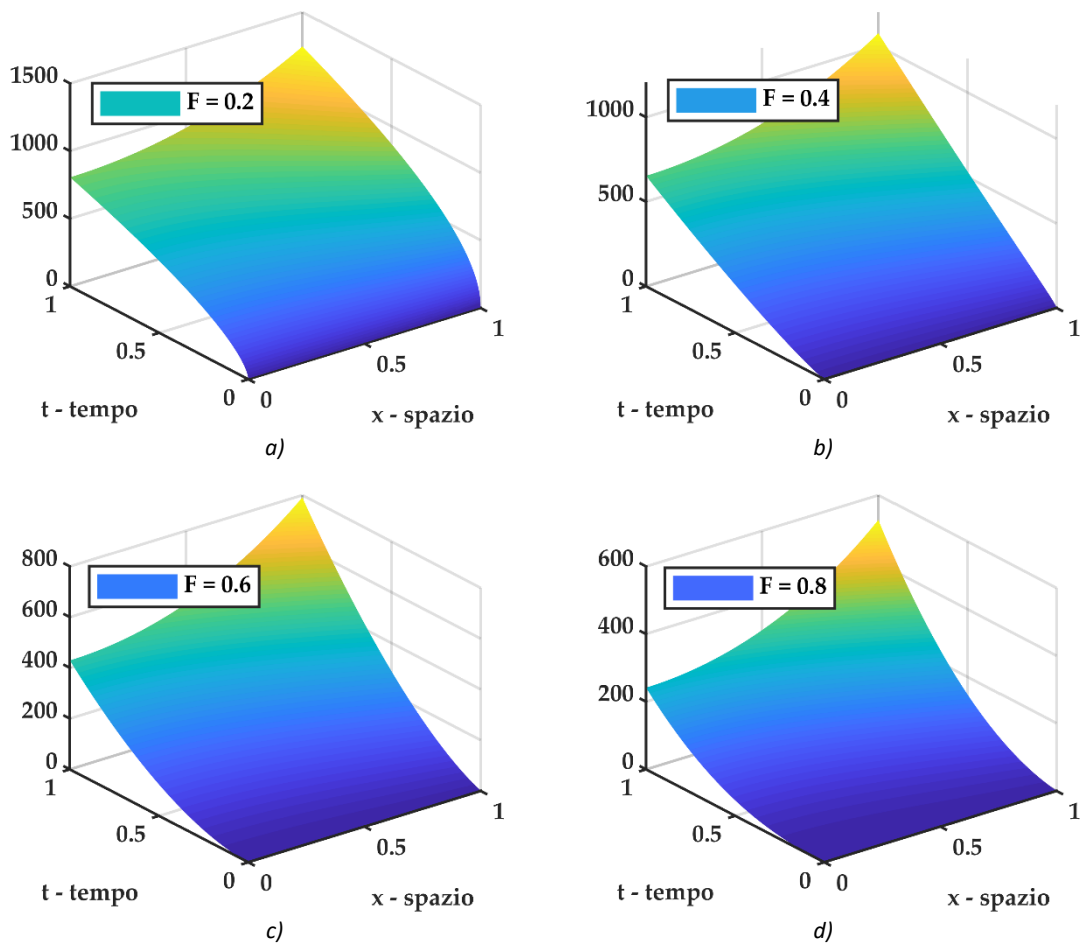


Figura 8-1 plot 3D della soluzione $u(x,t)$ del problema differenziale frazionario T-FRDE con $u(x,0) = x^\alpha$ e coefficiente di diffusione costante $K = \text{cost}$ per diversi valori dell'ordine di derivazione frazionario F . a) soluzione T-FRDE per $F = 0.2$, b) soluzione T-FRDE per $F = 0.4$, c) soluzione T-FRDE per $F = 0.6$, d) soluzione T-FRDE per $F = 0.8$.

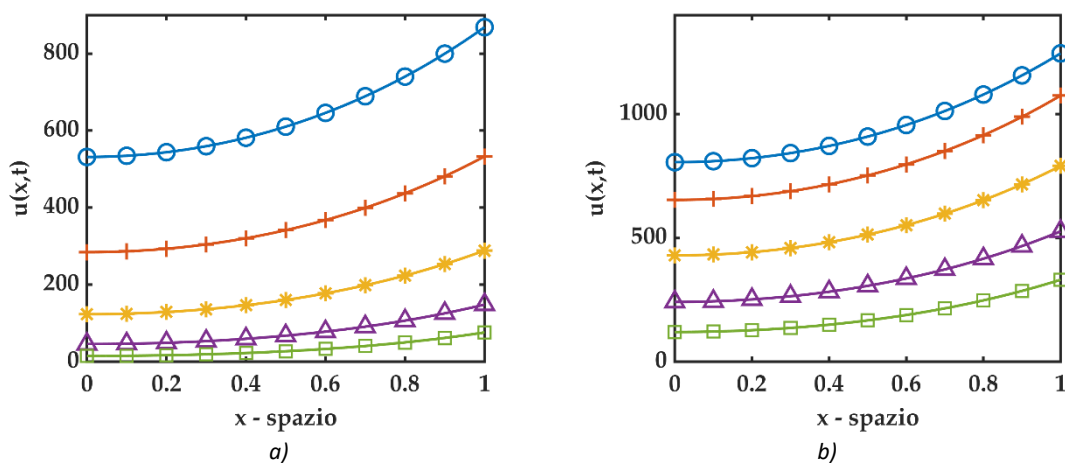


Figura 8-2 plot 2D di confronto fra soluzioni del problema differenziale frazionario T-FRDE con $u(x,0) = x^\alpha$ dove (○ cerchio - blu) rappresenta la soluzione per $F = 0.2$, (+ croce - rosso) rappresenta la soluzione per $F = 0.4$, (* asterisco - giallo) rappresenta la soluzione per $F = 0.6$, (△ triangolo - viola) rappresenta la soluzione per $F = 0.6$, (□ quadrato - verde) rappresenta la soluzione per $F = 1.0$ (standard DE). a) plot 2D per $t = 0.5$, b) plot 2D per $t = 1.0$

8.2.2 T-FRDE con condizioni iniziali $u(x, 0) = e^{ax}$

Si considera ora il seguente problema differenziale

$$\begin{cases} \frac{\partial^F u}{\partial t^F} = K \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(x, 0) = e^{ax} \end{cases} \quad (8.8)$$

Si ottengono le seguenti componenti ADM

n	u_n
0	$u_0(x, t) = e^{ax} = f(x)$
1	$u_1(x, t) = J^F KL_{xx} u_0(x, t) = J^F KL_{xx} \{e^{ax}\} = K \frac{t^F}{\Gamma(F+1)} a^2 e^{ax}$
2	$u_2(x, t) = J^F KL_{xx} u_1(x, t) = J^F KL_{xx} \left\{ K \frac{t^F}{\Gamma(F+1)} a^2 e^{ax} \right\}$ $= K^2 \frac{1}{\Gamma(F+1)} \frac{\Gamma(F+1)}{\Gamma(2F+1)} t^{2F} a^4 e^{ax} = K^2 \frac{t^{2F}}{\Gamma(2F+1)} a^4 e^{ax}$
3	$u_3(x, t) = J^F KL_{xx} u_2(x, t) = J^F KL_{xx} \left\{ K^2 \frac{t^{2F}}{\Gamma(2F+1)} a^4 e^{ax} \right\}$ $= K^2 \frac{1}{\Gamma(2F+1)} \frac{\Gamma(2F+1)}{\Gamma(3F+1)} t^{3F} a^6 e^{ax} = K^3 \frac{t^{3F}}{\Gamma(3F+1)} a^6 e^{ax}$
\vdots	\vdots
n	$u_n(x, t) = J^F KL_{xx} u_{n-1}(x, t) = K^n \frac{t^{nF}}{\Gamma(nF+1)} a^{2n} e^{ax}$

Si noti come, in questo caso, si può esprimere soluzione in termini della funzione di Mittag-Leffler nel modo seguente

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a^2 K t^F)^n}{\Gamma(nF+1)} \cdot e^{ax} = E_{F,1}(a^2 K t^F) \cdot e^{ax} \quad (8.9)$$

che è, quindi, la soluzione analitica esatta del problema differenziale considerato.

Anche in questo caso si noti, inoltre, come per il valore di $F = 1.0$ si ottiene la soluzione analitica esatta dell'equazione di diffusione standard(6.27), indice che la decomposizione ADM ben converge alla soluzione per ordini di derivazione interi. Infatti:

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a^2 K t^F)^n}{\Gamma(nF+1)} \cdot e^{ax} \Bigg|_{F=1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a^2 K t)^n}{n!} \cdot e^{ax} \\ &= e^{a^2 K t} \cdot e^{ax} = e^{a(aKt+x)} \end{aligned} \quad (8.10)$$

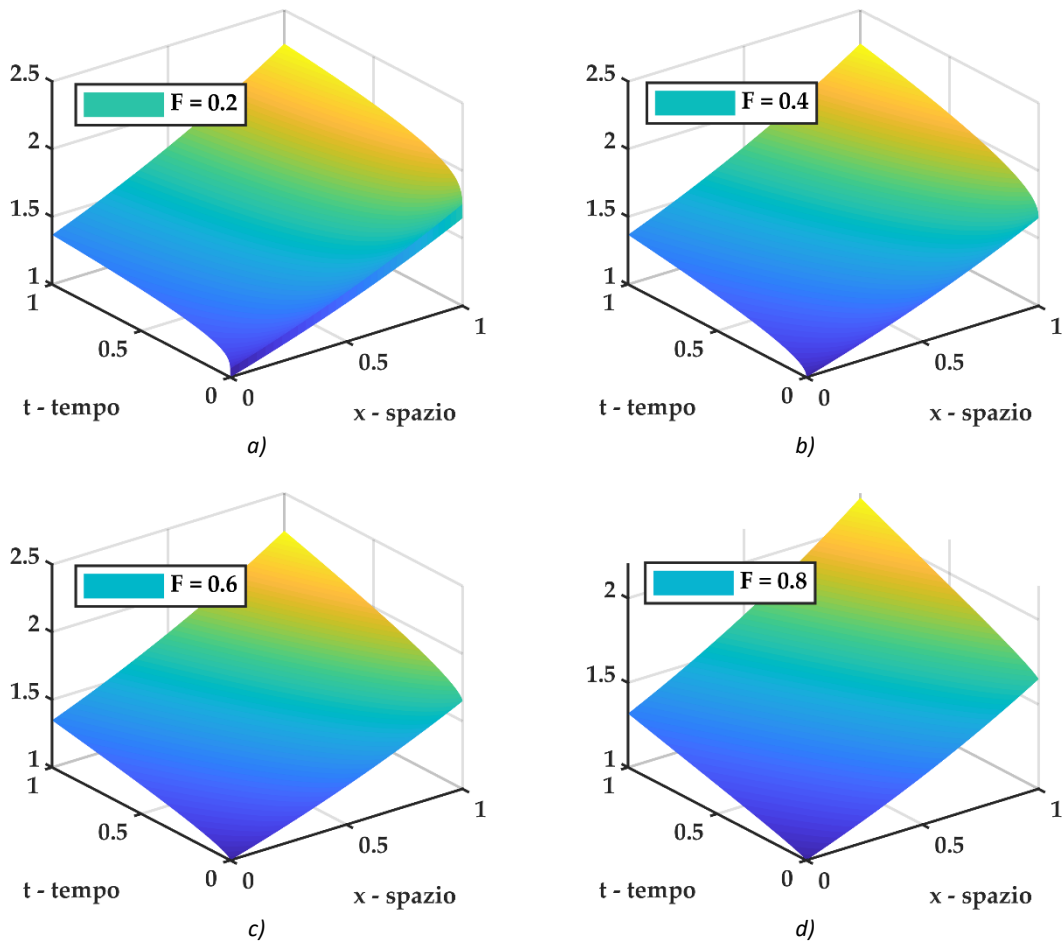


Figura 8-3 plot 3D della soluzione $u(x, t)$ del problema differenziale frazionario T-FRDE con $u(x, 0) = e^{ax}$ con $a = 0.50$ e coefficiente di diffusione costante $K = cost$ per diversi valori dell'ordine di derivazione frazionario F . a) soluzione T-FRDE per $F = 0.2$, b) soluzione T-FRDE per $F = 0.4$, c) soluzione T-FRDE per $F = 0.6$, d) soluzione T-FRDE per $F = 0.8$.

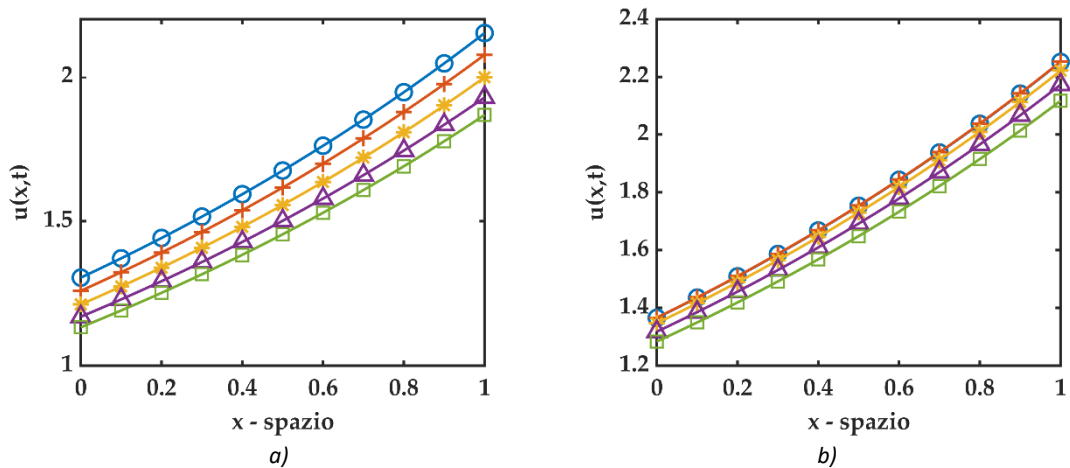


Figura 8-4 plot 2D di confronto per T-FRDE con $u(x, 0) = e^{ax}$ con $a = 0.50$ dove (⊙ cerchio - blu) rappresenta la soluzione per $F = 0.2$, (+ croce - rosso) rappresenta la soluzione per $F = 0.4$, (* asterisco - giallo) rappresenta la soluzione per $F = 0.6$, (△ triangolo - viola) rappresenta la soluzione per $F = 0.6$, (□ quadrato - verde) rappresenta la soluzione per $F = 1.0$ (standard DE). a) plot 2D per $t = 0.5$, b) plot 2D per $t = 1.0$

8.2.3 T-FRDE con condizioni iniziali $u(x, 0) = \sin(x)$

Si considera ora il seguente problema differenziale

$$\begin{cases} \frac{\partial^F u}{\partial t^F} = K \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(x, 0) = \sin(x) \end{cases} \quad (8.11)$$

Si ottengono le seguenti componenti ADM

n	u_n
0	$u_0(x, t) = \sin(x) = f(x)$
1	$u_1(x, t) = J^F KL_{xx} u_0(x, t) = J^F KL_{xx} \{\sin(x)\} = K \cdot \frac{t^F}{\Gamma(F+1)} \cdot (-\sin(x))$
2	$u_2(x, t) = J^F KL_{xx} u_1(x, t) = J^F KL_{xx} \left\{ K \cdot \frac{t^F}{\Gamma(F+1)} \cdot (-\sin(x)) \right\}$ $= K^2 \cdot \frac{1}{\Gamma(F+1)} \cdot \frac{\Gamma(F+1)}{\Gamma(2F+1)} \cdot t^{2F} \cdot \sin(x) = K^2 \cdot \frac{t^{2F}}{\Gamma(2F+1)} \cdot \sin(x)$
3	$u_3(x, t) = J^F KL_{xx} u_2(x, t) = J^F KL_{xx} \left\{ K^2 \cdot \frac{t^{2F}}{\Gamma(2F+1)} \cdot \sin(x) \right\}$ $= K^2 \cdot \frac{1}{\Gamma(2F+1)} \cdot \frac{\Gamma(2F+1)}{\Gamma(3F+1)} \cdot t^{3F} \cdot (-\sin(x))$ $= K^3 \cdot \frac{t^{3F}}{\Gamma(3F+1)} \cdot (-\sin(x))$
\vdots	\vdots
n	$u_n(x, t) = J^F KL_{xx} u_{n-1}(x, t) = K^n \cdot \frac{t^{nF}}{\Gamma(nF+1)} \cdot (-1)^n \cdot \sin(x)$

Si noti come, in questo caso, si può esprimere soluzione in termini della funzione di Mittag-Leffler nel modo seguente

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-K \cdot t^F)^n}{\Gamma(nF+1)} \cdot \sin(x) = E_{F,1}(-K \cdot t^F) \cdot \sin(x) \quad (8.12)$$

che è, quindi, la soluzione analitica del problema considerato.

Anche in questo caso si noti, inoltre, come per il valore di $F = 1.0$ si ottiene la soluzione analitica esatta dell'equazione di diffusione standard (6.13), indice che la decomposizione ADM ben converge alla soluzione per ordini di derivazione interi. Infatti:

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-Kt^F)^n}{\Gamma(nF+1)} \cdot \sin(x) \Bigg|_{F=1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-Kt)^n}{n!} \cdot \sin(x) \\ &= e^{-Kt} \cdot \sin(x) \end{aligned} \quad (8.13)$$

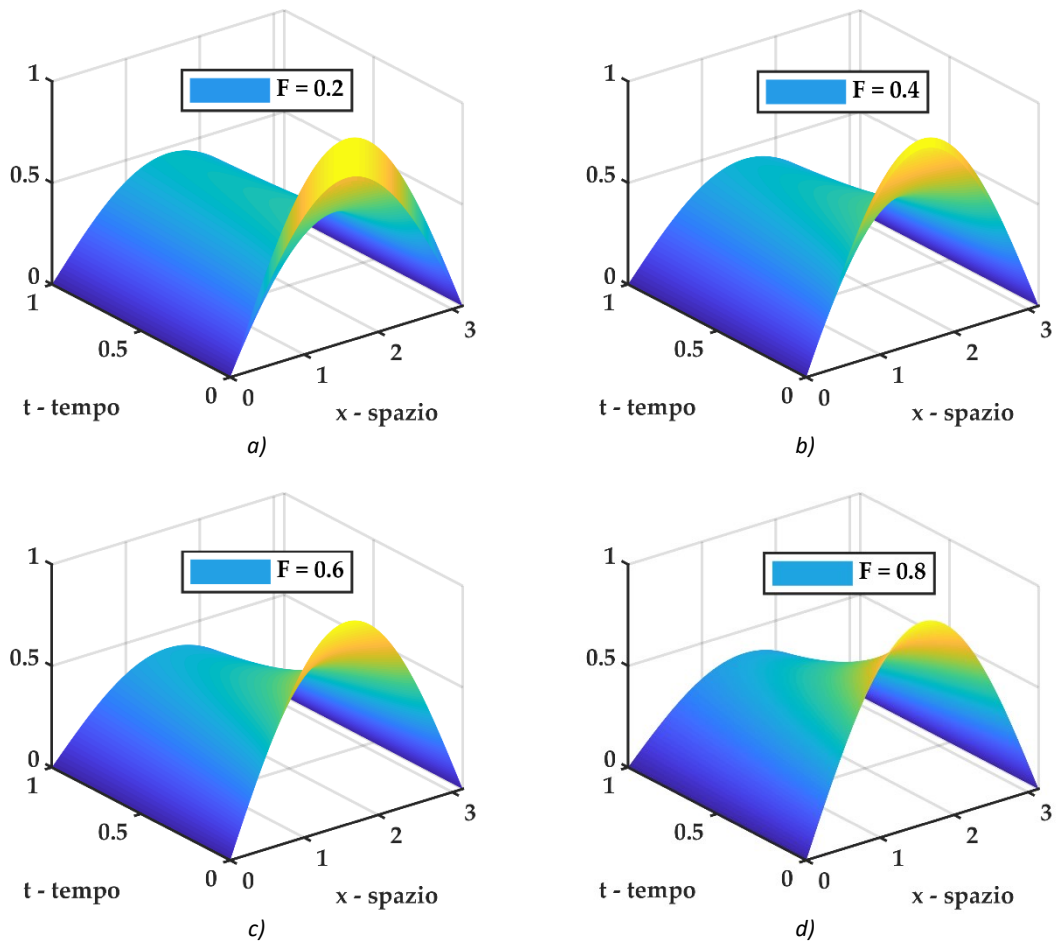


Figura 8-5 plot 3D della soluzione $u(x, t)$ del problema differenziale frazionario T-FRDE con $u(x, 0) = \sin(x)$ e coefficiente di diffusione costante $K = \text{cost}$ per diversi valori dell'ordine di derivazione frazionario F . a) soluzione T-FRDE per $F = 0.2$, b) soluzione T-FRDE per $F = 0.4$, c) soluzione T-FRDE per $F = 0.6$, d) soluzione T-FRDE per $F = 0.8$.

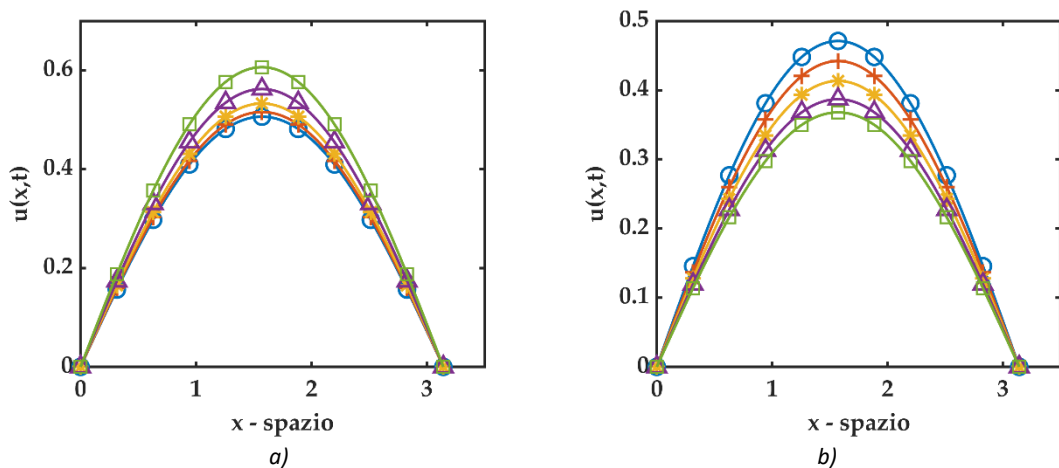


Figura 8-6 plot 2D di confronto fra soluzioni del problema differenziale frazionario T-FRDE con $u(x, 0) = \sin(x)$ dove (\odot) cerchio - blu rappresenta la soluzione per $F = 0.2$, $(+)$ croce - rosso rappresenta la soluzione per $F = 0.4$, $(*)$ asterisco - giallo rappresenta la soluzione per $F = 0.6$, (\triangle) triangolo - viola rappresenta la soluzione per $F = 0.6$, (\square) quadrato - verde rappresenta la soluzione per $F = 1.0$ (standard DE). a) plot 2D per $t = 0.5$, b) plot 2D per $t = 1.0$

8.2.4 T-FRDE con condizioni iniziali $u(x, 0) = \cos(x)$

Si considera ora il seguente problema differenziale

$$\begin{cases} \frac{\partial^F u}{\partial t^F} = K \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(x, 0) = \cos(x) \end{cases} \quad (8.14)$$

Si ottengono le seguenti componenti ADM

n	u_n
0	$u_0(x, t) = \cos(x) = f(x)$
1	$u_1(x, t) = J^F KL_{xx} u_0(x, t) = J^F KL_{xx} \{\cos(x)\} = K \cdot \frac{t^F}{\Gamma(F+1)} \cdot (-\cos(x))$
2	$\begin{aligned} u_2(x, t) &= J^F KL_{xx} u_1(x, t) = J^F KL_{xx} \left\{ K \cdot \frac{t^F}{\Gamma(F+1)} \cdot (-\cos(x)) \right\} \\ &= K^2 \cdot \frac{1}{\Gamma(F+1)} \cdot \frac{\Gamma(F+1)}{\Gamma(2F+1)} \cdot t^{2F} \cdot \cos(x) \\ &= K^2 \cdot \frac{t^{2F}}{\Gamma(2F+1)} \cdot \cos(x) \end{aligned}$
3	$\begin{aligned} u_3(x, t) &= J^F KL_{xx} u_2(x, t) = J^F KL_{xx} \left\{ K^2 \cdot \frac{t^{2F}}{\Gamma(2F+1)} \cdot \cos(x) \right\} \\ &= K^2 \cdot \frac{1}{\Gamma(2F+1)} \cdot \frac{\Gamma(2F+1)}{\Gamma(3F+1)} \cdot t^{3F} \cdot (-\cos(x)) \\ &= K^3 \cdot \frac{t^{3F}}{\Gamma(3F+1)} \cdot (-\cos(x)) \end{aligned}$
\vdots	\vdots
n	$u_n(x, t) = J^F KL_{xx} u_{n-1}(x, t) = K^n \cdot \frac{t^{nF}}{\Gamma(nF+1)} \cdot (-1)^n \cdot \cos(x)$

Si noti come, in questo caso, si può esprimere soluzione in termini della funzione di Mittag-Leffler nel modo seguente

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-Kt^F)^n}{\Gamma(nF+1)} \cdot \cos(x) = E_{F,1}(-Kt^F) \cdot \cos(x) \quad (8.15)$$

che è, quindi, la soluzione analitica del problema considerato.

Anche in questo caso si noti, inoltre, come per il valore di $F = 1.0$ si ottiene la soluzione analitica esatta dell'equazione di diffusione standard (6.20), indice che la decomposizione ADM ben converge alla soluzione per ordini di derivazione interi. Infatti:

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-Kt^F)^n}{\Gamma(nF+1)} \cdot \cos(x) \Bigg|_{F=1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-Kt)^n}{n!} \cdot \cos(x) \\ &= e^{-Kt} \cdot \cos(x) \end{aligned} \quad (8.16)$$

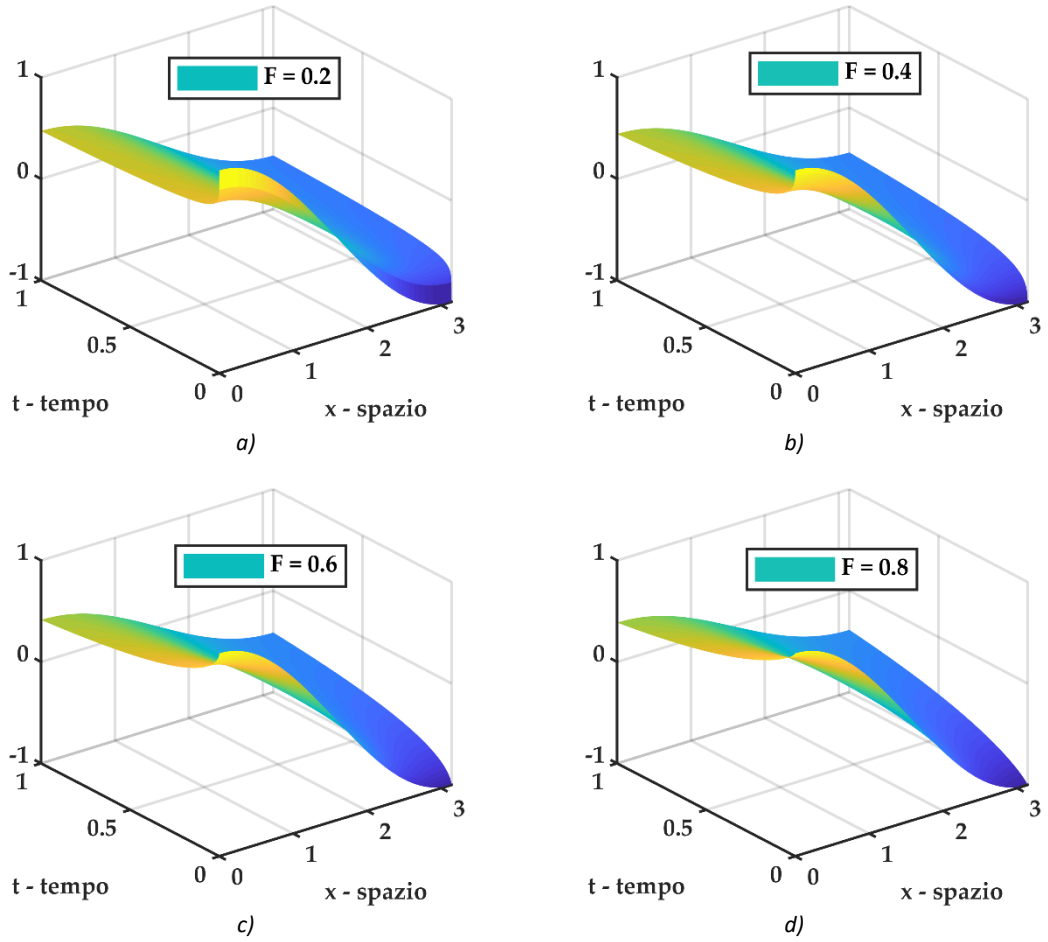


Figura 8-7 plot 3D della soluzione $u(x, t)$ del problema differenziale frazionario T-FRDE con $u(x, 0) = \cos(x)$ e coefficiente di diffusione costante $K = \text{cost}$ per diversi valori dell'ordine di derivazione frazionario F . a) soluzione T-FRDE per $F = 0.2$, b) soluzione T-FRDE per $F = 0.4$, c) soluzione T-FRDE per $F = 0.6$, d) soluzione T-FRDE per $F = 0.8$.

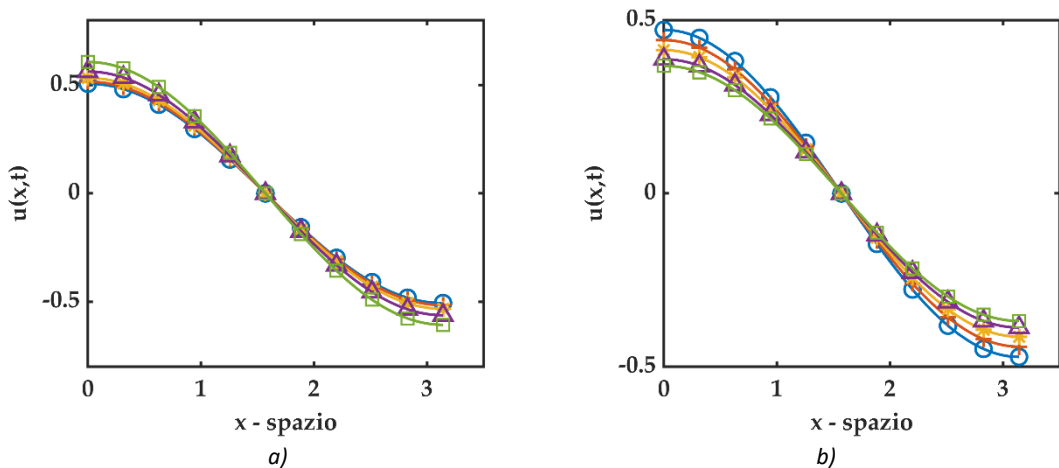


Figura 8-8 plot 2D di confronto fra soluzioni del problema differenziale frazionario T-FRDE con $u(x, 0) = \cos(x)$ dove (\odot) cerchio - blu) rappresenta la soluzione per $F = 0.2$, $(+)$ croce - rosso) rappresenta la soluzione per $F = 0.4$, $(*)$ asterisco - giallo) rappresenta la soluzione per $F = 0.6$, (\triangle) triangolo - viola) rappresenta la soluzione per $F = 0.6$, (\square) quadrato - verde) rappresenta la soluzione per $F = 1.0$ (standard DE). a) plot 2D per $t = 0.5$, b) plot 2D per $t = 1.0$

Capitolo 9

ADM per Diffusione-Avvezione

Standard ADE

9.1 Introduzione

In questo capitolo si vuole studiare l'andamento della soluzione dell'equazione di diffusione-avvezione monodimensionale standard (ADE), quindi con tutti gli ordini di derivazione degli operatori differenziali interi con diverse condizioni iniziali attraverso ADM.

Le condizioni iniziali considerate sono le medesime di quelle considerate per la standard DE, ovvero $u(x, 0) = x^3, \sin(x), \cos(x), e^{ax}$ e coefficienti di diffusione ed avvezione costanti $\rightarrow \mu = cost$ per tutte le T-FRDE. La dipendenza funzionale del coefficiente di diffusione legato ad eterogeneità, effetti di memoria del mezzo poroso o processi a grandi deformazioni verrà considerata nei capitoli successivi.

9.2 Standard ADE

Come riportato in [52] si consideri l'equazione di diffusione-avvezione standard, in modo da verificare la bontà del metodo ADM nella ricerca di una soluzione approssimata. Nel caso di ADE è possibile ricavare una formulazione di carattere generale per ogni condizione iniziale del tipo $u(x, 0) = f(x)$, come fatto per DE. Si consideri, quindi, il problema differenziale sotto riportato

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial C}{\partial \tau} + V \cdot \frac{\partial C}{\partial \xi} = D \cdot \frac{\partial^2 C}{\partial \xi^2} \\ C(\xi, 0) = g(\xi) \end{array} \right. \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} t = \tau \cdot V \\ x = \xi \\ C(\xi, \tau) \rightarrow u(x, t) \\ g(\xi) \rightarrow f(x) \end{array} \right. \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = \mu \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(x, 0) = f(x) \end{array} \right. \quad (9.1)$$

con $\mu = D/V$. Che può essere scritta anche nel seguente modo tramite la scrittura canonica prevista da ADM per agevolare l'inversione degli operatori

$$L_t u(x, t) + D_x u(x, t) = \mu D_x^2 u(x, t) \quad (9.2)$$

con gli operatori differenziali definiti come

$$L_t = \frac{\partial}{\partial t} \quad D_x = \frac{\partial}{\partial x} \quad D_x^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2}$$

e l'operatore integrale

$$L_t^{-1}(\cdot) = \int_0^t (\cdot) dt$$

Applicando ad ambo i membri L_t^{-1} si ottiene

$$L_t^{-1}L_t u(x, t) = L_t^{-1}\mu D_x^2 u(x, t) - L_t^{-1}D_x u(x, t) \quad (9.3)$$

$$u(x, t) = u(x, 0) + L_t^{-1}\mu D_x^2 u(x, t) - L_t^{-1}D_x u(x, t) \quad (9.4)$$

E ricordando l'ipotesi base del Metodo di Decomposizione Adomia

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x, t)$$

si ottiene

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x, t) = u(x, 0) + L_t^{-1}\mu D_x^2 \left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x, t) \right) - L_t^{-1}D_x \left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x, t) \right) \quad (9.5)$$

da cui si deduce l'algoritmo ricorsivo

$$\begin{cases} u_0(x, t) = u(x, 0) = f(x) \\ u_{n+1}(x, t) = L_t^{-1}\mu D_x^2 u_n(x, t) - L_t^{-1}D_x u_n(x, t) \end{cases} \quad n = 0, 1, 2, \dots + \infty \quad (9.6)$$

Di seguito sono calcolate esplicitamente alcune componenti in modo da identificarne un carattere ricorrente

n	u_n
0	$u_0(x, t) = u(x, 0) = f(x)$
1	$u_1(x, t) = L_t^{-1}\mu D_x^2 u_0(x, t) - L_t^{-1}D_x u_0(x, t) = L_t^{-1}\mu D_x^2 f(x) - L_t^{-1}D_x f(x)$ $= t \cdot [\mu D_x^2 - D_x]f(x)$
2	$u_2(x, t) = L_t^{-1}\mu D_x^2 u_1(x, t) - L_t^{-1}D_x u_1(x, t)$ $= L_t^{-1}\mu D_x^2 \{t \cdot [\mu D_x^2 - D_x]f(x)\} - L_t^{-1}D_x \{t \cdot [\mu D_x^2 - D_x]f(x)\}$ $= \frac{t^2}{2!} \cdot [\mu^2 D_x^4 - 2\mu D_x^3 + D_x^2]f(x)$
3	$u_3(x, t) = L_t^{-1}\mu D_x^2 u_2(x, t) - L_t^{-1}D_x u_2(x, t)$ $= L_t^{-1}\mu D_x^2 \left\{ \frac{t^2}{2!} \cdot [\mu^2 D_x^4 - 2\mu D_x^3 + D_x^2]f(x) \right\}$ $- L_t^{-1}D_x \left\{ \frac{t^2}{2!} \cdot [\mu^2 D_x^4 - 2\mu D_x^3 + D_x^2]f(x) \right\}$ $= \frac{t^3}{3!} \cdot [\mu^3 D_x^6 - 3\mu^2 D_x^5 + 3\mu D_x^4 - D_x^3]f(x)$

4	$ \begin{aligned} u_4(x, t) &= L_t^{-1} \mu D_x^2 u_3(x, t) - L_t^{-1} D_x u_3(x, t) \\ &= L_t^{-1} \mu D_x^2 \left\{ \frac{t^3}{3!} \cdot [\mu^3 D_x^6 - 3\mu^2 D_x^5 + 3\mu D_x^4 - D_x^3] f(x) \right\} \\ &\quad - L_t^{-1} D_x \left\{ \frac{t^3}{3!} \cdot [\mu^3 D_x^6 - 3\mu^2 D_x^5 + 3\mu D_x^4 - D_x^3] f(x) \right\} \\ &= \frac{t^4}{4!} \cdot [\mu^4 D_x^8 - 4\mu^3 D_x^7 + 6\mu^2 D_x^6 - 4\mu D_x^5 + D_x^4] f(x) \end{aligned} $
⋮	⋮
n	$ u_n(x, t) = \frac{t^n}{n!} \cdot \sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{n}{j} \mu^{n-j} [D_x^{(2n-j)}] f(x) $

Si deduce

$$U_M(x, t) = \sum_{n=0}^M u_n(x, t) = \sum_{n=0}^M \left\{ \frac{t^n}{n!} \cdot \sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{n}{j} \mu^{n-j} [D_x^{(2n-j)}] f(x) \right\} \quad (9.7)$$

$$\begin{aligned}
 u(x, t) &= \lim_{M \rightarrow \infty} U_M(x, t) = \lim_{M \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^M u_n(x, t) \\
 &= \lim_{M \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^M \left\{ \frac{t^n}{n!} \cdot \sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{n}{j} \mu^{n-j} [D_x^{(2n-j)}] f(x) \right\} \quad (9.8)
 \end{aligned}$$

Quest'ultima risulta, quindi, una formulazione generale per ogni ADE con condizioni iniziali del tipo considerato. Allo stesso modo di DE, la funzione $f(x)$ deve essere sufficientemente derivabile nel suo dominio così da non creare problematiche analitiche nel processo di derivazione iterata. Inoltre, tutte le condizioni al contorno considerate nel seguito ed elencate nel paragrafo 9.1 introduttivo sono funzioni $C^\infty[a, b]$, cioè infinitamente derivabili in tutto $[a, b]$, nonché in tutto l'asse reale \mathbb{R} .

9.2.1 ADE con condizioni iniziali $u(x, 0) = x^3$

Seguendo lo schema ricorsivo ottenuto al paragrafo precedente e considerando il seguente problema differenziale ADE con $\mu = 1$

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = \mu \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(x, 0) = x^3 \end{cases} \quad (9.9)$$

si ottengono le componenti della serie ADM

n	u_n
0	$u_0(x, t) = u(x, 0) = x^3$
1	$u_1(x, t) = t \cdot [D_x^2 - D_x](x^3) = t \cdot (6x - 3x^2)$
2	$u_2(x, t) = \frac{t^2}{2!} \cdot [D_x^4 - 2D_x^3 + D_x^2](x^3) = \frac{t^2}{2!} \cdot (-12 + 6x)$
3	$u_3(x, t) = \frac{t^3}{3!} \cdot [D_x^6 - 3D_x^5 + 3D_x^4 - D_x^3](x^3) = \frac{t^3}{3!} \cdot (-6)$
4	$u_4(x, t) = \frac{t^4}{4!} \cdot [D_x^8 - 4D_x^7 + 6D_x^6 - 4D_x^5 + D_x^4](x^3) = 0$

Nel caso in esame, quindi, la decomposizione Adomia ha fornito la soluzione esatta, facilmente verificabile per sostituzione diretta in ADE, rappresentata qui sotto, indice che il metodo ADM ben si presta alla risoluzione di ADE del tipo considerato.

$$u_{esatta}(x, t) = x^3 + t \cdot (6x - 3x^2) + \frac{t^2}{2!} \cdot (-12 + 6x) + \frac{t^3}{3!} \cdot (-6) \quad (9.10)$$

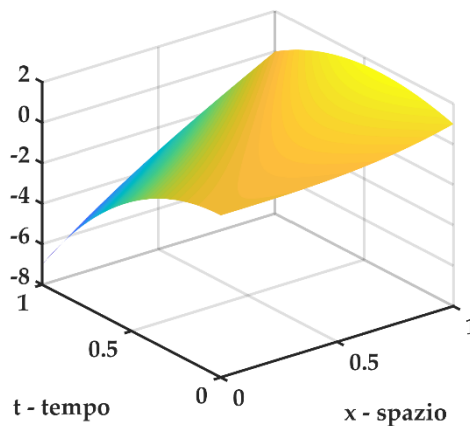


Figura 9-1 soluzione dell'equazione standard di diffusione-avvezione (ADE) con condizioni iniziali $u(x, 0) = x^3$ e coefficienti di diffusione ed avvezione costanti $\rightarrow \mu = cost$. In questo caso risulta anche essere la soluzione analitica esatta del problema differenziale considerato

9.2.2 ADE con condizioni iniziali $u(x, 0) = \sin(x)$

Seguendo lo schema ricorsivo al paragrafo 9.2 per il seguente problema ADE

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = \mu \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(x, 0) = \sin(x) \end{cases} \quad (9.11)$$

si ottengono le componenti della serie ADM

n	u_n
0	$u_0(x, t) = u(x, 0) = \sin(x)$
1	$u_1(x, t) = t \cdot [D_x^2 - D_x](\sin(x)) = t \cdot (-\sin(x) - \cos(x))$
2	$u_2(x, t) = \frac{t^2}{2!} \cdot [D_x^4 - 2D_x^3 + D_x^2](\sin(x)) = \frac{t^2}{2!} \cdot (\sin(x) + 2 \cos(x) - \sin(x))$
3	$u_3(x, t) = \frac{t^3}{3!} \cdot [D_x^6 - 3D_x^5 + 3D_x^4 - D_x^3](\sin(x))$ $= \frac{t^3}{3!} \cdot (-\sin(x) - 3 \cos(x) + 3 \sin(x) + \cos(x))$
4	$u_4(x, t) = \frac{t^4}{4!} \cdot [D_x^8 - 4D_x^7 + 6D_x^6 - 4D_x^5 + D_x^4](\sin(x))$ $= \frac{t^4}{4!} \cdot (\sin(x) + 4 \cos(x) - 6 \sin(x) - 4 \cos(x) + \sin(x))$
\vdots	\vdots
n	$u_n(x, t) = \frac{t^n}{n!} \cdot \sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{n}{j} \mu^{n-j} [D_x^{(2n-j)}] f(x)$ $= \frac{t^n}{n!} \cdot \sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{n}{j} \sin\left(x + \frac{(2n-j)\pi}{2}\right)$

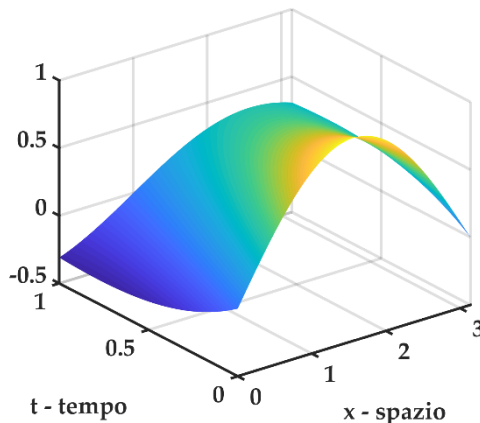


Figura 9-2 soluzione dell'equazione standard di diffusione-avvezione (ADE) con condizioni iniziali $u(x, 0) = x^3$ e coefficienti di diffusione ed avvezione costanti $\rightarrow \mu = cost$. In questo caso sono stati considerati 50 termini della serie di ADM in modo che la soluzione, nell'intervallo $x, t \in [0,1]$, all'aumentare del numero di termini non vari più

9.2.3 ADE con condizioni iniziali $u(x, 0) = \cos(x)$

Seguendo lo schema ricorsivo al paragrafo 9.2 per il seguente problema ADE

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = \mu \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(x, 0) = \cos(x) \end{cases} \quad (9.12)$$

si ottengono le componenti della serie ADM

n	u_n
0	$u_0(x, t) = u(x, 0) = \cos(x)$
1	$u_1(x, t) = t \cdot [D_x^2 - D_x](\cos(x)) = t \cdot (-\cos(x) + \sin(x))$
2	$u_2(x, t) = \frac{t^2}{2!} \cdot [D_x^4 - 2D_x^3 + D_x^2](\cos(x)) = \frac{t^2}{2!} \cdot (\cos(x) - 2\sin(x) - \cos(x))$
3	$u_3(x, t) = \frac{t^3}{3!} \cdot [D_x^6 - 3D_x^5 + 3D_x^4 - D_x^3](\cos(x))$ $= \frac{t^3}{3!} \cdot (-\cos(x) + 3\sin(x) + 3\cos(x) - \sin(x))$
4	$u_4(x, t) = \frac{t^4}{4!} \cdot [D_x^8 - 4D_x^7 + 6D_x^6 - 4D_x^5 + D_x^4](\cos(x))$ $= \frac{t^4}{4!} \cdot (\cos(x) - 4\sin(x) - 6\cos(x) + 4\sin(x) + \cos(x))$
\vdots	\vdots
n	$u_n(x, t) = \frac{t^n}{n!} \cdot \sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{n}{j} \mu^{n-j} [D_x^{(2n-j)}] f(x)$ $= \frac{t^n}{n!} \cdot \sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{n}{j} \cos\left(x + \frac{(2n-j)\pi}{2}\right)$

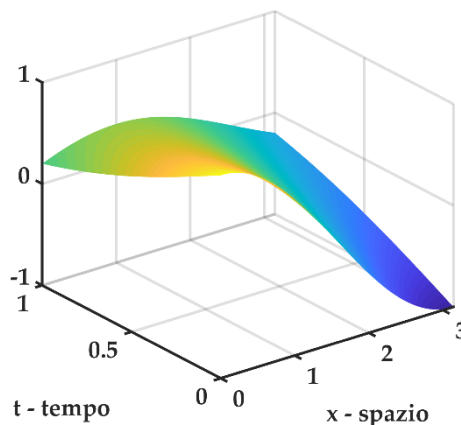


Figura 9-3 soluzione dell'equazione standard di diffusione-avvezione (ADE) con condizioni iniziali $u(x, 0) = \cos(x)$ e coefficienti di diffusione ed avvezione costanti $\rightarrow \mu = cost$. In questo caso sono stati considerati 50 termini della serie di ADM in modo che la soluzione, nell'intervallo $x, t \in [0,1]$, all'aumentare del numero di termini non vari più

9.2.4 ADE con condizioni iniziali $u(x, 0) = e^{ax}$

Seguendo lo schema ricorsivo ottenuto al paragrafo precedente e considerando il seguente problema differenziale ADE con $\mu = 1$ e $a \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = \mu \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(x, 0) = e^{ax} \end{cases} \quad (9.13)$$

si ottengono le componenti della serie ADM

n	u_n
0	$u_0(x, t) = u(x, 0) = e^{ax}$
1	$u_1(x, t) = t \cdot [D_x^2 - D_x](e^{ax}) = t \cdot (a^2 e^{ax} - a e^{ax}) = t \cdot (a^2 - a) \cdot e^{ax}$
2	$u_2(x, t) = \frac{t^2}{2!} \cdot [D_x^4 - 2D_x^3 + D_x^2](e^{ax}) = \frac{t^2}{2} \cdot (a^4 e^{ax} - 2a^3 e^{ax} + a^2 e^{ax})$ $= \frac{t^2}{2} \cdot (a^4 - 2a^3 + a^2) \cdot e^{ax}$
3	$u_3(x, t) = \frac{t^3}{3!} \cdot [D_x^6 - 3D_x^5 + 3D_x^4 - D_x^3](e^{ax})$ $= \frac{t^3}{3!} \cdot (a^6 e^{ax} - 3a^5 e^{ax} + 3a^4 e^{ax} - a^3 e^{ax})$ $= \frac{t^3}{3!} \cdot (a^6 - 3a^5 + 3a^4 - a^3) \cdot e^{ax}$
4	$u_4(x, t) = \frac{t^4}{4!} \cdot [D_x^8 - 4D_x^7 + 6D_x^6 - 4D_x^5 + D_x^4](e^{ax})$ $= \frac{t^4}{4!} \cdot (a^8 e^{ax} - 4a^7 e^{ax} + 6a^6 e^{ax} - 4a^5 e^{ax} + a^4 e^{ax})$ $= \frac{t^4}{4!} \cdot (a^8 - 4a^7 + 6a^6 - 4a^5 + a^4) \cdot e^{ax}$
\vdots	\vdots
n	$u_n(x, t) = \frac{t^n}{n!} \cdot \sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{n}{j} \mu^{n-j} [D_x^{(2n-j)}] f(x) = \frac{t^n}{n!} \cdot \sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{n}{j} a^{(2n-j)} \cdot e^{ax}$

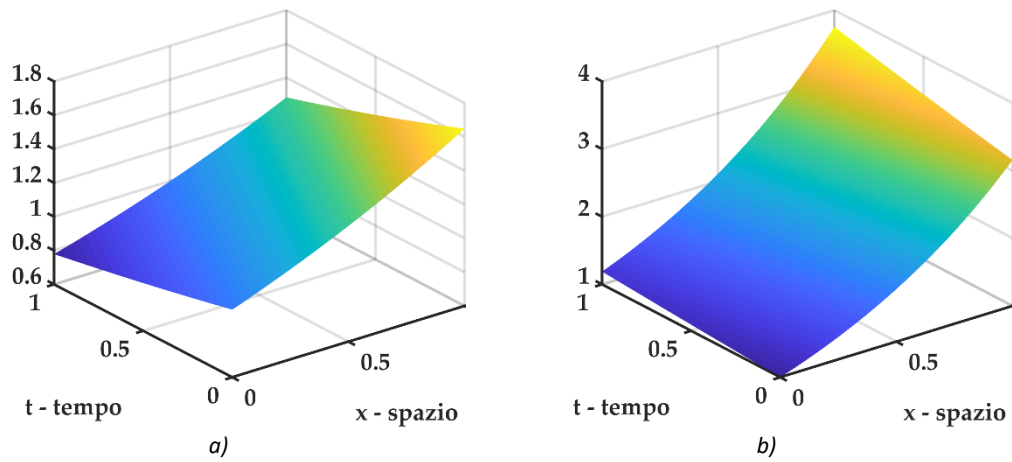


Figura 9-4 soluzione dell'equazione standard di diffusione-avvezione (ADE) con condizioni iniziali $u(x,0) = e^{ax}$ e coefficienti di diffusione ed avvezione costanti $\rightarrow \mu = \text{cost}$. In questo caso sono stati considerati 50 termini della serie di ADM in modo che la soluzione, nell'intervallo $x, t \in [0,1]$, all'aumentare del numero di termini non vari più. a) soluzione ADE per $a = 0.50$, b) soluzione ADE per $a = 1.15$

Capitolo 10

ADM per Diffusione-Avvezione

ST-FRADE Levy fractal-TRW

10.1 Introduzione

In questo capitolo si vuole studiare l'andamento della soluzione dell'equazione di diffusione-avvezione monodimensionale frazionaria in spazio-tempo (ST-FRADE), con diverse condizioni iniziali attraverso ADM.

Le condizioni iniziali considerate sono le medesime di quelle considerate per la standard DE, ovvero $u(x, 0) = x^3, \sin(x), \cos(x), e^{ax}$ e coefficienti di diffusione ed avvezione inizialmente considerati costanti $\rightarrow \mu = cost$ per tutte le T-FRDE. La dipendenza funzionale del coefficiente di diffusione legato ad eterogeneità, effetti di memoria del mezzo poroso o processi a grandi deformazioni verrà considerata nei capitoli successivi, valutando in primo luogo un'unica relazione funzionale sia per diffusione che per avvezione, e successivamente diversificare per i due fenomeni.

10.2 ST-FRADE $\mu = cost$

Come riportato in [52] si consideri l'equazione di diffusione-avvezione frazionaria in spazio-tempo ST-FRADE, in modo da verificare la bontà del metodo ADM nella ricerca di una soluzione approssimata. Nel caso in esame è possibile ricavare una formulazione di carattere generale per ogni condizione iniziale del tipo $u(x, 0) = f(x)$, come fatto per DE. Si consideri, quindi, il problema differenziale sotto riportato

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^\alpha C}{\partial \tau^\alpha} + V \cdot \frac{\partial^\beta C}{\partial \xi^\beta} = D \cdot \frac{\partial^\gamma C}{\partial \xi^\gamma} \\ C(\xi, 0) = g(\xi) \end{array} \right. \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} t = \tau \cdot V \\ x = \xi \\ C(\xi, \tau) \rightarrow u(x, t) \\ g(\xi) \rightarrow f(x) \\ 0 < \alpha, \beta \leq 1 \\ 1 < \gamma \leq 2 \end{array} \right. \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha} + \frac{\partial^\beta u}{\partial x^\beta} = \mu \cdot \frac{\partial^\gamma u}{\partial x^\gamma} \\ u(x, 0) = f(x) \end{array} \right. \quad (10.1)$$

con $\mu = D/V$ che può essere scritta anche nel seguente modo

$$D_t^\alpha u(x, t) + D_x^\beta u(x, t) = \mu D_x^\gamma u(x, t) \quad (10.2)$$

tramite gli operatori differenziali definiti come

$$D_t^\alpha = \frac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha} \quad D_x^\beta = \frac{\partial^\beta}{\partial x^\beta} \quad D_x^\gamma = \frac{\partial^\gamma}{\partial x^\gamma}$$

e l'operatore integrale

$$D_t^{-\alpha}(\cdot) = J_t^\alpha(\cdot)$$

integrale di Riemann-Liouville.

Applicando ad ambo i membri $D_t^{-\alpha}$ si ottiene

$$D_t^{-\alpha} D_t^\alpha u(x, t) = D_t^{-\alpha} \mu D_x^\gamma u(x, t) - D_t^{-\alpha} D_x^\beta u(x, t) \quad (10.3)$$

$$u(x, t) = u(x, 0) + J_t^\alpha \mu D_x^\gamma u(x, t) - J_t^\alpha D_x^\beta u(x, t) \quad (10.4)$$

Ricordando l'ipotesi base del Metodo di Decomposizione Adomia

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x, t)$$

si ottiene

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x, t) = u(x, 0) + J_t^\alpha \mu D_x^\gamma \left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x, t) \right) - J_t^\alpha D_x^\beta \left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x, t) \right) \quad (10.5)$$

da cui si deduce l'algoritmo ricorsivo

$$\begin{cases} u_0(x, t) = u(x, 0) = f(x) \\ u_{n+1}(x, t) = J_t^\alpha \mu D_x^\gamma u_n(x, t) - J_t^\alpha D_x^\beta u_n(x, t) \end{cases} \quad n = 0, 1, 2, \dots + \infty \quad (10.6)$$

Di seguito sono calcolate esplicitamente alcune componenti in modo da identificarne un carattere ricorrente

n	u_n
0	$u_0(x, t) = u(x, 0) = f(x)$
1	$u_1(x, t) = J_t^\alpha \mu D_x^\gamma u_0(x, t) - J_t^\alpha D_x^\beta u_0(x, t) = J_t^\alpha \mu D_x^\gamma f(x) - J_t^\alpha D_x^\beta f(x)$ $= \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} \cdot [\mu D_x^\gamma - D_x^\beta] f(x)$
2	$u_2(x, t) = J_t^\alpha \mu D_x^\gamma u_1(x, t) - J_t^\alpha D_x^\beta u_1(x, t)$ $= J_t^\alpha \mu D_x^\gamma \left\{ \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} \cdot [\mu D_x^\gamma - D_x^\beta] f(x) \right\}$ $- J_t^\alpha D_x^\beta \left\{ \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} \cdot [\mu D_x^\gamma - D_x^\beta] f(x) \right\}$ $= \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha + 1)} \cdot [\mu^2 D_x^{2\gamma} - 2\mu D_x^{\gamma+\beta} + D_x^{2\beta}] f(x)$ $= \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha + 1)} \cdot [\mu D_x^\gamma - D_x^\beta]^2 f(x)$

3	$ \begin{aligned} u_3(x, t) &= J_t^\alpha \mu D_x^\gamma u_2(x, t) - J_t^\alpha D_x^\beta u_4(x, t) \\ &= J_t^\alpha \mu D_x^\gamma \left\{ \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha + 1)} \cdot [\mu^2 D_x^{2\gamma} - 2\mu D_x^{\gamma+\beta} + D_x^{2\beta}] f(x) \right\} \\ &\quad - J_t^\alpha D_x^\beta \left\{ \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha + 1)} \cdot [\mu^2 D_x^{2\gamma} - 2\mu D_x^{\gamma+\beta} + D_x^{2\beta}] f(x) \right\} \\ &= \frac{t^{3\alpha}}{\Gamma(3\alpha + 1)} \cdot [\mu^3 D_x^{3\gamma} - 3\mu^2 D_x^{2\gamma+\beta} + 3\mu D_x^{\gamma+2\beta} - D_x^{3\beta}] f(x) \\ &= \frac{t^{3\alpha}}{\Gamma(3\alpha + 1)} \cdot [\mu D_x^\gamma - D_x^\beta]^3 f(x) \end{aligned} $
4	$ \begin{aligned} u_4(x, t) &= J_t^\alpha \mu D_x^\gamma u_3(x, t) - J_t^\alpha D_x^\beta u_3(x, t) \\ &= J_t^\alpha \mu D_x^\gamma \left\{ \frac{t^{3\alpha}}{\Gamma(3\alpha + 1)} \right. \\ &\quad \cdot [\mu^3 D_x^{3\gamma} - 3\mu^2 D_x^{2\gamma+\beta} + 3\mu D_x^{\gamma+2\beta} - D_x^{3\beta}] f(x) \left. \right\} \\ &\quad - J_t^\alpha D_x^\beta \left\{ \frac{t^{3\alpha}}{\Gamma(3\alpha + 1)} \right. \\ &\quad \cdot [\mu^3 D_x^{3\gamma} - 3\mu^2 D_x^{2\gamma+\beta} + 3\mu D_x^{\gamma+2\beta} - D_x^{3\beta}] f(x) \left. \right\} \\ &= \frac{t^{4\alpha}}{\Gamma(4\alpha + 1)} \\ &\quad \cdot [\mu^4 D_x^{4\gamma} - 4\mu^3 D_x^{3\gamma+\beta} + 6\mu^2 D_x^{2\gamma+2\beta} - 4\mu D_x^{\gamma+3\beta} + D_x^{4\beta}] f(x) \\ &= \frac{t^{4\alpha}}{\Gamma(4\alpha + 1)} \cdot [\mu D_x^\gamma - D_x^\beta]^4 f(x) \end{aligned} $
⋮	⋮
n	$ u_n(x, t) = \frac{t^{n\alpha}}{\Gamma(n\alpha + 1)} \cdot \sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{n}{j} \mu^{n-j} [D_x^{(n-j)\gamma+j\beta}] f(x) $

cui si deduce

$$\begin{aligned}
 U_M(x, t) &= \sum_{n=0}^M u_n(x, t) = \\
 &= \sum_{n=0}^M \left\{ \frac{t^{n\alpha}}{\Gamma(n\alpha + 1)} \cdot \sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{n}{j} \mu^{n-j} [D_x^{(n-j)\gamma+j\beta}] f(x) \right\} \quad (10.7)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 u(x, t) &= \lim_{M \rightarrow \infty} U_M(x, t) = \lim_{M \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^M u_n(x, t) = \\
 &= \lim_{M \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^M \left\{ \frac{t^{n\alpha}}{\Gamma(n\alpha + 1)} \cdot \sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{n}{j} \mu^{n-j} [D_x^{(n-j)\gamma+j\beta}] f(x) \right\} \quad (10.8) \\
 &= [E_\alpha (t^\alpha (\mu D_x^\gamma - D_x^\beta))] f(x)
 \end{aligned}$$

Dove nell'ultimo passaggio si è utilizzata la definizione di funzione di Mittag-Leffler. Quest'ultima risulta, quindi, una formulazione generale per ogni ST-FRADE con condizioni iniziali del tipo considerato. Allo stesso modo di DE, la funzione $f(x)$ deve essere sufficientemente derivabile nel suo dominio in senso frazionario. Inoltre, tutte le condizioni al contorno considerate nel seguito sono funzioni $C^\infty[a, b]$, cioè infinitamente derivabili in tutto $[a, b]$, nonché in tutto l'asse reale \mathbb{R} , di cui si conosce esplicitamente l'espressione del differintegrale per specifici valori del terminale e per qualsiasi ordine di derivazione frazionario.

10.2.1 S-FRADE

Nel presente paragrafo si considera l'equazione di diffusione-avvezione frazionaria solamente in spazio (S-FRADE), inserendo l'ordine di derivazione frazionario all'operatore di avvezione e laplaciano.

10.2.1.1 S-FRADE con condizioni iniziali $u(x, 0) = x^3$

Seguendo lo schema ricorsivo ottenuto al paragrafo precedente e considerando il seguente problema differenziale S-FRADE con $\mu = 1$

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial^\beta u}{\partial x^\beta} = \mu \cdot \frac{\partial^\gamma u}{\partial x^\gamma} \\ u(x, 0) = x^\delta \end{cases} \quad (10.9)$$

Si ottengono le seguenti componenti ADM

n	u_n
0	$u_0(x, t) = u(x, 0) = x^\delta$
1	$u_1(x, t) = t \cdot [D_x^\gamma - D_x^\beta](x^\delta) = t \cdot \left[\frac{\Gamma(\delta + 1)}{\Gamma(\delta + 1 - \gamma)} x^{\delta - \gamma} - \frac{\Gamma(\delta + 1)}{\Gamma(\delta + 1 - \beta)} x^{\delta - \beta} \right]$ $= t \cdot \left[\frac{\Gamma(\delta + 1)}{\Gamma(\delta + 1 - \gamma)} x^{-\gamma} - \frac{\Gamma(\delta + 1)}{\Gamma(\delta + 1 - \beta)} x^{-\beta} \right] \cdot x^\delta$
2	$u_2(x, t) = \frac{t^2}{2!} \cdot [D_x^{2\gamma} - 2D_x^{\gamma+\beta} + D_x^{2\beta}](x^\delta) =$ $\frac{t^2}{2!} \cdot \left[\frac{\Gamma(\delta + 1)}{\Gamma(\delta + 1 - 2\gamma)} x^{\delta - 2\gamma} - 2 \frac{\Gamma(\delta + 1)}{\Gamma(\delta + 1 - (\gamma + \beta))} x^{\delta - (\gamma + \beta)} \right.$ $\left. + \frac{\Gamma(\delta + 1)}{\Gamma(\delta + 1 - 2\beta)} x^{\delta - 2\beta} \right] =$ $\frac{t^2}{2!} \cdot \left[\frac{\Gamma(\delta + 1)}{\Gamma(\delta + 1 - 2\gamma)} x^{-2\gamma} - 2 \frac{\Gamma(\delta + 1)}{\Gamma(\delta + 1 - (\gamma + \beta))} x^{-(\gamma + \beta)} + \frac{\Gamma(\delta + 1)}{\Gamma(\delta + 1 - 2\beta)} x^{-2\beta} \right]$ $\cdot x^\delta$
3	$u_3(x, t) = \frac{t^3}{3!} \cdot [D_x^{3\gamma} - 3D_x^{2\gamma+\beta} + 3D_x^{\gamma+2\beta} - D_x^{3\beta}](x^\delta) =$ $\frac{t^3}{3!} \cdot \left[\frac{\Gamma(\delta + 1)}{\Gamma(\delta + 1 - 3\gamma)} x^{-3\gamma} - 3 \frac{\Gamma(\delta + 1)}{\Gamma(\delta + 1 - (2\gamma + \beta))} x^{-(2\gamma + \beta)} \right.$ $\left. + 3 \frac{\Gamma(\delta + 1)}{\Gamma(\delta + 1 - (\gamma + 2\beta))} x^{-(\gamma + 2\beta)} - \frac{\Gamma(\delta + 1)}{\Gamma(\delta + 1 - 3\beta)} x^{-3\beta} \right] \cdot x^\delta$
4	$u_4(x, t) = \frac{t^4}{4!} \cdot [D_x^{4\gamma} - 4D_x^{3\gamma+\beta} + 6D_x^{2\gamma+2\beta} - 4D_x^{\gamma+3\beta} + D_x^{4\beta}](x^\delta) =$

	$\frac{t^4}{4!} \cdot \left[\frac{\Gamma(\delta + 1)}{\Gamma(\delta + 1 - 4\gamma)} x^{-4\gamma} - 4 \frac{\Gamma(\delta + 1)}{\Gamma(\delta + 1 - (3\gamma + \beta))} x^{-(3\gamma + \beta)} \right. \\ + 6 \frac{\Gamma(\delta + 1)}{\Gamma(\delta + 1 - (2\gamma + 2\beta))} x^{-(2\gamma + 2\beta)} \\ \left. - 4 \frac{\Gamma(\delta + 1)}{\Gamma(\delta + 1 - (\gamma + 3\beta))} x^{-(\gamma + 3\beta)} + \frac{\Gamma(\delta + 1)}{\Gamma(\delta + 1 - 4\beta)} x^{-4\beta} \right] \cdot x^\delta$
⋮	⋮
n	$u_n(x, t) = \frac{t^n}{n!} \cdot \sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{n}{j} \mu^{n-j} [D_x^{(n-j)\gamma + j\beta}] f(x) =$ $= \frac{t^n}{n!} \cdot \sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{n}{j} \left\{ \frac{\Gamma(\delta + 1)}{\Gamma(\delta + 1 - [(n-j)\gamma + j\beta])} \cdot x^{-[(n-j)\gamma + j\beta]} \right\} \cdot x^\delta$

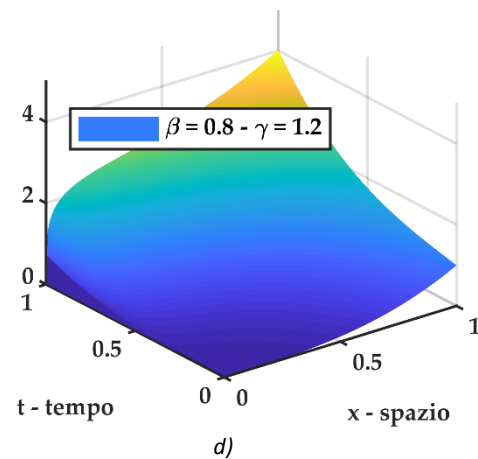
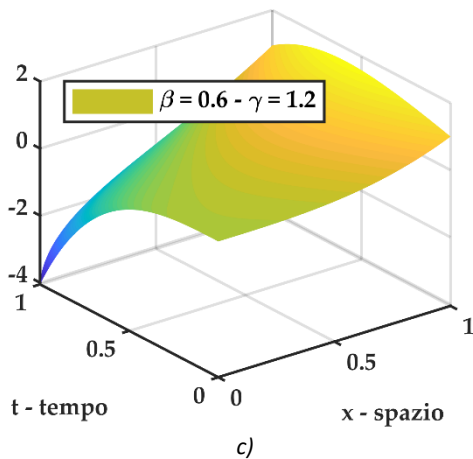
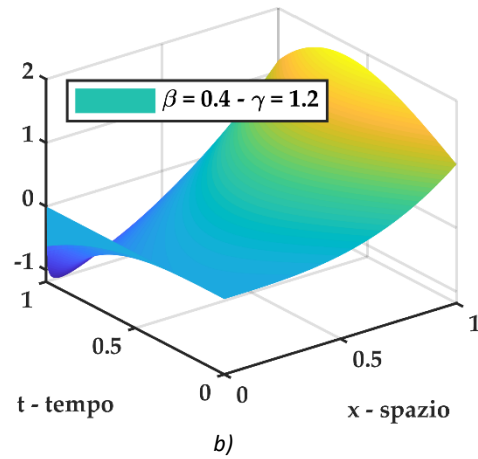
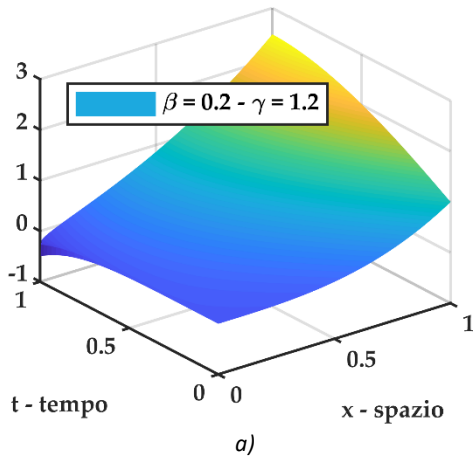


Figura 10-1 plot 3D della soluzione $u(x, t)$ del problema differenziale frazionario S-FRADE con $u(x, 0) = x^\delta$ con $\delta = 3$ e coefficienti di diffusione ed avvezione costanti $\rightarrow \mu = \text{cost}$ per diversi valori dell'ordine di derivazione frazionario per operatori laplaciano ed avvezione. a) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.2 - \gamma = 1.2$, b) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.4 - \gamma = 1.2$, c) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.6 - \gamma = 1.2$, d) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.8 - \gamma = 1.2$

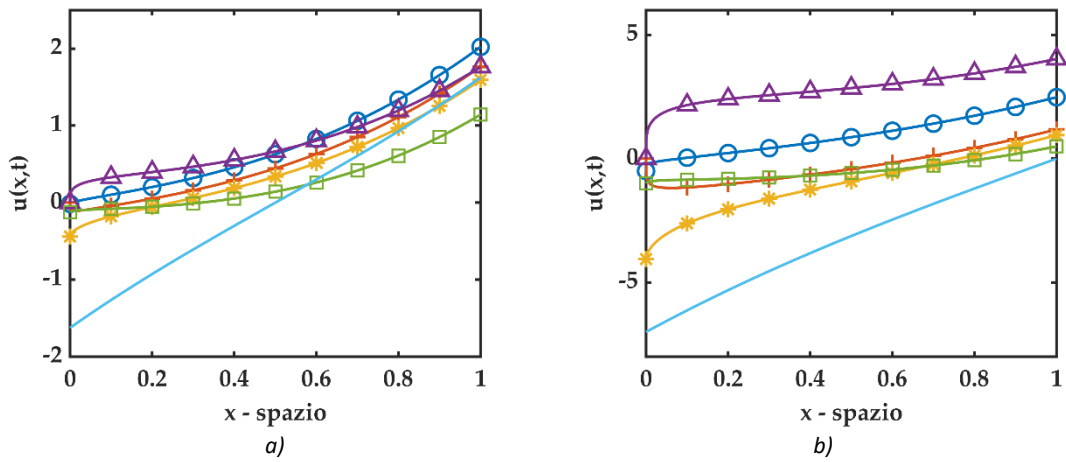


Figura 10-2 plot 2D di confronto fra soluzioni del problema differenziale frazionario S-FRADE con $u(x, 0) = x^\delta$ con $\delta = 3$ e coefficienti di diffusione ed avvezione costanti $\rightarrow \mu = cost$. Il valore di $\gamma = 1.2$ è fissato e (⊙ cerchio - blu) rappresenta la soluzione per $\beta = 0.2$, (+ croce - rosso) rappresenta la soluzione per $\beta = 0.4$, (* asterisco - giallo) rappresenta la soluzione per $\beta = 0.6$, (△ triangolo - viola) rappresenta la soluzione per $\beta = 0.6$, (□ quadrato - verde) rappresenta la soluzione per $\beta = 1.0$, (- linea continua - azzurro) rappresenta la soluzione della standard DE. a) plot 2D per $t = 0.5$, b) plot 2D per $t = 1.0$

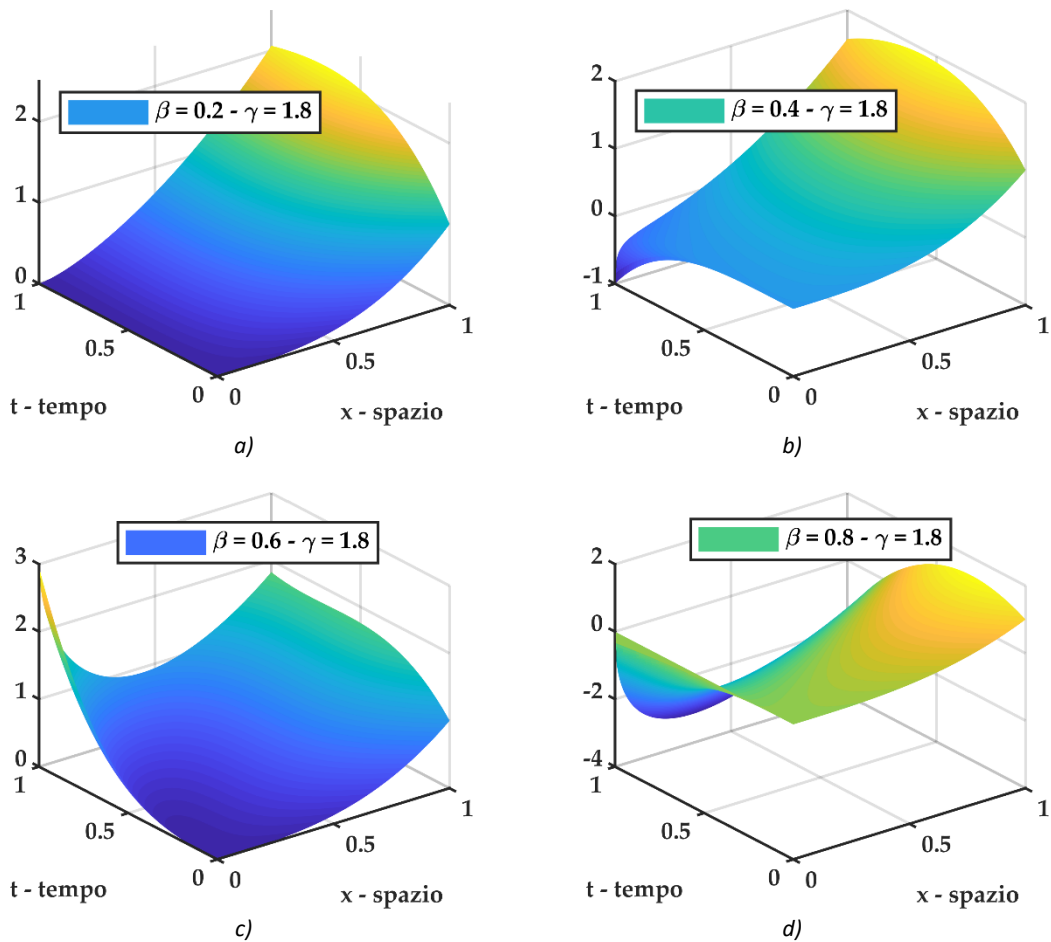


Figura 10-3 plot 3D della soluzione $u(x, t)$ del problema differenziale frazionario S-FRADE con $u(x, 0) = x^\delta$ con $\delta = 3$ e coefficienti di diffusione ed avvezione costanti $\rightarrow \mu = cost$ per diversi valori dell'ordine di derivazione frazionario per operatore laplaciano ed avvezione. a) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.2 - \gamma = 1.8$, b) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.4 - \gamma = 1.8$, c) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.6 - \gamma = 1.8$, d) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.8 - \gamma = 1.8$

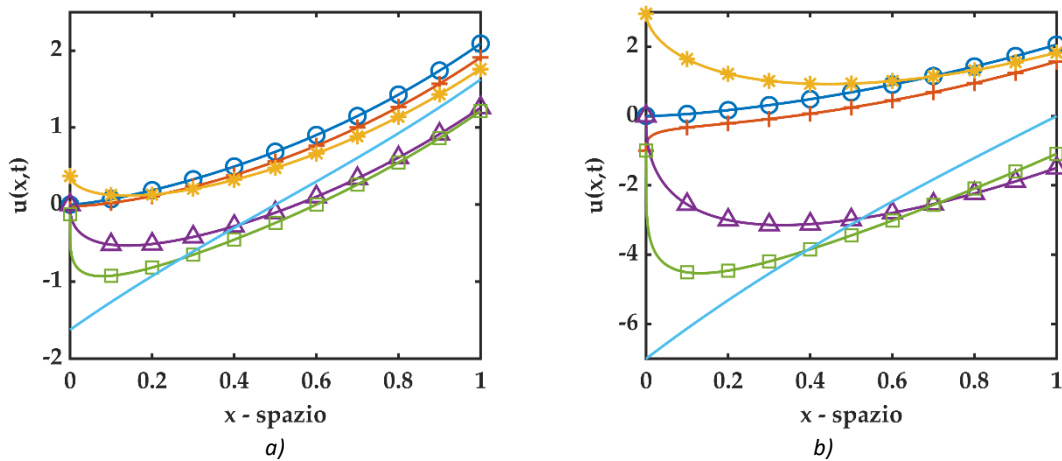


Figura 10-4 plot 2D di confronto fra soluzioni del problema differenziale frazionario S-FRADE con $u(x, 0) = x^\delta$ con $\delta = 3$ e coefficienti di diffusione ed avvezione costanti $\rightarrow \mu = cost.$ Il valore di $\gamma = 1.8$ è fissato e (⊙ cerchio - blu) rappresenta la soluzione per $\beta = 0.2$, (+ croce - rosso) rappresenta la soluzione per $\beta = 0.4$, (* asterisco - giallo) rappresenta la soluzione per $\beta = 0.6$, (Δ triangolo - viola) rappresenta la soluzione per $\beta = 0.6$, (\square quadrato - verde) rappresenta la soluzione per $\beta = 1.0$, (- linea continua - azzurro) rappresenta la soluzione della standard DE. a) plot 2D per $t = 0.5$, b) plot 2D per $t = 1.0$

Per verificare che la decomposizione Adomia converga alla soluzione analitica nota (9.10) utilizzando la definizione di derivata di Caputo si consideri diverse soluzioni ADM tramite limite $\beta \rightarrow 1, \gamma \rightarrow 2$

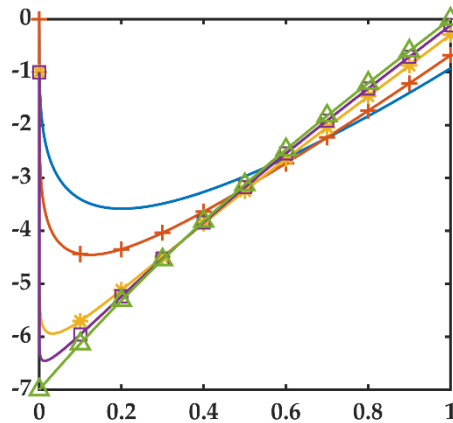


Figura 10-5 plot 2D di confronto fra varie soluzioni ADM di S-FRADE per verificare la tendenza alla soluzione analitica esatta del problema ADE con $(x, 0) = x^\delta$ con $\delta = 3$ e coefficienti di diffusione ed avvezione costanti $\rightarrow \mu = cost.$, (- linea continua - azzurro) $\gamma = 1.95 - \beta = 0.8$, (+ croce - rosso) $\gamma = 1.95 - \beta = 0.9$, (* asterisco - giallo) $\gamma = 1.95 - \beta = 1.0$, (\square quadrato - viola) $\gamma = 1.98 - \beta = 1.0$, (Δ triangolo - verde) $\gamma = 2.0 - \beta = 1.0$.

Dal plot sopra presentato si evince chiaramente la convergenza della soluzione ADM per il problema S-FRADE alla soluzione analitica di ADE (9.10).

10.2.1.1.1 Algoritmo Matlab

Di seguito viene riportato un estratto dello script Matlab utilizzato per i plot sopra riportati, soffermandosi sul calcolo della soluzione inerente il problema differenziale S-FRADE.

```

function [u_SPFADE_cost] =
uSP_fraz_cost_xdelta(Nmax,x1,t1,Gamma,beta,delta)
% uSP_fraz_cost => SPF = space fractional
%                               ADE = Advection Diffusion Equations
%                               cost = mu costante
% function per il calcolo della soluzione del seguente problema
% differenziale
%-----
% u,t + u,beta = mu u,gamma      1 < gamma <= 2 && 0 < beta <= 1
% u(x,0) = x^delta
%-----
u_SPFADE_cost = zeros(length(t1),length(x1));
SUM = 0;
for n = 0 : Nmax
    for j = 0 : n
        M_1 = floor((n-j)*Gamma+j*beta);
        if M_1 >= delta && M_1 ~= (n-j)*Gamma+j*beta
            SUM = SUM;
        elseif M_1 > delta
            SUM = SUM;
        else
            SUM = SUM + (- 1)^j*nchoosek(n,j)*gamma(delta+1)/
                /gamma(delta+1-((n-j)*Gamma+j*beta))*x1.^(delta-
                ((n-j)*Gamma+j*beta));
        end
    end
    u_SPFADE_cost = u_SPFADE_cost + t1.^n/factorial(n)*SUM;
    SUM = 0;
end
end

```

10.2.1.2 S-FRADE con condizioni iniziali $u(x, 0) = \sin(x)$

Seguendo lo schema ricorsivo ottenuto al paragrafo precedente e considerando il seguente problema differenziale S-FRADE, con $\mu = 1$ e con terminale $a = -\infty$.

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial^\beta u}{\partial x^\beta} = \mu \cdot \frac{\partial^\gamma u}{\partial x^\gamma} \\ u(x, 0) = \sin(x) \end{cases} \quad (10.10)$$

si ottengono le seguenti componenti ADM

n	u_n
0	$u_0(x, t) = u(x, 0) = \sin(x)$
1	$u_1(x, t) = t \cdot [D_x^\gamma - D_x^\beta](\sin(x)) = t \cdot \left[\sin\left(x + \frac{\gamma\pi}{2}\right) - \sin\left(x + \frac{\beta\pi}{2}\right) \right]$
2	$u_2(x, t) = \frac{t^2}{2!} \cdot [D_x^{2\gamma} - 2D_x^{\gamma+\beta} + D_x^{2\beta}](\sin(x))$ $= \frac{t^2}{2!} \cdot \left[\sin\left(x + \frac{2\gamma\pi}{2}\right) - 2 \sin\left(x + \frac{(\gamma + \beta)\pi}{2}\right) + \sin\left(x + \frac{2\beta\pi}{2}\right) \right]$
3	$u_3(x, t) = \frac{t^3}{3!} \cdot [D_x^{3\gamma} - 3D_x^{2\gamma+\beta} + 3D_x^{\gamma+2\beta} - D_x^{3\beta}](\sin(x)) =$ $= \frac{t^3}{3!} \cdot \left[\sin\left(x + \frac{3\gamma\pi}{2}\right) - 3 \sin\left(x + \frac{(2\gamma + \beta)\pi}{2}\right) + 3 \sin\left(x + \frac{(\gamma + 2\beta)\pi}{2}\right) - \sin\left(x + \frac{3\beta\pi}{2}\right) \right]$
4	$u_4(x, t) = \frac{t^4}{4!} \cdot [D_x^{4\gamma} - 4D_x^{3\gamma+\beta} + 6D_x^{2\gamma+2\beta} - 4D_x^{\gamma+3\beta} + D_x^{4\beta}](\sin(x)) =$ $\frac{t^4}{4!} \cdot \left[\sin\left(x + \frac{4\gamma\pi}{2}\right) - 4 \sin\left(x + \frac{(3\gamma + \beta)\pi}{2}\right) + 6 \sin\left(x + \frac{(2\gamma + 2\beta)\pi}{2}\right) - 4 \sin\left(x + \frac{(\gamma + 3\beta)\pi}{2}\right) + \sin\left(x + \frac{4\beta\pi}{2}\right) \right]$
\vdots	\vdots
n	$u_n(x, t) = \frac{t^n}{n!} \cdot \sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{n}{j} \mu^{n-j} [D_x^{(n-j)\gamma+j\beta}] f(x)$ $= \frac{t^n}{n!} \cdot \sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{n}{j} \sin\left(x + \frac{[(n-j)\gamma + j\beta]\pi}{2}\right)$

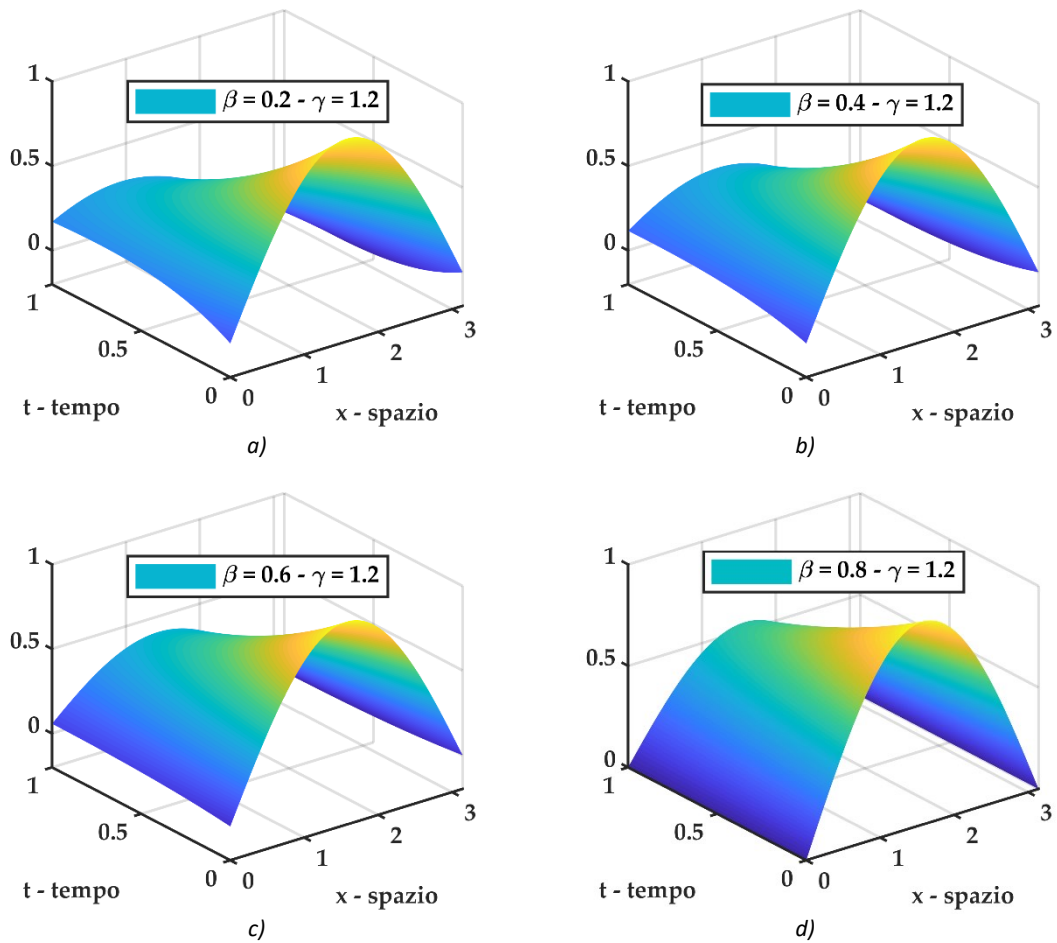


Figura 10-6 plot 3D della soluzione $u(x, t)$ del problema differenziale frazionario S-FRADE con $u(x, 0) = \sin(x)$ e coefficienti di diffusione ed avvezione costanti $\rightarrow \mu = \text{cost}$ per diversi valori dell'ordine di derivazione frazionario per operatore laplaciano ed avvezione. a) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.2 - \gamma = 1.2$, b) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.4 - \gamma = 1.2$, c) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.6 - \gamma = 1.2$, d) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.8 - \gamma = 1.2$

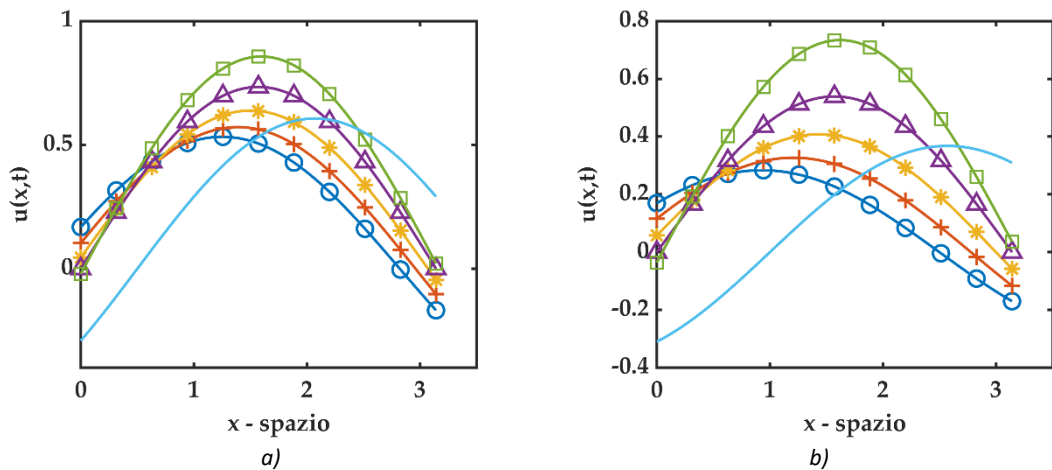


Figura 10-7 plot 2D di confronto fra soluzioni del problema differenziale frazionario S-FRADE con $u(x, 0) = \sin(x)$ e coefficienti di diffusione ed avvezione costanti $\rightarrow \mu = \text{cost}$. Il valore di $\gamma = 1.2$ è fissato e (⊙ cerchio - blu) rappresenta la soluzione per $\beta = 0.2$, (+ croce - rosso) rappresenta la soluzione per $\beta = 0.4$, (* asterisco - giallo) rappresenta la soluzione per $\beta = 0.6$, (Δ triangolo - viola) rappresenta la soluzione per $\beta = 0.6$, (□ quadrato - verde) rappresenta la soluzione per $\beta = 1.0$, (— linea continua - azzurro) rappresenta la soluzione della standard DE. a) plot 2D per $t = 0.5$, b) plot 2D per $t = 1.0$

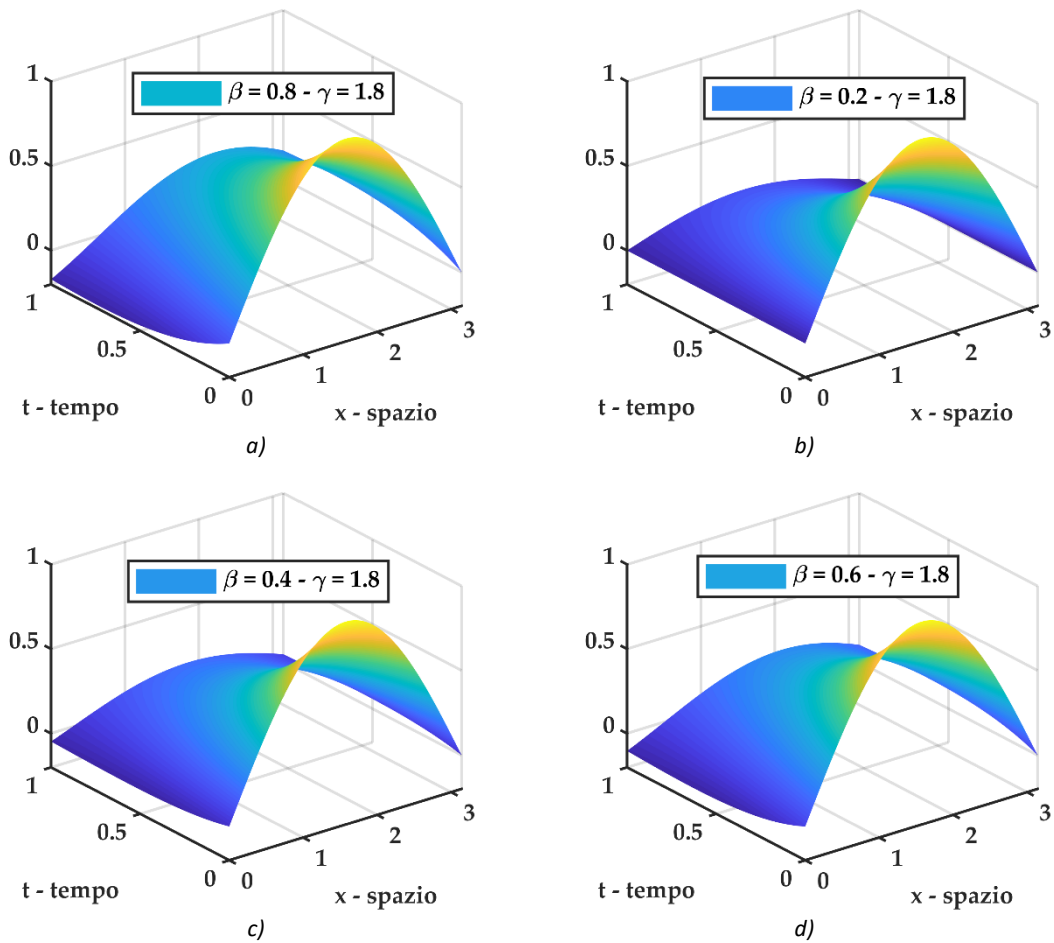


Figura 10-8 plot 3D della soluzione $u(x, t)$ del problema differenziale frazionario S-FRADE con $u(x, 0) = \sin(x)$ e coefficienti di diffusione ed avvezione costanti $\rightarrow \mu = \text{cost}$ per diversi valori dell'ordine di derivazione frazionario per operatore laplaciano ed avvezione. a) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.2 - \gamma = 1.8$, b) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.4 - \gamma = 1.8$, c) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.6 - \gamma = 1.8$, d) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.8 - \gamma = 1.8$

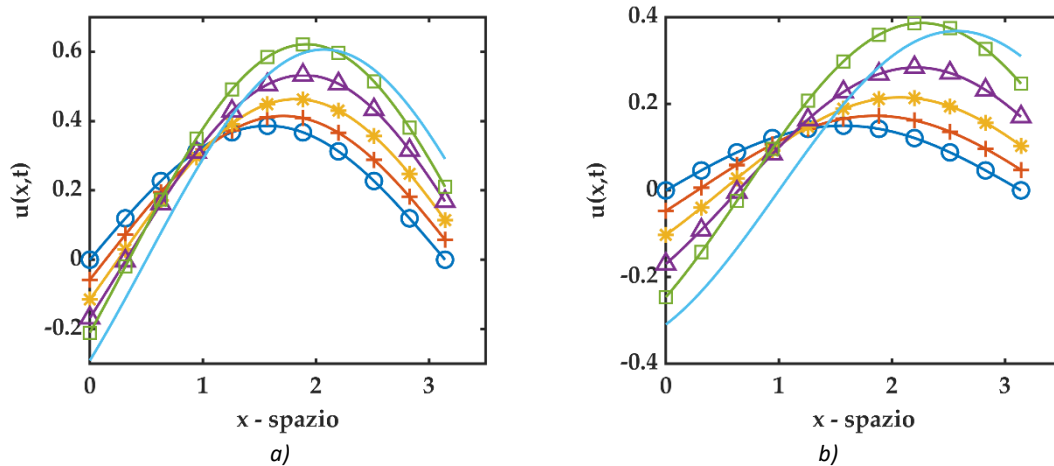


Figura 10-9 plot 2D di confronto fra soluzioni del problema differenziale frazionario S-FRADE con $u(x, 0) = \sin(x)$ e coefficienti di diffusione ed avvezione costanti $\rightarrow \mu = \text{cost}$. Il valore di $\gamma = 1.8$ è fissato e (⊙ cerchio - blu) rappresenta la soluzione per $\beta = 0.2$, (+ croce - rosso) rappresenta la soluzione per $\beta = 0.4$, (* asterisco - giallo) rappresenta la soluzione per $\beta = 0.6$, (Δ triangolo - viola) rappresenta la soluzione per $\beta = 0.6$, (□ quadrato - verde) rappresenta la soluzione per $\beta = 1.0$, (- linea continua - azzurro) rappresenta la soluzione della standard DE. a) plot 2D per $t = 0.5$, b) plot 2D per $t = 1.0$

10.2.1.2.1 Algoritmo Matlab

Di seguito viene riportato un estratto dello script Matlab utilizzato per i plot sopra riportati, soffermandosi sul calcolo della soluzione inerente il problema differenziale S-FRADE.

```

function [u_SPFADE_cost] = uSP_fraz_cost(Nmax,x1,t1,gamma,beta)
% uSP_fraz_cost => SPF = space fractional
%                               ADE = Advection Diffusion Equations
%                               cost = mu costante
% function per il calcolo della soluzione del seguente problema
% differenziale
%-----
% u,t + u,beta = mu u,gamma      1 < gamma <= 2 && 0 < beta <= 1
% u(x,0) = sin(x)
%-----
u_SPFADE_cost = zeros(length(t1),length(x1));
SUM = 0;
for n = 0 : Nmax
    for j = 0 : n
        SUM = SUM + (-1)^j*nchoosek(n,j)*sin(x1 + ((n-j)*
            *gamma+j*beta)*pi/2);
    end
    u_SPFADE_cost = u_SPFADE_cost + t1.^n/factorial(n)*SUM;
    SUM = 0;
end
end

```

10.2.1.3 S-FRADE con condizioni iniziali $u(x, 0) = \cos(x)$

Seguendo lo schema ricorsivo ottenuto al paragrafo precedente e considerando il seguente problema differenziale S-FRADE, con $\mu = 1$ e con terminale $a = -\infty$.

