

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

Dipartimento di Fisica e Astronomia “Galileo Galilei”

Corso di Laurea in Fisica

Tesi di Laurea

Stati eccitati a cluster di tre nucleoni nel ${}^6\text{Li}$

Relatore

Prof. Lorenzo Fortunato

Laureando

Francesca Sogus

Anno Accademico 2022/2023

Indice

| | |
|--|-----------|
| Introduzione | 3 |
| 1 