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial^\beta u}{\partial x^\beta} = \mu \cdot \frac{\partial^\gamma u}{\partial x^\gamma} \\ u(x, 0) = \cos(x) \end{cases} \quad (10.11)$$

si ottengono le seguenti componenti ADM

n	u_n
0	$u_0(x, t) = u(x, 0) = \cos(x)$
1	$u_1(x, t) = t \cdot [D_x^\gamma - D_x^\beta](\cos(x)) = t \cdot \left[\cos\left(x + \frac{\gamma\pi}{2}\right) - \cos\left(x + \frac{\beta\pi}{2}\right) \right]$
2	$u_2(x, t) = \frac{t^2}{2!} \cdot [D_x^{2\gamma} - 2D_x^{\gamma+\beta} + D_x^{2\beta}](\cos(x))$ $= \frac{t^2}{2!} \cdot \left[\cos\left(x + \frac{2\gamma\pi}{2}\right) - 2 \cos\left(x + \frac{(\gamma + \beta)\pi}{2}\right) + \cos\left(x + \frac{2\beta\pi}{2}\right) \right]$
3	$u_3(x, t) = \frac{t^3}{3!} \cdot [D_x^{3\gamma} - 3D_x^{2\gamma+\beta} + 3D_x^{\gamma+2\beta} - D_x^{3\beta}](\cos(x)) =$ $= \frac{t^3}{3!} \cdot \left[\cos\left(x + \frac{3\gamma\pi}{2}\right) - 3 \cos\left(x + \frac{(2\gamma + \beta)\pi}{2}\right) + 3 \cos\left(x + \frac{(\gamma + 2\beta)\pi}{2}\right) - \cos\left(x + \frac{3\beta\pi}{2}\right) \right]$
4	$u_4(x, t) = \frac{t^4}{4!} \cdot [D_x^{4\gamma} - 4D_x^{3\gamma+\beta} + 6D_x^{2\gamma+2\beta} - 4D_x^{\gamma+3\beta} + D_x^{4\beta}](\cos(x)) =$ $\frac{t^4}{4!} \cdot \left[\cos\left(x + \frac{4\gamma\pi}{2}\right) - 4 \cos\left(x + \frac{(3\gamma + \beta)\pi}{2}\right) + 6 \cos\left(x + \frac{(2\gamma + 2\beta)\pi}{2}\right) - 4 \cos\left(x + \frac{(\gamma + 3\beta)\pi}{2}\right) + \cos\left(x + \frac{4\beta\pi}{2}\right) \right]$
\vdots	\vdots
n	$u_n(x, t) = \frac{t^n}{n!} \cdot \sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{n}{j} \mu^{n-j} [D_x^{(n-j)\gamma+j\beta}] f(x)$ $= \frac{t^n}{n!} \cdot \sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{n}{j} \cos\left(x + \frac{[(n-j)\gamma + j\beta]\pi}{2}\right)$

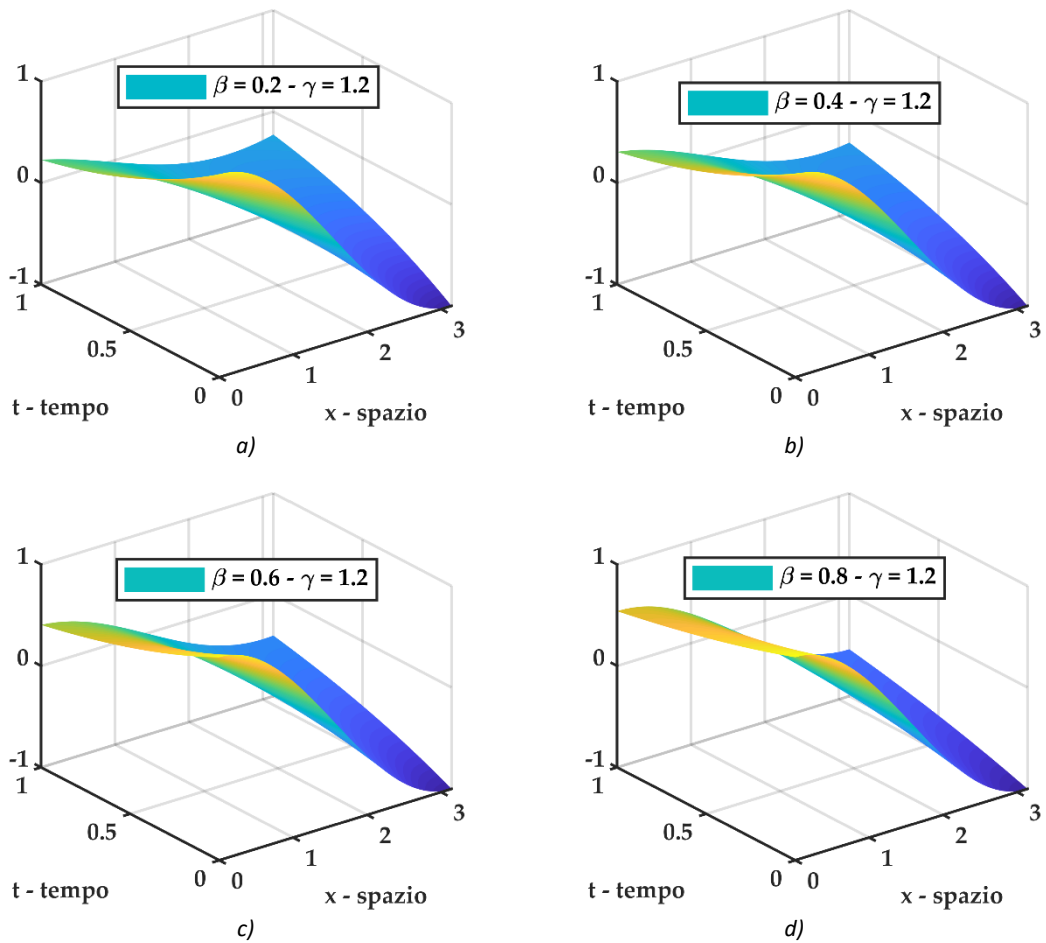


Figura 10-10 plot 3D della soluzione $u(x, t)$ del problema differenziale frazionario S-FRADE con $u(x, 0) = \cos(x)$ e coefficienti di diffusione ed avvezione costanti $\rightarrow \mu = \text{cost}$ per diversi valori dell'ordine di derivazione frazionario per operatore laplaciano ed avvezione. a) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.2 - \gamma = 1.2$, b) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.4 - \gamma = 1.2$, c) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.6 - \gamma = 1.2$, d) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.8 - \gamma = 1.2$

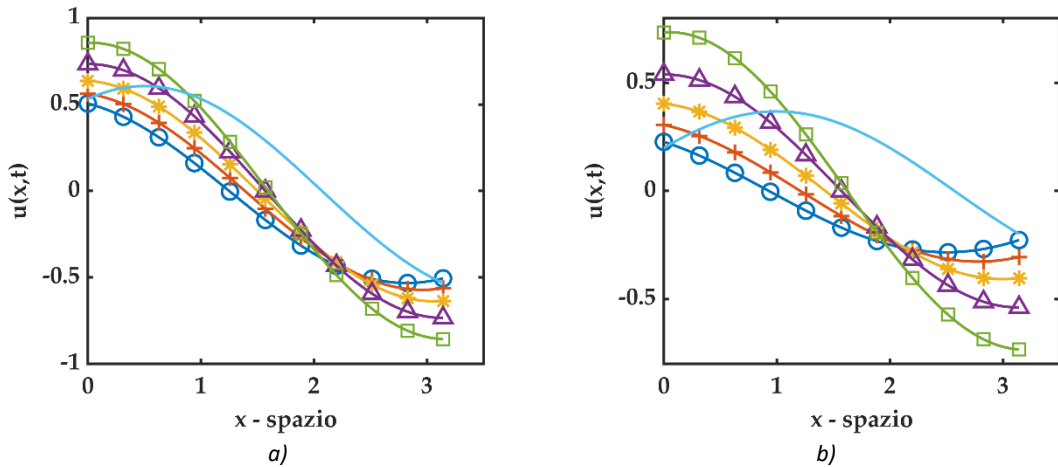


Figura 10-11 plot 2D di confronto fra soluzioni del problema differenziale frazionario S-FRADE con $u(x, 0) = \cos(x)$ e coefficienti di diffusione ed avvezione costanti $\rightarrow \mu = \text{cost}$. Il valore di $\gamma = 1.2$ è fissato e (\odot cerchio - blu) rappresenta la soluzione per $\beta = 0.2$, (+ croce - rosso) rappresenta la soluzione per $\beta = 0.4$, (* asterisco - giallo) rappresenta la soluzione per $\beta = 0.6$, (\triangle triangolo - viola) rappresenta la soluzione per $\beta = 0.6$, (\square quadrato - verde) rappresenta la soluzione per $\beta = 1.0$, (- linea continua - azzurro) rappresenta la soluzione della standard DE. a) plot 2D per $t = 0.5$, b) plot 2D per $t = 1.0$

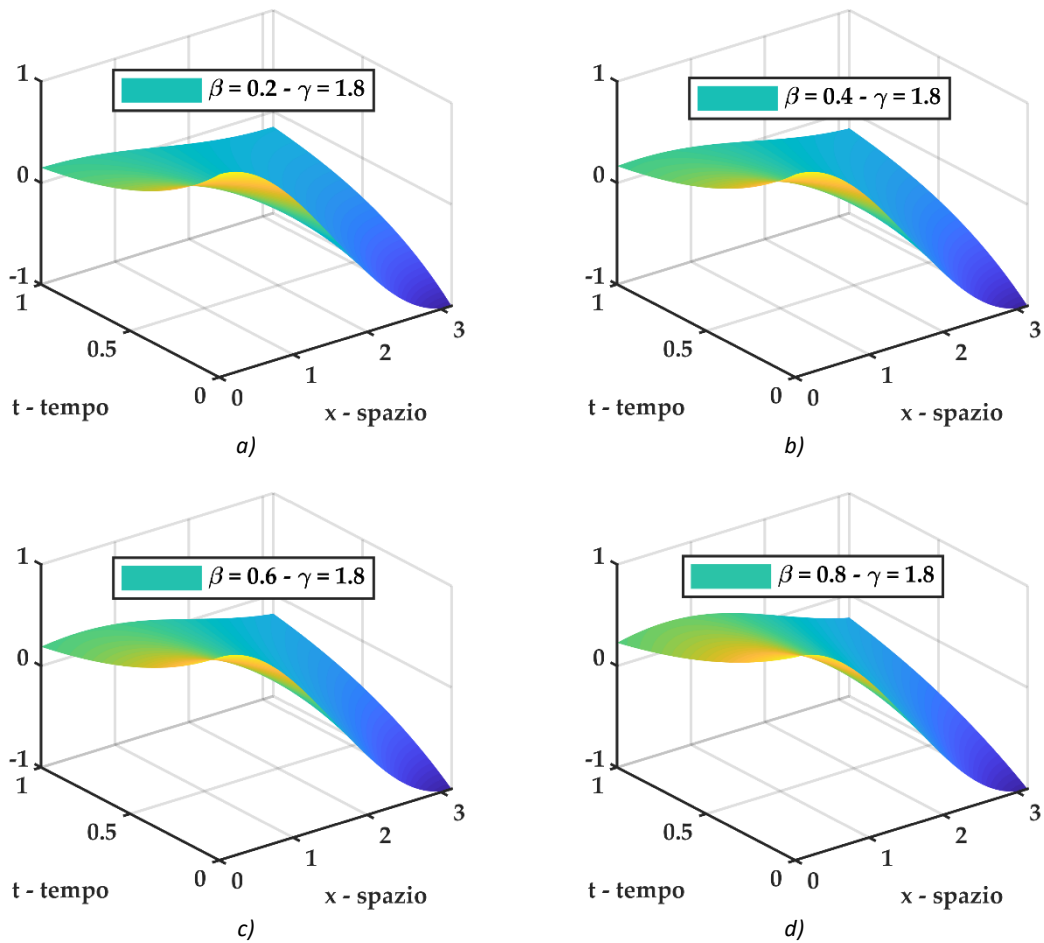


Figura 10-12 plot 3D della soluzione $u(x, t)$ del problema differenziale frazionario S-FRADE con $u(x, 0) = \cos(x)$ e coefficienti di diffusione ed avvezione costanti $\rightarrow \mu = \text{cost}$ per diversi valori dell'ordine di derivazione frazionario per operatore laplaciano ed avvezione. a) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.2 - \gamma = 1.8$, b) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.4 - \gamma = 1.8$, c) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.6 - \gamma = 1.8$, d) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.8 - \gamma = 1.8$

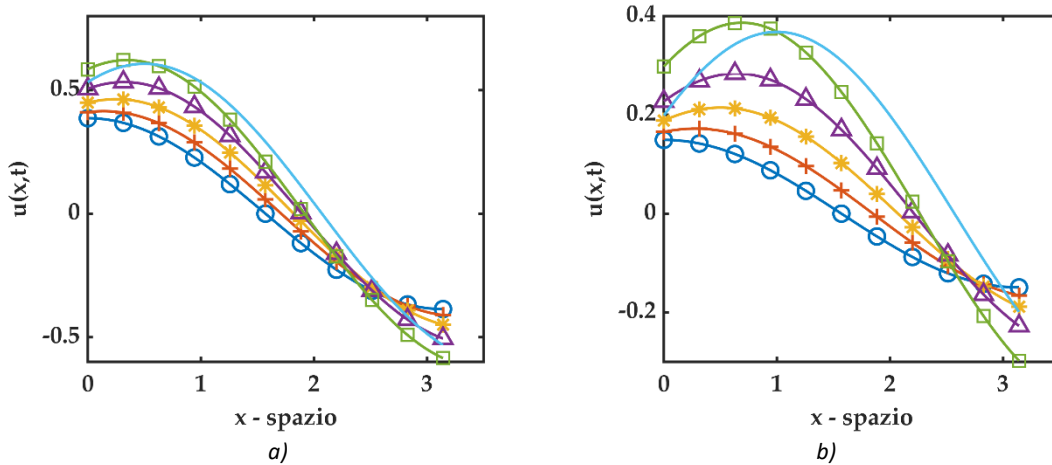


Figura 10-13 plot 2D di confronto fra soluzioni del problema differenziale frazionario S-FRADE con $u(x, 0) = \cos(x)$ e coefficienti di diffusione ed avvezione costanti $\rightarrow \mu = \text{cost}$. Il valore di $\gamma = 1.8$ è fissato e (○ cerchio - blu) rappresenta la soluzione per $\beta = 0.2$, (+ croce - rosso) rappresenta la soluzione per $\beta = 0.4$, (* asterisco - giallo) rappresenta la soluzione per $\beta = 0.6$, (△ triangolo - viola) rappresenta la soluzione per $\beta = 0.6$, (□ quadrato - verde) rappresenta la soluzione per $\beta = 1.0$, (— linea continua - azzurro) rappresenta la soluzione della standard DE. a) plot 2D per $t = 0.5$, b) plot 2D per $t = 1.0$

10.2.1.3.1 Algoritmo Matlab

Di seguito viene riportato un estratto dello script Matlab utilizzato per i plot sopra riportati, soffermandosi sul calcolo della soluzione inerente il problema differenziale S-FRADE.

```

function [u_SPFADE_cost] =
uSP_fraz_cost_cos(Nmax,x1,t1,gamma,beta)
% uSP_fraz_cost => SPF = space fractional
%                               ADE = Advection Diffusion Equations
%                               cost = mu costante
% function per il calcolo della soluzione del seguente problema
% differenziale
%-----
% u,t + u,beta = mu u,gamma      1 < gamma <= 2 && 0 < beta <= 1
% u(x,0) = cos(x)
%-----
u_SPFADE_cost = zeros(length(t1),length(x1));
SUM = 0;
for n = 0 : Nmax
    for j = 0 : n
        SUM = SUM + (-1)^j*nchoosek(n,j)*cos(x1 + ((n-j)*
            *gamma+j*beta)*pi/2);
    end
    u_SPFADE_cost = u_SPFADE_cost + t1.^n/factorial(n)*SUM;
    SUM = 0;
end
end

```

10.2.1.4 S-FRADE con condizioni iniziali $u(x, 0) = e^{ax}$

Seguendo lo schema ricorsivo ottenuto al paragrafo precedente e considerando il seguente problema differenziale S-FRADE, con $\mu = 1$ e con terminale $a = -\infty$.

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial^\beta u}{\partial x^\beta} = \mu \cdot \frac{\partial^\gamma u}{\partial x^\gamma} \\ u(x, 0) = e^{ax} \end{cases} \quad (10.12)$$

si ottengono le seguenti componenti ADM

n	u_n
0	$u_0(x, t) = u(x, 0) = e^{ax}$
1	$u_1(x, t) = t \cdot [D_x^\gamma - D_x^\beta] (e^{ax}) = t \cdot (a^\gamma e^{ax} - a^\beta e^{ax}) = t \cdot (a^\gamma - a^\beta) \cdot e^{ax}$
2	$u_2(x, t) = \frac{t^2}{2!} \cdot [D_x^{2\gamma} - 2D_x^{\gamma+\beta} + D_x^{2\beta}] (e^{ax}) = \frac{t^2}{2!} \cdot (a^{2\gamma} - 2a^{\gamma+\beta} + a^{2\beta}) \cdot e^{ax}$
3	$u_3(x, t) = \frac{t^3}{3!} \cdot [D_x^{3\gamma} - 3D_x^{2\gamma+\beta} + 3D_x^{\gamma+2\beta} - D_x^{3\beta}] (e^{ax})$ $= \frac{t^3}{3!} \cdot (a^{3\gamma} - 3a^{2\gamma+\beta} + 3a^{\gamma+2\beta} - a^{3\beta}) \cdot e^{ax}$
4	$u_4(x, t) = \frac{t^4}{4!} \cdot [D_x^{4\gamma} - 4D_x^{3\gamma+\beta} + 6D_x^{2\gamma+2\beta} - 4D_x^{\gamma+3\beta} + D_x^{4\beta}] (e^{ax})$ $= \frac{t^4}{4!} \cdot (a^{4\gamma} - 4a^{3\gamma+\beta} + 6a^{2\gamma+2\beta} - 4a^{\gamma+3\beta} + a^{4\beta}) \cdot e^{ax}$
\vdots	\vdots
n	$u_n(x, t) = \frac{t^n}{n!} \cdot \sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{n}{j} \mu^{n-j} [D_x^{(n-j)\gamma+j\beta}] f(x)$ $= \frac{t^n}{n!} \cdot \sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{n}{j} a^{(n-j)\gamma+j\beta} \cdot e^{ax}$

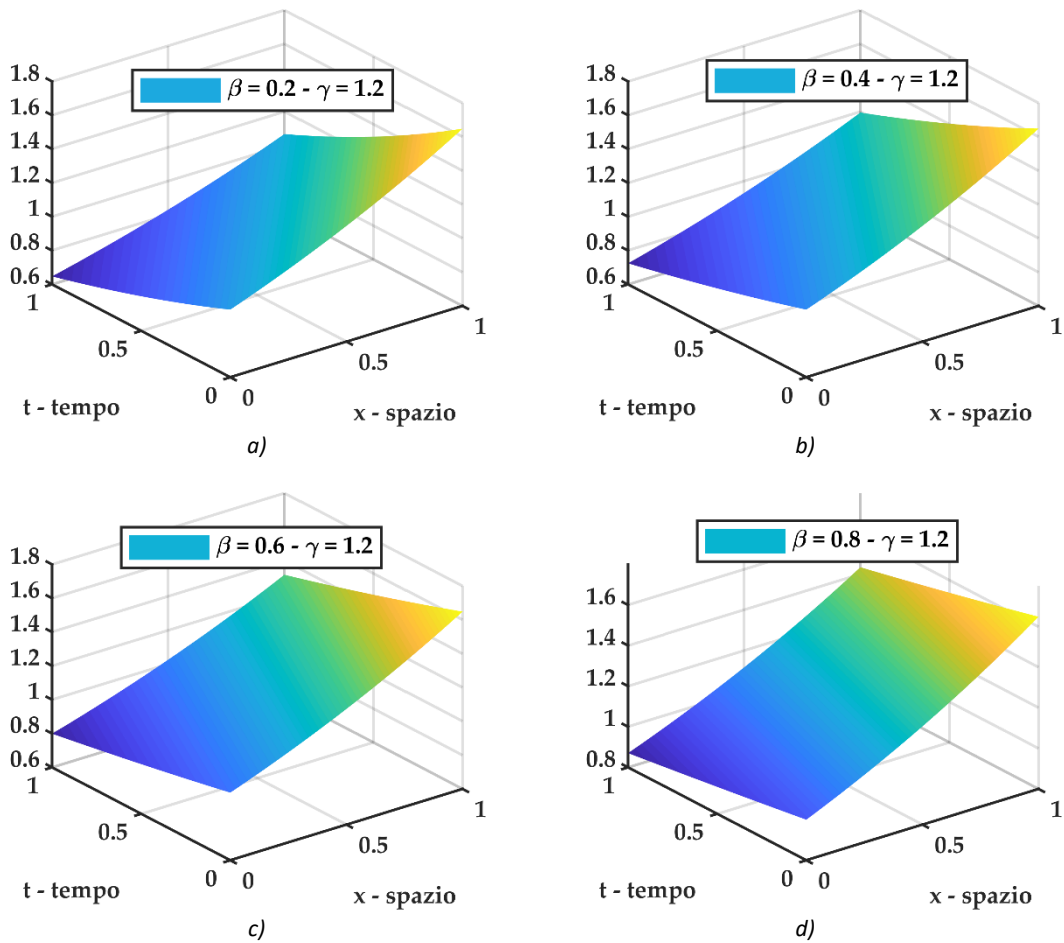


Figura 10-14 plot 3D della soluzione $u(x, t)$ del problema differenziale frazionario S-FRADE con $u(x, 0) = e^{ax}$ con $a = 0.50$ e coefficienti di diffusione ed avvezione costanti $\rightarrow \mu = \text{cost}$ per diversi valori dell'ordine di derivazione frazionario per operatore laplaciano ed avvezione. a) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.2 - \gamma = 1.2$, b) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.4 - \gamma = 1.2$, c) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.6 - \gamma = 1.2$, d) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.8 - \gamma = 1.2$

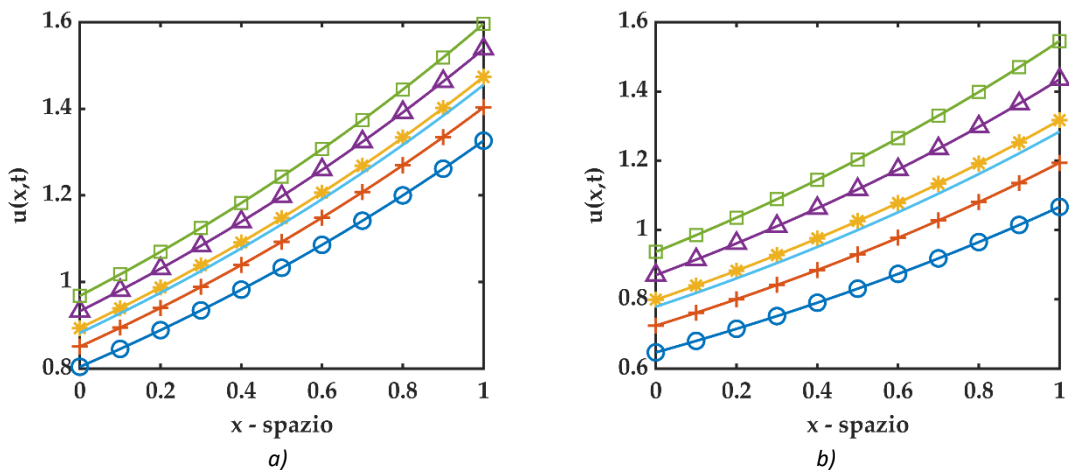


Figura 10-15 plot 2D di confronto fra soluzioni del problema differenziale frazionario S-FRADE con $u(x, 0) = e^{ax}$ con $a = 0.50$ e coefficienti di diffusione ed avvezione costanti $\rightarrow \mu = \text{cost}$. Il valore di $\gamma = 1.2$ è fissato e (\odot cerchio - blu) rappresenta la soluzione per $\beta = 0.2$, (+ croce - rosso) rappresenta la soluzione per $\beta = 0.4$, (* asterisco - giallo) rappresenta la soluzione per $\beta = 0.6$, (\triangle triangolo - viola) rappresenta la soluzione per $\beta = 0.6$, (\square quadrato - verde) rappresenta la soluzione per $\beta = 1.0$, (- linea continua - azzurro) rappresenta la soluzione della standard DE. a) plot 2D per $t = 0.5$, b) plot 2D per $t = 1.0$

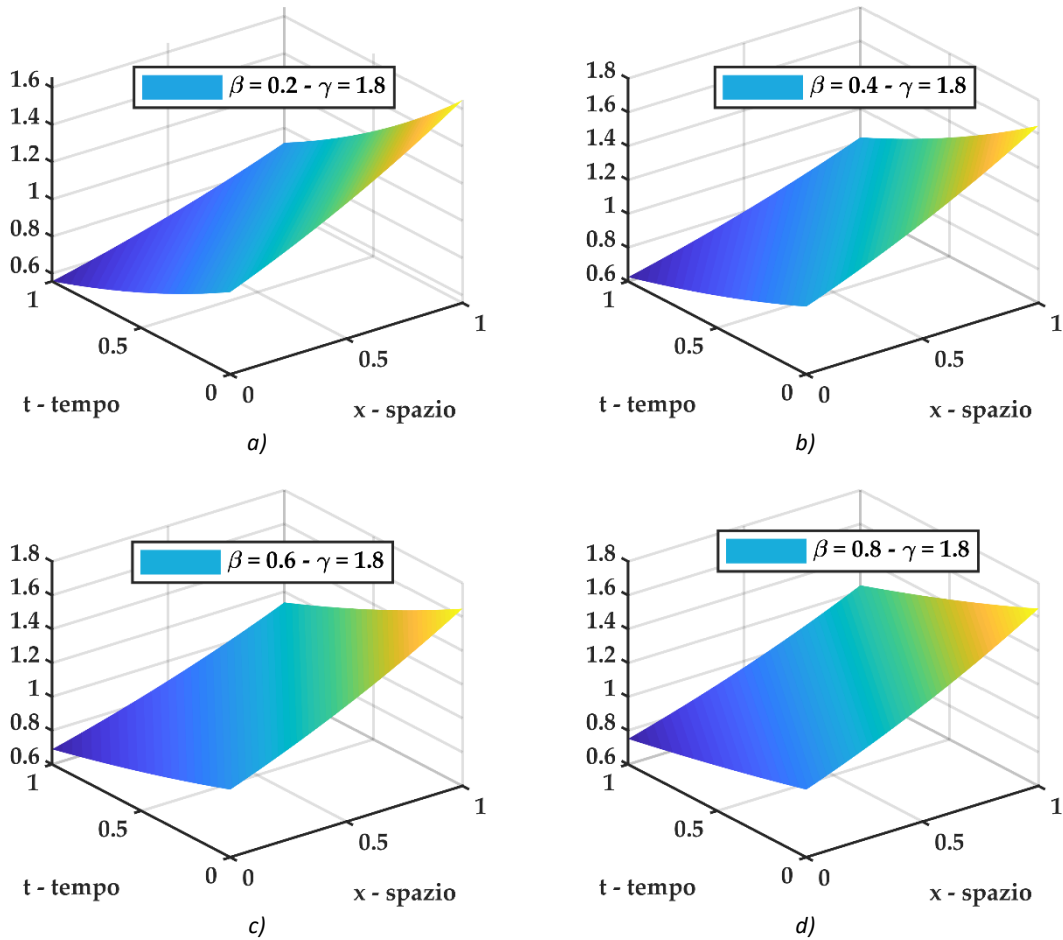


Figura 10-16 plot 3D della soluzione $u(x, t)$ del problema differenziale frazionario S-FRADE con $u(x, 0) = e^{ax}$ con $a = 0.50$ e coefficienti di diffusione ed avvezione costanti $\rightarrow \mu = cost$ per diversi valori dell'ordine di derivazione frazionario per operatore laplaciano ed avvezione. a) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.2 - \gamma = 1.8$, b) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.4 - \gamma = 1.8$, c) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.6 - \gamma = 1.8$, d) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.8 - \gamma = 1.8$

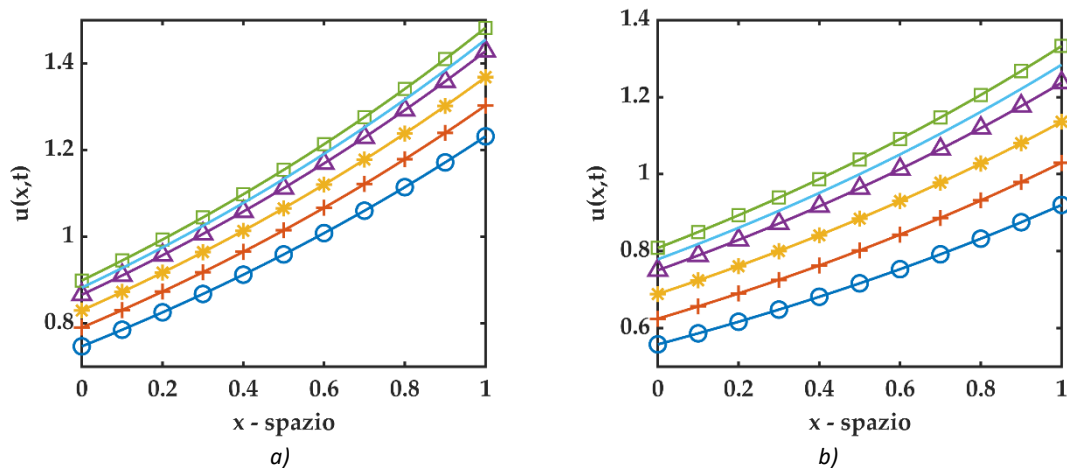


Figura 10-17 plot 2D di confronto fra soluzioni del problema differenziale frazionario S-FRADE con $u(x, 0) = e^{ax}$ con $a = 0.50$ e coefficienti di diffusione ed avvezione costanti $\rightarrow \mu = cost$. Il valore di $\gamma = 1.8$ è fissato e (⊙ cerchio - blu) rappresenta la soluzione per $\beta = 0.2$, (+ croce - rosso) rappresenta la soluzione per $\beta = 0.4$, (* asterisco - giallo) rappresenta la soluzione per $\beta = 0.6$, (△ triangolo - viola) rappresenta la soluzione per $\beta = 1.0$, (— linea continua - azzurro) rappresenta la soluzione della standard DE. a) plot 2D per $t = 0.5$, b) plot 2D per $t = 1.0$

10.2.1.4.1 Algoritmo Matlab

Di seguito viene riportato un estratto dello script Matlab utilizzato per i plot sopra riportati, soffermandosi sul calcolo della soluzione inerente il problema differenziale S-FRADE.

```

function [u_SPFADE_cost] =
uSP_fraz_cost_eax(Nmax,x1,t1,gamma,beta,a)
% uSP_fraz_cost => SPF = space fractional
%
% ADE = Advection Diffusion Equations
%
% cost = mu costante
% function per il calcolo della soluzione del seguente problema
% differenziale
%-----
% u,t + u,beta = mu u,gamma      1 < gamma <= 2 && 0 < beta <= 1
% u(x,0) = e^(ax)
%-----
u_SPFADE_cost = zeros(length(t1),length(x1));
SUM = 0;
for n = 0 : Nmax
    for j = 0 : n
        SUM = SUM + (-1)^j*nchoosek(n,j)*a^((n-j)*
            *gamma+j*beta)*exp(a*x1);
    end
    u_SPFADE_cost = u_SPFADE_cost + t1.^n/factorial(n)*SUM;
    SUM = 0;
end
end

```

10.2.2 T-FRADE

Nel presente paragrafo si considera l'equazione di diffusione-avvezione frazionaria solamente in tempo (T-FRADE), inserendo l'ordine di derivazione frazionario all'operatore temporale.

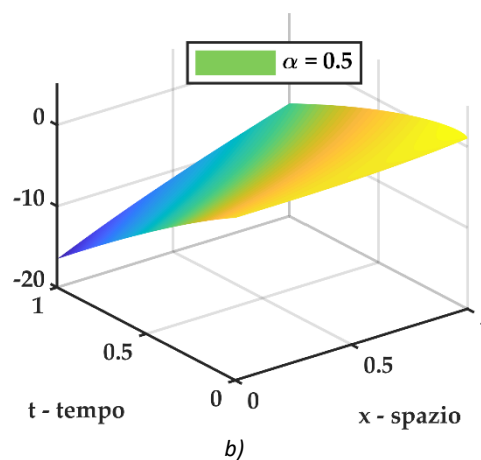
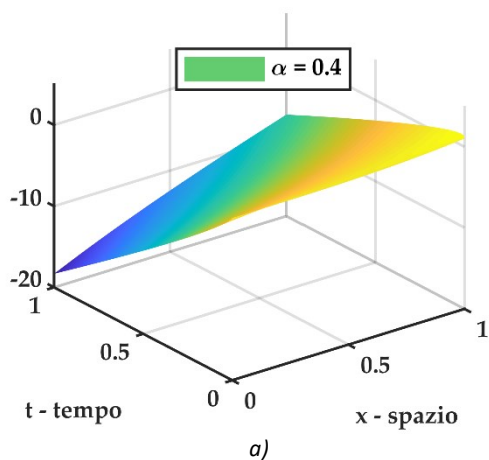
10.2.2.1 T-FRADE con condizioni iniziali $u(x, 0) = x^3$

Seguendo lo schema ricorsivo ottenuto al paragrafo precedente e considerando il seguente problema differenziale S-FRADE con $\mu = 1$

$$\begin{cases} \frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha} + \frac{\partial u}{\partial x} = \mu \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(x, 0) = x^3 \end{cases} \quad (10.13)$$

si ottengono le seguenti componenti ADM

n	u_n
0	$u_0(x, t) = u(x, 0) = x^3$
1	$u_1(x, t) = \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} \cdot [D_x^2 - D_x](x^3) = \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} \cdot (6x - 3x^2)$
2	$u_2(x, t) = \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha + 1)} \cdot [D_x^4 - 2D_x^3 + D_x^2](x^3) = \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha + 1)} \cdot (-12 + 6x)$
3	$u_3(x, t) = \frac{t^{3\alpha}}{\Gamma(3\alpha + 1)} \cdot [D_x^6 - 3D_x^5 + 3D_x^4 - D_x^3](x^3) = \frac{t^{3\alpha}}{\Gamma(3\alpha + 1)} \cdot (-6)$
4	$u_4(x, t) = \frac{t^{4\alpha}}{\Gamma(4\alpha + 1)} \cdot [D_x^8 - 4D_x^7 + 6D_x^6 - 4D_x^5 + D_x^4](x^3)$



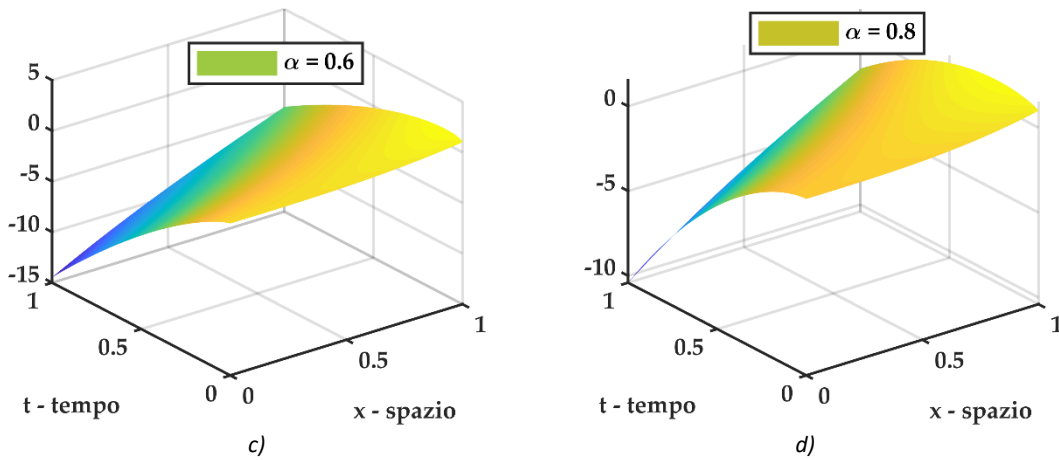


Figura 10-18 plot 3D della soluzione $u(x, t)$ del problema differenziale frazionario T-FRADE con $u(x, 0) = x^\delta$ con $\delta = 3$ e coefficienti di diffusione ed avvezione costanti $\rightarrow \mu = \text{cost}$. a) soluzione T-FRADE per $\alpha = 0.4$, b) soluzione T-FRADE per $\alpha = 0.5$, c) soluzione T-FRADE per $\alpha = 0.6$, d) soluzione T-FRADE per $\alpha = 0.8$

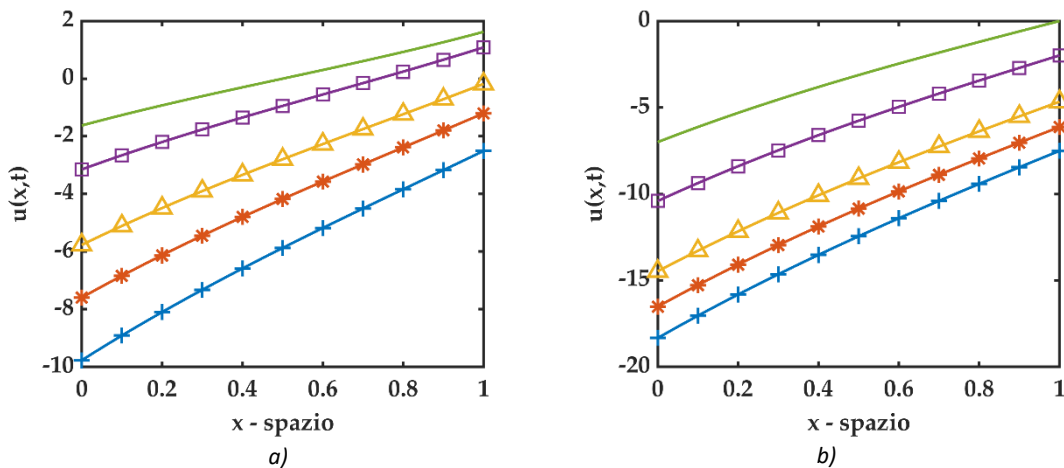


Figura 10-19 plot 2D di confronto fra soluzioni del problema differenziale frazionario T-FRADE con $u(x, 0) = x^\delta$ con $\delta = 3$ e coefficienti di diffusione ed avvezione costanti $\rightarrow \mu = \text{cost}$ e (+ croce - blu) rappresenta la soluzione per $\alpha = 0.4$, (* asterisco - rosso) rappresenta la soluzione per $\alpha = 0.5$, (Δ triangolo - giallo) rappresenta la soluzione per $\alpha = 0.6$, (\square quadrato - viola) rappresenta la soluzione per $\alpha = 0.8$, (- linea continua - verde) rappresenta la soluzione della standard ADE. a) plot 2D per $t = 0.5$, b) plot 2D per $t = 1.0$

10.2.2.1.1 Algoritmo Matlab

Di seguito viene riportato un estratto dello script Matlab utilizzato per i plot sopra riportati, soffermandosi sul calcolo della soluzione inerente il problema differenziale T-FRADE.

```
function [u_SPTFADE_cost] =
uSPT_fraz_cost_xdelta (Nmax, x1, t1, Gamma, beta, delta, alpha)
% uSP_fraz_cost => SPTF = space-time fractional
%                               ADE = Advection Diffusion Equations
%                               cost = mu costante
% function per il calcolo della soluzione del seguente problema
% differenziale
%-----
```

```

% u,alpha + u,beta = mu u,gamma      1 < gamma <= 2 && 0 <
alpha,beta <= 1
% u(x,0) = x^delta
%-----

u_SPTFADE_cost = zeros(length(t1),length(x1));
SUM = 0;
for n = 0 : Nmax
    for j = 0 : n
        M_1 = floor((n-j)*Gamma+j*beta);
        if M_1 >= delta && M_1 ~= (n-j)*Gamma+j*beta
            SUM = SUM;
        elseif M_1 > delta
            SUM = SUM;
        else
            SUM = SUM + (-1)^j*nchoosek(n,j)*gamma(delta+1)/
                /gamma(delta+1-((n-j)*Gamma+j*beta))*x1.^(delta-
                ((n-j)*Gamma+j*beta));
        end
    end
    u_SPTFADE_cost = u_SPTFADE_cost + t1.^(n*alpha)/gamma(n*alpha
        +1)*SUM;
    SUM = 0;
end
end

```

10.2.2.2 T-FRADE con condizioni iniziali $u(x, 0) = \sin(x)$

Seguendo lo schema ricorsivo ottenuto al paragrafo precedente e considerando il seguente problema differenziale S-FRADE, con $\mu = 1$ e con terminale $a = -\infty$.

$$\begin{cases} \frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha} + \frac{\partial u}{\partial x} = \mu \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(x, 0) = \sin(x) \end{cases} \quad (10.14)$$

si ottengono le seguenti componenti ADM

n	u_n
0	$u_0(x, t) = u(x, 0) = \sin(x)$
1	$u_1(x, t) = \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} \cdot [D_x^2 - D_x](\sin(x)) = \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} \cdot (-\sin(x) - \cos(x))$
2	$u_2(x, t) = \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha + 1)} \cdot [D_x^4 - 2D_x^3 + D_x^2](\sin(x))$ $= \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha + 1)} \cdot (\sin(x) + 2\cos(x) - \sin(x))$
3	$u_3(x, t) = \frac{t^{3\alpha}}{\Gamma(3\alpha + 1)} \cdot [D_x^6 - 3D_x^5 + 3D_x^4 - D_x^3](\sin(x))$ $= \frac{t^{3\alpha}}{\Gamma(3\alpha + 1)} \cdot (-\sin(x) - 3\cos(x) + 3\sin(x) + \cos(x))$
4	$u_4(x, t) = \frac{t^{4\alpha}}{\Gamma(4\alpha + 1)} \cdot [D_x^8 - 4D_x^7 + 6D_x^6 - 4D_x^5 + D_x^4](\sin(x))$ $= \frac{t^{4\alpha}}{\Gamma(4\alpha + 1)} \cdot (\sin(x) + 4\cos(x) - 6\sin(x) - 4\cos(x) + \sin(x))$
\vdots	\vdots
n	$u_n(x, t) = \frac{t^{n\alpha}}{\Gamma(n\alpha + 1)} \cdot \sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{n}{j} \mu^{n-j} [D_x^{(2n-j)}] f(x)$ $= \frac{t^{n\alpha}}{\Gamma(n\alpha + 1)} \cdot \sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{n}{j} \sin\left(x + \frac{(2n-j)\pi}{2}\right)$

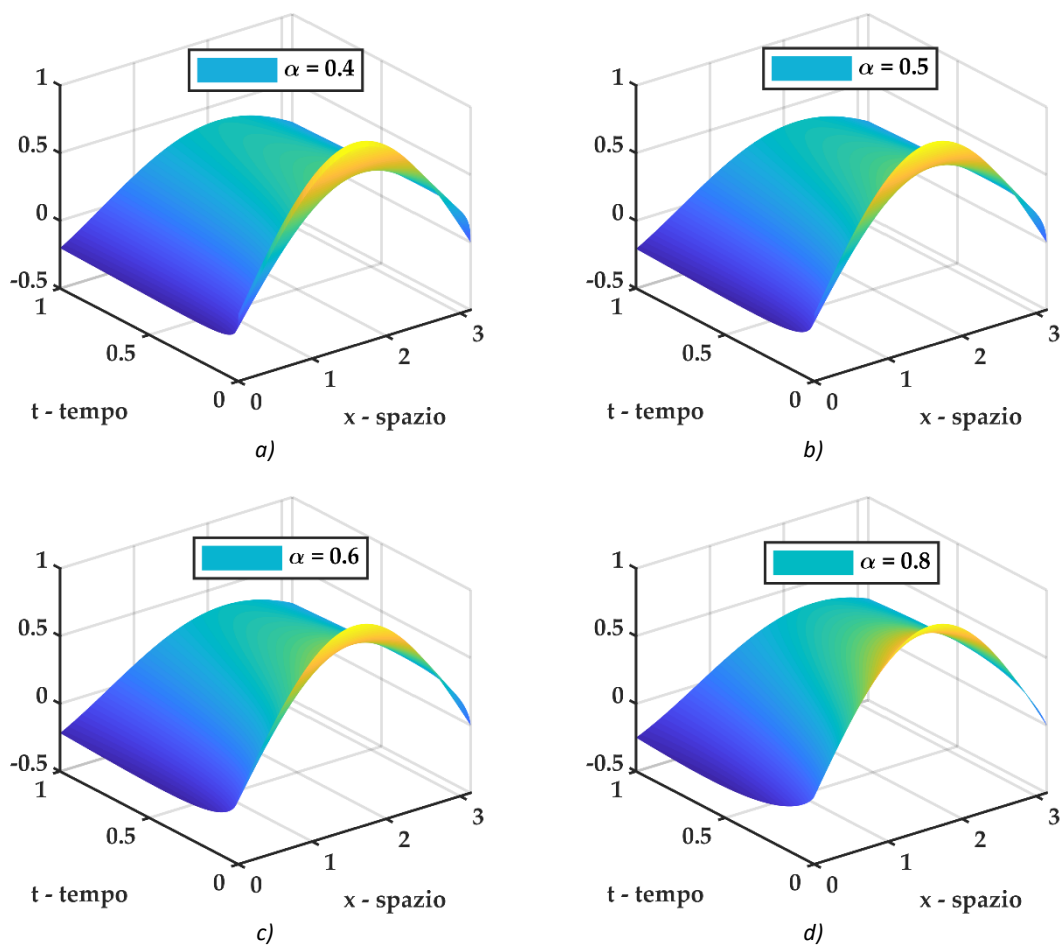


Figura 10-20 plot 3D della soluzione $u(x,t)$ del problema differenziale frazionario T-FRADE con $u(x,0) = \sin(x)$ e coefficienti di diffusione ed avvezione costanti $\rightarrow \mu = \text{cost}$. a) soluzione T-FRADE per $\alpha = 0.4$, b) soluzione T-FRADE per $\alpha = 0.5$, c) soluzione T-FRADE per $\alpha = 0.6$, d) soluzione T-FRADE per $\alpha = 0.8$

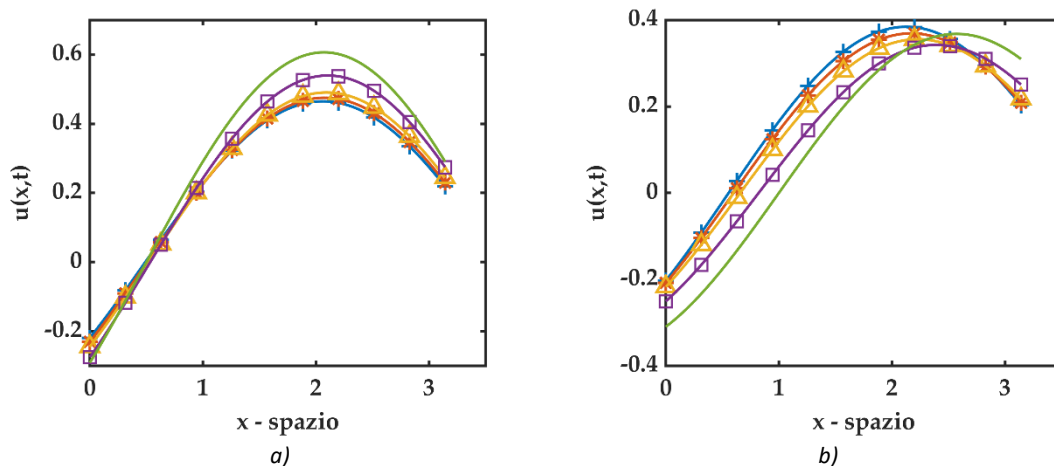


Figura 10-21 plot 2D di confronto fra soluzioni del problema differenziale frazionario T-FRDE con $u(x,0) = \sin(x)$ e coefficienti di diffusione ed avvezione costanti $\rightarrow \mu = \text{cost}$ e (+ croce - blu) rappresenta la soluzione per $\alpha = 0.4$, (* asterisco - rosso) rappresenta la soluzione per $\alpha = 0.5$, (Δ triangolo - giallo) rappresenta la soluzione per $\alpha = 0.6$, (\square quadrato - viola) rappresenta la soluzione per $\alpha = 0.8$, (- linea continua - verde) rappresenta la soluzione della standard ADE. a) plot 2D per $t = 0.5$, b) plot 2D per $t = 1.0$

10.2.2.2.1 Algoritmo Matlab

Di seguito viene riportato un estratto dello script Matlab utilizzato per i plot sopra riportati, soffermandosi sul calcolo della soluzione inerente il problema differenziale T-FRADE.

```

function [u_TFADE_cost] = uT_fraz_cost_cos(Nmax,x1,t1,alpha)
% uSP_fraz_cost => TF = time fractional
%
% ADE = Advection Diffusion Equation
%
% cost = mu costante
% function per il calcolo della soluzione del seguente problema
% differenziale
%-----
% u, alpha + u, x = mu u, xx      0 < alpha <= 1
% u(x,0) = cos(x)
%-----
u_TFADE_cost = zeros(length(t1),length(x1));
SUM = 0;
for n = 0 : Nmax
    for j = 0 : n
        SUM = SUM + (-1)^j*nchoosek(n,j)*cos(x1 + (2*n-j)*pi/2);
    end
    u_TFADE_cost = u_TFADE_cost + t1.^(n*alpha)/gamma(n*alpha
        +1)*SUM;
    SUM = 0;
end
end

```

10.2.2.3 T-FRADE con condizioni iniziali $u(x, 0) = \cos(x)$

Seguendo lo schema ricorsivo ottenuto al paragrafo precedente e considerando il seguente problema differenziale S-FRADE, con $\mu = 1$ e con terminale $a = -\infty$.

$$\begin{cases} \frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha} + \frac{\partial u}{\partial x} = \mu \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(x, 0) = \cos(x) \end{cases} \quad (10.15)$$

Si ottengono le seguenti componenti ADM

n	u_n
0	$u_0(x, t) = u(x, 0) = \cos(x)$
1	$u_1(x, t) = \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} \cdot [D_x^2 - D_x](\cos(x)) = \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} \cdot (-\cos(x) + \sin(x))$
2	$u_2(x, t) = \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha + 1)} \cdot [D_x^4 - 2D_x^3 + D_x^2](\cos(x))$ $= \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha + 1)} \cdot (\cos(x) - 2\sin(x) - \cos(x))$
3	$u_3(x, t) = \frac{t^{3\alpha}}{\Gamma(3\alpha + 1)} \cdot [D_x^6 - 3D_x^5 + 3D_x^4 - D_x^3](\cos(x))$ $= \frac{t^{3\alpha}}{\Gamma(3\alpha + 1)} \cdot (-\cos(x) + 3\sin(x) + 3\cos(x) - \sin(x))$
4	$u_4(x, t) = \frac{t^{4\alpha}}{\Gamma(4\alpha + 1)} \cdot [D_x^8 - 4D_x^7 + 6D_x^6 - 4D_x^5 + D_x^4](\cos(x))$ $= \frac{t^{4\alpha}}{\Gamma(4\alpha + 1)} \cdot (\cos(x) - 4\sin(x) - 6\cos(x) + 4\sin(x) + \cos(x))$
\vdots	\vdots
n	$u_n(x, t) = \frac{t^{n\alpha}}{\Gamma(n\alpha + 1)} \cdot \sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{n}{j} \mu^{n-j} [D_x^{(2n-j)}] f(x)$ $= \frac{t^{n\alpha}}{\Gamma(n\alpha + 1)} \cdot \sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{n}{j} \cos\left(x + \frac{(2n-j)\pi}{2}\right)$

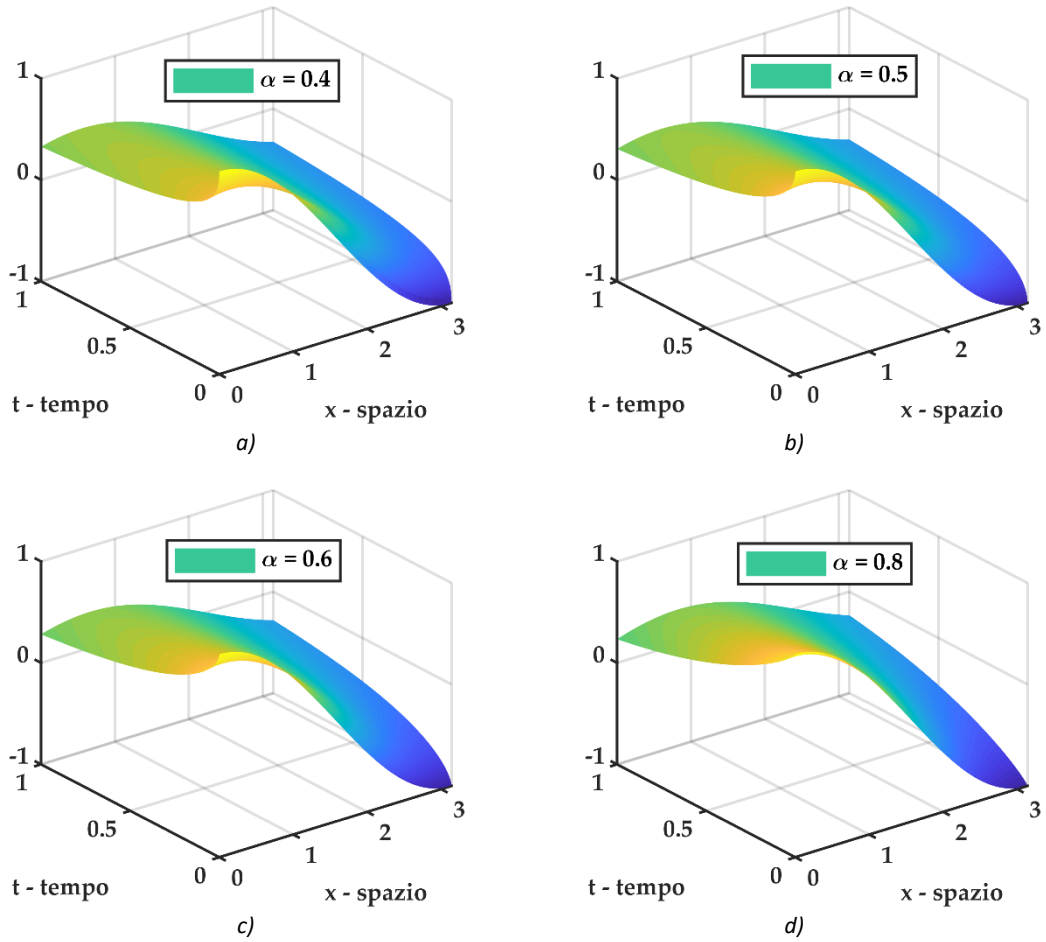


Figura 10-22 plot 3D della soluzione $u(x, t)$ del problema differenziale frazionario T-FRADE con $u(x, 0) = \cos(x)$ e coefficienti di diffusione ed avvezione costanti $\rightarrow \mu = \text{cost}$. a) soluzione T-FRADE per $\alpha = 0.4$, b) soluzione T-FRADE per $\alpha = 0.5$, c) soluzione T-FRADE per $\alpha = 0.6$, d) soluzione T-FRADE per $\alpha = 0.8$

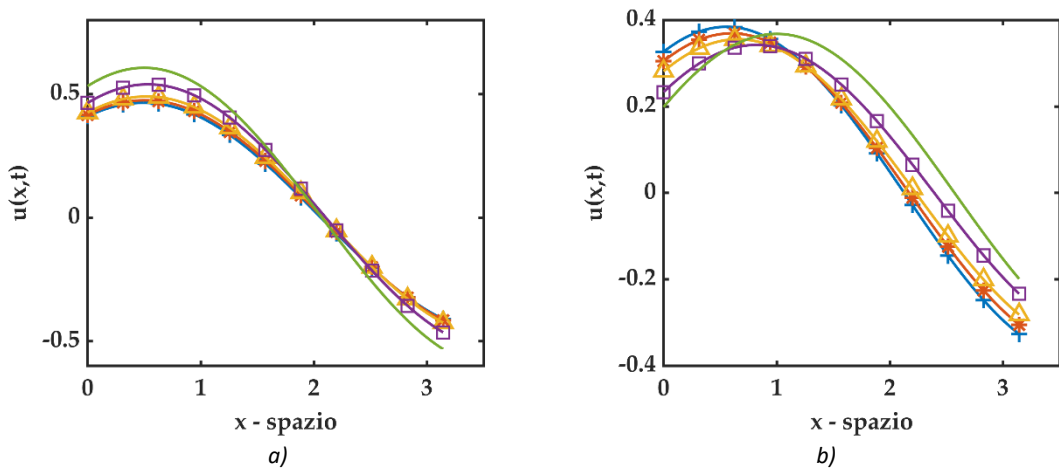


Figura 10-23 plot 2D di confronto fra soluzioni del problema differenziale frazionario T-FRADE con $u(x, 0) = \cos(x)$ e coefficienti di diffusione ed avvezione costanti $\rightarrow \mu = \text{cost}$ e (+ croce - blu) rappresenta la soluzione per $\alpha = 0.4$, (* asterisco - rosso) rappresenta la soluzione per $\alpha = 0.5$, (Δ triangolo - giallo) rappresenta la soluzione per $\alpha = 0.6$, (\square quadrato - viola) rappresenta la soluzione per $\alpha = 0.8$, (- linea continua - verde) rappresenta la soluzione della standard ADE. a) plot 2D per $t = 0.5$, b) plot 2D per $t = 1.0$

10.2.2.3.1 Algoritmo Matlab

Di seguito viene riportato un estratto dello script Matlab utilizzato per i plot sopra riportati, soffermandosi sul calcolo della soluzione inerente il problema differenziale T-FRADE.

```

function [u_TFADE_cost] = uT_fraz_cost_sin(Nmax,x1,t1,alpha)
% uSP_fraz_cost => TF    = time fractional
%                               ADE  = Advection Diffusion Equation
%                               cost = mu costante
% function per il calcolo della soluzione del seguente problema
% differenziale
%-----
% u,alpha + u,x = mu u,xx      0 < alpha <= 1
% u(x,0) = sin(x)
%-----
u_TFADE_cost = zeros(length(t1),length(x1));
SUM = 0;
for n = 0 : Nmax
    for j = 0 : n
        SUM = SUM + (-1)^j*nchoosek(n,j)*sin(x1 + (2*n-j)*pi/2);
    end
    u_TFADE_cost = u_TFADE_cost + t1.^(n*alpha)/gamma(n*alpha
+1)*SUM;
    SUM = 0;
end
end

```

10.2.2.4 T-FRADE con condizioni iniziali $u(x, 0) = e^{ax}$

Seguendo lo schema ricorsivo ottenuto al paragrafo precedente e considerando il seguente problema differenziale S-FRADE, con $\mu = 1$ e con terminale $a = -\infty$.

$$\begin{cases} \frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha} + \frac{\partial u}{\partial x} = \mu \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(x, 0) = e^{ax} \end{cases} \quad (10.16)$$

si ottengono le seguenti componenti ADM

n	u_n
0	$u_0(x, t) = u(x, 0) = e^{ax}$
1	$\begin{aligned} u_1(x, t) &= \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} \cdot [D_x^2 - D_x](e^{ax}) = \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} \cdot (a^2 e^{ax} - a e^{ax}) \\ &= \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} \cdot (a^2 - a) \cdot e^{ax} \end{aligned}$
2	$\begin{aligned} u_2(x, t) &= \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha + 1)} \cdot [D_x^4 - 2D_x^3 + D_x^2](e^{ax}) \\ &= \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha + 1)} \cdot (a^4 e^{ax} - 2a^3 e^{ax} + a^2 e^{ax}) \\ &= \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha + 1)} \cdot (a^4 - 2a^3 + a^2) \cdot e^{ax} \end{aligned}$
3	$\begin{aligned} u_3(x, t) &= \frac{t^{3\alpha}}{\Gamma(3\alpha + 1)} \cdot [D_x^6 - 3D_x^5 + 3D_x^4 - D_x^3](e^{ax}) \\ &= \frac{t^{3\alpha}}{\Gamma(3\alpha + 1)} \cdot (a^6 e^{ax} - 3a^5 e^{ax} + 3a^4 e^{ax} - a^3 e^{ax}) \\ &= \frac{t^{3\alpha}}{\Gamma(3\alpha + 1)} \cdot (a^6 - 3a^5 + 3a^4 - a^3) \cdot e^{ax} \end{aligned}$
4	$\begin{aligned} u_4(x, t) &= \frac{t^{4\alpha}}{\Gamma(4\alpha + 1)} \cdot [D_x^8 - 4D_x^7 + 6D_x^6 - 4D_x^5 + D_x^4](e^{ax}) \\ &= \frac{t^{4\alpha}}{\Gamma(4\alpha + 1)} \cdot (a^8 e^{ax} - 4a^7 e^{ax} + 6a^6 e^{ax} - 4a^5 e^{ax} + a^4 e^{ax}) \\ &= \frac{t^{4\alpha}}{\Gamma(4\alpha + 1)} \cdot (a^8 - 4a^7 + 6a^6 - 4a^5 + a^4) \cdot e^{ax} \end{aligned}$
\vdots	\vdots
n	$\begin{aligned} u_n(x, t) &= \frac{t^{n\alpha}}{\Gamma(n\alpha + 1)} \cdot \sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{n}{j} \mu^{n-j} [D_x^{(2n-j)}] f(x) \\ &= \frac{t^{n\alpha}}{\Gamma(n\alpha + 1)} \cdot \sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{n}{j} a^{(2n-j)} \cdot e^{ax} \end{aligned}$

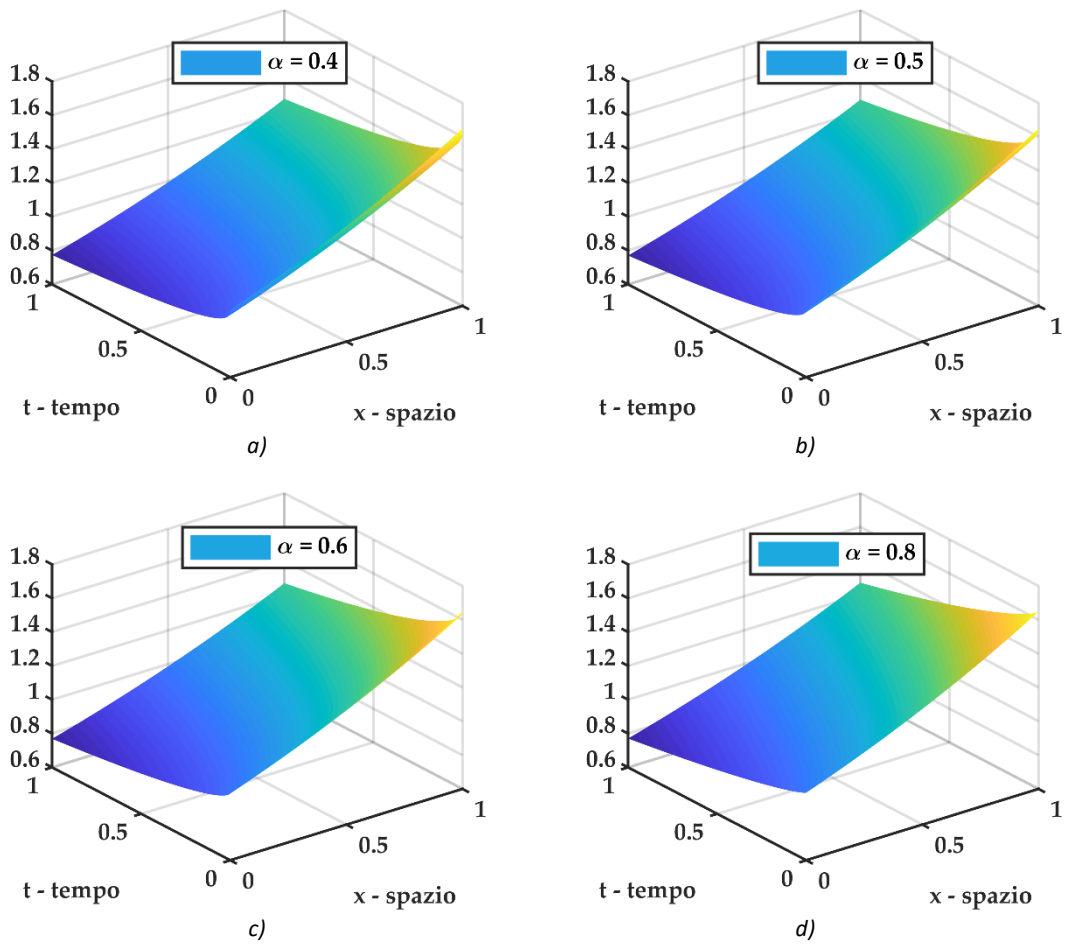


Figura 10-24 plot 3D della soluzione $u(x, t)$ del problema differenziale frazionario T-FRADE con $u(x, 0) = e^{ax}$ con $a = 0.50$ e coefficienti di diffusione ed avvezione costanti $\rightarrow \mu = cost.$ a) soluzione T-FRADE per $\alpha = 0.4$, b) soluzione T-FRADE per $\alpha = 0.5$, c) soluzione T-FRADE per $\alpha = 0.6$, d) soluzione T-FRADE per $\alpha = 0.8$

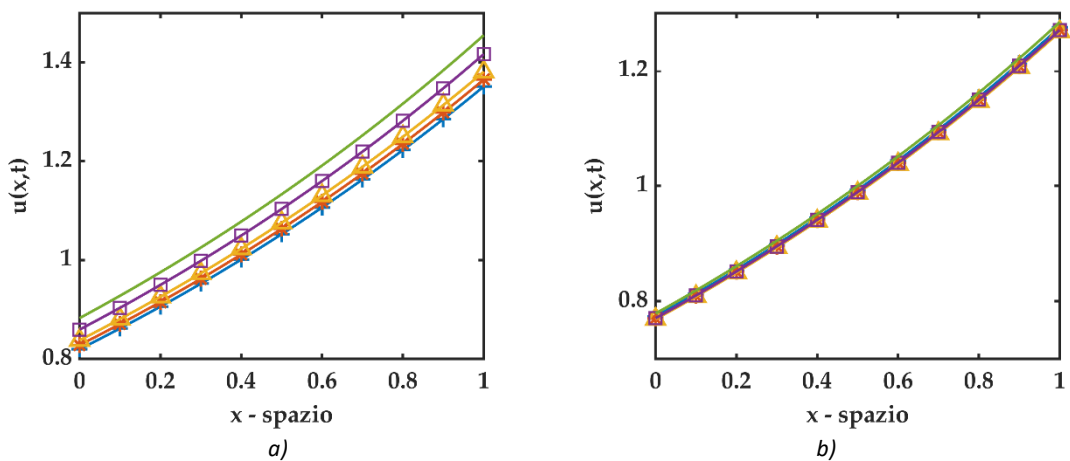


Figura 10-25 plot 2D di confronto fra soluzioni del problema differenziale frazionario T-FRADE con $u(x, 0) = e^{ax}$ con $a = 0.50$ e coefficienti di diffusione ed avvezione costanti $\rightarrow \mu = cost$ e (+ croce - blu) rappresenta la soluzione per $\alpha = 0.4$, (* asterisco - rosso) rappresenta la soluzione per $\alpha = 0.5$, (Δ triangolo - giallo) rappresenta la soluzione per $\alpha = 0.6$, (\square quadrato - viola) rappresenta la soluzione per $\alpha = 0.8$, (— linea continua - verde) rappresenta la soluzione della standard ADE. a) plot 2D per $t = 0.5$, b) plot 2D per $t = 1.0$

10.2.2.4.1 Algoritmo Matlab

Di seguito viene riportato un estratto dello script Matlab utilizzato per i plot sopra riportati, soffermandosi sul calcolo della soluzione inerente il problema differenziale T-FRADE.

```

function [u_TFADE_cost] = uT_fraz_cost_eax(Nmax,x1,t1,alpha,a)
% uSP_fraz_cost => TF = time fractional
%
% ADE = Advection Diffusion Equation
%
% cost = mu costante
% function per il calcolo della soluzione del seguente problema
% differenziale
%-----
% u, alpha + u, x = mu u, xx      0 < alpha <= 1
% u(x,0) = e^(ax)
%-----
u_TFADE_cost = zeros(length(t1),length(x1));
SUM = 0;
for n = 0 : Nmax
    for j = 0 : n
        SUM = SUM + (-1)^j*nchoosek(n,j)*a^(2*n-j)*exp(a*x1);
    end
    u_TFADE_cost = u_TFADE_cost + t1.^(n*alpha)/gamma(n*alpha
+1)*SUM;
    SUM = 0;
end
end

```

10.3 ST – FRADE, $V = V(t) = g(t), D = D(t) = g(t)$

Si considera l'equazione di diffusione-avvezione frazionaria in spazio-tempo (ST-FRADE), considerando $V = V(t) = g(t), D = D(t) = g(t)$, ovvero la stessa dipendenza temporale $g(t)$ sia per il coefficiente di avvezione che per quello di diffusione. In tale contesto è possibile identificare una formulazione generale ADM considerando il problema differenziale seguente

$$\begin{cases} \frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha} + g(t) \cdot \frac{\partial^\beta u}{\partial x^\beta} = g(t) \cdot \frac{\partial^\gamma u}{\partial x^\gamma} \\ u(x, 0) = f(x) \end{cases} \quad (10.17)$$

che può essere scritta anche nel seguente modo

$$D_t^\alpha u(x, t) + g(t) D_x^\beta u(x, t) = g(t) D_x^\gamma u(x, t) \quad (10.18)$$

con gli operatori differenziali definiti come

$$D_t^\alpha = \frac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha} \quad D_x^\beta = \frac{\partial^\beta}{\partial x^\beta} \quad D_x^\gamma = \frac{\partial^\gamma}{\partial x^\gamma}$$

e l'operatore integrale

$$D_t^{-\alpha}(\cdot) = J_t^\alpha(\cdot)$$

integrale di Riemann-Liouville.

Applicando ad ambo i membri $D_t^{-\alpha}$ si ottiene

$$D_t^{-\alpha} D_t^\alpha u(x, t) = D_t^{-\alpha} \{g(t) D_x^\gamma u(x, t)\} - D_t^{-\alpha} \{g(t) D_x^\beta u(x, t)\} \quad (10.19)$$

$$u(x, t) = u(x, 0) + J_t^\alpha \{g(t) D_x^\gamma u(x, t)\} - J_t^\alpha \{g(t) D_x^\beta u(x, t)\} \quad (10.20)$$

Ricordando l'ipotesi base del Metodo di Decomposizione Adomia

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x, t)$$

si ottiene

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x, t) &= u(x, 0) + J_t^\alpha \left\{ g(t) D_x^\gamma \left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x, t) \right) \right\} \\ &\quad - J_t^\alpha \left\{ g(t) D_x^\beta \left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x, t) \right) \right\} \end{aligned} \quad (10.21)$$

da cui si deduce l'algoritmo ricorsivo

$$\begin{cases} u_0(x, t) = u(x, 0) = f(x) \\ u_{n+1}(x, t) = J_t^\alpha \{g(t) D_x^\gamma u_n(x, t)\} - J_t^\alpha \{g(t) D_x^\beta u_n(x, t)\} \end{cases} \quad n = 0, 1, 2, \dots + \infty \quad (10.22)$$

Calcolando alcune componenti esplicitamente si ottiene

n	u_n
0	$u_0(x, t) = u(x, 0) = f(x)$
1	$ \begin{aligned} u_1(x, t) &= J_t^\alpha \{g(t) D_x^\gamma u_0(x, t)\} - J_t^\alpha \{g(t) D_x^\beta u_0(x, t)\} \\ &= J_t^\alpha \{g(t) D_x^\gamma f(x)\} - J_t^\alpha \{g(t) D_x^\beta f(x)\} \\ &= J_t^\alpha \{g(t)\} \cdot [D_x^\gamma - D_x^\beta] f(x) = {}^{RL} \mathbb{J}_t^\alpha [g](t) \cdot [D_x^\gamma - D_x^\beta] f(x) \end{aligned} $
2	$ \begin{aligned} u_2(x, t) &= J_t^\alpha \{g(t) D_x^\gamma u_1(x, t)\} - J_t^\alpha \{g(t) D_x^\beta u_1(x, t)\} \\ &= J_t^\alpha \left\{ g(t) D_x^\gamma \left\{ {}^{RL} \mathbb{J}_t^\alpha [g](t) \cdot [D_x^\gamma - D_x^\beta] f(x) \right\} \right\} \\ &\quad - J_t^\alpha \left\{ g(t) D_x^\beta \left\{ {}^{RL} \mathbb{J}_t^\alpha [g](t) \cdot [D_x^\gamma - D_x^\beta] f(x) \right\} \right\} \\ &= J_t^\alpha \left[g(t) \cdot {}^{RL} \mathbb{J}_t^\alpha [g](t) \right] \cdot [D_x^{2\gamma} - 2D_x^{\gamma+\beta} + D_x^{2\beta}] f(x) \\ &= {}^{RL} \mathbb{J}_t^{2\alpha} [g](t) \cdot [D_x^\gamma - D_x^\beta]^2 f(x) \end{aligned} $
3	$ \begin{aligned} u_3(x, t) &= J_t^\alpha \{g(t) D_x^\gamma u_2(x, t)\} - J_t^\alpha \{g(t) D_x^\beta u_2(x, t)\} \\ &= J_t^\alpha \left\{ g(t) D_x^\gamma \left\{ \left({}^{RL} \mathbb{J}_t^{2\alpha} [g](t) \right) \cdot [D_x^{2\gamma} - 2D_x^{\gamma+\beta} + D_x^{2\beta}] f(x) \right\} \right\} \\ &\quad - J_t^\alpha \left\{ g(t) D_x^\beta \left\{ \left({}^{RL} \mathbb{J}_t^{2\alpha} [g](t) \right) \cdot [D_x^{2\gamma} - 2D_x^{\gamma+\beta} + D_x^{2\beta}] f(x) \right\} \right\} \\ &= J_t^\alpha \left[g(t) \cdot {}^{RL} \mathbb{J}_t^{2\alpha} [g](t) \right] \cdot [D_x^{3\gamma} - 3D_x^{2\gamma+\beta} + 3D_x^{\gamma+2\beta} - D_x^{3\beta}] f(x) \\ &= {}^{RL} \mathbb{J}_t^{3\alpha} [g](t) \cdot [D_x^\gamma - D_x^\beta]^3 f(x) \end{aligned} $
4	$ \begin{aligned} u_4(x, t) &= J_t^\alpha \{g(t) D_x^\gamma u_3(x, t)\} - J_t^\alpha \{g(t) D_x^\beta u_3(x, t)\} \\ &= J_t^\alpha \left\{ g(t) D_x^\gamma \left\{ \left({}^{RL} \mathbb{J}_t^{3\alpha} [g](t) \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \cdot [D_x^{3\gamma} - 3D_x^{2\gamma+\beta} + 3D_x^{\gamma+2\beta} - D_x^{3\beta}] f(x) \right\} \right\} \\ &\quad - J_t^\alpha \left\{ g(t) D_x^\beta \left\{ \left({}^{RL} \mathbb{J}_t^{3\alpha} [g](t) \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \cdot [D_x^{3\gamma} - 3D_x^{2\gamma+\beta} + 3D_x^{\gamma+2\beta} - D_x^{3\beta}] f(x) \right\} \right\} \\ &= J_t^\alpha \left[g(t) \cdot {}^{RL} \mathbb{J}_t^{3\alpha} [g](t) \right] \\ &\quad \cdot [D_x^{4\gamma} - 4D_x^{3\gamma+\beta} + 6D_x^{2\gamma+2\beta} - 4D_x^{\gamma+3\beta} + D_x^{4\beta}] f(x) \\ &= {}^{RL} \mathbb{J}_t^{4\alpha} [g](t) \cdot [D_x^\gamma - D_x^\beta]^4 f(x) \end{aligned} $
\vdots	\vdots
n	$ u_n(x, t) = \left({}^{RL} \mathbb{J}_t^{n\alpha} [g](t) \right) \cdot \sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{n}{j} [D_x^{(n-j)\gamma+j\beta}] f(x) $ <p style="text-align: center;">Con</p> $ {}^{RL} \mathbb{J}_t^{n\alpha} [g](t) = J_t^\alpha \left(g(t) \cdot {}^{RL} \mathbb{J}_t^{(n-1)\alpha} [g](t) \right) = J_t^\alpha [g(t) J_t^\alpha [g(t) J_t^\alpha [g(t)]] \dots $

Se $\alpha = 1$ l'integrale frazionario di Riemann-Liouville diviene il classico integrale di Riemann per ordini interi.

$$\begin{aligned} {}^{RL} [ng]_0^t \mathbb{J}_t^{n\alpha}(t) &= [ng]_0^t \mathbb{I}_t^n(t) = \int_0^t (g(t) \cdot [{}^{(n-1)}g]_0^t (t)) dt \\ &= \int_0^t g(t) \int_0^t g(t) \int_0^t g(t) \dots dt dt dt \end{aligned}$$

Da cui si deduce

$$\begin{aligned} U_M(x, t) &= \sum_{n=0}^M u_n(x, t) = \\ &= \sum_{n=0}^M \left\{ ({}^{RL} [ng]_0^t \mathbb{J}_t^{n\alpha}(t)) \cdot \sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{n}{j} [D_x^{(n-j)\gamma+j\beta}] f(x) \right\} \end{aligned} \quad (10.23)$$

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \lim_{M \rightarrow \infty} U_M(x, t) = \lim_{M \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^M u_n(x, t) = \\ &= \lim_{M \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^M \left\{ ({}^{RL} [ng]_0^t \mathbb{J}_t^{n\alpha}(t)) \cdot \sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{n}{j} [D_x^{(n-j)\gamma+j\beta}] f(x) \right\} \end{aligned} \quad (10.24)$$

Quest'ultima risulta, quindi, una formulazione generale per ogni ST-FRADE con condizioni iniziali del tipo considerato. Allo stesso modo di DE, la funzione $f(x)$ deve essere sufficientemente derivabile nel suo dominio in senso frazionario e la funzione $g(t)$ deve essere integrabile nel dominio $[a, b]$. Si considereranno le usuali condizioni iniziali già più volte definite, ovvero $u(x, 0) = x^3, \sin(x), \cos(x), e^{ax}$. Inoltre, tali condizioni iniziali risultano funzioni $C^\infty[a, b]$, cioè infinitamente derivabili in tutto $[a, b]$, nonché in tutto l'asse reale \mathbb{R} , di cui si conosce esplicitamente l'espressione del differintegrale per specifici valori del terminale e per qualsiasi ordine di derivazione frazionario. Per quanto riguarda l'integrazione iterata temporale verranno, a tal scopo, considerate diverse funzioni temporali Riemann-integrabili: $K(t) = t^\beta, e^t, \sin(t), \cos(t), \sinh(t), \cosh(t)$.

10.3.1 $V = D = g(t) = t^\omega$

 10.3.1.1 S-FRADE con condizioni iniziali $u(x, 0) = x^\delta$

Si considera ora il seguente problema differenziale

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + t^\omega \cdot \frac{\partial^\beta u}{\partial x^\beta} = t^\omega \cdot \frac{\partial^\gamma u}{\partial x^\gamma} \\ u(x, 0) = x^\delta \end{cases} \quad (10.25)$$

Dove la derivata frazionaria è di Caputo con terminale $a = 0$.

In tal contesto, essendo l'equazione differenziale frazionaria solamente in spazio risulta ${}^{RL} [{}^{ng}] \mathbb{I}_t^{n\alpha}(t) = [{}^{ng}] \mathbb{I}_t^n(t) = \int_0^t g(t) \int_0^t g(t) \int_0^t g(t) \dots dt dt dt$

$n = 1$	\rightarrow	$[{}^g] \mathbb{I}_t^1(t) = \int_0^t g(t) dt$	$=$	$\frac{t^{\omega+1}}{\omega+1}$
$n = 2$	\rightarrow	$[{}^{2g}] \mathbb{I}_t^2(t) = \int_0^t g(t) \int_0^t g(t) dt dt$	$=$	$\frac{t^{2\omega+2}}{2(\omega+1)^2}$
$n = 3$	\rightarrow	$[{}^{3g}] \mathbb{I}_t^3(t) = \int_0^t g(t) \int_0^t g(t) \int_0^t g(t) dt dt dt$	$=$	$\frac{t^{3(\omega+1)}}{3!(\omega+1)^3}$
$n = 4$	\rightarrow	$[{}^{4g}] \mathbb{I}_t^4(t) = \int_0^t g(t) \int_0^t g(t) \int_0^t g(t) \int_0^t g(t) dt dt dt dt$	$=$	$\frac{t^{4(\omega+1)}}{4!(\omega+1)^4}$
\vdots		\vdots		\vdots
n	\rightarrow	$[{}^{ng}] \mathbb{I}_t^n(t) = \int_0^t g(t) \int_0^t g(t) \int_0^t g(t) \dots dt dt dt$	$=$	$\frac{t^{n(\omega+1)}}{n!(\omega+1)^n}$

Quindi l' n -esimo termine della decomposizione ADM assume la seguente formulazione:

$$\begin{aligned} u_n(x, t) &= \left({}^{RL} [{}^{ng}] \mathbb{I}_t^{n\alpha}(t) \right) \cdot \sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{n}{j} \left[D_x^{(n-j)\gamma+j\beta} \right] f(x) = \\ &= \frac{t^{n(\omega+1)}}{n!(\omega+1)^n} \cdot \sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{n}{j} \left\{ \frac{\Gamma(\delta+1)}{\Gamma(\delta+1 - [(n-j)\gamma+j\beta])} \right. \\ &\quad \left. \cdot x^{-[(n-j)\gamma+j\beta]} \right\} \cdot x^\delta \end{aligned} \quad (10.26)$$

Si consideri un valore di $\omega = 0.5$.

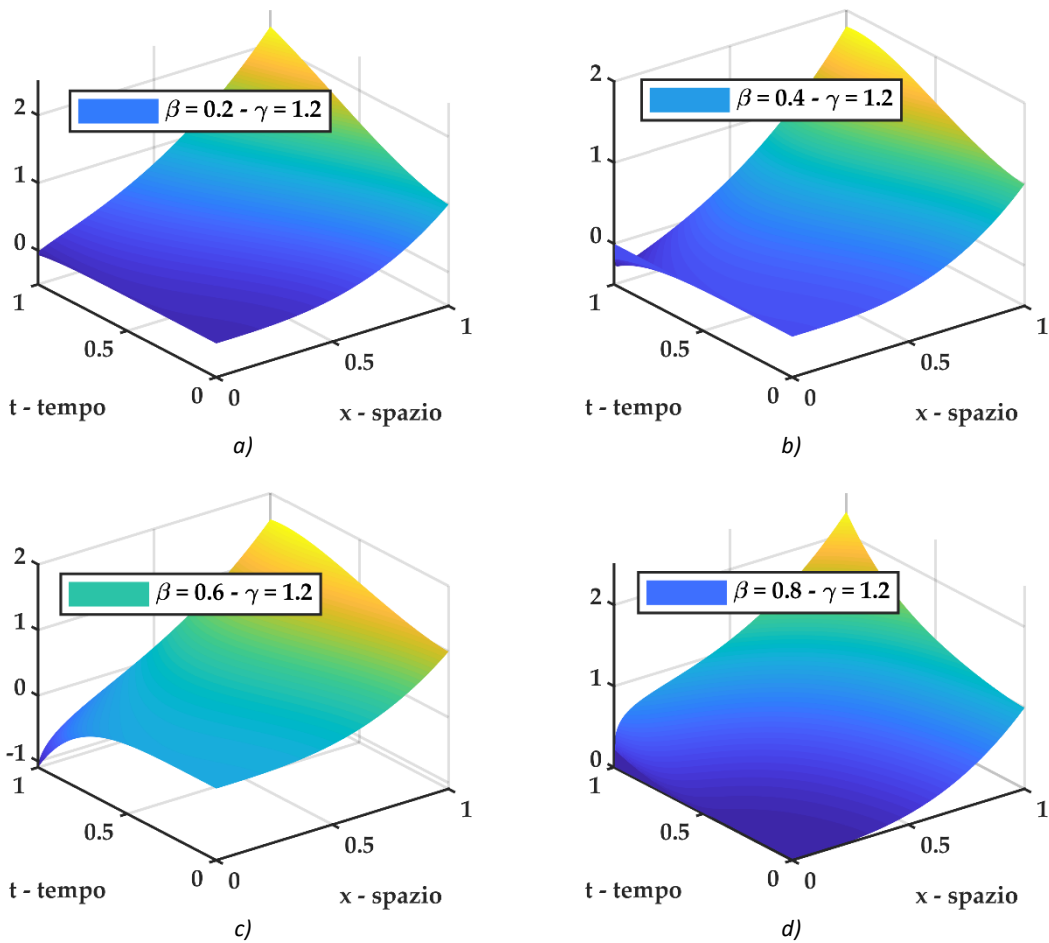


Figura 10-26 plot 3D della soluzione $u(x,t)$ del problema differenziale frazionario S-FRADE con $u(x,0) = x^\delta$ con $\delta = 3$ e coefficienti di diffusione ed avvezione funzione del tempo $V = D = t^\omega$ con $\omega = 0.50$ per diversi valori dell'ordine di derivazione frazionario fissato $\gamma = 1.2$. a) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.2$, b) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.4$, c) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.6$, d) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.8$.

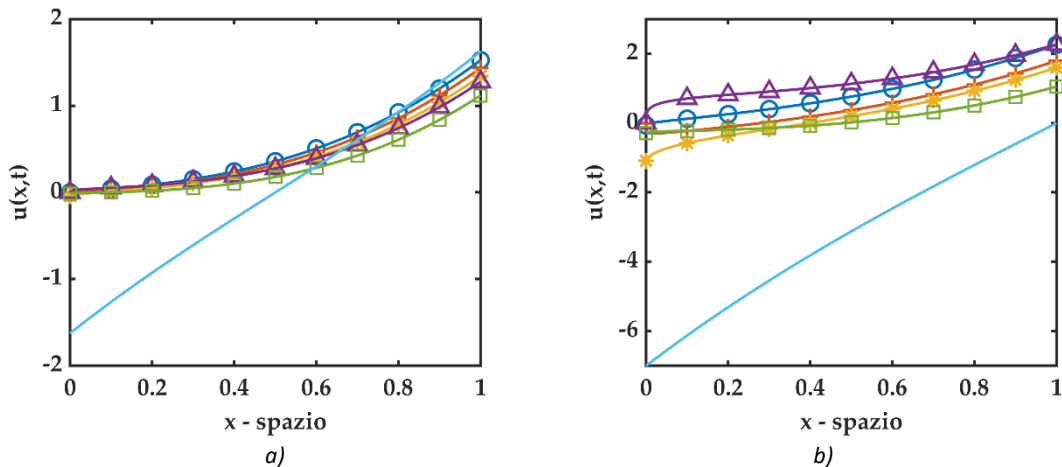


Figura 10-27 plot 2D di confronto fra soluzioni del problema differenziale frazionario S-FRADE con $u(x,0) = x^\delta$ con $\delta = 3$ e coefficienti di diffusione ed avvezione funzione del tempo $V = D = t^\omega$ con $\omega = 0.50$. Il valore di $\gamma = 1.2$ è fissato e $(\odot$ cerchio - blu) rappresenta la soluzione per $\beta = 0.2$, $(+$ croce - rosso) rappresenta la soluzione per $\beta = 0.4$, $(*$ asterisco - giallo) rappresenta la soluzione per $\beta = 0.6$, $(\triangle$ triangolo - viola) rappresenta la soluzione per $\beta = 0.6$, $(\square$ quadrato - verde) rappresenta la soluzione per $\beta = 1.0$, $(-$ linea continua - azzurro) rappresenta la soluzione della standard ADE. a) plot 2D per $t = 0.5$, b) plot 2D per $t = 1.0$

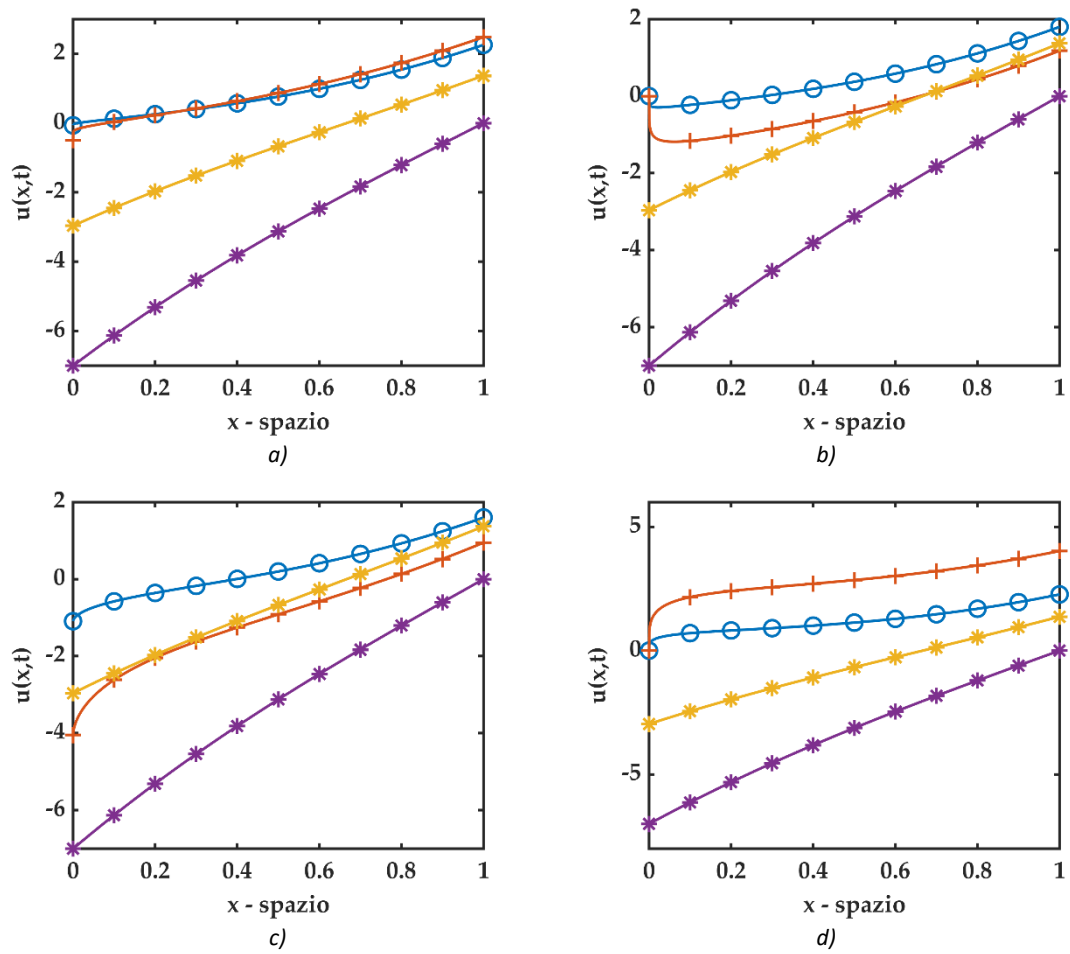


Figura 10-28 plot 2D di confronto fra soluzioni del problema differenziale frazionario S-FRADE con $u(x, 0) = x^\delta$ con $\delta = 3$ e $t = 1.0$ dove (* asterisco - viola) rappresenta la soluzione standard ADE e $D = V = \text{cost}$, (* asterisco - giallo) rappresenta la soluzione standard ADE e $D = V = t^\omega$ con $\omega = 0.50$, (+ croce - rosso) rappresenta la soluzione S-FRADE $D = V = \text{cost}$, (⊙ cerchio - blu) rappresenta la soluzione S-FRADE e $D = V = t^\omega$ con $\omega = 0.50$. Si fissa il valore di $\gamma = 1.2$. a) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.2$, b) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.4$, c) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.6$, d) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.8$.

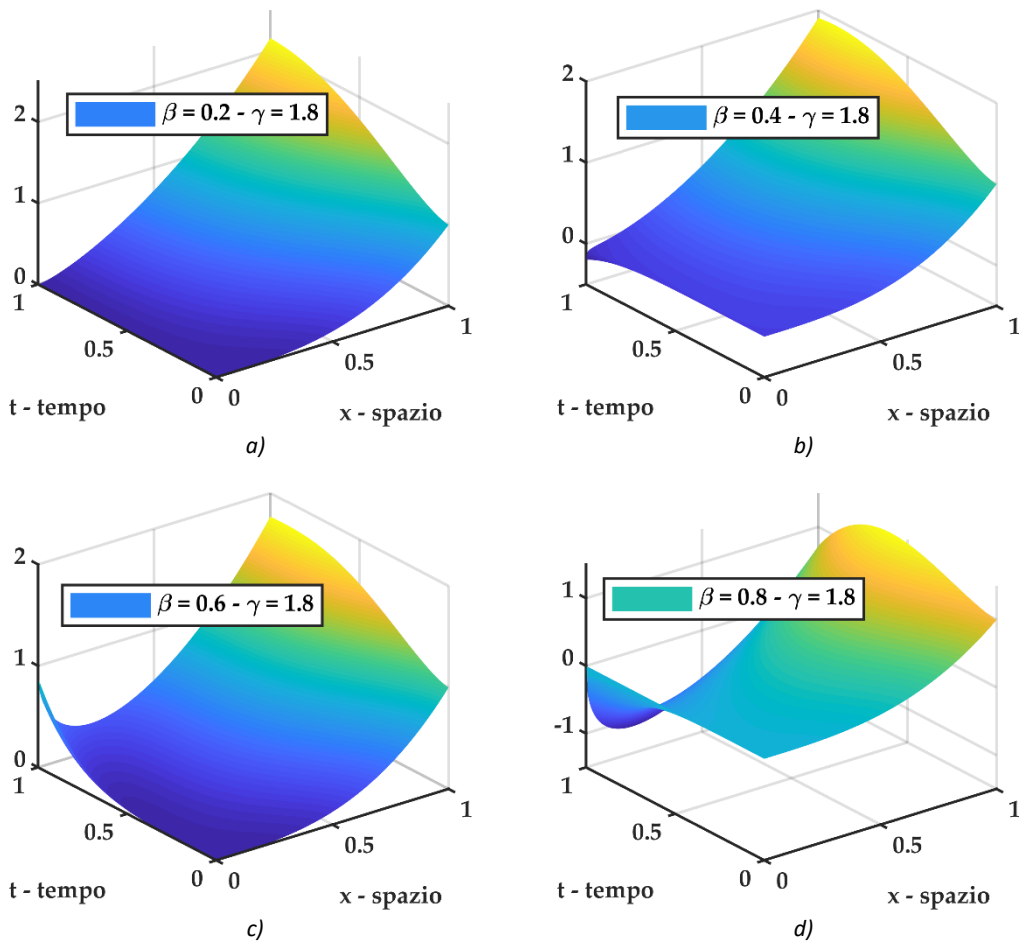


Figura 10-29 plot 3D della soluzione $u(x, t)$ del problema differenziale frazionario S-FRADE con $u(x, 0) = x^\delta$ con $\delta = 3$ e coefficiente di diffusione ed avvezione funzione del tempo $V = D = t^\omega$ con $\omega = 0.50$ per diversi valori dell'ordine di derivazione frazionario fissato $\gamma = 1.8$. a) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.2$, b) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.4$, c) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.6$, d) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.8$.

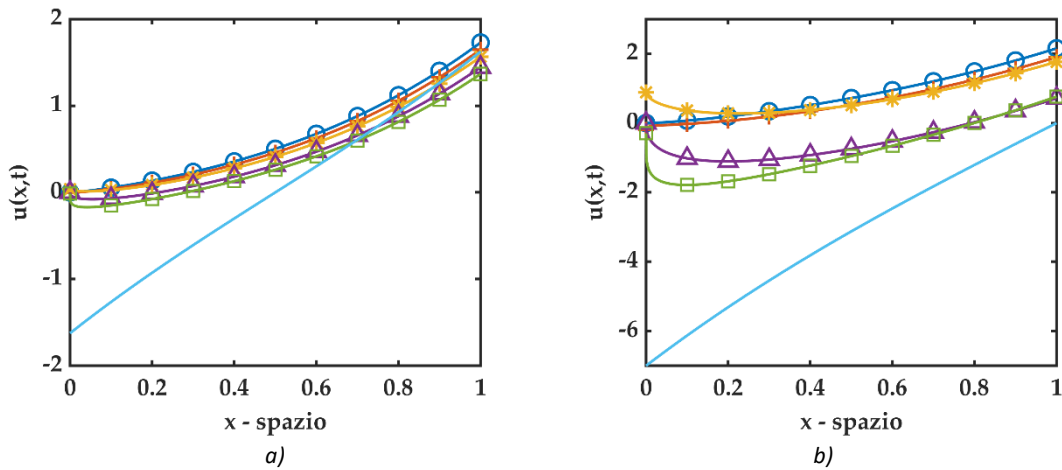


Figura 10-30 plot 2D di confronto fra soluzioni del problema differenziale frazionario S-FRADE con $u(x, 0) = x^\delta$ con $\delta = 3$ e coefficienti di diffusione ed avvezione funzione del tempo $V = D = t^\omega$ con $\omega = 0.50$. Il valore di $\gamma = 1.8$ è fissato e (● cerchio - blu) rappresenta la soluzione per $\beta = 0.2$, (+ croce - rosso) rappresenta la soluzione per $\beta = 0.4$, (* asterisco - giallo) rappresenta la soluzione per $\beta = 0.6$, (△ triangolo - viola) rappresenta la soluzione per $\beta = 0.6$, (□ quadrato - verde) rappresenta la soluzione per $\beta = 1.0$, (— linea continua - azzurro) rappresenta la soluzione della standard ADE. a) plot 2D per $t = 0.5$, b) plot 2D per $t = 1.0$

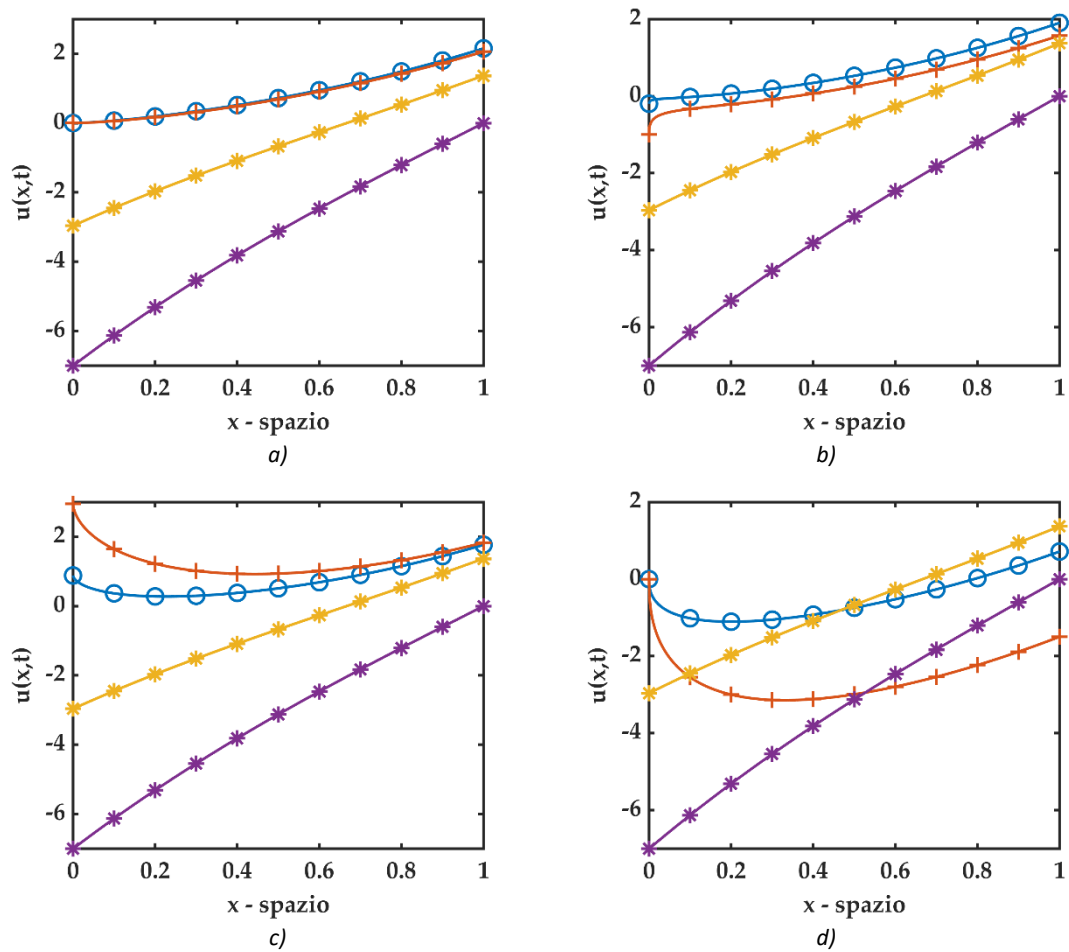


Figura 10-31 plot 2D di confronto fra soluzioni del problema differenziale frazionario S-FRADE con $u(x, 0) = x^\delta$ con $\delta = 3$ e $t = 1.0$ dove (* asterisco - viola) rappresenta la soluzione standard ADE e $D = V = \text{cost}$, (* asterisco - giallo) rappresenta la soluzione standard ADE e $D = V = t^\omega$ con $\omega = 0.50$, (+ croce - rosso) rappresenta la soluzione S-FRADE $D = V = \text{cost}$, (⊙ cerchio - blu) rappresenta la soluzione S-FRADE e $D = V = t^\omega$ con $\omega = 0.50$. Si fissa il valore di $\gamma = 1.8$. a) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.2$, b) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.4$, c) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.6$, d) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.8$.

10.3.1.1.1 Algoritmo Matlab

Di seguito viene riportato un estratto dello script Matlab utilizzato per i plot sopra riportati, soffermandosi sul calcolo della soluzione inerente il problema differenziale S-FRADE.

```
function [u_SPFADE_tomega] =
uSP_fraz_tomega_xdelta(Nmax,x1,t1,Gamma,beta,delta,omega)
% uSP_fraz_cost => SPF = space fractional
% ADE = Advection Diffusion Equations
% t^omega = D(t)=V(t)=g(t)=t^omega
% function per il calcolo della soluzione del seguente problema
% differenziale
%-----
% u,t + t^omega u,beta = t^omega u,gamma 1 < Gamma <= 2 && 0 <
beta <= 1
% u(x,0) = x^delta
%-----
```

```

u_SPFADE_tomega = zeros(length(t1),length(x1));
SUM = 0;
for n = 0 : Nmax
    for j = 0 : n
        M_1 = floor((n-j)*Gamma+j*beta);
        if M_1 >= delta && M_1 ~= (n-j)*Gamma+j*beta
            SUM = SUM;
        elseif M_1 > delta
            SUM = SUM;
        else
            SUM = SUM + (-1)^j*nchoosek(n,j)*gamma(delta+1)/
                gamma(delta+1-((n-j)*Gamma+j*beta))*x1.^(delta-
                    ((n-j)*Gamma+j*beta));
        end
    end
    u_SPFADE_tomega = u_SPFADE_tomega + t1.^(n*omega+n)/
        (factorial(n)*(omega+1)^n)*SUM;
    SUM = 0;
end
end

```

10.3.1.2 S-FRADE con condizioni iniziali $u(x, 0) = \sin(x)$

Si considera ora il seguente problema differenziale

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + t^\omega \cdot \frac{\partial^\beta u}{\partial x^\beta} = t^\omega \cdot \frac{\partial^\gamma u}{\partial x^\gamma} \\ u(x, 0) = \sin(x) \end{cases} \quad (10.27)$$

Dove la derivata frazionaria è di Caputo con terminale $a = -\infty$. Utilizzando i risultati precedenti, l' n -esimo termine della decomposizione ADM assume la seguente formulazione

$$u_n(x, t) = \frac{t^{n(\omega+1)}}{n! (\omega + 1)^n} \cdot \sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{n}{j} \sin\left(x + \frac{[(n-j)\gamma + j\beta]\pi}{2}\right) \quad (10.28)$$

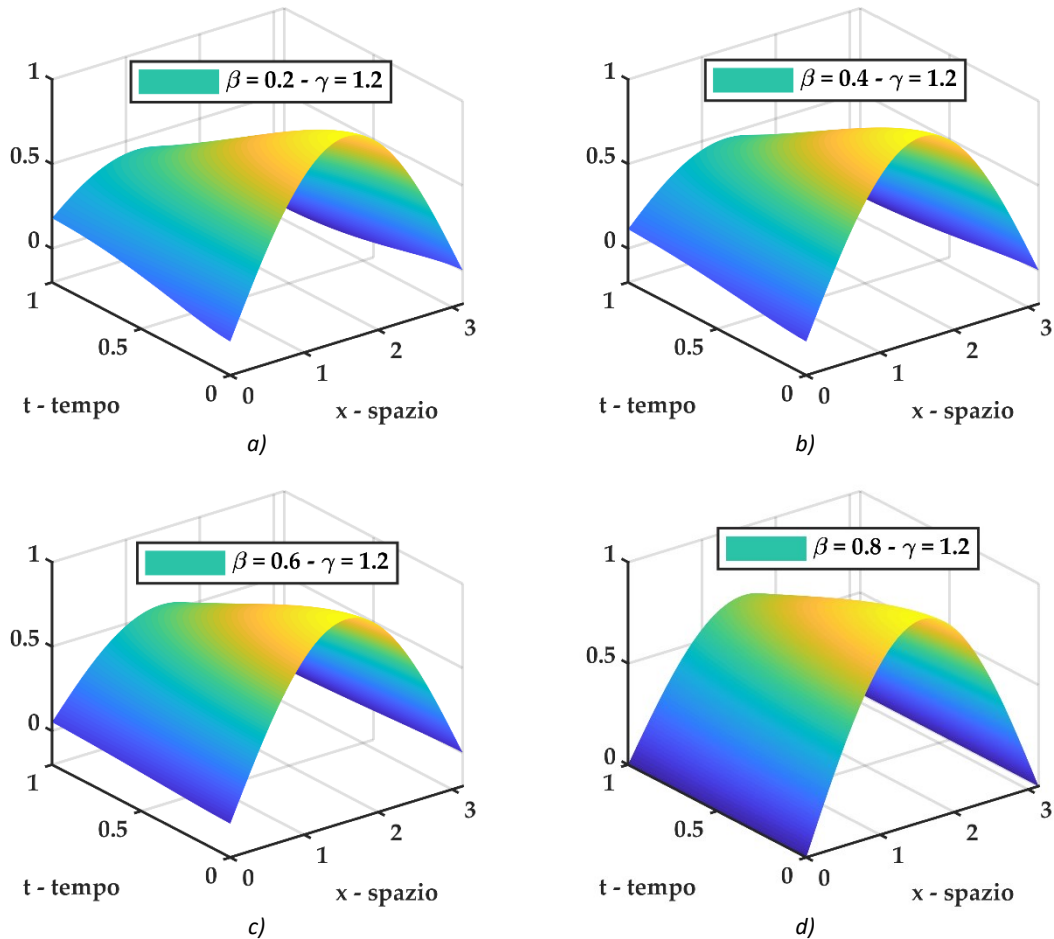


Figura 10-32 plot 3D della soluzione $u(x, t)$ del problema differenziale frazionario S-FRADE con $u(x, 0) = \sin(x)$ e coefficiente di diffusione ed avvezione funzione del tempo $V = D = t^\omega$ con $\omega = 0.50$ per diversi valori dell'ordine di derivazione frazionario fissato $\gamma = 1.2$. a) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.2$, b) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.4$, c) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.6$, d) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.8$.

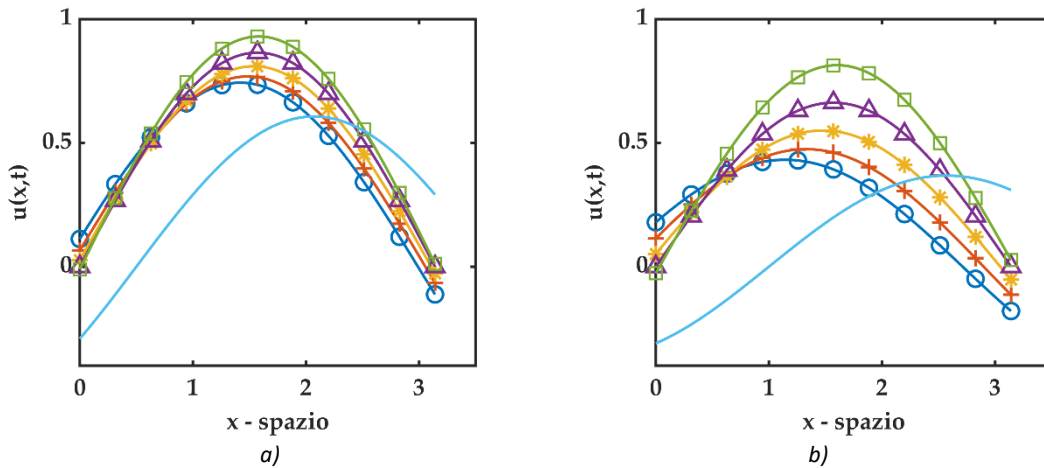


Figura 10-33 plot 2D di confronto fra soluzioni del problema differenziale frazionario S-FRADE con $u(x, 0) = \sin(x)$ e coefficienti di diffusione ed avvezione funzione del tempo $V = D = t^\omega$ con $\omega = 0.50$. Il valore di $\gamma = 1.2$ è fissato e (\odot cerchio - blu) rappresenta la soluzione per $\beta = 0.2$, ($+$ croce - rosso) rappresenta la soluzione per $\beta = 0.4$, ($*$ asterisco - giallo) rappresenta la soluzione per $\beta = 0.6$, (Δ triangolo - viola) rappresenta la soluzione per $\beta = 0.6$, (\square quadrato - verde) rappresenta la soluzione per $\beta = 1.0$, ($-$ linea continua - azzurro) rappresenta la soluzione della standard ADE. a) plot 2D per $t = 0.5$, b) plot 2D per $t = 1.0$

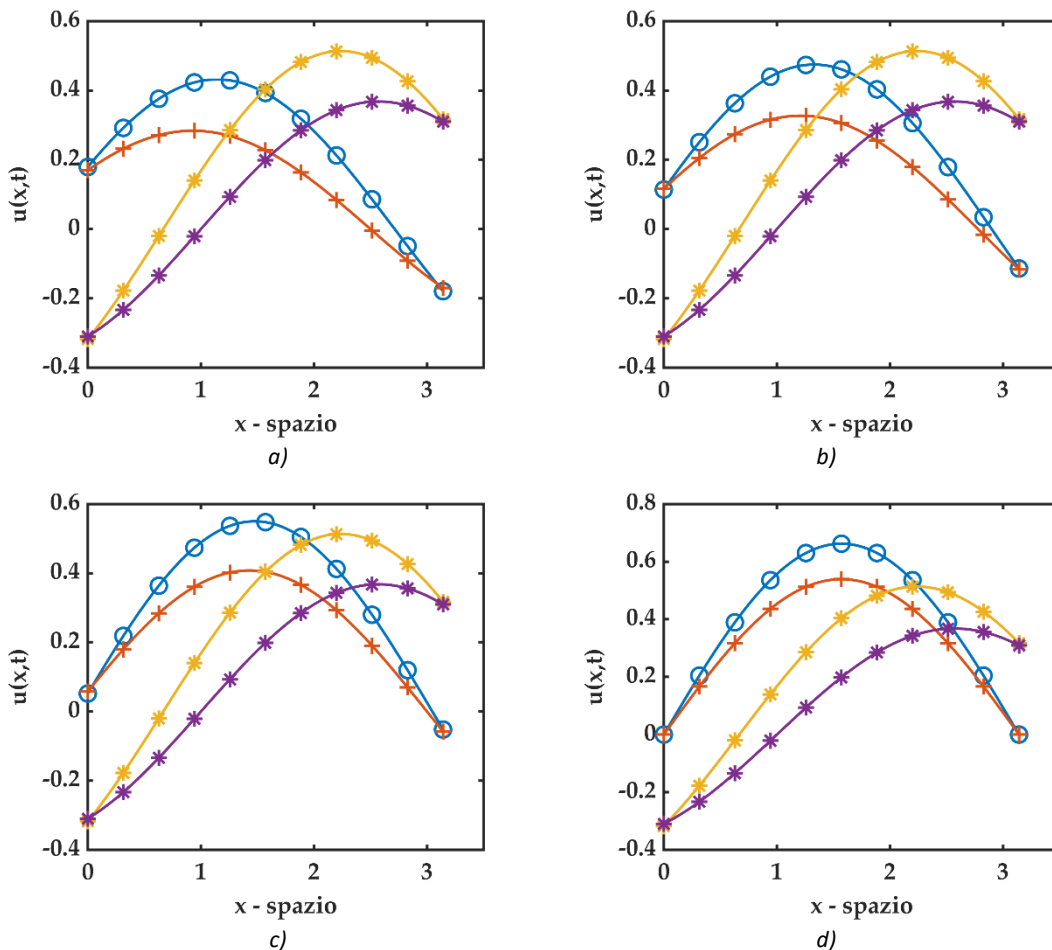


Figura 10-34 plot 2D per S-FRADE con $u(x, 0) = \sin(x)$ $t = 1.0$ dove ($*$ asterisco - viola) rappresenta la soluzione standard ADE e $D = V = \text{cost}$, ($*$ asterisco - giallo) rappresenta la soluzione standard ADE e $D = V = t^\omega$ con $\omega = 0.50$, ($+$ croce - rosso) rappresenta la soluzione S-FRADE $D = V = \text{cost}$, (\odot cerchio - blu) rappresenta la soluzione S-FRADE e $D = V = t^\omega$ con $\omega = 0.50$. Si fissa il valore di $\gamma = 1.2$. a) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.2$, b) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.4$, c) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.6$, d) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.8$.

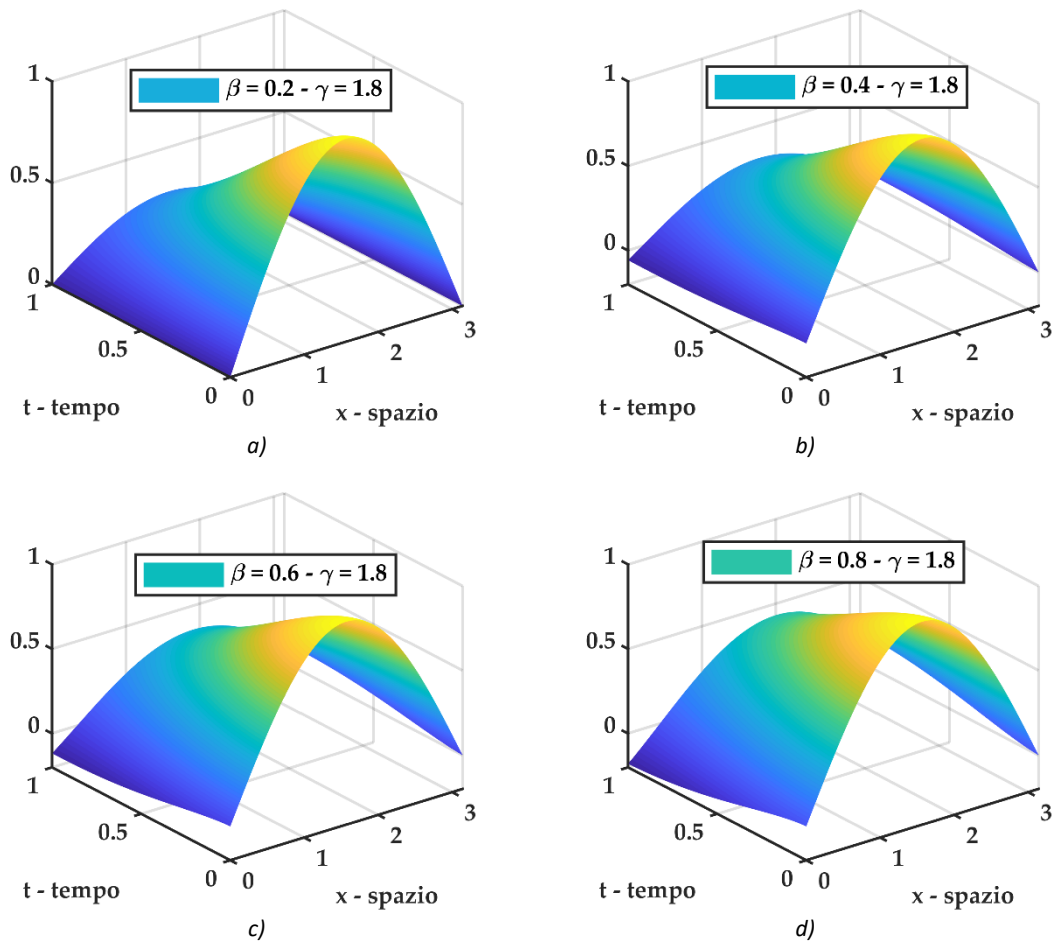


Figura 10-35 plot 3D della soluzione $u(x, t)$ del problema differenziale frazionario S-FRADE con $u(x, 0) = \sin(x)$ e coefficiente di diffusione ed avvezione funzione del tempo $V = D = t^\omega$ con $\omega = 0.50$ per diversi valori dell'ordine di derivazione frazionario fissato $\gamma = 1.8$. a) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.2$, b) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.4$, c) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.6$, d) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.8$.

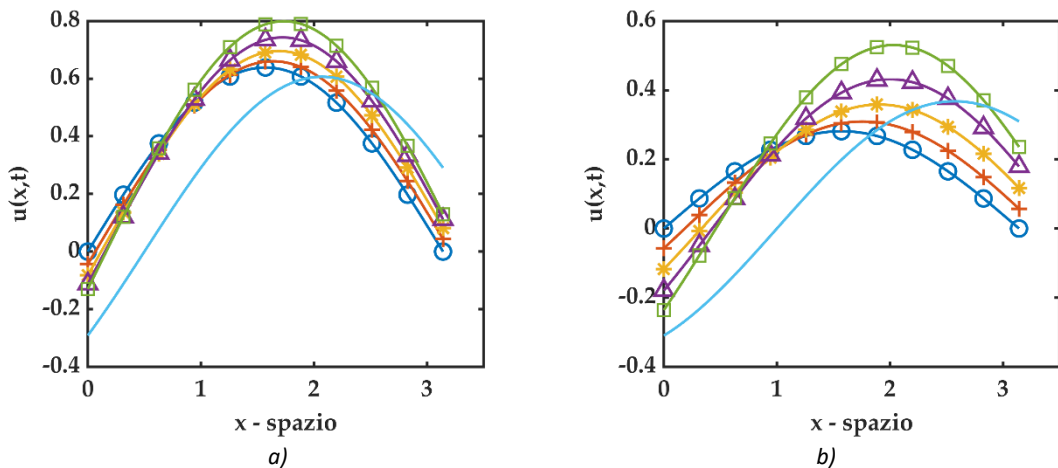


Figura 10-36 plot 2D di confronto fra soluzioni del problema differenziale frazionario S-FRADE con $u(x, 0) = \sin(x)$ e coefficienti di diffusione ed avvezione funzione del tempo $V = D = t^\omega$ con $\omega = 0.50$. Il valore di $\gamma = 1.8$ è fissato e (⊙ cerchio - blu) rappresenta la soluzione per $\beta = 0.2$, (+ croce - rosso) rappresenta la soluzione per $\beta = 0.4$, (* asterisco - giallo) rappresenta la soluzione per $\beta = 0.6$, (Δ triangolo - viola) rappresenta la soluzione per $\beta = 0.6$, (□ quadrato - verde) rappresenta la soluzione per $\beta = 1.0$, (— linea continua - azzurro) rappresenta la soluzione della standard ADE. a) plot 2D per $t = 0.5$, b) plot 2D per $t = 1.0$

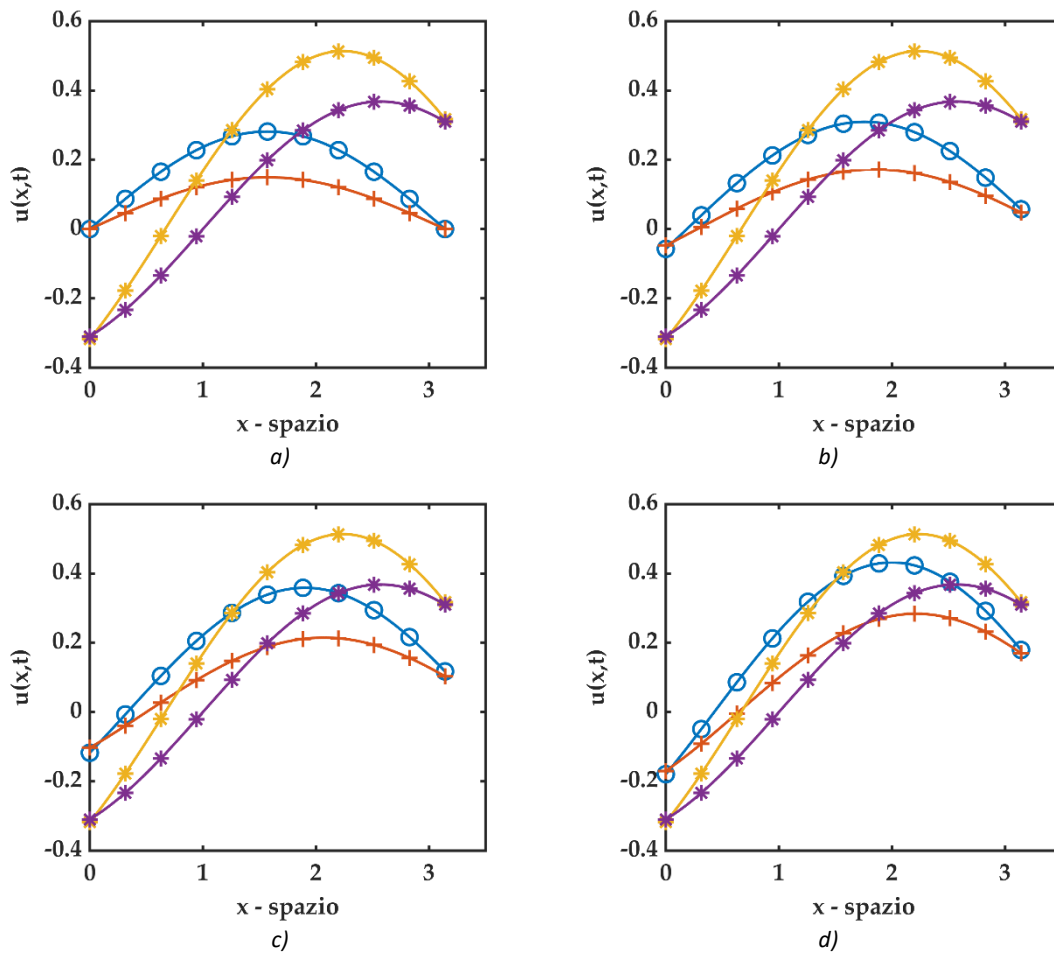


Figura 10-37 plot 2D di confronto fra soluzioni del problema differenziale frazionario S-FRADE con $u(x, 0) = \sin(x)$ $t = 1.0$ dove (* asterisco - viola) rappresenta la soluzione standard ADE e $D = V = \text{cost}$, (* asterisco - giallo) rappresenta la soluzione standard ADE e $D = V = t^\omega$ con $\omega = 0.50$, (+ croce - rosso) rappresenta la soluzione S-FRADE $D = V = \text{cost}$, (o cerchio - blu) rappresenta la soluzione S-FRADE e $D = V = t^\omega$ con $\omega = 0.50$. Si fissa il valore di $\gamma = 1.8$. a) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.2$, b) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.4$, c) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.6$, d) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.8$.

10.3.1.2.1 Algoritmo Matlab

Di seguito viene riportato un estratto dello script Matlab utilizzato per i plot sopra riportati, soffermandosi sul calcolo della soluzione inerente il problema differenziale S-FRADE.

```
function [u_SPFADE_tomega] =
uSP_fraz_tomega_sinx(Nmax,x1,t1,Gamma,beta,omega)
% uSP_fraz_cost => SPF = space fractional
% ADE = Advection Diffusion Equation
% t^omega = D(t)=V(t)=g(t)=t^omega
% function per il calcolo della soluzione del seguente problema
% differenziale
%-----
% u,t + t^omega u,beta = t^omega u,Gamma 1 < Gamma <= 2 && 0 <
beta <= 1
% u(x,0) = sin(x)
%-----
u_SPFADE_tomega = zeros(length(t1),length(x1));
```

```

SUM = 0;
for n = 0 : Nmax
    for j = 0 : n
        SUM = SUM + (-1)^j*nchoosek(n,j)*sin(x1 + ((n-
j)*Gamma+j*beta)*pi/2);
    end
    u_SPFADE_tomega = u_SPFADE_tomega +
t1.^(n*omega+n)/(factorial(n)*(omega+1)^n)*SUM;
    SUM = 0;
end
end

```

10.3.1.3 S-FRADE con condizioni iniziali $u(x, 0) = \cos(x)$

Si considera il seguente problema differenziale

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + t^\omega \cdot \frac{\partial^\beta u}{\partial x^\beta} = t^\omega \cdot \frac{\partial^\gamma u}{\partial x^\gamma} \\ u(x, 0) = \cos(x) \end{cases} \quad (10.29)$$

Dove la derivata frazionaria è di Caputo con terminale $a = -\infty$.

Utilizzando i risultati precedenti, l' n -esimo termine della decomposizione ADM assume la seguente formulazione

$$u_n(x, t) = \frac{t^{n(\omega+1)}}{n! (\omega + 1)^n} \cdot \sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{n}{j} \cos\left(x + \frac{[(n-j)\gamma + j\beta]\pi}{2}\right) \quad (10.30)$$

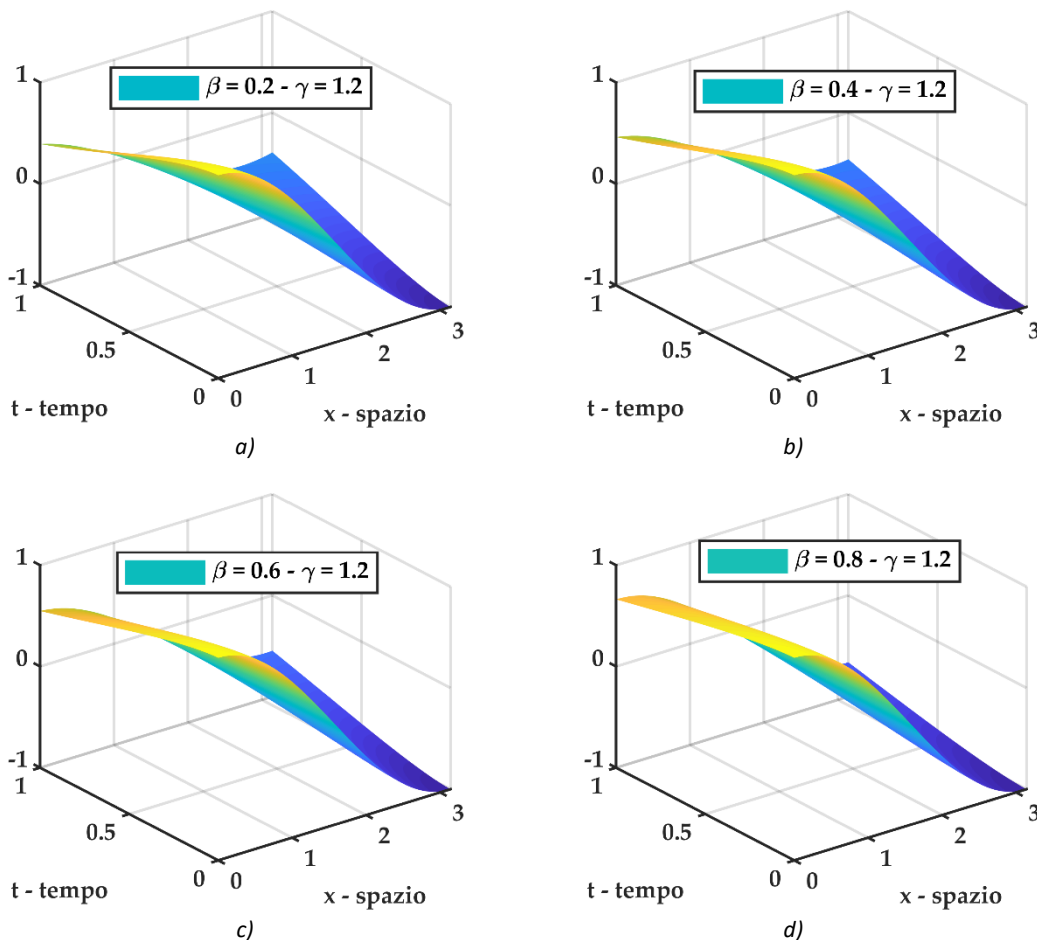


Figura 10-38 plot 3D della soluzione $u(x, t)$ del problema differenziale frazionario S-FRADE con $u(x, 0) = \cos(x)$ e coefficiente di diffusione ed avvezione funzione del tempo $V = D = t^\omega$ con $\omega = 0.50$ per diversi valori dell'ordine di derivazione frazionario fissato $\gamma = 1.2$. a) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.2$, b) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.4$, c) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.6$, d) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.8$.

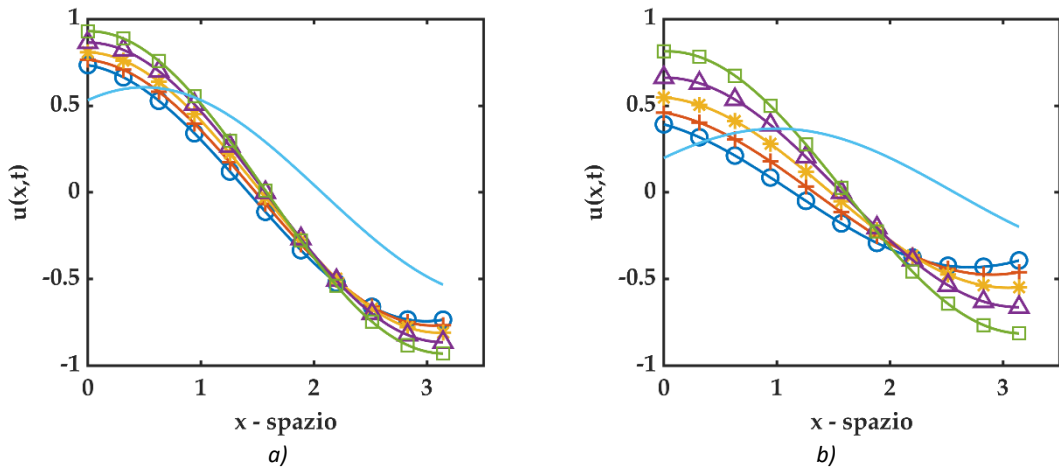


Figura 10-39 plot 2D di confronto fra soluzioni del problema differenziale frazionario S-FRADE con $u(x,0) = \cos(x)$ e coefficienti di diffusione ed avvezione funzione del tempo $V = D = t^\omega$ con $\omega = 0.50$. Il valore di $\gamma = 1.2$ è fissato e (○ cerchio - blu) rappresenta la soluzione per $\beta = 0.2$, (+ croce - rosso) rappresenta la soluzione per $\beta = 0.4$, (* asterisco - giallo) rappresenta la soluzione per $\beta = 0.6$, (△ triangolo - viola) rappresenta la soluzione per $\beta = 0.6$, (□ quadrato - verde) rappresenta la soluzione per $\beta = 1.0$, (— linea continua - azzurro) rappresenta la soluzione della standard ADE. a) plot 2D per $t = 0.5$, b) plot 2D per $t = 1.0$

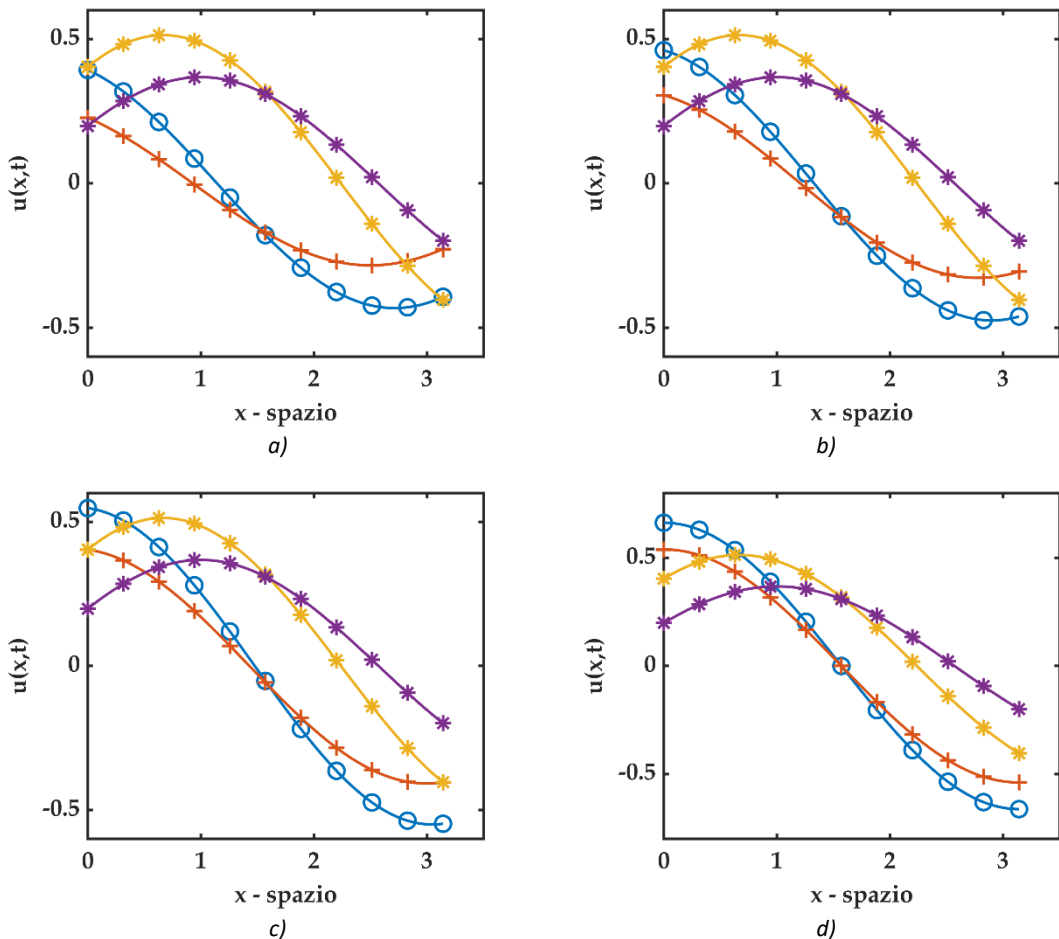


Figura 10-40 plot 2D per frazionario S-FRADE con $u(x,0) = \cos(x)$ e $t = 1.0$ dove (* asterisco - viola) è soluzione standard ADE e $D = V = \text{cost}$, (* asterisco - giallo) rappresenta la soluzione standard ADE e $D = V = t^\omega$ con $\omega = 0.50$, (+ croce - rosso) rappresenta la soluzione S-FRADE $D = V = \text{cost}$, (○ cerchio - blu) rappresenta la soluzione S-FRADE e $D = V = t^\omega$ con $\omega = 0.50$. Si fissa il valore di $\gamma = 1.2$. a) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.2$, b) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.4$, c) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.6$, d) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.8$.

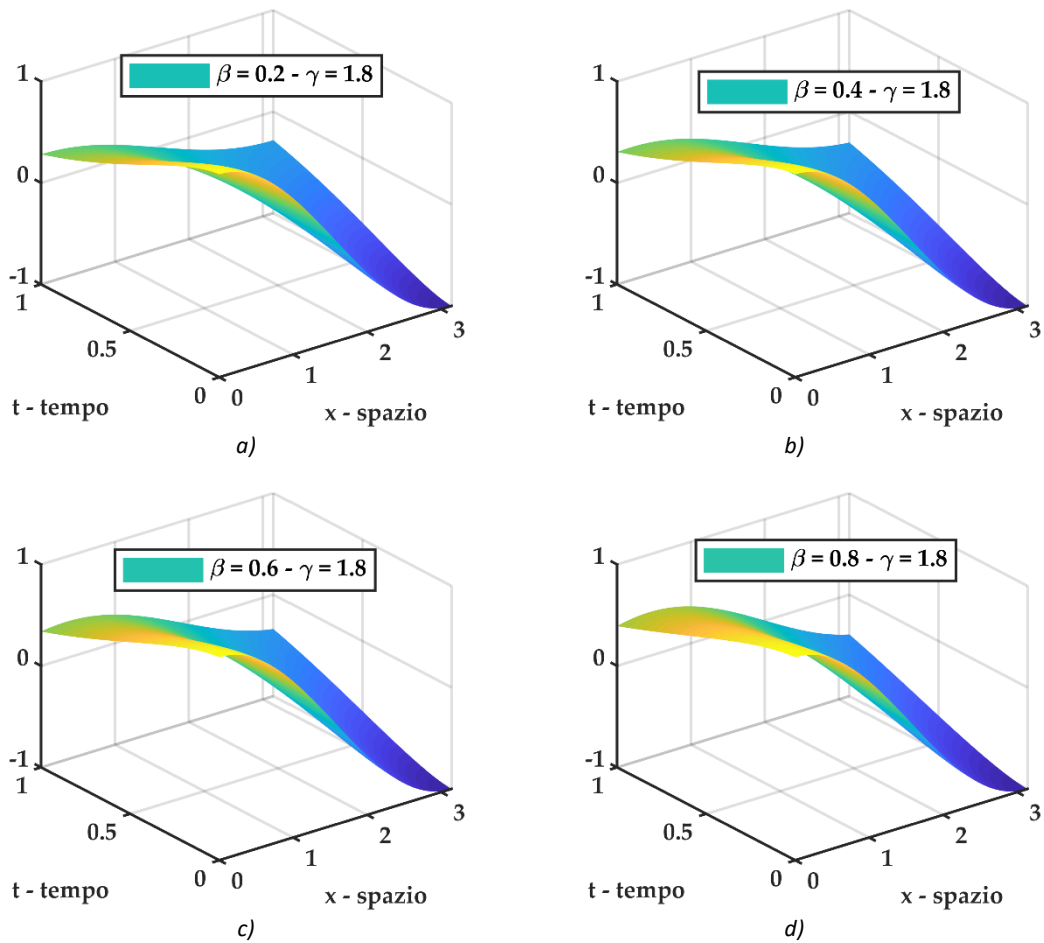


Figura 10-41 plot 3D della soluzione $u(x, t)$ del problema differenziale frazionario S-FRADE con $u(x, 0) = \cos(x)$ e coefficiente di diffusione ed avvezione funzione del tempo $V = D = t^\omega$ con $\omega = 0.50$ per diversi valori dell'ordine di derivazione frazionario fissato $\gamma = 1.8$. a) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.2$, b) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.4$, c) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.6$, d) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.8$.

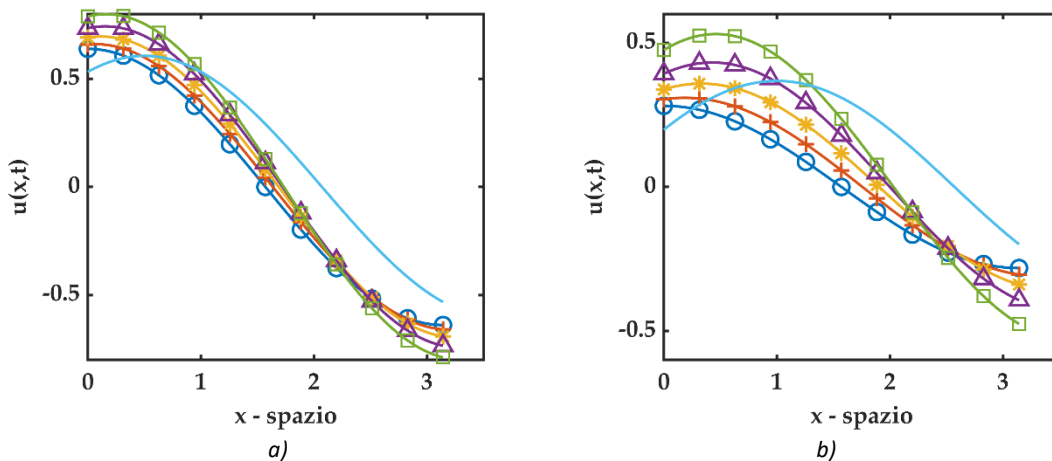


Figura 10-42 plot 2D di confronto fra soluzioni del problema differenziale frazionario S-FRADE con $u(x, 0) = \cos(x)$ e coefficienti di diffusione ed avvezione funzione del tempo $V = D = t^\omega$ con $\omega = 0.50$. Il valore di $\gamma = 1.8$ è fissato e (o cerchio - blu) rappresenta la soluzione per $\beta = 0.2$, (+ croce - rosso) rappresenta la soluzione per $\beta = 0.4$, (* asterisco - giallo) rappresenta la soluzione per $\beta = 0.6$, (Δ triangolo - viola) rappresenta la soluzione per $\beta = 0.6$, (□ quadrato - verde) rappresenta la soluzione per $\beta = 1.0$, (- linea continua - azzurro) rappresenta la soluzione della standard ADE. a) plot 2D per $t = 0.5$, b) plot 2D per $t = 1.0$

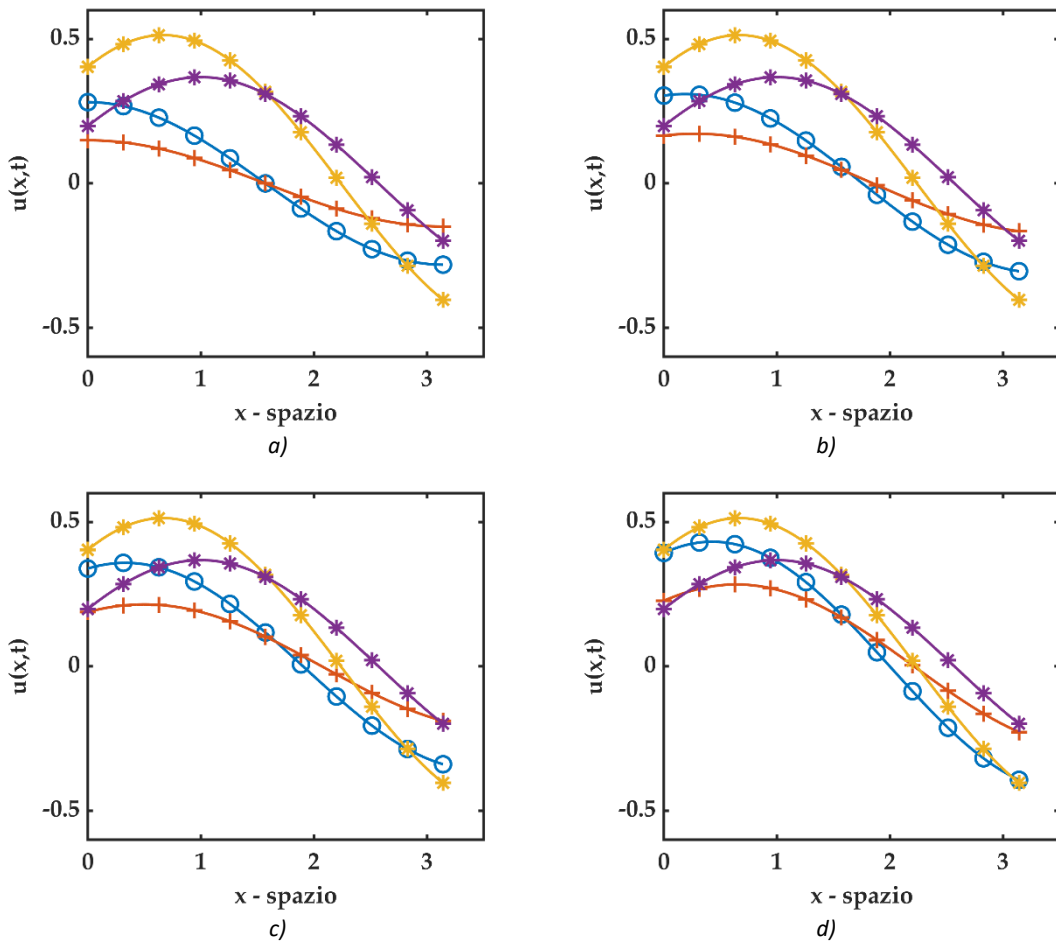


Figura 10-43 plot 2D di confronto fra soluzioni del problema differenziale frazionario S-FRADE con $u(x,0) = \cos(x)$ e $t = 1.0$ dove (* asterisco - viola) rappresenta la soluzione standard ADE e $D = V = \text{cost}$, (* asterisco - giallo) rappresenta la soluzione standard ADE e $D = V = t^\omega$ con $\omega = 0.50$, (+ croce - rosso) rappresenta la soluzione S-FRADE $D = V = \text{cost}$, (O cerchio - blu) rappresenta la soluzione S-FRADE e $D = V = t^\omega$ con $\omega = 0.50$. Si fissa il valore di $\gamma = 1.8$. a) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.2$, b) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.4$, c) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.6$, d) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.8$.

10.3.1.3.1 Algoritmo Matlab

Di seguito viene riportato un estratto dello script Matlab utilizzato per i plot sopra riportati, soffermandosi sul calcolo della soluzione inerente il problema differenziale S-FRADE.

```
function [u_SFADE_tomega] =
uSP_fraz_tomega_cosx(Nmax,x1,t1,Gamma,beta,omega)
% uSP_fraz_cost => SPF      = space fractional
%                          ADE      = Advection Diffusion Equation
%                          t^omega = D(t)=V(t)=g(t)=t^omega
% function per il calcolo della soluzione del seguente problema
% differenziale
%-----
% u,t + t^omega u,beta = t^omega u,Gamma      1 < Gamma <= 2 && 0 <
beta <= 1
% u(x,0) = cos(x)
%-----
u_SFADE_tomega = zeros(length(t1),length(x1));
```

```

SUM = 0;
for n = 0 : Nmax
    for j = 0 : n
        SUM = SUM + (-1)^j*nchoosek(n,j)*cos(x1 + ((n-
j)*Gamma+j*beta)*pi/2);
    end
    u_SPFADE_tomega = u_SPFADE_tomega + t1.^(n*omega+n)/
        (factorial(n)*(omega+1)^n)*SUM;
    SUM = 0;
end
end

```

10.3.1.4 S-FRADE con condizioni iniziali $u(x, 0) = e^{ax}$

Si consideri il seguente problema differenziale

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + t^\omega \cdot \frac{\partial^\beta u}{\partial x^\beta} = t^\omega \cdot \frac{\partial^\gamma u}{\partial x^\gamma} \\ u(x, 0) = e^{ax} \end{cases} \quad (10.31)$$

Dove la derivata frazionaria è di Caputo con terminale $a = -\infty$. Utilizzando i risultati precedenti, l' n -esimo termine della decomposizione ADM assume la seguente formulazione

$$u_n(x, t) = \frac{t^{n(\omega+1)}}{n!(\omega+1)^n} \cdot \sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{n}{j} a^{(n-j)\gamma+j\beta} \cdot e^{ax} \quad (10.32)$$

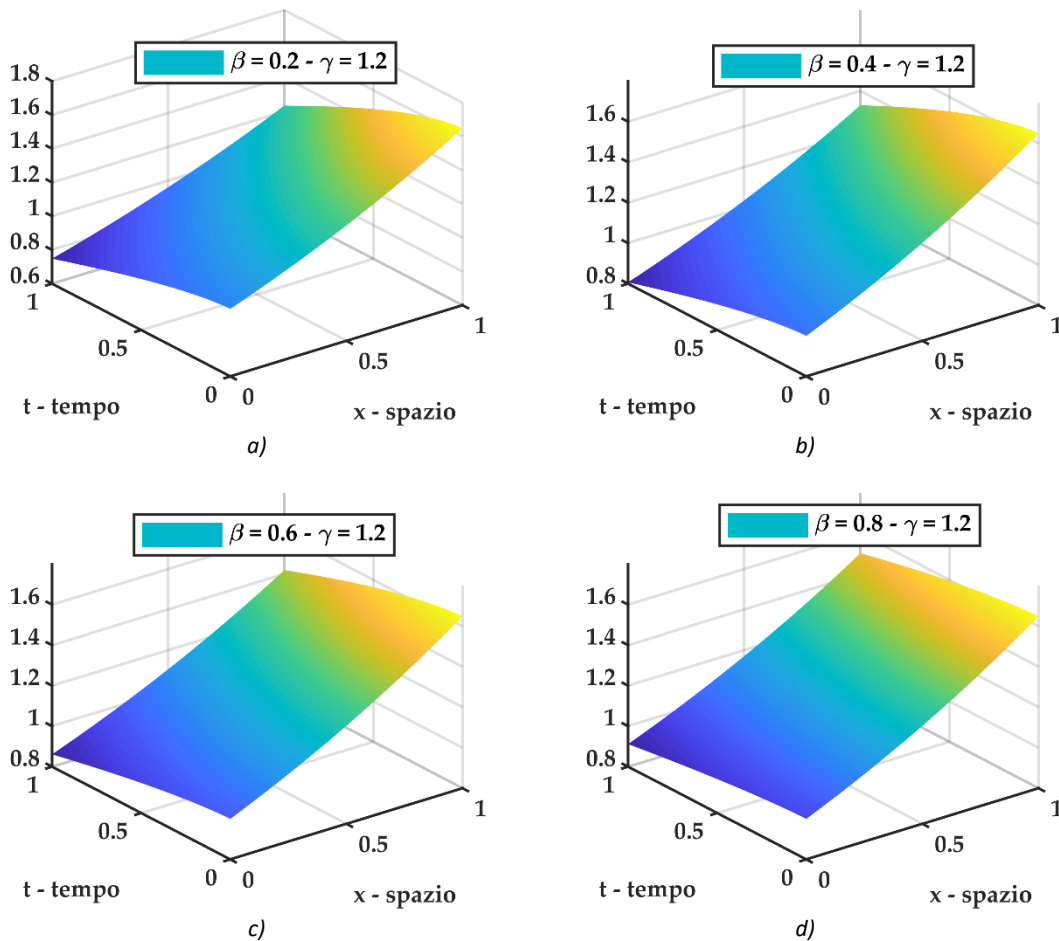


Figura 10-44 plot 3D della soluzione $u(x, t)$ del problema differenziale frazionario S-FRADE con $u(x, 0) = e^{ax}$ con $a = 0.50$ e coefficiente di diffusione ed avvezione funzione del tempo $V = D = t^\omega$ con $\omega = 0.50$ per diversi valori dell'ordine di derivazione frazionario fissato $\gamma = 1.2$. a) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.2$, b) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.4$, c) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.6$, d) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.8$.

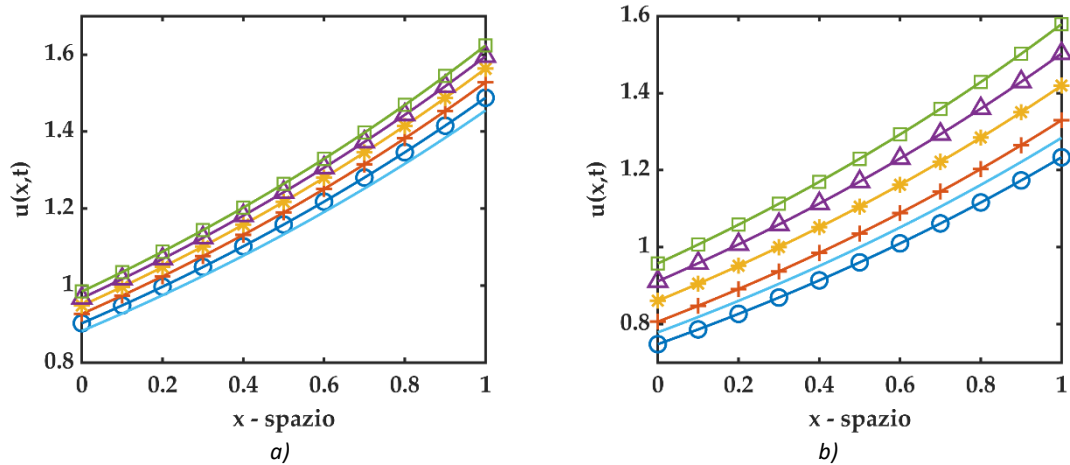


Figura 10-45 plot 2D di confronto fra soluzioni del problema differenziale frazionario S-FRADE con $u(x, 0) = e^{ax}$ con $a = 0.50$ e coefficienti di diffusione ed avvezione funzione del tempo $V = D = t^\omega$ con $\omega = 0.50$. Il valore di $\gamma = 1.2$ è fissato e (\odot cerchio - blu) rappresenta la soluzione per $\beta = 0.2$, (+ croce - rosso) rappresenta la soluzione per $\beta = 0.4$, (* asterisco - giallo) rappresenta la soluzione per $\beta = 0.6$, (Δ triangolo - viola) rappresenta la soluzione per $\beta = 0.6$, (\square quadrato - verde) rappresenta la soluzione per $\beta = 1.0$, (— linea continua - azzurro) rappresenta la soluzione della standard ADE. a) plot 2D per $t = 0.5$, b) plot 2D per $t = 1.0$

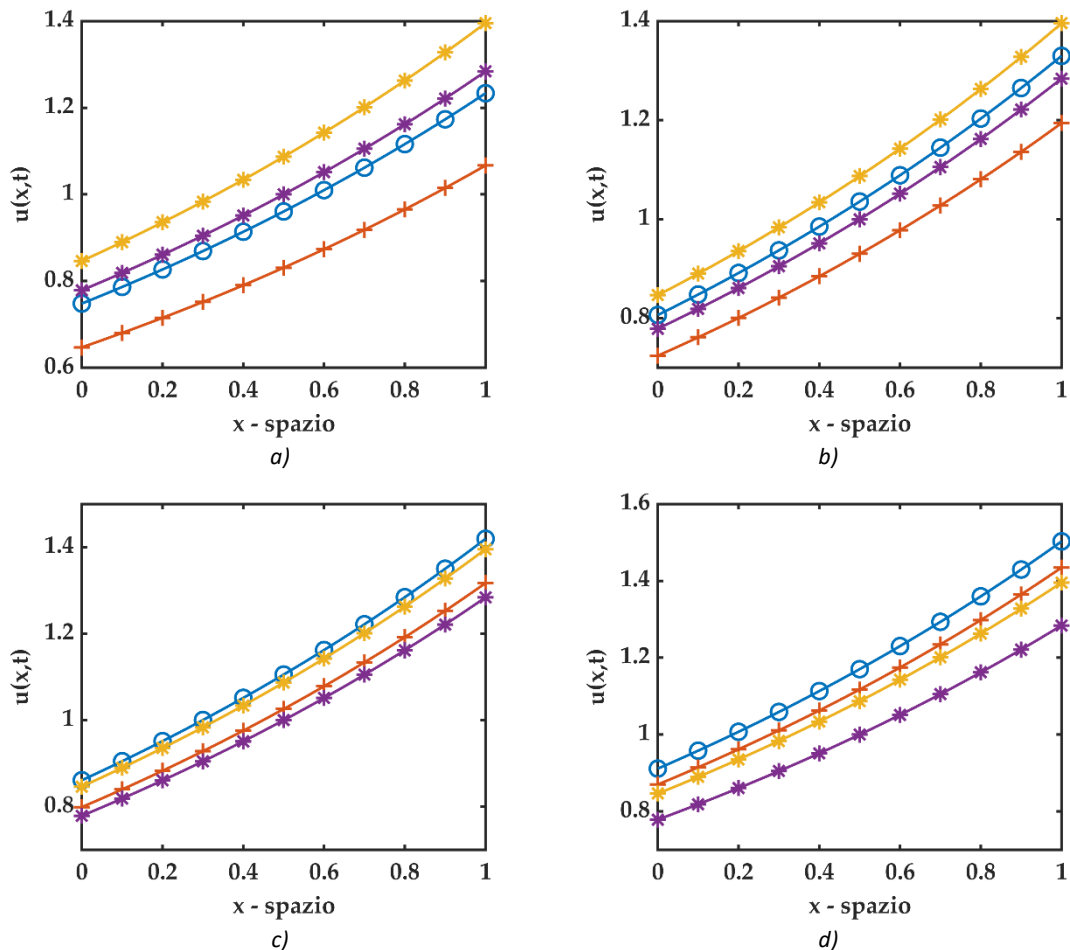


Figura 10-46 plot 2D per S-FRADE con $u(x, 0) = e^{ax}$ con $a = 0.50$ e $t = 1.0$ dove (* asterisco - viola) è la soluzione standard ADE e $D = V = cost$, (* asterisco - giallo) rappresenta la soluzione standard ADE e $D = V = t^\omega$ con $\omega = 0.50$, (+ croce - rosso) rappresenta la soluzione S-FRADE $D = V = cost$, (\odot cerchio - blu) rappresenta la soluzione S-FRADE e $D = V = t^\omega$ con $\omega = 0.50$. Si fissa il valore di $\gamma = 1.2$. a) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.2$, b) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.4$, c) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.6$, d) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.8$.

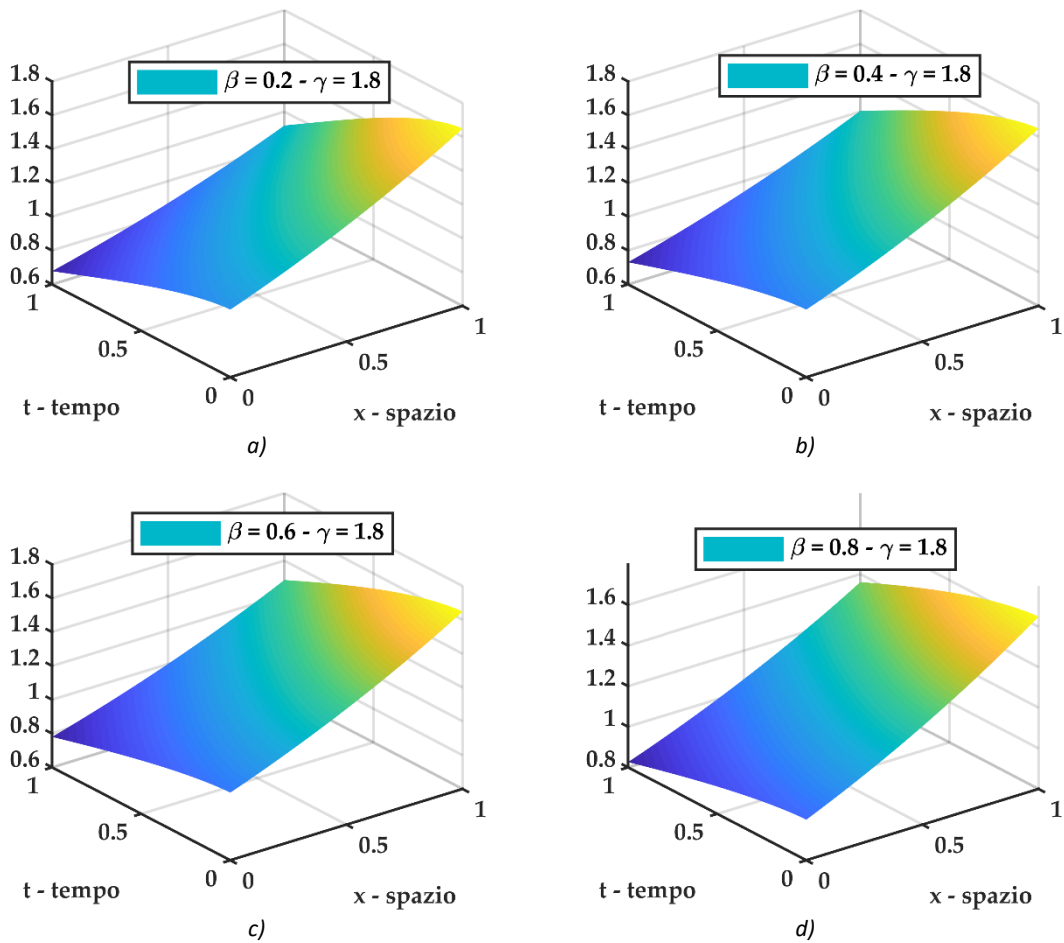


Figura 10-47 plot 3D della soluzione $u(x, t)$ del problema differenziale frazionario S-FRADE con $u(x, 0) = e^{ax}$ con $a = 0.50$ e coefficiente di diffusione ed avvezione funzione del tempo $V = D = t^\omega$ con $\omega = 0.50$ per diversi valori dell'ordine di derivazione frazionario fissato $\gamma = 1.8$. a) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.2$, b) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.4$, c) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.6$, d) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.8$.

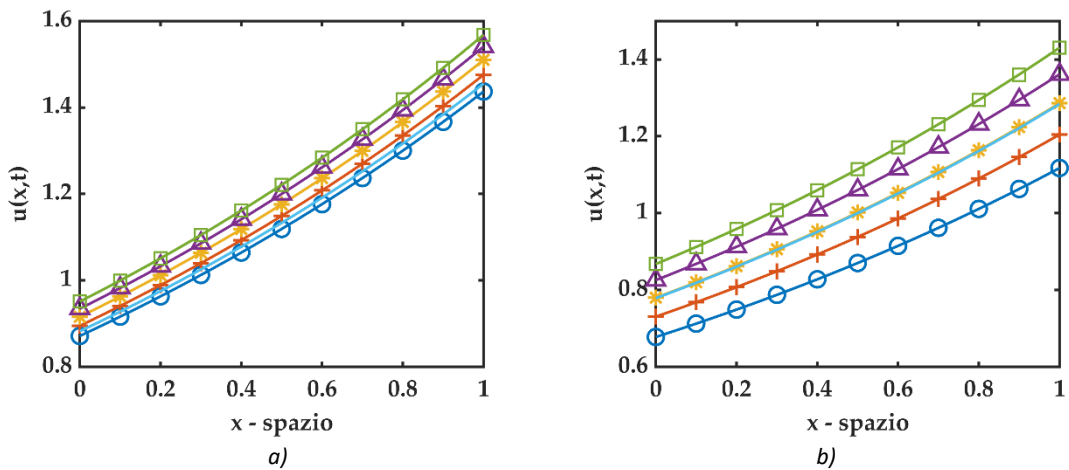


Figura 10-48 plot 2D di confronto fra soluzioni del problema differenziale frazionario S-FRADE con $u(x, 0) = e^{ax}$ con $a = 0.50$ e coefficienti di diffusione ed avvezione funzione del tempo $V = D = t^\omega$ con $\omega = 0.50$. Il valore di $\gamma = 1.8$ è fissato e (⊙ cerchio - blu) rappresenta la soluzione per $\beta = 0.2$, (+ croce - rosso) rappresenta la soluzione per $\beta = 0.4$, (* asterisco - giallo) rappresenta la soluzione per $\beta = 0.6$, (Δ triangolo - viola) rappresenta la soluzione per $\beta = 0.6$, (□ quadrato - verde) rappresenta la soluzione per $\beta = 1.0$, (— linea continua - azzurro) rappresenta la soluzione della standard ADE. a) plot 2D per $t = 0.5$, b) plot 2D per $t = 1.0$

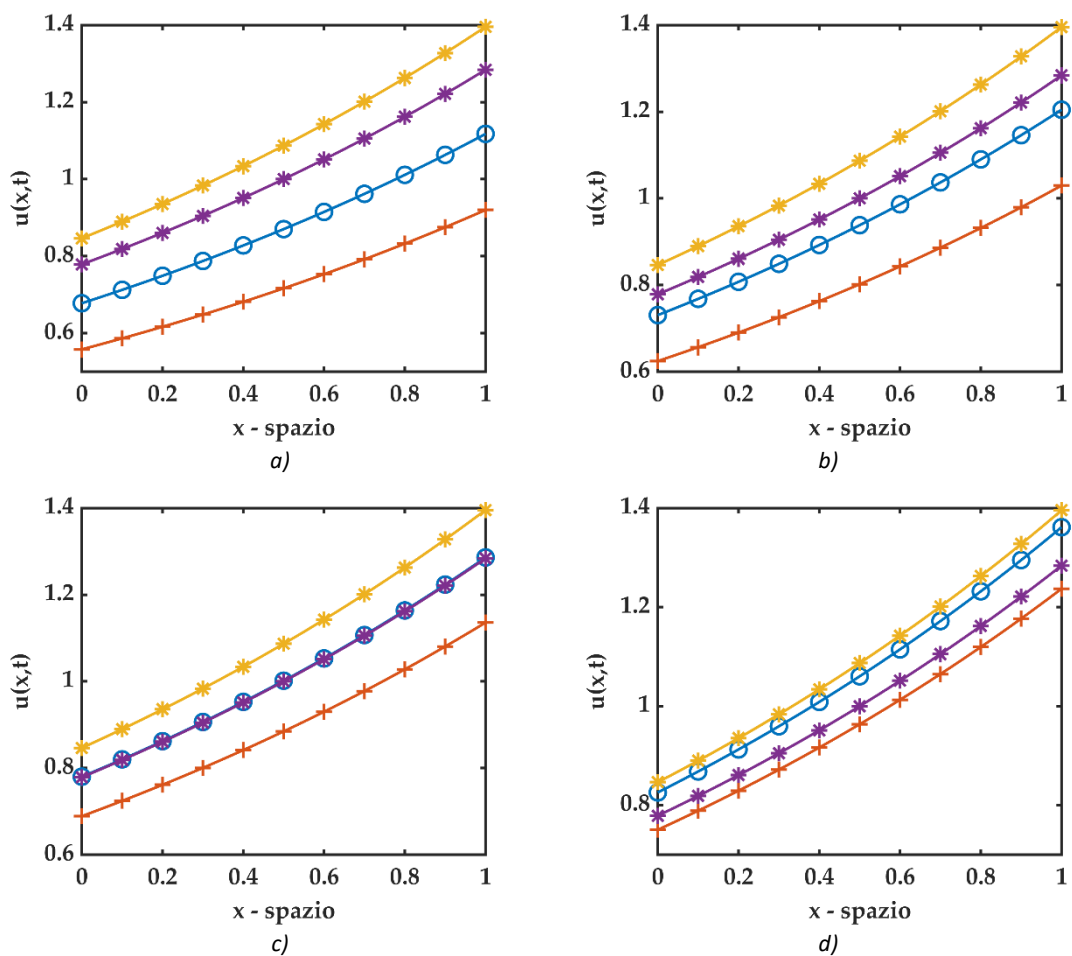


Figura 10-49 plot 2D di confronto fra soluzioni del problema differenziale frazionario S-FRADE con $u(x, 0) = e^{ax}$ con $a = 0.50$ e $t = 1.0$ dove (* asterisco - viola) rappresenta la soluzione standard ADE e $D = V = cost$, (* asterisco - giallo) rappresenta la soluzione standard ADE e $D = V = t^\omega$ con $\omega = 0.50$, (+ croce - rosso) rappresenta la soluzione S-FRADE $D = V = cost$, (⊙ cerchio - blu) rappresenta la soluzione S-FRADE e $D = V = t^\omega$ con $\omega = 0.50$. Si fissa il valore di $\gamma = 1.2$. a) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.2$, b) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.4$, c) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.6$, d) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.8$.

10.3.1.4.1 Algoritmo Matlab

Di seguito viene riportato un estratto dello script Matlab utilizzato per i plot sopra riportati, soffermandosi sul calcolo della soluzione inerente il problema differenziale S-FRADE.

```
function [u_SPFADE_tomega] =
uSP_fraz_tomega_eax(Nmax,x1,t1,Gamma,beta,omega,a)
% uSP_fraz_cost => SPF = space fractional
% ADE = Advection Diffusion Equation
% t^omega = D(t)=V(t)=g(t)=t^omega
% function per il calcolo della soluzione del seguente problema
% differenziale
% -----
% u,t + t^omega u,beta = t^omega u,Gamma 1 < Gamma <= 2 && 0 <
beta <= 1
% u(x,0) = e^(ax)
% -----
u_SPFADE_tomega = zeros(length(t1),length(x1));
```

```

SUM = 0;
for n = 0 : Nmax
    for j = 0 : n
        SUM = SUM + (-1)^j*nchoosek(n,j)*a^(n-
j)*Gamma+j*beta)*exp(a*x1);
    end
    u_SPFADE_tomega = u_SPFADE_tomega +
t1.^(n*omega+n)/(factorial(n)*(omega+1)^n)*SUM;
    SUM = 0;
end
end

```

10.3.2 $V = D = g(t) = \cos(t)$

10.3.2.1 S-FRADE con condizioni iniziali $u(x, 0) = x^\delta$

Si considera il seguente problema differenziale

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \cos(t) \cdot \frac{\partial^\beta u}{\partial x^\beta} = \cos(t) \cdot \frac{\partial^\gamma u}{\partial x^\gamma} \\ u(x, 0) = x^\delta \end{cases} \quad (10.33)$$

Dove la derivata frazionaria è di Caputo con terminale $a = 0$.

In questo contesto essendo l'equazione differenziale frazionaria solamente in spazio si considera ${}^{RL} [{}^{ng}] \mathbb{I}_t^{n\alpha}(t) = [{}^{ng}] \mathbb{I}_t^n(t) = \int_0^t g(t) \int_0^t g(t) \int_0^t g(t) \dots dt dt dt$

$n = 1$	\rightarrow	$[{}^g] \mathbb{I}_t^1(t) = \int_0^t g(t) dt$	$=$	$\sin(t)$
$n = 2$	\rightarrow	$[{}^{2g}] \mathbb{I}_t^2(t) = \int_0^t g(t) \int_0^t g(t) dt dt$	$=$	$\frac{\sin^2(t)}{2!}$
$n = 3$	\rightarrow	$[{}^{3g}] \mathbb{I}_t^3(t) = \int_0^t g(t) \int_0^t g(t) \int_0^t g(t) dt dt dt$	$=$	$\frac{\sin^3(t)}{3!}$
$n = 4$	\rightarrow	$[{}^{4g}] \mathbb{I}_t^4(t) = \int_0^t g(t) \int_0^t g(t) \int_0^t g(t) \int_0^t g(t) dt dt dt dt$	$=$	$\frac{\sin^4(t)}{4!}$
\vdots		\vdots		\vdots
n	\rightarrow	$[{}^{ng}] \mathbb{I}_t^n(t) = \int_0^t g(t) \int_0^t g(t) \int_0^t g(t) \dots dt dt dt$	$=$	$\frac{\sin^n(t)}{n!}$

Quindi l' n -esimo termine della decomposizione ADM assume la seguente formulazione:

$$\begin{aligned} u_n(x, t) &= \left({}^{RL} [{}^{ng}] \mathbb{I}_t^{n\alpha}(t) \right) \cdot \sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{n}{j} \left[D_x^{(n-j)\gamma + j\beta} \right] f(x) = \\ &= \frac{\sin^n(t)}{n!} \cdot \sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{n}{j} \left\{ \frac{\Gamma(\delta + 1)}{\Gamma(\delta + 1 - [(n-j)\gamma + j\beta])} \cdot x^{-[(n-j)\gamma + j\beta]} \right\} \cdot x^\delta \end{aligned} \quad (10.34)$$

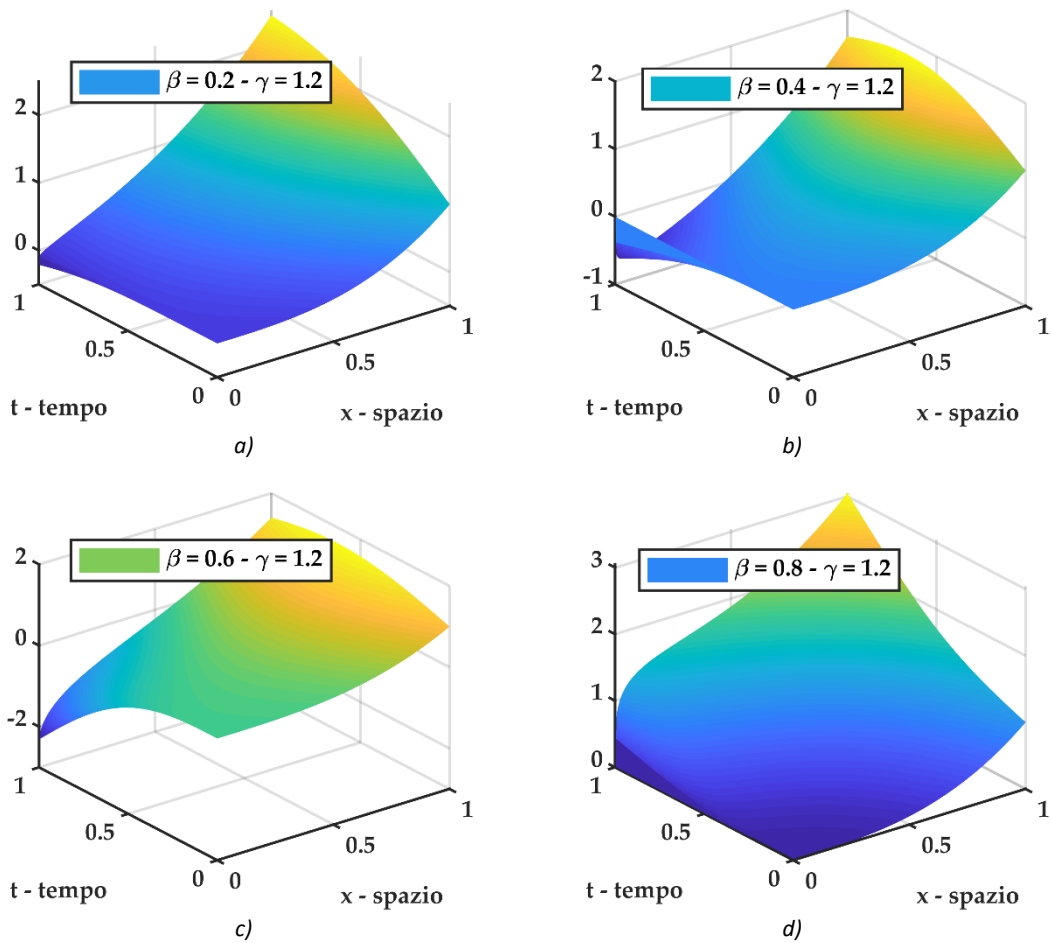


Figura 10-50 plot 3D della soluzione $u(x, t)$ del problema differenziale frazionario S-FRADE con $u(x, 0) = x^\delta$ con $\delta = 3$ e coefficiente di diffusione ed avvezione funzione del tempo $V = D = \cos(t)$ per diversi valori dell'ordine di derivazione frazionario fissato $\gamma = 1.2$. a) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.2$, b) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.4$, c) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.6$, d) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.8$

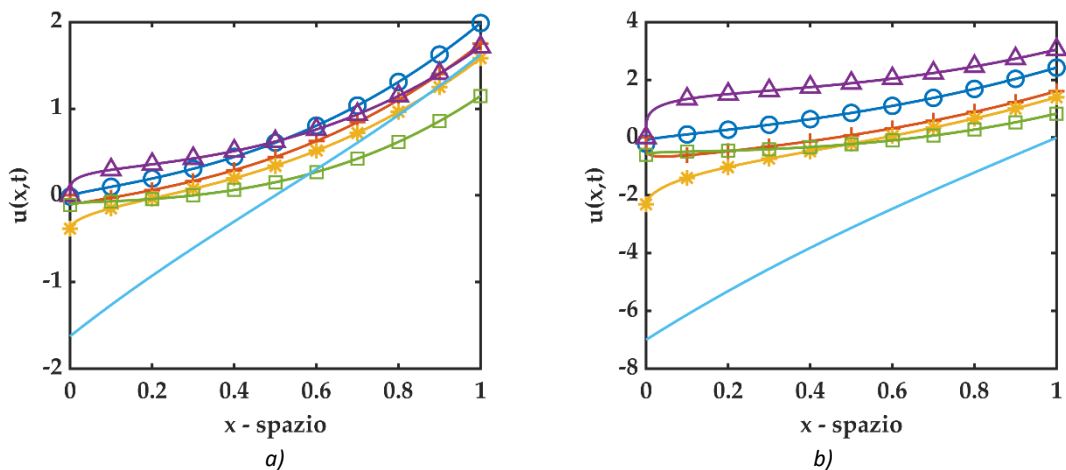


Figura 10-51 plot 2D di confronto fra soluzioni del problema differenziale frazionario S-FRADE con $u(x, 0) = x^\delta$ con $\delta = 3$ e coefficienti di diffusione ed avvezione funzione del tempo $V = D = \cos(t)$. Il valore di $\gamma = 1.2$ è fissato e (○ cerchio - blu) rappresenta la soluzione per $\beta = 0.2$, (+ croce - rosso) rappresenta la soluzione per $\beta = 0.4$, (* asterisco - giallo) rappresenta la soluzione per $\beta = 0.6$, (△ triangolo - viola) rappresenta la soluzione per $\beta = 0.6$, (□ quadrato - verde) rappresenta la soluzione per $\beta = 1.0$, (— linea continua - azzurro) rappresenta la soluzione della standard ADE. a) plot 2D per $t = 0.5$, b) plot 2D per $t = 1.0$

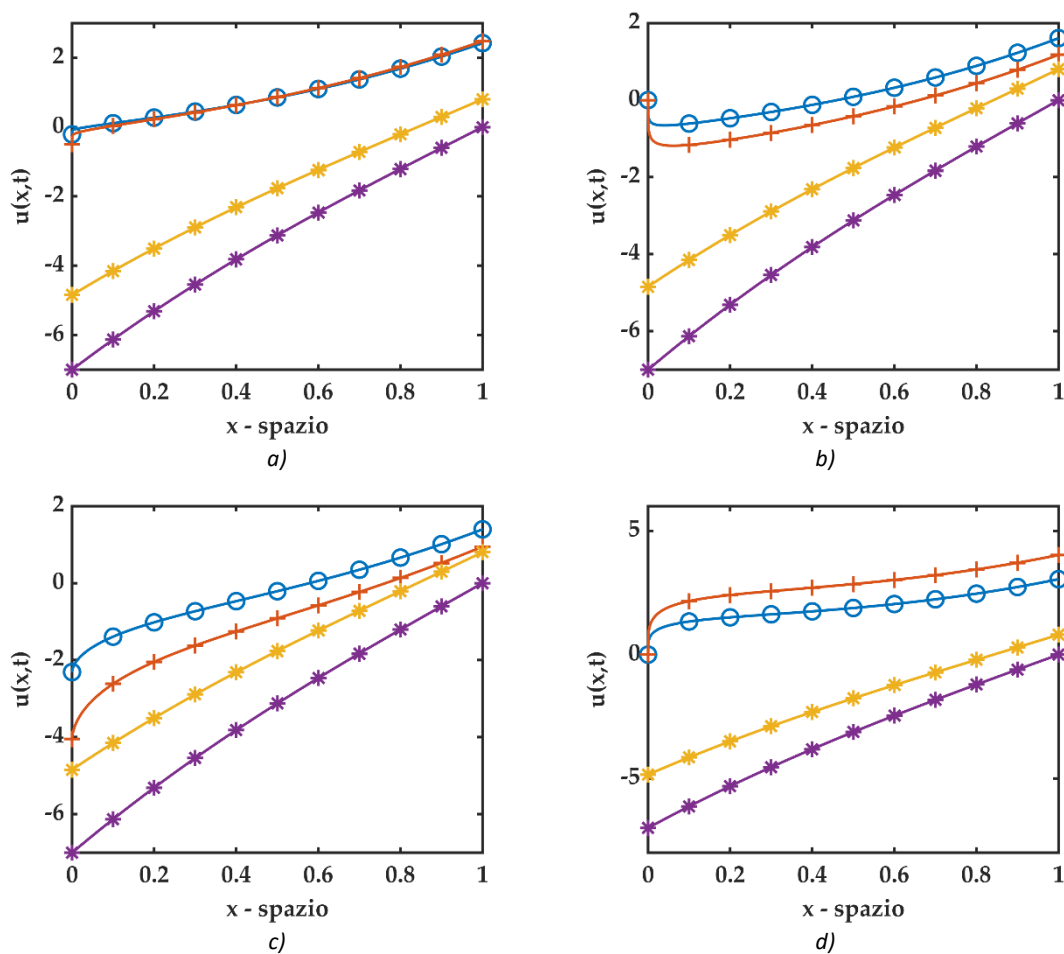


Figura 10-52 plot 2D di confronto fra soluzioni del problema differenziale frazionario S-FRADE con $u(x, 0) = x^\delta$ con $\delta = 3$ e $t = 1.0$ dove (* asterisco - viola) rappresenta la soluzione standard ADE e $D = V = \text{cost}$, (* asterisco - giallo) rappresenta la soluzione standard ADE e $D = V = \cos(t)$, (+ croce - rosso) rappresenta la soluzione S-FRADE $D = V = \text{cost}$, (⊙ cerchio - blu) rappresenta la soluzione S-FRADE e $D = V = \cos(t)$. Si fissa il valore di $\gamma = 1.2$. a) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.2$, b) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.4$, c) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.6$, d) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.8$.

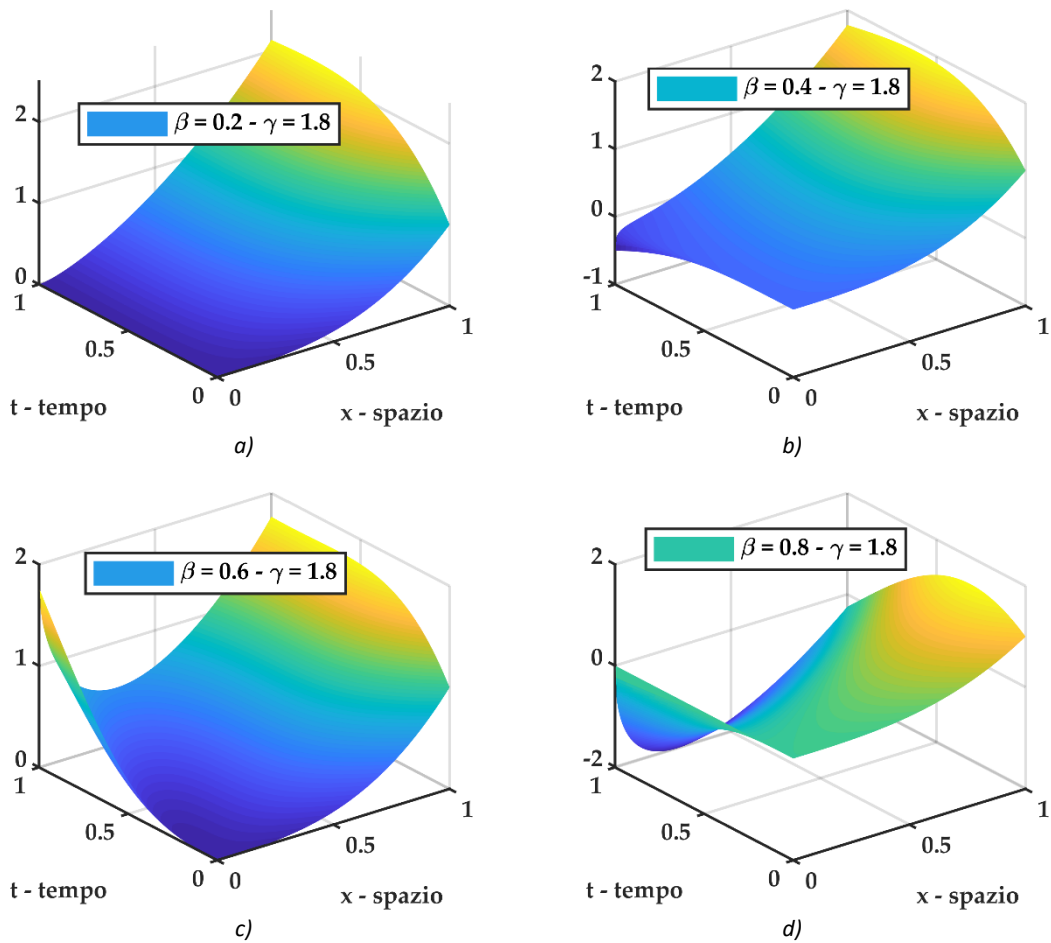


Figura 10-53 plot 3D della soluzione $u(x, t)$ del problema differenziale frazionario S-FRADE con $u(x, 0) = x^\delta$ con $\delta = 0.50$ e coefficiente di diffusione ed avvezione funzione del tempo $V = D = \cos(t)$ per diversi valori dell'ordine di derivazione frazionario fissato $\gamma = 1.8$. a) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.2$, b) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.4$, c) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.6$, d) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.8$

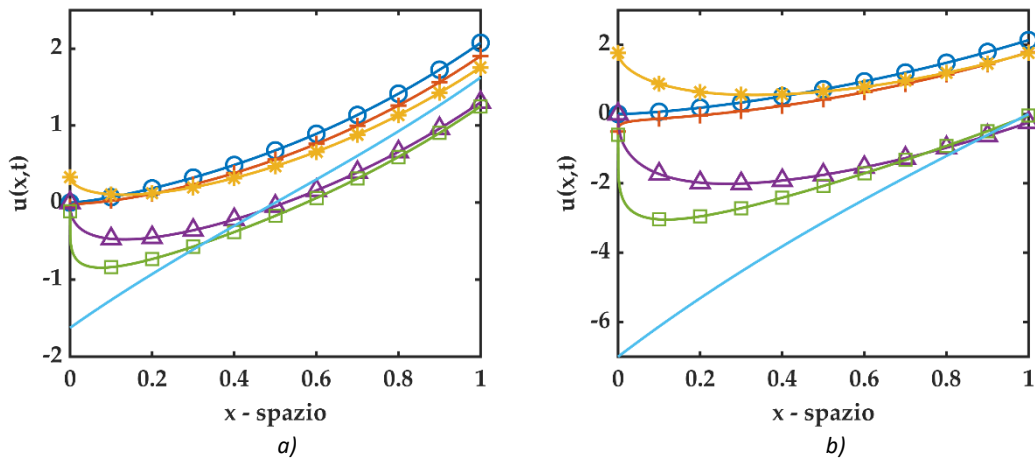


Figura 10-54 plot 2D di confronto fra soluzioni del problema differenziale frazionario S-FRADE con $u(x, 0) = x^\delta$ con $\delta = 3$ e coefficienti di diffusione ed avvezione funzione del tempo $V = D = \cos(t)$. Il valore di $\gamma = 1.8$ è fissato e (● cerchio - blu) rappresenta la soluzione per $\beta = 0.2$, (+ croce - rosso) rappresenta la soluzione per $\beta = 0.4$, (* asterisco - giallo) rappresenta la soluzione per $\beta = 0.6$, (△ triangolo - viola) rappresenta la soluzione per $\beta = 1.0$, (— linea continua - azzurro) rappresenta la soluzione della standard ADE. a) plot 2D per $t = 0.5$, b) plot 2D per $t = 1.0$

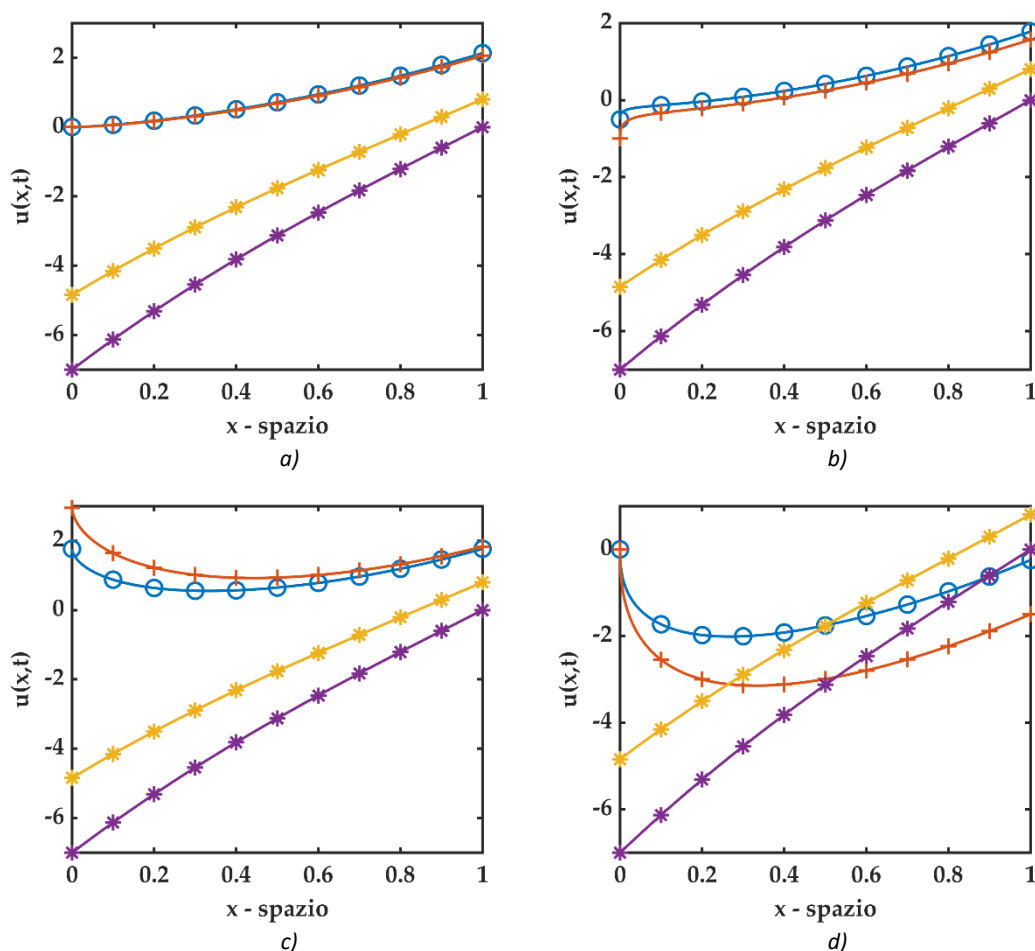


Figura 10-55 plot 2D di confronto fra soluzioni del problema differenziale frazionario S-FRADE con $u(x, 0) = x^\delta$ con $\delta = 3$ e $t = 1.0$ dove (* asterisco - viola) rappresenta la soluzione standard ADE e $D = V = \text{cost}$, (* asterisco - giallo) rappresenta la soluzione standard ADE e $D = V = \cos(t)$, (+ croce - rosso) rappresenta la soluzione S-FRADE $D = V = \text{cost}$, (⊙ cerchio - blu) rappresenta la soluzione S-FRADE e $D = V = \cos(t)$. Si fissa il valore di $\gamma = 1.8$. a) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.2$, b) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.4$, c) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.6$, d) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.8$.

10.3.2.1.1 Algoritmo Matlab

Di seguito viene riportato un estratto dello script Matlab utilizzato per i plot sopra riportati, soffermandosi sul calcolo della soluzione inerente il problema differenziale S-FRADE

```
function [u_SPFRADE_cos_t] =
uSP_fraz_cos_t_xdelta(Nmax,x1,t1,Gamma,beta,delta)
% uSP_fraz_cost => SPF = space fractional
% ADE = Advection Diffusion Equations
% cos(t) = D(t)=V(t)=g(t)=cos(t)
% function per il calcolo della soluzione del seguente problema
% differenziale
%-----
% u,t + cos(t) u,beta = cos(t) u,gamma      1 < Gamma <= 2 && 0 <
beta <= 1
% u(x,0) = x^delta
%-----
```

```

u_SPFADE_cos_t = zeros(length(t1),length(x1));
SUM = 0;
for n = 0 : Nmax
    for j = 0 : n
        M_1 = floor((n-j)*Gamma+j*beta);
        if M_1 >= delta && M_1 ~= (n-j)*Gamma+j*beta
            SUM = SUM;
        elseif M_1 > delta
            SUM = SUM;
        else
            SUM = SUM + (-
1)^j*nchoosek(n,j)*gamma(delta+1)/gamma(delta+1-((n-
j)*Gamma+j*beta))*x1.^(delta-((n-j)*Gamma+j*beta));
            end
        end
        u_SPFADE_cos_t = u_SPFADE_cos_t +
(sin(t1)).^n/factorial(n)*SUM;
        SUM = 0;
    end
end
end

```

10.3.2.2 S-FRADE con condizioni iniziali $u(x, 0) = \sin(x)$

Si consideri il seguente problema differenziale

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \cos(t) \cdot \frac{\partial^\beta u}{\partial x^\beta} = \cos(t) \cdot \frac{\partial^\gamma u}{\partial x^\gamma} \\ u(x, 0) = \sin(x) \end{cases} \quad (10.35)$$

Dove la derivata frazionaria è di Caputo con terminale $a = -\infty$.
Utilizzando i risultati precedenti, l' n -esimo termine della decomposizione ADM assume la seguente formulazione

$$u_n(x, t) = \frac{\sin^n(t)}{n!} \cdot \sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{n}{j} \sin\left(x + \frac{[(n-j)\gamma + j\beta]\pi}{2}\right) \quad (10.36)$$

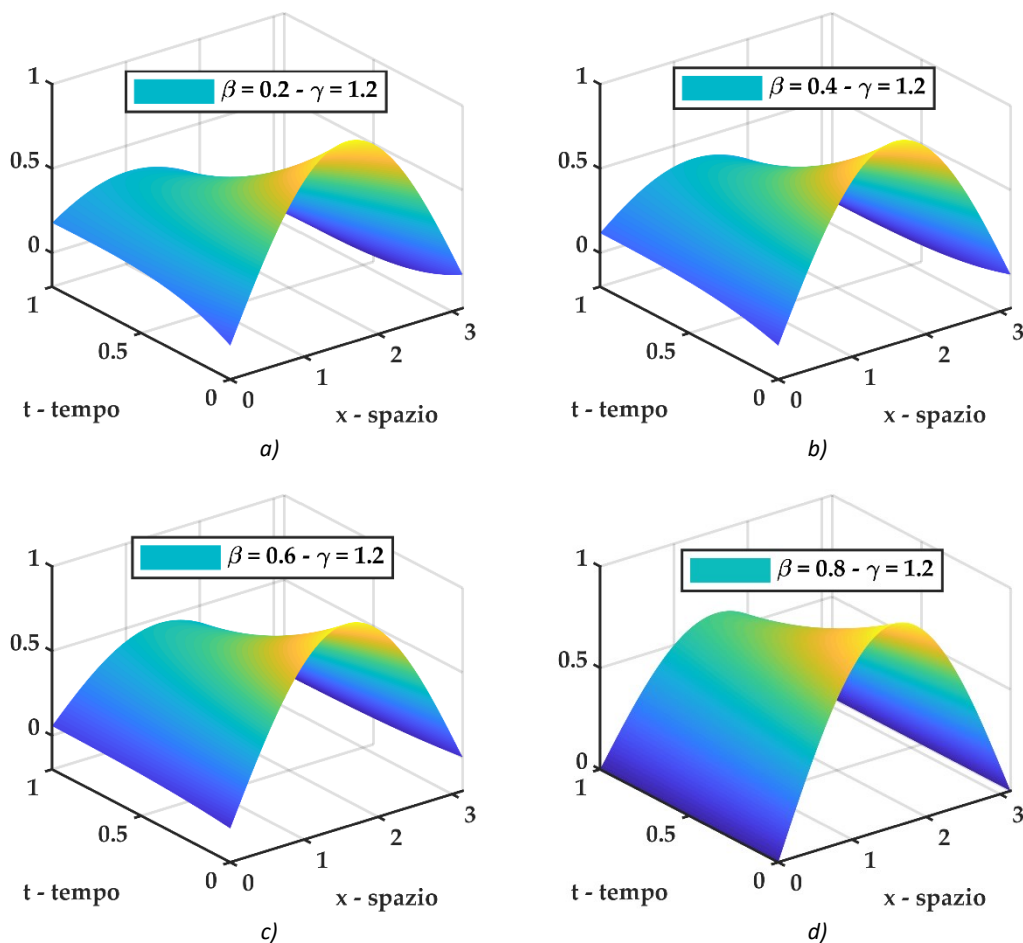


Figura 10-56 plot 3D della soluzione $u(x, t)$ del problema differenziale frazionario S-FRADE con $u(x, 0) = \sin(x)$ e coefficiente di diffusione ed avvezione funzione del tempo $V = D = \cos(t)$ per diversi valori dell'ordine di derivazione frazionario fissato $\gamma = 1.2$. a) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.2$, b) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.4$, c) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.6$, d) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.8$

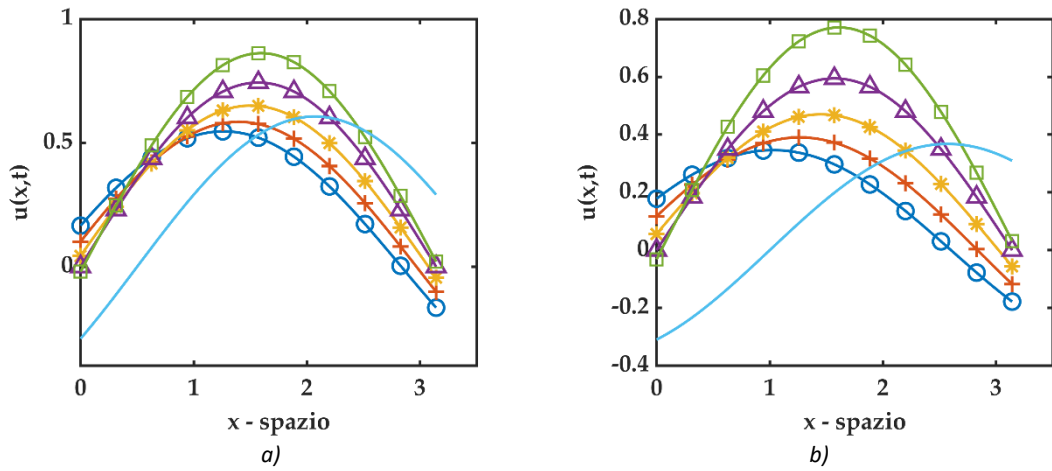


Figura 10-57 plot 2D di confronto fra soluzioni del problema differenziale frazionario S-FRADE con $u(x, 0) = \sin(x)$ e coefficienti di diffusione ed avvezione funzione del tempo $V = D = \cos(t)$. Il valore di $\gamma = 1.2$ è fissato e $(\odot$ cerchio - blu) rappresenta la soluzione per $\beta = 0.2$, $(+$ croce - rosso) rappresenta la soluzione per $\beta = 0.4$, $(*$ asterisco - giallo) rappresenta la soluzione per $\beta = 0.6$, $(\Delta$ triangolo - viola) rappresenta la soluzione per $\beta = 0.6$, $(\square$ quadrato - verde) rappresenta la soluzione per $\beta = 1.0$, $(-$ linea continua - azzurro) rappresenta la soluzione della standard ADE. a) plot 2D per $t = 0.5$, b) plot 2D per $t = 1.0$

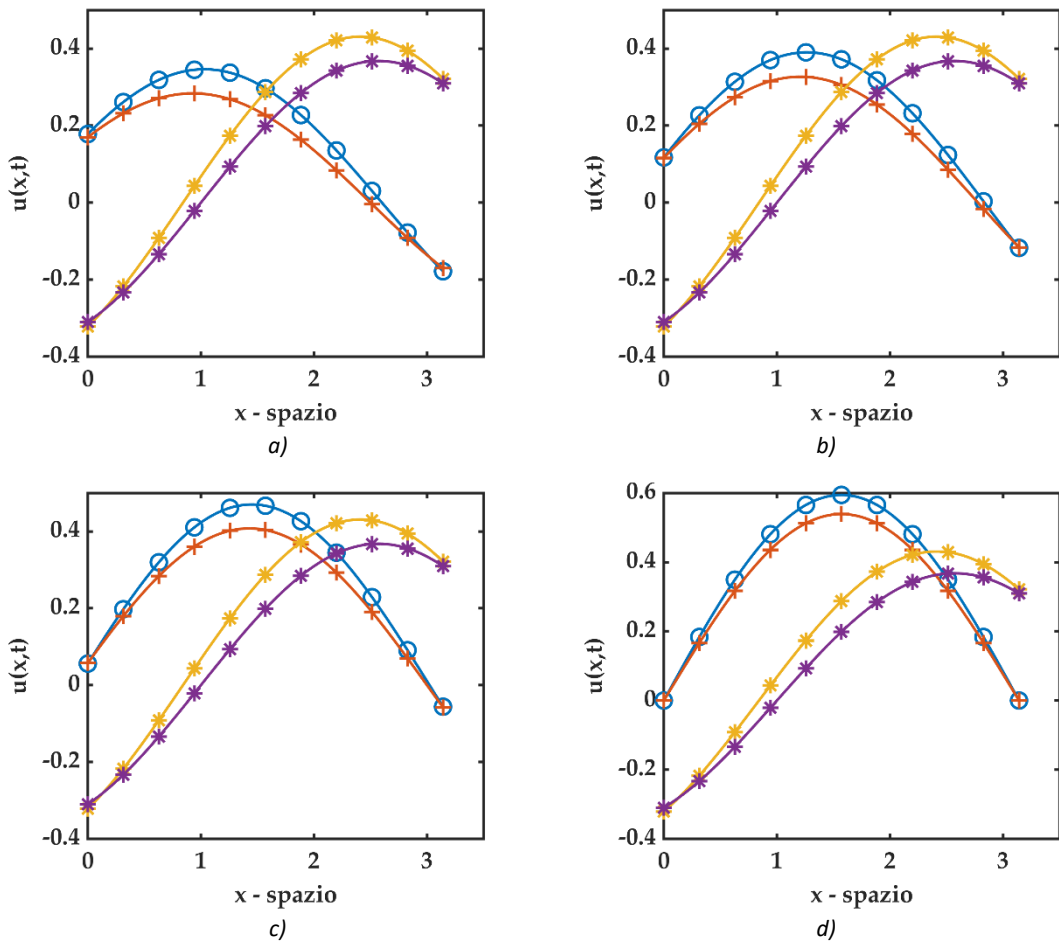


Figura 10-58 plot 2D di confronto per S-FRADE con $u(x, 0) = \sin(x)$ $t = 1.0$ dove $(*$ asterisco - viola) rappresenta la soluzione standard ADE e $D = V = \cos(t)$, $(*$ asterisco - giallo) rappresenta la soluzione standard ADE e $D = V = \cos(t)$, $(+$ croce - rosso) rappresenta la soluzione S-FRADE $D = V = \cos(t)$, $(\odot$ cerchio - blu) rappresenta la soluzione S-FRADE e $D = V = \cos(t)$. Si fissa il valore di $\gamma = 1.2$. a) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.2$, b) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.4$, c) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.6$, d) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.8$.

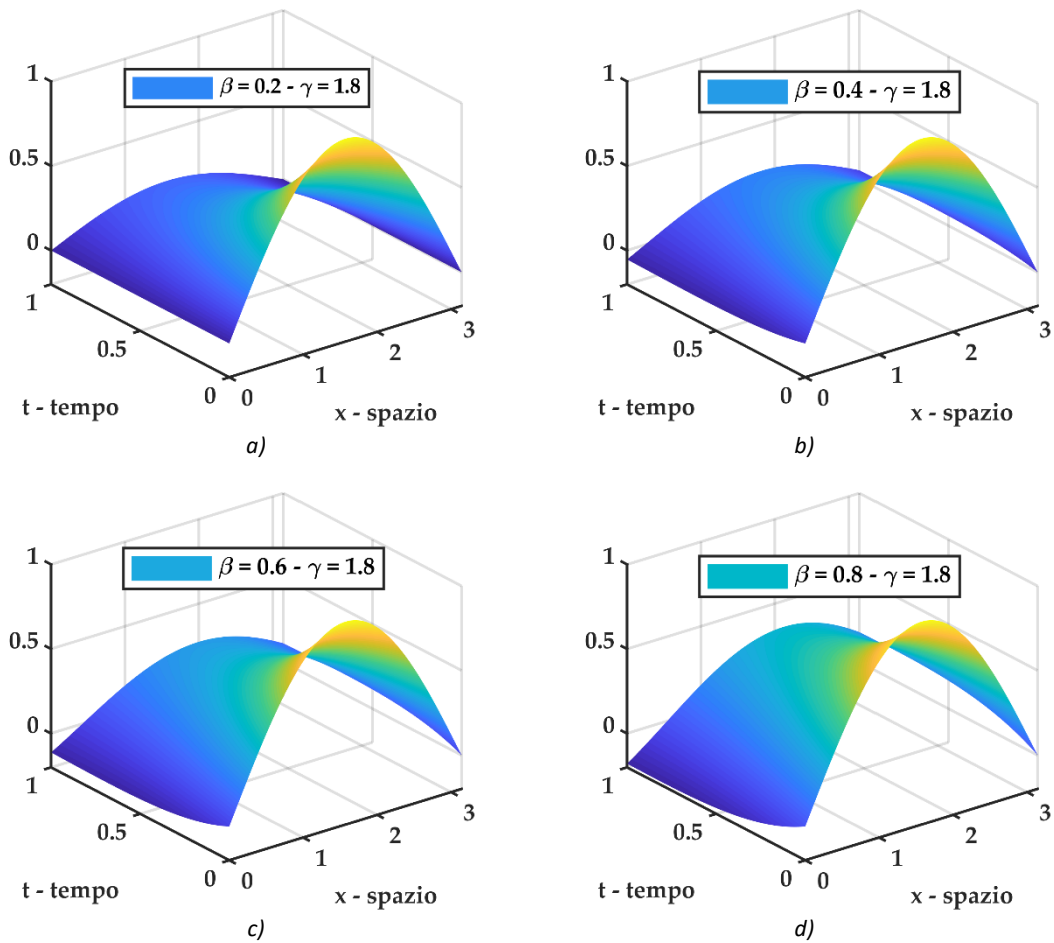


Figura 10-59 plot 3D della soluzione $u(x, t)$ del problema differenziale frazionario S-FRADE con $u(x, 0) = \sin(x)$ e coefficiente di diffusione ed avvezione funzione del tempo $V = D = \cos(t)$ per diversi valori dell'ordine di derivazione frazionario fissato $\gamma = 1.2$. a) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.2$, b) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.4$, c) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.6$, d) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.8$

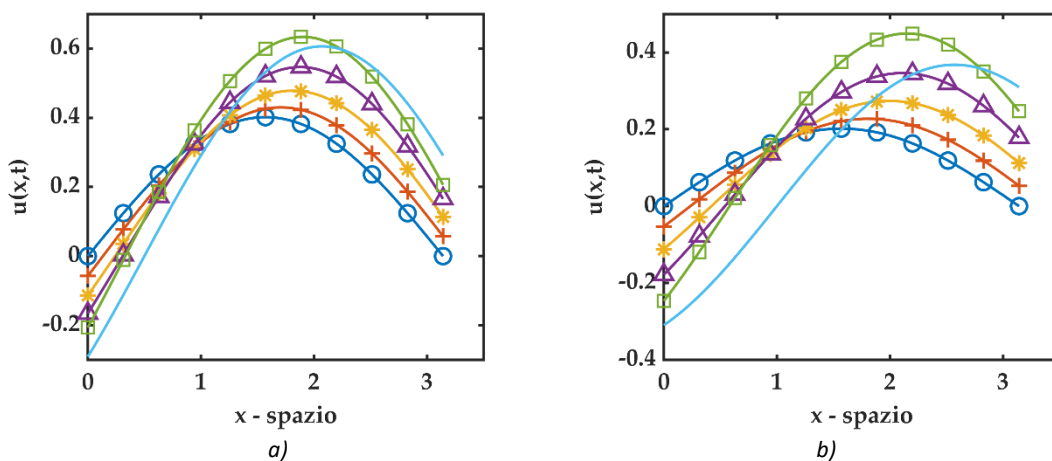


Figura 10-60 plot 2D di confronto fra soluzioni del problema differenziale frazionario S-FRADE con $u(x, 0) = \sin(x)$ e coefficienti di diffusione ed avvezione funzione del tempo $V = D = \cos(t)$. Il valore di $\gamma = 1.8$ è fissato e (⊙ cerchio - blu) rappresenta la soluzione per $\beta = 0.2$, (+ croce - rosso) rappresenta la soluzione per $\beta = 0.4$, (* asterisco - giallo) rappresenta la soluzione per $\beta = 0.6$, (△ triangolo - viola) rappresenta la soluzione per $\beta = 0.6$, (□ quadrato - verde) rappresenta la soluzione per $\beta = 1.0$, (— linea continua - azzurro) rappresenta la soluzione della standard ADE. a) plot 2D per $t = 0.5$, b) plot 2D per $t = 1.0$

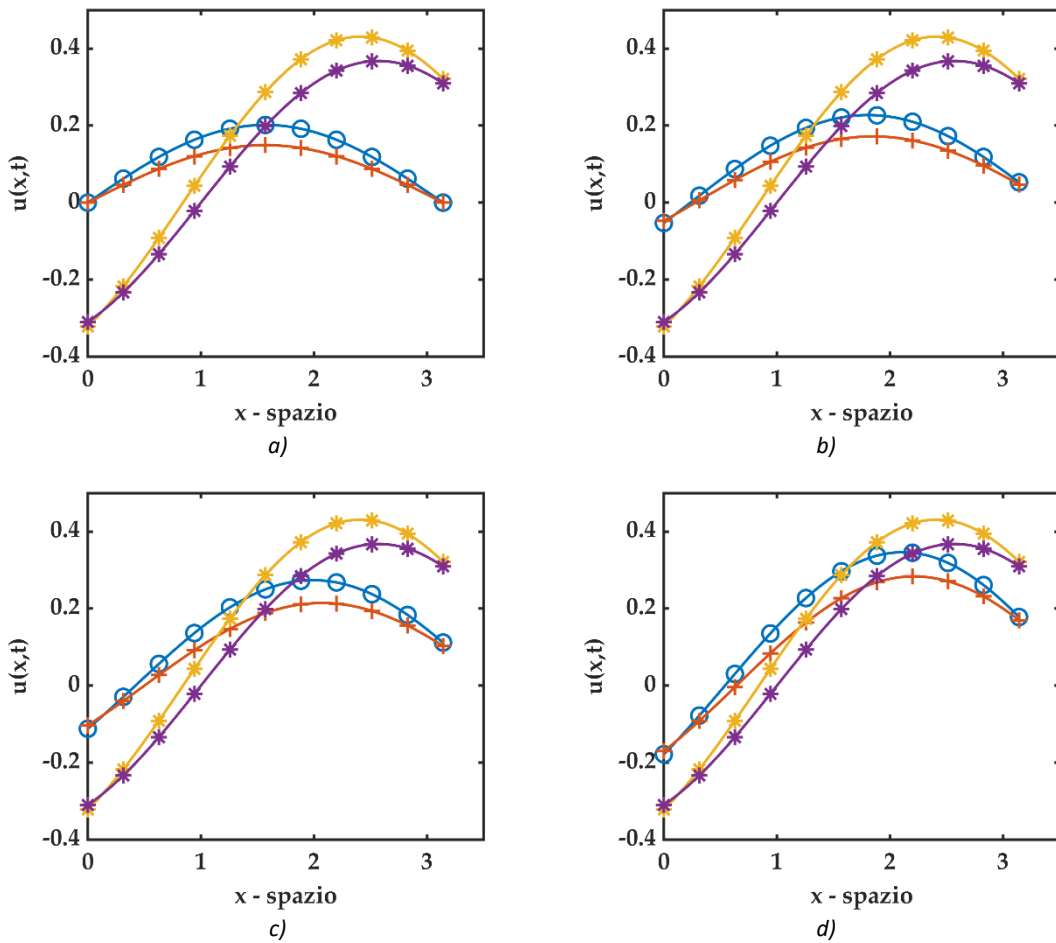


Figura 10-61 plot 2D di confronto fra soluzioni del problema differenziale frazionario S-FRADE con $u(x,0) = \sin(x)$ e $t = 1.0$ dove (* asterisco - viola) rappresenta la soluzione standard ADE e $D = V = \cos(t)$, (* asterisco - giallo) rappresenta la soluzione standard ADE e $D = V = \cos(t)$, (+ croce - rosso) rappresenta la soluzione S-FRADE $D = V = \cos(t)$, (⊙ cerchio - blu) rappresenta la soluzione S-FRADE e $D = V = \cos(t)$. Si fissa il valore di $\gamma = 1.8$. a) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.2$, b) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.4$, c) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.6$, d) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.8$.

10.3.2.2.1 Algoritmo Matlab

Di seguito viene riportato un estratto dello script Matlab utilizzato per i plot sopra riportati, soffermandosi sul calcolo della soluzione inerente il problema differenziale S-FRADE.

```
function [u_SPFADE_cos_t] =
uSP_fraz_cos_t_sinx(Nmax,x1,t1,Gamma,beta)
% uSP_fraz_cost => SPF = space fractional
% ADE = Advection Diffusion Equation
% cos_t = D(t)=V(t)=g(t)=cos(t)
% function per il calcolo della soluzione del seguente problema
% differenziale
%-----
% u,t + cos(t) u,beta = cos(t) u,Gamma 1 < Gamma <= 2 && 0 <
beta <= 1
% u(x,0) = sin(x)
%-----
u_SPFADE_cos_t = zeros(length(t1),length(x1));
```

```

SUM = 0;
for n = 0 : Nmax
    for j = 0 : n
        SUM = SUM + (-1)^j*nchoosek(n,j)*sin(x1 + ((n-
j)*Gamma+j*beta)*pi/2);
    end
    u_SPFADE_cos_t = u_SPFADE_cos_t +
(sin(t1)).^n/factorial(n)*SUM;
    SUM = 0;
end
end

```

10.3.2.3 S-FRADE con condizioni iniziali $u(x, 0) = \cos(x)$

Si consideri il seguente problema differenziale

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \cos(t) \cdot \frac{\partial^\beta u}{\partial x^\beta} = \cos(t) \cdot \frac{\partial^\gamma u}{\partial x^\gamma} \\ u(x, 0) = \cos(x) \end{cases} \quad (10.37)$$

Dove la derivata frazionaria è di Caputo con terminale $a = -\infty$. Utilizzando i risultati precedenti, l' n -esimo termine della decomposizione ADM assume la seguente formulazione

$$u_n(x, t) = \frac{\sin^n(t)}{n!} \cdot \sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{n}{j} \cos\left(x + \frac{[(n-j)\gamma + j\beta]\pi}{2}\right) \quad (10.38)$$

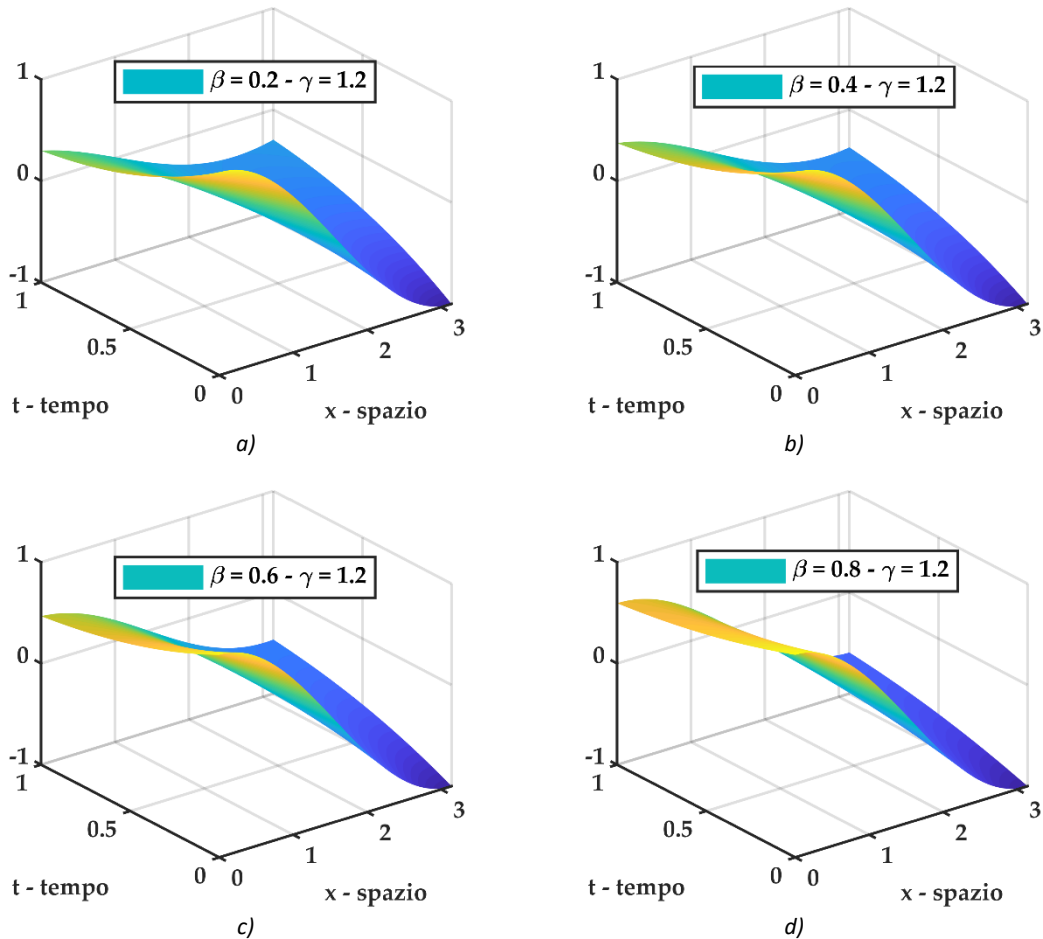


Figura 10-62 plot 3D della soluzione $u(x, t)$ del problema differenziale frazionario S-FRADE con $u(x, 0) = \cos(x)$ e coefficiente di diffusione ed avvezione funzione del tempo $V = D = \cos(t)$ per diversi valori dell'ordine di derivazione frazionario fissato $\gamma = 1.2$. a) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.2$, b) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.4$, c) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.6$, d) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.8$

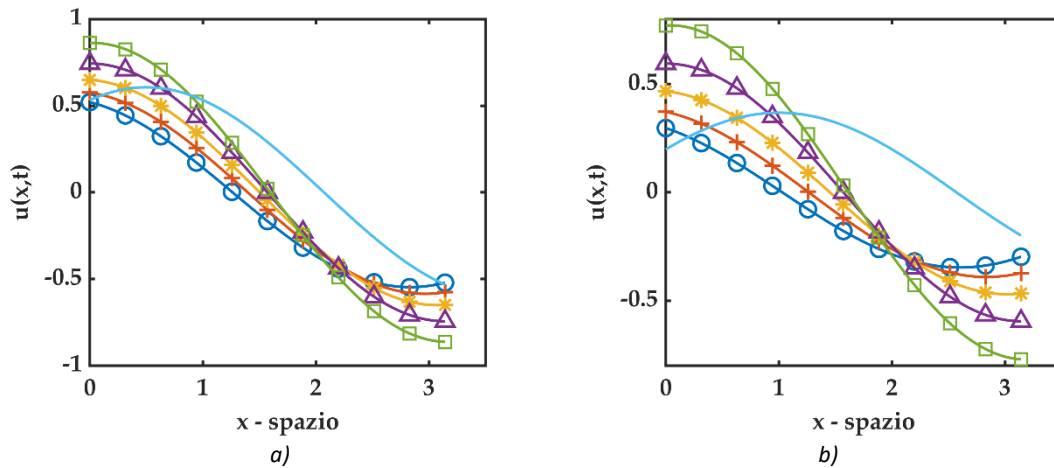


Figura 10-63 plot 2D di confronto fra soluzioni del problema differenziale frazionario S-FRADE con $u(x, 0) = \cos(x)$ e coefficienti di diffusione ed avvezione funzione del tempo $V = D = \cos(t)$. Il valore di $\gamma = 1.2$ è fissato e (⊙ cerchio - blu) rappresenta la soluzione per $\beta = 0.2$, (+ croce - rosso) rappresenta la soluzione per $\beta = 0.4$, (* asterisco - giallo) rappresenta la soluzione per $\beta = 0.6$, (Δ triangolo - viola) rappresenta la soluzione per $\beta = 0.6$, (□ quadrato - verde) rappresenta la soluzione per $\beta = 1.0$, (— linea continua - azzurro) rappresenta la soluzione della standard ADE. a) plot 2D per $t = 0.5$, b) plot 2D per $t = 1.0$

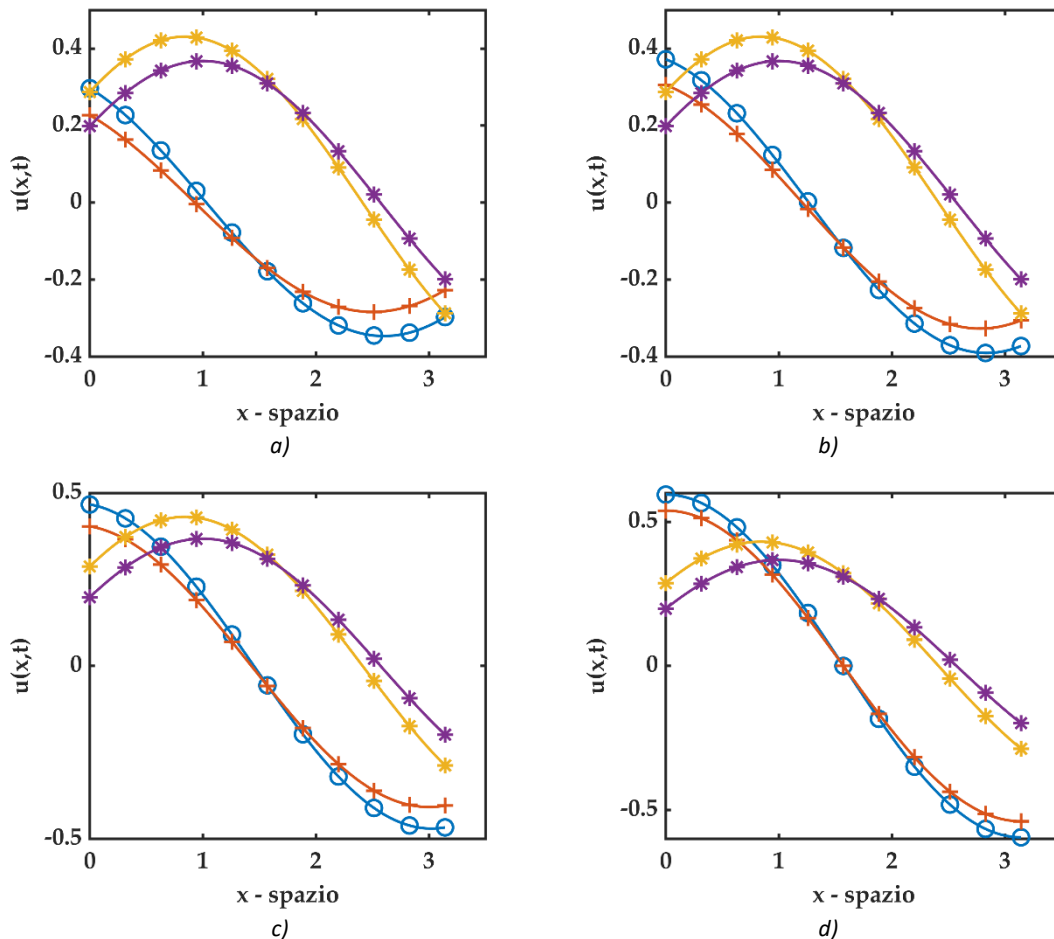


Figura 10-64 plot 2D di confronto per S-FRADE con $u(x, 0) = \cos(x)$ e $t = 1.0$ dove (* asterisco - viola) rappresenta la soluzione standard ADE e $D = V = \cos(t)$, (* asterisco - giallo) rappresenta la soluzione standard ADE e $D = V = \cos(t)$, (+ croce - rosso) rappresenta la soluzione S-FRADE $D = V = \cos(t)$, (⊙ cerchio - blu) rappresenta la soluzione S-FRADE e $D = V = \cos(t)$. Si fissa il valore di $\gamma = 1.2$. a) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.2$, b) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.4$, c) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.6$, d) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.8$.

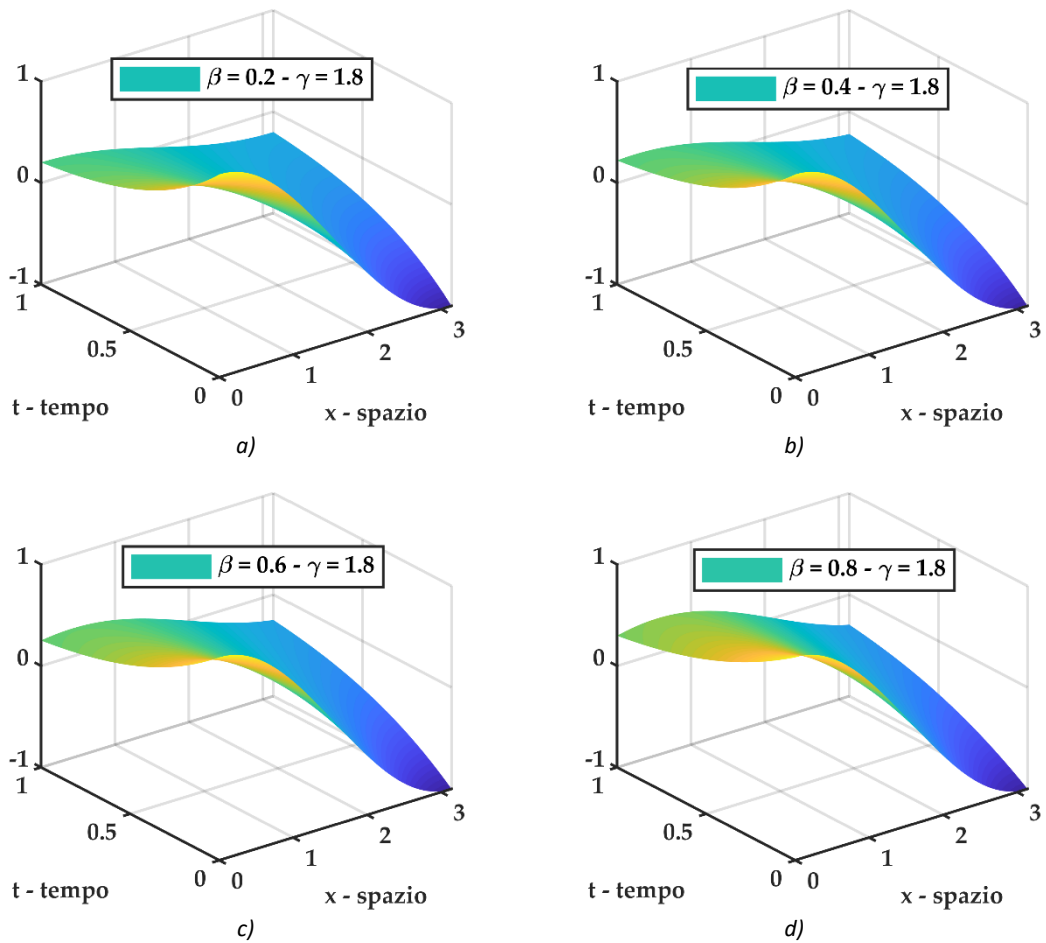


Figura 10-65 plot 3D della soluzione $u(x, t)$ del problema differenziale frazionario S-FRADE con $u(x, 0) = \cos(x)$ e coefficiente di diffusione ed avvezione funzione del tempo $V = D = \cos(t)$ per diversi valori dell'ordine di derivazione frazionario fissato $\gamma = 1.8$. a) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.2$, b) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.4$, c) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.6$, d) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.8$

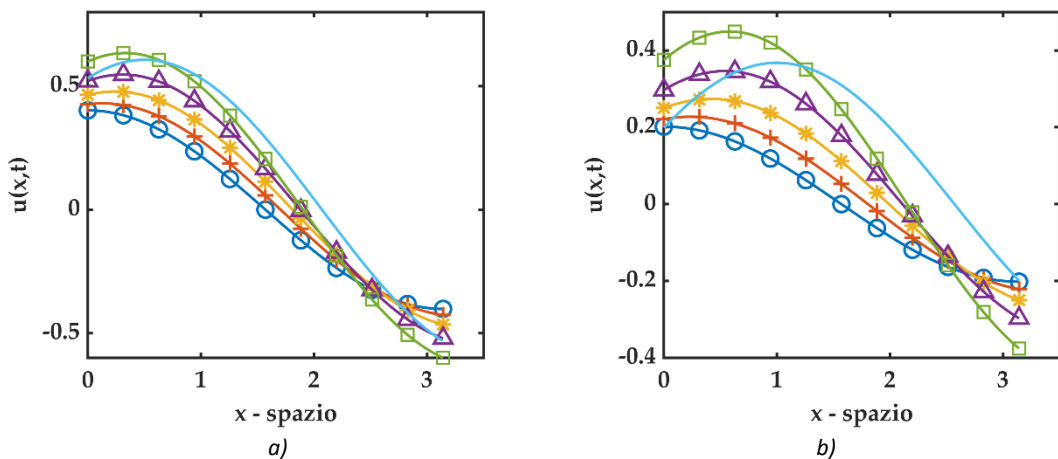


Figura 10-66 plot 2D di confronto fra soluzioni del problema differenziale frazionario S-FRADE con $u(x, 0) = \cos(x)$ e coefficienti di diffusione ed avvezione funzione del tempo $V = D = \cos(t)$. Il valore di $\gamma = 1.8$ è fissato e $(\odot$ cerchio - blu) rappresenta la soluzione per $\beta = 0.2$, $(+$ croce - rosso) rappresenta la soluzione per $\beta = 0.4$, $(*$ asterisco - giallo) rappresenta la soluzione per $\beta = 0.6$, $(\triangle$ triangolo - viola) rappresenta la soluzione per $\beta = 0.6$, $(\square$ quadrato - verde) rappresenta la soluzione per $\beta = 1.0$, $(-$ linea continua - azzurro) rappresenta la soluzione della standard ADE. a) plot 2D per $t = 0.5$, b) plot 2D per $t = 1.0$

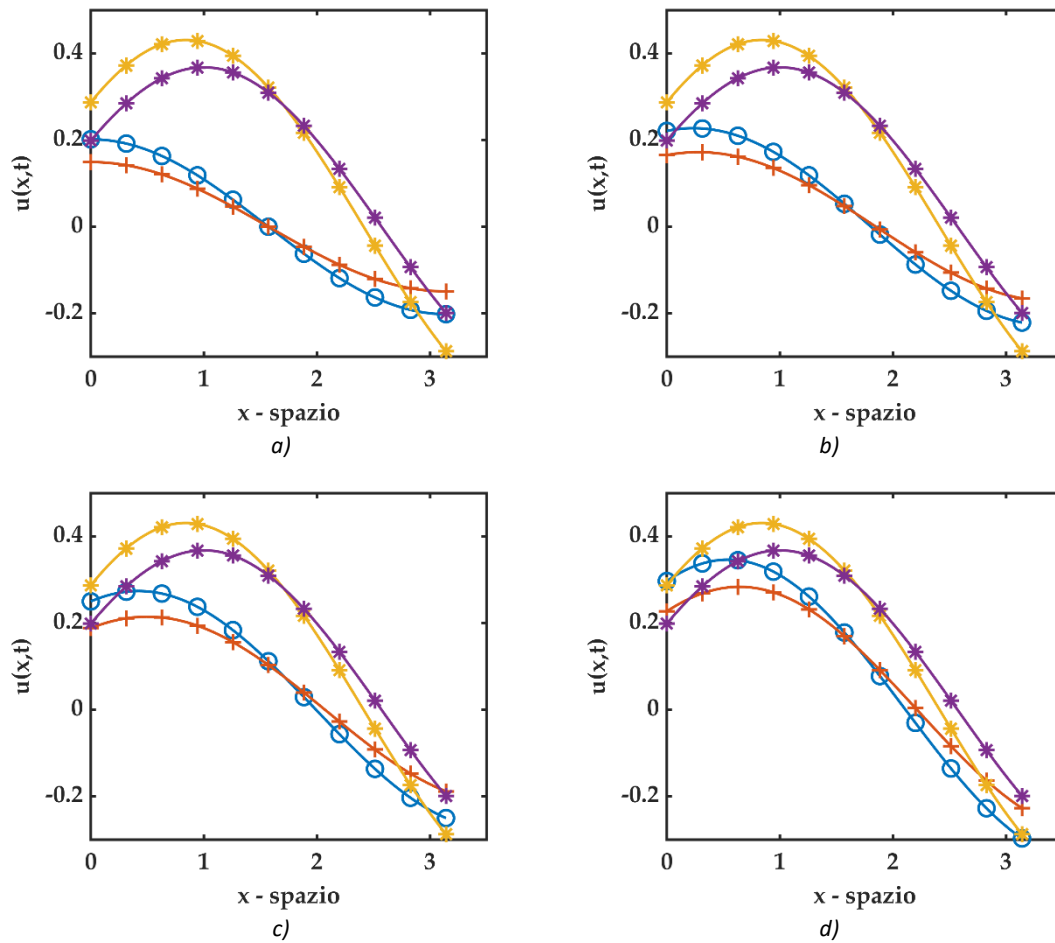


Figura 10-67 plot 2D di confronto fra soluzioni del problema differenziale frazionario S-FRADE con $u(x, 0) = \cos(x)$ e $t = 1.0$ dove (* asterisco - viola) rappresenta la soluzione standard ADE e $D = V = \cos(t)$, (* asterisco - giallo) rappresenta la soluzione standard ADE e $D = V = \cos(x)$, (+ croce - rosso) rappresenta la soluzione S-FRADE $D = V = \cos(t)$, (o cerchio - blu) rappresenta la soluzione S-FRADE e $D = V = \cos(x)$. Si fissa il valore di $\gamma = 1.8$. a) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.2$, b) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.4$, c) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.6$, d) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.8$.

10.3.2.3.1 Algoritmo Matlab

Di seguito viene riportato un estratto dello script Matlab utilizzato per i plot sopra riportati, soffermandosi sul calcolo della soluzione inerente il problema differenziale S-FRADE.

```
function [u_SPFADE_cos_t] =
uSP_fraz_cos_t_cosx(Nmax,x1,t1,Gamma,beta)
% uSP_fraz_cost => SPF = space fractional
% ADE = Advection Diffusion Equation
% cos_t = D(t)=V(t)=g(t)=cos(t)
% function per il calcolo della soluzione del seguente problema
% differenziale
% -----
% u,t + cos(t) u,beta = cos(t) u,Gamma 1 < Gamma <= 2 && 0 <
beta <= 1
% u(x,0) = cos(x)
% -----
u_SPFADE_cos_t = zeros(length(t1),length(x1));
```

```

SUM = 0;
for n = 0 : Nmax
    for j = 0 : n
        SUM = SUM + (-1)^j*nchoosek(n,j)*cos(x1 + ((n-
j)*Gamma+j*beta)*pi/2);
    end
    u_SPFADE_cos_t = u_SPFADE_cos_t +
(sin(t1)).^n/factorial(n)*SUM;
    SUM = 0;
end
end

```

10.3.2.4 S-FRADE con condizioni iniziali $u(x, 0) = e^{ax}$

Si consideri il seguente problema differenziale

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \cos(t) \cdot \frac{\partial^\beta u}{\partial x^\beta} = \cos(t) \cdot \frac{\partial^\gamma u}{\partial x^\gamma} \\ u(x, 0) = e^{ax} \end{cases} \quad (10.39)$$

Dove la derivata frazionaria è di Caputo con terminale $a = -\infty$.

Utilizzando i risultati precedenti, l' n -esimo termine della decomposizione ADM assume la seguente formulazione

$$u_n(x, t) = \frac{\sin^n(t)}{n!} \cdot \sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{n}{j} a^{(n-j)\gamma + j\beta} \cdot e^{ax} \quad (10.40)$$

Si considera un valore di $a = 0.5$.

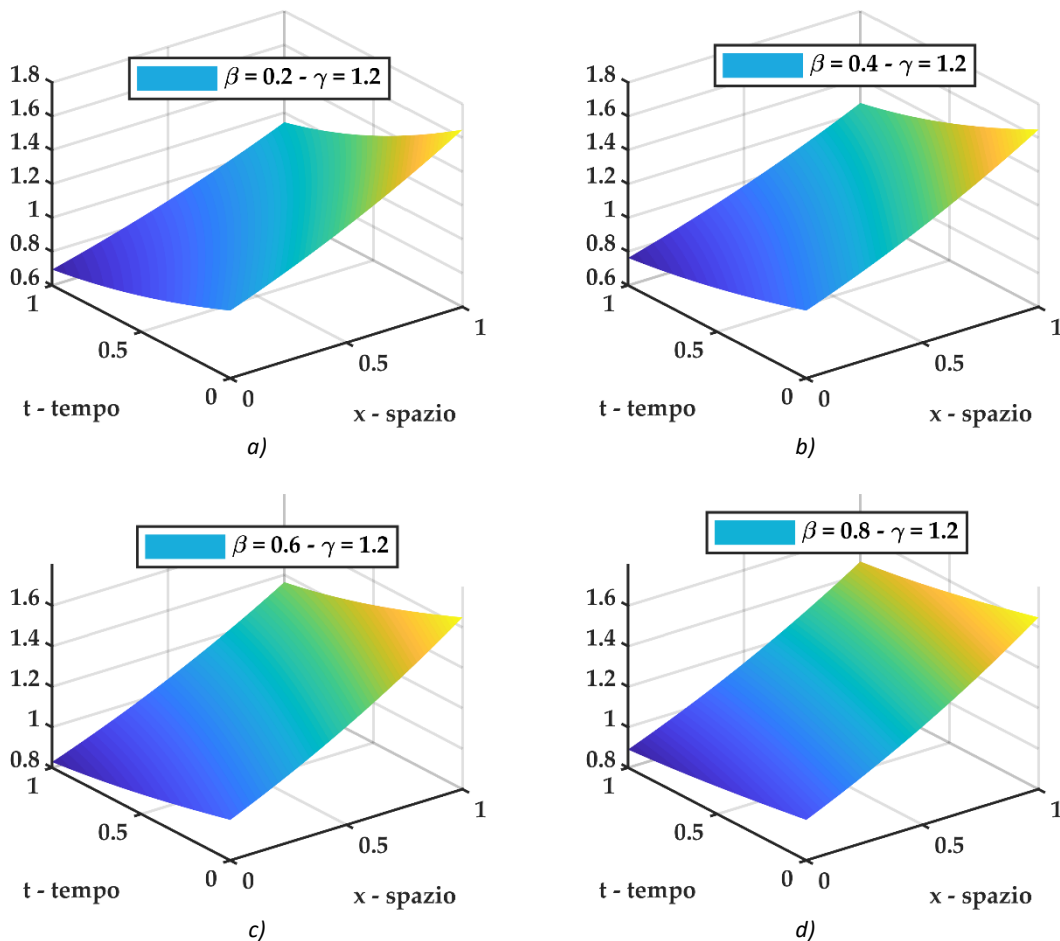


Figura 10-68 plot 3D della soluzione $u(x, t)$ del problema differenziale frazionario S-FRADE con $u(x, 0) = e^{ax}$ con $a = 0.50$ e coefficiente di diffusione ed avvezione funzione del tempo $V = D = \cos(t)$ per diversi valori dell'ordine di derivazione frazionario fissato $\gamma = 1.2$. a) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.2$, b) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.4$, c) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.6$, d) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.8$

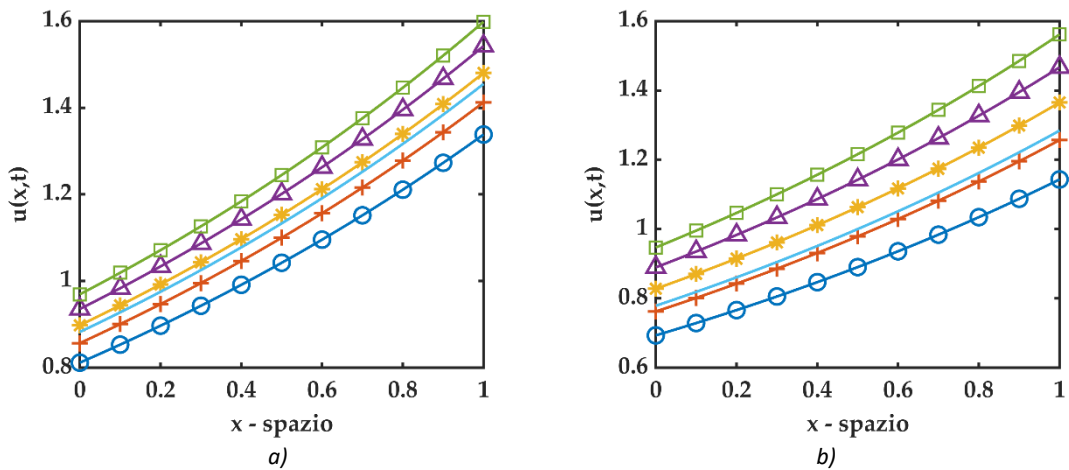


Figura 10-69 plot 2D di confronto fra soluzioni del problema differenziale frazionario S-FRADE con $u(x, 0) = e^{ax}$ con $a = 0.50$ e coefficienti di diffusione ed avvezione funzione del tempo $V = D = \cos(t)$. Il valore di $\gamma = 1.2$ è fissato e $(\odot$ cerchio - blu) rappresenta la soluzione per $\beta = 0.2$, $(+$ croce - rosso) rappresenta la soluzione per $\beta = 0.4$, $(*$ asterisco - giallo) rappresenta la soluzione per $\beta = 0.6$, $(\Delta$ triangolo - viola) rappresenta la soluzione per $\beta = 0.6$, $(\square$ quadrato - verde) rappresenta la soluzione per $\beta = 1.0$, $(-)$ linea continua - azzurro) rappresenta la soluzione della standard ADE. a) plot 2D per $t = 0.5$, b) plot 2D per $t = 1.0$

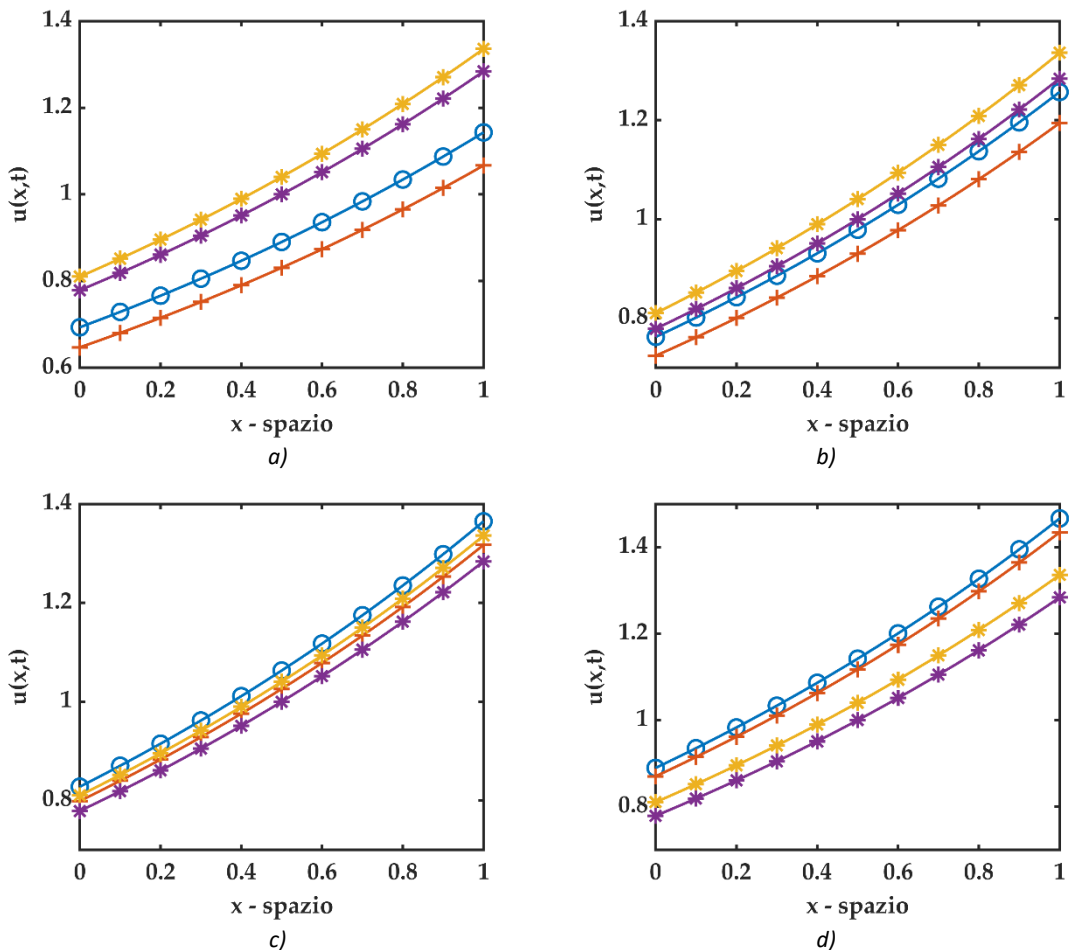


Figura 10-70 plot 2D per S-FRADE con $u(x, 0) = e^{ax}$ con $a = 0.50$ e $t = 1.0$ dove $(*$ asterisco - viola) rappresenta la soluzione standard ADE e $D = V = \cos(t)$, $(*$ asterisco - giallo) rappresenta la soluzione standard ADE e $D = V = \cos(t)$, $(+$ croce - rosso) rappresenta la soluzione S-FRADE $D = V = \cos(t)$, $(\odot$ cerchio - blu) rappresenta la soluzione S-FRADE e $D = V = \cos(t)$. Si fissa il valore di $\gamma = 1.2$. a) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.2$, b) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.4$, c) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.6$, d) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.8$.

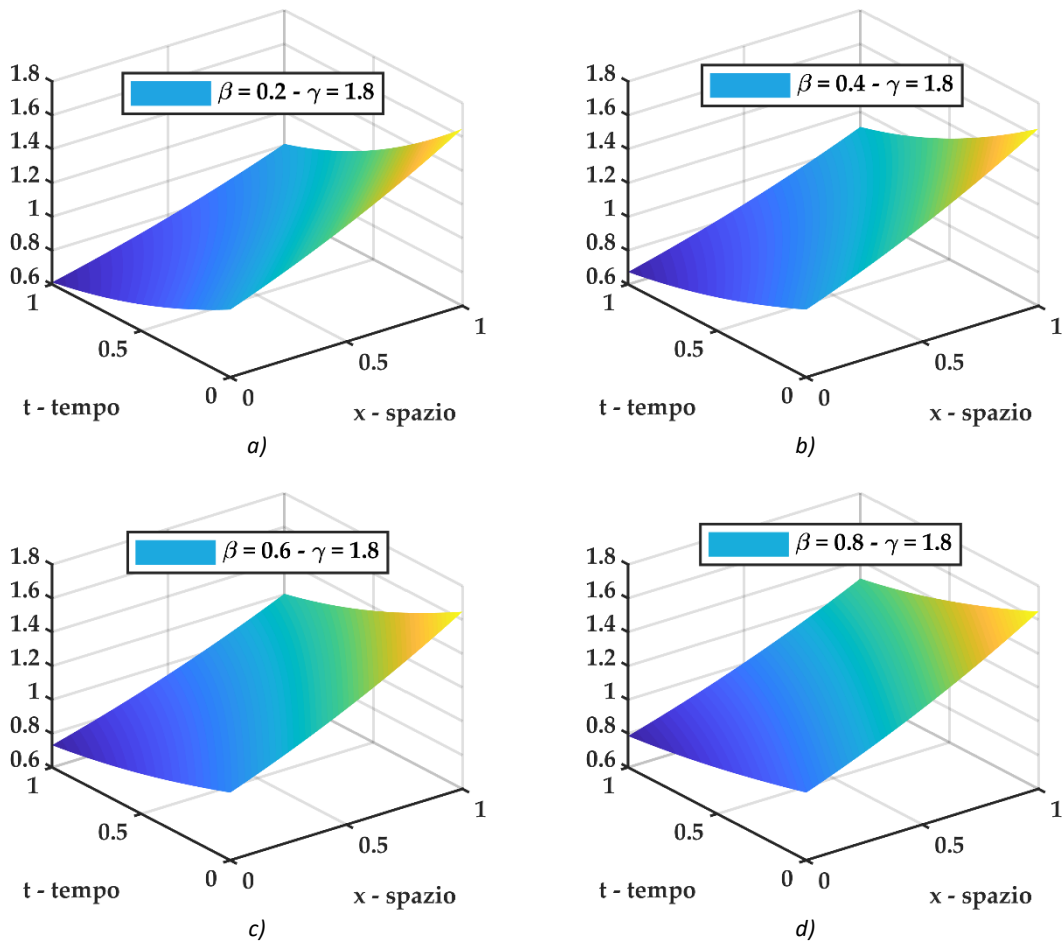


Figura 10-71 plot 3D della soluzione $u(x, t)$ del problema differenziale frazionario S-FRADE con $u(x, 0) = e^{ax}$ con $a = 0.50$ e coefficiente di diffusione ed avvezione funzione del tempo $V = D = \cos(t)$ per diversi valori dell'ordine di derivazione frazionario fissato $\gamma = 1.8$. a) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.2$, b) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.4$, c) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.6$, d) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.8$

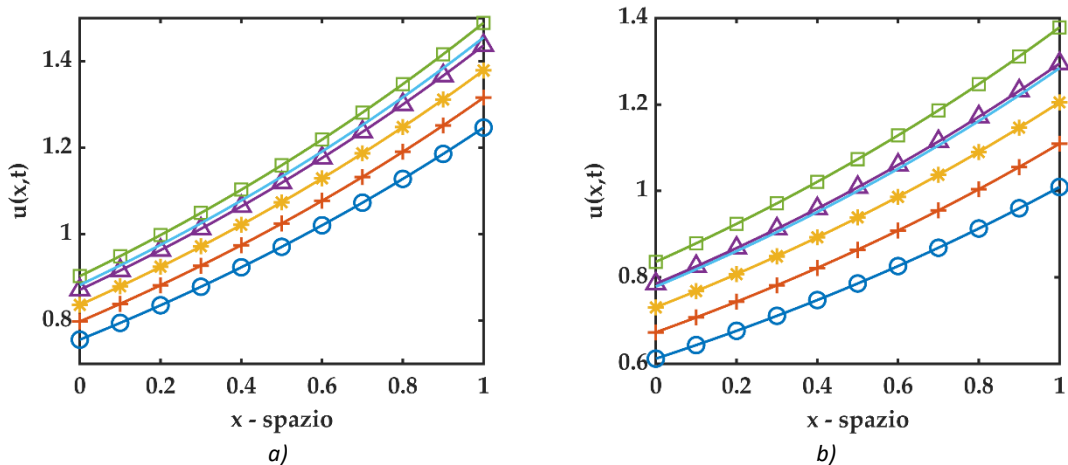


Figura 10-72 plot 2D di confronto fra soluzioni del problema differenziale frazionario S-FRADE con $u(x, 0) = e^{ax}$ con $a = 0.50$ e coefficienti di diffusione ed avvezione funzione del tempo $V = D = \cos(t)$. Il valore di $\gamma = 1.8$ è fissato e (⊙ cerchio - blu) rappresenta la soluzione per $\beta = 0.2$, (+ croce - rosso) rappresenta la soluzione per $\beta = 0.4$, (* asterisco - giallo) rappresenta la soluzione per $\beta = 0.6$, (△ triangolo - viola) rappresenta la soluzione per $\beta = 0.8$, (□ quadrato - verde) rappresenta la soluzione per $\beta = 1.0$, (— linea continua - azzurro) rappresenta la soluzione della standard ADE. a) plot 2D per $t = 0.5$, b) plot 2D per $t = 1.0$

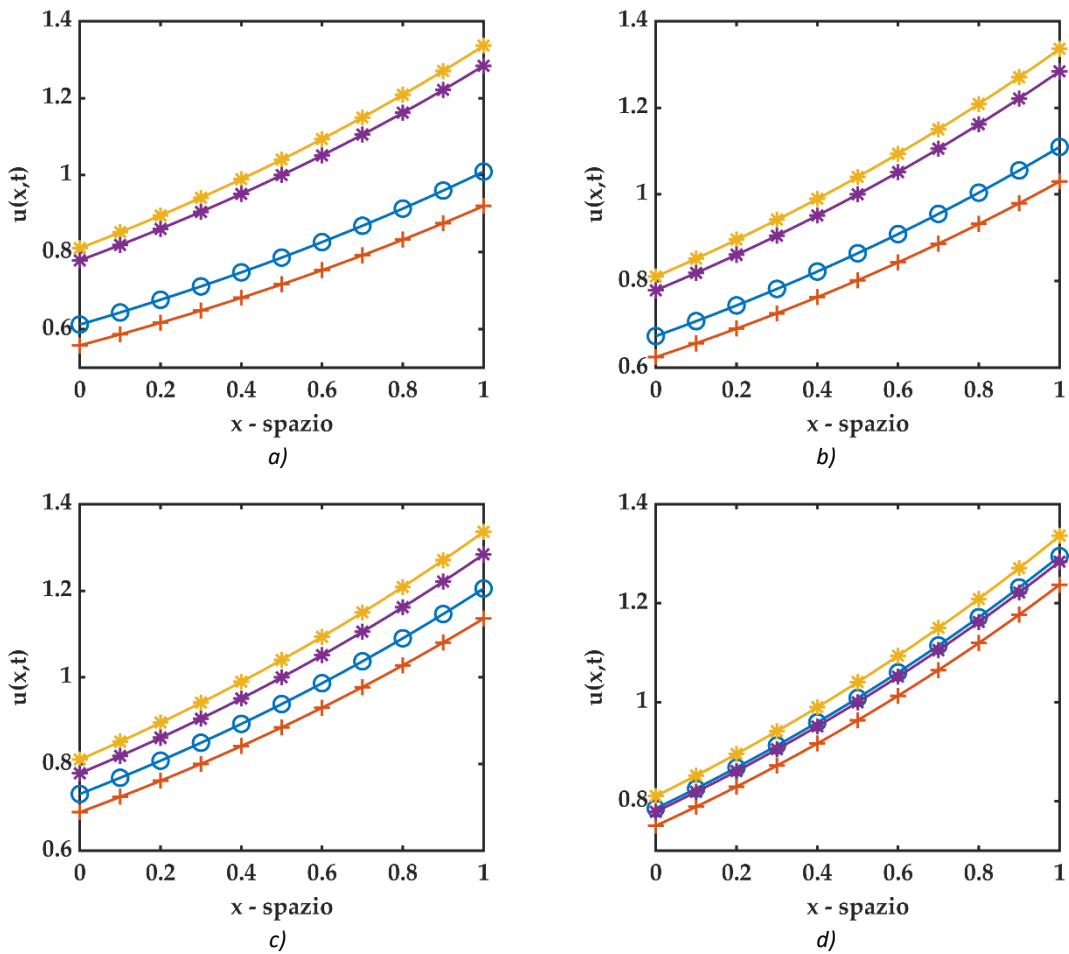


Figura 10-73 plot 2D di confronto fra soluzioni del problema differenziale frazionario S-FRADE con $u(x, 0) = e^{ax}$ con $a = 0.50$ e $t = 1.0$ dove (* asterisco - viola) rappresenta la soluzione standard ADE e $D = V = \text{cost}$, (* asterisco - giallo) rappresenta la soluzione standard ADE e $D = V = \cos(t)$, (+ croce - rosso) rappresenta la soluzione S-FRADE $D = V = \text{cost}$, (⊙ cerchio - blu) rappresenta la soluzione S-FRADE e $D = V = \cos(t)$. Si fissa il valore di $\gamma = 1.8$. a) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.2$, b) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.4$, c) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.6$, d) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.8$.

10.3.2.4.1 Algoritmo Matlab

Di seguito viene riportato un estratto dello script Matlab utilizzato per i plot sopra riportati, soffermandosi sul calcolo della soluzione inerente il problema differenziale S-FRADE.

```
function [u_SPFADE_cos_t] =
uSP_fraz_cos_t_eax(Nmax,x1,t1,Gamma,beta,a)
% uSP_fraz_cost => SPF = space fractional
% ADE = Advection Diffusion Equation
% cos_t = D(t)=V(t)=g(t)=cos(t)
% function per il calcolo della soluzione del seguente problema
% differenziale
%-----
% u,t + cos(t) u,beta = cos(t) u,Gamma 1 < Gamma <= 2 && 0 <
beta <= 1
% u(x,0) = e^(ax)
%-----
u_SPFADE_cos_t = zeros(length(t1),length(x1));
```

```

SUM = 0;
for n = 0 : Nmax
    for j = 0 : n
        SUM = SUM + (-1)^j*nchoosek(n,j)*a^((n-
j)*Gamma+j*beta)*exp(a*x1);
    end
    u_SPFADE_cos_t = u_SPFADE_cos_t +
(sin(t1)).^n/factorial(n)*SUM;
    SUM = 0;
end
end

```

10.3.3 $V = D = g(t) = \sin(t)$

10.3.3.1 S-FRADE con condizioni iniziali $u(x, 0) = x^\delta$

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \sin(t) \cdot \frac{\partial^\beta u}{\partial x^\beta} = \sin(t) \cdot \frac{\partial^\gamma u}{\partial x^\gamma} \\ u(x, 0) = x^\delta \end{cases} \quad (10.41)$$

Dove la derivata frazionaria è di Caputo con terminale $a = 0$.
 In questo contesto essendo l'equazione differenziale frazionaria solamente in spazio si considera ${}^{RL} [{}^{ng}]_0^n \mathbb{I}_t^\alpha (t) = [{}^{ng}]_0^n \mathbb{I}_t^n (t) = \int_0^t g(t) \int_0^t g(t) \int_0^t g(t) \dots dt dt dt$

$n = 1$	\rightarrow	$[g]_0^1 \mathbb{I}_t^1 (t) = \int_0^t g(t) dt$	$=$	$\left(-\frac{\cos(t)}{0!1!} + \frac{1}{1!0!} \right)$
$n = 2$	\rightarrow	$[{}^2g]_0^2 \mathbb{I}_t^2 (t) = \int_0^t g(t) [g]_0^1 \mathbb{I}_t^1 (t) dt$	$=$	$\left(\frac{\cos^2(t)}{0!2!} - \frac{\cos(t)}{1!1!} + \frac{1}{2!0!} \right)$
$n = 3$	\rightarrow	$[{}^3g]_0^3 \mathbb{I}_t^3 (t) = \int_0^t g(t) [{}^2g]_0^2 \mathbb{I}_t^2 (t) dt$	$=$	$\left(-\frac{\cos^3(t)}{0!3!} + \frac{\cos^2(t)}{1!2!} - \frac{\cos(t)}{2!1!} + \frac{1}{3!0!} \right)$
$n = 4$	\rightarrow	$[{}^4g]_0^4 \mathbb{I}_t^4 (t) = \int_0^t g(t) [{}^3g]_0^3 \mathbb{I}_t^3 (t) dt$	$=$	$\left(\frac{\cos^4(t)}{0!4!} - \frac{\cos^3(t)}{1!3!} + \frac{\cos^2(t)}{2!2!} - \frac{\cos(t)}{3!1!} + \frac{1}{4!0!} \right)$
\vdots		\vdots		\vdots
n	\rightarrow	$[{}^{ng}]_0^n \mathbb{I}_t^n (t) = \int_0^t g(t) [{}^{ng-1}]_0^{(n-1)} \mathbb{I}_t^{(n-1)} (t) dt$	$=$	$(*)$

(*)

$$= \frac{1}{\text{Diag}[\mathbb{A} \otimes (\text{Ref} \mathbb{A})^T]} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} +1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{ij} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (-1)^{j+1} \end{pmatrix}}_{[n+1] \times [n+1]} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \cos t \\ \cos^2 t \\ \vdots \\ \cos^{(n-1)} t \\ \cos^n t \end{pmatrix}$$

Con

$$\mathbb{A} = [n! \quad (n-1)! \quad (n-2)! \quad \dots \quad 2! \quad 1! \quad 0!]$$

$$(RefA)^T = \begin{pmatrix} 0! \\ 1! \\ 2! \\ \vdots \\ (n-2)! \\ (n-1)! \\ n! \end{pmatrix}$$

$$A \otimes (RefA)^T = \begin{pmatrix} n! 0! & n! 1! & n! 2! & \dots & n! (n-1)! & n! n! \\ (n-1)! 0! & (n-1)! 1! & (n-1)! 2! & \dots & (n-1)! (n-1)! & (n-1)! n! \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1! 0! & 1! 1! & 1! 2! & \dots & 1! (n-1)! & 1! n! \\ 0! 0! & 0! 1! & 0! 2! & \dots & 0! (n-1)! & 0! n! \end{pmatrix}$$

$$Diag[A \otimes (RefA)^T] = [n! 0! \quad (n-1)! 1! \quad (n-2)! 2! \quad \dots \quad 2! (n-2)! \quad 1! (n-1)! \quad 0! n!]$$

Quindi l' n -esimo termine della decomposizione ADM assume la seguente formulazione:

$$u_n(x, t) = \left({}^{RL} \mathbb{J}_0^{n\alpha} \right) \cdot \sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{n}{j} \left[D_x^{(n-j)\gamma + j\beta} \right] f(x) =$$

$$= \frac{1}{Diag[A \otimes (RefA)^T]} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} +1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{ij} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (-1)^{j+1} \end{pmatrix}}_{[n+1] \times [n+1]} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \cos t \\ \cos^2 t \\ \vdots \\ \cos^{(n-1)} t \\ \cos^n t \end{pmatrix} \quad (10.42)$$

$$\cdot \sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{n}{j} \left\{ \frac{\Gamma(\delta + 1)}{\Gamma(\delta + 1 - [(n-j)\gamma + j\beta]} \cdot x^{-[(n-j)\gamma + j\beta]} \right\} \cdot x^\delta$$

Si assume un valore di $\delta = 3$.

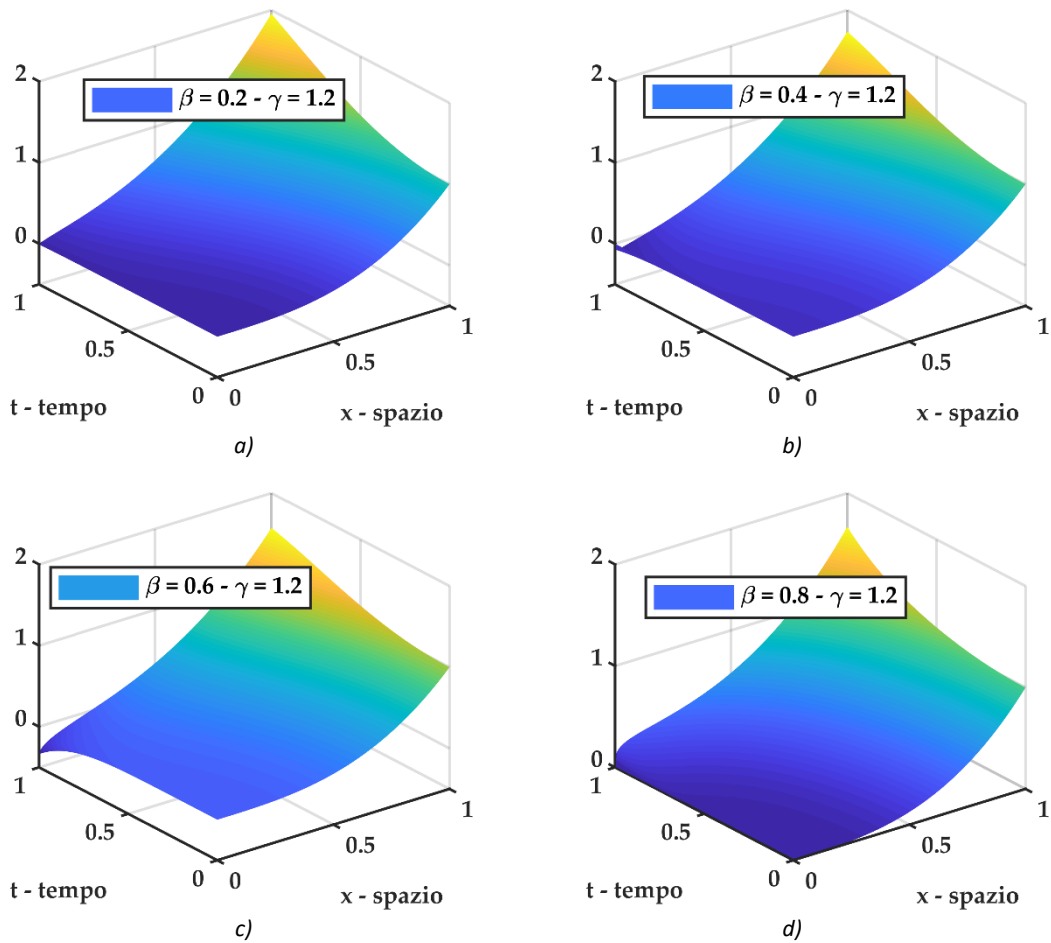


Figura 10-74 plot 3D della soluzione $u(x, t)$ del problema differenziale frazionario S-FRADE con $u(x, 0) = x^\delta$ con $\delta = 3$ e coefficiente di diffusione ed avvezione funzione del tempo $V = D = \sin(t)$ per diversi valori dell'ordine di derivazione frazionario fissato $\gamma = 1.2$. a) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.2$, b) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.4$, c) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.6$, d) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.8$

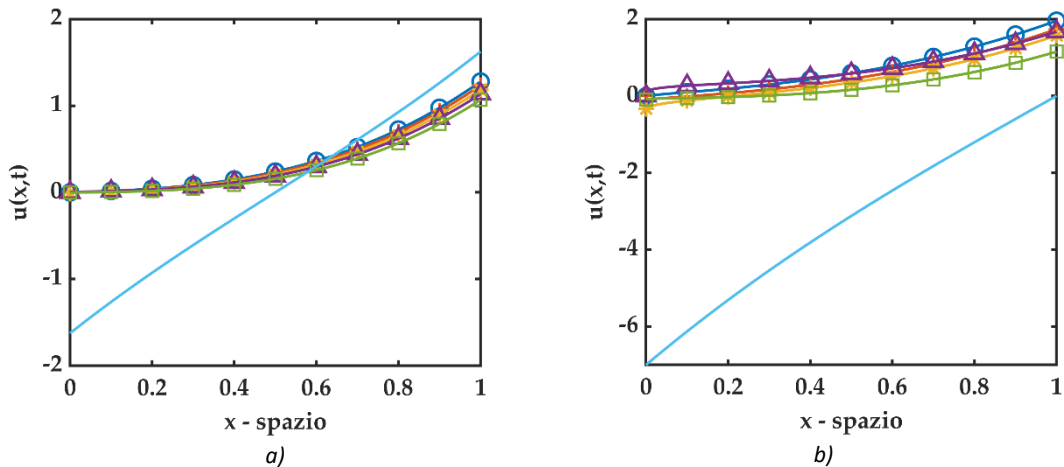


Figura 10-75 plot 2D di confronto fra soluzioni del problema differenziale frazionario S-FRADE con $u(x, 0) = x^\delta$ con $\delta = 3$ e coefficienti di diffusione ed avvezione funzione del tempo $V = D = \sin(t)$. Il valore di $\gamma = 1.2$ è fissato e (⊙ cerchio - blu) rappresenta la soluzione per $\beta = 0.2$, (+ croce - rosso) rappresenta la soluzione per $\beta = 0.4$, (* asterisco - giallo) rappresenta la soluzione per $\beta = 0.6$, (△ triangolo - viola) rappresenta la soluzione per $\beta = 0.6$, (□ quadrato - verde) rappresenta la soluzione per $\beta = 1.0$, (— linea continua - azzurro) rappresenta la soluzione della standard ADE. a) plot 2D per $t = 0.5$, b) plot 2D per $t = 1.0$

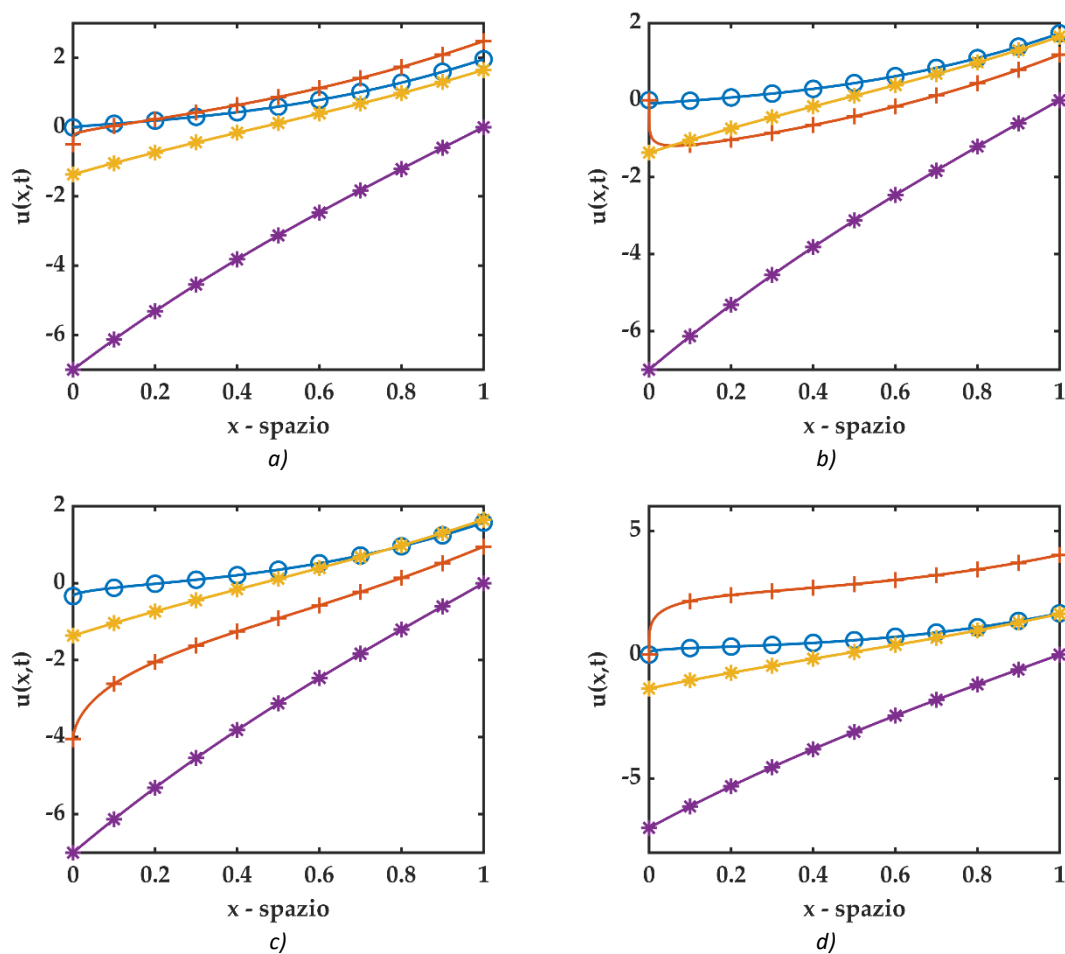


Figura 10-76 plot 2D di confronto fra soluzioni del problema differenziale frazionario S-FRADE con $u(x, 0) = x^\delta$ con $\delta = 3$ e $t = 1.0$ dove (* asterisco - viola) rappresenta la soluzione standard ADE e $D = V = \text{cost}$, (* asterisco - giallo) rappresenta la soluzione standard ADE e $D = V = \sin(t)$, (+ croce - rosso) rappresenta la soluzione S-FRADE $D = V = \text{cost}$, (⊙ cerchio - blu) rappresenta la soluzione S-FRADE e $D = V = \sin(t)$. Si fissa il valore di $\gamma = 1.2$. a) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.2$, b) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.4$, c) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.6$, d) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.8$.

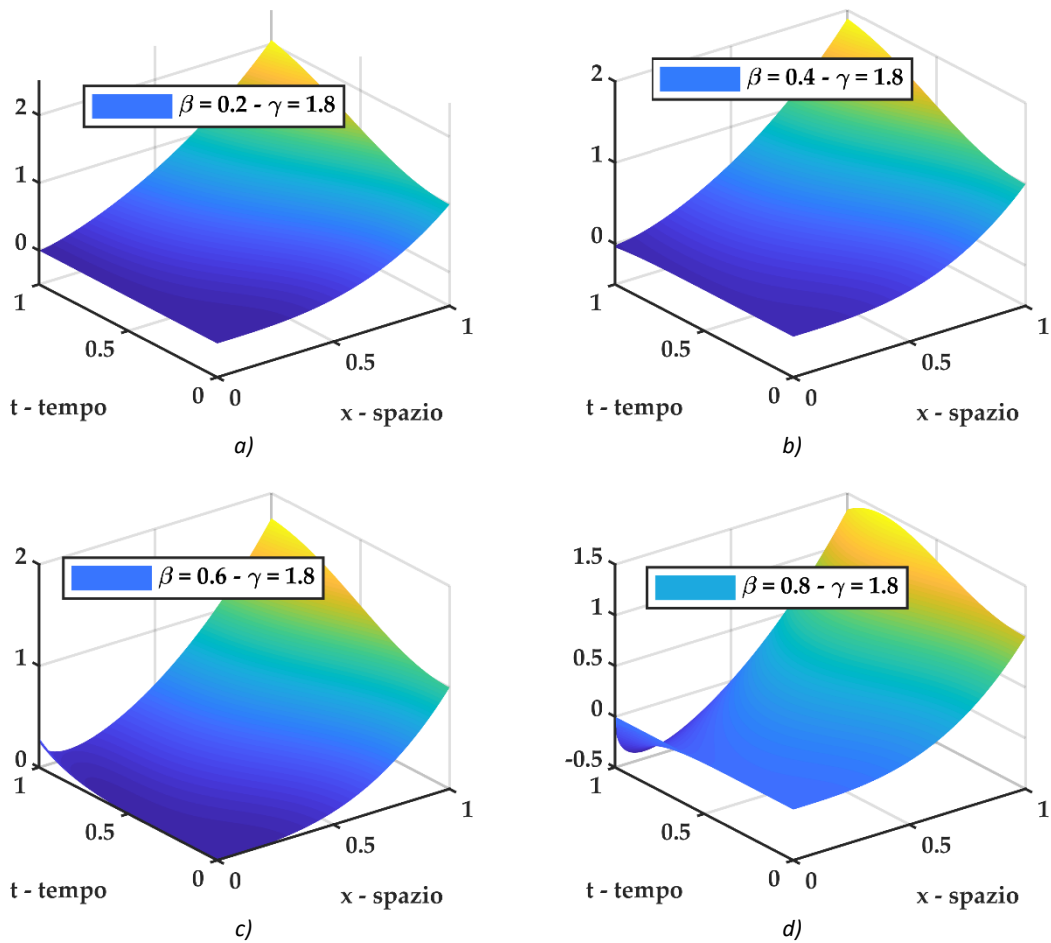


Figura 10-77 plot 3D della soluzione $u(x, t)$ del problema differenziale frazionario S-FRADE con $u(x, 0) = x^\delta$ con $\delta = 3$ e coefficiente di diffusione ed avvezione funzione del tempo $V = D = \sin(t)$ per diversi valori dell'ordine di derivazione frazionario fissato $\gamma = 1.8$. a) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.2$, b) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.4$, c) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.6$, d) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.8$

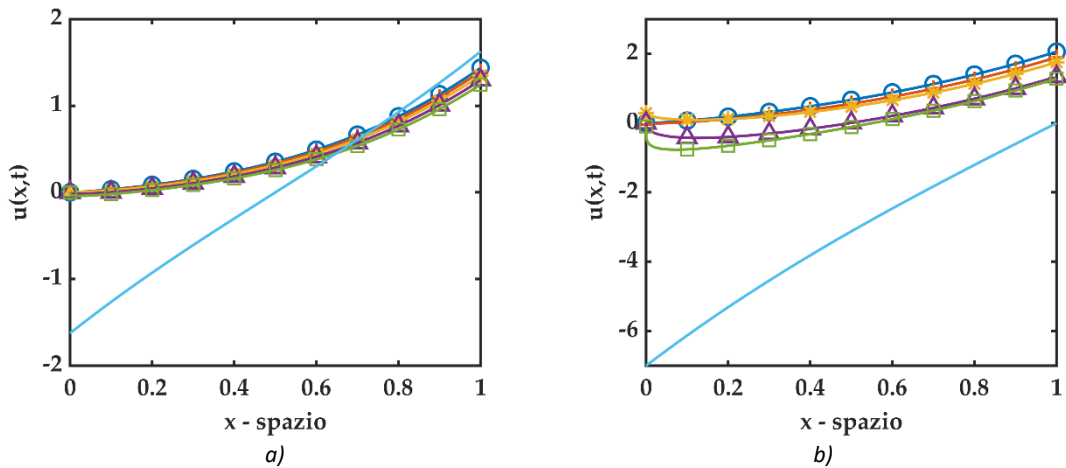


Figura 10-78 plot 2D di confronto fra soluzioni del problema differenziale frazionario S-FRADE con $u(x, 0) = x^\delta$ con $\delta = 3$ e coefficienti di diffusione ed avvezione funzione del tempo $V = D = \sin(t)$. Il valore di $\gamma = 1.8$ è fissato e (O cerchio - blu) rappresenta la soluzione per $\beta = 0.2$, (+ croce - rosso) rappresenta la soluzione per $\beta = 0.4$, (* asterisco - giallo) rappresenta la soluzione per $\beta = 0.6$, (Δ triangolo - viola) rappresenta la soluzione per $\beta = 0.6$, (□ quadrato - verde) rappresenta la soluzione per $\beta = 1.0$, (- linea continua - azzurro) rappresenta la soluzione della standard ADE. a) plot 2D per $t = 0.5$, b) plot 2D per $t = 1.0$

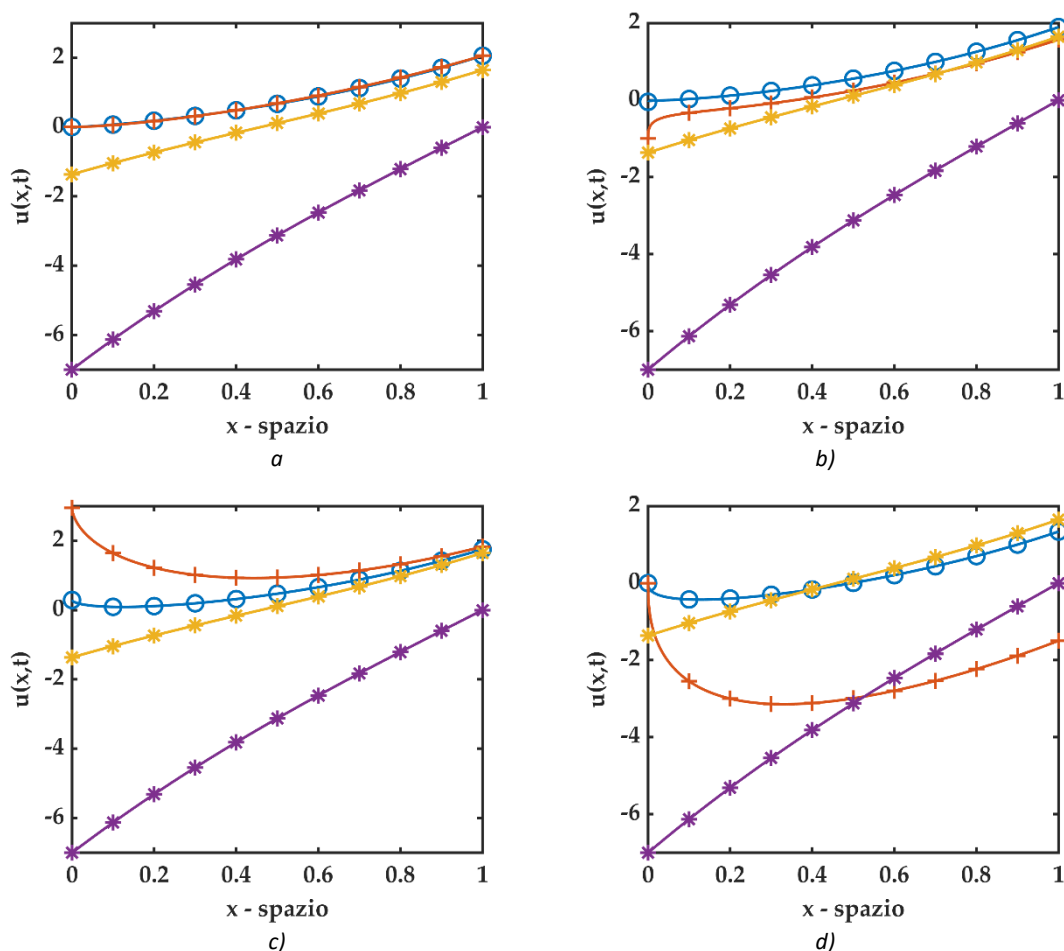


Figura 10-79 plot 2D di confronto fra soluzioni del problema differenziale frazionario S-FRADE con $u(x, 0) = x^\delta$ con $\delta = 3$ e $t = 1.0$ dove (* asterisco - viola) rappresenta la soluzione standard ADE e $D = V = \text{cost}$, (* asterisco - giallo) rappresenta la soluzione standard ADE e $D = V = \sin(t)$, (+ croce - rosso) rappresenta la soluzione S-FRADE $D = V = \text{cost}$, (⊙ cerchio - blu) rappresenta la soluzione S-FRADE e $D = V = \sin(t)$. Si fissa il valore di $\gamma = 1.8$. a) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.2$, b) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.4$, c) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.6$, d) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.8$.

10.3.3.1.1 Algoritmo Matlab

Di seguito viene riportato un estratto dello script Matlab utilizzato per i plot sopra riportati, soffermandosi sul calcolo della soluzione inerente il problema differenziale S-FRADE. La function `[f_cost,Coeff] = Cr_cost(r,x1,t1)` è già stata riportata nel paragrafo 7.4.3.2.

```
function [u_SPFADE_sint] =
uSP_fraz_sint_xdelta(Nmax,x1,t1,Gamma,beta,delta)
% uSP_fraz_cost => SPF = space fractional
%                               ADE = Advection Diffusion Equations
%                               sin(t) = D(t)=V(t)=g(t)=sin(t)
% function per il calcolo della soluzione del seguente problema
% differenziale
%-----
% u,t + sin(t) u,beta = sin(t) u,gamma      1 < Gamma <= 2 && 0 <
beta <= 1
% u(x,0) = x^delta
```

```

%-----
% calcolo delle componenti dell'integrazione temporale
% C sta per COMPONENTE ed il numero davanti è il riferimento a
% quale componente della decomposizione Adomia si riferisce
% Costruisco la matrice C dove C(:,r) è Cr, cioè l' r-esimo
% coefficiente di integrazione temporale nella serie ADM

% inizializzazione delle variabili
C = zeros(length(t1),Nmax);
Cr = zeros(length(t1),1);

for r = 1:Nmax
    % function per il calcolo delle componenti dell' r-esimo
    % coefficiente di integrazione temporale nella serie ADM
    [f_cost,Coeff] = Cr_cost(r,x1,t1);

    for l = 1:r+1
        Cr = Cr + f_cost(:,l)./Coeff(l);
    end
    C(:,r) = Cr;
    Cr = zeros(length(t1),1);
end
u_SPFADE_sint = zeros(length(t1),length(x1));
SUM = 0;
for n = 0 : Nmax
    if n == 0
        u_SPFADE_sint = x1.^delta;
    else
        for j = 0 : n
            M_1 = floor((n-j)*Gamma+j*beta);
            if M_1 >= delta && M_1 ~= (n-j)*Gamma+j*beta
                SUM = SUM;
            elseif M_1 > delta
                SUM = SUM;
            else
                SUM = SUM + (-
1)^j*nchoosek(n,j)*gamma(delta+1)/gamma(delta+1-((n-
j)*Gamma+j*beta))*x1.^(delta-((n-j)*Gamma+j*beta));
            end
        end
        u_SPFADE_sint = u_SPFADE_sint + C(:,n)*SUM;
        SUM = 0;
    end
end
end
end

```

10.3.3.2 S-FRADE con condizioni iniziali $u(x, 0) = \sin(x)$

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \sin(t) \cdot \frac{\partial^\beta u}{\partial x^\beta} = \sin(t) \cdot \frac{\partial^\gamma u}{\partial x^\gamma} \\ u(x, 0) = \sin(x) \end{cases} \quad (10.43)$$

Dove la derivata frazionaria è di Caputo con terminale $a = -\infty$.
Utilizzando i risultati precedenti, l' n -esimo termine della decomposizione ADM assume la seguente formulazione

$$u_n(x, t) = \frac{1}{\text{Diag}[A \otimes (\text{Ref} A)^T]} \cdot \begin{pmatrix} +1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{ij} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (-1)^{j+1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \cos t \\ \cos^2 t \\ \vdots \\ \cos^{(n-1)} t \\ \cos^n t \end{pmatrix} \quad (10.44)$$

$$\cdot \sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{n}{j} \sin\left(x + \frac{[(n-j)\gamma + j\beta]\pi}{2}\right)$$

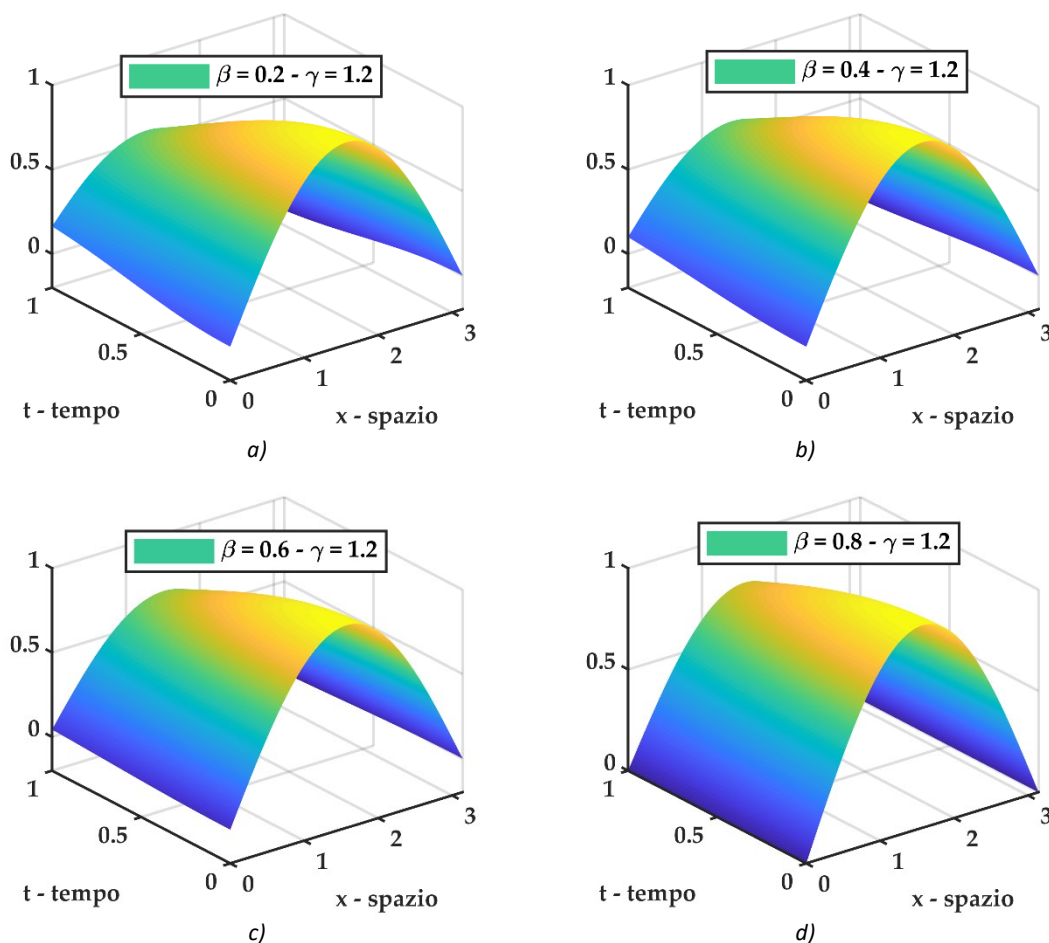


Figura 10-80 plot 3D della soluzione $u(x, t)$ del problema differenziale frazionario S-FRADE con $u(x, 0) = \sin(x)$ e coefficiente di diffusione ed avvezione funzione del tempo $V = D = \sin(t)$ per diversi valori dell'ordine di derivazione frazionario fissato $\gamma = 1.2$. a) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.2$, b) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.4$, c) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.6$, d) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.8$

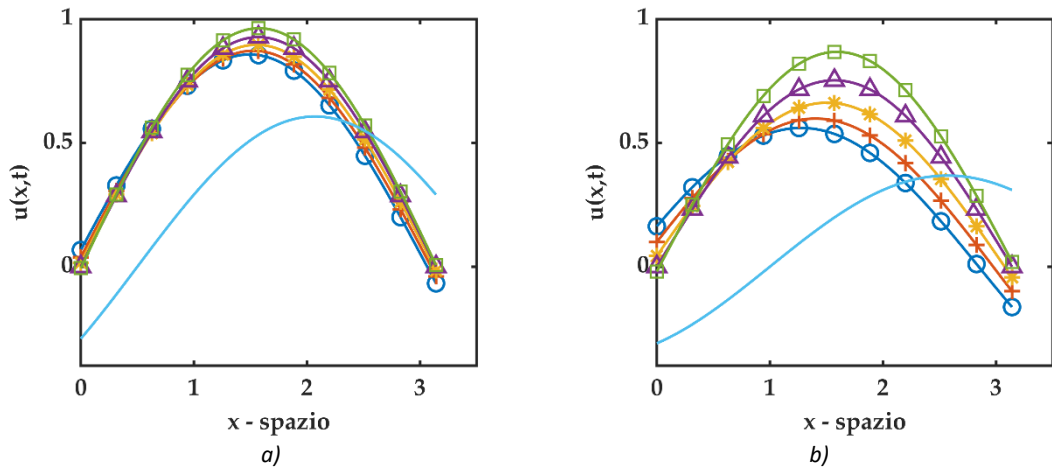


Figura 10-81 plot 2D di confronto fra soluzioni del problema differenziale frazionario S-FRADE con $u(x,0) = \sin(x)$ e coefficienti di diffusione ed avvezione funzione del tempo $V = D = \sin(t)$. Il valore di $\gamma = 1.2$ è fissato e $(\odot$ cerchio - blu) rappresenta la soluzione per $\beta = 0.2$, $(+)$ croce - rosso) rappresenta la soluzione per $\beta = 0.4$, $(*)$ asterisco - giallo) rappresenta la soluzione per $\beta = 0.6$, (\triangle) triangolo - viola) rappresenta la soluzione per $\beta = 0.6$, (\square) quadrato - verde) rappresenta la soluzione per $\beta = 1.0$, $(-)$ linea continua - azzurro) rappresenta la soluzione della standard ADE. a) plot 2D per $t = 0.5$, b) plot 2D per $t = 1.0$

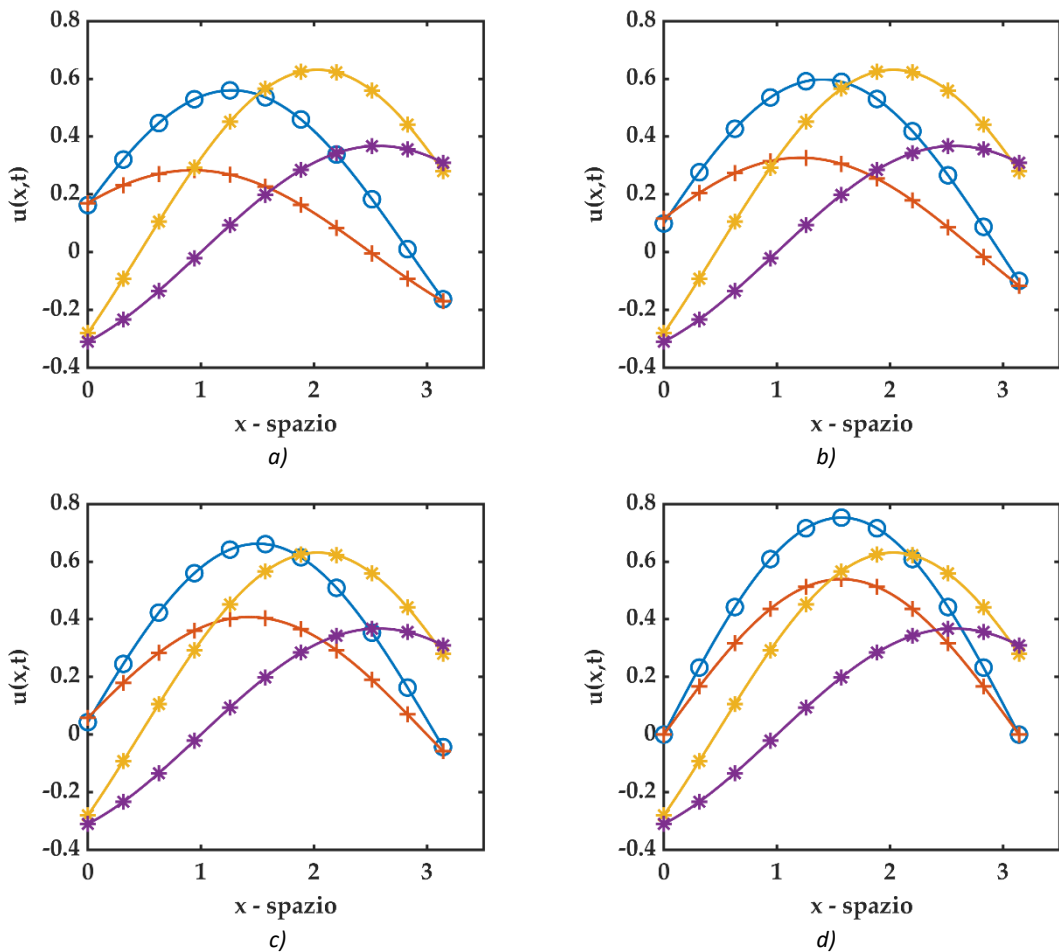


Figura 10-82 plot 2D per S-FRADE con $u(x,0) = \sin(x)$ e $t = 1.0$ dove $(*)$ asterisco - viola) rappresenta la soluzione standard ADE e $D = V = \text{cost}$, $(*)$ asterisco - giallo) rappresenta la soluzione standard ADE e $D = V = \sin(t)$, $(+)$ croce - rosso) rappresenta la soluzione S-FRADE $D = V = \text{cost}$, (\odot) cerchio - blu) rappresenta la soluzione S-FRADE e $D = V = \sin(t)$. Si fissa il valore di $\gamma = 1.2$. a) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.2$, b) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.4$, c) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.6$, d) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.8$.

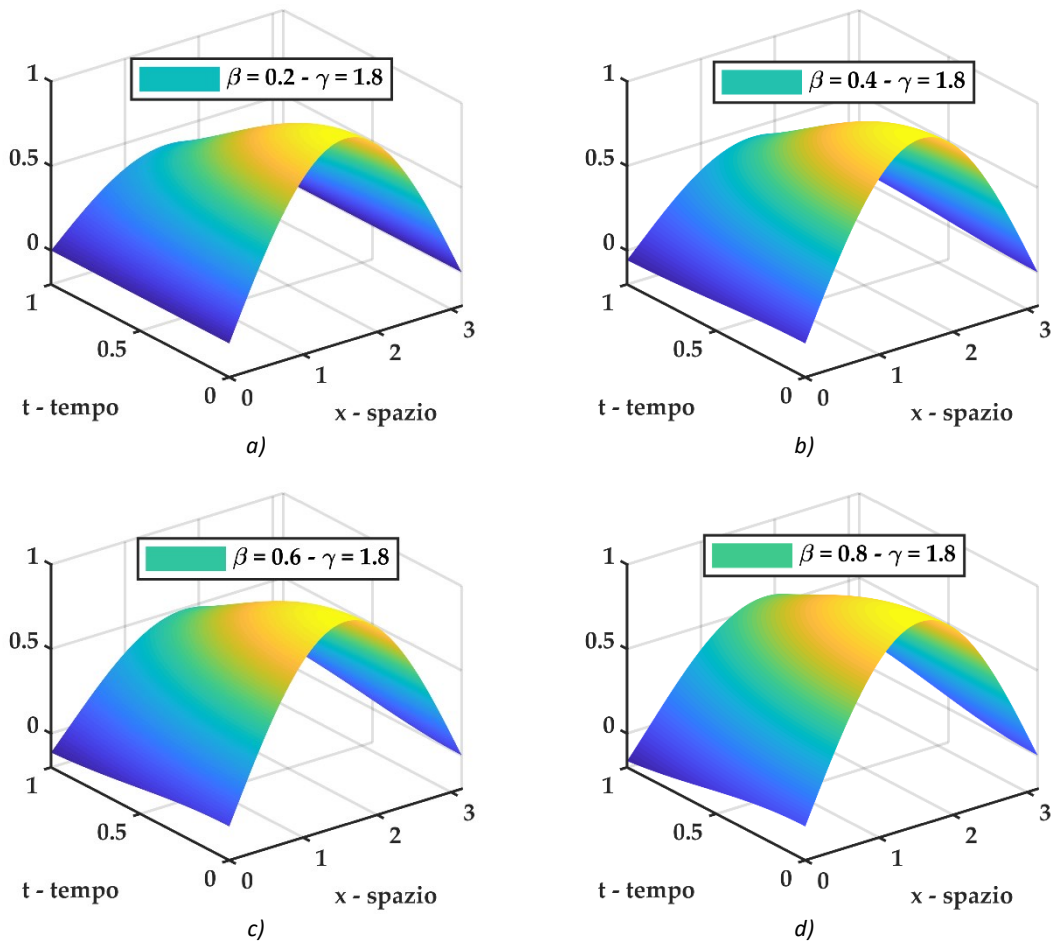


Figura 10-83 plot 3D della soluzione $u(x, t)$ del problema differenziale frazionario S-FRADE con $u(x, 0) = \sin(x)$ e coefficiente di diffusione ed avvezione funzione del tempo $V = D = \sin(t)$ per diversi valori dell'ordine di derivazione frazionario fissato $\gamma = 1.8$. a) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.2$, b) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.4$, c) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.6$, d) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.8$

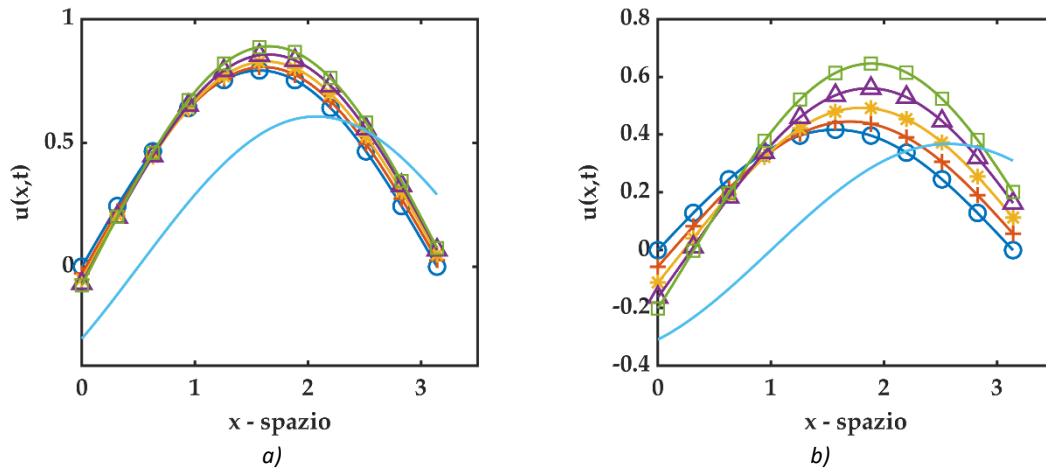


Figura 10-84 plot 2D di confronto fra soluzioni del problema differenziale frazionario S-FRADE con $u(x, 0) = \sin(x)$ e coefficienti di diffusione ed avvezione funzione del tempo $V = D = \sin(t)$. Il valore di $\gamma = 1.8$ è fissato e (\odot cerchio - blu) rappresenta la soluzione per $\beta = 0.2$, (+ croce - rosso) rappresenta la soluzione per $\beta = 0.4$, (* asterisco - giallo) rappresenta la soluzione per $\beta = 0.6$, (\triangle triangolo - viola) rappresenta la soluzione per $\beta = 1.0$, (— linea continua - azzurro) rappresenta la soluzione della standard ADE. a) plot 2D per $t = 0.5$, b) plot 2D per $t = 1.0$

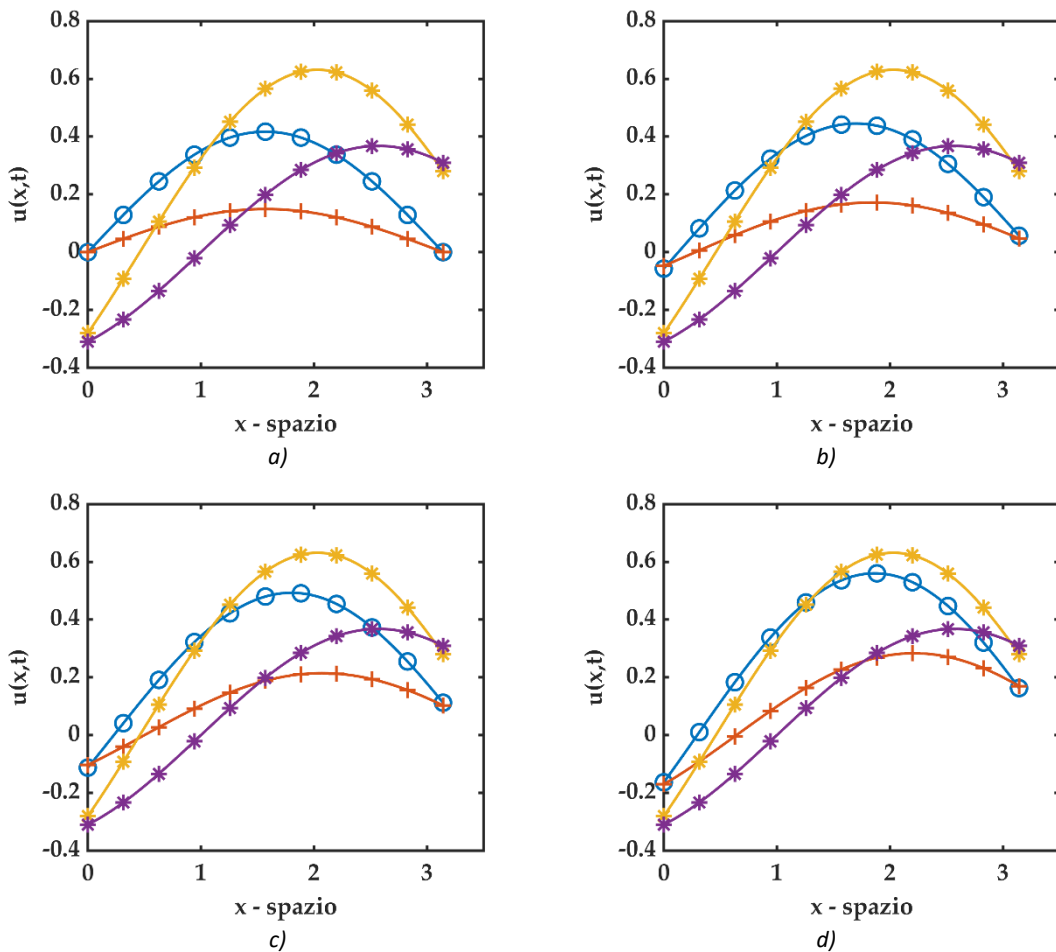


Figura 10-85 plot 2D di confronto fra soluzioni del problema differenziale frazionario S-FRADE con $u(x,0) = \sin(x)$ e $t = 1.0$ dove (* asterisco - viola) rappresenta la soluzione standard ADE e $D = V = \text{cost}$, (* asterisco - giallo) rappresenta la soluzione standard ADE e $D = V = \sin(t)$, (+ croce - rosso) rappresenta la soluzione S-FRADE $D = V = \text{cost}$, (⊙ cerchio - blu) rappresenta la soluzione S-FRADE e $D = V = \sin(t)$. Si fissa il valore di $\gamma = 1.8$. a) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.2$, b) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.4$, c) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.6$, d) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.8$.

10.3.3.2.1 Algoritmo Matlab

Di seguito viene riportato un estratto dello script Matlab utilizzato per i plot sopra riportati, soffermandosi sul calcolo della soluzione inerente il problema differenziale S-FRADE. Il simbolo (:) sta ad indicare che la parte di codice precedente è esattamente la stessa di quella riportata al paragrafo 10.3.3.1.1 per il problema S-FRADE con $u(x,0) = x^\delta$, essendo adibita al calcolo delle componenti della matrice \mathbf{C} per l'integrazione temporale in ADM che non si modifica al variare delle condizioni al contorno.

```

function [u_SPFRADE_sint] =
uSP_fraz_sint_sinx(Nmax,x1,t1,Gamma,beta)
% uSP_fraz_cost => SPF      = space fractional
%                               ADE      = Advection Diffusion Equation
%                               sin(t)   = D(t)=V(t)=g(t)=sin(t)
% function per il calcolo della soluzione del seguente problema
% differenziale
    
```

```

%-----
% u,t + sint(t) u,beta = sin(t) u,Gamma      1 < Gamma <= 2 && 0 <
beta <= 1
% u(x,0) = sin(x)
%-----
:

u_SPFADE_sint = zeros(length(t1),length(x1));
SUM = 0;
for n = 0 : Nmax
    if n == 0
        u_SPFADE_sint = sin(x1);
    else
        for j = 0 : n
            SUM = SUM + (-1)^j*nchoosek(n,j)*sin(x1 + ((n-
j)*Gamma+j*beta)*pi/2);
        end
        u_SPFADE_sint = u_SPFADE_sint + C(:,n)*SUM;
        SUM = 0;
    end
end
end
end

```

10.3.3.3 S-FRADE con condizioni iniziali $u(x, 0) = \cos(x)$

Si consideri il seguente problema differenziale

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \sin(t) \cdot \frac{\partial^\beta u}{\partial x^\beta} = \sin(t) \cdot \frac{\partial^\gamma u}{\partial x^\gamma} \\ u(x, 0) = \cos(x) \end{cases} \quad (10.45)$$

Dove la derivata frazionaria è di Caputo con terminale $a = -\infty$. Utilizzando i risultati precedenti, l' n -esimo termine della decomposizione ADM assume la seguente formulazione

$$u_n(x, t) = \frac{1}{\text{Diag}[A \otimes (\text{Ref} A)^T]} \cdot \begin{pmatrix} +1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{ij} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (-1)^{j+1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \cos t \\ \cos^2 t \\ \vdots \\ \cos^{(n-1)} t \\ \cos^n t \end{pmatrix} \quad (10.46)$$

$$\cdot \sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{n}{j} \cos\left(x + \frac{[(n-j)\gamma + j\beta]\pi}{2}\right)$$

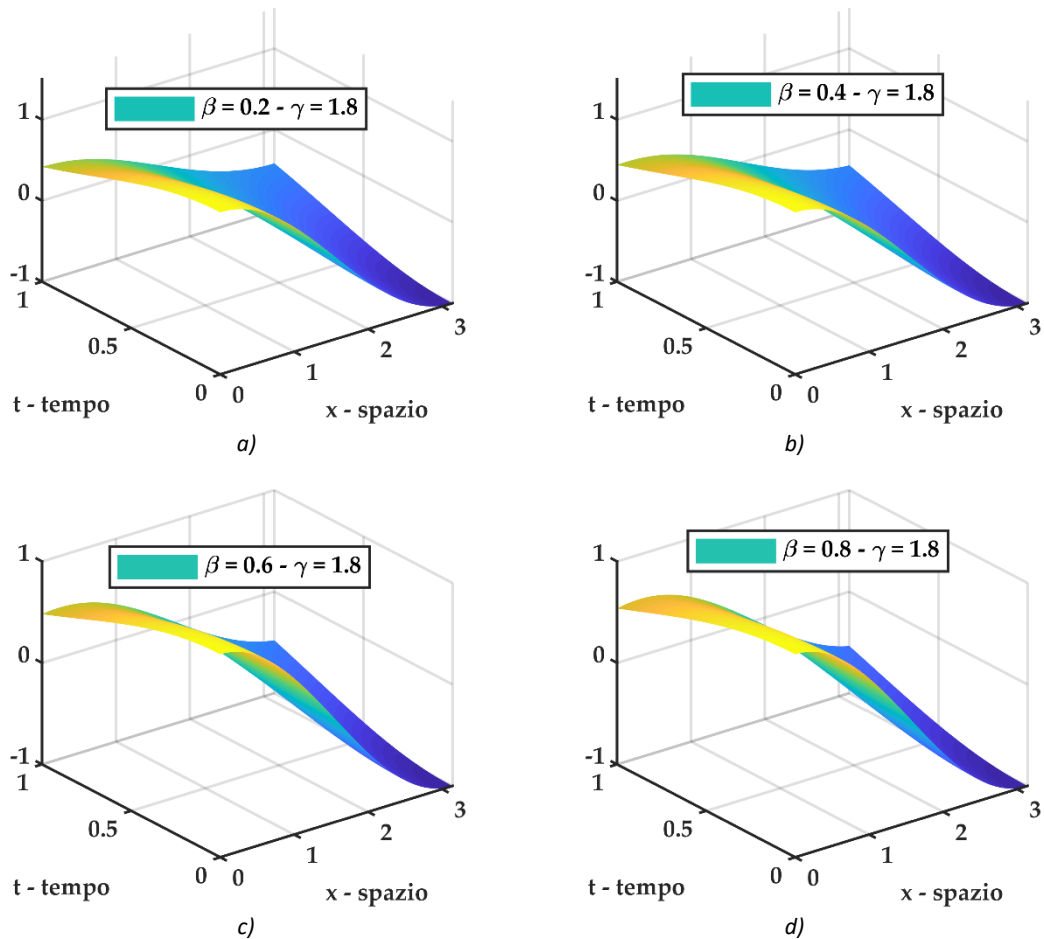


Figura 10-86 plot 3D della soluzione $u(x, t)$ del problema differenziale frazionario S-FRADE con $u(x, 0) = \cos(x)$ e coefficiente di diffusione ed avvezione funzione del tempo $V = D = \sin(t)$ per diversi valori dell'ordine di derivazione frazionario fissato $\gamma = 1.2$. a) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.2$, b) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.4$, c) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.6$, d) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.8$

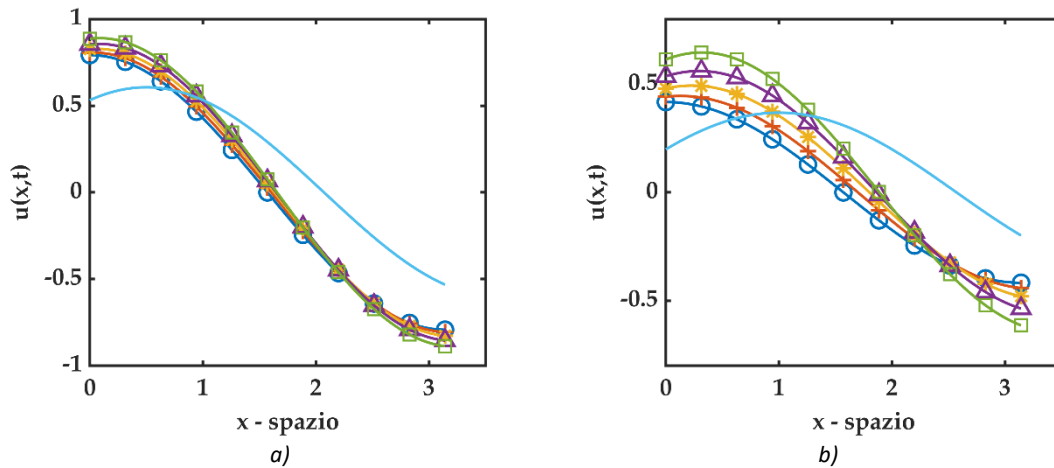


Figura 10-87 plot 2D di confronto fra soluzioni del problema differenziale frazionario S-FRADE con $u(x, 0) = \cos(x)$ e coefficienti di diffusione ed avvezione funzione del tempo $V = D = \sin(t)$. Il valore di $\gamma = 1.2$ è fissato e (⊙ cerchio - blu) rappresenta la soluzione per $\beta = 0.2$, (+ croce - rosso) rappresenta la soluzione per $\beta = 0.4$, (* asterisco - giallo) rappresenta la soluzione per $\beta = 0.6$, (Δ triangolo - viola) rappresenta la soluzione per $\beta = 0.6$, (□ quadrato - verde) rappresenta la soluzione per $\beta = 1.0$, (— linea continua - azzurro) rappresenta la soluzione della standard ADE. a) plot 2D per $t = 0.5$, b) plot 2D per $t = 1.0$

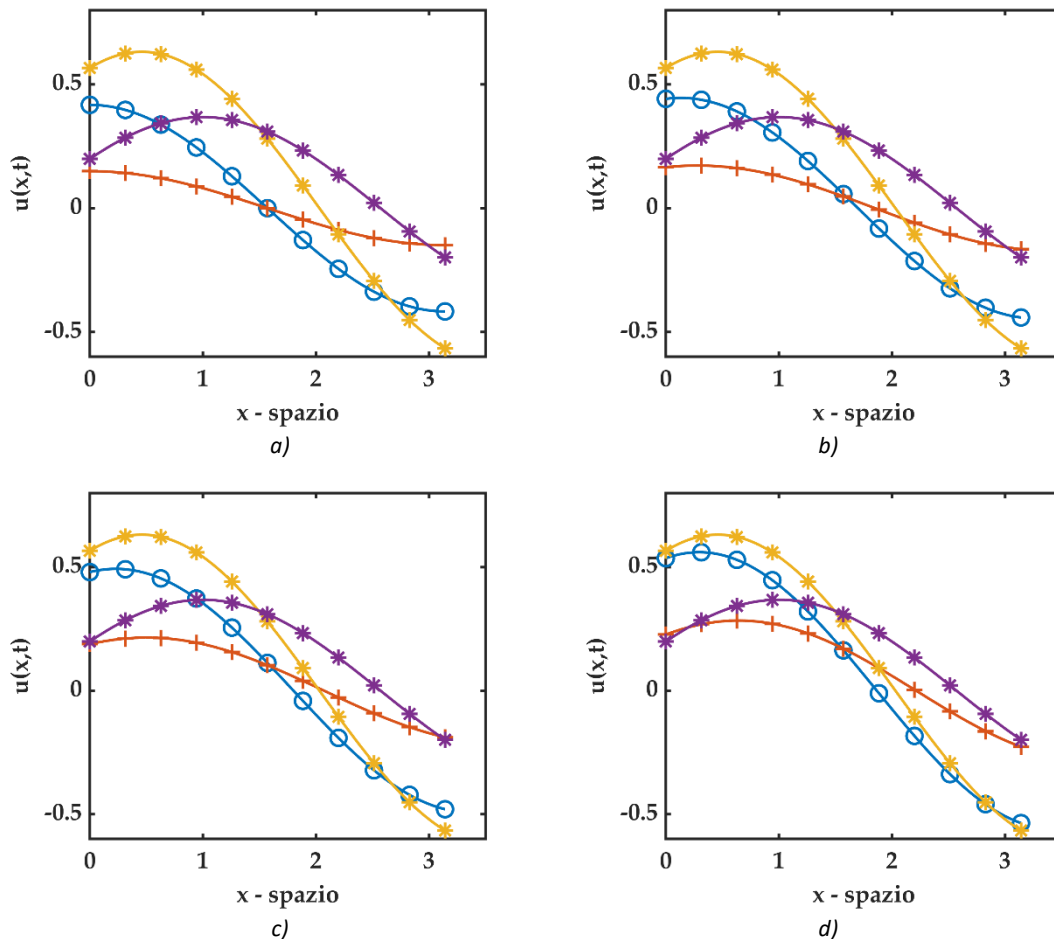


Figura 10-88 plot 2D di confronto per S-FRADE con $u(x, 0) = \cos(x)$ e $t = 1.0$ dove (* asterisco - viola) rappresenta la soluzione standard ADE e $D = V = \cos(t)$, (* asterisco - giallo) rappresenta la soluzione standard ADE e $D = V = \sin(t)$, (+ croce - rosso) rappresenta la soluzione S-FRADE $D = V = \cos(t)$, (⊙ cerchio - blu) rappresenta la soluzione S-FRADE e $D = V = \sin(t)$. Si fissa il valore di $\gamma = 1.2$. a) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.2$, b) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.4$, c) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.6$, d) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.8$.

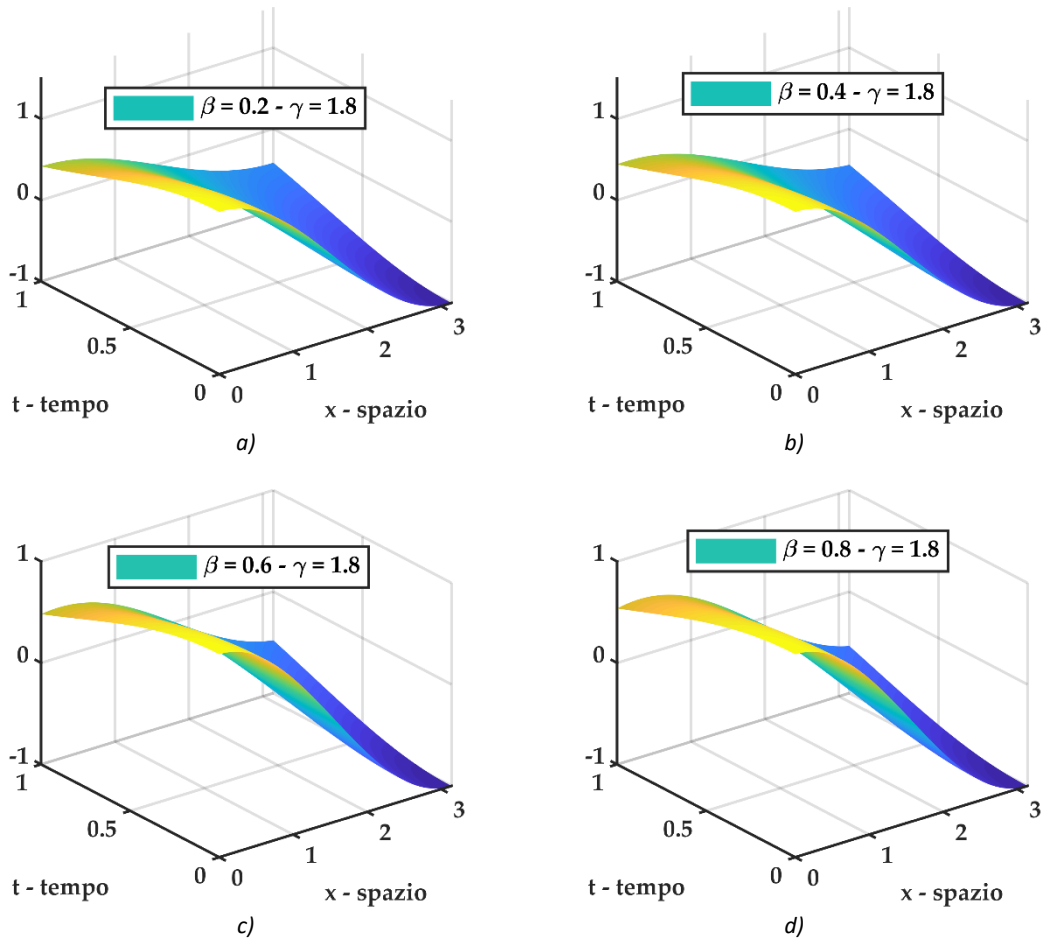


Figura 10-89 plot 3D della soluzione $u(x, t)$ del problema differenziale frazionario S-FRADE con $u(x, 0) = \cos(x)$ e coefficiente di diffusione ed avvezione funzione del tempo $V = D = \sin(t)$ per diversi valori dell'ordine di derivazione frazionario fissato $\gamma = 1.8$. a) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.2$, b) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.4$, c) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.6$, d) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.8$.

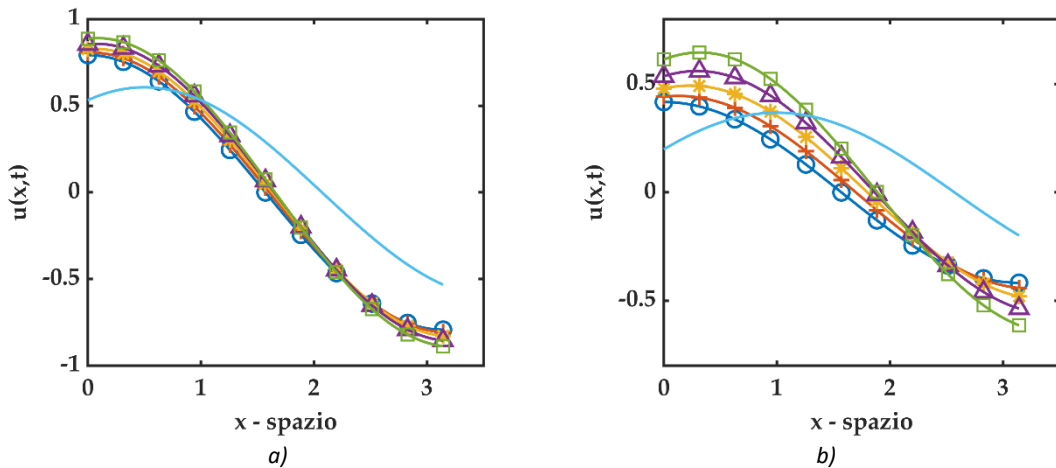


Figura 10-90 plot 2D di confronto fra soluzioni del problema differenziale frazionario S-FRADE con $u(x, 0) = \cos(x)$ e coefficienti di diffusione ed avvezione funzione del tempo $V = D = \sin(t)$. Il valore di $\gamma = 1.8$ è fissato e (○ cerchio - blu) rappresenta la soluzione per $\beta = 0.2$, (+ croce - rosso) rappresenta la soluzione per $\beta = 0.4$, (* asterisco - giallo) rappresenta la soluzione per $\beta = 0.6$, (△ triangolo - viola) rappresenta la soluzione per $\beta = 0.6$, (□ quadrato - verde) rappresenta la soluzione per $\beta = 1.0$, (— linea continua - azzurro) rappresenta la soluzione della standard ADE. a) plot 2D per $t = 0.5$, b) plot 2D per $t = 1.0$

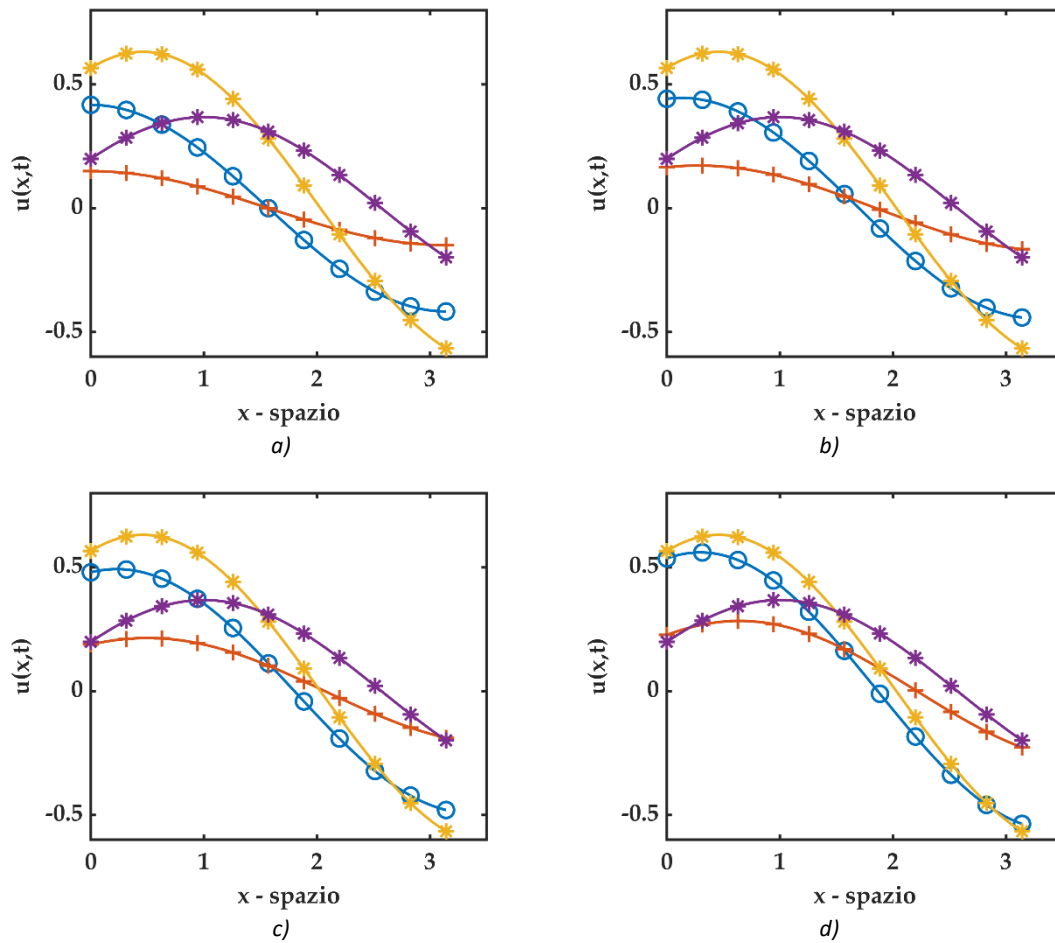


Figura 10-91 plot 2D di confronto fra soluzioni del problema differenziale frazionario S-FRADE con $u(x, 0) = \cos(x)$ e $t = 1.0$ dove (* asterisco - viola) rappresenta la soluzione standard ADE e $D = V = \cos(t)$, (* asterisco - giallo) rappresenta la soluzione standard ADE e $D = V = \sin(t)$, (+ croce - rosso) rappresenta la soluzione S-FRADE $D = V = \cos(t)$, (⊙ cerchio - blu) rappresenta la soluzione S-FRADE e $D = V = \sin(t)$. Si fissa il valore di $\gamma = 1.8$. a) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.2$, b) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.4$, c) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.6$, d) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.8$.

10.3.3.3.1 Algoritmo Matlab

Di seguito viene riportato un estratto dello script Matlab utilizzato per i plot sopra riportati, soffermandosi sul calcolo della soluzione inerente il problema differenziale S-FRADE. Il simbolo (:) sta ad indicare che la parte di codice precedente è esattamente la stessa di quella riportata al paragrafo 10.3.3.1.1 per il problema S-FRADE con $u(x, 0) = x^\delta$, essendo adibita al calcolo delle componenti della matrice \mathbf{C} per l'integrazione temporale in ADM che non si modifica al variare delle condizioni al contorno.

```
function [u_SPFADE_sint] =
uSP_fraz_sint_cosx(Nmax,x1,t1,Gamma,beta)
% uSP_fraz_cost => SPF = space fractional
% ADE = Advection Diffusion Equation
% sin(t) = D(t)=V(t)=g(t)=sin(t)
% function per il calcolo della soluzione del seguente problema
% differenziale
```

```

%-----
% u,t + sint(t) u,beta = sin(t) u,Gamma      1 < Gamma <= 2 && 0 <
beta <= 1
% u(x,0) = cos(x)
%-----
                                     :

u_SPFADE_sint = zeros(length(t1),length(x1));
SUM = 0;
for n = 0 : Nmax
    if n == 0
        u_SPFADE_sint = cos(x1);
    else
        for j = 0 : n
            SUM = SUM + (-1)^j*nchoosek(n,j)*cos(x1 + ((n-
j)*Gamma+j*beta)*pi/2);
        end
        u_SPFADE_sint = u_SPFADE_sint + C(:,n)*SUM;
        SUM = 0;
    end
end
end

```

10.3.3.4 S-FRADE con condizioni iniziali $u(x, 0) = e^{ax}$

Si consideri il seguente problema differenziale

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \sin(t) \cdot \frac{\partial^\beta u}{\partial x^\beta} = \sin(t) \cdot \frac{\partial^\gamma u}{\partial x^\gamma} \\ u(x, 0) = e^{ax} \end{cases} \quad (10.47)$$

Dove la derivata frazionaria è di Caputo con terminale $a = -\infty$.

Utilizzando i risultati precedenti, l' n -esimo termine della decomposizione ADM assume la seguente formulazione, con $a = 0.50$

$$u_n(x, t) = \frac{1}{\text{Diag}[\mathbb{A} \otimes (\text{Ref}\mathbb{A})^T]} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} +1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{ij} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (-1)^{j+1} \end{pmatrix}}_{[n+1] \times [n+1]} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \cos t \\ \cos^2 t \\ \vdots \\ \cos^{(n-1)} t \\ \cos^n t \end{pmatrix} \quad (10.48)$$

$$\cdot \sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{n}{j} a^{(n-j)\gamma + j\beta} \cdot e^{ax}$$

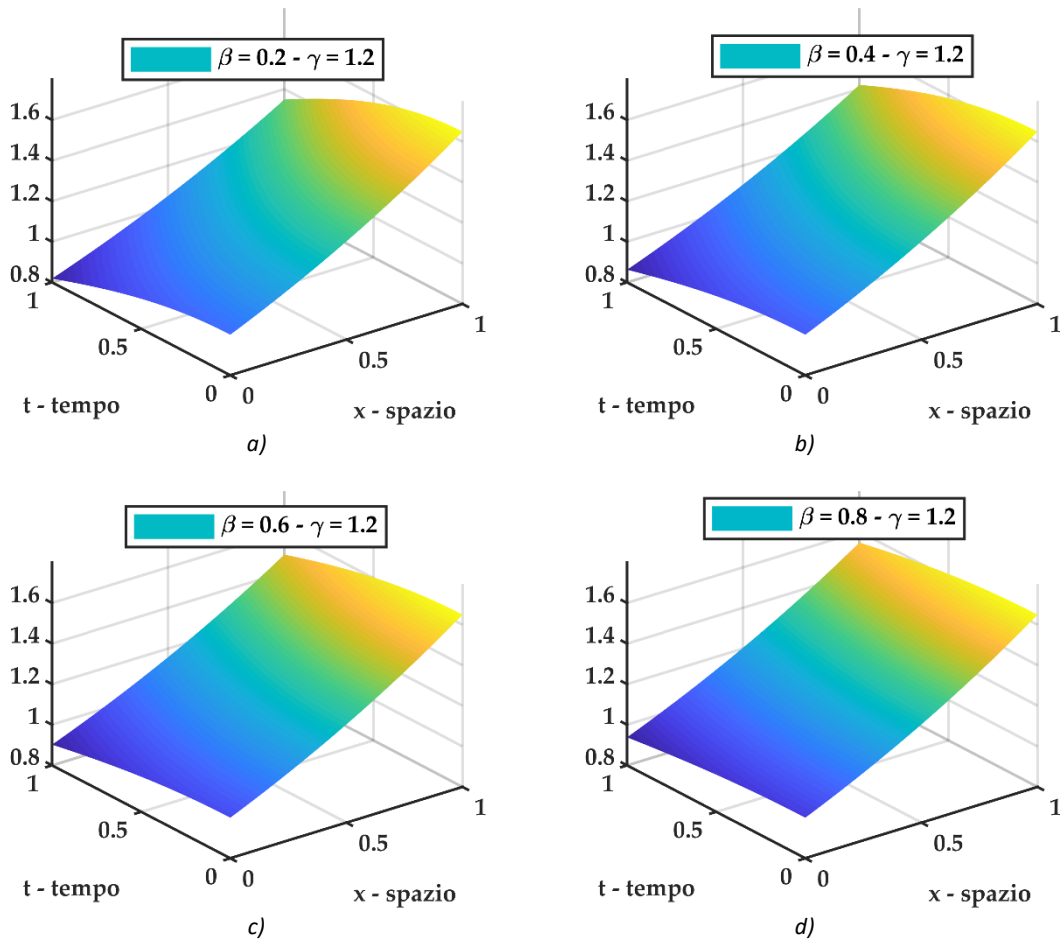


Figura 10-92 plot 3D della soluzione $u(x, t)$ del problema differenziale frazionario S-FRADE con $u(x, 0) = e^{ax}$ con $a = 0.50$ e coefficiente di diffusione ed avvezione funzione del tempo $V = D = \sin(t)$ per diversi valori dell'ordine di derivazione frazionario fissato $\gamma = 1.2$. a) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.2$, b) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.4$, c) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.6$, d) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.8$.

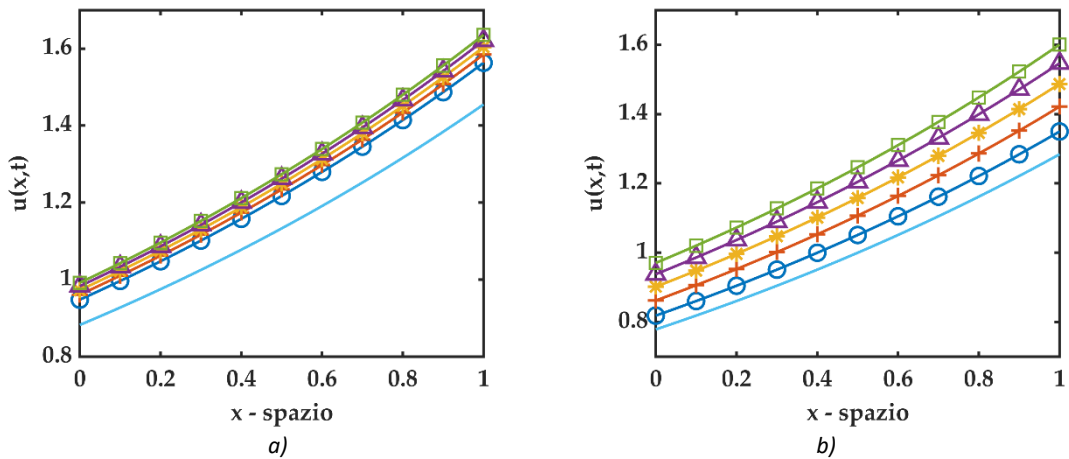


Figura 10-93 plot 2D di confronto fra soluzioni del problema differenziale frazionario S-FRADE con $u(x, 0) = e^{ax}$ con $a = 0.50$ e coefficienti di diffusione ed avvezione funzione del tempo $V = D = \sin(t)$. Il valore di $\gamma = 1.2$ è fissato e (○ cerchio - blu) rappresenta la soluzione per $\beta = 0.2$, (+ croce - rosso) rappresenta la soluzione per $\beta = 0.4$, (* asterisco - giallo) rappresenta la soluzione per $\beta = 0.6$, (△ triangolo - viola) rappresenta la soluzione per $\beta = 0.6$, (□ quadrato - verde) rappresenta la soluzione per $\beta = 1.0$, (— linea continua - azzurro) rappresenta la soluzione della standard ADE. a) plot 2D per $t = 0.5$, b) plot 2D per $t = 1.0$

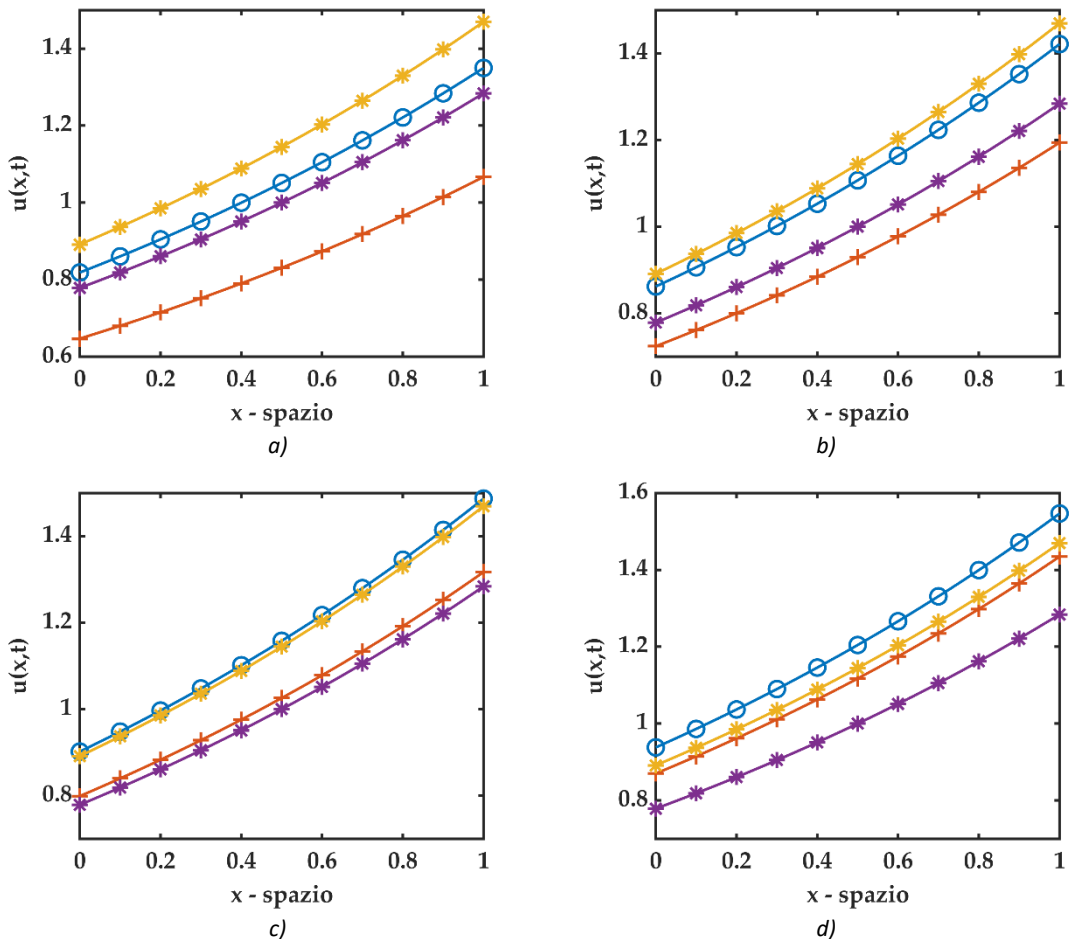


Figura 10-94 plot 2D per S-FRADE con $u(x, 0) = e^{ax}$ con $a = 0.50$ e $t = 1.0$ dove (* asterisco - viola) rappresenta la soluzione standard ADE e $D = V = \text{cost}$, (* asterisco - giallo) rappresenta la soluzione standard ADE e $D = V = \sin(t)$, (+ croce - rosso) rappresenta la soluzione S-FRADE $D = V = \text{cost}$, (○ cerchio - blu) rappresenta la soluzione S-FRADE e $D = V = \sin(t)$. Si fissa il valore di $\gamma = 1.2$. a) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.2$, b) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.4$, c) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.6$, d) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.8$.

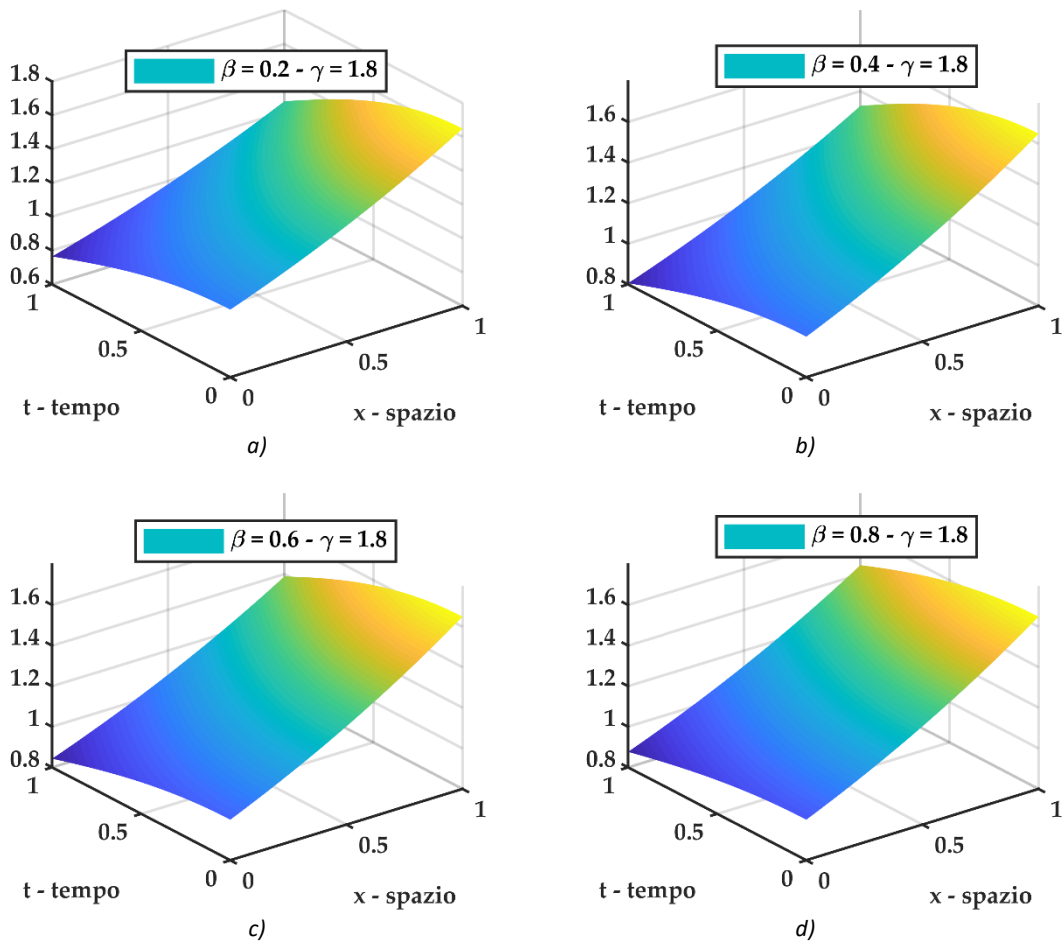


Figura 10-95 plot 3D della soluzione $u(x, t)$ del problema differenziale frazionario S-FRADE con $u(x, 0) = e^{ax}$ con $a = 0.50$ e coefficiente di diffusione ed avvezione funzione del tempo $V = D = \sin(t)$ per diversi valori dell'ordine di derivazione frazionario fissato $\gamma = 1.8$. a) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.2$, b) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.4$, c) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.6$, d) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.8$.

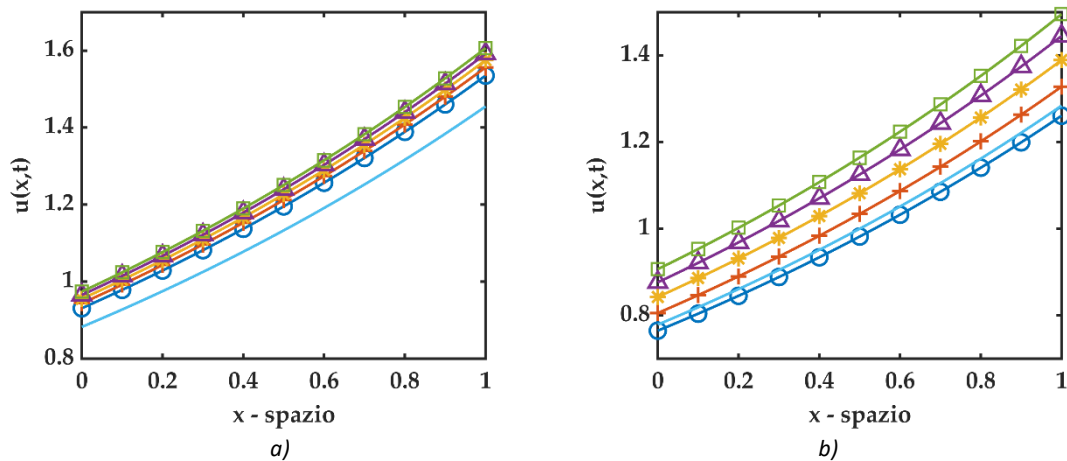


Figura 10-96 plot 2D di confronto fra soluzioni del problema differenziale frazionario S-FRADE con $u(x, 0) = e^{ax}$ con $a = 0.50$ e coefficienti di diffusione ed avvezione funzione del tempo $V = D = \sin(t)$. Il valore di $\gamma = 1.8$ è fissato e (● cerchio - blu) rappresenta la soluzione per $\beta = 0.2$, (+ croce - rosso) rappresenta la soluzione per $\beta = 0.4$, (* asterisco - giallo) rappresenta la soluzione per $\beta = 0.6$, (△ triangolo - viola) rappresenta la soluzione per $\beta = 0.6$, (□ quadrato - verde) rappresenta la soluzione per $\beta = 1.0$, (— linea continua - azzurro) rappresenta la soluzione della standard ADE. a) plot 2D per $t = 0.5$, b) plot 2D per $t = 1.0$

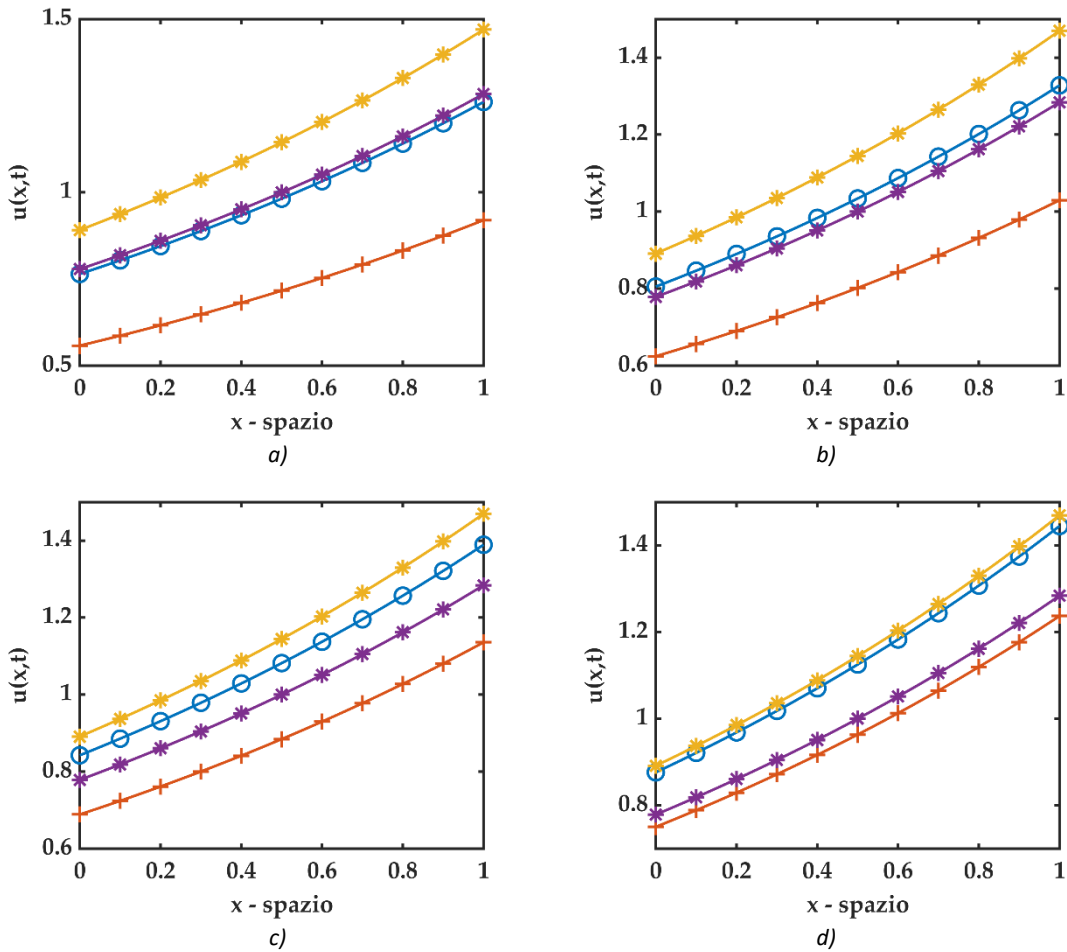


Figura 10-97 plot 2D di confronto fra soluzioni del problema differenziale frazionario S-FRADE con $u(x,0) = e^{ax}$ con $a = 0.50$ e $t = 1.0$ dove (* asterisco - viola) rappresenta la soluzione standard ADE e $D = V = \text{cost}$, (* asterisco - giallo) rappresenta la soluzione standard ADE e $D = V = \sin(t)$, (+ croce - rosso) rappresenta la soluzione S-FRADE $D = V = \text{cost}$, (⊙ cerchio - blu) rappresenta la soluzione S-FRADE e $D = V = \sin(t)$. Si fissa il valore di $\gamma = 1.8$. a) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.2$, b) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.4$, c) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.6$, d) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.8$.

10.3.3.4.1 Algoritmo Matlab

Di seguito viene riportato un estratto dello script Matlab utilizzato per i plot sopra riportati, soffermandosi sul calcolo della soluzione inerente il problema differenziale S-FRADE. Il simbolo (:) sta ad indicare che la parte di codice precedente è esattamente la stessa di quella riportata al paragrafo 10.3.3.1.1 per il problema S-FRADE con $u(x,0) = x^\delta$, essendo adibita al calcolo delle componenti della matrice \mathbf{C} per l'integrazione temporale in ADM che non si modifica al variare delle condizioni al contorno.

```
function [u_SPFADE_sint] =
uSP_fraz_sint_eax(Nmax,x1,t1,Gamma,beta,a)
% uSP_fraz_cost => SPF      = space fractional
%                      ADE  = Advection Diffusion Equation
%                      sin(t) = D(t)=V(t)=g(t)=sin(t)
% function per il calcolo della soluzione del seguente problema
% differenziale
```

```

%-----
% u,t + sint(t) u,beta = sin(t) u,Gamma      1 < Gamma <= 2 && 0 <
beta <= 1
% u(x,0) = e^(ax)
%-----
:

u_SPFADE_sint = zeros(length(t1),length(x1));
SUM = 0;
for n = 0 : Nmax
    if n == 0
        u_SPFADE_sint = exp(a*x1);
    else
        for j = 0 : n
            SUM = SUM + (-1)^j*nchoosek(n,j)*a^((n-
j)*Gamma+j*beta)*exp(a*x1);
        end
        u_SPFADE_sint = u_SPFADE_sint + C(:,n)*SUM;
        SUM = 0;
    end
end
end
end

```

10.3.4 $V = D = g(t) = \sinh(t)$

10.3.4.1 S-FRADE con condizioni iniziali $u(x, 0) = x^\delta$

Si considera il seguente problema differenziale

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \sinh(t) \cdot \frac{\partial^\beta u}{\partial x^\beta} = \sinh(t) \cdot \frac{\partial^\gamma u}{\partial x^\gamma} \\ u(x, 0) = x^\delta \end{cases} \quad (10.49)$$

Dove la derivata frazionaria è di Caputo con terminale $a = 0$.

In questo contesto essendo l'equazione differenziale frazionaria solamente in spazio si considera ${}^{RL} [{}^{ng}] \mathbb{I}_t^{n\alpha}(t) = [{}^{ng}] \mathbb{I}_t^n(t) = \int_0^t g(t) \int_0^t g(t) \int_0^t g(t) \dots dt dt dt$

$n = 1$	\rightarrow	$[g]_0 \mathbb{I}_t^1(t) = \int_0^t g(t) dt$	$=$	$\left(\frac{\cosh(t)}{0! 1!} - \frac{1}{1! 0!} \right)$
$n = 2$	\rightarrow	$[{}^2g]_0 \mathbb{I}_t^2(t) = \int_0^t g(t) [g]_0 \mathbb{I}_t^1(t) dt$	$=$	$\left(\frac{\cosh^2(t)}{0! 2!} - \frac{\cosh(t)}{1! 1!} + \frac{1}{2! 0!} \right)$
$n = 3$	\rightarrow	$[{}^3g]_0 \mathbb{I}_t^3(t) = \int_0^t g(t) [{}^2g]_0 \mathbb{I}_t^2(t) dt$	$=$	$\left(\frac{\cosh^3(t)}{0! 3!} - \frac{\cosh^2(t)}{1! 2!} + \frac{\cosh(t)}{2! 1!} - \frac{1}{3! 0!} \right)$
$n = 4$	\rightarrow	$[{}^4g]_0 \mathbb{I}_t^4(t) = \int_0^t g(t) [{}^3g]_0 \mathbb{I}_t^3(t) dt$	$=$	$\left(\frac{\cosh^4(t)}{0! 4!} - \frac{\cosh^3(t)}{1! 3!} + \frac{\cosh^2(t)}{2! 2!} - \frac{\cosh(t)}{3! 1!} + \frac{1}{4! 0!} \right)$
\vdots		\vdots		\vdots
n	\rightarrow	$[{}^{ng}]_0 \mathbb{I}_t^n(t) = \int_0^t g(t) [{}^{n-1}g]_0 \mathbb{I}_t^{(n-1)}(t) dt$	$=$	(*)

(*)

$$= \frac{1}{\text{Diag}[\mathbb{A} \otimes (\text{Ref} \mathbb{A})^T]} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} +1 & 0 & 0 & \overset{j}{0} & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{ij} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (-1)^{j+1} \end{pmatrix}}_{[n+1] \times [n+1]} \cdot \begin{pmatrix} \cosh^n t \\ \cosh^{(n-1)} t \\ \cosh^{(n-2)} t \\ \vdots \\ \cosh t \\ 1 \end{pmatrix}$$

Con

$$\mathbb{A} = [n! \quad (n-1)! \quad (n-2)! \quad \dots \quad 2! \quad 1! \quad 0!]$$

$$(RefA)^T = \begin{pmatrix} 0! \\ 1! \\ 2! \\ \vdots \\ (n-2)! \\ (n-1)! \\ n! \end{pmatrix}$$

$$A \otimes (RefA)^T = \begin{pmatrix} n! 0! & n! 1! & n! 2! & \cdots & n! (n-1)! & n! n! \\ (n-1)! 0! & (n-1)! 1! & (n-1)! 2! & \cdots & (n-1)! (n-1)! & (n-1)! n! \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1! 0! & 1! 1! & 1! 2! & \cdots & 1! (n-1)! & 1! n! \\ 0! 0! & 0! 1! & 0! 2! & \cdots & 0! (n-1)! & 0! n! \end{pmatrix}$$

$$Diag[A \otimes (RefA)^T] = [n! 0! \quad (n-1)! 1! \quad (n-2)! 2! \quad \cdots \quad 2! (n-2)! \quad 1! (n-1)! \quad 0! n!]$$

Quindi l' n -esimo termine della decomposizione ADM assume la seguente formulazione:

$$\begin{aligned} u_n(x, t) &= \left({}^{RL} \mathbb{J}_0^{n\alpha}(t) \right) \cdot \sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{n}{j} \left[D_x^{(n-j)\gamma + j\beta} \right] f(x) = \\ &= \frac{1}{Diag[A \otimes (RefA)^T]} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} +1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{ij} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (-1)^{j+1} \end{pmatrix}}_{[n+1] \times [n+1]} \cdot \begin{pmatrix} \cosh^n t \\ \cosh^{(n-1)} t \\ \cosh^{(n-2)} t \\ \vdots \\ \cosh t \\ 1 \end{pmatrix} \quad (10.50) \\ &\cdot \sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{n}{j} \left\{ \frac{\Gamma(\delta + 1)}{\Gamma(\delta + 1 - [(n-j)\gamma + j\beta]} \cdot x^{-[(n-j)\gamma + j\beta]} \right\} \cdot x^\delta \end{aligned}$$

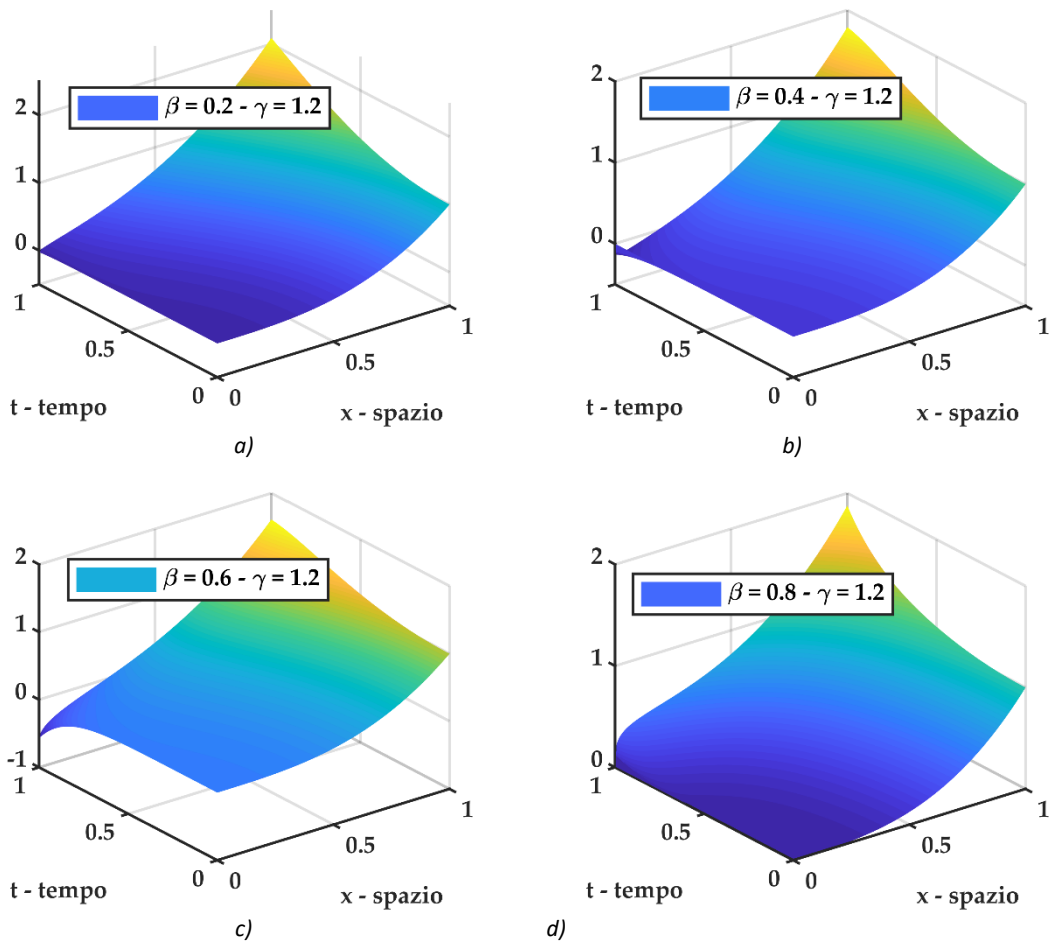


Figura 10-98 plot 3D della soluzione $u(x, t)$ del problema differenziale frazionario S-FRADE con $u(x, 0) = x^\delta$ con $\delta = 3$ e coefficiente di diffusione ed avvezione funzione del tempo $V = D = \sinh(t)$ per diversi valori dell'ordine di derivazione frazionario fissato $\gamma = 1.2$. a) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.2$, b) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.4$, c) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.6$, d) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.8$

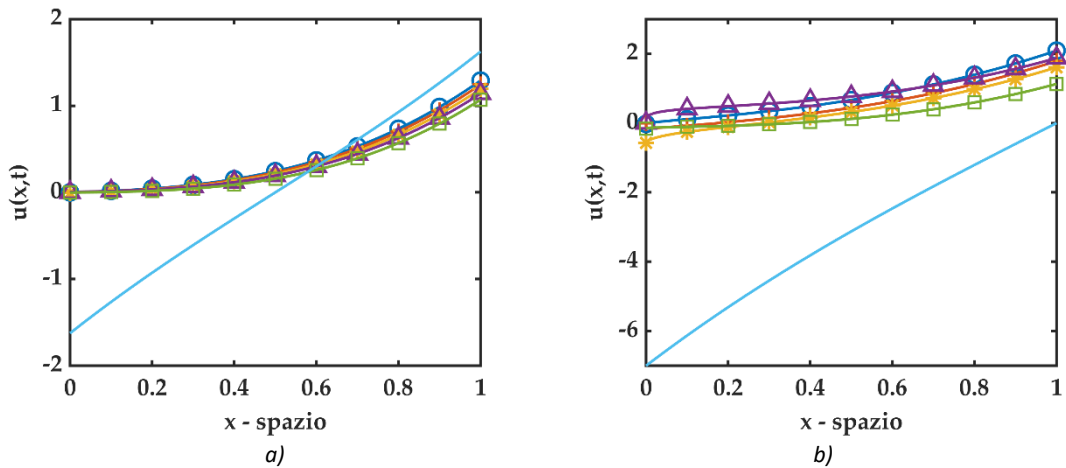


Figura 10-99 plot 2D di confronto fra soluzioni del problema differenziale frazionario S-FRADE con $u(x, 0) = x^\delta$ con $\delta = 3$ e coefficienti di diffusione ed avvezione funzione del tempo $V = D = \sinh(t)$. Il valore di $\gamma = 1.2$ è fissato e (⊙ cerchio - blu) rappresenta la soluzione per $\beta = 0.2$, (+ croce - rosso) rappresenta la soluzione per $\beta = 0.4$, (* asterisco - giallo) rappresenta la soluzione per $\beta = 0.6$, (△ triangolo - viola) rappresenta la soluzione per $\beta = 0.6$, (□ quadrato - verde) rappresenta la soluzione per $\beta = 1.0$, (— linea continua - azzurro) rappresenta la soluzione della standard ADE. a) plot 2D per $t = 0.5$, b) plot 2D per $t = 1.0$

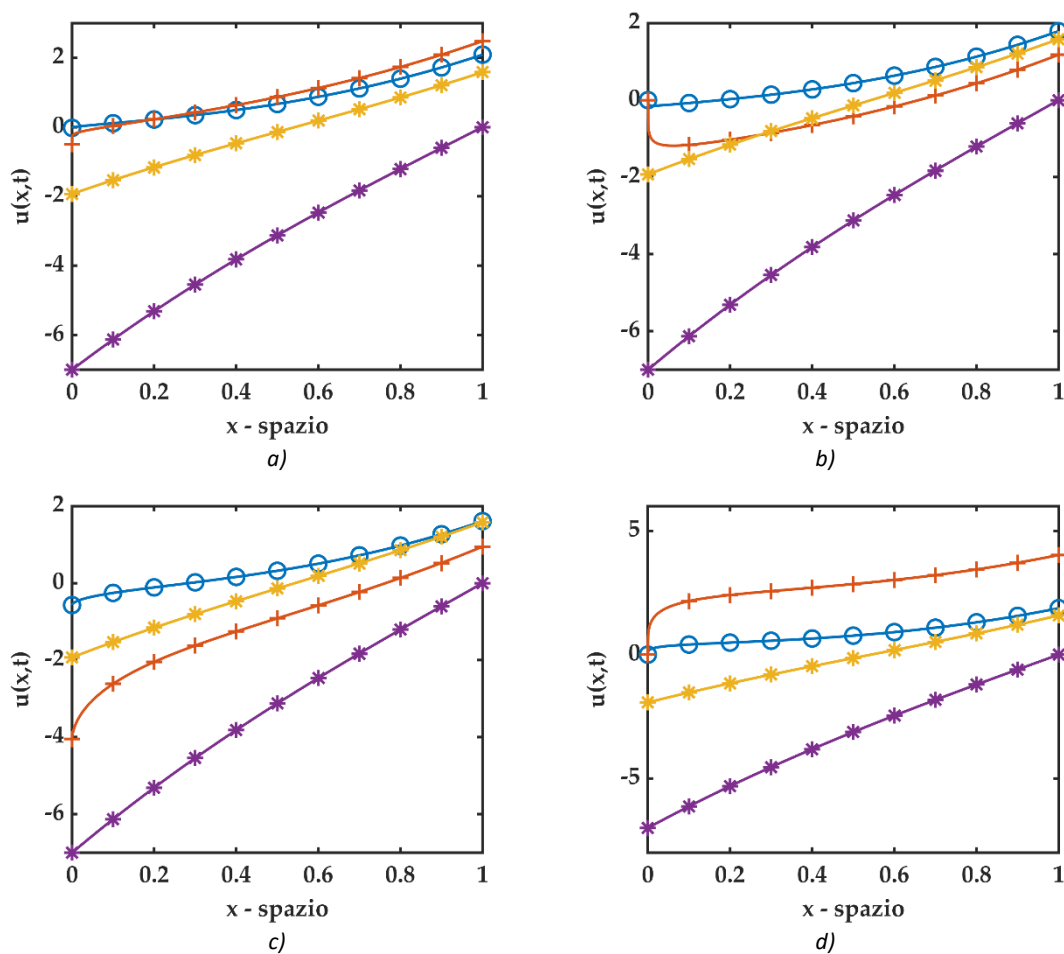


Figura 10-100 plot 2D di confronto fra soluzioni del problema differenziale frazionario S-FRADE con $u(x, 0) = x^\delta$ con $\delta = 3$ e $t = 1.0$ dove (* asterisco - viola) rappresenta la soluzione standard ADE e $D = V = \text{cost}$, (* asterisco - giallo) rappresenta la soluzione standard ADE e $D = V = \sinh(t)$, (+ croce - rosso) rappresenta la soluzione S-FRADE $D = V = \text{cost}$, (⊙ cerchio - blu) rappresenta la soluzione S-FRADE e $D = V = \sinh(t)$. Si fissa il valore di $\gamma = 1.2$. a) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.2$, b) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.4$, c) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.6$, d) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.8$.

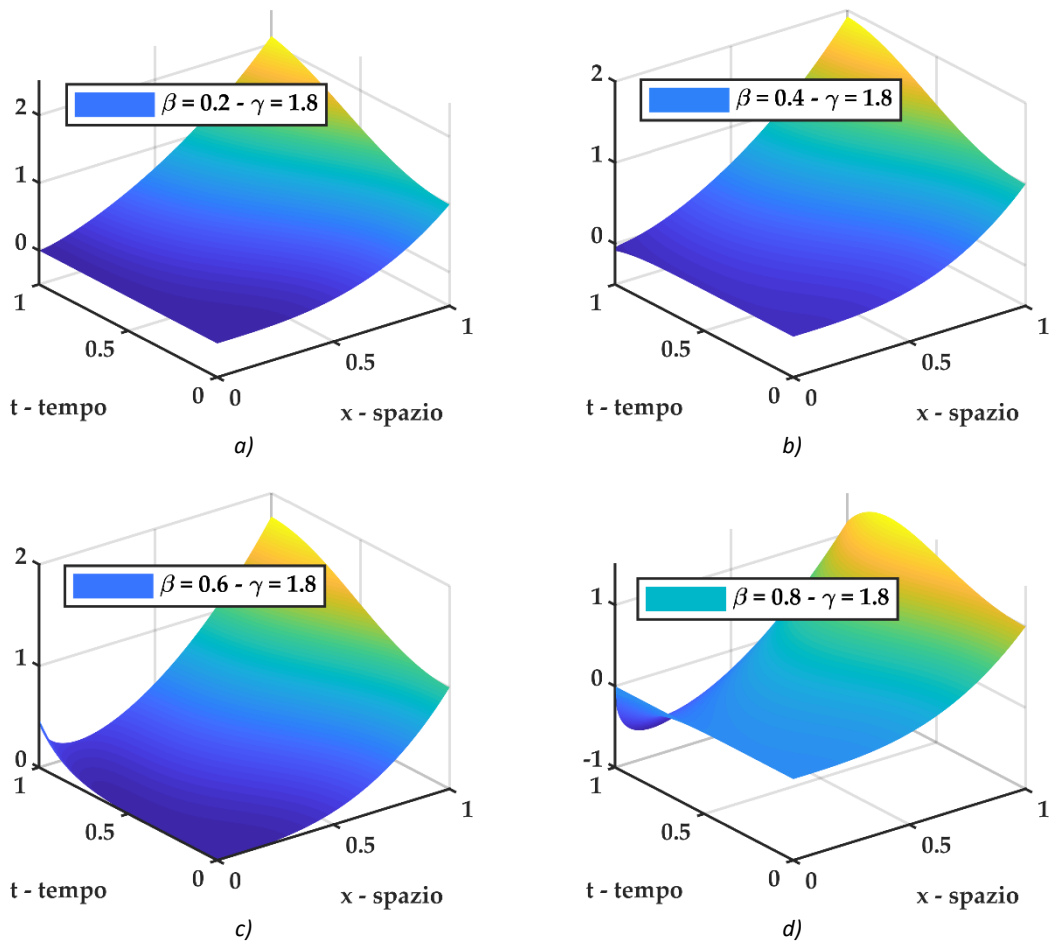


Figura 10-101 plot 3D della soluzione $u(x, t)$ del problema differenziale frazionario S-FRADE con $u(x, 0) = x^\delta$ con $\delta = 3$ e coefficiente di diffusione ed avvezione funzione del tempo $V = D = \sinh(t)$ per diversi valori dell'ordine di derivazione frazionario fissato $\gamma = 1.8$. a) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.2$, b) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.4$, c) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.6$, d) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.8$

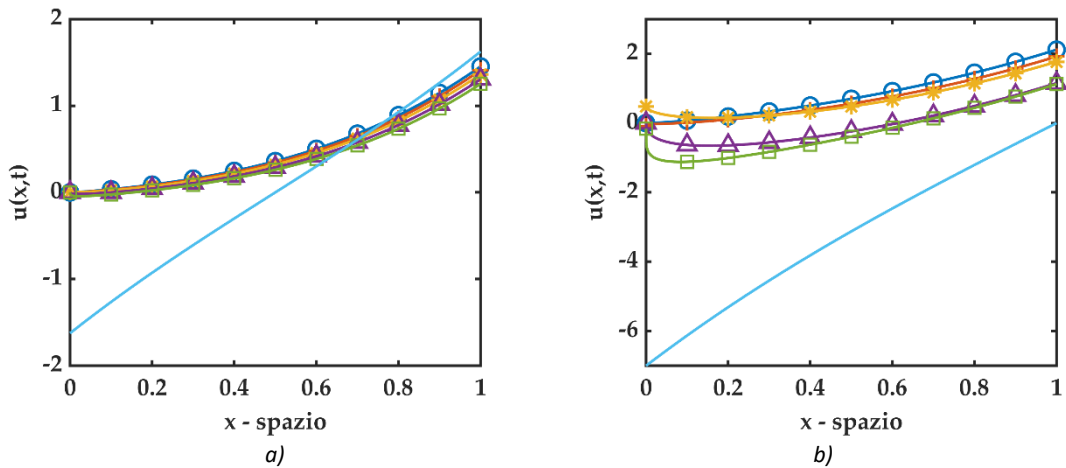


Figura 10-102 plot 2D di confronto fra soluzioni del problema differenziale frazionario S-FRADE con $u(x, 0) = x^\delta$ con $\delta = 3$ e coefficienti di diffusione ed avvezione funzione del tempo $V = D = \sinh(t)$. Il valore di $\gamma = 1.8$ è fissato e (⊙ cerchio - blu) rappresenta la soluzione per $\beta = 0.2$, (+ croce - rosso) rappresenta la soluzione per $\beta = 0.4$, (* asterisco - giallo) rappresenta la soluzione per $\beta = 0.6$, (Δ triangolo - viola) rappresenta la soluzione per $\beta = 1.0$, (□ quadrato - verde) rappresenta la soluzione per $\beta = 1.0$, (— linea continua - azzurro) rappresenta la soluzione della standard ADE. a) plot 2D per $t = 0.5$, b) plot 2D per $t = 1.0$

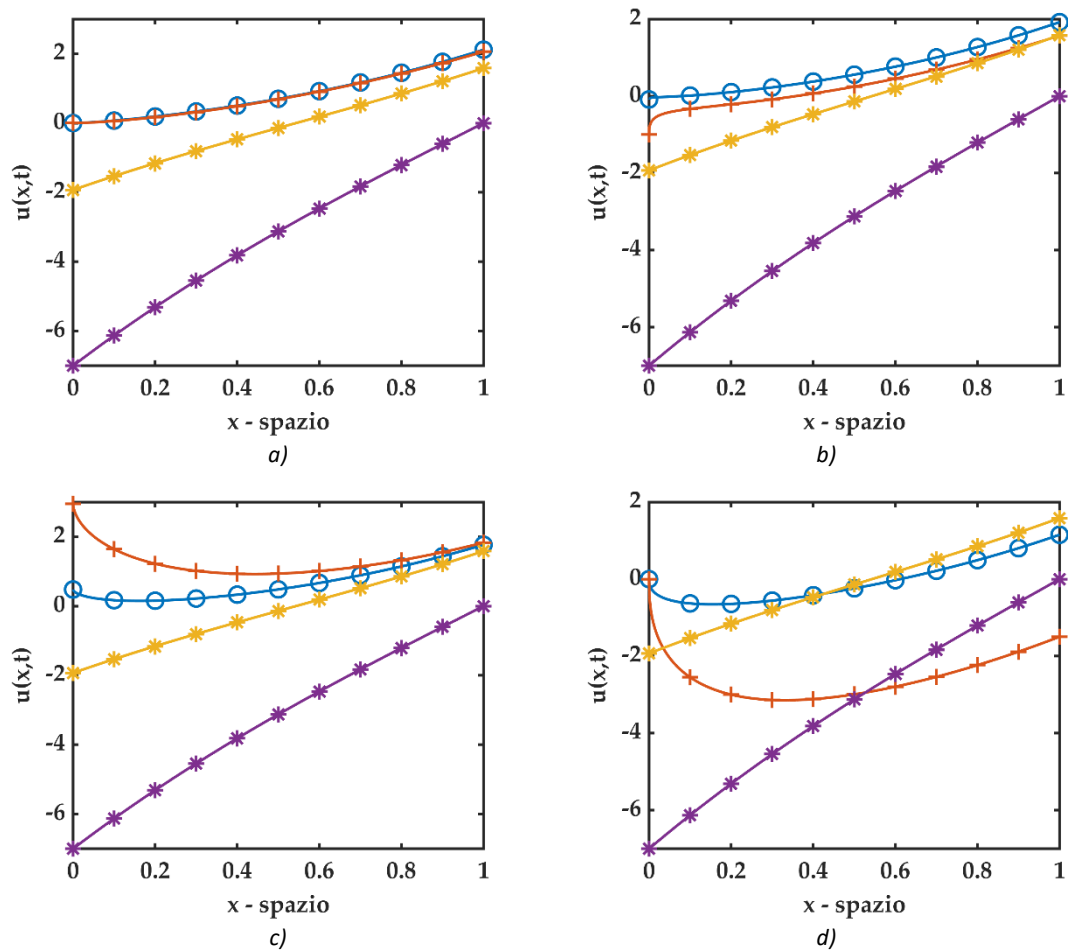


Figura 10-103 plot 2D di confronto fra soluzioni del problema differenziale frazionario S-FRADE con $u(x, 0) = x^\delta$ con $\delta = 3$ e $t = 1.0$ dove (* asterisco - viola) rappresenta la soluzione standard ADE e $D = V = \text{cost}$, (* asterisco - giallo) rappresenta la soluzione standard ADE e $D = V = \sinh(t)$, (+ croce - rosso) rappresenta la soluzione S-FRADE $D = V = \text{cost}$, (O cerchio - blu) rappresenta la soluzione S-FRADE e $D = V = \sinh(t)$. Si fissa il valore di $\gamma = 1.8$. a) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.2$, b) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.4$, c) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.6$, d) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.8$.

10.3.4.1.1 Algoritmo Matlab

Di seguito viene riportato un estratto dello script Matlab utilizzato per i plot sopra riportati, soffermandosi sul calcolo della soluzione inerente il problema differenziale S-FRADE. La function `[f_cosht,Coeff] = Cr_cosht(r,x1,t1)` è già stata riportata nel paragrafo 7.4.5.2.

```

function [u_SPFADE_sinht] =
uSP_fraz_sinht_xdelta(Nmax,x1,t1,Gamma,beta,delta)
% uSP_fraz_cost => SPF = space fractional
%           ADE = Advection Diffusion Equations
%           sinh(t) = D(t)=V(t)=g(t)=sinh(t)
% function per il calcolo della soluzione del seguente problema
% differenziale
%-----
% u,t + sinh(t) u,beta = sinh(t) u,gamma      1 < Gamma <= 2 && 0 <
beta <= 1
% u(x,0) = x^delta
    
```

```

%-----
% calcolo delle componenti dell'integrazione temporale
% C sta per COMPONENTE ed il numero davanti è il riferimento a
% quale componente della decomposizione Adomia si riferisce
% Costruisco la matrice C dove C(:,r) è Cr, cioè l' r-esimo
% coefficiente di integrazione temporale nella serie ADM

% inizializzazione delle variabili
C = zeros(length(t1),Nmax);
Cr = zeros(length(t1),1);
for r = 1:Nmax
    % function per il calcolo delle componenti dell' r-esimo
    % coefficiente di integrazione temporale nella serie ADM
    [f_cosht,Coeff] = Cr_cosht(r,x1,t1);

    for l = 1:r+1
        Cr = Cr + f_cosht(:,l)./Coeff(l);
    end
    C(:,r) = Cr;
    Cr = zeros(length(t1),1);
end
u_SPFADE_sinht = zeros(length(t1),length(x1));
SUM = 0;
for n = 0 : Nmax
    if n == 0
        u_SPFADE_sinht = x1.^delta;
    else
        for j = 0 : n
            M_1 = floor((n-j)*Gamma+j*beta);
            if M_1 >= delta && M_1 ~= (n-j)*Gamma+j*beta
                SUM = SUM;
            elseif M_1 > delta
                SUM = SUM;
            else
                SUM = SUM + (-
1)^j*nchoosek(n,j)*gamma(delta+1)/gamma(delta+1-((n-
j)*Gamma+j*beta))*x1.^(delta-((n-j)*Gamma+j*beta));
            end
        end
        u_SPFADE_sinht = u_SPFADE_sinht + C(:,n)*SUM;
        SUM = 0;
    end
end
end

```

10.3.4.2 S-FRADE con condizioni iniziali $u(x, 0) = \sin(x)$

Si considera il seguente problema differenziale

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \sinh(t) \cdot \frac{\partial^\beta u}{\partial x^\beta} = \sinh(t) \cdot \frac{\partial^\gamma u}{\partial x^\gamma} \\ u(x, 0) = \sin(x) \end{cases} \quad (10.51)$$

Dove la derivata frazionaria è di Caputo con terminale $a = -\infty$.

Utilizzando i risultati precedenti, l' n -esimo termine della decomposizione ADM assume la seguente formulazione

$$u_n(x, t) = \frac{1}{\text{Diag}[\mathbb{A} \otimes (\text{Ref}\mathbb{A})^T]} \cdot \begin{matrix} j \\ \begin{pmatrix} +1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{ij} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (-1)^{j+1} \end{pmatrix} \end{matrix} \cdot \begin{pmatrix} \cosh^n t \\ \cosh^{(n-1)} t \\ \cosh^{(n-2)} t \\ \vdots \\ \cosh t \\ 1 \end{pmatrix} \quad (10.52)$$

$$\cdot \sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{n}{j} \sin\left(x + \frac{[(n-j)\gamma + j\beta]\pi}{2}\right)$$

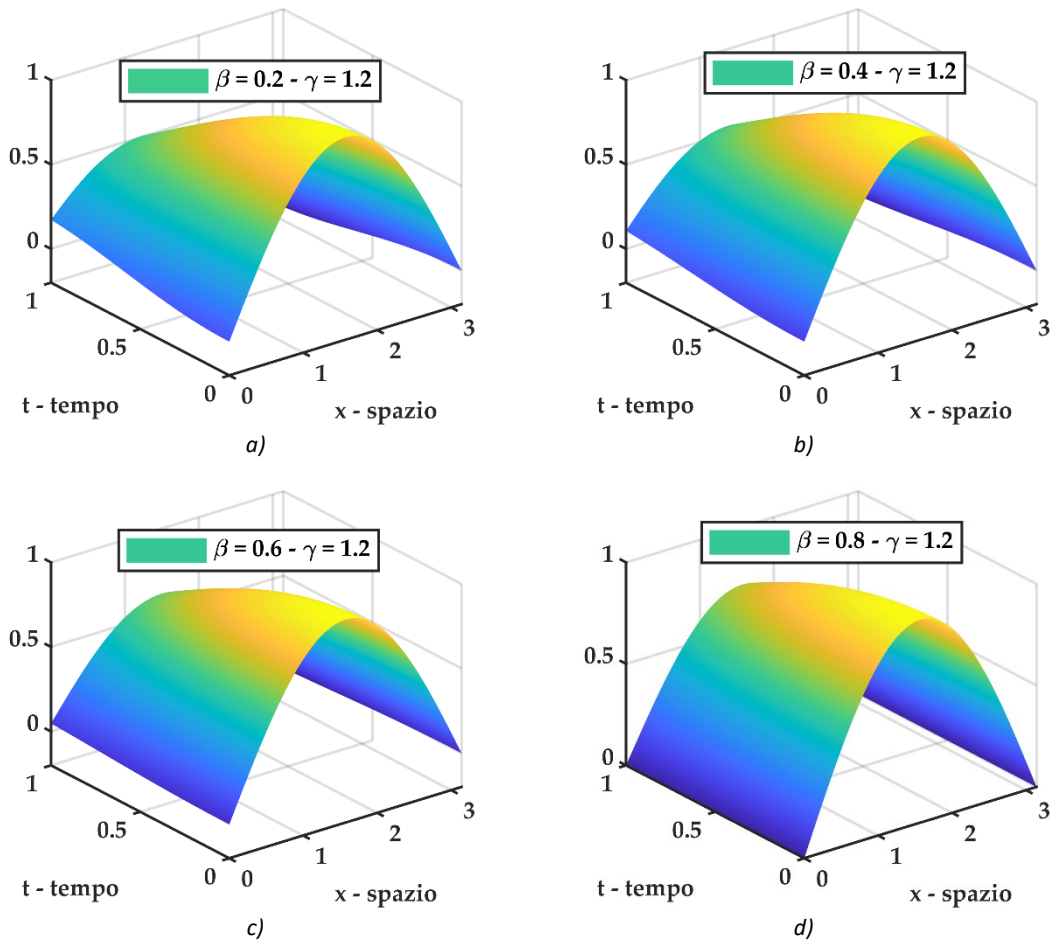


Figura 10-104 plot 3D della soluzione $u(x, t)$ del problema differenziale frazionario S-FRADE con $u(x, 0) = \sin(x)$ e coefficiente di diffusione ed avvezione funzione del tempo $V = D = \sinh(t)$ per diversi valori dell'ordine di derivazione frazionario fissato $\gamma = 1.2$. a) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.2$, b) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.4$, c) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.6$, d) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.8$

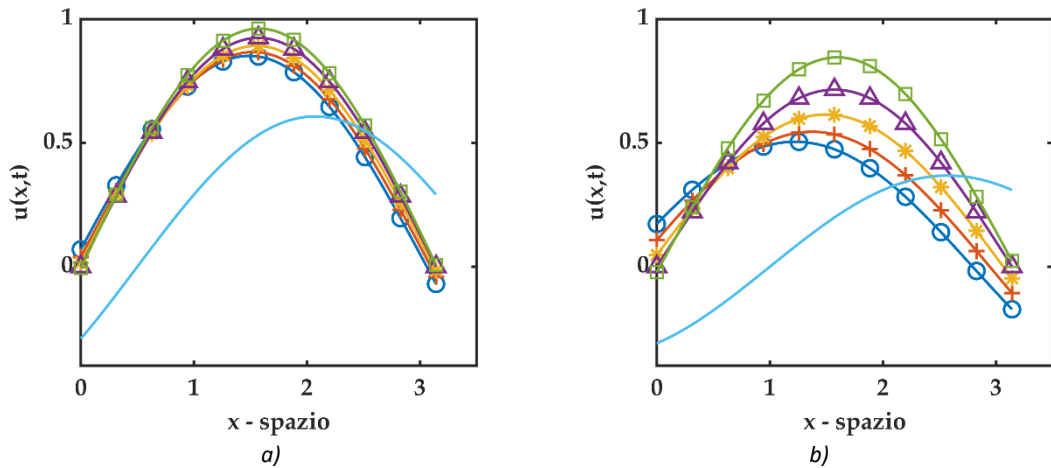


Figura 10-105 plot 2D di confronto fra soluzioni del problema differenziale frazionario S-FRADE con $u(x, 0) = \sin(x)$ e coefficienti di diffusione ed avvezione funzione del tempo $V = D = \sinh(t)$. Il valore di $\gamma = 1.2$ è fissato e $(\odot$ cerchio - blu) rappresenta la soluzione per $\beta = 0.2$, $(+$ croce - rosso) rappresenta la soluzione per $\beta = 0.4$, $(*$ asterisco - giallo) rappresenta la soluzione per $\beta = 0.6$, $(\triangle$ triangolo - viola) rappresenta la soluzione per $\beta = 0.6$, $(\square$ quadrato - verde) rappresenta la soluzione per $\beta = 1.0$, $(-$ linea continua - azzurro) rappresenta la soluzione della standard ADE. a) plot 2D per $t = 0.5$, b) plot 2D per $t = 1.0$

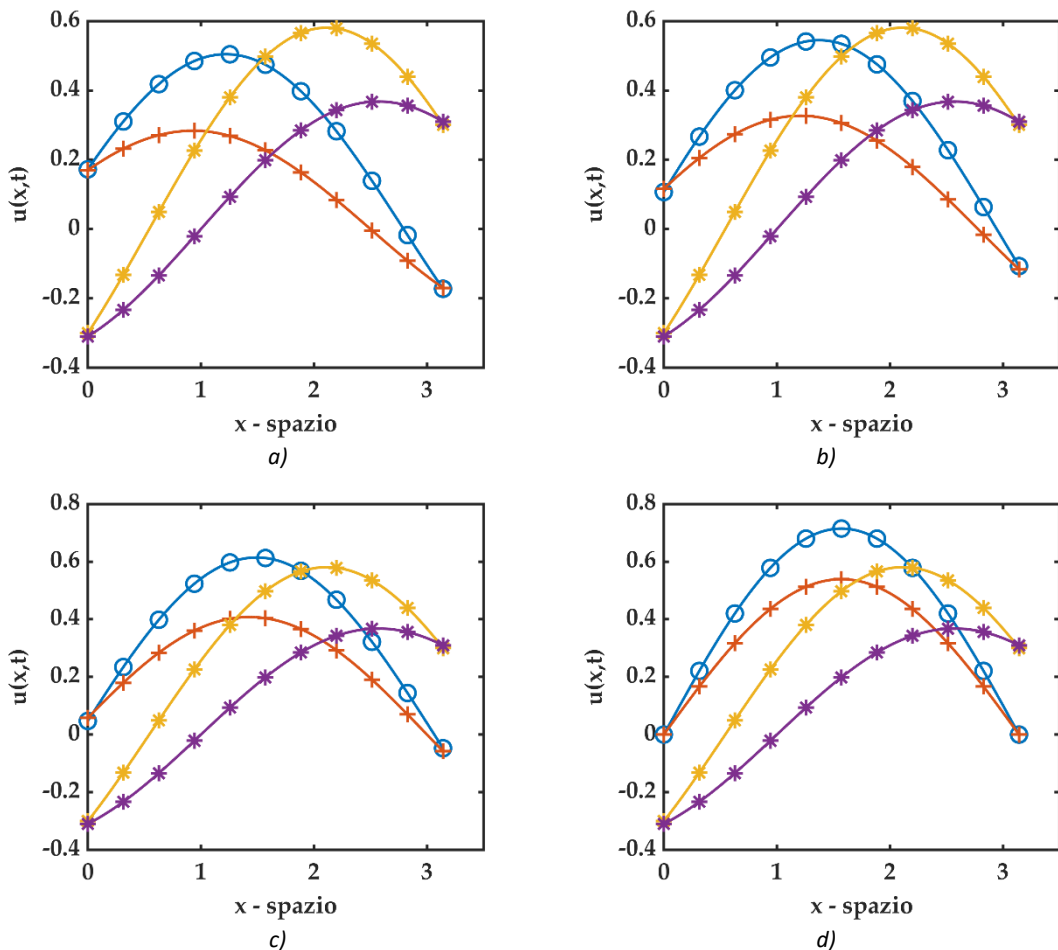


Figura 10-106 plot 2D di confronto per S-FRADE con $u(x, 0) = \sin(x)$ e $t = 1.0$ dove $(*$ asterisco - viola) rappresenta la soluzione standard ADE e $D = V = \text{cost}$, $(*$ asterisco - giallo) rappresenta la soluzione standard ADE e $D = V = \sinh(t)$, $(+$ croce - rosso) rappresenta la soluzione S-FRADE $D = V = \text{cost}$, $(\odot$ cerchio - blu) rappresenta la soluzione S-FRADE e $D = V = \sinh(t)$. Si fissa il valore di $\gamma = 1.2$. a) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.2$, b) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.4$, c) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.6$, d) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.8$.

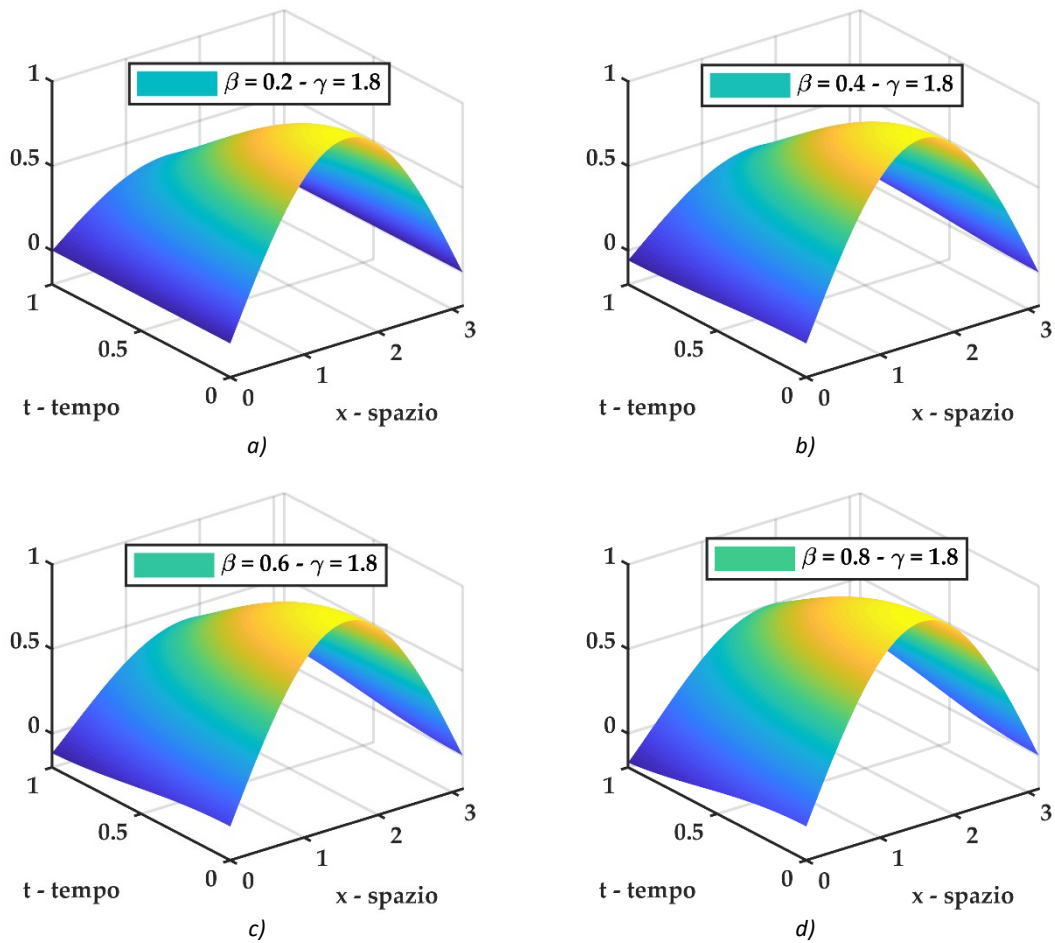


Figura 10-107 plot 3D della soluzione $u(x,t)$ del problema differenziale frazionario S-FRADE con $u(x,0) = \sin(x)$ e coefficiente di diffusione ed avvezione funzione del tempo $V = D = \sinh(t)$ per diversi valori dell'ordine di derivazione frazionario fissato $\gamma = 1.8$. a) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.2$, b) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.4$, c) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.6$, d) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.8$

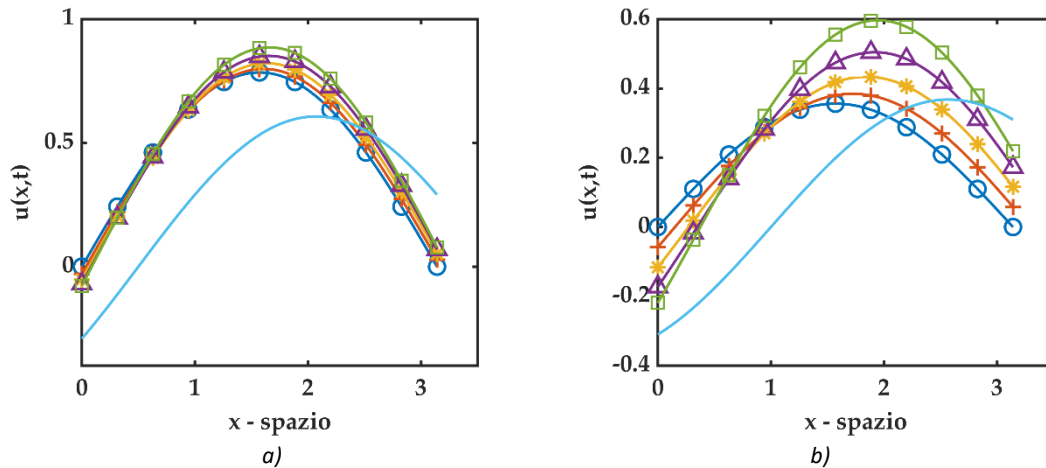


Figura 10-108 plot 2D di confronto fra soluzioni del problema differenziale frazionario S-FRADE con $u(x,0) = \sin(x)$ e coefficiente di diffusione ed avvezione funzione del tempo $V = D = \sinh(t)$. Il valore di $\gamma = 1.8$ è fissato e (⊙ cerchio - blu) rappresenta la soluzione per $\beta = 0.2$, (+ croce - rosso) rappresenta la soluzione per $\beta = 0.4$, (* asterisco - giallo) rappresenta la soluzione per $\beta = 0.6$, (Δ triangolo - viola) rappresenta la soluzione per $\beta = 0.6$, (□ quadrato - verde) rappresenta la soluzione per $\beta = 1.0$, (— linea continua - azzurro) rappresenta la soluzione della standard ADE. a) plot 2D per $t = 0.5$, b) plot 2D per $t = 1.0$

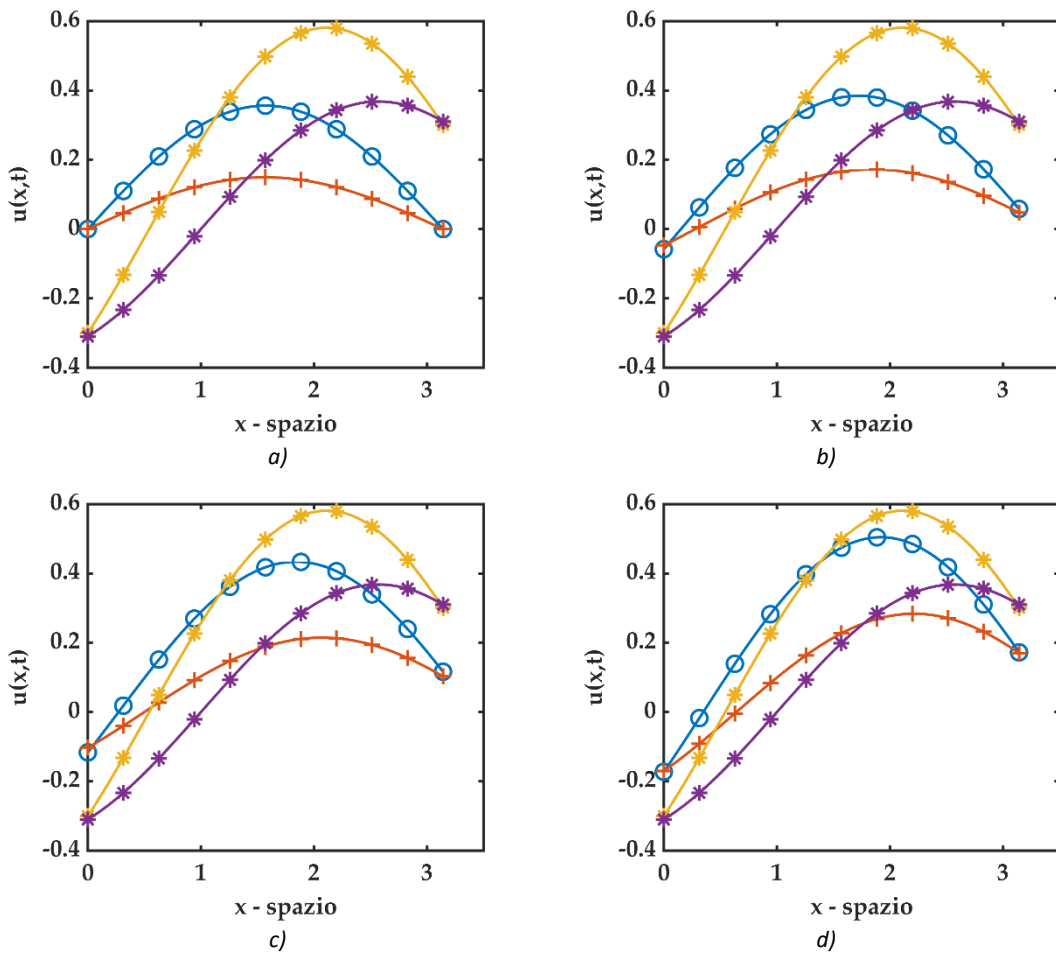


Figura 10-109 plot 2D di confronto fra soluzioni del problema differenziale frazionario S-FRADE con $u(x,0) = \sin(x)$ e $t = 1.0$ dove (* asterisco - viola) rappresenta la soluzione standard ADE e $D = V = \text{cost}$, (* asterisco - giallo) rappresenta la soluzione standard ADE e $D = V = \sinh(t)$, (+ croce - rosso) rappresenta la soluzione S-FRADE $D = V = \text{cost}$, (o cerchio - blu) rappresenta la soluzione S-FRADE e $D = V = \sinh(t)$. Si fissa il valore di $\gamma = 1.8$. a) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.2$, b) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.4$, c) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.6$, d) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.8$.

10.3.4.2.1 Algoritmo Matlab

Di seguito viene riportato un estratto dello script Matlab utilizzato per i plot sopra riportati, soffermandosi sul calcolo della soluzione inerente il problema differenziale S-FRADE. Il simbolo (:) sta ad indicare che la parte di codice precedente è esattamente la stessa di quella riportata al paragrafo 10.3.4.1.1 per il problema S-FRADE con $u(x,0) = x^\delta$, essendo adibita al calcolo delle componenti della matrice \mathbf{C} per l'integrazione temporale in ADM che non si modifica al variare delle condizioni al contorno.

```
function [u_SPFRADE_sinht] =
uSP_fraz_sinht_sinx(Nmax,x1,t1,Gamma,beta)
% uSP_fraz_cost => SPF      = space fractional
%                    ADE    = Advection Diffusion Equation
%                    sinh(t) = D(t)=V(t)=g(t)=sinh(t)
% function per il calcolo della soluzione del seguente problema
% differenziale
```

```

%-----
% u,t + sinh(t) u,beta = sinh(t) u,Gamma      1 < Gamma <= 2 && 0 <
beta <= 1
% u(x,0) = sin(x)
%-----
:

u_SPFADE_sinht = zeros(length(t1),length(x1));
SUM = 0;
for n = 0 : Nmax
    if n == 0
        u_SPFADE_sinht = sin(x1);
    else
        for j = 0 : n
            SUM = SUM + (-1)^j*nchoosek(n,j)*sin(x1 + ((n-
j)*Gamma+j*beta)*pi/2);
        end
        u_SPFADE_sinht = u_SPFADE_sinht + C(:,n)*SUM;
        SUM = 0;
    end
end
end
end

```

10.3.4.3 S-FRADE con condizioni iniziali $u(x, 0) = \cos(x)$

Si consideri il seguente problema differenziale

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \sinh(t) \cdot \frac{\partial^\beta u}{\partial x^\beta} = \sinh(t) \cdot \frac{\partial^\gamma u}{\partial x^\gamma} \\ u(x, 0) = \cos(x) \end{cases} \quad (10.53)$$

Dove la derivata frazionaria è di Caputo con terminale $a = -\infty$. Utilizzando i risultati precedenti, l' n -esimo termine della decomposizione ADM assume la seguente formulazione

$$u_n(x, t) = \frac{1}{\text{Diag}[A \otimes (\text{Ref}A)^T]} \cdot \begin{matrix} & & & j & & \\ \begin{pmatrix} +1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{ij} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (-1)^{j+1} \end{pmatrix} & \cdot & \begin{pmatrix} \cosh^n t \\ \cosh^{(n-1)} t \\ \cosh^{(n-2)} t \\ \vdots \\ \cosh t \\ 1 \end{pmatrix} \end{matrix} \quad (10.54)$$

$$\cdot \sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{n}{j} \cos\left(x + \frac{[(n-j)\gamma + j\beta]\pi}{2}\right)$$

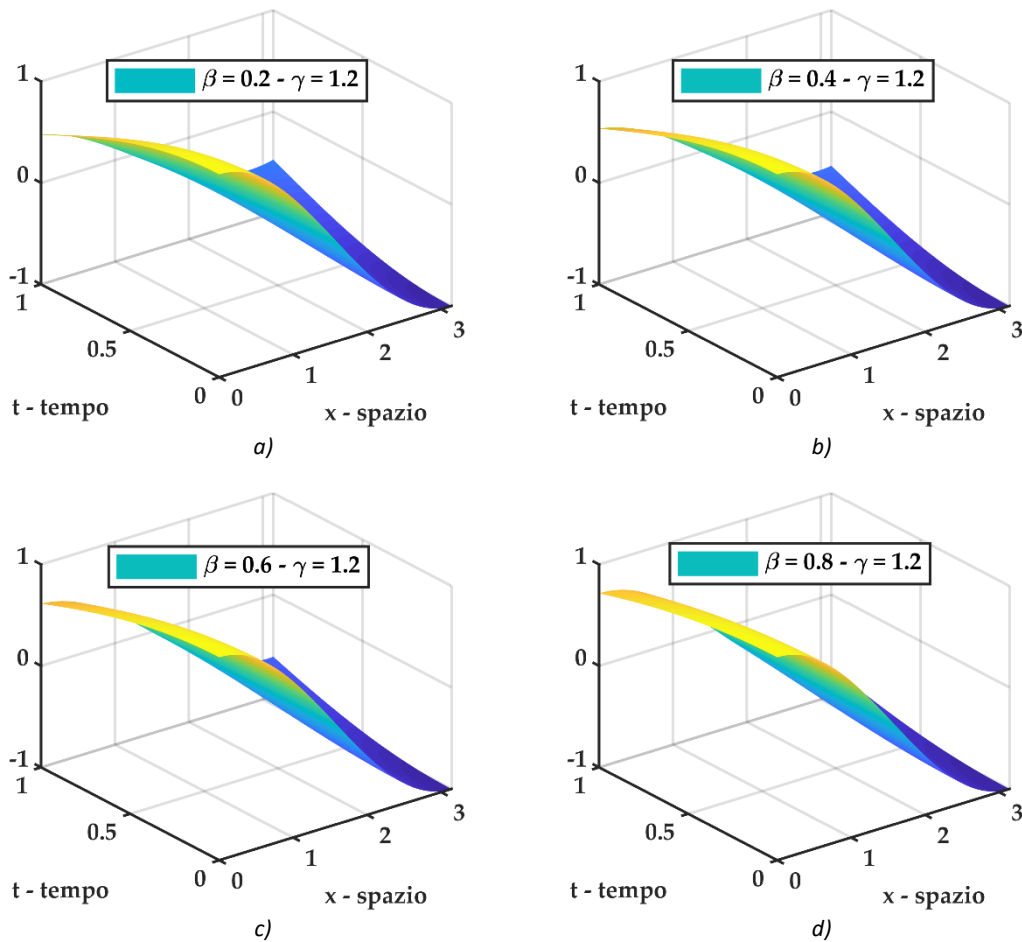


Figura 10-110 plot 3D della soluzione $u(x, t)$ del problema differenziale frazionario S-FRADE con $u(x, 0) = \cos(x)$ e coefficiente di diffusione ed avvezione funzione del tempo $V = D = \sinh(t)$ per diversi valori dell'ordine di derivazione frazionario fissato $\gamma = 1.2$. a) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.2$, b) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.4$, c) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.6$, d) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.8$

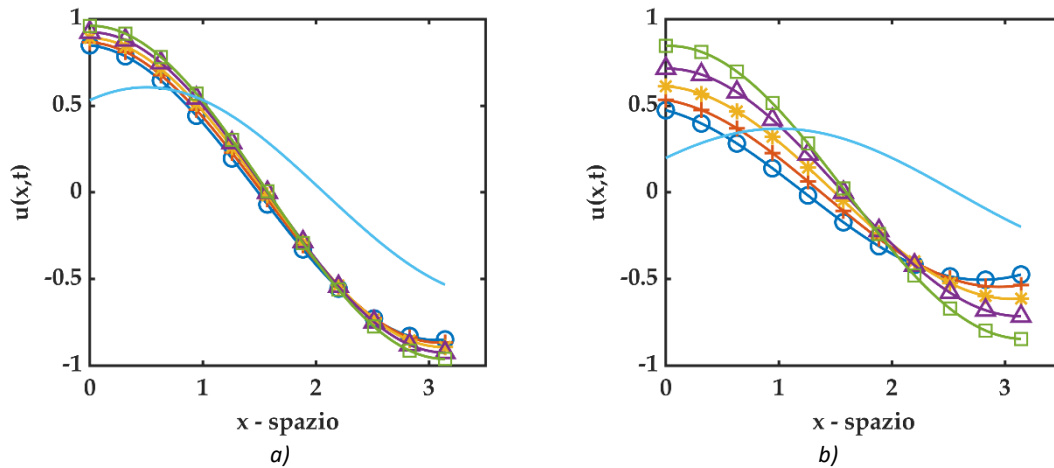


Figura 10-111 plot 2D di confronto fra soluzioni del problema differenziale frazionario S-FRADE con $u(x, 0) = \cos(x)$ e coefficienti di diffusione ed avvezione funzione del tempo $V = D = \sinh(t)$. Il valore di $\gamma = 1.2$ è fissato e (\odot cerchio - blu) rappresenta la soluzione per $\beta = 0.2$, ($+$ croce - rosso) rappresenta la soluzione per $\beta = 0.4$, ($*$ asterisco - giallo) rappresenta la soluzione per $\beta = 0.6$, (\triangle triangolo - viola) rappresenta la soluzione per $\beta = 0.6$, (\square quadrato - verde) rappresenta la soluzione per $\beta = 1.0$, ($-$ linea continua - azzurro) rappresenta la soluzione della standard ADE. a) plot 2D per $t = 0.5$, b) plot 2D per $t = 1.0$

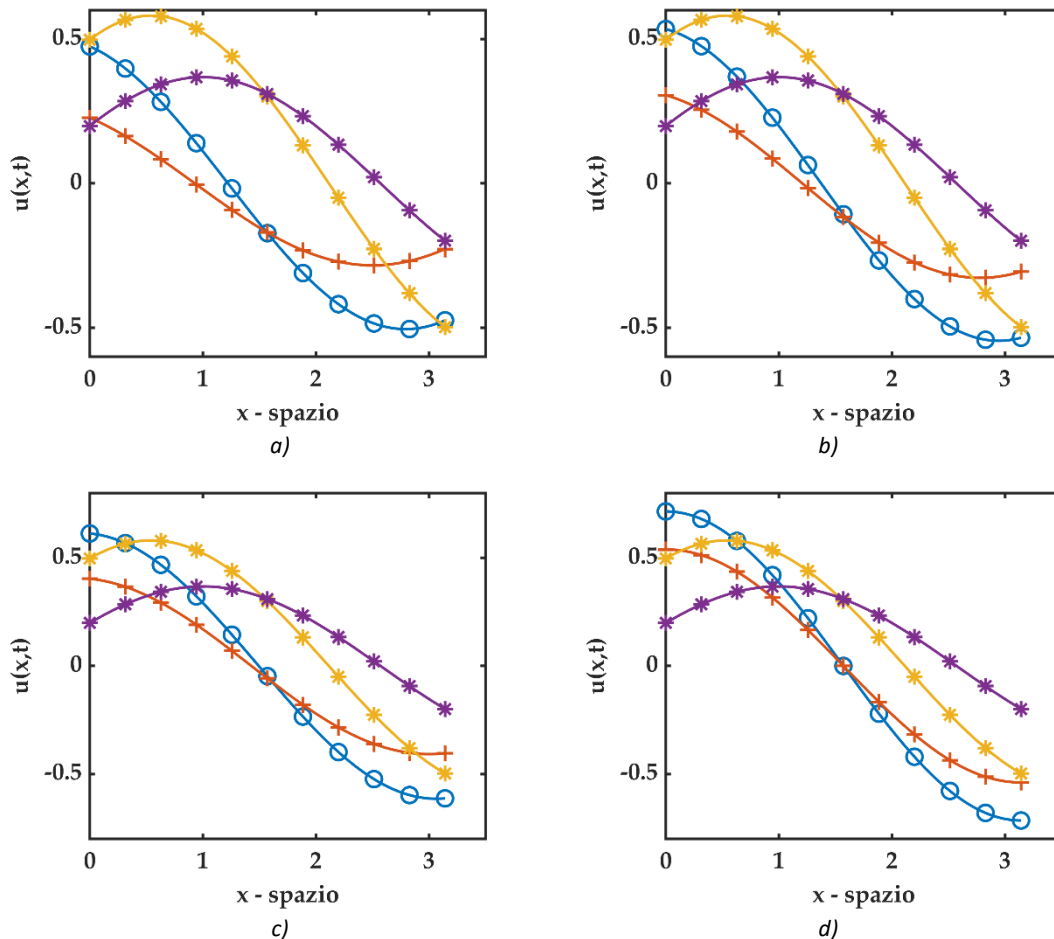


Figura 10-112 plot 2D per S-FRADE con $u(x, 0) = \cos(x)$ e $t = 1.0$ dove ($*$ asterisco - viola) rappresenta la soluzione standard ADE e $D = V = \cos(t)$, ($*$ asterisco - giallo) rappresenta la soluzione standard ADE e $D = V = \sinh(t)$, ($+$ croce - rosso) rappresenta la soluzione S-FRADE $D = V = \cos(t)$, (\odot cerchio - blu) rappresenta la soluzione S-FRADE e $D = V = \sinh(t)$. Si fissa il valore di $\gamma = 1.2$. a) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.2$, b) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.4$, c) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.6$, d) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.8$.

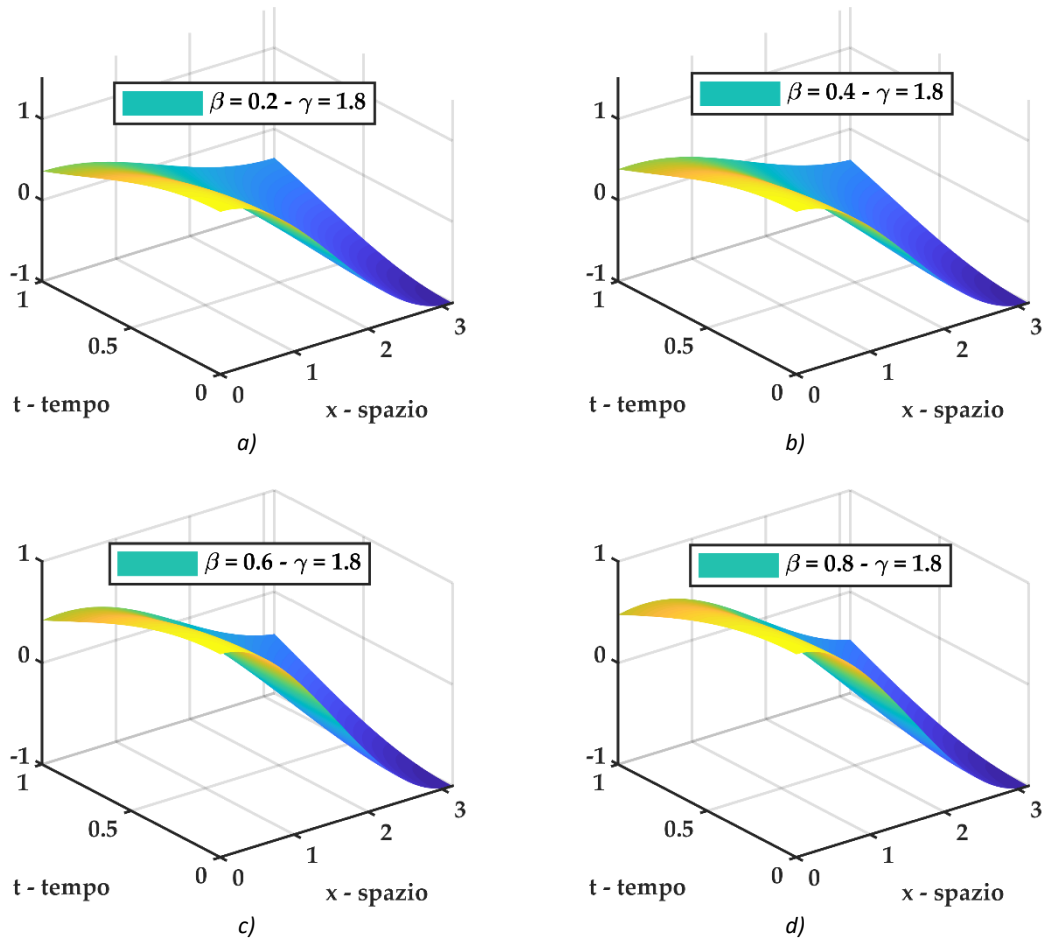


Figura 10-113 plot 3D della soluzione $u(x,t)$ del problema differenziale frazionario S-FRADE con $u(x,0) = \cos(x)$ e coefficiente di diffusione ed avvezione funzione del tempo $V = D = \sinh(t)$ per diversi valori dell'ordine di derivazione frazionario fissato $\gamma = 1.8$. a) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.2$, b) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.4$, c) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.6$, d) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.8$

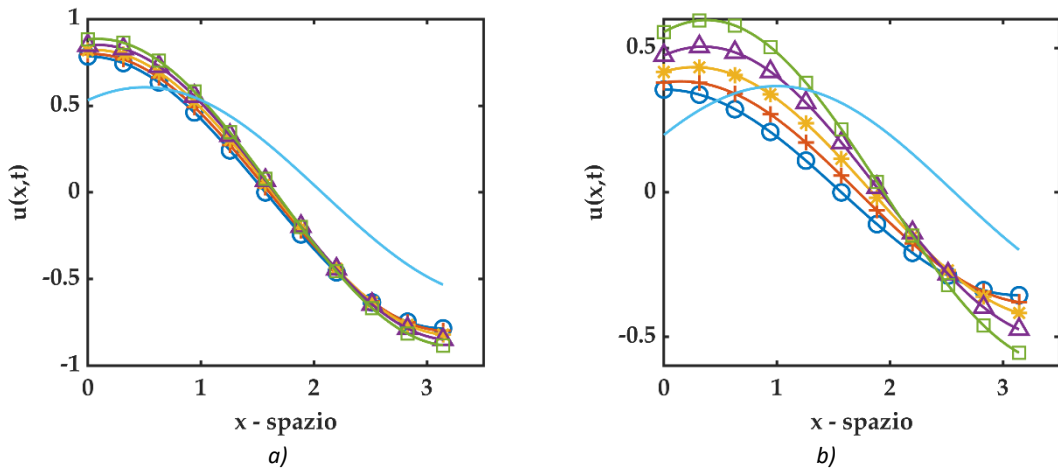


Figura 10-114 plot 2D di confronto fra soluzioni del problema differenziale frazionario S-FRADE con $u(x,0) = \cos(x)$ e coefficienti di diffusione ed avvezione funzione del tempo $V = D = \sinh(t)$. Il valore di $\gamma = 1.8$ è fissato e \odot (cerchio - blu) rappresenta la soluzione per $\beta = 0.2$, $+$ (croce - rosso) rappresenta la soluzione per $\beta = 0.4$, $*$ (asterisco - giallo) rappresenta la soluzione per $\beta = 0.6$, \triangle (triangolo - viola) rappresenta la soluzione per $\beta = 0.6$, \square (quadrato - verde) rappresenta la soluzione per $\beta = 1.0$, $-$ (linea continua - azzurro) rappresenta la soluzione della standard ADE. a) plot 2D per $t = 0.5$, b) plot 2D per $t = 1.0$

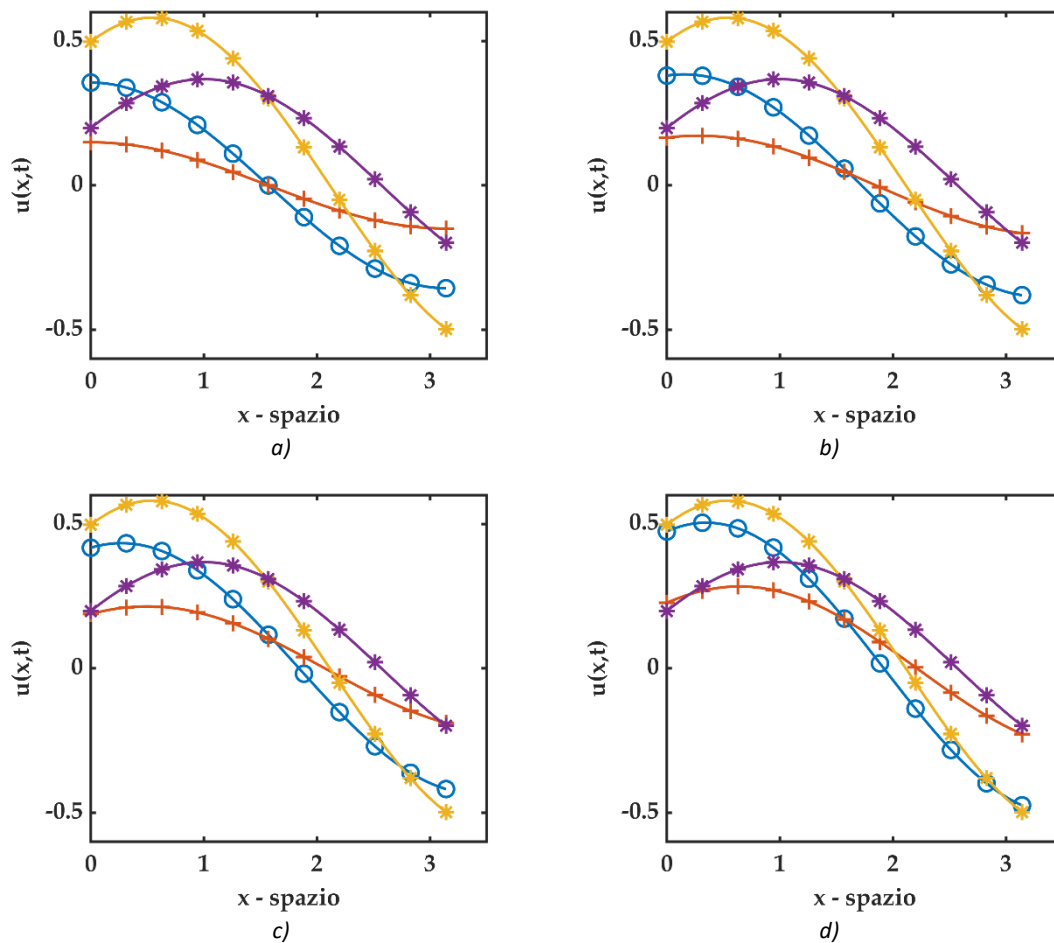


Figura 10-115 plot 2D di confronto fra soluzioni del problema differenziale frazionario S-FRADE con $u(x, 0) = \cos(x)$ e $t = 1.0$ dove (* asterisco - viola) rappresenta la soluzione standard ADE e $D = V = \text{cost}$, (* asterisco - giallo) rappresenta la soluzione standard ADE e $D = V = \sinh(t)$, (+ croce - rosso) rappresenta la soluzione S-FRADE $D = V = \text{cost}$, (⊙ cerchio - blu) rappresenta la soluzione S-FRADE e $D = V = \sinh(t)$. Si fissa il valore di $\gamma = 1.8$. a) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.2$, b) soluzione S-FRDE per $\beta = 0.4$, c) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.6$, d) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.8$.

10.3.4.3.1 Algoritmo Matlab

Di seguito viene riportato un estratto dello script Matlab utilizzato per i plot sopra riportati, soffermandosi sul calcolo della soluzione inerente il problema differenziale S-FRADE. Il simbolo (:) sta ad indicare che la parte di codice precedente è esattamente la stessa di quella riportata al paragrafo 10.3.4.1.1 per il problema S-FRADE con $u(x, 0) = x^\delta$, essendo adibita al calcolo delle componenti della matrice \mathbf{C} per l'integrazione temporale in ADM che non si modifica al variare delle condizioni al contorno.

```
function [u_SPFADE_sinh] =
uSP_fraz_sinh_cosx(Nmax,x1,t1,Gamma,beta)
% uSP_fraz_cost => SPF      = space fractional
%                    ADE    = Advection Diffusion Equation
%                    sinh(t) = D(t)=V(t)=g(t)=sinh(t)
% function per il calcolo della soluzione del seguente problema
% differenziale
```

```

%-----
% u,t + sinh(t) u,beta = sinh(t) u,Gamma      1 < Gamma <= 2 && 0 <
beta <= 1
% u(x,0) = cos(x)
%-----
                                     :

u_SPFADE_sinht = zeros(length(t1),length(x1));
SUM = 0;
for n = 0 : Nmax
    if n == 0
        u_SPFADE_sinht = cos(x1);
    else
        for j = 0 : n
            SUM = SUM + (-1)^j*nchoosek(n,j)*cos(x1 + ((n-
j)*Gamma+j*beta)*pi/2);
        end
        u_SPFADE_sinht = u_SPFADE_sinht + C(:,n)*SUM;
        SUM = 0;
    end
end
end

```

10.3.4.4 S-FRADE con condizioni iniziali $u(x, 0) = e^{ax}$

Si considera il seguente problema differenziale

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \sinh(t) \cdot \frac{\partial^\beta u}{\partial x^\beta} = \sinh(t) \cdot \frac{\partial^\gamma u}{\partial x^\gamma} \\ u(x, 0) = e^{ax} \end{cases} \quad (10.55)$$

Dove la derivata frazionaria è di Caputo con terminale $a = -\infty$.

Utilizzando i risultati precedenti, l' n -esimo termine della decomposizione ADM assume la seguente formulazione

$$u_n(x, t) = \frac{1}{\text{Diag}[\mathbb{A} \otimes (\text{Ref}\mathbb{A})^T]} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} +1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{ij} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (-1)^{j+1} \end{pmatrix}}_{[n+1] \times [n+1]} \cdot \begin{pmatrix} \cosh^n t \\ \cosh^{(n-1)} t \\ \cosh^{(n-2)} t \\ \vdots \\ \cosh t \\ 1 \end{pmatrix} \quad (10.56)$$

$$\cdot \sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{n}{j} a^{(n-j)\gamma + j\beta} \cdot e^{ax}$$

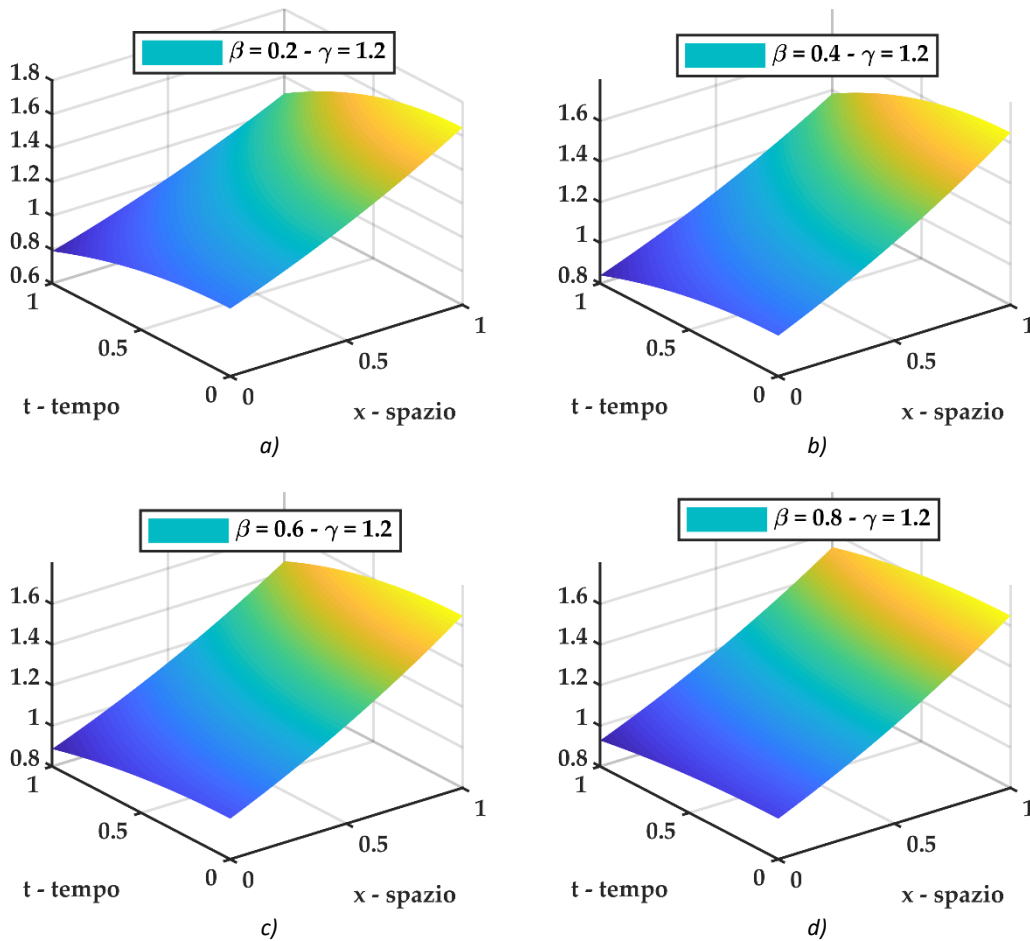


Figura 10-116 plot 3D della soluzione $u(x, t)$ del problema differenziale frazionario S-FRADE con $u(x, 0) = e^{ax}$ con $a = 0.50$ e coefficiente di diffusione ed avvezione funzione del tempo $V = D = \sinh(t)$ per diversi valori dell'ordine di derivazione frazionario fissato $\gamma = 1.2$. a) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.2$, b) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.4$, c) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.6$, d) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.8$

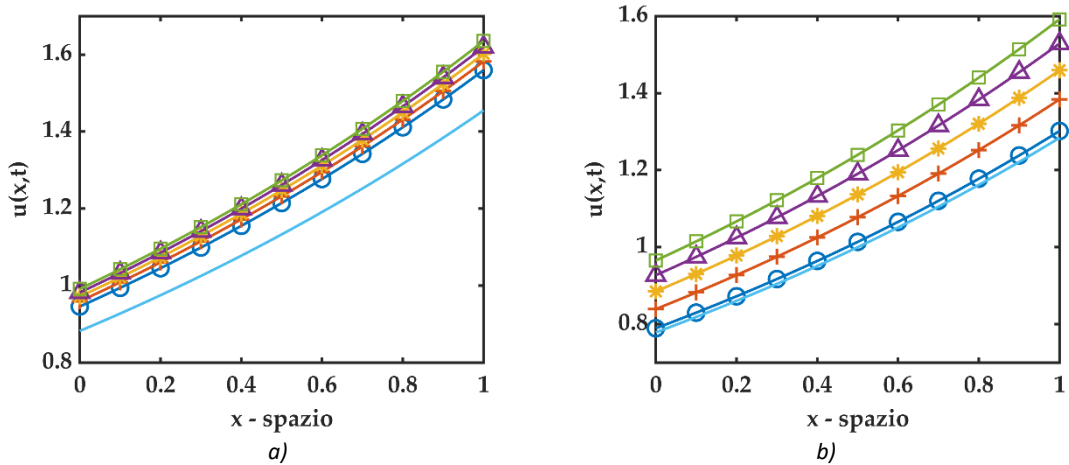


Figura 10-117 plot 2D di confronto fra soluzioni del problema differenziale frazionario S-FRADE con $u(x, 0) = e^{ax}$ con $a = 0.50$ e coefficienti di diffusione ed avvezione funzione del tempo $V = D = \sinh(t)$. Il valore di $\gamma = 1.2$ è fissato e (○ cerchio - blu) rappresenta la soluzione per $\beta = 0.2$, (+ croce - rosso) rappresenta la soluzione per $\beta = 0.4$, (* asterisco - giallo) rappresenta la soluzione per $\beta = 0.6$, (△ triangolo - viola) rappresenta la soluzione per $\beta = 0.6$, (□ quadrato - verde) rappresenta la soluzione per $\beta = 1.0$, (— linea continua - azzurro) rappresenta la soluzione della standard ADE. a) plot 2D per $t = 0.5$, b) plot 2D per $t = 1.0$

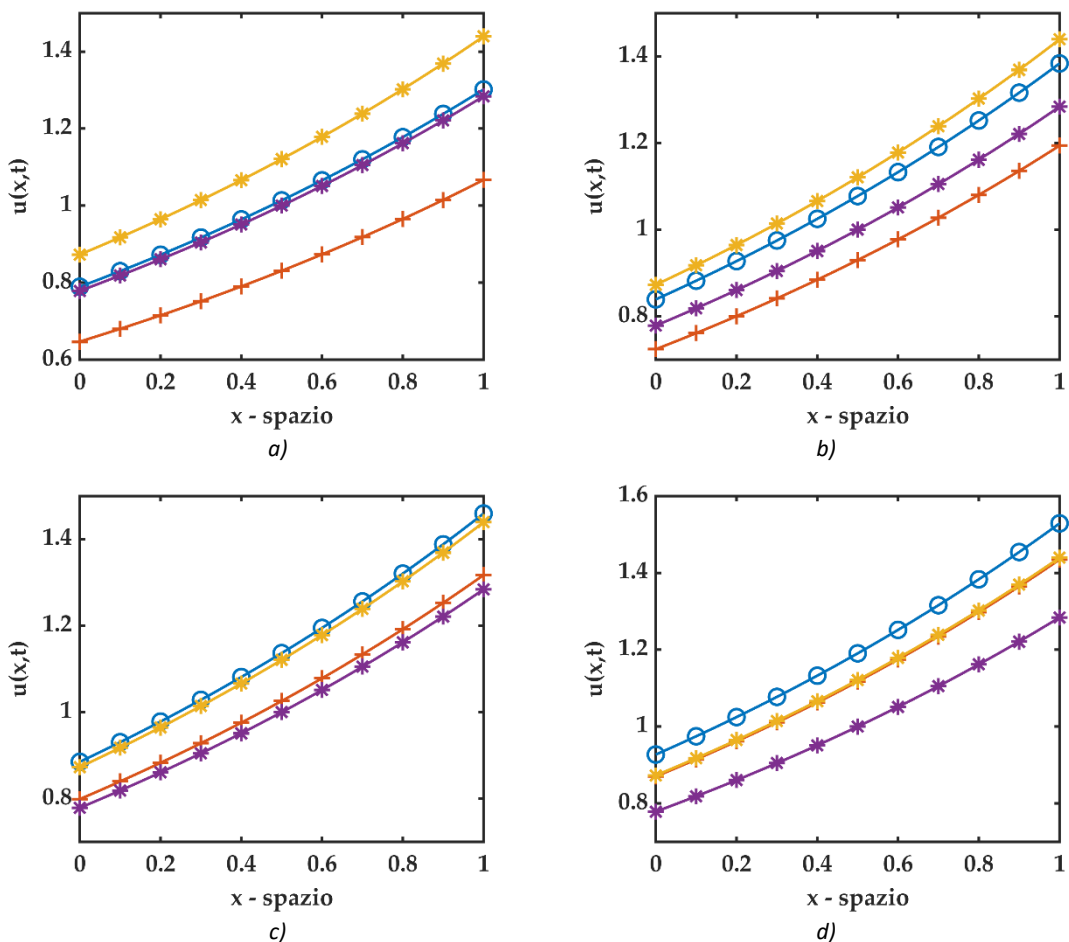


Figura 10-118 plot 2D di confronto per S-FRADE con $u(x, 0) = e^{ax}$ con $a = 0.50$ e $t = 1.0$ dove (* asterisco - viola) rappresenta la soluzione standard ADE e $D = V = \text{cost}$, (* asterisco - giallo) rappresenta la soluzione standard ADE e $D = V = \sinh(t)$, (+ croce - rosso) rappresenta la soluzione S-FRADE $D = V = \text{cost}$, (○ cerchio - blu) rappresenta la soluzione S-FRADE e $D = V = \sinh(t)$. Si fissa il valore di $\gamma = 1.2$. a) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.2$, b) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.4$, c) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.6$, d) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.8$.

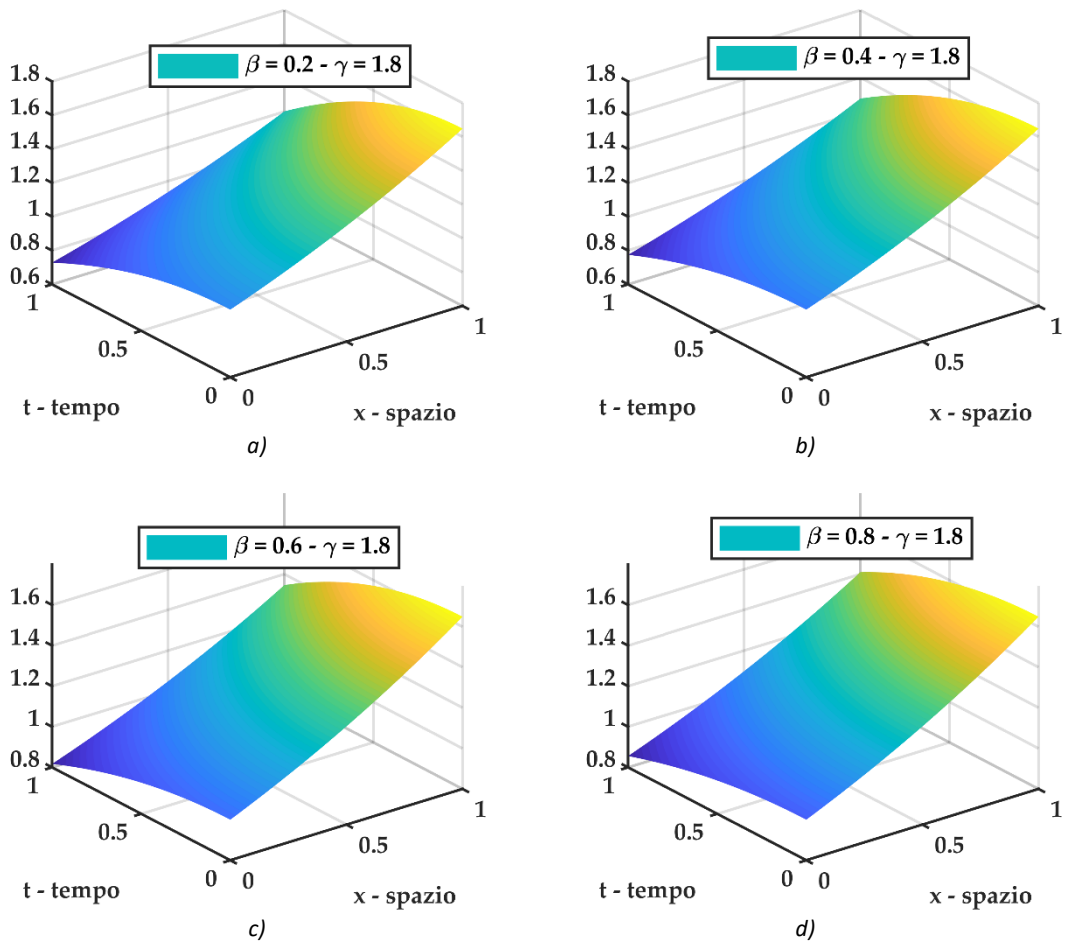


Figura 10-119 plot 3D della soluzione $u(x, t)$ del problema differenziale frazionario S-FRADE con $u(x, 0) = e^{ax}$ con $a = 0.50$ e coefficiente di diffusione ed avvezione funzione del tempo $V = D = \sinh(t)$ per diversi valori dell'ordine di derivazione frazionario fissato $\gamma = 1.8$. a) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.2$, b) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.4$, c) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.6$, d) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.8$

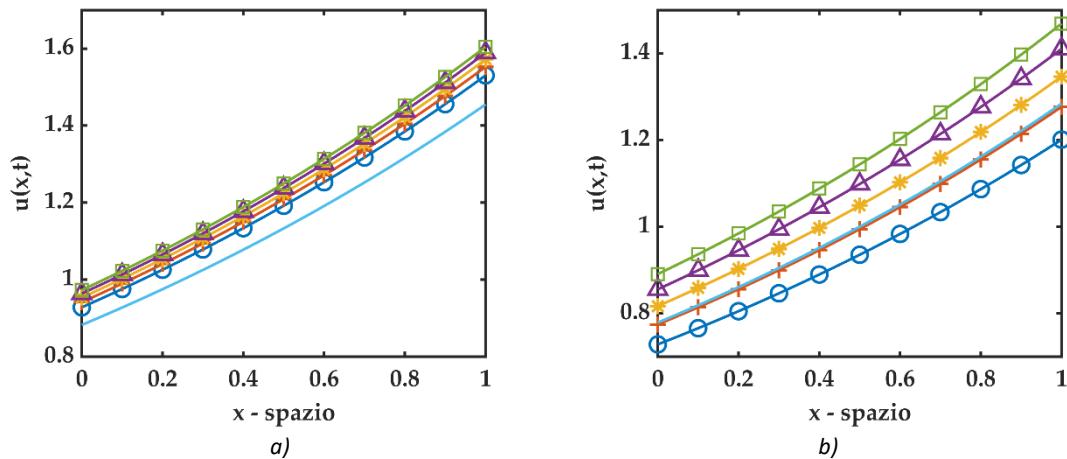


Figura 10-120 plot 2D di confronto fra soluzioni del problema differenziale frazionario S-FRADE con $u(x, 0) = e^{ax}$ con $a = 0.50$ e coefficienti di diffusione ed avvezione funzione del tempo $V = D = \sinh(t)$. Il valore di $\gamma = 1.8$ è fissato e (○ cerchio - blu) rappresenta la soluzione per $\beta = 0.2$, (+ croce - rosso) rappresenta la soluzione per $\beta = 0.4$, (* asterisco - giallo) rappresenta la soluzione per $\beta = 0.6$, (△ triangolo - viola) rappresenta la soluzione per $\beta = 0.6$, (□ quadrato - verde) rappresenta la soluzione per $\beta = 1.0$, (— linea continua - azzurro) rappresenta la soluzione della standard ADE. a) plot 2D per $t = 0.5$, b) plot 2D per $t = 1.0$

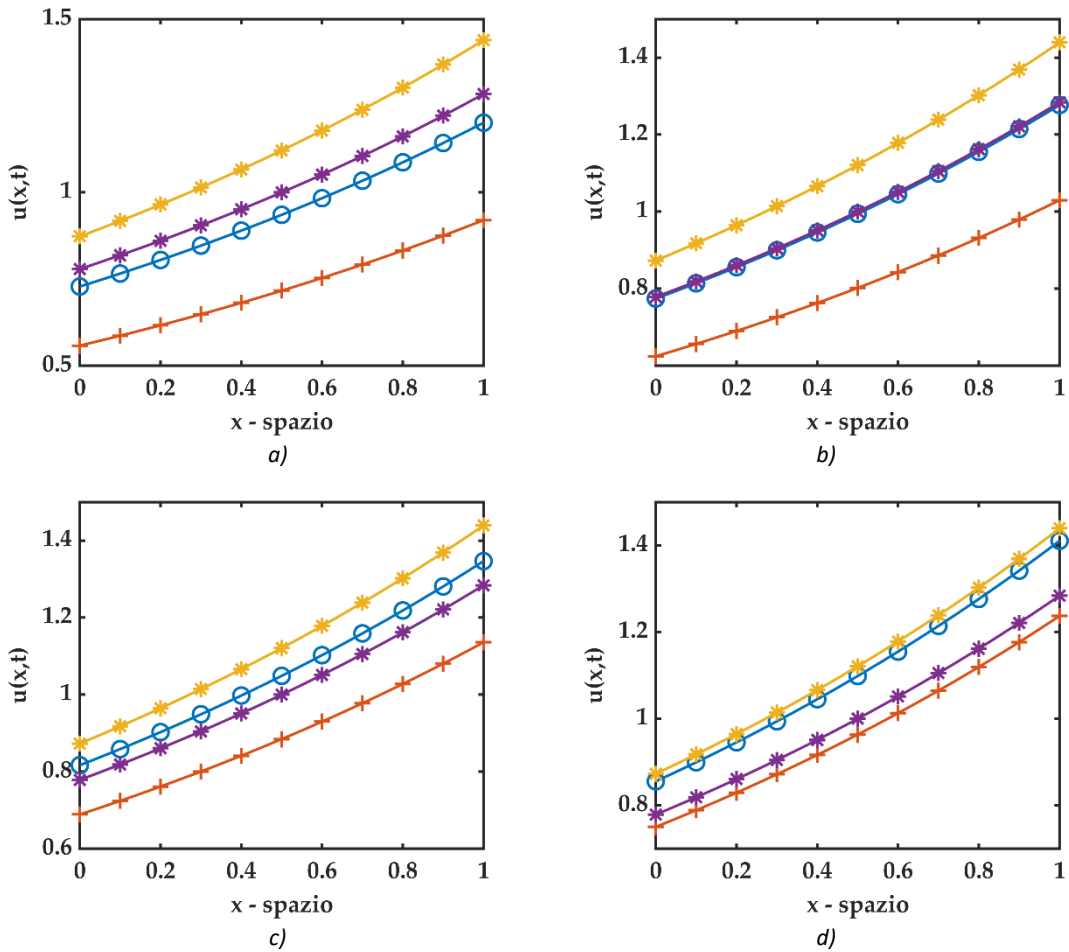


Figura 10-121 plot 2D di confronto fra soluzioni del problema differenziale frazionario S-FRADE con $u(x, 0) = e^{ax}$ con $a = 0.50$ e $t = 1.0$ dove (* asterisco - viola) rappresenta la soluzione standard ADE e $D = V = cost$, (* asterisco - giallo) rappresenta la soluzione standard ADE e $D = V = \sinh(t)$, (+ croce - rosso) rappresenta la soluzione S-FRADE $D = V = cost$, (⊙ cerchio - blu) rappresenta la soluzione S-FRADE e $D = V = \sinh(t)$. Si fissa il valore di $\gamma = 1.8$. a) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.2$, b) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.4$, c) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.6$, d) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.8$.

10.3.4.4.1 Algoritmo Matlab

Di seguito viene riportato un estratto dello script Matlab utilizzato per i plot sopra riportati, soffermandosi sul calcolo della soluzione inerente il problema differenziale S-FRADE. Il simbolo (:) sta ad indicare che la parte di codice precedente è esattamente la stessa di quella riportata al paragrafo 10.3.4.1.1 per il problema S-FRADE con $u(x, 0) = x^\delta$, essendo adibita al calcolo delle componenti della matrice **C** per l'integrazione temporale in ADM che non si modifica al variare delle condizioni al contorno.

```
function [u_SPFADE_sinht] =
uSP_fraz_sinht_eax(Nmax,x1,t1,Gamma,beta,a)
% uSP_fraz_cost => SPF      = space fractional
%                ADE      = Advection Diffusion Equation
%                sinh(t) = D(t)=V(t)=g(t)=sinh(t)
% function per il calcolo della soluzione del seguente problema
% differenziale
```

```

%-----
% u,t + sinh(t) u,beta = sinh(t) u,Gamma      1 < Gamma <= 2 && 0 <
beta <= 1
% u(x,0) = e^(ax)
%-----
:

u_SPFADE_sinht = zeros(length(t1),length(x1));
SUM = 0;
for n = 0 : Nmax
    if n == 0
        u_SPFADE_sinht = exp(a*x1);
    else
        for j = 0 : n
            SUM = SUM + (-1)^j*nchoosek(n,j)*a^((n-
j)*Gamma+j*beta)*exp(a*x1);
        end
        u_SPFADE_sinht = u_SPFADE_sinht + C(:,n)*SUM;
        SUM = 0;
    end
end
end
end

```

10.3.5 $V = D = g(t) = \cosh(t)$
10.3.5.1 S-FRADE con condizioni iniziali $u(x, 0) = x^\delta$

Si consideri il seguente problema differenziale

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \cosh(t) \cdot \frac{\partial^\beta u}{\partial x^\beta} = \cosh(t) \cdot \frac{\partial^\gamma u}{\partial x^\gamma} \\ u(x, 0) = x^\delta \end{cases} \quad (10.57)$$

Dove la derivata frazionaria è di Caputo con terminale $a = 0$.

In questo contesto essendo l'equazione differenziale frazionaria solamente in spazio si considera ${}^{RL} [{}^{ng}] \mathbb{I}_t^{n\alpha}(t) = [{}^{ng}] \mathbb{I}_t^n(t) = \int_0^t g(t) \int_0^t g(t) \int_0^t g(t) \dots dt dt dt$

$n = 1$	\rightarrow	$[g] \mathbb{I}_t^1(t) = \int_0^t g(t) dt$	$=$	$\sinh(t)$
$n = 2$	\rightarrow	$[{}^{2g}] \mathbb{I}_t^2(t) = \int_0^t g(t) \int_0^t g(t) dt dt$	$=$	$\frac{\sinh^2(t)}{2!}$
$n = 3$	\rightarrow	$[{}^{3g}] \mathbb{I}_t^3(t) = \int_0^t g(t) \int_0^t g(t) \int_0^t g(t) dt dt dt$	$=$	$\frac{\sinh^3(t)}{3!}$
$n = 4$	\rightarrow	$[{}^{4g}] \mathbb{I}_t^4(t) = \int_0^t g(t) \int_0^t g(t) \int_0^t g(t) \int_0^t g(t) dt dt dt dt$	$=$	$\frac{\sinh^4(t)}{4!}$
\vdots		\vdots		\vdots
n	\rightarrow	$[{}^{ng}] \mathbb{I}_t^n(t) = \int_0^t g(t) \int_0^t g(t) \int_0^t g(t) \dots dt dt dt$	$=$	$\frac{\sinh^n(t)}{n!}$

Quindi l' n -esimo termine della decomposizione ADM assume la seguente formulazione:

$$\begin{aligned} u_n(x, t) &= ({}^{RL} [{}^{ng}] \mathbb{I}_t^{n\alpha}(t)) \cdot \sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{n}{j} [D_x^{(n-j)\gamma+j\beta}] f(x) = \\ &= \frac{\sinh^n(t)}{n!} \cdot \sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{n}{j} \left\{ \frac{\Gamma(\delta+1)}{\Gamma(\delta+1 - [(n-j)\gamma+j\beta])} \cdot x^{-[(n-j)\gamma+j\beta]} \right\} \cdot x^\delta \end{aligned} \quad (10.58)$$

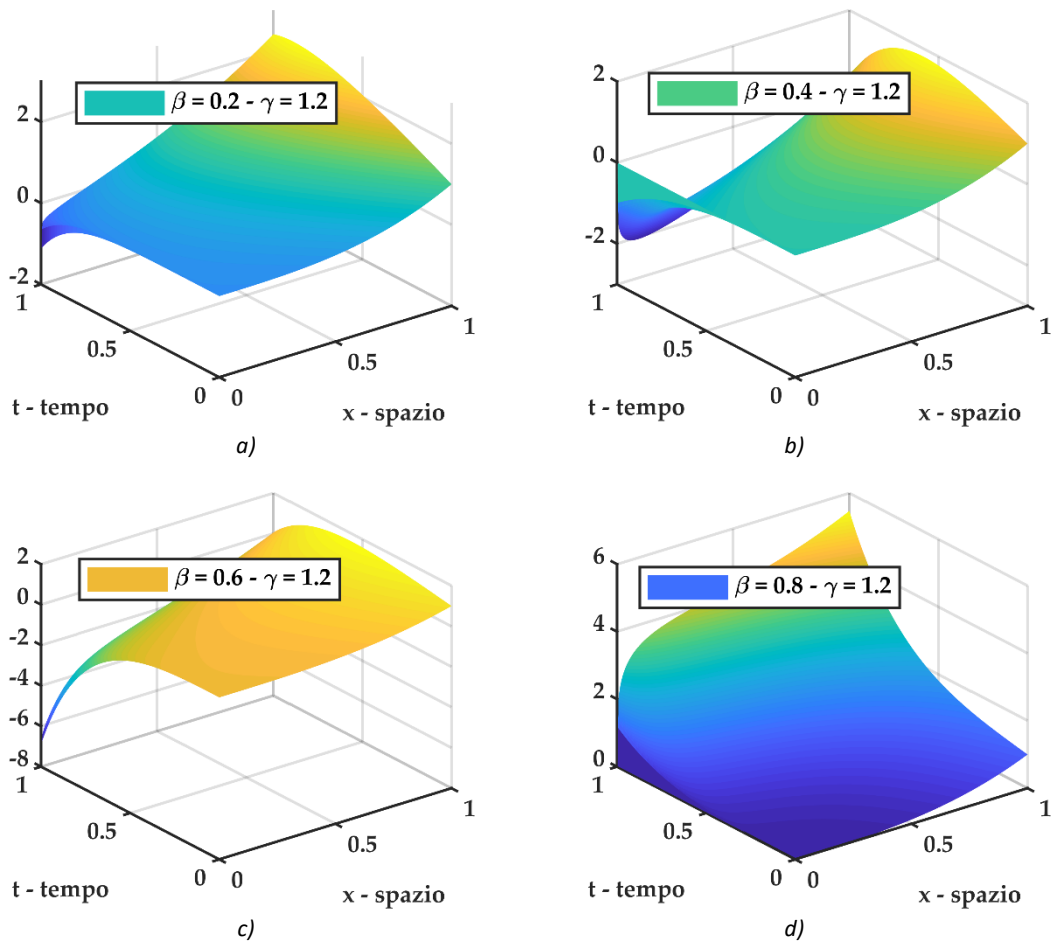


Figura 10-122 plot 3D della soluzione $u(x, t)$ del problema differenziale frazionario S-FRADE con $u(x, 0) = x^\delta$ con $\delta = 3$ e coefficiente di diffusione ed avvezione funzione del tempo $V = D = \cosh(t)$ per diversi valori dell'ordine di derivazione frazionario fissato $\gamma = 1.2$. a) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.2$, b) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.4$, c) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.6$, d) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.8$

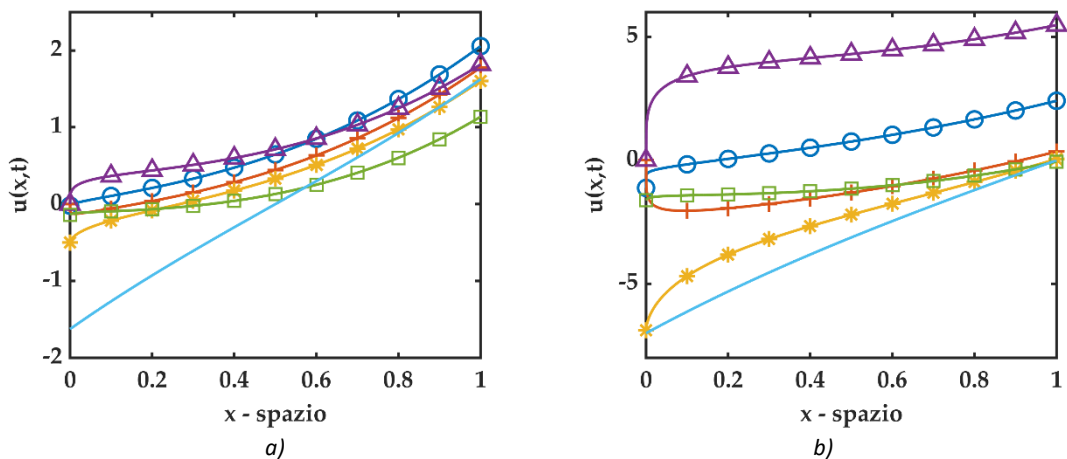


Figura 10-123 plot 2D di confronto fra soluzioni del problema differenziale frazionario S-FRADE con $u(x, 0) = x^\delta$ con $\delta = 3$ e coefficienti di diffusione ed avvezione funzione del tempo $V = D = \cosh(t)$. Il valore di $\gamma = 1.2$ è fissato e $(\odot$ cerchio - blu) rappresenta la soluzione per $\beta = 0.2$, $(+$ croce - rosso) rappresenta la soluzione per $\beta = 0.4$, $(*$ asterisco - giallo) rappresenta la soluzione per $\beta = 0.6$, $(\Delta$ triangolo - viola) rappresenta la soluzione per $\beta = 0.8$, $(\square$ quadrato - verde) rappresenta la soluzione per $\beta = 1.0$, $(-$ linea continua - azzurro) rappresenta la soluzione della standard ADE. a) plot 2D per $t = 0.5$, b) plot 2D per $t = 1.0$

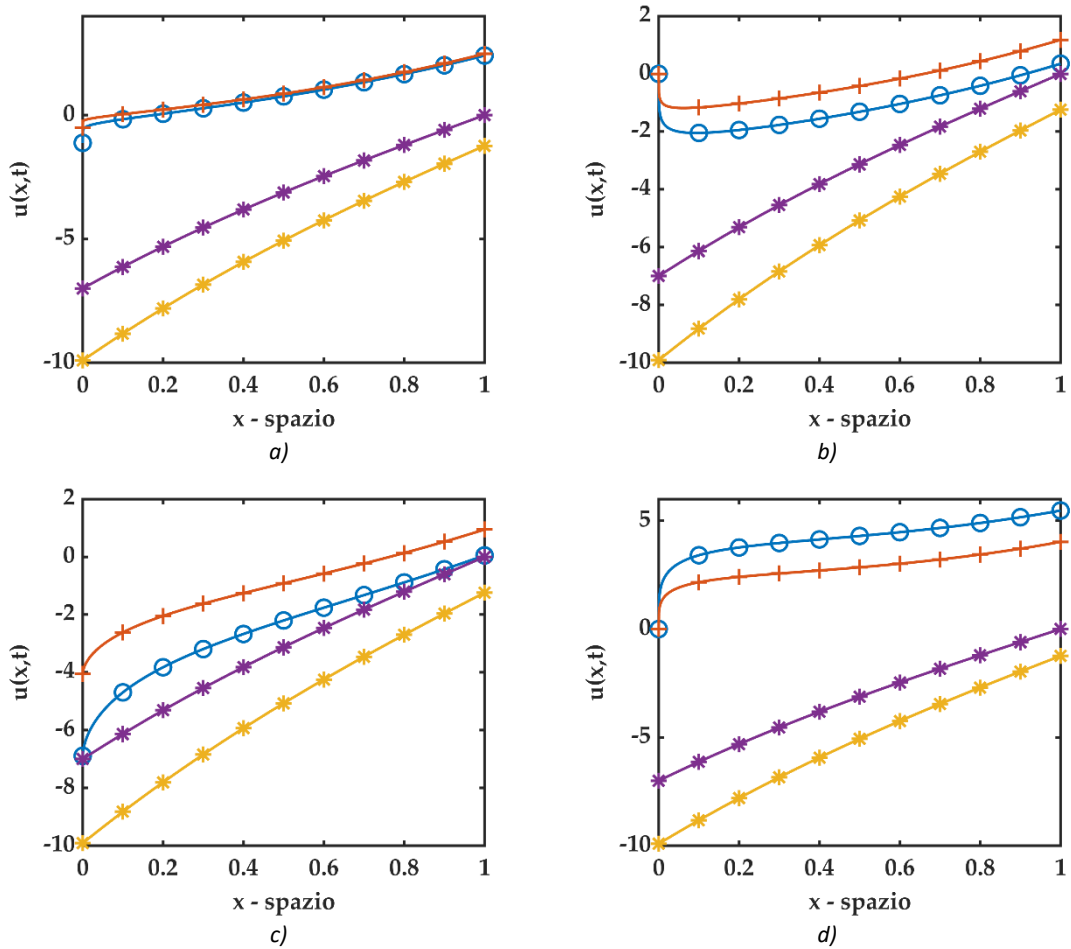


Figura 10-124 plot 2D di confronto fra soluzioni del problema differenziale frazionario S-FRADE con $u(x, 0) = x^\delta$ con $\delta = 3$ e $t = 1.0$ dove (* asterisco - viola) rappresenta la soluzione standard ADE e $D = V = \text{cost}$, (* asterisco - giallo) rappresenta la soluzione standard ADE e $D = V = \text{cosh}(t)$, (+ croce - rosso) rappresenta la soluzione S-FRADE $D = V = \text{cost}$, (⊙ cerchio - blu) rappresenta la soluzione S-FRADE e $D = V = \text{cosh}(t)$. Si fissa il valore di $\gamma = 1.2$. a) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.2$, b) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.4$, c) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.6$, d) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.8$.

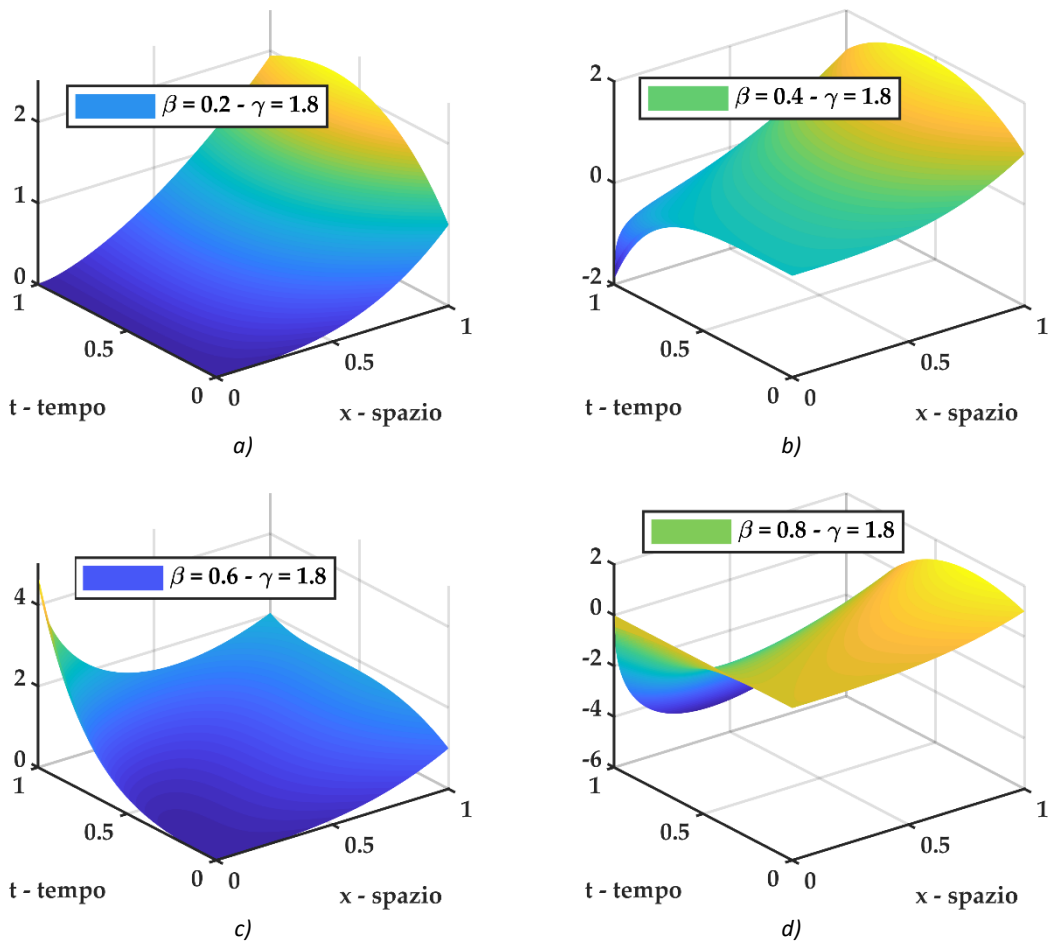


Figura 10-125 plot 3D della soluzione $u(x, t)$ del problema differenziale frazionario S-FRADE con $u(x, 0) = x^\delta$ con $\delta = 3$ e coefficiente di diffusione ed avvezione funzione del tempo $V = D = \cosh(t)$ per diversi valori dell'ordine di derivazione frazionario fissato $\gamma = 1.8$. a) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.2$, b) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.4$, c) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.6$, d) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.8$

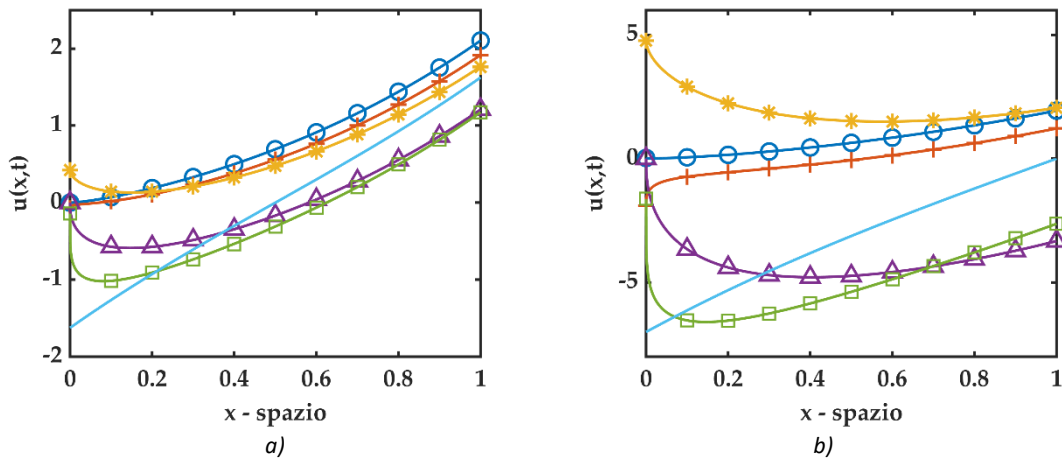


Figura 10-126 plot 2D di confronto fra soluzioni del problema differenziale frazionario S-FRADE con $u(x, 0) = x^\delta$ con $\delta = 3$ e coefficienti di diffusione ed avvezione funzione del tempo $V = D = \cosh(t)$. Il valore di $\gamma = 1.8$ è fissato e (● cerchio - blu) rappresenta la soluzione per $\beta = 0.2$, (+ croce - rosso) rappresenta la soluzione per $\beta = 0.4$, (* asterisco - giallo) rappresenta la soluzione per $\beta = 0.6$, (△ triangolo - viola) rappresenta la soluzione per $\beta = 1.0$, (— linea continua - azzurro) rappresenta la soluzione della standard ADE. a) plot 2D per $t = 0.5$, b) plot 2D per $t = 1.0$

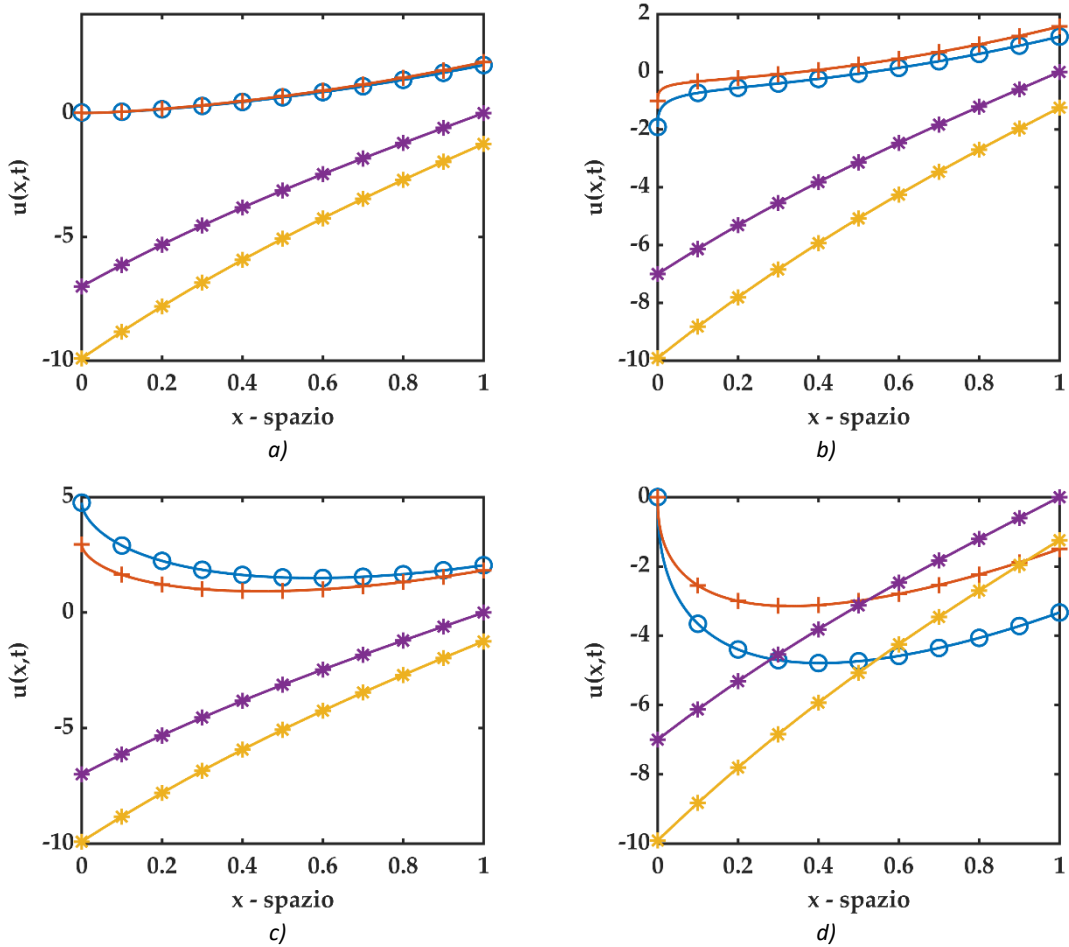


Figura 10-127 plot 2D di confronto fra soluzioni del problema differenziale frazionario S-FRADE con $u(x, 0) = x^\delta$ con $\delta = 3$ e $t = 1.0$ dove (* asterisco - viola) rappresenta la soluzione standard ADE e $D = V = cost$, (* asterisco - giallo) rappresenta la soluzione standard ADE e $D = V = cosh(t)$, (+ croce - rosso) rappresenta la soluzione S-FRADE $D = V = cost$, (⊙ cerchio - blu) rappresenta la soluzione S-FRADE e $D = V = cosh(t)$. Si fissa il valore di $\gamma = 1.8$. a) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.2$, b) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.4$, c) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.6$, d) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.8$.

10.3.5.1.1 Algoritmo Matlab

Di seguito viene riportato un estratto dello script Matlab utilizzato per i plot sopra riportati, soffermandosi sul calcolo della soluzione inerente il problema differenziale S-FRADE

```
function [u_SPFADe_cosht] =
uSP_fraz_cosht_xdelta(Nmax,x1,t1,Gamma,beta,delta)
% uSP_fraz_cost => SPF      = space fractional
%                      ADE  = Advection Diffusion Equations
%                      cosh(t) = D(t)=V(t)=g(t)=cosh(t)
% function per il calcolo della soluzione del seguente problema
% differenziale
%-----
% u,t + cosh(t) u,beta = cosh(t) u,gamma      1 < Gamma <= 2 && 0 <
beta <= 1
```

```

% u(x,0) = x^delta
%-----
u_SPFADE_cosht = zeros(length(t1),length(x1));
SUM = 0;
for n = 0 : Nmax
    for j = 0 : n
        M_1 = floor((n-j)*Gamma+j*beta);
        if M_1 >= delta && M_1 ~= (n-j)*Gamma+j*beta
            SUM = SUM;
        elseif M_1 > delta
            SUM = SUM;
        else
            SUM = SUM + (-
1)^j*nchoosek(n,j)*gamma(delta+1)/gamma(delta+1-((n-
j)*Gamma+j*beta))*x1.^(delta-((n-j)*Gamma+j*beta));
        end
    end
    u_SPFADE_cosht = u_SPFADE_cosht +
(sinh(t1)).^n/factorial(n)*SUM;
    SUM = 0;
end
end

```

10.3.5.2 S-FRADE con condizioni iniziali $u(x, 0) = \sin(x)$

Si considera il seguente problema differenziale

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \cosh(t) \cdot \frac{\partial^\beta u}{\partial x^\beta} = \cosh(t) \cdot \frac{\partial^\gamma u}{\partial x^\gamma} \\ u(x, 0) = \sin(x) \end{cases} \quad (10.59)$$

Dove la derivata frazionaria è di Caputo con terminale $a = -\infty$. Utilizzando i risultati precedenti, l' n -esimo termine della decomposizione ADM assume la seguente formulazione

$$u_n(x, t) = \frac{\sinh^n(t)}{n!} \cdot \sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{n}{j} \sin\left(x + \frac{[(n-j)\gamma + j\beta]\pi}{2}\right) \quad (10.60)$$

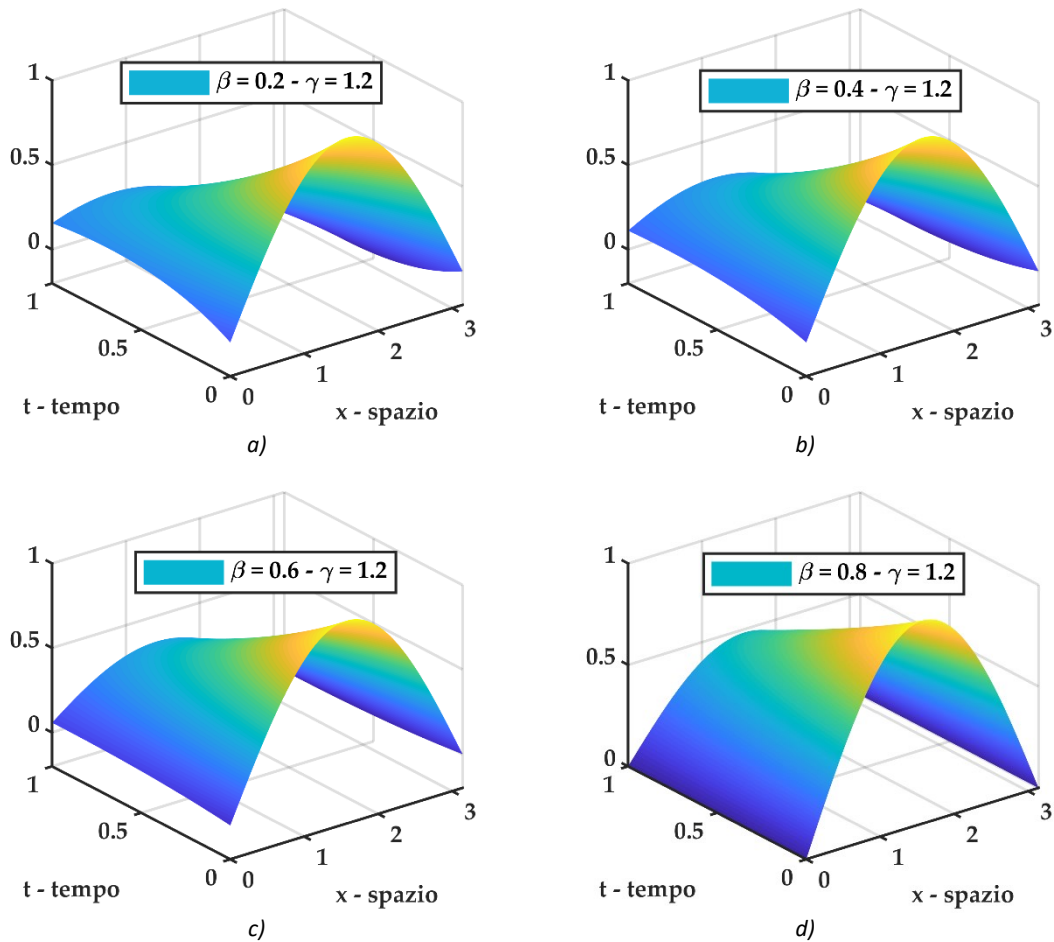


Figura 10-128 plot 3D della soluzione $u(x, t)$ del problema differenziale frazionario S-FRADE con $u(x, 0) = \sin(x)$ e coefficiente di diffusione ed avvezione funzione del tempo $V = D = \cosh(t)$ per diversi valori dell'ordine di derivazione frazionario fissato $\gamma = 1.2$. a) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.2$, b) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.4$, c) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.6$, d) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.8$

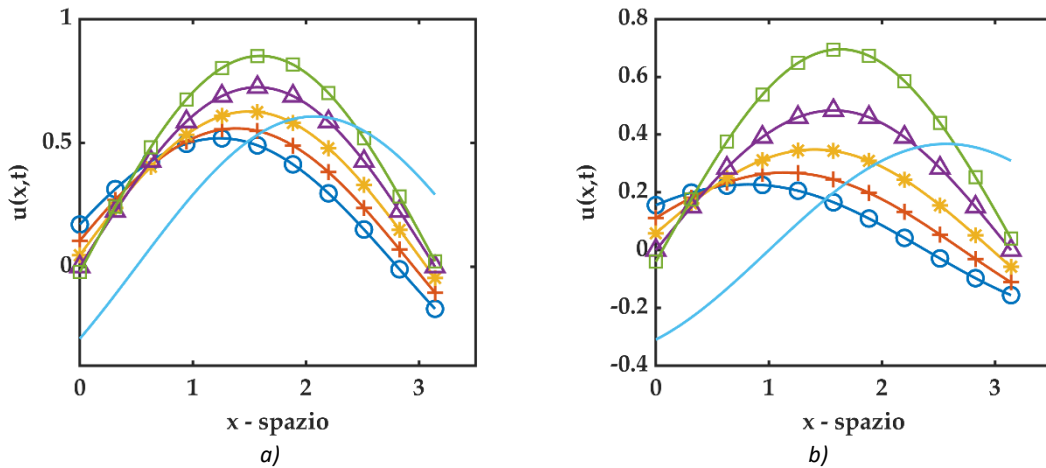


Figura 10-129 plot 2D di confronto fra soluzioni del problema differenziale frazionario S-FRADE con $u(x, 0) = \sin(x)$ e coefficienti di diffusione ed avvezione funzione del tempo $V = D = \cosh(t)$. Il valore di $\gamma = 1.2$ è fissato e (⊙ cerchio - blu) rappresenta la soluzione per $\beta = 0.2$, (+ croce - rosso) rappresenta la soluzione per $\beta = 0.4$, (* asterisco - giallo) rappresenta la soluzione per $\beta = 0.6$, (Δ triangolo - viola) rappresenta la soluzione per $\beta = 0.6$, (□ quadrato - verde) rappresenta la soluzione per $\beta = 1.0$, (— linea continua - azzurro) rappresenta la soluzione della standard ADE. a) plot 2D per $t = 0.5$, b) plot 2D per $t = 1.0$

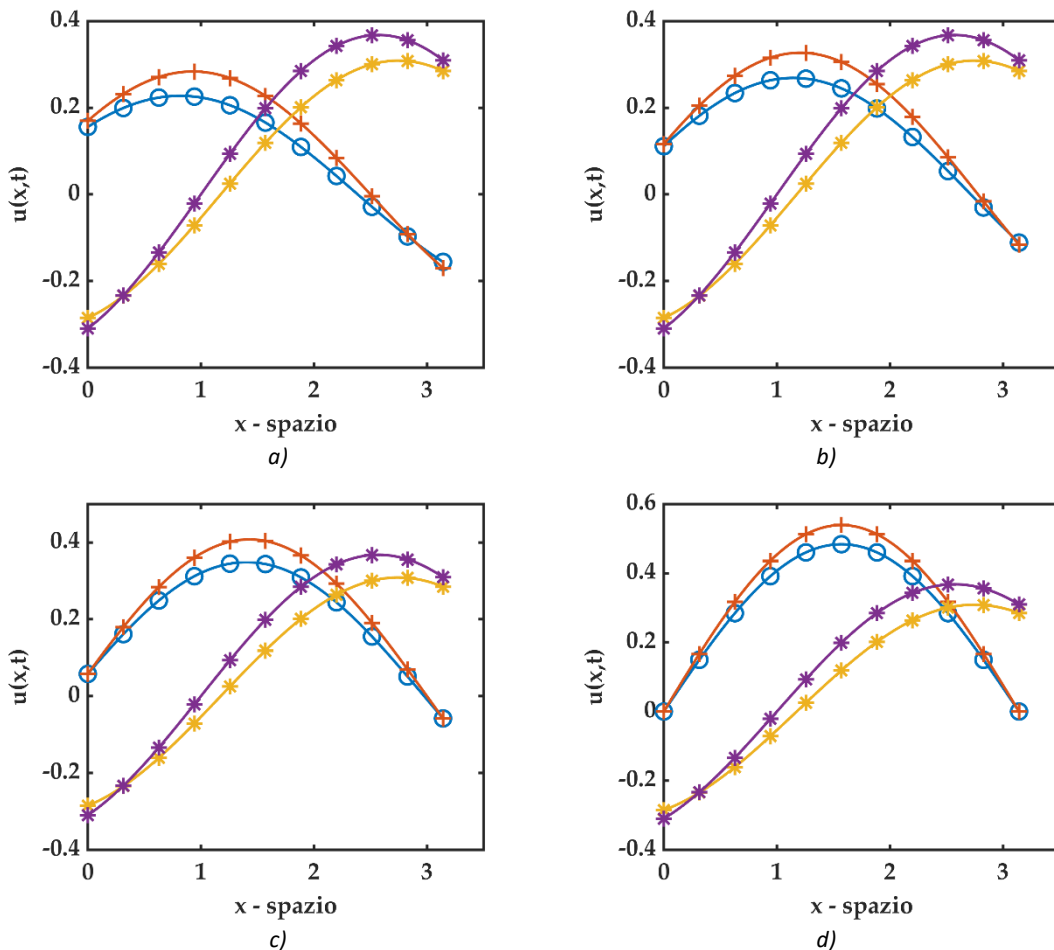


Figura 10-130 plot 2D di confronto per S-FRADE con $u(x, 0) = \sin(x)$ e $t = 1.0$ dove (* asterisco - viola) rappresenta la soluzione standard ADE e $D = V = \text{cost}$, (* asterisco - giallo) rappresenta la soluzione standard ADE e $D = V = \cosh(t)$, (+ croce - rosso) rappresenta la soluzione S-FRADE $D = V = \text{cost}$, (⊙ cerchio - blu) rappresenta la soluzione S-FRADE e $D = V = \cosh(t)$. Si fissa il valore di $\gamma = 1.2$. a) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.2$, b) soluzione S-FRDE per $\beta = 0.4$, c) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.6$, d) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.8$.

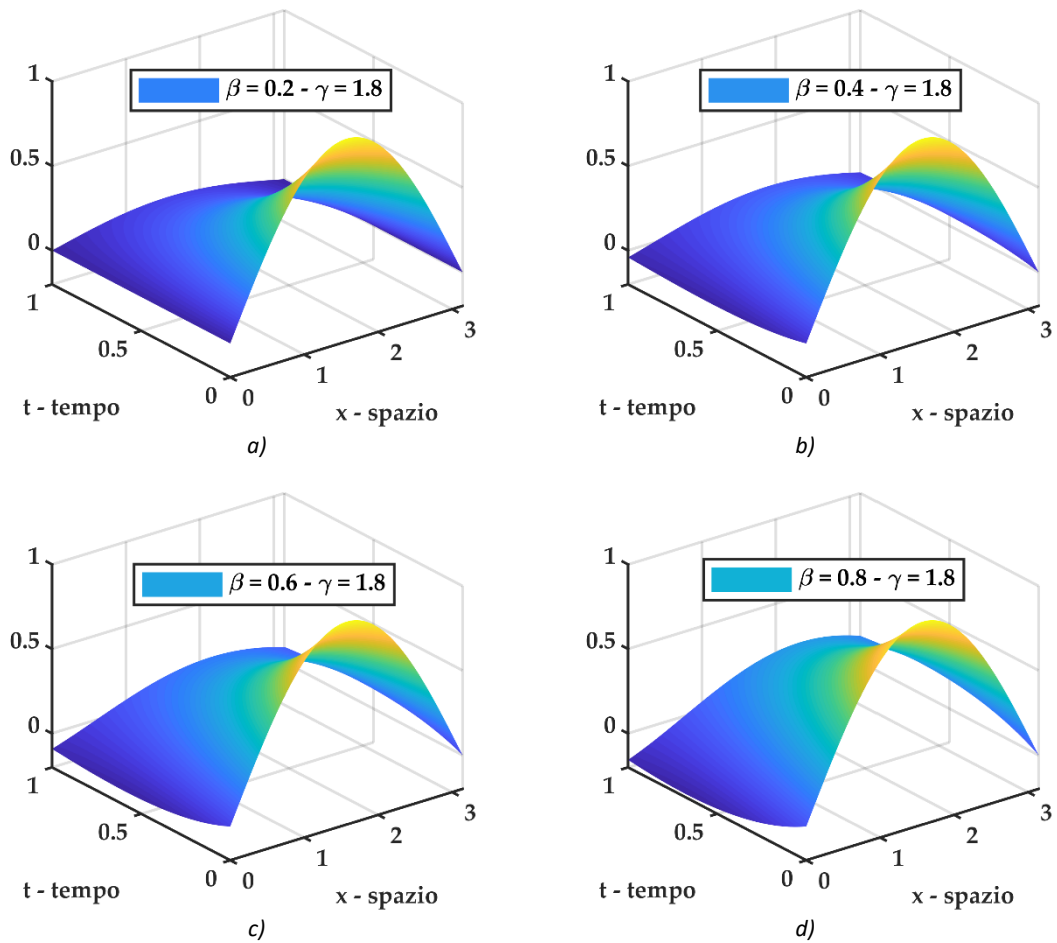


Figura 10-131 plot 3D della soluzione $u(x,t)$ del problema differenziale frazionario S-FRADE con $u(x,0) = \sin(x)$ e coefficiente di diffusione ed avvezione funzione del tempo $V = D = \cosh(t)$ per diversi valori dell'ordine di derivazione frazionario fissato $\gamma = 1.8$. a) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.2$, b) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.4$, c) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.6$, d) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.8$

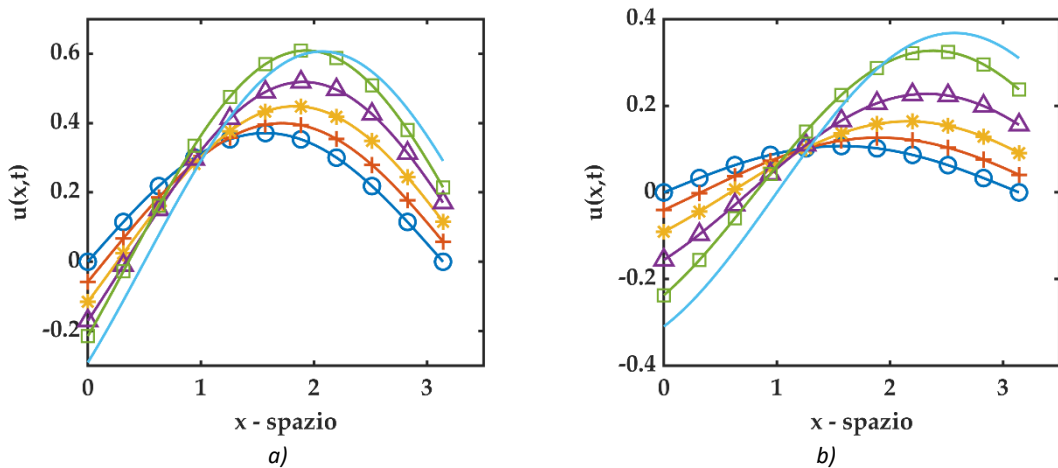


Figura 10-132 plot 2D di confronto fra soluzioni del problema differenziale frazionario S-FRADE con $u(x,0) = \sin(x)$ e coefficienti di diffusione ed avvezione funzione del tempo $V = D = \cosh(t)$. Il valore di $\gamma = 1.8$ è fissato e (○ cerchio - blu) rappresenta la soluzione per $\beta = 0.2$, (+ croce - rosso) rappresenta la soluzione per $\beta = 0.4$, (* asterisco - giallo) rappresenta la soluzione per $\beta = 0.6$, (△ triangolo - viola) rappresenta la soluzione per $\beta = 0.6$, (□ quadrato - verde) rappresenta la soluzione per $\beta = 1.0$, (— linea continua - azzurro) rappresenta la soluzione della standard ADE. a) plot 2D per $t = 0.5$, b) plot 2D per $t = 1.0$

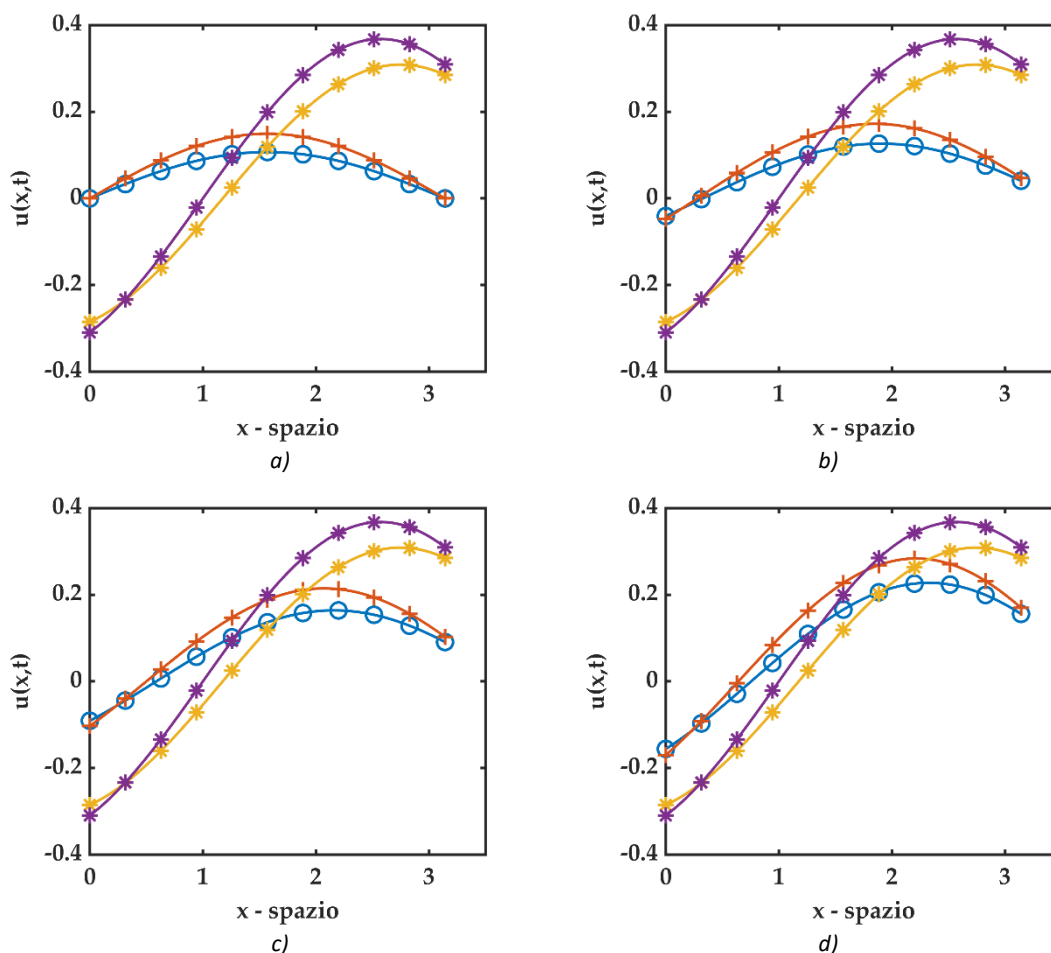


Figura 10-133 plot 2D di confronto fra soluzioni del problema differenziale frazionario S-FRADE con $u(x, 0) = \sin(x)$ e $t = 1.0$ dove (* asterisco - viola) rappresenta la soluzione standard ADE e $D = V = \text{cost}$, (* asterisco - giallo) rappresenta la soluzione standard ADE e $D = V = \cosh(t)$, (+ croce - rosso) rappresenta la soluzione S-FRADE $D = V = \text{cost}$, (⊙ cerchio - blu) rappresenta la soluzione S-FRADE e $D = V = \cosh(t)$. Si fissa il valore di $\gamma = 1.8$. a) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.2$, b) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.4$, c) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.6$, d) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.8$.

10.3.5.2.1 Algoritmo Matlab

Di seguito viene riportato un estratto dello script Matlab utilizzato per i plot sopra riportati, soffermandosi sul calcolo della soluzione inerente il problema differenziale S-FRADE.

```
function [u_SPFADE_cosh_t] =
uSP_fraz_cosht_sinx(Nmax,x1,t1,Gamma,beta)
% uSP_fraz_cost => SPF      = space fractional
%                    ADE    = Advection Diffusion Equation
%                    cosh(t) = D(t)=V(t)=g(t)=cosh(t)
% function per il calcolo della soluzione del seguente problema
% differenziale
%-----
% u,t + cosh(t) u,beta = cosh(t) u,Gamma      1 < Gamma <= 2 && 0 <
beta <= 1
% u(x,0) = sin(x)
%-----
u_SPFADE_cosh_t = zeros(length(t1),length(x1));
```

```

SUM = 0;
for n = 0 : Nmax
    for j = 0 : n
        SUM = SUM + (-1)^j*nchoosek(n,j)*sin(x1 + ((n-
j)*Gamma+j*beta)*pi/2);
    end
    u_SPFADE_cosh_t = u_SPFADE_cosh_t +
(sinh(t1)).^n/factorial(n)*SUM;
    SUM = 0;
end
end

```

10.3.5.3 S-FRADE con condizioni iniziali $u(x, 0) = \cos(x)$

Si considera il seguente problema differenziale

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \cosh(t) \cdot \frac{\partial^\beta u}{\partial x^\beta} = \cosh(t) \cdot \frac{\partial^\gamma u}{\partial x^\gamma} \\ u(x, 0) = \cos(x) \end{cases} \quad (10.61)$$

Dove la derivata frazionaria è di Caputo con terminale $a = -\infty$. Utilizzando i risultati precedenti, l' n -esimo termine della decomposizione ADM assume la seguente formulazione

$$u_n(x, t) = \frac{\sinh^n(t)}{n!} \cdot \sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{n}{j} \cos\left(x + \frac{[(n-j)\gamma + j\beta]\pi}{2}\right) \quad (10.62)$$

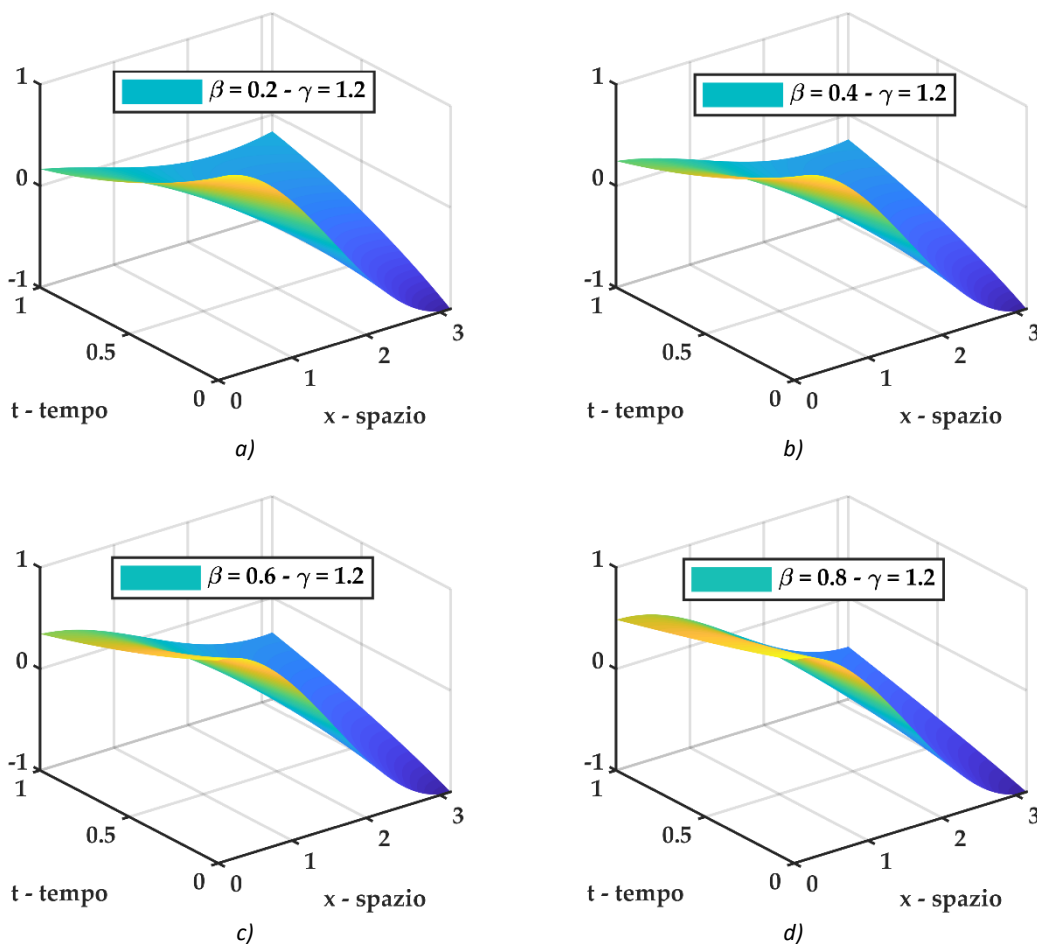


Figura 10-134 plot 3D della soluzione $u(x, t)$ del problema differenziale frazionario S-FRADE con $u(x, 0) = \cos(x)$ e coefficiente di diffusione ed avvezione funzione del tempo $V = D = \cosh(t)$ per diversi valori dell'ordine di derivazione frazionario fissato $\gamma = 1.2$. a) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.2$, b) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.4$, c) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.6$, d) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.8$

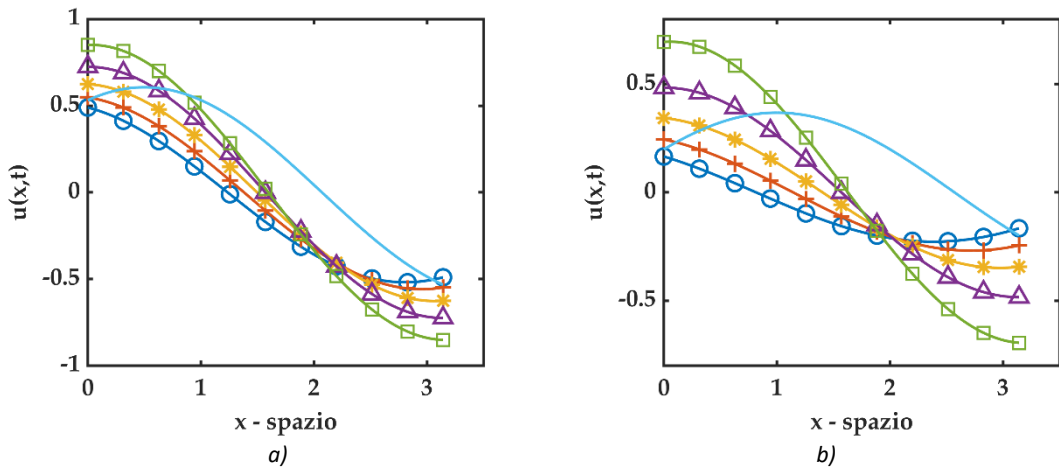


Figura 10-135 plot 2D di confronto fra soluzioni del problema differenziale frazionario S-FRADE con $u(x, 0) = \cos(x)$ e coefficienti di diffusione ed avvezione funzione del tempo $V = D = \cosh(t)$. Il valore di $\gamma = 1.2$ è fissato e (⊙ cerchio - blu) rappresenta la soluzione per $\beta = 0.2$, (+ croce - rosso) rappresenta la soluzione per $\beta = 0.4$, (* asterisco - giallo) rappresenta la soluzione per $\beta = 0.6$, (△ triangolo - viola) rappresenta la soluzione per $\beta = 0.6$, (□ quadrato - verde) rappresenta la soluzione per $\beta = 1.0$, (— linea continua - azzurro) rappresenta la soluzione della standard ADE. a) plot 2D per $t = 0.5$, b) plot 2D per $t = 1.0$

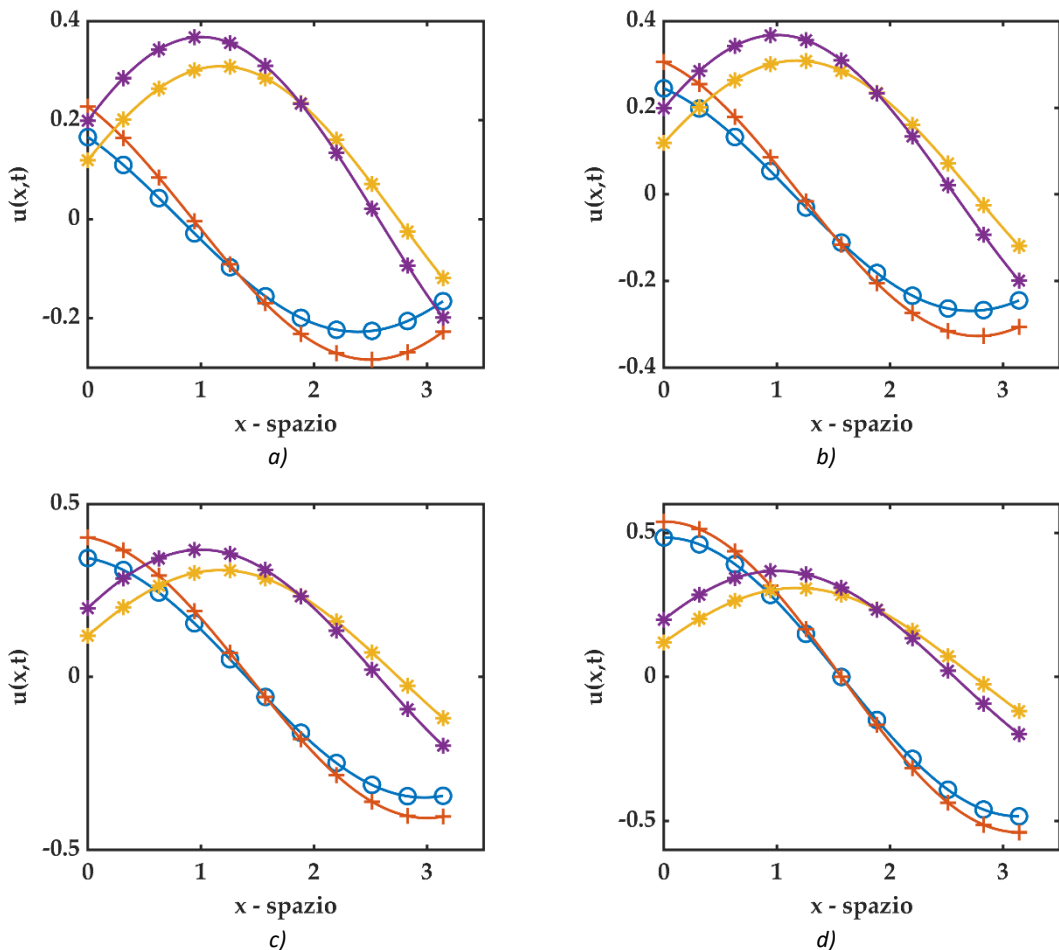


Figura 10-136 plot 2D di confronto per S-FRADE con $u(x, 0) = \cos(x)$ e $t = 1.0$ dove (* asterisco - viola) rappresenta la soluzione standard ADE e $D = V = \cosh(t)$, (* asterisco - giallo) rappresenta la soluzione standard ADE e $D = V = \cosh(t)$, (+ croce - rosso) rappresenta la soluzione S-FRADE $D = V = \cosh(t)$, (⊙ cerchio - blu) rappresenta la soluzione S-FRADE e $D = V = \cosh(t)$. Si fissa il valore di $\gamma = 1.2$. a) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.2$, b) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.4$, c) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.6$, d) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.8$.

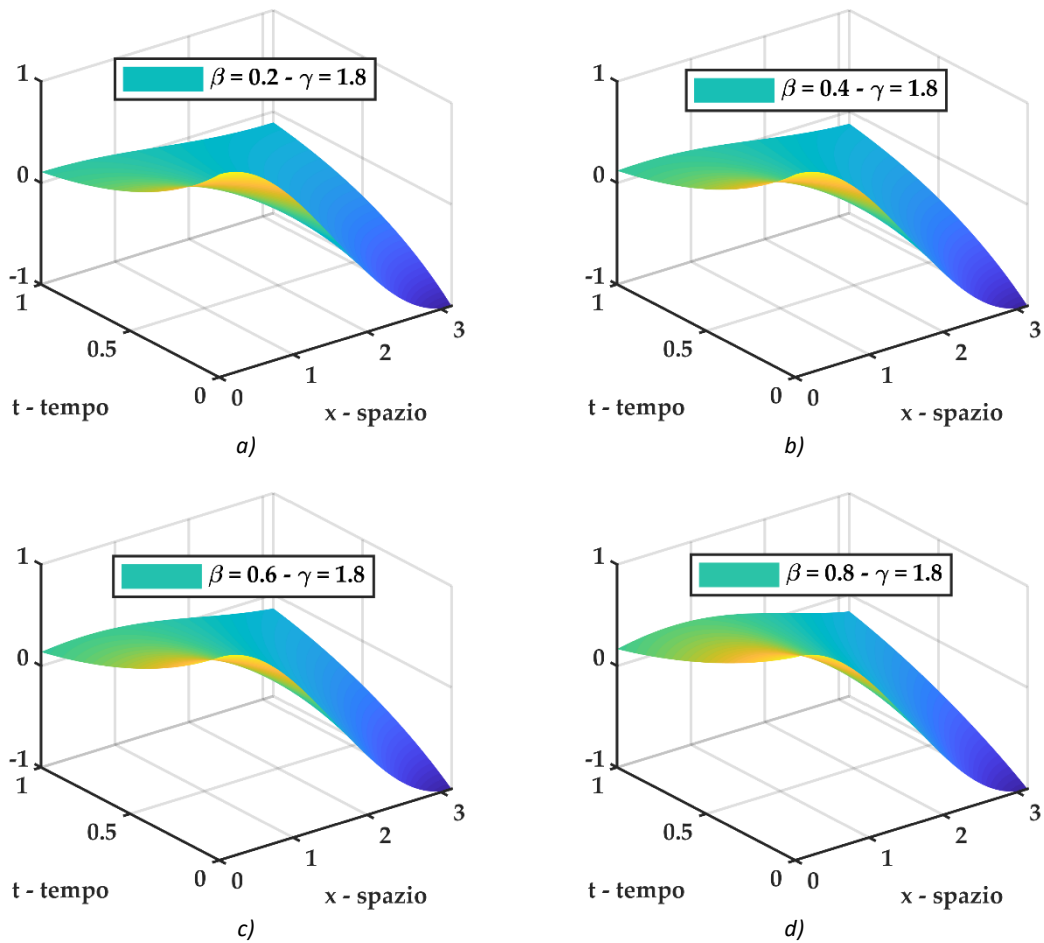


Figura 10-137 plot 3D della soluzione $u(x,t)$ del problema differenziale frazionario S-FRADE con $u(x,0) = \cos(x)$ e coefficiente di diffusione ed avvezione funzione del tempo $V = D = \cosh(t)$ per diversi valori dell'ordine di derivazione frazionario fissato $\gamma = 1.8$. a) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.2$, b) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.4$, c) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.6$, d) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.8$

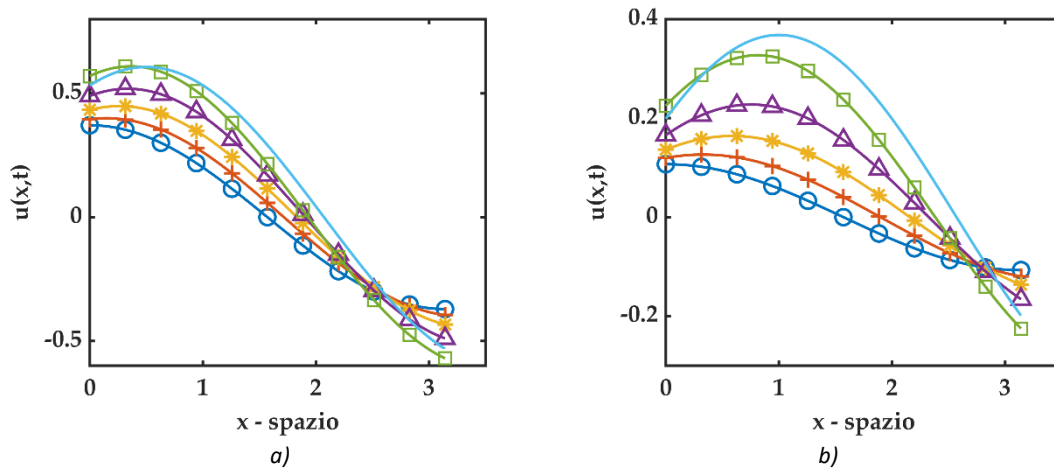


Figura 10-138 plot 2D di confronto fra soluzioni del problema differenziale frazionario S-FRADE con $u(x,0) = \cos(x)$ e coefficienti di diffusione ed avvezione funzione del tempo $V = D = \cosh(t)$. Il valore di $\gamma = 1.8$ è fissato e (⊙ cerchio - blu) rappresenta la soluzione per $\beta = 0.2$, (+ croce - rosso) rappresenta la soluzione per $\beta = 0.4$, (* asterisco - giallo) rappresenta la soluzione per $\beta = 0.6$, (Δ triangolo - viola) rappresenta la soluzione per $\beta = 0.6$, (□ quadrato - verde) rappresenta la soluzione per $\beta = 1.0$, (— linea continua - azzurro) rappresenta la soluzione della standard ADE. a) plot 2D per $t = 0.5$, b) plot 2D per $t = 1.0$

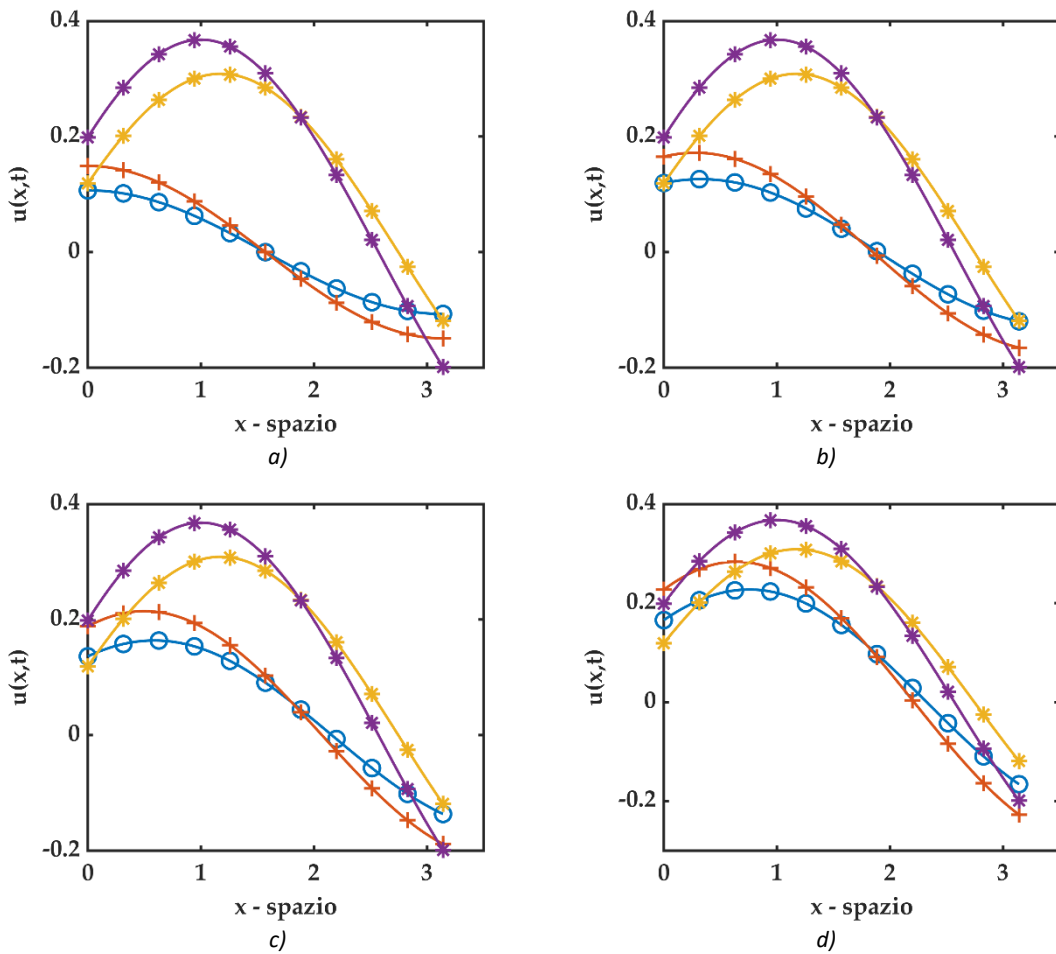


Figura 10-139 plot 2D di confronto fra soluzioni del problema differenziale frazionario S-FRADE con $u(x,0) = \cos(x)$ e $t = 1.0$ dove (* asterisco - viola) rappresenta la soluzione standard ADE e $D = V = cost$, (* asterisco - giallo) rappresenta la soluzione standard ADE e $D = V = cosh(t)$, (+ croce - rosso) rappresenta la soluzione S-FRADE $D = V = cost$, (o cerchio - blu) rappresenta la soluzione S-FRADE e $D = V = cosh(t)$. Si fissa il valore di $\gamma = 1.8$. a) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.2$, b) soluzione S-FRDE per $\beta = 0.4$, c) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.6$, d) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.8$.

10.3.5.3.1 Algoritmo Matlab

Di seguito viene riportato un estratto dello script Matlab utilizzato per i plot sopra riportati, soffermandosi sul calcolo della soluzione inerente il problema differenziale S-FRADE.

```

function [u_SPFADE_cosh_t] =
uSP_fraz_cosht_cosx(Nmax,x1,t1,Gamma,beta)
% uSP_fraz_cost => SPF      = space fractional
%                          ADE      = Advection Diffusion Equation
%                          cosh(t) = D(t)=V(t)=g(t)=cosh(t)
% function per il calcolo della soluzione del seguente problema
% differenziale
%-----
% u,t + cosh(t) u,beta = cosh(t) u,Gamma      1 < Gamma <= 2 && 0 <
beta <= 1
% u(x,0) = cos(x)
%-----
u_SPFADE_cosh_t = zeros(length(t1),length(x1));
    
```

```

SUM = 0;
for n = 0 : Nmax
    for j = 0 : n
        SUM = SUM + (-1)^j*nchoosek(n,j)*cos(x1 + ((n-
j)*Gamma+j*beta)*pi/2);
    end
    u_SPFADE_cosh_t = u_SPFADE_cosh_t +
(sinh(t1)).^n/factorial(n)*SUM;
    SUM = 0;
end
end

```

10.3.5.4 S-FRADE con condizioni iniziali $u(x, 0) = e^{ax}$

Si considera il seguente problema differenziale

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \cosh(t) \cdot \frac{\partial^\beta u}{\partial x^\beta} = \cosh(t) \cdot \frac{\partial^\gamma u}{\partial x^\gamma} \\ u(x, 0) = e^{ax} \end{cases} \quad (10.63)$$

Dove la derivata frazionaria è di Caputo con terminale $a = -\infty$. Utilizzando i risultati precedenti, l' n -esimo termine della decomposizione ADM assume la seguente formulazione

$$u_n(x, t) = \frac{\sinh^n(t)}{n!} \cdot \sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{n}{j} a^{(n-j)\gamma + j\beta} \cdot e^{ax} \quad (10.64)$$

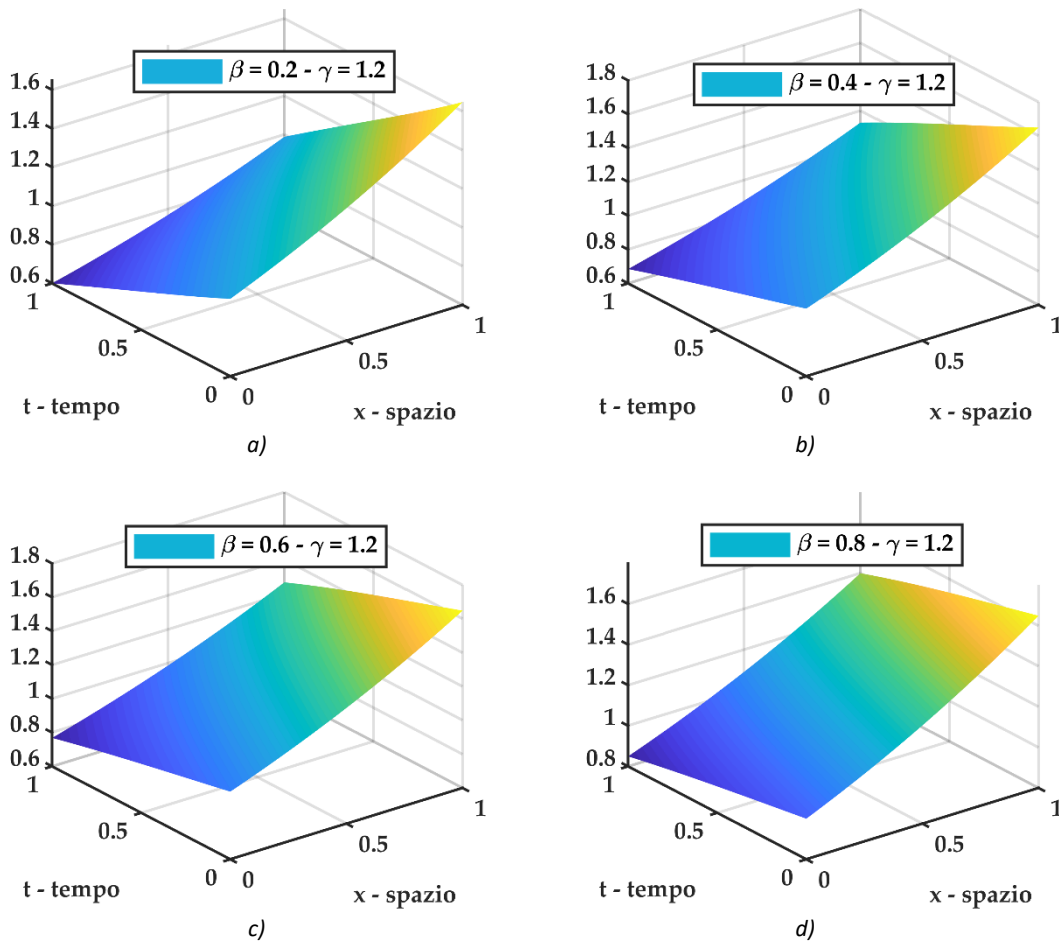


Figura 10-140 plot 3D della soluzione $u(x, t)$ del problema differenziale frazionario S-FRADE con $u(x, 0) = e^{ax}$ con $a = 0.50$ e coefficiente di diffusione ed avvezione funzione del tempo $V = D = \cosh(t)$ per diversi valori dell'ordine di derivazione frazionario fissato $\gamma = 1.2$. a) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.2$, b) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.4$, c) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.6$, d) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.8$

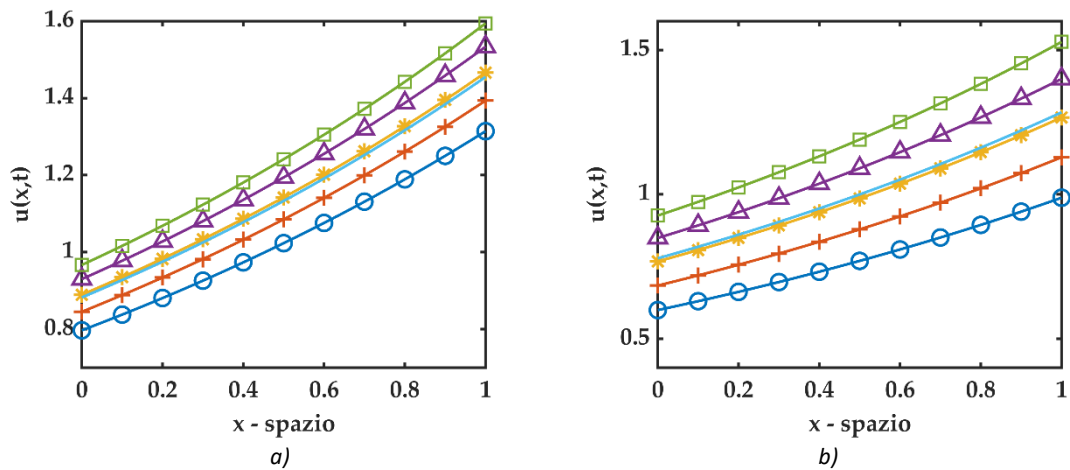


Figura 10-141 plot 2D di confronto fra soluzioni del problema differenziale frazionario S-FRADE con $u(x, 0) = e^{ax}$ con $a = 0.50$ e coefficienti di diffusione ed avvezione funzione del tempo $V = D = \cosh(t)$. Il valore di $\gamma = 1.2$ è fissato e (⊙ cerchio - blu) rappresenta la soluzione per $\beta = 0.2$, (+ croce - rosso) rappresenta la soluzione per $\beta = 0.4$, (* asterisco - giallo) rappresenta la soluzione per $\beta = 0.6$, (Δ triangolo - viola) rappresenta la soluzione per $\beta = 0.6$, (□ quadrato - verde) rappresenta la soluzione per $\beta = 1.0$, (— linea continua - azzurro) rappresenta la soluzione della standard ADE. a) plot 2D per $t = 0.5$, b) plot 2D per $t = 1.0$

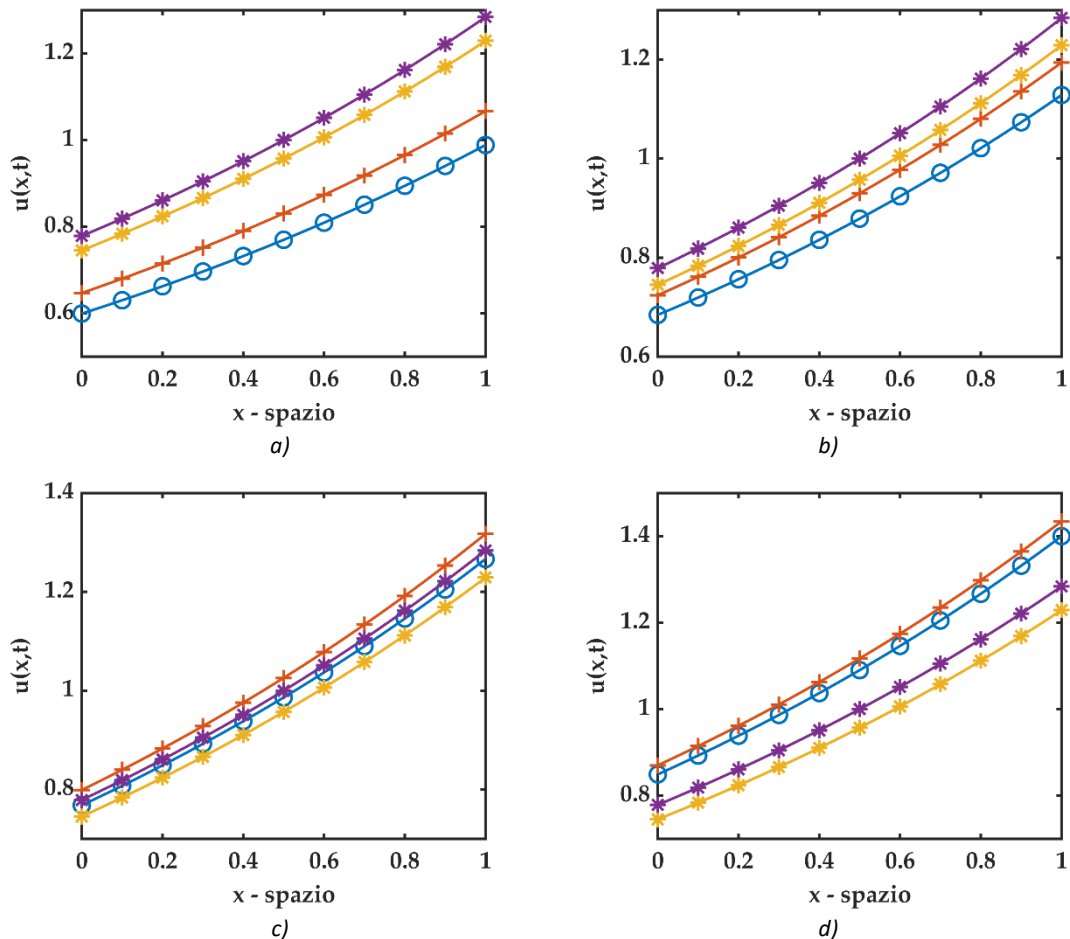


Figura 10-142 plot 2D di confronto per S-FRADE con $u(x, 0) = e^{ax}$ con $a = 0.50$ e $t = 1.0$ dove (* asterisco - viola) rappresenta la soluzione standard ADE e $D = V = \cosh(t)$, (* asterisco - giallo) rappresenta la soluzione standard ADE e $D = V = \cosh(t)$, (+ croce - rosso) rappresenta la soluzione S-FRADE $D = V = \cosh(t)$, (⊙ cerchio - blu) rappresenta la soluzione S-FRADE e $D = V = \cosh(t)$. Si fissa il valore di $\gamma = 1.2$. a) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.2$, b) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.4$, c) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.6$, d) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.8$.

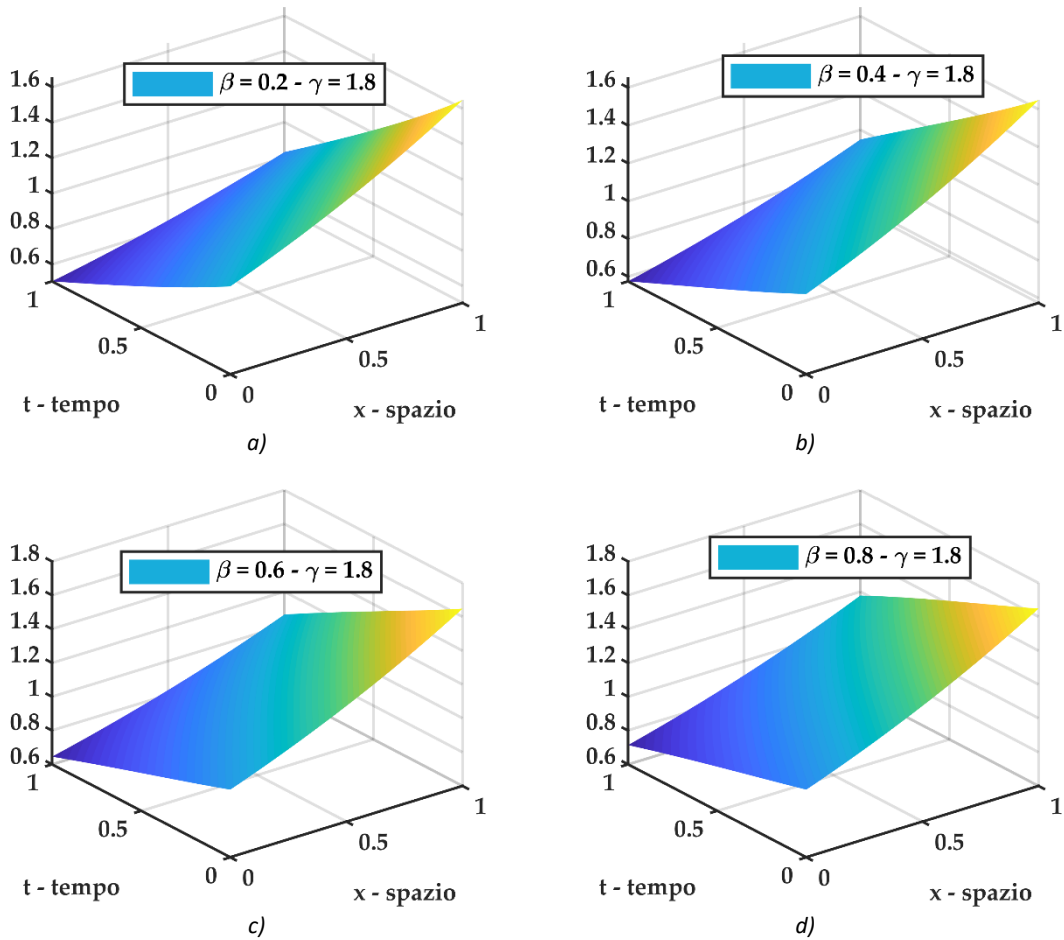


Figura 10-143 plot 3D della soluzione $u(x, t)$ del problema differenziale frazionario S-FRADE con $u(x, 0) = e^{ax}$ con $a = 0.50$ e coefficiente di diffusione ed avvezione funzione del tempo $V = D = \cosh(t)$ per diversi valori dell'ordine di derivazione frazionario fissato $\gamma = 1.8$. a) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.2$, b) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.4$, c) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.6$, d) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.8$

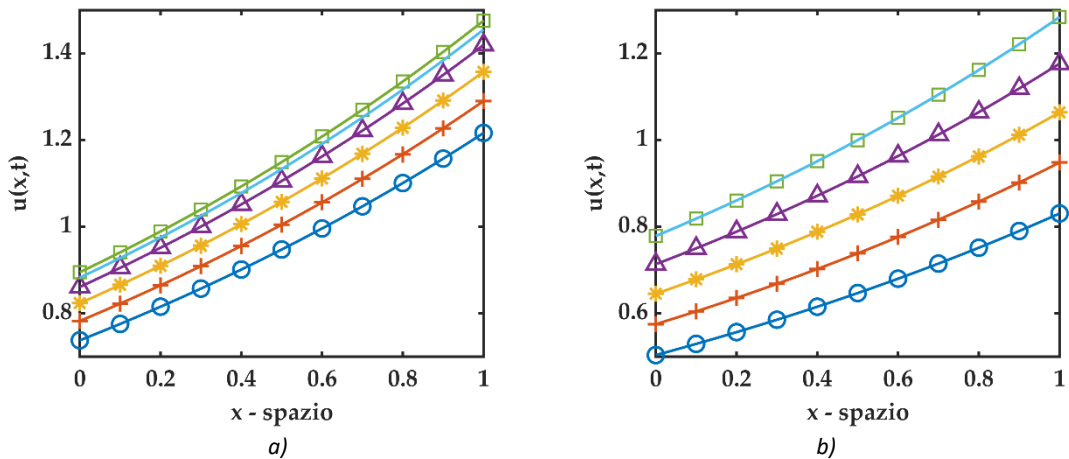


Figura 10-144 plot 2D di confronto fra soluzioni del problema differenziale frazionario S-FRADE con $u(x, 0) = e^{ax}$ con $a = 0.50$ e coefficienti di diffusione ed avvezione funzione del tempo $V = D = \cosh(t)$. Il valore di $\gamma = 1.8$ è fissato e (○ cerchio - blu) rappresenta la soluzione per $\beta = 0.2$, (+ croce - rosso) rappresenta la soluzione per $\beta = 0.4$, (* asterisco - giallo) rappresenta la soluzione per $\beta = 0.6$, (△ triangolo - viola) rappresenta la soluzione per $\beta = 0.6$, (□ quadrato - verde) rappresenta la soluzione per $\beta = 1.0$, (— linea continua - azzurro) rappresenta la soluzione della standard ADE. a) plot 2D per $t = 0.5$, b) plot 2D per $t = 1.0$

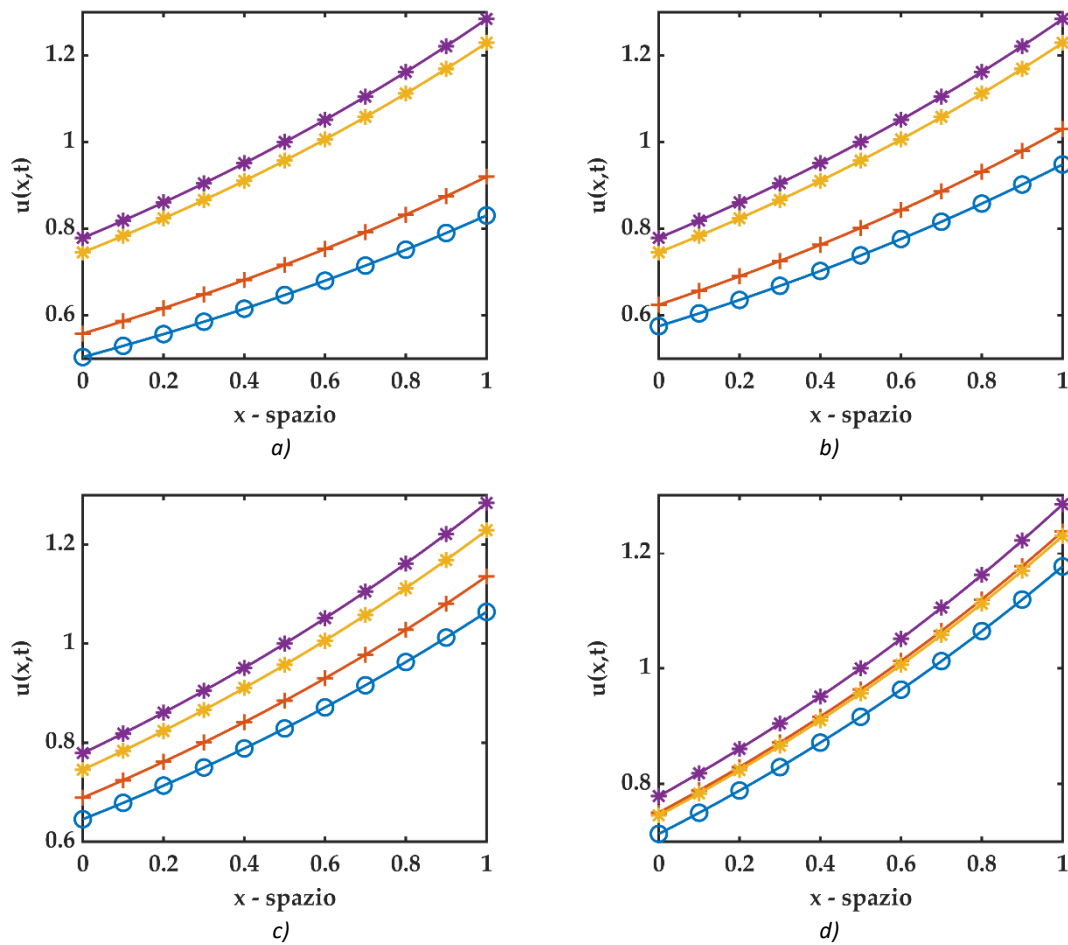


Figura 10-145 plot 2D di confronto fra soluzioni del problema differenziale frazionario S-FRADE con $u(x,0) = e^{ax}$ con $a = 0.50$ e $t = 1.0$ dove (* asterisco - viola) rappresenta la soluzione standard ADE e $D = V = cost$, (* asterisco - giallo) rappresenta la soluzione standard ADE e $D = V = cosh(t)$, (+ croce - rosso) rappresenta la soluzione S-FRADE $D = V = cost$, (o cerchio - blu) rappresenta la soluzione S-FRADE e $D = V = cosh(t)$. Si fissa il valore di $\gamma = 1.8$. a) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.2$, b) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.4$, c) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.6$, d) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.8$.

10.3.5.4.1 Algoritmo Matlab

Di seguito viene riportato un estratto dello script Matlab utilizzato per i plot sopra riportati, soffermandosi sul calcolo della soluzione inerente il problema differenziale S-FRADE.

```
function [u_SPFADE_cos_t] =
uSP_fraz_cosht_eax(Nmax,x1,t1,Gamma,beta,a)
% uSP_fraz_cost => SPF          = space fractional
%                               ADE      = Advection Diffusion Equation
%                               cosh(t) = D(t)=V(t)=g(t)=cos(t)
% function per il calcolo della soluzione del seguente problema
% differenziale
%-----
% u,t + cosh(t) u,beta = cosh(t) u,Gamma      1 < Gamma <= 2 && 0 <
beta <= 1
% u(x,0) = e^(ax)
%-----
u_SPFADE_cos_t = zeros(length(t1),length(x1));
```

```

SUM = 0;
for n = 0 : Nmax
    for j = 0 : n
        SUM = SUM + (-1)^j*nchoosek(n,j)*a^(n-
j)*Gamma+j*beta)*exp(a*x1);
    end
    u_SPFADE_cos_t = u_SPFADE_cos_t +
(sinh(t1)).^n/factorial(n)*SUM;
    SUM = 0;
end
end

```

10.3.6 $V = D = g(t) = e^t$

10.3.6.1 S-FRADE con condizioni iniziali $u(x, 0) = x^\delta$

Si consideri il seguente problema differenziale

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + e^t \cdot \frac{\partial^\beta u}{\partial x^\beta} = e^t \cdot \frac{\partial^\gamma u}{\partial x^\gamma} \\ u(x, 0) = x^\delta \end{cases} \quad (10.65)$$

Dove la derivata frazionaria è di Caputo con terminale $a = 0$.

In questo contesto essendo l'equazione differenziale frazionaria solamente in spazio si considera ${}^{RL} [{}^{ng}]_0^n \mathbb{I}_t^{n\alpha}(t) = [{}^{ng}]_0^n \mathbb{I}_t^n(t) = \int_0^t g(t) \int_0^t g(t) \int_0^t g(t) \dots dt dt dt$

$n = 1$	\rightarrow	$[g]_0^1 \mathbb{I}_t^1(t) = \int_0^t g(t) dt$	$=$	$\left(\frac{e^t}{0! 1!} - \frac{1}{1! 0!} \right)$
$n = 2$	\rightarrow	$[{}^2g]_0^2 \mathbb{I}_t^2(t) = \int_0^t g(t) [g]_0^1 \mathbb{I}_t^1(t) dt$	$=$	$\left(\frac{e^{2t}}{0! 2!} - \frac{e^t}{1! 1!} + \frac{1}{2! 0!} \right)$
$n = 3$	\rightarrow	$[{}^3g]_0^3 \mathbb{I}_t^3(t) = \int_0^t g(t) [{}^2g]_0^2 \mathbb{I}_t^2(t) dt$	$=$	$\left(\frac{e^{3t}}{0! 3!} - \frac{e^{2t}}{1! 2!} + \frac{e^t}{2! 1!} - \frac{1}{3! 0!} \right)$
$n = 4$	\rightarrow	$[{}^4g]_0^4 \mathbb{I}_t^4(t) = \int_0^t g(t) [{}^3g]_0^3 \mathbb{I}_t^3(t) dt$	$=$	$\left(\frac{e^{4t}}{0! 4!} - \frac{e^{3t}}{1! 3!} + \frac{e^{2t}}{2! 2!} - \frac{e^t}{3! 1!} + \frac{1}{4! 0!} \right)$
\vdots		\vdots		\vdots
n	\rightarrow	$[{}^{ng}]_0^n \mathbb{I}_t^n(t) = \int_0^t g(t) [{}^{ng-1}]_0^{(n-1)} \mathbb{I}_t^{(n-1)}(t) dt$	$=$	(*)

(*)

$$= \frac{1}{\text{Diag}[\mathbb{A} \otimes (\text{Ref} \mathbb{A})^T]} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} +1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{ij} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (-1)^{j+1} \end{pmatrix}}_{[n+1] \times [n+1]} \cdot \begin{pmatrix} e^{nt} \\ e^{(n-1)t} \\ e^{(n-2)t} \\ \vdots \\ e^t \\ 1 \end{pmatrix}$$

Con

$$\mathbb{A} = [n! \quad (n-1)! \quad (n-2)! \quad \dots \quad 2! \quad 1! \quad 0!]$$

$$(RefA)^T = \begin{pmatrix} 0! \\ 1! \\ 2! \\ \vdots \\ (n-2)! \\ (n-1)! \\ n! \end{pmatrix}$$

$$A \otimes (RefA)^T = \begin{pmatrix} n!0! & n!1! & n!2! & \cdots & n!(n-1)! & n!n! \\ (n-1)!0! & (n-1)!1! & (n-1)!2! & \cdots & (n-1)!(n-1)! & (n-1)!n! \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1!0! & 1!1! & 1!2! & \cdots & 1!(n-1)! & 1!n! \\ 0!0! & 0!1! & 0!2! & \cdots & 0!(n-1)! & 0!n! \end{pmatrix}$$

$$Diag[A \otimes (RefA)^T] = [n!0! \quad (n-1)!1! \quad (n-2)!2! \quad \cdots \quad 2!(n-2)! \quad 1!(n-1)! \quad 0!n!]$$

Quindi l' n -esimo termine della decomposizione ADM assume la seguente formulazione:

$$\begin{aligned} u_n(x, t) &= \left({}^{RL} \mathbb{J}_0^{n\alpha}(t) \right) \cdot \sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{n}{j} \left[D_x^{(n-j)\gamma+j\beta} \right] f(x) = \\ &= \frac{1}{Diag[A \otimes (RefA)^T]} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} +1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{ij} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (-1)^{j+1} \end{pmatrix}}_{[n+1] \times [n+1]} \cdot \begin{pmatrix} e^{n \cdot t} \\ e^{(n-1) \cdot t} \\ e^{(n-2) \cdot t} \\ \vdots \\ e^t \\ 1 \end{pmatrix} \quad (10.66) \\ &\cdot \sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{n}{j} \left\{ \frac{\Gamma(\delta+1)}{\Gamma(\delta+1 - [(n-j)\gamma+j\beta])} \cdot x^{-[(n-j)\gamma+j\beta]} \right\} \cdot x^\delta \end{aligned}$$

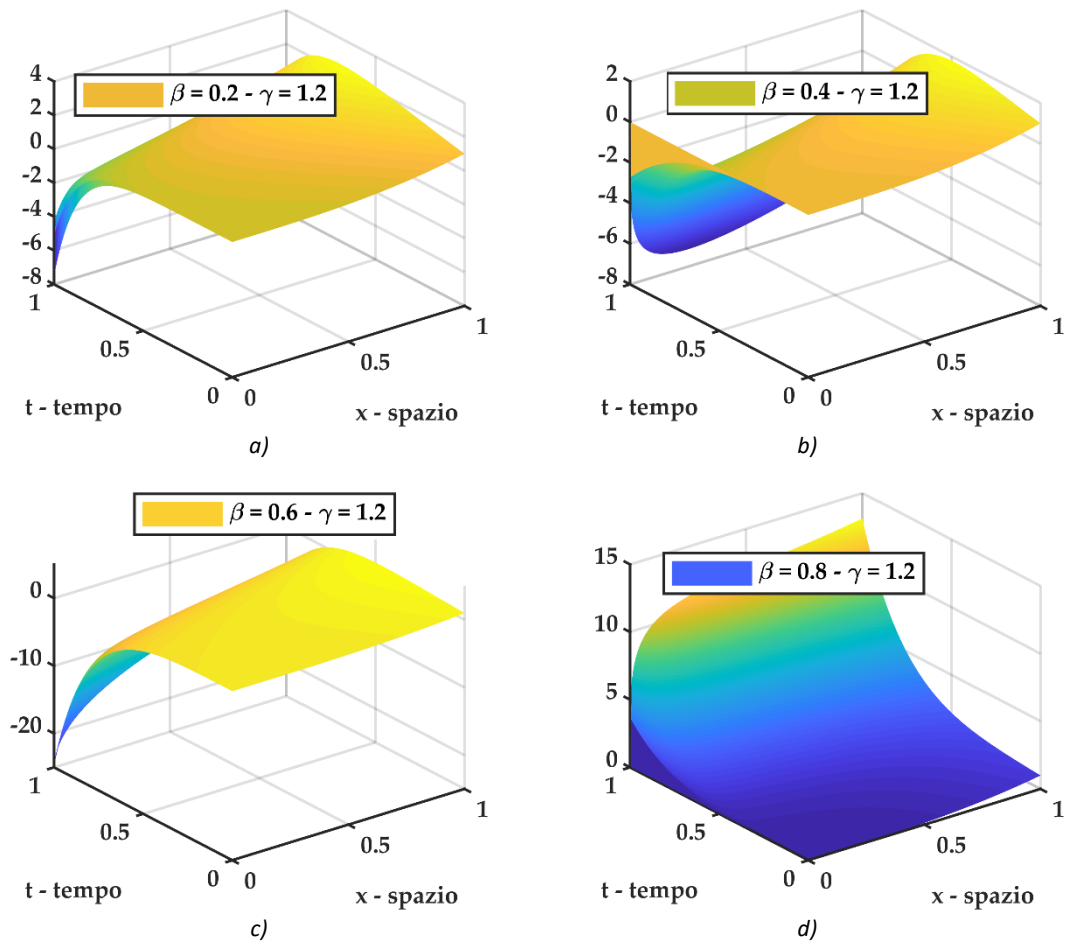


Figura 10-146 plot 3D della soluzione $u(x, t)$ del problema differenziale frazionario S-FRADE con $u(x, 0) = x^\delta$ con $\delta = 3$ e coefficiente di diffusione ed avvezione funzione del tempo $V = D = e^t$ per diversi valori dell'ordine di derivazione frazionario fissato $\gamma = 1.2$. a) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.2$, b) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.4$, c) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.6$, d) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.8$

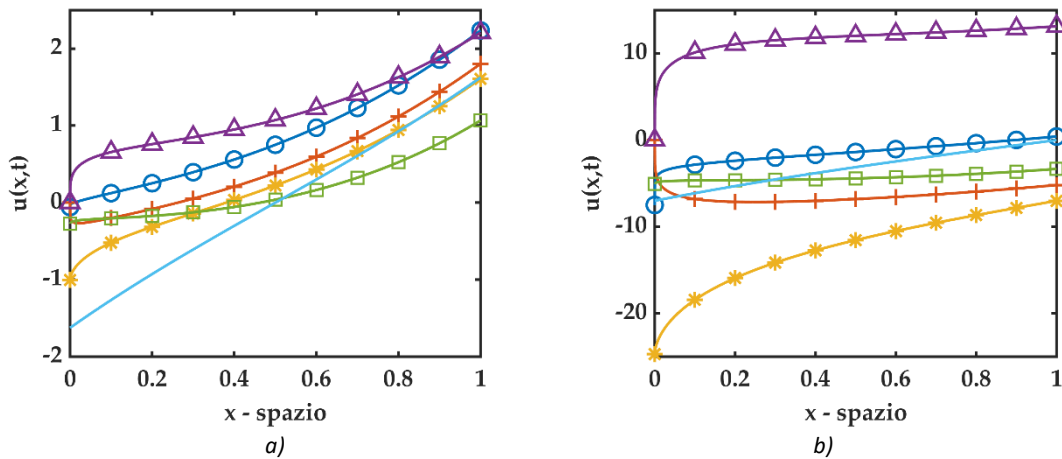


Figura 10-147 plot 2D di confronto fra soluzioni del problema differenziale frazionario S-FRADE con $u(x, 0) = x^\delta$ con $\delta = 3$ e coefficienti di diffusione ed avvezione funzione del tempo $V = D = e^t$. Il valore di $\gamma = 1.2$ è fissato e (⊙ cerchio - blu) rappresenta la soluzione per $\beta = 0.2$, (+ croce - rosso) rappresenta la soluzione per $\beta = 0.4$, (* asterisco - giallo) rappresenta la soluzione per $\beta = 0.6$, (△ triangolo - viola) rappresenta la soluzione per $\beta = 1.0$, (— linea continua - azzurro) rappresenta la soluzione della standard ADE. a) plot 2D per $t = 0.5$, b) plot 2D per $t = 1.0$

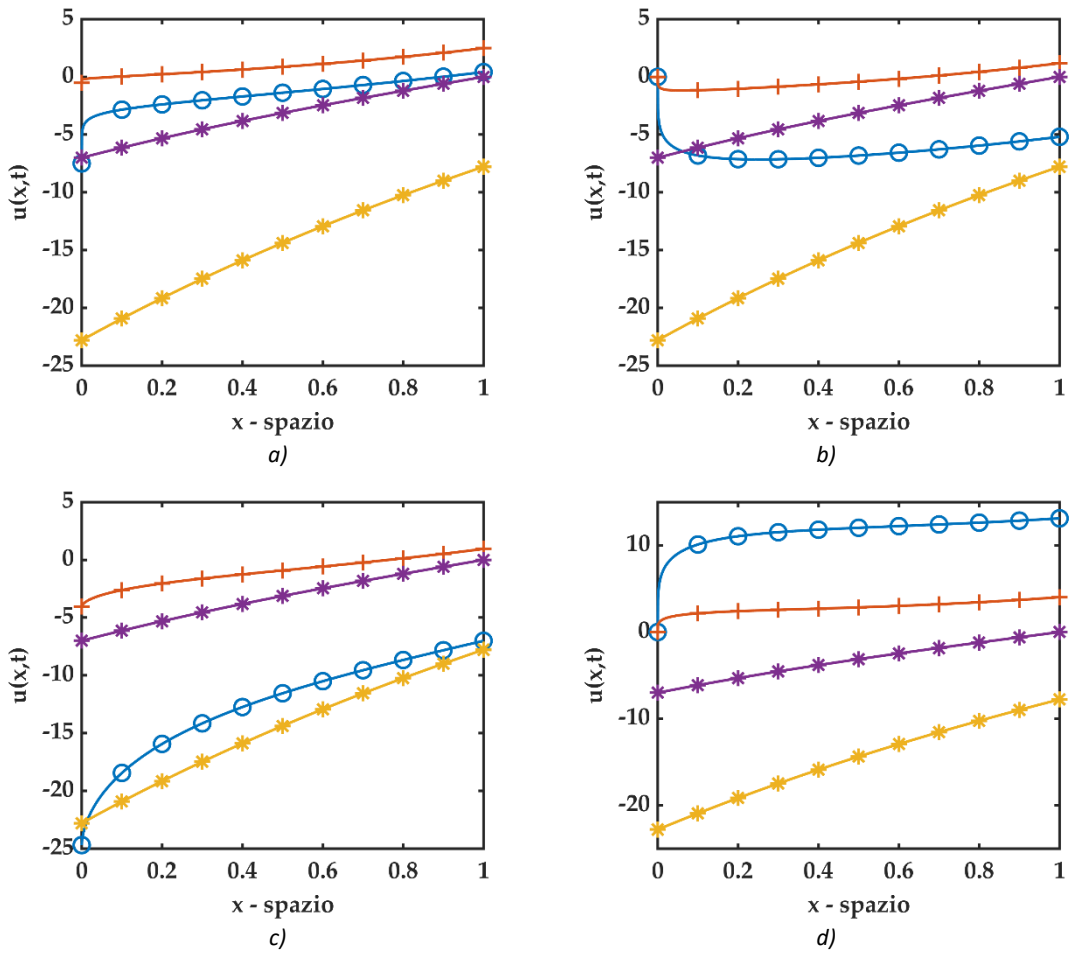


Figura 10-148 plot 2D di confronto fra soluzioni del problema differenziale frazionario S-FRADE con $u(x,0) = x^\delta$ con $\delta = 3$ e $t = 1.0$ dove (* asterisco - viola) rappresenta la soluzione standard ADE e $D = V = \text{const}$, (* asterisco - giallo) rappresenta la soluzione standard ADE e $D = V = e^t$, (+ croce - rosso) rappresenta la soluzione S-FRADE $D = V = \text{const}$, (○ cerchio - blu) rappresenta la soluzione S-FRADE e $D = V = e^t$. Si fissa il valore di $\gamma = 1.2$. a) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.2$, b) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.4$, c) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.6$, d) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.8$.

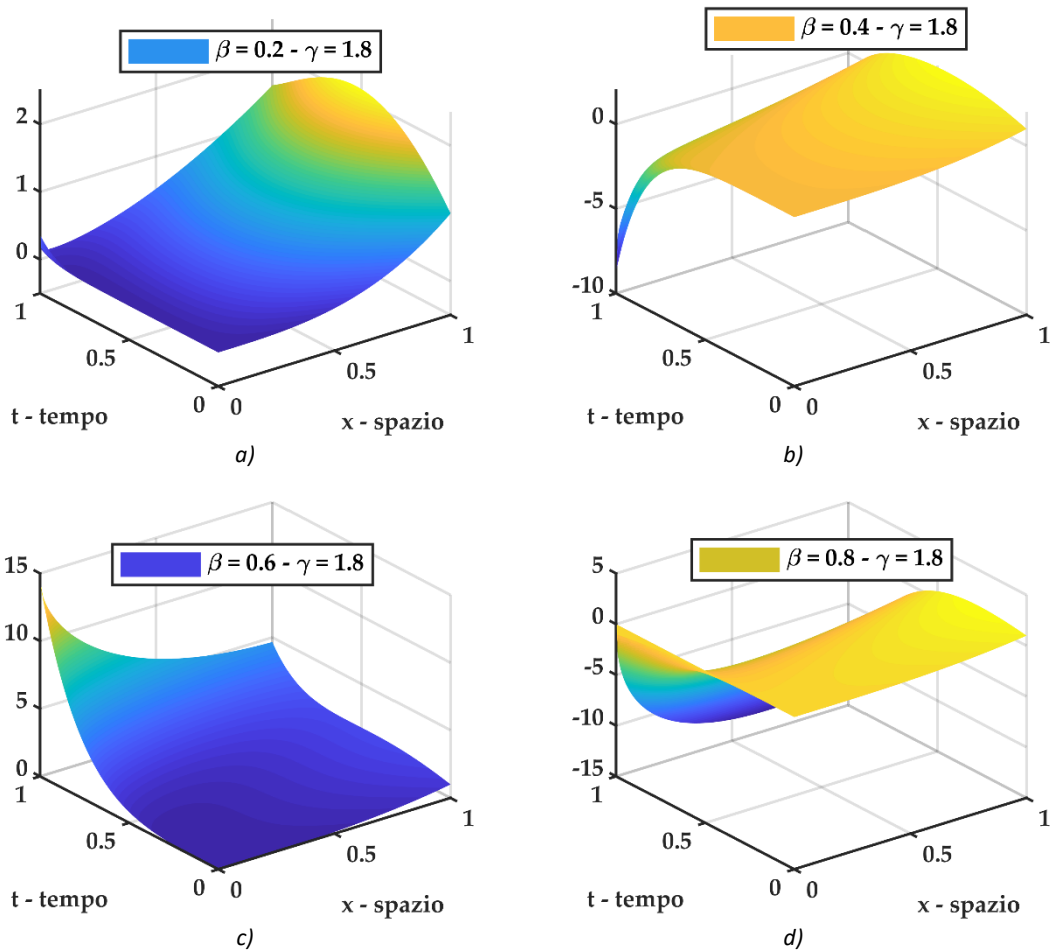


Figura 10-149 plot 3D della soluzione $u(x, t)$ del problema differenziale frazionario S-FRADE con $u(x, 0) = x^\delta$ con $\delta = 3$ e coefficiente di diffusione ed avvezione funzione del tempo $V = D = e^t$ per diversi valori dell'ordine di derivazione frazionario fissato $\gamma = 1.8$. a) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.2$, b) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.4$, c) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.6$, d) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.8$

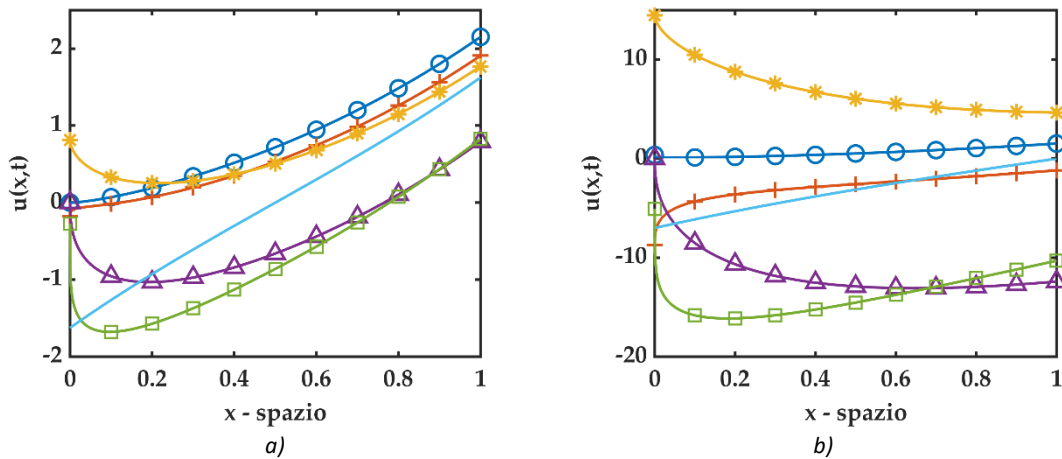


Figura 10-150 plot 2D di confronto fra soluzioni del problema differenziale frazionario S-FRADE con $u(x, 0) = x^\delta$ con $\delta = 3$ e coefficienti di diffusione ed avvezione funzione del tempo $V = D = e^t$. Il valore di $\gamma = 1.8$ è fissato e (⊙ cerchio - blu) rappresenta la soluzione per $\beta = 0.2$, (+ croce - rosso) rappresenta la soluzione per $\beta = 0.4$, (* asterisco - giallo) rappresenta la soluzione per $\beta = 0.6$, (△ triangolo - viola) rappresenta la soluzione per $\beta = 1.0$, (— linea continua - azzurro) rappresenta la soluzione della standard ADE. a) plot 2D per $t = 0.5$, b) plot 2D per $t = 1.0$

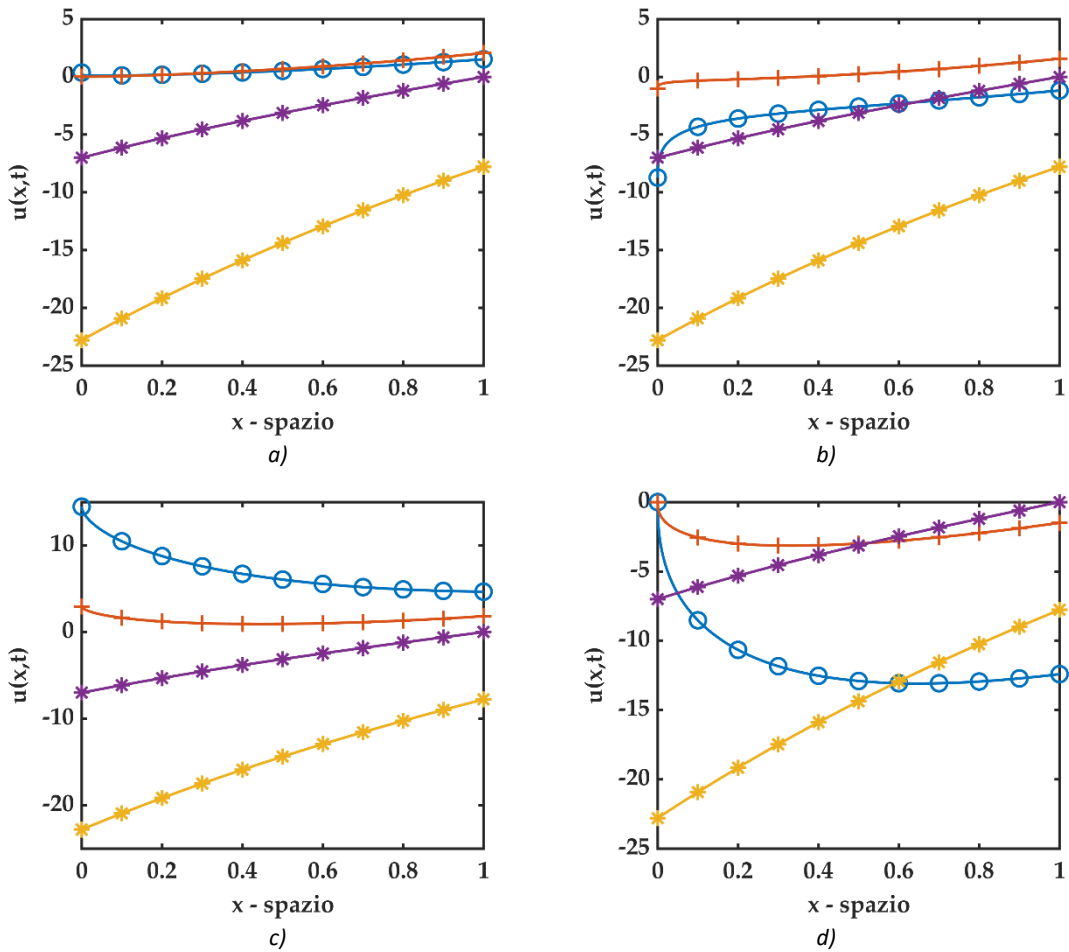


Figura 10-151 plot 2D di confronto fra soluzioni del problema differenziale frazionario S-FRADE con $u(x, 0) = x^\delta$ con $\delta = 3$ e $t = 1.0$ dove (* asterisco - viola) rappresenta la soluzione standard ADE e $D = V = \text{cost}$, (* asterisco - giallo) rappresenta la soluzione standard ADE e $D = V = e^t$, (+ croce - rosso) rappresenta la soluzione S-FRADE $D = V = \text{cost}$, (⊙ cerchio - blu) rappresenta la soluzione S-FRADE e $D = V = e^t$. Si fissa il valore di $\gamma = 1.8$. a) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.2$, b) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.4$, c) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.6$, d) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.8$.

10.3.6.1.1 Algoritmo Matlab

Di seguito viene riportato un estratto dello script Matlab utilizzato per i plot sopra riportati, soffermandosi sul calcolo della soluzione inerente il problema differenziale S-FRADE. La function `[f_et,Coeff] = Cr_et(r,x1,t1)` è già stata riportata nel paragrafo 7.4.2.2.

```
function [u_SPFADE_et] =
uSP_fraz_et_xdelta(Nmax,x1,t1,Gamma,beta,delta)
% uSP_fraz_cost => SPF = space fractional
% ADE = Advection Diffusion Equations
% e^(t) = D(t)=V(t)=g(t)=e^(t)
% function per il calcolo della soluzione del seguente problema
% differenziale
%-----
% u,t + e^(t) u,beta = e^(t) u,gamma 1 < Gamma <= 2 && 0 <
beta <= 1
% u(x,0) = x^delta
```

```

%-----
% calcolo delle componenti dell'integrazione temporale
% C sta per COMPONENTE ed il numero davanti è il riferimento a
% quale componente della decomposizione Adomia si riferisce
% Costruisco la matrice C dove C(:,r) è Cr, cioè l' r-esimo
% coefficiente di integrazione temporale nella serie ADM

% inizializzazione delle variabili
C = zeros(length(t1),Nmax);
Cr = zeros(length(t1),1);
for r = 1:Nmax
    % function per il calcolo delle componenti dell' r-esimo
    % coefficiente di integrazione temporale nella serie ADM
    [f_et,Coeff] = Cr_et(r,x1,t1);

    for l = 1:r+1
        Cr = Cr + f_et(:,l)./Coeff(l);
    end
    C(:,r) = Cr;
    Cr = zeros(length(t1),1);
end
u_SPFADE_et = zeros(length(t1),length(x1));
SUM = 0;
for n = 0 : Nmax
    if n == 0
        u_SPFADE_et = x1.^delta;
    else
        for j = 0 : n
            M_1 = floor((n-j)*Gamma+j*beta);
            if M_1 >= delta && M_1 ~= (n-j)*Gamma+j*beta
                SUM = SUM;
            elseif M_1 > delta
                SUM = SUM;
            else
                SUM = SUM + (-
1)^j*nchoosek(n,j)*gamma(delta+1)/gamma(delta+1-((n-
j)*Gamma+j*beta))*x1.^(delta-((n-j)*Gamma+j*beta));
            end
        end
        u_SPFADE_et = u_SPFADE_et + C(:,n)*SUM;
        SUM = 0;
    end
end
end
end

```

10.3.6.2 S-FRADE con condizioni iniziali $u(x, 0) = \sin(x)$

Si consideri il seguente problema differenziale

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + e^t \cdot \frac{\partial^\beta u}{\partial x^\beta} = e^t \cdot \frac{\partial^\gamma u}{\partial x^\gamma} \\ u(x, 0) = \sin(x) \end{cases} \quad (10.67)$$

Dove la derivata frazionaria è di Caputo con terminale $a = -\infty$.
Utilizzando i risultati precedenti, l' n -esimo termine della decomposizione ADM assume la seguente formulazione

$$u_n(x, t) = \frac{1}{\text{Diag}[A \otimes (\text{Ref} A)^T]} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} +1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{ij} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (-1)^{j+1} \end{pmatrix}}_{[n+1] \times [n+1]} \cdot \begin{pmatrix} e^{n \cdot t} \\ e^{(n-1) \cdot t} \\ e^{(n-2) \cdot t} \\ \vdots \\ e^t \\ 1 \end{pmatrix} \quad (10.68)$$

$$\cdot \sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{n}{j} \sin\left(x + \frac{[(n-j)\gamma + j\beta]\pi}{2}\right)$$

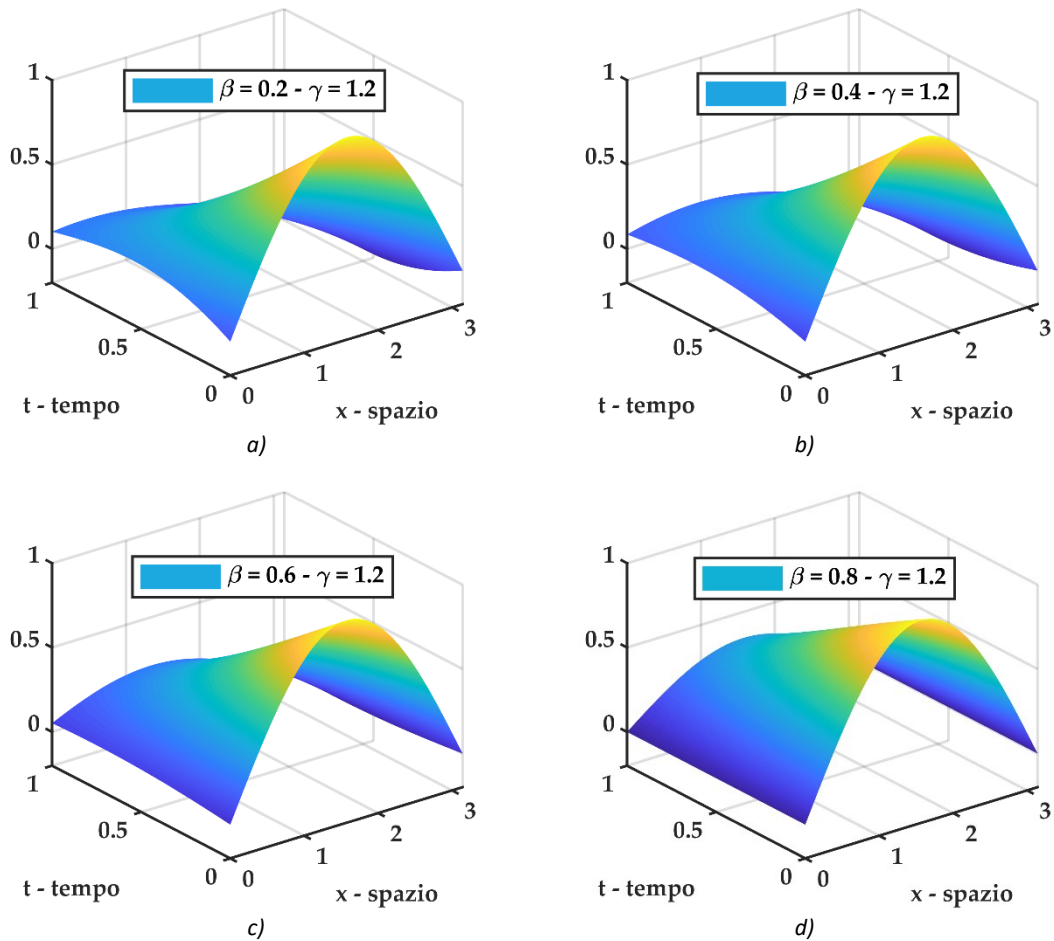


Figura 10-152 plot 3D della soluzione $u(x, t)$ del problema differenziale frazionario S-FRADE con $u(x, 0) = \sin(x)$ e coefficiente di diffusione ed avvezione funzione del tempo $V = D = e^t$ per diversi valori dell'ordine di derivazione frazionario fissato $\gamma = 1.2$. a) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.2$, b) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.4$, c) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.6$, d) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.8$

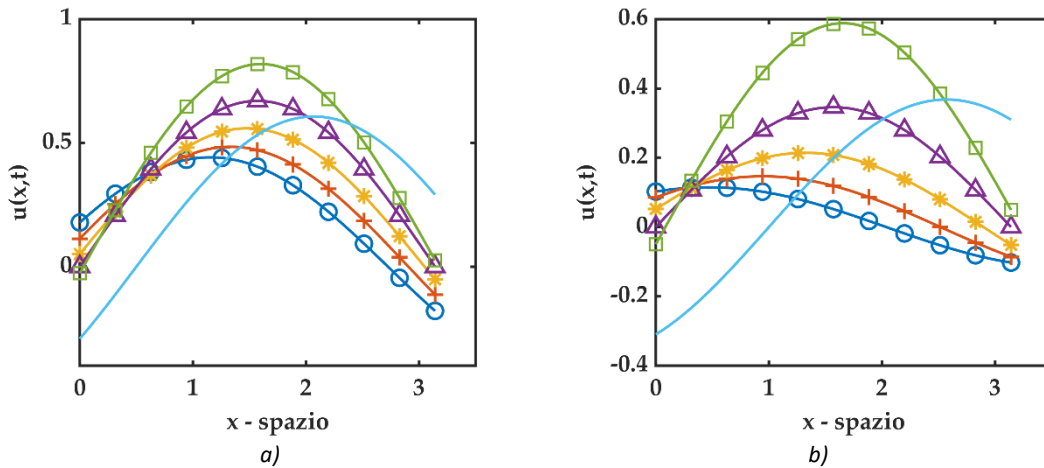


Figura 10-153 plot 2D di confronto fra soluzioni del problema differenziale frazionario S-FRADE con $u(x, 0) = \sin(x)$ e coefficienti di diffusione ed avvezione funzione del tempo $V = D = e^t$. Il valore di $\gamma = 1.2$ è fissato e (⊙ cerchio - blu) rappresenta la soluzione per $\beta = 0.2$, (+ croce - rosso) rappresenta la soluzione per $\beta = 0.4$, (* asterisco - giallo) rappresenta la soluzione per $\beta = 0.6$, (△ triangolo - viola) rappresenta la soluzione per $\beta = 0.6$, (□ quadrato - verde) rappresenta la soluzione per $\beta = 1.0$, (— linea continua - azzurro) rappresenta la soluzione della standard ADE. a) plot 2D per $t = 0.5$, b) plot 2D per $t = 1.0$

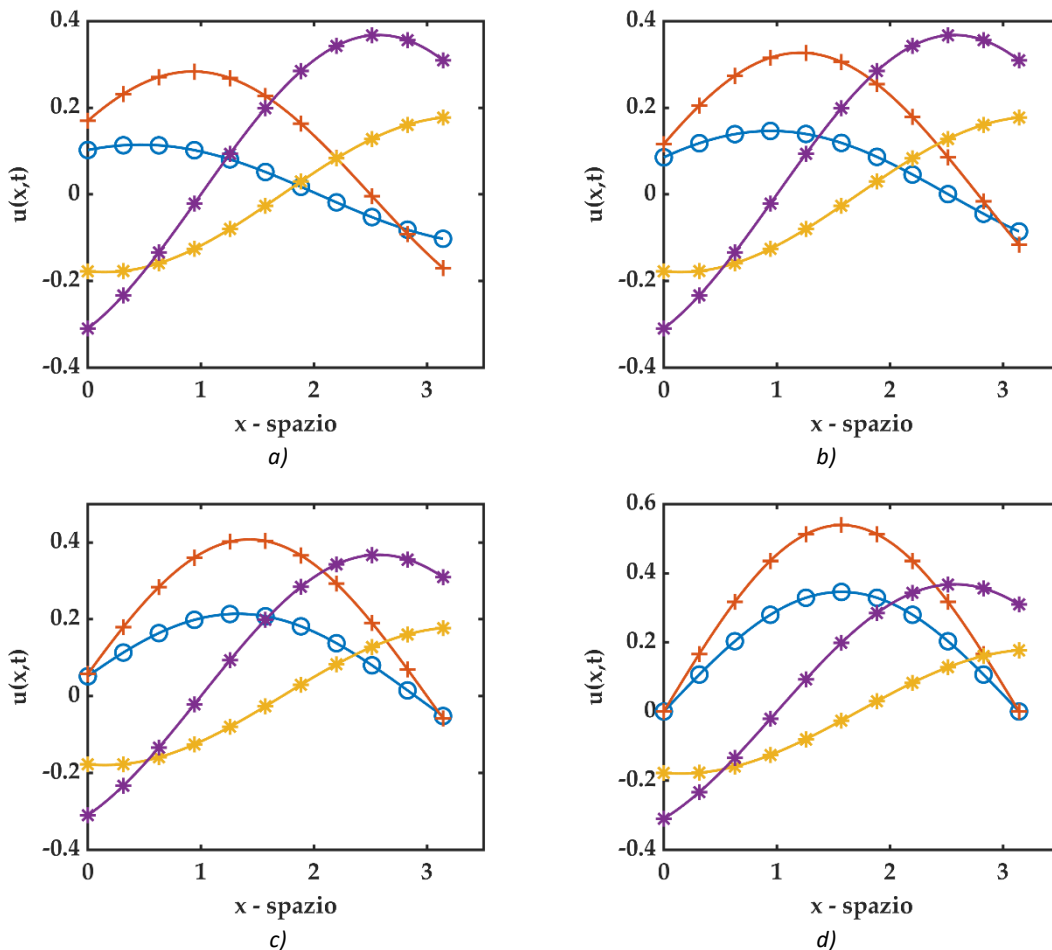


Figura 10-154 plot 2D di confronto per S-FRADE con $u(x, 0) = \sin(x)$ e $t = 1.0$ dove (* asterisco - viola) rappresenta la soluzione standard ADE e $D = V = \text{cost}$, (* asterisco - giallo) rappresenta la soluzione standard ADE e $D = V = e^t$, (+ croce - rosso) rappresenta la soluzione S-FRADE $D = V = \text{cost}$, (⊙ cerchio - blu) rappresenta la soluzione S-FRADE e $D = V = e^t$. Si fissa il valore di $\gamma = 1.2$. a) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.2$, b) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.4$, c) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.6$, d) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.8$.

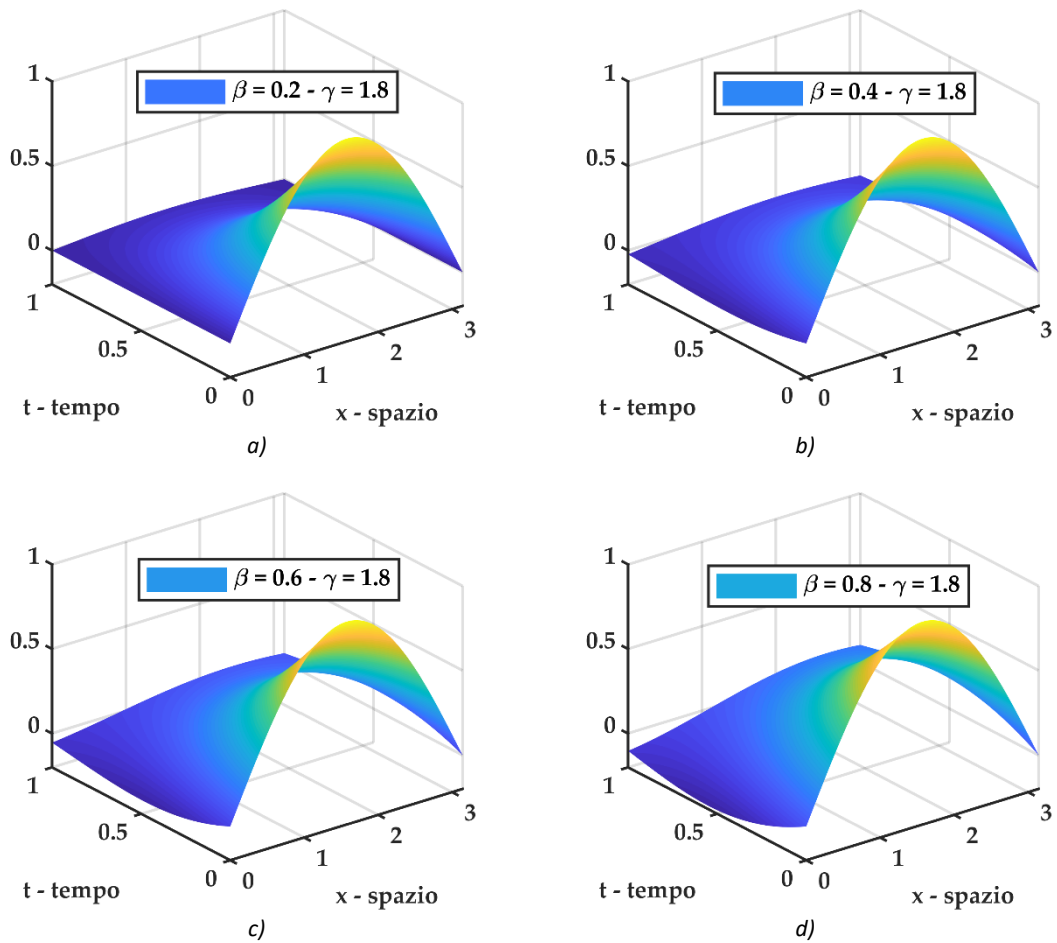


Figura 10-155 plot 3D della soluzione $u(x,t)$ del problema differenziale frazionario S-FRADE con $u(x,0) = \sin(x)$ e coefficiente di diffusione ed avvezione funzione del tempo $V = D = e^t$ per diversi valori dell'ordine di derivazione frazionario fissato $\gamma = 1.8$. a) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.2$, b) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.4$, c) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.6$, d) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.8$

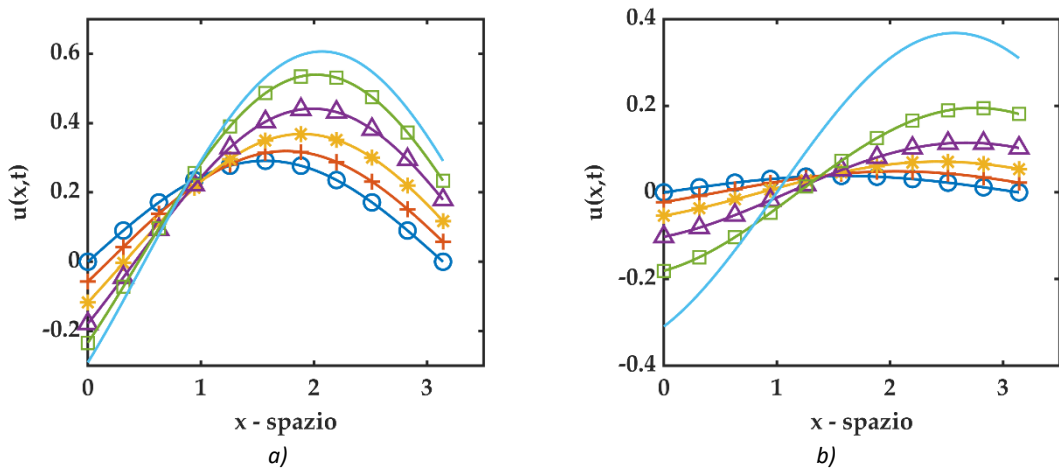


Figura 10-156 plot 2D di confronto fra soluzioni del problema differenziale frazionario S-FRADE con $u(x,0) = \sin(x)$ e coefficienti di diffusione ed avvezione funzione del tempo $V = D = e^t$. Il valore di $\gamma = 1.8$ è fissato e (⊙ cerchio - blu) rappresenta la soluzione per $\beta = 0.2$, (+ croce - rosso) rappresenta la soluzione per $\beta = 0.4$, (* asterisco - giallo) rappresenta la soluzione per $\beta = 0.6$, (Δ triangolo - viola) rappresenta la soluzione per $\beta = 0.6$, (□ quadrato - verde) rappresenta la soluzione per $\beta = 1.0$, (— linea continua - azzurro) rappresenta la soluzione della standard ADE. a) plot 2D per $t = 0.5$, b) plot 2D per $t = 1.0$

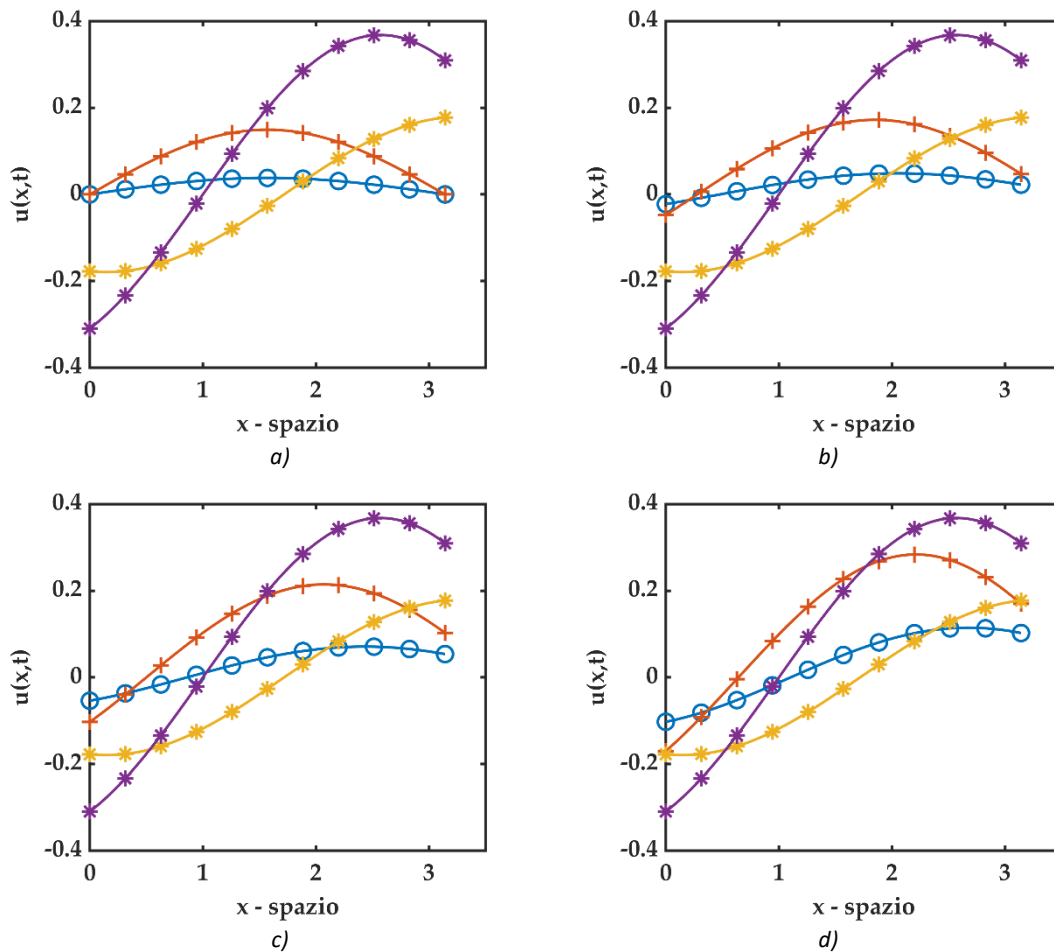


Figura 10-157 plot 2D di confronto fra soluzioni del problema differenziale frazionario S-FRADE con $u(x, 0) = \sin(x)$ e $t = 1.0$ dove (* asterisco - viola) rappresenta la soluzione standard ADE e $D = V = \text{cost}$, (* asterisco - giallo) rappresenta la soluzione standard ADE e $D = V = e^t$, (+ croce - rosso) rappresenta la soluzione S-FRADE $D = V = \text{cost}$, (⊙ cerchio - blu) rappresenta la soluzione S-FRADE e $D = V = e^t$. Si fissa il valore di $\gamma = 1.8$. a) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.2$, b) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.4$, c) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.6$, d) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.8$.

10.3.6.2.1 Algoritmo Matlab

Di seguito viene riportato un estratto dello script Matlab utilizzato per i plot sopra riportati, soffermandosi sul calcolo della soluzione inerente il problema differenziale S-FRADE. Il simbolo (:) sta ad indicare che la parte di codice precedente è esattamente la stessa di quella riportata al paragrafo 10.3.6.1.1 per il problema S-FRADE con $u(x, 0) = x^\delta$, essendo adibita al calcolo delle componenti della matrice **C** per l'integrazione temporale in ADM che non si modifica al variare delle condizioni al contorno.

```
function [u_SPFADE_et] = uSP_fraz_et_sinx(Nmax,x1,t1,Gamma,beta)
% uSP_fraz_cost => SPF      = space fractional
%                               ADE      = Advection Diffusion Equation
%                               e^(t)    = D(t)=V(t)=g(t)=e^(t)
% function per il calcolo della soluzione del seguente problema
% differenziale
%-----
```

```

% u,t + e^(t) u,beta = e^(t) u,Gamma      1 < Gamma <= 2 && 0 <
beta <= 1
% u(x,0) = sin(x)
%-----
                                :

u_SPFADE_et = zeros(length(t1),length(x1));
SUM = 0;
for n = 0 : Nmax
    if n == 0
        u_SPFADE_et = sin(x1);
    else
        for j = 0 : n
            SUM = SUM + (-1)^j*nchoosek(n,j)*sin(x1 + ((n-
j)*Gamma+j*beta)*pi/2);
        end
        u_SPFADE_et = u_SPFADE_et + C(:,n)*SUM;
        SUM = 0;
    end
end
end

```

10.3.6.3 S-FRADE con condizioni iniziali $u(x, 0) = \cos(x)$

Si considera il seguente problema differenziale

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + e^t \cdot \frac{\partial^\beta u}{\partial x^\beta} = e^t \cdot \frac{\partial^\gamma u}{\partial x^\gamma} \\ u(x, 0) = \cos(x) \end{cases} \quad (10.69)$$

Dove la derivata frazionaria è di Caputo con terminale $a = -\infty$.

Utilizzando i risultati precedenti, l' n -esimo termine della decomposizione ADM assume la seguente formulazione

$$u_n(x, t) = \frac{1}{\text{Diag}[\mathbb{A} \otimes (\text{Ref}\mathbb{A})^T]} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} +1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{ij} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (-1)^{j+1} \end{pmatrix}}_{[n+1] \times [n+1]} \cdot \begin{pmatrix} e^{n \cdot t} \\ e^{(n-1) \cdot t} \\ e^{(n-2) \cdot t} \\ \vdots \\ e^t \\ 1 \end{pmatrix} \quad (10.70)$$

$$\cdot \sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{n}{j} \cos\left(x + \frac{[(n-j)\gamma + j\beta]\pi}{2}\right)$$

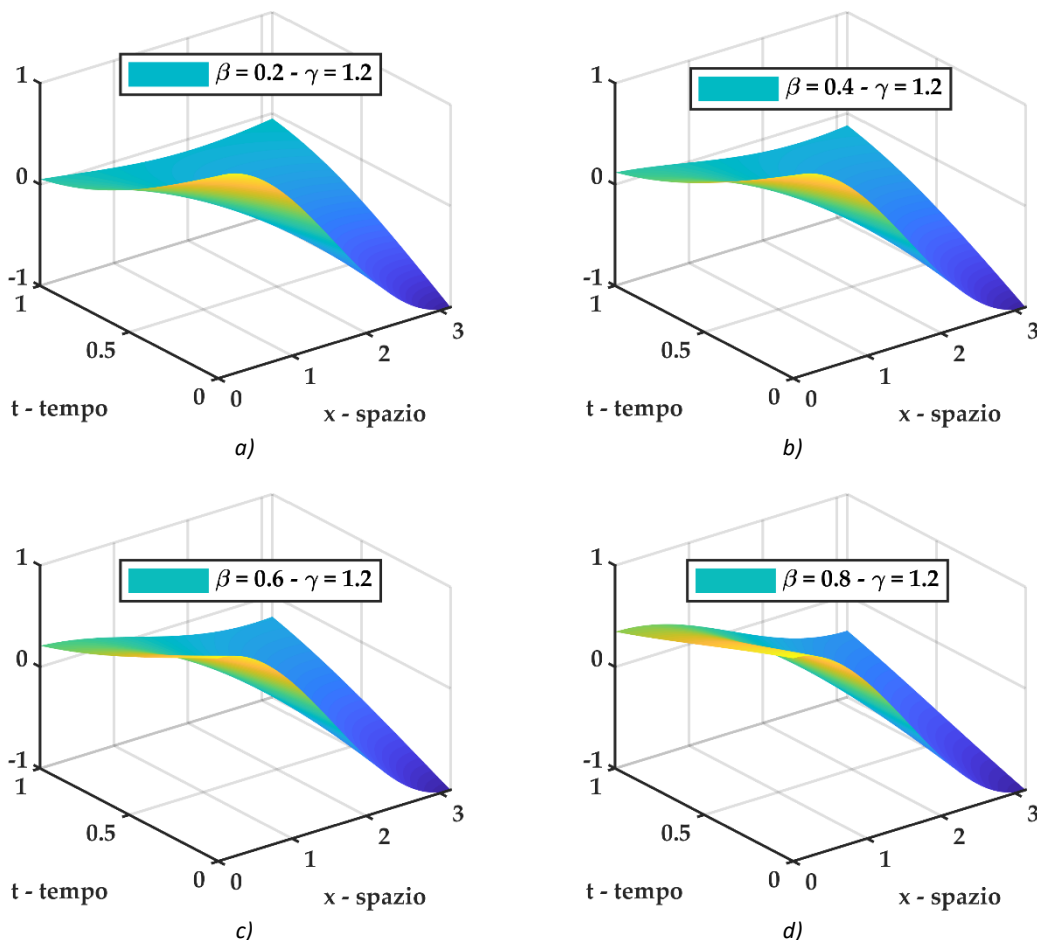


Figura 10-158 plot 3D della soluzione $u(x, t)$ del problema differenziale frazionario S-FRADE con $u(x, 0) = \cos(x)$ e coefficiente di diffusione ed avvezione funzione del tempo $V = D = e^t$ per diversi valori dell'ordine di derivazione frazionario fissato $\gamma = 1.2$. a) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.2$, b) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.4$, c) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.6$, d) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.8$

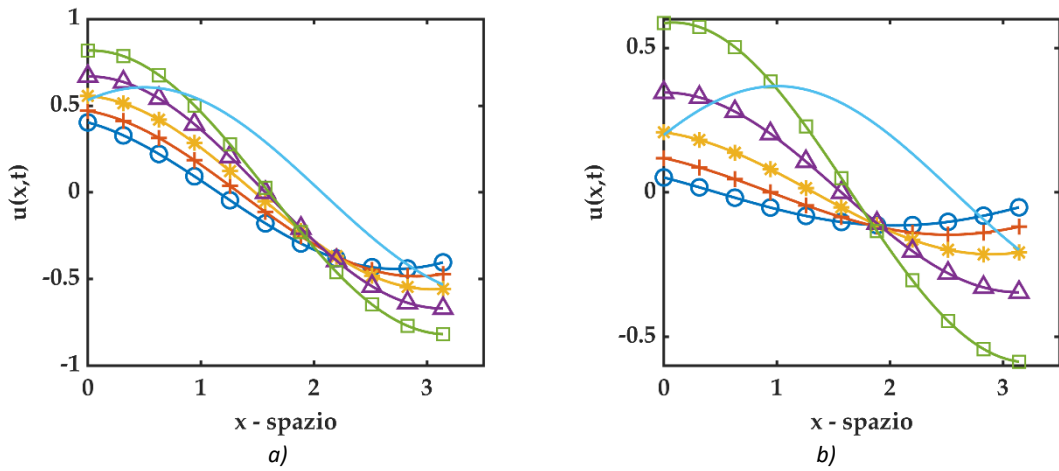


Figura 10-159 plot 2D di confronto fra soluzioni del problema differenziale frazionario S-FRADE con $u(x, 0) = \cos(x)$ e coefficienti di diffusione ed avvezione funzione del tempo $V = D = e^t$. Il valore di $\gamma = 1.2$ è fissato e (⊙ cerchio - blu) rappresenta la soluzione per $\beta = 0.2$, (+ croce - rosso) rappresenta la soluzione per $\beta = 0.4$, (* asterisco - giallo) rappresenta la soluzione per $\beta = 0.6$, (Δ triangolo - viola) rappresenta la soluzione per $\beta = 0.6$, (□ quadrato - verde) rappresenta la soluzione per $\beta = 1.0$, (- linea continua - azzurro) rappresenta la soluzione della standard ADE. a) plot 2D per $t = 0.5$, b) plot 2D per $t = 1.0$

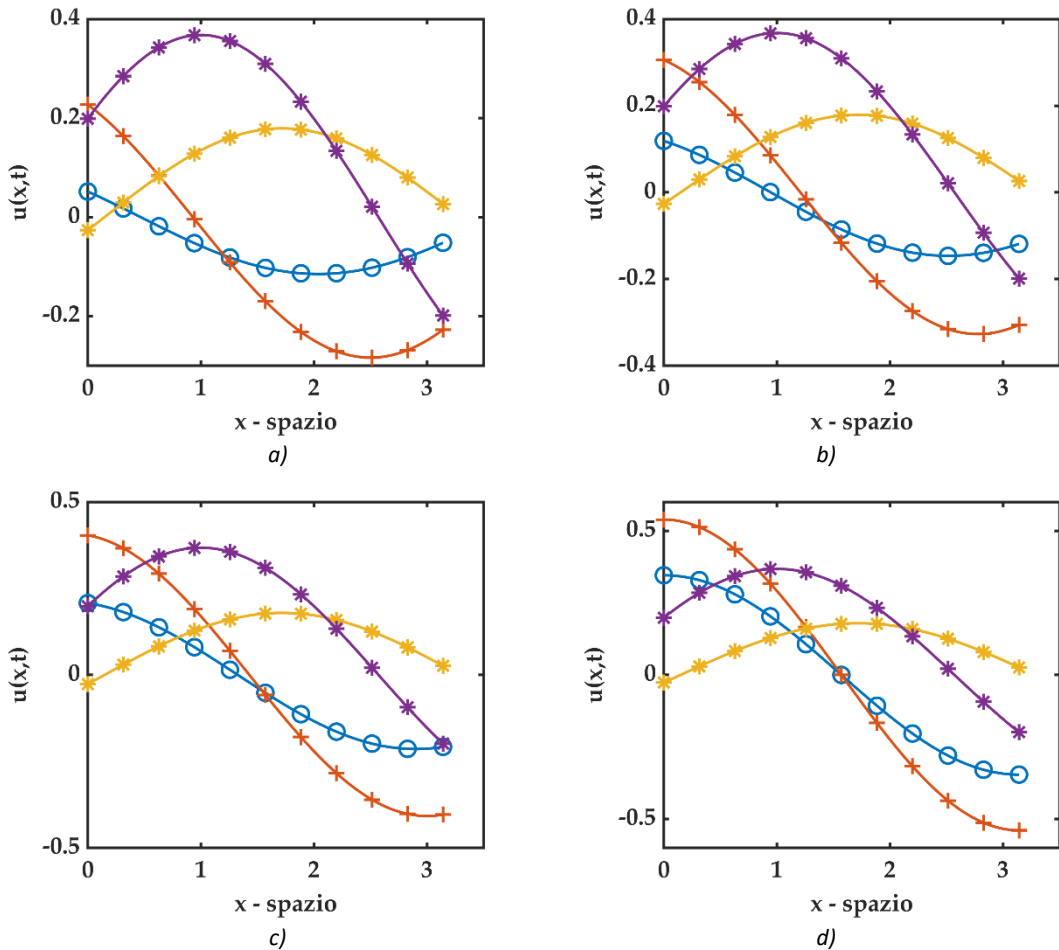


Figura 10-160 plot 2D di confronto per S-FRADE con $u(x, 0) = \cos(x)$ e $t = 1.0$ dove (* asterisco - viola) rappresenta la soluzione standard ADE e $D = V = \text{cost}$, (* asterisco - giallo) rappresenta la soluzione standard ADE e $D = V = e^t$, (+ croce - rosso) rappresenta la soluzione S-FRADE $D = V = \text{cost}$, (⊙ cerchio - blu) rappresenta la soluzione S-FRADE e $D = V = e^t$. Si fissa il valore di $\gamma = 1.2$. a) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.2$, b) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.4$, c) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.6$, d) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.8$.

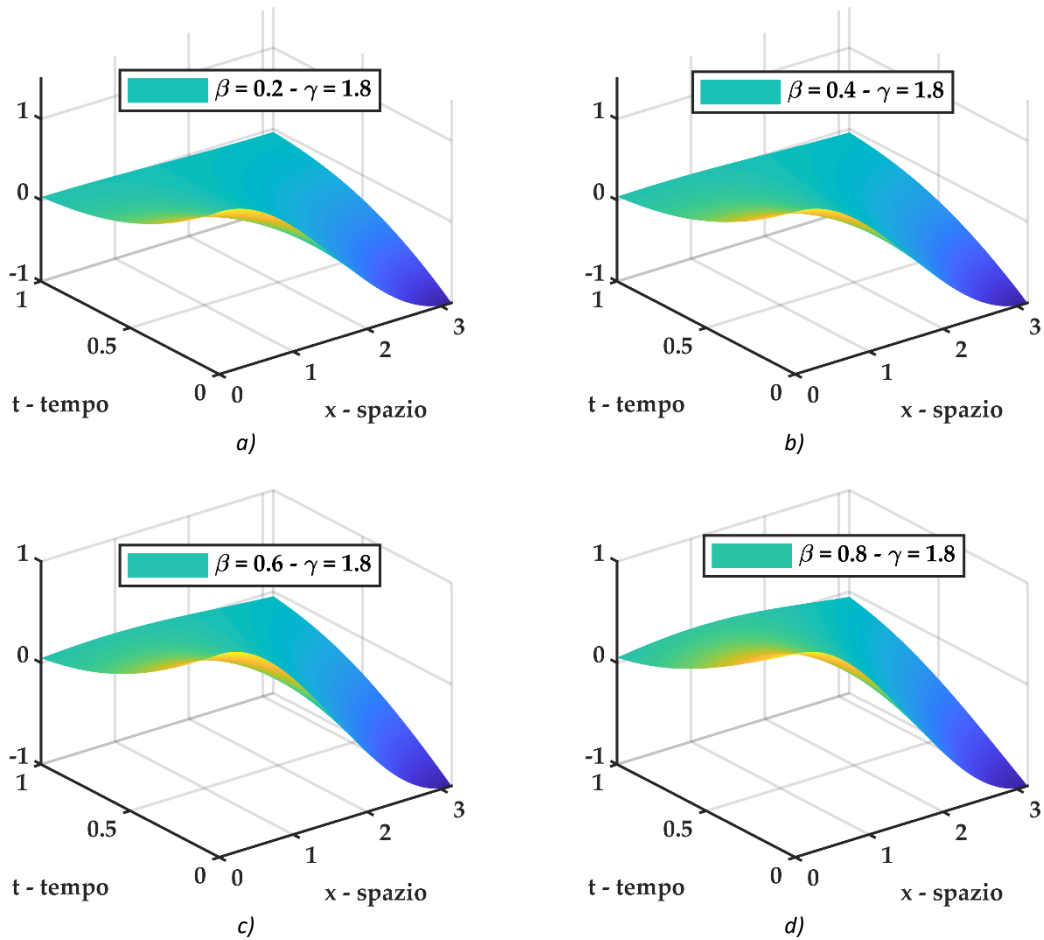


Figura 10-161 plot 3D della soluzione $u(x,t)$ del problema differenziale frazionario S-FRADE con $u(x,0) = \cos(x)$ e coefficiente di diffusione ed avvezione funzione del tempo $V = D = e^t$ per diversi valori dell'ordine di derivazione frazionario fissato $\gamma = 1.8$. a) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.2$, b) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.4$, c) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.6$, d) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.8$

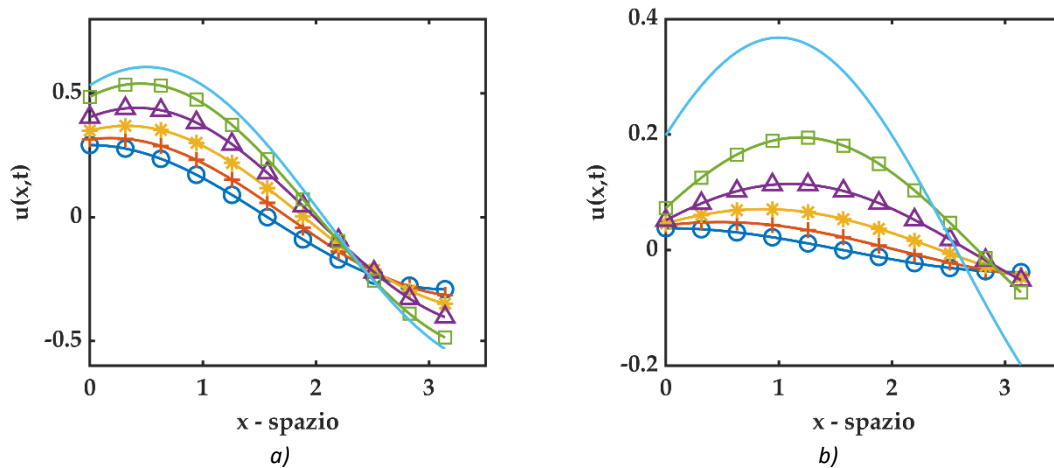


Figura 10-162 plot 2D di confronto fra soluzioni del problema differenziale frazionario S-FRADE con $u(x,0) = \cos(x)$ e coefficienti di diffusione ed avvezione funzione del tempo $V = D = e^t$. Il valore di $\gamma = 1.8$ è fissato e (⊙ cerchio - blu) rappresenta la soluzione per $\beta = 0.2$, (+ croce - rosso) rappresenta la soluzione per $\beta = 0.4$, (* asterisco - giallo) rappresenta la soluzione per $\beta = 0.6$, (△ triangolo - viola) rappresenta la soluzione per $\beta = 0.8$, (□ quadrato - verde) rappresenta la soluzione per $\beta = 1.0$, (— linea continua - azzurro) rappresenta la soluzione della standard ADE. a) plot 2D per $t = 0.5$, b) plot 2D per $t = 1.0$

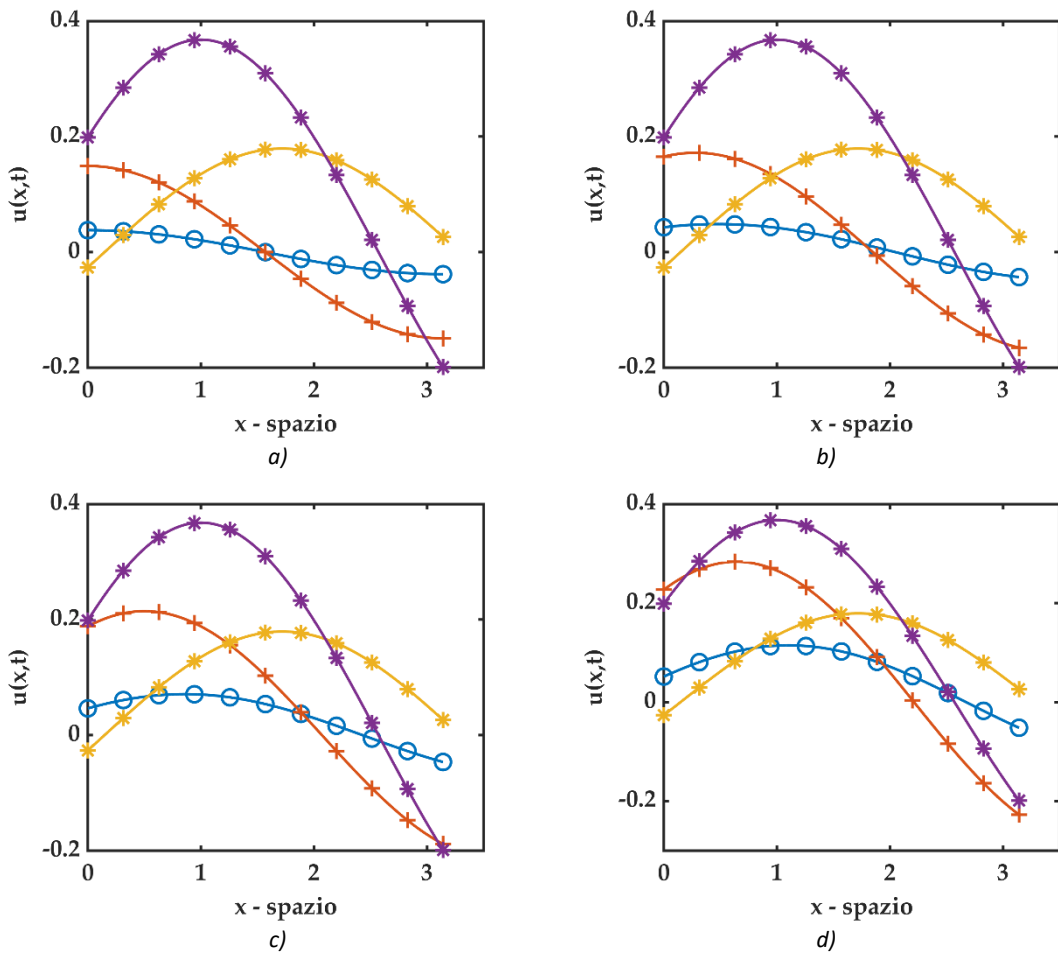


Figura 10-163 plot 2D di confronto fra soluzioni del problema differenziale frazionario S-FRADE con $u(x, 0) = \cos(x)$ e $t = 1.0$ dove (* asterisco - viola) rappresenta la soluzione standard ADE e $D = V = \cos t$, (* asterisco - giallo) rappresenta la soluzione standard ADE e $D = V = e^t$, (+ croce - rosso) rappresenta la soluzione S-FRADE $D = V = \cos t$, (⊙ cerchio - blu) rappresenta la soluzione S-FRADE e $D = V = e^t$. Si fissa il valore di $\gamma = 1.8$. a) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.2$, b) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.4$, c) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.6$, d) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.8$.

10.3.6.3.1 Algoritmo Matlab

Di seguito viene riportato un estratto dello script Matlab utilizzato per i plot sopra riportati, soffermandosi sul calcolo della soluzione inerente il problema differenziale S-FRADE. Il simbolo (:) sta ad indicare che la parte di codice precedente è esattamente la stessa di quella riportata al paragrafo 10.3.6.1.1 per il problema S-FRADE con $u(x, 0) = x^\delta$, essendo adibita al calcolo delle componenti della matrice **C** per l'integrazione temporale in ADM che non si modifica al variare delle condizioni al contorno.

```

function [u_SPFADE_et] = uSP_fraz_et_cosx(Nmax,x1,t1,Gamma,beta)
% uSP_fraz_cost => SPF      = space fractional
%                               ADE      = Advection Diffusion Equation
%                               e^(t)    = D(t)=V(t)=g(t)=e^(t)
% function per il calcolo della soluzione del seguente problema
% differenziale
%-----

```

```

% u,t + e^(t) u,beta = e^(t) u,Gamma      1 < Gamma <= 2 && 0 <
beta <= 1
% u(x,0) = cos(x)
%-----
:

u_SPFADE_et = zeros(length(t1),length(x1));
SUM = 0;
for n = 0 : Nmax
    if n == 0
        u_SPFADE_et = cos(x1);
    else
        for j = 0 : n
            SUM = SUM + (-1)^j*nchoosek(n,j)*cos(x1 + ((n-
j)*Gamma+j*beta)*pi/2);
        end
        u_SPFADE_et = u_SPFADE_et + C(:,n)*SUM;
        SUM = 0;
    end
end
end
end

```

10.3.6.4 S-FRADE con condizioni iniziali $u(x, 0) = e^{ax}$

Si considera il seguente problema differenziale

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + e^t \cdot \frac{\partial^\beta u}{\partial x^\beta} = e^t \cdot \frac{\partial^\gamma u}{\partial x^\gamma} \\ u(x, 0) = e^{ax} \end{cases} \quad (10.71)$$

Dove la derivata frazionaria è di Caputo con terminale $a = -\infty$.
Utilizzando i risultati precedenti, l' n -esimo termine della decomposizione ADM assume la seguente formulazione

$$u_n(x, t) = \frac{1}{\text{Diag}[\mathbf{A} \otimes (\text{Ref}\mathbf{A})^T]} \underbrace{\begin{pmatrix} +1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{ij} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (-1)^{j+1} \end{pmatrix}}_{[n+1] \times [n+1]} \cdot \begin{pmatrix} e^{nt} \\ e^{(n-1)t} \\ e^{(n-2)t} \\ \vdots \\ e^t \\ 1 \end{pmatrix} \quad (10.72)$$

$$\cdot \sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{n}{j} a^{(n-j)\gamma + j\beta} \cdot e^{ax}$$

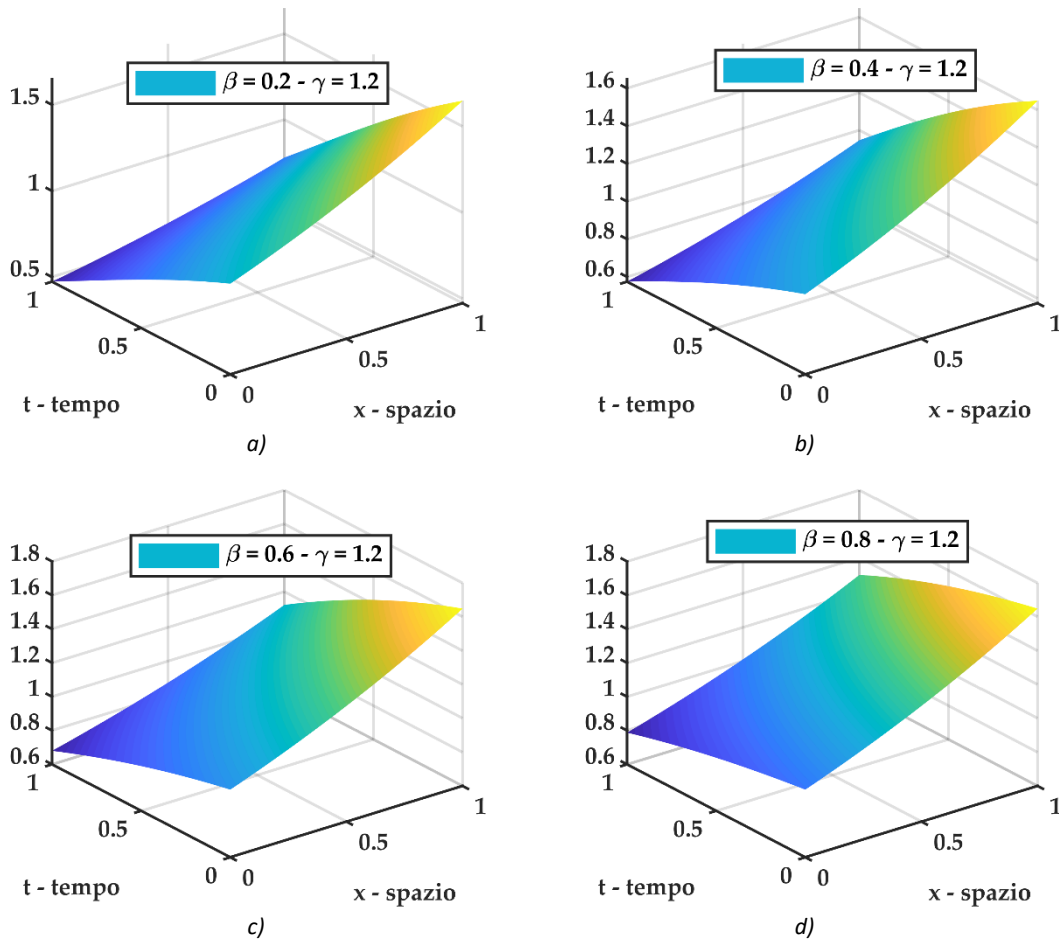


Figura 10-164 plot 3D della soluzione $u(x, t)$ del problema differenziale frazionario S-FRADE con $u(x, 0) = e^{ax}$ con $a = 0.50$ e coefficiente di diffusione ed avvezione funzione del tempo $V = D = e^t$ per diversi valori dell'ordine di derivazione frazionario fissato $\gamma = 1.2$. a) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.2$, b) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.4$, c) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.6$, d) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.8$

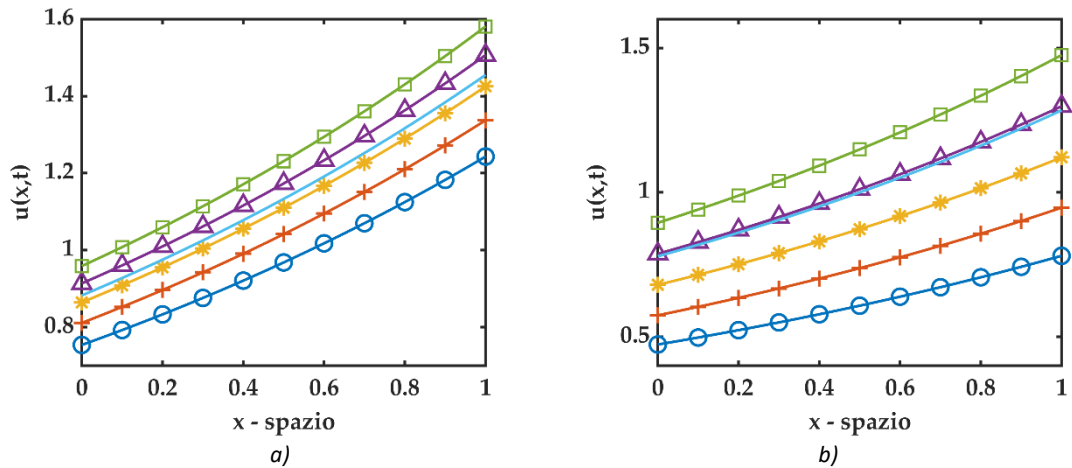


Figura 10-165 plot 2D di confronto fra soluzioni del problema differenziale frazionario S-FRADE con $u(x, 0) = e^{ax}$ con $a = 0.50$ e coefficienti di diffusione ed avvezione funzione del tempo $V = D = e^t$. Il valore di $\gamma = 1.2$ è fissato e (⊙ cerchio - blu) rappresenta la soluzione per $\beta = 0.2$, (+ croce - rosso) rappresenta la soluzione per $\beta = 0.4$, (* asterisco - giallo) rappresenta la soluzione per $\beta = 0.6$, (Δ triangolo - viola) rappresenta la soluzione per $\beta = 0.6$, (□ quadrato - verde) rappresenta la soluzione per $\beta = 1.0$, (— linea continua - azzurro) rappresenta la soluzione della standard ADE. a) plot 2D per $t = 0.5$, b) plot 2D per $t = 1.0$

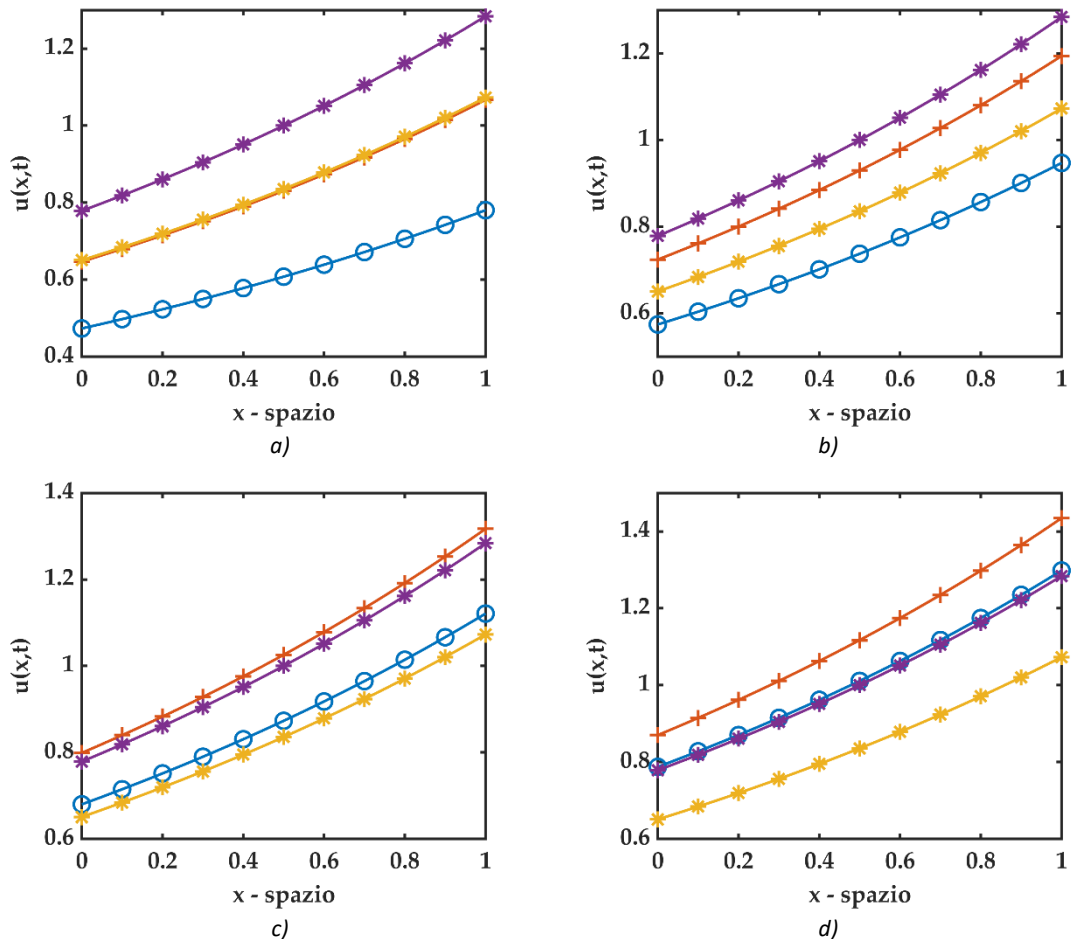


Figura 10-166 plot 2D di confronto per S-FRADE con $u(x, 0) = e^{ax}$ con $a = 0.50$ e $t = 1.0$ dove (* asterisco - viola) rappresenta la soluzione standard ADE e $D = V = \text{cost}$, (* asterisco - giallo) rappresenta la soluzione standard ADE e $D = V = e^t$, (+ croce - rosso) rappresenta la soluzione S-FRADE $D = V = \text{cost}$, (⊙ cerchio - blu) rappresenta la soluzione S-FRADE e $D = V = e^t$. Si fissa il valore di $\gamma = 1.2$. a) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.2$, b) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.4$, c) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.6$, d) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.8$.

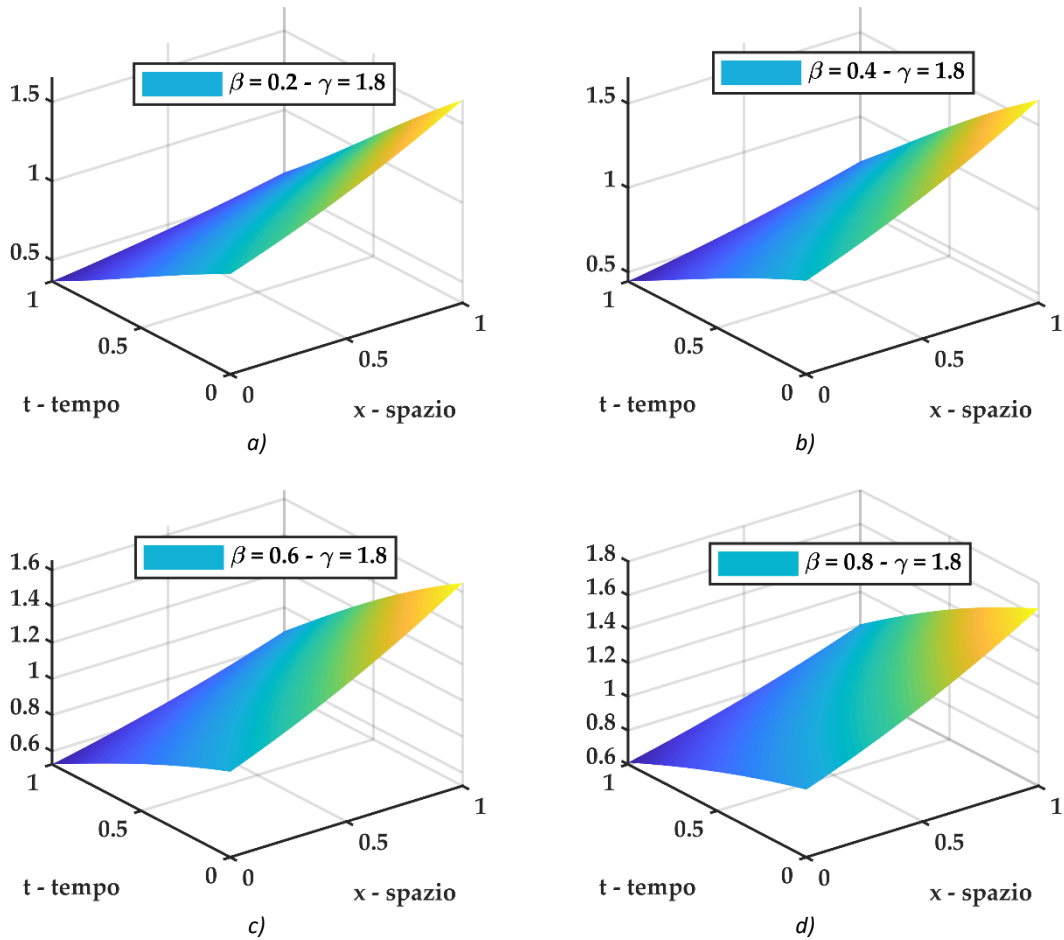


Figura 10-167 plot 3D della soluzione $u(x, t)$ del problema differenziale frazionario S-FRADE con $u(x, 0) = e^{ax}$ con $a = 0.50$ e coefficienti di diffusione ed avvezione funzione del tempo $V = D = e^t$ per diversi valori dell'ordine di derivazione frazionario fissato $\gamma = 1.8$. a) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.2$, b) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.4$, c) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.6$, d) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.8$

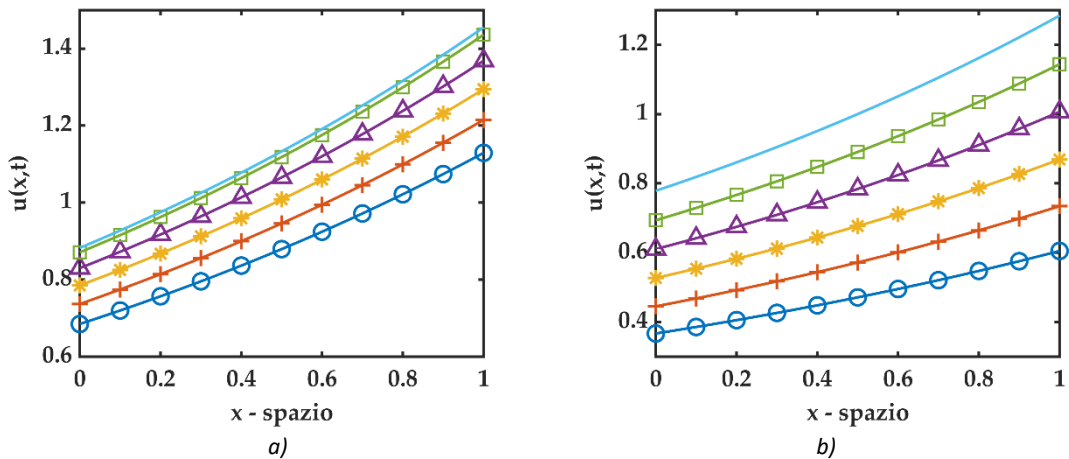


Figura 10-168 plot 2D di confronto fra soluzioni del problema differenziale frazionario S-FRADE con $u(x, 0) = e^{ax}$ con $a = 0.50$ e coefficienti di diffusione ed avvezione funzione del tempo $V = D = e^t$. Il valore di $\gamma = 1.8$ è fissato e (○ cerchio - blu) rappresenta la soluzione per $\beta = 0.2$, (+ croce - rosso) rappresenta la soluzione per $\beta = 0.4$, (* asterisco - giallo) rappresenta la soluzione per $\beta = 0.6$, (△ triangolo - viola) rappresenta la soluzione per $\beta = 0.6$, (□ quadrato - verde) rappresenta la soluzione per $\beta = 1.0$, (— linea continua - azzurro) rappresenta la soluzione della standard ADE. a) plot 2D per $t = 0.5$, b) plot 2D per $t = 1.0$

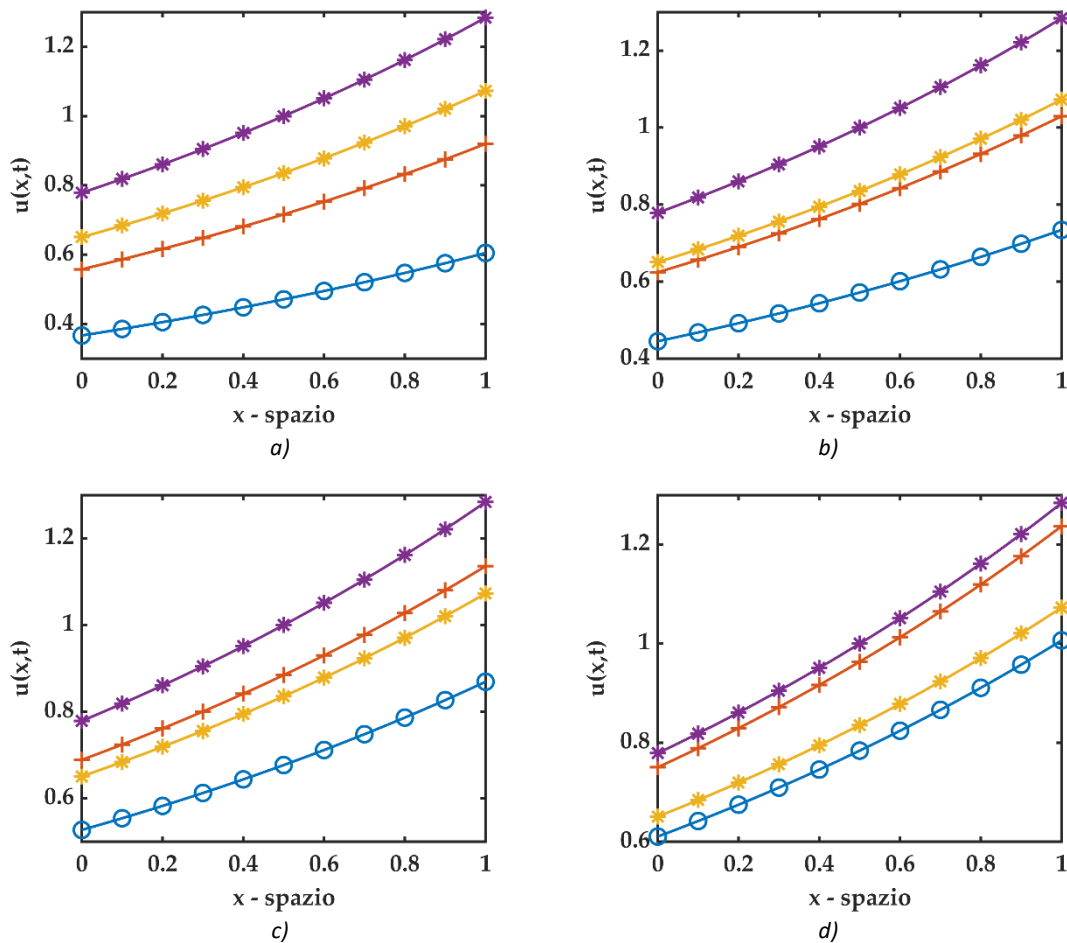


Figura 10-169 plot 2D di confronto fra soluzioni del problema differenziale frazionario S-FRADE con $u(x, 0) = e^{ax}$ con $a = 0.50$ e $t = 1.0$ dove (* asterisco - viola) rappresenta la soluzione standard ADE e $D = V = cost$, (* asterisco - giallo) rappresenta la soluzione standard ADE e $D = V = e^t$, (+ croce - rosso) rappresenta la soluzione S-FRADE $D = V = cost$, (⊙ cerchio - blu) rappresenta la soluzione S-FRADE e $D = V = e^t$. Si fissa il valore di $\gamma = 1.8$. a) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.2$, b) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.4$, c) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.6$, d) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.8$.

10.3.6.4.1 Algoritmo Matlab

Di seguito viene riportato un estratto dello script Matlab utilizzato per i plot sopra riportati, soffermandosi sul calcolo della soluzione inerente il problema differenziale S-FRADE. Il simbolo (:) sta ad indicare che la parte di codice precedente è esattamente la stessa di quella riportata al paragrafo 10.3.6.1.1 per il problema S-FRADE con $u(x, 0) = x^\delta$, essendo adibita al calcolo delle componenti della matrice **C** per l'integrazione temporale in ADM che non si modifica al variare delle condizioni al contorno.

```
function [u_SPFADE_et] = uSP_fraz_et_eax(Nmax,x1,t1,Gamma,beta,a)
% uSP_fraz_cost => SPF      = space fractional
%                               ADE      = Advection Diffusion Equation
%                               e^(t)    = D(t)=V(t)=g(t)=e^(t)
% function per il calcolo della soluzione del seguente problema
% differenziale
%-----
```

```

% u,t + e^(t) u,beta = e^(t) u,Gamma      1 < Gamma <= 2 && 0 <
beta <= 1
% u(x,0) = e^(ax)
%-----
                                :

u_SPFADE_et = zeros(length(t1),length(x1));
SUM = 0;
for n = 0 : Nmax
    if n == 0
        u_SPFADE_et = exp(a*x1);
    else
        for j = 0 : n
            SUM = SUM + (-1)^j*nchoosek(n,j)*a^(n-
j)*Gamma+j*beta)*exp(a*x1);
        end
        u_SPFADE_et = u_SPFADE_et + C(:,n)*SUM;
        SUM = 0;
    end
end
end
end

```

10.4 ST – FRADE $V = V(t) = h(t), D = D(t) = g(t)$

Nel presente paragrafo si considera l'equazione di diffusione-avvezione frazionaria in spazio-tempo (ST-FRADE), considerando $V = V(t) = h(t), D = D(t) = g(t)$, ovvero una differente dipendenza temporale $h(t), g(t)$ per il coefficiente di avvezione e diffusione rispettivamente. In tale contesto è possibile identificare una formulazione generale ADM considerando il problema differenziale seguente

$$\begin{cases} \frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha} + h(t) \cdot \frac{\partial^\beta u}{\partial x^\beta} = g(t) \cdot \frac{\partial^\gamma u}{\partial x^\gamma} \\ u(x, 0) = f(x) \end{cases} \quad (10.73)$$

che può essere scritta anche nel seguente modo

$$D_t^\alpha u(x, t) + h(t) D_x^\beta u(x, t) = g(t) D_x^\gamma u(x, t) \quad (10.74)$$

con gli operatori differenziali definiti come

$$D_t^\alpha = \frac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha} \quad D_x^\beta = \frac{\partial^\beta}{\partial x^\beta} \quad D_x^\gamma = \frac{\partial^\gamma}{\partial x^\gamma}$$

e l'operatore integrale

$$D_t^{-\alpha}(\cdot) = J_t^\alpha(\cdot)$$

integrale di Riemann-Liouville.

Applicando ad ambo i membri $D_t^{-\alpha}$ si ottiene

$$D_t^{-\alpha} D_t^\alpha u(x, t) = D_t^{-\alpha} \{g(t) D_x^\gamma u(x, t)\} - D_t^{-\alpha} \{h(t) D_x^\beta u(x, t)\} \quad (10.75)$$

$$u(x, t) = u(x, 0) + J_t^\alpha \{g(t) D_x^\gamma u(x, t)\} - J_t^\alpha \{h(t) D_x^\beta u(x, t)\} \quad (10.76)$$

Ricordando l'ipotesi base del Metodo di Decomposizione Adomia

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x, t)$$

si ottiene

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x, t) = & u(x, 0) + J_t^\alpha \left\{ g(t) D_x^\gamma \left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x, t) \right) \right\} \\ & - J_t^\alpha \left\{ h(t) D_x^\beta \left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x, t) \right) \right\} \end{aligned} \quad (10.77)$$

da cui si deduce l'algoritmo ricorsivo

$$\begin{cases} u_0(x, t) = u(x, 0) = f(x) \\ u_{n+1}(x, t) = J_t^\alpha \{g(t) D_x^\gamma u_n(x, t)\} - J_t^\alpha \{h(t) D_x^\beta u_n(x, t)\} \end{cases} \quad n = 0, 1, 2, \dots + \infty \quad (10.78)$$

E calcolando alcune componenti esplicitamente

n	u_n
0	$u_0(x, t) = u(x, 0) = f(x)$
1	$ \begin{aligned} u_1(x, t) &= J_t^\alpha \{g(t) D_x^\gamma u_0(x, t)\} - J_t^\alpha \{h(t) D_x^\beta u_0(x, t)\} \\ &= J_t^\alpha \{g(t) D_x^\gamma f(x)\} - J_t^\alpha \{h(t) D_x^\beta f(x)\} \\ &= {}^{RL} \mathbb{J}_t^\alpha [g](t) \cdot D_x^\gamma f(x) - {}^{RL} \mathbb{J}_t^\alpha [h](t) \cdot D_x^\beta f(x) \end{aligned} $
2	$ \begin{aligned} u_2(x, t) &= J_t^\alpha \{g(t) D_x^\gamma u_1(x, t)\} - J_t^\alpha \{h(t) D_x^\beta u_1(x, t)\} \\ &= J_t^\alpha \left\{ g(t) D_x^\gamma \left[{}^{RL} \mathbb{J}_t^\alpha [g](t) \cdot D_x^\gamma f(x) - {}^{RL} \mathbb{J}_t^\alpha [h](t) \cdot D_x^\beta f(x) \right] \right\} \\ &\quad - J_t^\alpha \left\{ h(t) D_x^\beta \left[{}^{RL} \mathbb{J}_t^\alpha [g](t) \cdot D_x^\gamma f(x) - {}^{RL} \mathbb{J}_t^\alpha [h](t) \cdot D_x^\beta f(x) \right] \right\} \\ &= J_t^\alpha \left[g(t) \cdot {}^{RL} \mathbb{J}_t^\alpha [g](t) \right] \cdot D_x^{2\gamma} f(x) - J_t^\alpha \left[g(t) \cdot {}^{RL} \mathbb{J}_t^\alpha [h](t) \right] \\ &\quad \cdot D_x^{\gamma+\beta} f(x) - J_t^\alpha \left[h(t) \cdot {}^{RL} \mathbb{J}_t^\alpha [g](t) \right] \cdot D_x^{\beta+\gamma} f(x) \\ &\quad + J_t^\alpha \left[h(t) \cdot {}^{RL} \mathbb{J}_t^\alpha [h](t) \right] \cdot D_x^{2\beta} f(x) \\ &= {}^{RL} \mathbb{J}_t^{2\alpha} [2g](t) \cdot D_x^{2\gamma} f(x) - D_x^{\beta+\gamma} f(x) \\ &\quad \cdot \left[{}^{RL} \mathbb{J}_t^{2\alpha} [g, h](t) + {}^{RL} \mathbb{J}_t^{2\alpha} [h, g](t) \right] + {}^{RL} \mathbb{J}_t^{2\alpha} [2h](t) \cdot D_x^{2\beta} f(x) \end{aligned} $
3	$ \begin{aligned} u_3(x, t) &= J_t^\alpha \{g(t) D_x^\gamma u_2(x, t)\} - J_t^\alpha \{h(t) D_x^\beta u_2(x, t)\} \\ &= J_t^\alpha \left\{ g(t) D_x^\gamma \left[{}^{RL} \mathbb{J}_t^{2\alpha} [2g](t) \cdot D_x^{2\gamma} f(x) - D_x^{\beta+\gamma} f(x) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \cdot \left[{}^{RL} \mathbb{J}_t^{2\alpha} [g, h](t) + {}^{RL} \mathbb{J}_t^{2\alpha} [h, g](t) \right] + {}^{RL} \mathbb{J}_t^{2\alpha} [2h](t) \cdot D_x^{2\beta} f(x) \right] \right\} \\ &\quad - J_t^\alpha \left\{ h(t) D_x^\beta \left[{}^{RL} \mathbb{J}_t^{2\alpha} [2g](t) \cdot D_x^{2\gamma} f(x) - D_x^{\beta+\gamma} f(x) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \cdot \left[{}^{RL} \mathbb{J}_t^{2\alpha} [g, h](t) + {}^{RL} \mathbb{J}_t^{2\alpha} [h, g](t) \right] + {}^{RL} \mathbb{J}_t^{2\alpha} [2h](t) \cdot D_x^{2\beta} f(x) \right] \right\} \\ &= J_t^\alpha \left[g(t) \cdot {}^{RL} \mathbb{J}_t^{2\alpha} [2g](t) \right] \cdot D_x^{3\gamma} f(x) - J_t^\alpha \left[g(t) \cdot {}^{RL} \mathbb{J}_t^{2\alpha} [g, h](t) \right] \\ &\quad \cdot D_x^{2\gamma+\beta} f(x) - J_t^\alpha \left[g(t) \cdot {}^{RL} \mathbb{J}_t^{2\alpha} [h, g](t) \right] \cdot D_x^{2\gamma+\beta} f(x) \\ &\quad + J_t^\alpha \left[g(t) \cdot {}^{RL} \mathbb{J}_t^{2\alpha} [2h](t) \right] \cdot D_x^{\gamma+2\beta} f(x) - J_t^\alpha \left[h(t) \cdot {}^{RL} \mathbb{J}_t^{2\alpha} [2g](t) \right] \\ &\quad \cdot D_x^{2\gamma+\beta} f(x) + J_t^\alpha \left[h(t) \cdot {}^{RL} \mathbb{J}_t^{2\alpha} [g, h](t) \right] \cdot D_x^{2\beta+\gamma} f(x) \\ &\quad + J_t^\alpha \left[h(t) \cdot {}^{RL} \mathbb{J}_t^{2\alpha} [h, g](t) \right] \cdot D_x^{\gamma+2\beta} f(x) - J_t^\alpha \left[h(t) \cdot {}^{RL} \mathbb{J}_t^{2\alpha} [2h](t) \right] \\ &\quad \cdot D_x^{3\beta} f(x) \\ &= D_x^{3\gamma} f(x) \cdot {}^{RL} \mathbb{J}_t^{3\alpha} [3g](t) - D_x^{2\gamma+\beta} f(x) \\ &\quad \cdot \left[{}^{RL} \mathbb{J}_t^{3\alpha} [2g, h](t) + {}^{RL} \mathbb{J}_t^{3\alpha} [g, h, g](t) + {}^{RL} \mathbb{J}_t^{3\alpha} [g, 2h](t) \right] + D_x^{\gamma+2\beta} f(x) \\ &\quad \cdot \left[{}^{RL} \mathbb{J}_t^{3\alpha} [g, 2h](t) + {}^{RL} \mathbb{J}_t^{3\alpha} [h, g, h](t) + {}^{RL} \mathbb{J}_t^{3\alpha} [2h, g](t) \right] - D_x^{3\beta} f(x) \\ &\quad \cdot {}^{RL} \mathbb{J}_t^{3\alpha} [3h](t) \end{aligned} $

4	$ \begin{aligned} u_4(x, t) &= J_t^\alpha \{g(t) D_x^\gamma u_3(x, t)\} - J_t^\alpha \{h(t) D_x^\beta u_3(x, t)\} \\ &= D_x^{4\gamma} f(x) \cdot {}^{RL} \mathfrak{J}_t^{4\alpha} [4g](t) - D_x^{3\gamma+\beta} f(x) \\ &\quad \cdot \left[{}^{RL} \mathfrak{J}_t^{4\alpha} [3g, h](t) + {}^{RL} \mathfrak{J}_t^{4\alpha} [2g, h, g](t) + {}^{RL} \mathfrak{J}_t^{4\alpha} [g, h, 2g](t) \right. \\ &\quad \left. + {}^{RL} \mathfrak{J}_t^{4\alpha} [h, 3g](t) \right] + D_x^{2\gamma+2\beta} f(x) \\ &\quad \cdot \left[{}^{RL} \mathfrak{J}_t^{4\alpha} [2g, 2h](t) + {}^{RL} \mathfrak{J}_t^{4\alpha} [g, h, g, h](t) + {}^{RL} \mathfrak{J}_t^{4\alpha} [g, 2h, g](t) \right. \\ &\quad \left. + {}^{RL} \mathfrak{J}_t^{4\alpha} [h, 2g, h](t) + {}^{RL} \mathfrak{J}_t^{4\alpha} [h, g, h, g](t) + {}^{RL} \mathfrak{J}_t^{4\alpha} [2h, 2g](t) \right] \\ &\quad - D_x^{\gamma+3\beta} f(x) \\ &\quad \cdot \left[{}^{RL} \mathfrak{J}_t^{4\alpha} [g, 3h](t) + {}^{RL} \mathfrak{J}_t^{4\alpha} [h, g, 2h](t) + {}^{RL} \mathfrak{J}_t^{4\alpha} [2h, 2g](t) \right. \\ &\quad \left. + {}^{RL} \mathfrak{J}_t^{4\alpha} [3h, g](t) \right] + D_x^{4\beta} f(x) \cdot {}^{RL} \mathfrak{J}_t^{4\alpha} [4h](t) \end{aligned} $
5	$ \begin{aligned} u_5(x, t) &= J_t^\alpha \{g(t) D_x^\gamma u_4(x, t)\} - J_t^\alpha \{h(t) D_x^\beta u_4(x, t)\} \\ &= D_x^{5\gamma} f(x) \cdot {}^{RL} \mathfrak{J}_t^{5\alpha} [5g](t) - D_x^{4\gamma+\beta} f(x) \\ &\quad \cdot \left[{}^{RL} \mathfrak{J}_t^{5\alpha} [4g, h](t) + {}^{RL} \mathfrak{J}_t^{5\alpha} [3g, h, g](t) + {}^{RL} \mathfrak{J}_t^{5\alpha} [2g, h, 2g](t) \right. \\ &\quad \left. + {}^{RL} \mathfrak{J}_t^{5\alpha} [g, h, 3g](t) + {}^{RL} \mathfrak{J}_t^{5\alpha} [h, 4g](t) \right] + D_x^{3\gamma+2\beta} f(x) \\ &\quad \cdot \left[{}^{RL} \mathfrak{J}_t^{5\alpha} [3g, 2h](t) + {}^{RL} \mathfrak{J}_t^{5\alpha} [2g, h, g, h](t) + {}^{RL} \mathfrak{J}_t^{5\alpha} [2g, 2h, 2g](t) \right. \\ &\quad \left. + {}^{RL} \mathfrak{J}_t^{5\alpha} [g, h, 2g, h](t) + {}^{RL} \mathfrak{J}_t^{5\alpha} [g, h, g, h, g](t) + {}^{RL} \mathfrak{J}_t^{5\alpha} [g, 2h, 2g](t) \right. \\ &\quad \left. + {}^{RL} \mathfrak{J}_t^{5\alpha} [h, 3g, h](t) + {}^{RL} \mathfrak{J}_t^{5\alpha} [h, 2g, h, g](t) + {}^{RL} \mathfrak{J}_t^{5\alpha} [h, g, h, 2g](t) \right. \\ &\quad \left. + {}^{RL} \mathfrak{J}_t^{5\alpha} [2h, 3g](t) \right] - D_x^{2\gamma+3\beta} f(x) \\ &\quad \cdot \left[{}^{RL} \mathfrak{J}_t^{5\alpha} [2g, 3h](t) + {}^{RL} \mathfrak{J}_t^{5\alpha} [g, h, g, 2h](t) + {}^{RL} \mathfrak{J}_t^{5\alpha} [g, 2h, g, h](t) \right. \\ &\quad \left. + {}^{RL} \mathfrak{J}_t^{5\alpha} [g, 3h, g](t) + {}^{RL} \mathfrak{J}_t^{5\alpha} [h, 2g, 2h](t) + {}^{RL} \mathfrak{J}_t^{5\alpha} [h, g, h, g, h](t) \right. \\ &\quad \left. + {}^{RL} \mathfrak{J}_t^{5\alpha} [h, g, 2h, g](t) + {}^{RL} \mathfrak{J}_t^{5\alpha} [2h, 2g, h](t) + {}^{RL} \mathfrak{J}_t^{5\alpha} [2h, g, h, g](t) \right. \\ &\quad \left. + {}^{RL} \mathfrak{J}_t^{5\alpha} [3h, 2g](t) \right] + D_x^{\gamma+4\beta} f(x) \\ &\quad \cdot \left[{}^{RL} \mathfrak{J}_t^{5\alpha} [g, 4h](t) + {}^{RL} \mathfrak{J}_t^{5\alpha} [h, g, 3h](t) + {}^{RL} \mathfrak{J}_t^{5\alpha} [2h, g, 2h](t) \right. \\ &\quad \left. + {}^{RL} \mathfrak{J}_t^{5\alpha} [3h, g, 2h](t) + {}^{RL} \mathfrak{J}_t^{5\alpha} [4h, g](t) \right] - D_x^{5\beta} f(x) \cdot {}^{RL} \mathfrak{J}_t^{5\alpha} [5h](t) \end{aligned} $
⋮	⋮
n	$ u_n(x, t) = \sum_{j=0}^n (-1)^j \left[D_x^{(n-j)\gamma+j\beta} \right] f(x) \cdot \left(\sum_{l=0}^n {}^{RL} \mathfrak{D}' \left[\binom{n}{l} \right] \mathfrak{J}_t^{n\alpha} (t) \right) $ <p>Con \mathfrak{D} denominata MATRICE DI DIREZIONE le cui righe indicano la direzione da rispettare per la moltiplicazione ed integrazione temporale delle varie componenti.</p> $ \mathfrak{D} [D'_{p,n}, n] \in \mathcal{M} [D'_{p,n} = p^n, n] $ $ \mathfrak{D}' [l, n] \in \mathcal{M} \left[D'_{2,n} = 2^n \mid \begin{array}{l} \#(X_k = g(t)) = (n-j)\gamma \\ \#(X_k = h(t)) = j\beta \end{array}, n \right] $

Dove $D'_{p,n}$ sono le disposizioni con ripetizione di p elementi di classe n . In tal contesto $p = 2$ essendo $g(t)$ e $h(t)$. Di tutte queste possibili disposizioni, quelle che definiscono l'ordine di integrazione temporale della procedura di decomposizione ADM associato all'operatore $D_x^{(n-j)\gamma+j\beta}$ sono caratterizzate da un numero di $g(t)$ pari a $(n-j)\gamma$ e $h(t)$ pari a $j\beta$. Quindi, se si dispongono le funzioni $g(t)$ e $h(t)$ in un vettore X ad n entrate, le cui posizioni corrispondono alle disposizioni con ripetizioni sopra esposte, il numero di volte in cui la componente generica X_k risulta uguale a $g(t)$ deve essere $(n-j)\gamma$, mentre il numero di volte in cui la componente generica X_k risulta uguale a $h(t)$ deve essere $j\beta$. Da cui giustificata la scrittura sopra indicata.

Per poter meglio comprendere lo schema appena descritto si considerano i casi già esplicitamente calcolati per $n = 1, 2, 3, 4, 5$.

Per $n = 1$

$$\mathfrak{D} = \begin{array}{c} \mathfrak{D}'_{\left[\begin{smallmatrix} (1) \\ (0) \end{smallmatrix} = 1,1 \right]} \left| \begin{array}{c} g \\ \hline h \end{array} \right| \rightarrow \begin{array}{c} {}^{RL} [g]_0 J_t^\alpha(t) = J_t^\alpha g(t) \rightarrow D_x^\gamma \\ {}^{RL} [h]_0 J_t^\alpha(t) = J_t^\alpha h(t) \rightarrow D_x^\beta \end{array} \end{array}$$

Per $n = 2$

$$\mathfrak{D} = \begin{array}{c} \mathfrak{D}'_{\left[\begin{smallmatrix} (2) \\ (0) \end{smallmatrix} = 1,2 \right]} \left| \begin{array}{cc} g & g \\ \hline g & h \\ h & g \end{array} \right| \rightarrow \begin{array}{c} {}^{RL} [2g]_0 J_t^{2\alpha}(t) = J_t^\alpha g(t) J_t^\alpha g(t) \rightarrow D_x^{2\gamma} \\ {}^{RL} [g,h]_0 J_t^{2\alpha}(t) = J_t^\alpha g(t) J_t^\alpha h(t) \rightarrow D_x^{\gamma+\beta} \\ {}^{RL} [h,g]_0 J_t^{2\alpha}(t) = J_t^\alpha h(t) J_t^\alpha g(t) \end{array} \\ \mathfrak{D}'_{\left[\begin{smallmatrix} (2) \\ (2) \end{smallmatrix} = 2,2 \right]} \\ \mathfrak{D}'_{\left[\begin{smallmatrix} (2) \\ (2) \end{smallmatrix} = 1,2 \right]} \left| \begin{array}{cc} h & h \end{array} \right| \rightarrow {}^{RL} [2h]_0 J_t^{2\alpha}(t) = J_t^\alpha h(t) J_t^\alpha h(t) \rightarrow D_x^{2\beta} \end{array}$$

Per $n = 3$

$$\mathfrak{D} = \begin{array}{c} \mathfrak{D}'_{\left[\begin{smallmatrix} (2) \\ (0) \end{smallmatrix} = 1,3 \right]} \left| \begin{array}{ccc} g & g & g \\ \hline g & g & h \\ g & h & g \\ h & g & g \end{array} \right| \rightarrow \begin{array}{c} J_t^\alpha g(t) J_t^\alpha g(t) J_t^\alpha g(t) \rightarrow D_x^{3\gamma} \\ J_t^\alpha g(t) J_t^\alpha g(t) J_t^\alpha h(t) \\ J_t^\alpha g(t) J_t^\alpha h(t) J_t^\alpha g(t) \rightarrow D_x^{2\gamma+\beta} \\ J_t^\alpha h(t) J_t^\alpha g(t) J_t^\alpha g(t) \end{array} \\ \mathfrak{D}'_{\left[\begin{smallmatrix} (2) \\ (1) \end{smallmatrix} = 2,3 \right]} \\ \mathfrak{D}'_{\left[\begin{smallmatrix} (2) \\ (2) \end{smallmatrix} = 1,3 \right]} \left| \begin{array}{ccc} g & h & h \\ \hline h & g & h \\ h & h & g \end{array} \right| \rightarrow \begin{array}{c} J_t^\alpha g(t) J_t^\alpha h(t) J_t^\alpha h(t) \\ J_t^\alpha h(t) J_t^\alpha g(t) J_t^\alpha h(t) \rightarrow D_x^{\gamma+2\beta} \\ J_t^\alpha h(t) J_t^\alpha h(t) J_t^\alpha g(t) \end{array} \\ \mathfrak{D}'_{\left[\begin{smallmatrix} (2) \\ (2) \end{smallmatrix} = 1,2 \right]} \left| \begin{array}{ccc} h & h & h \end{array} \right| \rightarrow J_t^\alpha h(t) J_t^\alpha h(t) J_t^\alpha h(t) \rightarrow D_x^{3\beta} \end{array}$$

Per $n = 4$

$\mathfrak{D} =$	$\mathfrak{D}'_{\left[\begin{smallmatrix} (4) \\ (0) \end{smallmatrix} \right]=1,4}$	$g \ g \ g \ g$	$\rightarrow J_t^\alpha g(t) J_t^\alpha g(t) J_t^\alpha g(t) J_t^\alpha g(t) \rightarrow D_x^{4\gamma}$
	$\mathfrak{D}'_{\left[\begin{smallmatrix} (4) \\ (1) \end{smallmatrix} \right]=4,4}$	$g \ g \ g \ h$	$\rightarrow J_t^\alpha g(t) J_t^\alpha g(t) J_t^\alpha g(t) J_t^\alpha h(t)$
		$g \ g \ h \ g$	$\rightarrow J_t^\alpha g(t) J_t^\alpha g(t) J_t^\alpha h(t) J_t^\alpha g(t)$
		$g \ h \ g \ g$	$\rightarrow J_t^\alpha g(t) J_t^\alpha h(t) J_t^\alpha g(t) J_t^\alpha g(t)$
		$h \ g \ g \ g$	$\rightarrow J_t^\alpha h(t) J_t^\alpha g(t) J_t^\alpha g(t) J_t^\alpha g(t)$
	$\mathfrak{D}'_{\left[\begin{smallmatrix} (4) \\ (2) \end{smallmatrix} \right]=6,4}$	$g \ g \ h \ h$	$\rightarrow J_t^\alpha g(t) J_t^\alpha g(t) J_t^\alpha h(t) J_t^\alpha h(t)$
$g \ h \ g \ h$		$\rightarrow J_t^\alpha g(t) J_t^\alpha h(t) J_t^\alpha g(t) J_t^\alpha h(t)$	
$g \ h \ h \ g$		$\rightarrow J_t^\alpha g(t) J_t^\alpha h(t) J_t^\alpha h(t) J_t^\alpha g(t)$	
$h \ g \ g \ h$		$\rightarrow J_t^\alpha h(t) J_t^\alpha g(t) J_t^\alpha g(t) J_t^\alpha h(t)$	
$h \ g \ h \ g$		$\rightarrow J_t^\alpha h(t) J_t^\alpha g(t) J_t^\alpha h(t) J_t^\alpha g(t)$	
$h \ h \ g \ g$		$\rightarrow J_t^\alpha h(t) J_t^\alpha h(t) J_t^\alpha g(t) J_t^\alpha g(t)$	
$\mathfrak{D}'_{\left[\begin{smallmatrix} (4) \\ (3) \end{smallmatrix} \right]=4,4}$	$g \ h \ h \ h$	$\rightarrow J_t^\alpha g(t) J_t^\alpha h(t) J_t^\alpha h(t) J_t^\alpha h(t)$	
	$h \ g \ h \ h$	$\rightarrow J_t^\alpha h(t) J_t^\alpha g(t) J_t^\alpha h(t) J_t^\alpha h(t)$	
	$h \ h \ g \ h$	$\rightarrow J_t^\alpha h(t) J_t^\alpha h(t) J_t^\alpha g(t) J_t^\alpha h(t)$	
	$h \ h \ h \ g$	$\rightarrow J_t^\alpha h(t) J_t^\alpha h(t) J_t^\alpha h(t) J_t^\alpha g(t)$	
$\mathfrak{D}'_{\left[\begin{smallmatrix} (4) \\ (4) \end{smallmatrix} \right]=1,4}$	$h \ h \ h \ h$	$\rightarrow J_t^\alpha h(t) J_t^\alpha h(t) J_t^\alpha h(t) J_t^\alpha h(t) \rightarrow D_x^{4\beta}$	

Per $n = 5$

$\mathfrak{D} =$	$\mathfrak{D}'_{\left[\begin{smallmatrix} (5) \\ (0) \end{smallmatrix} \right]=1,5}$	$g \ g \ g \ g \ g$	$\rightarrow J_t^\alpha g(t) J_t^\alpha g(t) J_t^\alpha g(t) J_t^\alpha g(t) J_t^\alpha g(t) \rightarrow D_x^{5\gamma}$
	$\mathfrak{D}'_{\left[\begin{smallmatrix} (5) \\ (1) \end{smallmatrix} \right]=5,5}$	$g \ g \ g \ g \ h$	$\rightarrow J_t^\alpha g(t) J_t^\alpha g(t) J_t^\alpha g(t) J_t^\alpha g(t) J_t^\alpha h(t)$
		$g \ g \ g \ h \ g$	$\rightarrow J_t^\alpha g(t) J_t^\alpha g(t) J_t^\alpha g(t) J_t^\alpha h(t) J_t^\alpha g(t)$
		$g \ g \ h \ g \ g$	$\rightarrow J_t^\alpha g(t) J_t^\alpha g(t) J_t^\alpha h(t) J_t^\alpha g(t) J_t^\alpha g(t)$
		$g \ h \ g \ g \ g$	$\rightarrow J_t^\alpha g(t) J_t^\alpha h(t) J_t^\alpha g(t) J_t^\alpha g(t) J_t^\alpha g(t)$
		$h \ g \ g \ g \ g$	$\rightarrow J_t^\alpha h(t) J_t^\alpha g(t) J_t^\alpha g(t) J_t^\alpha g(t) J_t^\alpha g(t)$
	$\mathfrak{D}'_{\left[\begin{smallmatrix} (5) \\ (2) \end{smallmatrix} \right]=10,5}$	$g \ g \ g \ h \ h$	$\rightarrow J_t^\alpha g(t) J_t^\alpha g(t) J_t^\alpha g(t) J_t^\alpha h(t) J_t^\alpha h(t)$
		$g \ g \ h \ g \ h$	$\rightarrow J_t^\alpha g(t) J_t^\alpha g(t) J_t^\alpha h(t) J_t^\alpha g(t) J_t^\alpha h(t)$
		$g \ g \ h \ h \ g$	$\rightarrow J_t^\alpha g(t) J_t^\alpha g(t) J_t^\alpha h(t) J_t^\alpha h(t) J_t^\alpha g(t)$
		$g \ h \ g \ g \ h$	$\rightarrow J_t^\alpha g(t) J_t^\alpha h(t) J_t^\alpha g(t) J_t^\alpha g(t) J_t^\alpha h(t)$
$g \ h \ g \ h \ g$		$\rightarrow J_t^\alpha g(t) J_t^\alpha h(t) J_t^\alpha g(t) J_t^\alpha h(t) J_t^\alpha g(t)$	

	$g \ h \ h \ g \ g$	$\rightarrow J_t^\alpha g(t) J_t^\alpha h(t) J_t^\alpha h(t) J_t^\alpha g(t) J_t^\alpha g(t)$	
	$h \ g \ g \ g \ h$	$\rightarrow J_t^\alpha h(t) J_t^\alpha g(t) J_t^\alpha g(t) J_t^\alpha g(t) J_t^\alpha h(t)$	
	$h \ g \ g \ h \ g$	$\rightarrow J_t^\alpha h(t) J_t^\alpha g(t) J_t^\alpha g(t) J_t^\alpha h(t) J_t^\alpha g(t)$	
	$h \ g \ h \ g \ g$	$\rightarrow J_t^\alpha h(t) J_t^\alpha g(t) J_t^\alpha h(t) J_t^\alpha g(t) J_t^\alpha g(t)$	
	$h \ h \ g \ g \ g$	$\rightarrow J_t^\alpha h(t) J_t^\alpha h(t) J_t^\alpha g(t) J_t^\alpha g(t) J_t^\alpha g(t)$	
$\mathfrak{D}'_{\left[\binom{5}{3}=10,5\right]}$	$g \ g \ h \ h \ h$	$\rightarrow J_t^\alpha g(t) J_t^\alpha g(t) J_t^\alpha h(t) J_t^\alpha h(t) J_t^\alpha h(t)$	$\rightarrow D_x^{2\gamma+3\beta}$
	$g \ h \ g \ h \ h$	$\rightarrow J_t^\alpha g(t) J_t^\alpha h(t) J_t^\alpha g(t) J_t^\alpha h(t) J_t^\alpha h(t)$	
	$g \ h \ h \ g \ h$	$\rightarrow J_t^\alpha g(t) J_t^\alpha h(t) J_t^\alpha h(t) J_t^\alpha g(t) J_t^\alpha h(t)$	
	$g \ h \ h \ h \ g$	$\rightarrow J_t^\alpha g(t) J_t^\alpha h(t) J_t^\alpha h(t) J_t^\alpha h(t) J_t^\alpha g(t)$	
	$h \ g \ g \ h \ h$	$\rightarrow J_t^\alpha h(t) J_t^\alpha g(t) J_t^\alpha g(t) J_t^\alpha h(t) J_t^\alpha h(t)$	
	$h \ g \ h \ g \ h$	$\rightarrow J_t^\alpha h(t) J_t^\alpha g(t) J_t^\alpha h(t) J_t^\alpha g(t) J_t^\alpha h(t)$	
	$h \ g \ h \ h \ g$	$\rightarrow J_t^\alpha h(t) J_t^\alpha g(t) J_t^\alpha h(t) J_t^\alpha h(t) J_t^\alpha g(t)$	
	$h \ h \ g \ g \ h$	$\rightarrow J_t^\alpha h(t) J_t^\alpha h(t) J_t^\alpha g(t) J_t^\alpha g(t) J_t^\alpha h(t)$	
	$h \ h \ g \ h \ g$	$\rightarrow J_t^\alpha h(t) J_t^\alpha h(t) J_t^\alpha g(t) J_t^\alpha h(t) J_t^\alpha g(t)$	
	$h \ h \ h \ g \ g$	$\rightarrow J_t^\alpha h(t) J_t^\alpha h(t) J_t^\alpha h(t) J_t^\alpha g(t) J_t^\alpha g(t)$	
$\mathfrak{D}'_{\left[\binom{5}{4}=5,5\right]}$	$g \ h \ h \ h \ h$	$\rightarrow J_t^\alpha g(t) J_t^\alpha h(t) J_t^\alpha h(t) J_t^\alpha h(t) J_t^\alpha h(t)$	$\rightarrow D_x^{\gamma+4\beta}$
	$h \ g \ h \ h \ h$	$\rightarrow J_t^\alpha h(t) J_t^\alpha g(t) J_t^\alpha h(t) J_t^\alpha h(t) J_t^\alpha h(t)$	
	$h \ h \ g \ h \ h$	$\rightarrow J_t^\alpha h(t) J_t^\alpha h(t) J_t^\alpha g(t) J_t^\alpha h(t) J_t^\alpha h(t)$	
	$h \ h \ h \ g \ h$	$\rightarrow J_t^\alpha h(t) J_t^\alpha h(t) J_t^\alpha h(t) J_t^\alpha g(t) J_t^\alpha h(t)$	
	$h \ h \ h \ h \ g$	$\rightarrow J_t^\alpha h(t) J_t^\alpha h(t) J_t^\alpha h(t) J_t^\alpha h(t) J_t^\alpha g(t)$	
$\mathfrak{D}'_{\left[\binom{5}{5}=1,5\right]}$	$h \ h \ h \ h \ h$	$\rightarrow J_t^\alpha h(t) J_t^\alpha h(t) J_t^\alpha h(t) J_t^\alpha h(t) J_t^\alpha h(t)$	$\rightarrow D_x^{5\beta}$

Se $\alpha = 1$ tutti gli integrali di Riemann-Liouville J_t^α vengono sostituiti da integrali ordinari del tipo $\int_0^t \dots dt$

Da cui si deduce

$$\begin{aligned}
 U_M(x, t) &= \sum_{n=0}^M u_n(x, t) = \\
 &= \sum_{n=0}^M \left\{ \sum_{j=0}^n (-1)^j \left[D_x^{(n-j)\gamma+j\beta} \right] f(x) \cdot \left(\sum_{l=0}^n {}^{RL} \mathfrak{D}'_{\left[\binom{n}{l}, n\right]} J_t^{n\alpha}(t) \right) \right\} \quad (10.79)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 u(x, t) &= \lim_{M \rightarrow \infty} U_M(x, t) = \lim_{M \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^M u_n(x, t) = \\
 &= \lim_{M \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^M \left\{ \sum_{j=0}^n (-1)^j [D_x^{(n-j)\gamma + j\beta}] f(x) \cdot \left(\sum_{l=0}^n {}^{RL} \mathfrak{D}'_{[l, n]} \mathbb{J}_t^{n\alpha}(t) \right) \right\} \quad (10.80)
 \end{aligned}$$

10.4.1 $V = h(t) = \sin(t), D = g(t) = \cosh(t)$

10.4.1.1 **SFADE con condizioni iniziali $u(x, 0) = \sin(x)$**

Si considera il seguente problema differenziale

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \sin(t) \cdot \frac{\partial^\beta u}{\partial x^\beta} = \cosh(t) \cdot \frac{\partial^\gamma u}{\partial x^\gamma} \\ u(x, 0) = \sin(x) \end{cases} \quad (10.81)$$

Dove la derivata frazionaria è di Caputo con terminale $a = -\infty$.

In questo contesto essendo l'equazione differenziale frazionaria solamente in spazio tutti gli integrali di Riemann-Liouville J_t^α vengono sostituiti da integrali ordinari di Riemann del tipo $\int_0^t \dots dt$.

Si considera $h(t) = \sin(t)$ e $g(t) = \cosh(t)$.

Per $n = 1$

$$\mathfrak{D} = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline \mathfrak{D}'_{\left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix} \right]=1,1} & g & \rightarrow & [g]_0 \mathbb{I}_t^1(t) = \int_0^t g(t) dt = \sinh(t) & \rightarrow & D_x^\gamma = \sin\left(x + \frac{\gamma\pi}{2}\right) \\ \hline \mathfrak{D}'_{\left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix} \right]=1,1} & h & \rightarrow & [h]_0 \mathbb{I}_t^1(t) = \int_0^t h(t) dt = 1 - \cos(t) & \rightarrow & D_x^\beta = \sin\left(x + \frac{\beta\pi}{2}\right) \\ \hline \end{array}$$

Per $n = 2$

$$\mathfrak{D} = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline \mathfrak{D}'_{\left[\begin{smallmatrix} 2 \\ 0 \end{smallmatrix} \right]=1,2} & g & g & \rightarrow & [2g]_0 \mathbb{I}_t^2(t) = \int_0^t g(t) \int_0^t g(t) dt dt = \frac{\sinh^2(t)}{2} & \rightarrow & D_x^{2\gamma} = \sin\left(x + \frac{2\gamma\pi}{2}\right) \\ \hline \mathfrak{D}'_{\left[\begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \end{smallmatrix} \right]=2,2} & g & h & \rightarrow & [g,h]_0 \mathbb{I}_t^2(t) = \int_0^t g(t) \int_0^t h(t) dt dt = \\ & & & \rightarrow & = \sinh(t) - \frac{1}{2} \cos(t) \sinh(t) - \frac{1}{2} \sin(t) \cosh(t) & \rightarrow & D_x^{\gamma+\beta} = \sin\left(x + \frac{(\gamma+\beta)\pi}{2}\right) \\ \hline \mathfrak{D}'_{\left[\begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \end{smallmatrix} \right]=2,2} & h & g & \rightarrow & [h,g]_0 \mathbb{I}_t^2(t) = \int_0^t h(t) \int_0^t g(t) dt dt = \\ & & & \rightarrow & \frac{1}{2} (\sin(t) \cosh(t) - \cos(t) \sinh(t)) & \rightarrow & \\ \hline \mathfrak{D}'_{\left[\begin{smallmatrix} 2 \\ 2 \end{smallmatrix} \right]=1,2} & h & h & \rightarrow & [2h]_0 \mathbb{I}_t^2(t) = \int_0^t h(t) \int_0^t h(t) dt dt = 2 \sin^4\left(\frac{t}{2}\right) & \rightarrow & D_x^{2\beta} = \sin\left(x + \frac{2\beta\pi}{2}\right) \\ \hline \end{array}$$

Per $n = 3$

$\mathfrak{D} =$	$\mathfrak{D}' \left[\binom{2}{0} = 1,3 \right]$	$g \quad g \quad g \rightarrow$	$[{}^3g]_0^3(t) = \int_0^t g(t) [{}^2g]_0^2(t) dt =$ $= \frac{\sinh^3(t)}{6}$	\rightarrow	$D_x^{3\gamma} = \sin\left(x + \frac{3\gamma\pi}{2}\right)$
	$\mathfrak{D}' \left[\binom{2}{1} = 2,3 \right]$	$g \quad g \quad h \rightarrow$	$[{}^{2g,h}]_0^3(t) = \int_0^t g(t) [{}^{g,h}]_0^2(t) dt =$ $= \frac{1}{20} (5 \cos(t) - 3 \sin(t) \sinh(2t) - (\cos(t) - 5) \cosh(2t) - 9)$		
		$g \quad h \quad g \rightarrow$	$[{}^{g,h,g}]_0^3(t) = \int_0^t g(t) [{}^{h,g}]_0^2(t) dt =$ $= \frac{1}{20} (-5 \cos(t) + \sin(t) \sinh(2t) - 3 \cos(t) \cosh(2t) + 8)$	\rightarrow	$D_x^{2\gamma+\beta} = \sin\left(x + \frac{(2\gamma + \beta)\pi}{2}\right)$
		$h \quad g \quad g \rightarrow$	$[{}^{h,2g}]_0^3(t) = \int_0^t h(t) [{}^{2g}]_0^2(t) dt =$ $= \frac{1}{20} (5 \cos(t) + 2 \sin(t) \sinh(2t) + \cos(t) (-\cosh(2t)) - 4)$		
	$\mathfrak{D}' \left[\binom{2}{2} = 1,3 \right]$	$g \quad h \quad h \rightarrow$	$[{}^{g,2h}]_0^3(t) = \int_0^t g(t) [{}^{2h}]_0^2(t) dt =$	\rightarrow	

		$= \frac{1}{20} ((-10 \cos(t) + \cos(2t) + 15) \sinh(t) + 2(\sin(2t) - 5 \sin(t)) \cosh(t))$	
	$h \quad g \quad h \rightarrow$	$[h,g,h]_0^3(t) = \int_0^t h(t) [g,h]_0^2(t) dt =$ $= \frac{1}{20} ((-10 \cos(t) + 3 \cos(2t) - 5) \sinh(t) + (10 \sin(t) + \sin(2t)) \cosh(t))$	$D_x^{\gamma+2\beta} = \sin\left(x + \frac{(\gamma+2\beta)\pi}{2}\right)$
	$h \quad h \quad g \rightarrow$	$[2h,g]_0^3(t) = \int_0^t h(t) [h,g]_0^2(t) dt =$ $= \frac{1}{20} ((\cos(2t) + 5) \sinh(t) - 3 \sin(2t) \cosh(t))$	
$\mathfrak{D}'_{\left[\binom{2}{2}=1,2\right]}$	$h \quad h \quad h \rightarrow$	$[3h]_0^3(t) = \int_0^t h(t) [2h]_0^2(t) dt = \frac{4}{3} \sin^6\left(\frac{t}{2}\right)$	$D_x^{3\beta} = \sin\left(x + \frac{3\beta\pi}{2}\right)$

Per $n = 4$

$\mathfrak{D} =$	$\mathfrak{D}'_{\left[\binom{4}{0}=1,4\right]}$	$g \quad g \quad g \quad g \rightarrow$	$[4g]_0^4(t) = \int_0^t g(t) [3g]_0^3(t) dt =$ $= \frac{\sinh^4(t)}{24}$	$D_x^{4\gamma} = \sin\left(x + \frac{4\gamma\pi}{2}\right)$
	$\mathfrak{D}'_{\left[\binom{4}{1}=4,4\right]}$	$g \quad g \quad g \quad h \rightarrow$	$[3g,h]_0^4(t) = \int_0^t g(t) [2g,h]_0^3(t) dt$	\rightarrow

		$= \frac{1}{60} (\sinh(t) (9 \cos(t) + 5 \cosh(2t) - 17) - 3 \sin(t) \cosh(t) (\cosh(2t) - 2))$	
	$g \ g \ h \ g \rightarrow$	${}_{[2g,h,g]}^4 \mathbb{I}_t^4(t) = \int_0^t g(t) {}_{[g,h,g]}^3 \mathbb{I}_t^3(t) dt =$ $\frac{1}{40} (-6 \sin(t) \cosh(t) - 2 \sinh(t) (\cos(t) (\cosh(2t) + 4) - 8))$	
	$g \ h \ g \ g \rightarrow$	${}_{[g,h,2g]}^4 \mathbb{I}_t^4(t) = \int_0^t g(t) {}_{[h,2g]}^3 \mathbb{I}_t^3(t) dt =$ $= \frac{1}{40} (\sin(t) \cosh(t) (\cosh(2t) + 5) - \sinh(t) (\cos(t) (\cosh(2t) - 3) + 8))$	$D_x^{3\gamma+\beta} = \sin\left(x + \frac{(3\gamma + \beta)\pi}{2}\right)$
	$h \ g \ g \ g \rightarrow$	${}_{[h,3g]}^4 \mathbb{I}_t^4(t) = \int_0^t h(t) {}_{[3g]}^3 \mathbb{I}_t^3(t) dt =$ $= \frac{1}{240} (6 \sin(t) \cosh(t) (\cosh(2t) - 3) - 2 \cos(t) \sinh(t) (\cosh(2t) - 7))$	
$\mathfrak{D}' \left[\binom{4}{2} = 6,4 \right]$	$g \ g \ h \ h \rightarrow$	${}_{[2g,2h]}^4 \mathbb{I}_t^4(t) = \int_0^t g(t) {}_{[g,2h]}^3 \mathbb{I}_t^3(t) dt =$ $= \frac{1}{160} (40 \cos(t) - 4 \cos(2t) + 3 \sin(2t) \sinh(2t) - (8 \cos(t) + \cos(2t) - 30) \cosh(2t) - 48 \sin(t) \sinh(t) \cosh(t) - 57)$	$\rightarrow D_x^{2\gamma+2\beta} = \sin\left(x + \frac{(2\gamma + 2\beta)\pi}{2}\right)$

$g \ h \ g \ h$	$[g,h,g,h]_0^t(t) = \int_0^t g(t) [h,g,h]_0^t(t) dt =$ $\rightarrow \frac{1}{80} (-20 \cos(t) + 2 \cos(2t) \sinh^2(t) - (12 \cos(t) + 5) \cosh(2t) + 8 \sin(t) (\cos(t) + 1) \sinh(t) \cosh(t) + 37)$
$g \ h \ h \ g$	$[g,2h,g]_0^t(t) = \int_0^t g(t) [2h,g]_0^t(t) dt =$ $\rightarrow = \frac{1}{80} (3 \cos(2t) - \sin(2t) \sinh(2t) + (2 \cos(2t) + 5) \cosh(2t) - 10)$
$h \ g \ g \ h$	$[h,2g,h]_0^t(t) = \int_0^t h(t) [2g,h]_0^t(t) dt =$ $\rightarrow = \frac{1}{80} (36 \cos(t) - 5 \cos(2t) + (8 \sin(t) + \sin(2t)) \sinh(2t) + (-4 \cos(t) + 2 \cos(2t) - 3) \cosh(2t) - 26)$
$h \ g \ h \ g$	$[h,g,h,g]_0^t(t) = \int_0^t h(t) [g,h,g]_0^t(t) dt =$ $\rightarrow = \frac{1}{80} (-32 \cos(t) + \cosh(2t) - 2 \sin(2t) \sinh(2t) + \cos(2t) (\cosh(2t) + 5) + 25)$
$h \ h \ g \ g$	$[2h,2g]_0^t(t) = \int_0^t h(t) [h,2g]_0^t(t) dt =$

		$= \frac{1}{160} (32 \cos(t) + 4 \cosh(2t) - 3 \sin(2t) \sinh(2t) - \cos(2t) (\cosh(2t) + 10) - 25)$
$\mathfrak{D}' \left[\binom{4}{3} = 4,4 \right]$	$g \ h \ h \ h \rightarrow$	$[g,3h]_0^4(t) = \int_0^t g(t) [^3h]_0^3(t) dt =$ $= \frac{1}{240} (-(75 \cos(t) - 12 \cos(2t) + \cos(3t) - 100) \sinh(t) - 3(25 \sin(t) - 8 \sin(2t) + \sin(3t)) \cosh(t))$
	$h \ g \ h \ h \rightarrow$	$[h,g,2h]_0^4(t) = \int_0^t h(t) [g,2h]_0^3(t) dt =$ $= \frac{1}{80} ((31 \sin(t) + 4 \sin(2t) - \sin(3t)) \cosh(t) - (27 \cos(t) - 12 \cos(2t) + \cos(3t) + 20) \sinh(t))$
	$h \ h \ g \ h \rightarrow$	$[2h,g,h]_0^4(t) = \int_0^t h(t) [h,g,h]_0^3(t) dt =$ $= \frac{1}{40} ((7 \cos(t) + 2 \cos(2t) - \cos(3t) + 10) \sinh(t) - 6(\sin(t) + \sin(2t)) \cosh(t))$
	$h \ h \ h \ g \rightarrow$	$[3h,g]_0^4(t) = \int_0^t h(t) [2h,g]_0^3(t) dt =$ $= \frac{1}{40} ((3 \sin(t) + \sin(3t)) \cosh(t) - 6 \cos(t) \sinh(t))$
		$\rightarrow D_x^{\gamma+3\beta} = \sin\left(x + \frac{(\gamma+3\beta)\pi}{2}\right)$

$$\mathfrak{D}'_{\left[\binom{4}{4}=1,4\right]} \left| \begin{array}{cccc} h & h & h & h \end{array} \right| \rightarrow$$

$$\begin{aligned} {}^{[4h]}_0\mathbb{I}_t^4(t) &= \int_0^t h(t) {}^{[3h]}_0\mathbb{I}_t^3(t) dt = \\ &= \frac{2}{3} \sin^8\left(\frac{t}{2}\right) \end{aligned}$$

$$\rightarrow D_x^{4\beta} \sin\left(x + \frac{4\beta\pi}{2}\right)$$

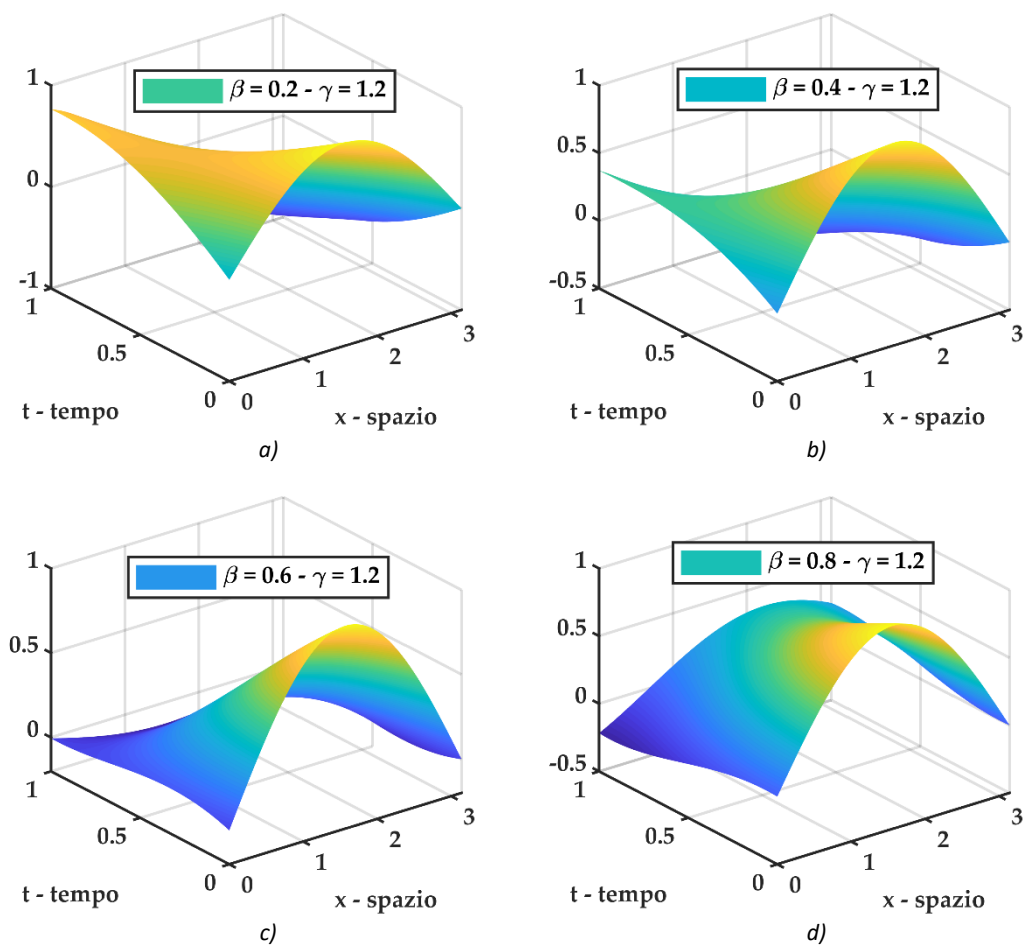
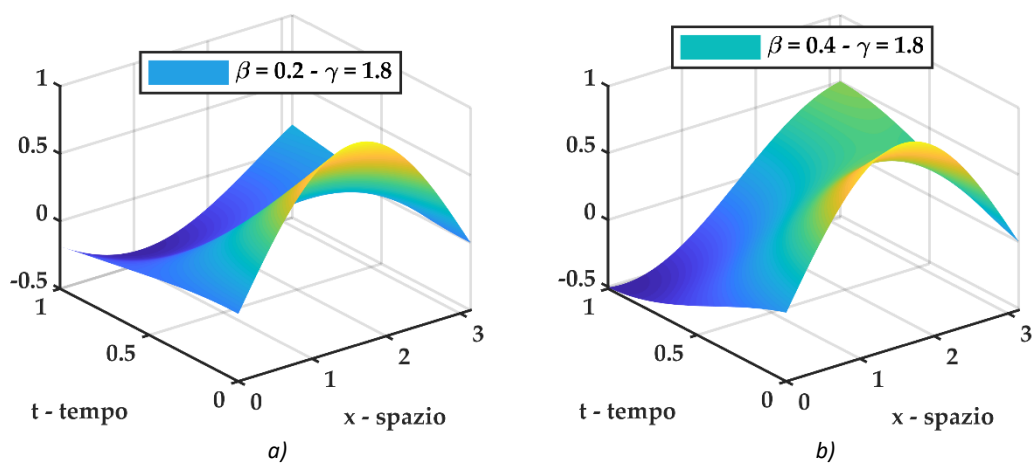


Figura 10.170 plot 3D della soluzione $u(x, t)$ ADM con $M = 4$ del problema differenziale frazionario S-FRADE con $u(x, 0) = \sin(x)$ e coefficiente di diffusione ed avvezione funzione del tempo $V(t) = \sin(t) = h(t), D(t) = \cosh(t) = g(t)$ per diversi valori dell'ordine di derivazione frazionario del termine di avvezione, fissato $\gamma = 1.2$. a) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.2$, b) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.4$, c) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.6$, d) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.8$



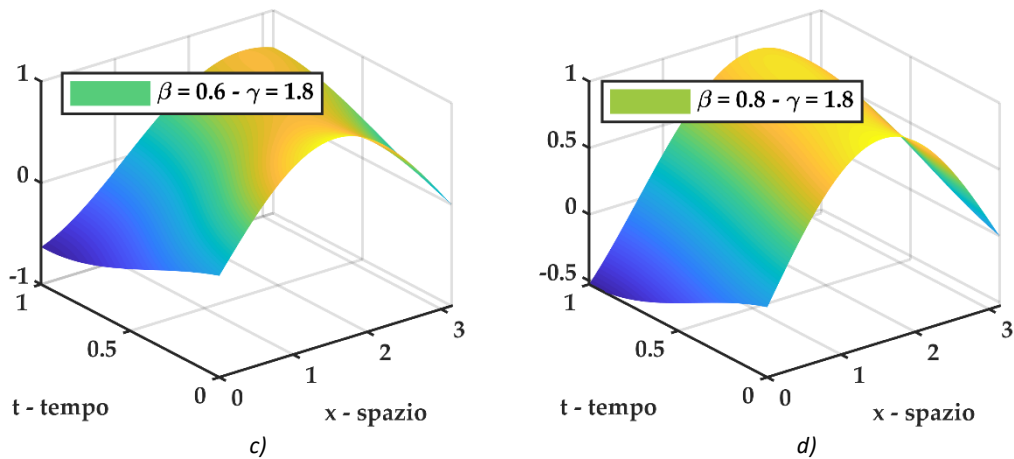


Figura 10.171 plot 3D della soluzione $u(x, t)$ ADM con $M = 4$ del problema differenziale frazionario S-FRADE con $u(x, 0) = \sin(x)$ e coefficiente di diffusione ed avvezione funzione del tempo $V(t) = \sin(t) = h(t)$, $D(t) = \cosh(t) = g(t)$ per diversi valori dell'ordine di derivazione frazionario del termine di avvezione, fissato $\gamma = 1.8$. a) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.2$, b) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.4$, c) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.6$, d) soluzione S-FRADE per $\beta = 0.8$

La procedura ricavata al paragrafo 10.4 si riconosce essere molto elegante da un punto di vista matematico, ma, alquanto laboriosa e di difficile implementazione numerica data la scarsità di una struttura ricorrente. Nei plot sopra riportati è rappresentata la soluzione ADM approssimata tramite i primi 5 termini della serie infinita; ulteriori termini calcolati conducono ad una accuratezza maggiore della soluzione. I termini necessari per il calcolo delle componenti ADM crescono esponenzialmente, essendo riferiti al numero di disposizioni semplici con ripetizione di p elementi di classe n . In tal contesto $p = 2$ essendo $g(t)$ e $h(t)$ ed n riferito all' n -esima componente ADM.

Si noti, inoltre, che la (10.24) è un caso particolare della (10.80). Infatti, se $h(t) = g(t)$ si ottiene

$$\begin{aligned}
 u(x, t) &= \lim_{M \rightarrow \infty} U_M(x, t) = \lim_{M \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^M u_n(x, t) = \\
 &= \lim_{M \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^M \left\{ \sum_{j=0}^n (-1)^j [D_x^{(n-j)\gamma + j\beta}] f(x) \cdot \underbrace{\left(\sum_{l=0}^n {}^{RL} \mathfrak{D}' \left[\binom{n}{l} \right]_0^t \mathbb{J}_t^{n\alpha}(t) \right)}_{h(t)=g(t)=\binom{n}{j} \left({}^{RL} [ng]_0^t \mathbb{J}_t^{n\alpha}(t) \right)} \right\}
 \end{aligned}$$

dato che ora la matrice di direzione \mathfrak{D} contiene integrali di funzioni identiche. Per una maggiore chiarezza espositiva si consideri il caso esempio $n = 3$ dove le \mathbf{g} in grassetto corrispondono alle h sostituite con g .

$\mathfrak{D} =$	$g \quad g \quad g$	$\rightarrow J_t^\alpha g(t) J_t^\alpha g(t) J_t^\alpha g(t) = [{}^3g]_0^t J_t^{3\alpha}(t)$	$\rightarrow \binom{3}{0} [{}^3g]_0^t J_t^{3\alpha}(t)$
	$g \quad g \quad \mathbf{g}$	$\rightarrow J_t^\alpha g(t) J_t^\alpha g(t) J_t^\alpha \mathbf{g}(t) = [{}^3g]_0^t J_t^{3\alpha}(t)$	
	$g \quad \mathbf{g} \quad g$	$\rightarrow J_t^\alpha g(t) J_t^\alpha \mathbf{g}(t) J_t^\alpha g(t) = [{}^3g]_0^t J_t^{3\alpha}(t)$	$\rightarrow \binom{3}{1} [{}^3g]_0^t J_t^{3\alpha}(t)$
	$\mathbf{g} \quad g \quad g$	$\rightarrow J_t^\alpha \mathbf{g}(t) J_t^\alpha g(t) J_t^\alpha g(t) = [{}^3g]_0^t J_t^{3\alpha}(t)$	
	$g \quad \mathbf{g} \quad \mathbf{g}$	$\rightarrow J_t^\alpha g(t) J_t^\alpha \mathbf{g}(t) J_t^\alpha \mathbf{g}(t) = [{}^3g]_0^t J_t^{3\alpha}(t)$	
	$\mathbf{g} \quad g \quad \mathbf{g}$	$\rightarrow J_t^\alpha \mathbf{g}(t) J_t^\alpha g(t) J_t^\alpha \mathbf{g}(t) = [{}^3g]_0^t J_t^{3\alpha}(t)$	$\rightarrow \binom{3}{2} [{}^3g]_0^t J_t^{3\alpha}(t)$
	$\mathbf{g} \quad \mathbf{g} \quad g$	$\rightarrow J_t^\alpha \mathbf{g}(t) J_t^\alpha \mathbf{g}(t) J_t^\alpha g(t) = [{}^3g]_0^t J_t^{3\alpha}(t)$	
	$g \quad g \quad \mathbf{g}$	$\rightarrow J_t^\alpha g(t) J_t^\alpha g(t) J_t^\alpha \mathbf{g}(t) = [{}^3g]_0^t J_t^{3\alpha}(t)$	$\rightarrow \binom{3}{3} [{}^3g]_0^t J_t^{3\alpha}(t)$

E lo stesso ragionamento può essere fatto per qualsiasi n riconducendo alla formulazione (10.80).

$$\begin{aligned}
 u(x, t) &= \lim_{M \rightarrow \infty} U_M(x, t) = \lim_{M \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^M u_n(x, t) = \\
 &= \lim_{M \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^M \left\{ \left({}^{RL} [{}^n g]_0^t J_t^{n\alpha}(t) \right) \cdot \sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{n}{j} \left[D_x^{(n-j)\gamma + j\beta} \right] f(x) \right\}
 \end{aligned}$$

Se, inoltre, $g(t) = 1$ si ottiene la (10.8). Infatti

$${}^{RL} [{}^n g]_0^t J_t^{n\alpha}(t) = \underbrace{J_t^\alpha(1) \cdots J_t^\alpha(1) J_t^\alpha(1)}_n = \frac{t^{n\alpha}}{\Gamma(n\alpha + 1)}$$

Nel caso in cui $\alpha = 1$ ci si riconduce all'integrale di Riemann

$$[{}^n g]_0^t J_t^n(t) = \int_0^t 1 \cdots \int_0^t 1 \underbrace{\int_0^t 1 dt dt \cdots dt}_n = \frac{t^n}{\Gamma(n+1)} = \frac{t^n}{n!}$$

Riconducendo alla relazione seguente

$$\begin{aligned}
 u(x, t) &= \lim_{M \rightarrow \infty} U_M(x, t) = \lim_{M \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^M u_n(x, t) \\
 &= \lim_{M \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^M \left\{ \frac{t^{n\alpha}}{\Gamma(n\alpha + 1)} \cdot \sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{n}{j} \mu^{n-j} \left[D_x^{(n-j)\gamma + j\beta} \right] f(x) \right\} \\
 &= \left[E_\alpha \left(t^\alpha (\mu D_x^\gamma - D_x^\beta) \right) \right] f(x)
 \end{aligned}$$

Conclusioni

Nel presente lavoro di tesi, il metodo di decomposizione Adomia è stato utilizzato come strumento principale per l'ottenimento di soluzioni approssimate di equazioni differenziali a derivate parziali frazionarie in spazio-tempo tramite l'approccio di Caputo per la derivazione e Riemann-Liouville per l'integrazione. Tali equazioni assumono la forma di equazioni di diffusione ed avvezione-diffusione, con coefficienti costanti o funzioni del tempo, e governate da condizioni iniziali. Le soluzioni approssimate ottenute sono state rappresentate graficamente a scopo di confronto fra i diversi risultati. Numerose formulazioni generali sono state ottenute per ogni condizione iniziale, sotto certe condizioni di derivabilità ed integrabilità. Le conclusioni ottenute dallo schema ADM frazionario appaiono di general applicazione dal momento che, facendo tendere l'ordine frazionario all'intero, viene ripristinata la soluzione classica.

È evidente come la proprietà di non località degli operatori frazionari si rispecchi nei profili delle soluzioni rappresentate, influenzando sia la forma che la velocità globale di diffusione: la formulazione frazionaria, infatti, conduce ad un ritardo nel fenomeno di diffusione sia considerando un coefficiente diffusivo costante, che funzione del tempo, come tipicamente accade per matrici solide deformabili descritti tramite la teoria delle grandi deformazioni. Quando si considerano, allora, processi diffusivi anomali, una legge non Fickiana di trasporto dimostra un effetto di ritardo nel flusso del contaminante a causa dell'eterogeneità del mezzo, tenuto in considerazione dall'indice di derivazione frazionario. L'approccio frazionario proposto ha dimostrato efficacemente la deviazione dalla classica legge di Darcy per il flusso; deviazione riscontrabile anche in presenza di termine avvevativo.

ADM risulta adatto alla soluzione di problemi differenziali frazionari, senza assunzioni troppo restrittive sulle componenti della serie infinita. Oltretutto, il presente metodo non converte il problema in uno più conveniente per l'applicazione della teoria lineare il che rende ADM molto ambito fra i ricercatori. Le soluzioni ottenute tramite il metodo di decomposizione, generalmente, convergono molto rapidamente nei problemi fisici. Nessun tipo di linearizzazione, perturbazione o discretizzazione è necessaria per l'ottenimento della soluzione eliminando possibili errori numerici e limitando l'onere computazionale.

Certamente molte difficoltà rimangono, che divengono anche importanti spunti di ricerca. In particolare, sono necessarie analisi di convergenza e stabilità per classi sempre più ampie di equazioni in modo da definire esattamente la velocità e l'intervallo di convergenza di ADM.

Per una migliore comprensione delle combinazioni di equazioni considerate si osservi il seguente schema riassuntivo

DIFFUSIONE

Problema differenziale

Decomposizione ADM

DE diffusione standard

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = K \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(x, 0) = f(x) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} u(x, t) &= u(x, 0) + L_t^{-1}[KL_{xx}u(x, t)] \\ \begin{cases} u_0(x, t) &= u(x, 0) \\ u_{n+1}(x, t) &= L_t^{-1}KL_{xx}u_n(x, t) \end{cases} \end{aligned}$$

S-FRDE diffusione spazio-frazionaria

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = K \frac{\partial^F u}{\partial x^F} \\ u(x, 0) = f(x) \end{cases} \quad 1 < F \leq 2$$

$$\begin{aligned} u(x, t) &= u(x, 0) + L_t^{-1}[(K)_a^C D_x^F u(x, t)] \\ \begin{cases} u_0(x, t) &= f(x) \\ u_{n+1}(x, t) &= L_t^{-1}[(K)_a^C D_x^F u_n(x, t)] \end{cases} \end{aligned}$$

T-FRDE diffusione tempo-frazionaria(*)

$$\begin{cases} \frac{\partial^F u}{\partial t^F} = K \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(x, 0) = f(x) \end{cases} \quad 0 < F \leq 1$$

$$\begin{aligned} u(x, t) &= u(x, 0) + {}^{RL}J_t^F [(K)L_{xx}u(x, t)] \\ \begin{cases} u_0(x, t) &= f(x) \\ u_{n+1}(x, t) &= {}^{RL}J_t^F [(K)L_{xx}u_n(x, t)] \end{cases} \end{aligned}$$

$f(x)$	x^α	$\alpha \in \mathbb{R}$	$\sin x$	$\cos x$	e^{ax}		
K	cost	$t^\gamma, \gamma \in \mathbb{R}$	e^t	$\sin t$	$\cos t$	$\sinh t$	$\cosh t$

Tabella 1 problemi differenziali considerati per il processo di diffusione. (*) nel caso di T-FRDE si considerano esclusivamente valori del coefficiente di diffusione $K = \text{cost}$. La dipendenza temporale di K viene invece considerata sia per diffusività standard (DE) che per diffusione frazionaria in spazio (S-FRDE)

DIFFUSIONE-AVVEZIONE

Problema differenziale

Decomposizione ADM

ADE diffusione-avvezione standard

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + V \frac{\partial u}{\partial x} = D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(x, 0) = f(x) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} u(x, t) &= u(x, 0) + L_t^{-1}[(D)L_{xx}u(x, t)] \\ &\quad - L_t^{-1}[(V)L_x u(x, t)] \\ \begin{cases} u_0(x, t) &= f(x) \\ u_{n+1}(x, t) &= +L_t^{-1}[(D)L_{xx}u_n(x, t)] \\ &\quad - L_t^{-1}[(V)L_x u_n(x, t)] \end{cases} \end{aligned}$$

S-FRADE diffusione-avvezione spazio-frazionaria

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + V \frac{\partial^\beta u}{\partial t^\beta} = D \frac{\partial^\gamma u}{\partial x^\gamma} \\ u(x, 0) = f(x) \end{cases} \quad \begin{aligned} 1 < \gamma \leq 2 \\ 0 < \beta \leq 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u(x, t) &= u(x, 0) + L_t^{-1}[(D)_a^C D_x^\gamma u(x, t)] \\ &\quad - L_t^{-1}[(V)_a^C D_x^\beta u(x, t)] \\ \begin{cases} u_0(x, t) &= f(x) \\ u_{n+1}(x, t) &= +L_t^{-1}[(D)_a^C D_x^\gamma u_n(x, t)] \\ &\quad - L_t^{-1}[(V)_a^C D_x^\beta u_n(x, t)] \end{cases} \end{aligned}$$

T-FRADE diffusione-avvezione tempo-frazionaria(*)

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha} + V \frac{\partial u}{\partial x} = D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad 0 < \alpha \leq 1 \\ u(x, 0) = f(x) \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} u(x, t) = u(x, 0) + {}^{RL}J_t^\alpha [(D)L_{xx}u(x, t)] \\ \quad - {}^{RL}J_t^\alpha [(V)L_x u(x, t)] \\ \left\{ \begin{array}{l} u_0(x, t) = f(x) \\ u_{n+1}(x, t) = {}^{RL}J_t^\alpha [(D)L_{xx}u_n(x, t)] \\ \quad - {}^{RL}J_t^\alpha [(V)L_x u_n(x, t)] \end{array} \right. \end{array}$$

$f(x)$	x^α	$\alpha \in \mathbb{R}$	$\sin x$	$\cos x$	e^{ax}		
V, D	$\cos t$	$t^\gamma, \gamma \in \mathbb{R}$	e^t	$\sin t$	$\cos t$	$\sinh t$	$\cosh t$

Tabella 2 problemi differenziali considerati per il processo di diffusione-avvezione. () nel caso di T-FRADE si considerano esclusivamente valori del coefficiente di diffusione ed avvezione rispettivamente $D, V = \text{cost}$. La dipendenza temporale di D, V viene invece considerata sia per diffusione-avvezione standard (ADE) che per diffusione-avvezione frazionaria in spazio (S-FRADE).*

Sviluppi futuri

Il presente elaborato può essere considerato il punto di partenza di un percorso più approfondito volto allo studio dei fenomeni diffusivi e di trasporto nei mezzi porosi. Numerosi aspetti possono essere ulteriormente analizzati. In primo luogo, diverse trattazioni degli operatori frazionari rispetto a Caputo, utilizzata nella presente tesi, possono essere considerate per la soluzione dei problemi differenziali presentati nei capitoli precedenti in modo da poter individuare quella che più fedelmente rispecchia il comportamento fisico del sistema.

Da un punto di vista prettamente matematico, c'è la possibilità di sviluppare soluzioni utilizzando diverse tipologie di condizioni al contorno, inglobando anche funzioni con singolarità o definite a tratti nel dominio di interesse, oltre che considerare diverse funzioni temporali per i coefficienti di avvezione e diffusione. A tal scopo, per ottenere la massima generalità e scelta delle funzioni sopraccitate, metodi numerici devono essere definiti per equazioni differenziali frazionarie. Un tentativo di rendere numerico ADM è stato provato nel presente lavoro di tesi, senza ottenere i risultati sperati facendo emergere problematiche di stabilità nella ricorsione dell'algoritmo L2 utilizzato per l'approssimazione della derivata frazionaria di Caputo. Sarebbe, quindi, necessario ed interessante investigare il motivo di tale inadeguatezza e stilare caratteristiche che devono essere rispettate per garantire la stabilità ricercata.

Un altro campo di approfondimento è l'analisi dell'influenza del termine di reazione, non considerato nell'elaborato di tesi, che rende il problema ancor più complesso potendo essere lineare o, nella maggior parte dei casi, non lineare, funzione della soluzione incognita. Studio di ADM per equazioni differenziali di avvezione-diffusione-reazione sono presenti in letteratura; tuttavia, non coprono tutte le casistiche riscontrabili.

Per ulteriori estensioni del problema di trasporto di soluto, il metodo ADM e sue modifiche ed integrazioni, potrebbe non essere adeguato a causa, principalmente, delle condizioni al contorno ed iniziali da considerare in modo che siano differintegrabili in forma chiusa. La necessità di generalizzare al tridimensionale ed includere risposte non lineari per materiale e geometria nella trattazione del comportamento meccanico delle diverse fasi del mezzo poroso, od eventualmente inglobare una trattazione termica per condizioni non più isoterme, richiedono urgentemente lo sviluppo di adeguati algoritmi numerici abili nel sorvolare la problematica di non località degli operatori differenziali. È un grande problema aperto che coinvolge numerosi ricercatori in tutto il mondo, nel tentativo di formulare, ad esempio, una analisi FEM per equazioni frazionarie, ad oggi ancora impossibile.

Bibliografia

1. **Salomoni, V. A., De Marchi N. [2022]** "A fractional approach to fluid flow and solute transport within deformable saturated porous media". International Journal of Computational Materials Science and Engineering, 2250003.
2. **Evangelista L. R., Ervin K. L. [2018]**. "Fractional diffusion equations and anomalous diffusion." Cambridge University Press.
3. **Podlubny I. [1998]** "Fractional Differential Equations An Introduction to Fractional Derivatives, Fractional Differential Equations, to Methods of Their Solution and Some of Their Applications" 1st Edition.
4. **Mittag-Leffler M. G. [1903]** "Sur la nouvelle fonction $E_\alpha(x)$." CR Acad. Sci. Paris 137: 554-558.
5. **Wiman A. [1905]** "Über den Fundamentalsatz in der Theorie der Funktionen $E_\alpha(x)$." Acta Mathematica 29: 191-201.
6. **Agarwal R. P. [1953]**. "A propos d'une note de M. Pierre Humbert." CR Acad. Sci. Paris 236.21: 2031-2032.
7. **Luchko Y., Srivastava H. M. [1995]** "The exact solution of certain differential equations of fractional order by using operational calculus." Computers & Mathematics with Applications 29.8: 73-85.
8. **Prabhakar R. [1971]**, "A singular integral equation with a generalized Mittag-Leffler function in the kernel", Yokohama Math. J. 19, 7-15.
9. **Kilbas, Saigo M., Saxena R. K. [2002]** "Solution of Volterra integro-differential equations with generalized Mittag-Leffler functions in the kernels", J. Int. Equat. Appl. 14, 377-396.
10. **Wright E.M. [1933]** "On the coefficients of power series having essential singularities", J. London Math. Soc. 8, 71-80.
11. **Caputo, M. [1967]** "Linear model of dissipation whose Q is almost frequency dependent II, Geophys, JR Ast." Soc (13): 529-539.
12. **Metzler R., Klafter J. [2000]** "The random walk's guide to anomalous diffusion: a fractional dynamics approach." Physics reports 339.1: 1-77.
13. **Klafter J., Blumen A., Shlesinger M. F. [1987]** "Stochastic pathway to anomalous diffusion." Physical Review A 35.7: 3081.
14. **Walter W. [1986]** "The fractional diffusion equation." Journal of Mathematical Physics 27.11: 2782-2785.
15. **Schneider W. R., Wyss W. [1989]** "Fractional diffusion and wave equations." Journal of Mathematical Physics 30.1: 134-144.
16. **Stickler B. A., Schachinger E. [2016]** "Basic concepts in computational physics". Springer.
17. **Biot, M.A. [1941]** "General theory of three-dimensional consolidation", J. Appl. Phys. 12, 155-164.

18. **Biot, M.A. [1956]** "General solutions of the equations of elasticity and consolidation for a porous material", *J. Appl. Mech.* 23, 91-96.
19. **Zhang H.J., Jeng D.S., Barry D.A., Seymour B.R., Li L. [2013]** "Solute transport in nearly saturated porous media under landfill clay liners: A finite deformation approach", *J. Hydrol.* 479, 189-199.
20. **Deng Z.Q., de Lima J.L.M.P., de Lima M.I.P., Singh V.P. [2006]** "A fractional dispersion model for overland solute transport", *Wat. Res. Research* 42, W03416.
21. **Zhou H.W., Yang S., Zhang S.Q. [2019]** "Modeling non-Darcian flow and solute transport in porous media with the Caputo-Fabrizio derivative", *Appl. Math. Mod.* 68, 603-615.
22. **Salomoni V.A. [2018]** "A mathematical framework for modelling 3D coupled THM phenomena within saturated porous media undergoing finite strains", *Comp. Part B: Engrg.* 146, 42-48.
23. **Karrech A., Regenauer-Lieb K., Poulet T. [2011]** "Frame indifferent elastoplasticity of frictional materials at finite strain", *Int. J. Solids Struct.* 48(3-4), 397-407.
24. **Karrech A., Poulet T., Regenauer-Lieb K. [2012]** "Poromechanics of saturated media based on the logarithmic finite strain", *Mech. Mat.* 51, 118-136.
25. **Peters G.P., Smith D.W. [2002]** "Solute transport through a deforming porous medium", *Int. J. Num. An. Meth. Geomech.* 26(7), 683-717.
26. **Mathur S., Jayawardena L.P. [2008]** "Thicknes of compacted natural clay barriers in msw landfills", *Pract. Per. Haz. Tox. Radio. Waste* 12(1), 53-57.
27. **Benson D.A., Wheatcraft S.W., Meerschaert M.M. [2000]** "The fractional-order governing equation of Levy motion", *Wat. Res. Research* 36(6), 1413-1423.
28. **Schumer S., Benson D.A., Meerschaert M.M., Wheatcraft S.W. [2001]** "Eulerian derivation of the fractional advection-dispersion equation", *J. Contam. Hydrol.* 48(1/2), 69– 88.
29. **McCutcheon S.C. [1989]** *Water Quality Modeling. Vol. 1, "Transport and Surface Exchange in Rivers"*, 27– 71, Boca Raton, USA: CRC Press.
30. **Vazquez J.L. [2017]** "The Mathematical Theories of Diffusion: Nonlinear and Fractional Diffusion", In: *Nonlocal and Nonlinear Diffusions and Interactions: New Methods and Directions*, Ch. 5, M. Bonforte & G. Grillo Eds., Cham: Springer.
31. **El Amin M.F., Radwan A.G., Sun S. [2017]** "Analytical solution for fractional derivative gasflow equation in porous media", *Res. Phys.* 7, 2432-2438.
32. **Greco A., Iannizzotto A. [2017]** "Existence and convexity of solutions of the fractional heat equation", *Comm. Pure Appl. An.* 16(6), 2201-2226.
33. **De Pablo A., Quiros F., Rodriguez A., Vazquez J.L. [2011]** "A fractional porous medium equation", *Adv. Math.* 226(2), 1378-1409.
34. **Adomian G. [1988]** "A review of the decomposition method in applied mathematics" *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 135(2), 501–544. [https://doi.org/10.1016/0022-247X\(88\)90170-9](https://doi.org/10.1016/0022-247X(88)90170-9).

35. **Al awadwah E. [2016]** "The Adomian decomposition method for solving partial differential equations" Birzeit University. <https://doi.org/10.1016/j.physleta.2006.06.024>.
36. **Dehgan M., Tatari M. [2006]** "The Use of Adomian Decomposition Method for Solving Problems in Calculus of Variations" *Mathematical Problems in Engineering*, 2006, 1-12. <https://doi.org/10.1155/MPE/2006/65379>.
37. **Bougoffa L., Rach R. C. [2013]** "Solving nonlocal initial-boundary value problems for linear and nonlinear parabolic and hyperbolic partial differential equations by the Adomian decomposition method" *Applied Mathematics and Computation*, 225, 50-61. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2013.09.011>.
38. **Pourgholi R., Saeedi A. [2015]** "A numerical method based on the Adomian decomposition method for identifying an unknown source in non-local initial-boundary value problems" *Int. J. Mathematical Modelling and Numerical Optimisation*, 6(3), 185-197.
39. **Al awadwah E. [2016]** "The Adomian decomposition method for solving partial differential equations" Birzeit University. <https://doi.org/10.1016/j.physleta.2006.06.024>.
40. **Ray S. S., Bera R. K. [2005]**. "An approximate solution of a nonlinear fractional differential equation by Adomian decomposition method". *Applied Mathematics and Computation*, 167, 561–571. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2004.07.020>.
41. **Gepreel K. A. [2012]** "Adomian decomposition method to find the approximate solutions for the fractional PDEs" *WSEAS TRANSACTIONS on MATHEMATICS*, 11(7), 636–643. <https://doi.org/10.12988/ces.2017.7760>.
42. **Dnyanoba D. B., Bhadgaonkar V. N. [2022]** "Analytical Solution of Nonlinear Nonhomogeneous Space and Time Fractional Physical Models by Improved Adomian Decomposition Method." *Punjab University Journal of Mathematics* 53.2.
43. **Odibat Z., Momani S. [2008]** "A generalized differential transform method for linear partial differential equations of fractional order", *Appl. Math. Lett.*, 21, No. 2 194–199.
44. **Adomian G, Rach R. [1996]** "Modified Adomian Polynomials, Mathematical and Computer Modelling" 24(11):39-46.
45. **Rach R. [2008]**, "A new definition of the Adomian polynomials", *Kybernetes*, Vol. 37, pp 910-955.
46. **Wazwaz A. M. [1999]** "A Reliable Modification of Adomian Decomposition Method" *Applied Mathematics Computation*, Vol. 102, No. 1, pp. 77-86.
47. **Wazwaz A. M. [2002]** "A new method for solving singular initial value problems in the second order ode", *Appl. Math. Comput.* 128 45-57.
48. **Luo X. G. [2005]**, "A two-step Adomian decomposition method" *Applied Mathematics and Computation*, Vol. 170, pp 570-583, china.
49. **Babolian E., Javadi S. [2003]**, "Restarted Adomian method for algebraic equations", *Applied Mathematics and Computation*, Vol. 146, pp 533-541.

50. **Changpin L., Cai M. [2019]** *"Theory and numerical approximations of fractional integrals and derivatives"* Society for Industrial and Applied Mathematics.
51. **Lynch V. E., Carreras B. A., del Castillo-Negrete D., Ferreira-Mejias K. M., Hicks H. [2003]** *"Numerical methods for the solution of partial differential equations of fractional order"* J. Comput. Phys., 192: 406–421.
52. **Hikal M. Mahmoud A. I. [2015]** *"On Adomian's decomposition method for solving a fractional advection-dispersion equation."* International Journal of Pure and Applied Mathematics 104.1: 43-56.

Ringraziamenti

Allegro con fuoco.
♩ = 152

Incipit del quarto movimento della sinfonia n°9 in mi minore di Antonin Dvorak "Nuovo Mondo"

Al termine di un lavoro appassionante, complesso e stimolante...
Eccomi giunto alla chiusura di un importante capitolo della mia vita: gli anni universitari. Dedicare qualche riga per ringraziare tutte le persone che in un modo o nell'altro mi hanno aiutato a scriverlo più che un dovere è una necessità.

Alla fine di questo percorso di studi mi ritrovo con una laurea in pugno e con un'amica inaspettata: la mia relatrice, la professoressa Valentina Salomoni, che ringrazio pubblicamente per avermi accolto, per avermi messo in riga e fatto ragionare in profondità sul lavoro che stavo portando avanti. Grazie per essere stata una docente anticonvenzionale, per avermi dato la possibilità di esprimermi e di aver dato coerenza al mio pensiero, fino in fondo. La mia stima per lei è dovuta, oltre che alla sua profonda esperienza e conoscenza scientifica, per avermi trasmesso l'amore per la ricerca, il più grande regalo che potesse farmi.

Non posso non nominare la mia famiglia, mamma, papà, Massimo, Monica, Giulia, Yuri, che mi hanno sempre sostenuto, nonostante le mie continue lamentele, lasciandomi piena libertà di scelta ed impareggiabile appoggio. Il mio più grande GRAZIE, tuttavia, è rivolto ad Oliver, Zoe e Liv, i miei nipoti. Grazie per aver portato freschezza e leggerezza nelle intense giornate di studio. Senza la loro spensieratezza e la loro vivacità questo splendido risultato avrebbe per me un altro sapore. Lo zio vi ama.

Non possono mancare da questo elenco di ringraziamenti tutte quelle persone con cui ho iniziato e trascorso i miei studi, con le quali ho condiviso momenti indimenticabili, instaurando una sincera amicizia ed una profonda collaborazione. Un grazie particolare a Devid per i preziosi consigli e scambi di opinioni. Non nego

di provare profonda invidia nella sua capacità di mantenere la calma e cogliere tutto con leggerezza, ma, riconosco che quel “andrà bene come sempre” prima di ogni esame era una garanzia e sempre apprezzato. Grazie per esserci stato in questo percorso iniziato undici anni fa, il primo giorno di scuola superiore che spero continui anche al di fuori dall’ambiente accademico.

La persona che ringrazierò ora credo sia stata la più importante per il mio percorso di crescita: Laura. Non ci sono parole per descrivere la stima che ho nei suoi confronti; precisa compagna di progetti ed immancabile supporto. I risultati che ho ottenuto sono certamente anche merito suo. Con lei ho condiviso arrabbiate e debolezze, ma anche gioie e spensieratezza dopo il superamento di un esame, puntualmente preparato meticolosamente assieme. Non dimenticherò mai i salti sopra i solai di casa sua, le nocche arrossate a furia di battere ovunque nel vano tentativo di capire se fosse muratura o calcestruzzo, le videochiamate sino a notte fonda davanti a modelli numerici, le migliaia di pagine scritte per relazioni di calcolo, quei “non so niente” prima di ogni esame e quei “te lo avevo detto che andava bene”. Auguro a chiunque di trovare ciò che io ho trovato in Laura e spero che, anche se i nostri percorsi prenderanno strade diverse, si possa comunque contare del supporto reciproco e professionale che ha caratterizzato gli anni universitari.

Grazie, grazie ed ancora grazie.

Si dice spesso che il percorso conta più che la meta, più del suo inizio e del suo traguardo. E ora che sto per essere proclamato “Dottore” lo so con certezza. Il giorno della laurea rimarrà sempre nel mio cuore, ma più ancora rimarrà dentro di me la consapevolezza di aver avuto la fortuna rara di trovare degli amici veri ai quali voglio esprimere i miei ringraziamenti in modo un po’ alternativo...

“Ed un po’ mi fa ridere” pensare di riuscire a sintetizzare il bene che voglio alle persone che da una vita letteralmente mi sopportano. *“Giulia non ridere ti prego”* per quello che ti sto per scrivere, ma quando ti dicevo *“ti giuro che prendo la laurea e che divento dottore”* facevo sul serio, solo che la casa *“grossa come il tuo letto”* alla fine la hai comprata con Daniel a cui *“è concesso il privilegio di avere una coscienza pulita”* solo perché si sporca le mani. Vabbè, vi voglio bene lo stesso, vi farete perdonare invitandomi a guardare Sanremo. A Marta per le notti passate a discutere del più e del meno, a sorbirsi le mie lamentele, ma *“scusa se ti dico certe cose ma a qualcuno devo dirle e l’unico qualcuno che conosco sei tu”*, anche se *“Vive dentro due Vans e la maglia dei Guns”*. Vorrei solo dire alle tue future coinquiline che la difficoltà principale che troveranno con te sarà capire cosa farti mangiare e sicuramente, nel giro di poco tempo penseranno *“tra un anno se tutto va bene finisce il contratto e poi se ne va”*. Quando i Pinguini Tattici Nucleari dicevano *“gli amici ormai si sposano alla mia età ed io mi incazzo se non indovino all’Eredità”* avevano ragione. Ringrazio, infatti, Rossella e Daniele per non mettermi per niente pressione; siete come la zia alle cene di famiglia che chiede *“e la fidanzatina?”*. Solo i coraggiosi comprano casa in mezzo ad una pandemia e si sposano durante la sessione invernale, ma avete anche dei difetti. Grazie per permettermi di passare tutti i sabati sera sdraiato sul pavimento di casa vostra, probabilmente vicino alla tv perché senza occhiali. Sara, *“forse non te lo ho mai detto ma tu, per me sei come”* una *“furia luia”* in *“cariolina”*, anche se con questo caldo sarebbe più corretto parlare di *“furia moja”*.

Ringrazio TU e la tua amica “Emilyyyyyy!!!!” per continuare a sopportarmi anche quando effettivamente sono insopportabile.

“Ma chi l’avrebbe mai detto che mi sarei trovato qua, prima di andare a letto in questa stupida, grandissima città” a ringraziare Giulia, Daniel, Marta, Rossella, Daniele, Sara, per essere un supporto costante e garantito in tutti questi anni. La loro presenza non la cambierei per nulla al mondo e quando dico che loro sono *“l’estate migliore della mia vita, è la verità. Sembrava la storia infinita e forse era solo la felicità”*.

All’Università di Padova ed ai miei professori del corso di studi: ciascuno di loro, in modo speciale, personale, unico, ha contribuito a dare forma al mio modo di vedere il mondo, la vita. Senza il continuo dialogo con l’intelligenza degli insegnanti che ho incontrato non avrei raggiunto la laurea che oggi celebro, non avrei messo in dubbio costantemente le mie certezze né avrei valutato tanto le mie intuizioni. Grazie per aver liberato la mia mente!

Al coro Very God ed Enjoy Orchestra per le risate assieme

Anche se forse sembra egoista, il ringraziamento più grande va a me stesso, che in questi anni non ho mai cercato scorciatoie o vie preferenziali per raggiungere i miei obiettivi. Mi son sempre rimboccato le maniche arrivando fin dove potevo e volevo con le mie forze.

Ho introdotto il capitolo dei ringraziamenti riportando un breve estratto del quarto movimento dalla sinfonia 9 di Antonin Dvorak denominata “Nuovo Mondo” composta durante il soggiorno a New York del compositore. Il presente lavoro di tesi è, per me, come se fosse America, quel “nuovo continente” da scoprire, punto di partenza per una possibile carriera accademica. Ho finalmente capito “ciò che voglio fare da grande”, pronto a lanciarmi in questo “nuovo mondo” che, si spera, possa diventare la mia quotidianità.

Siate Curiosi

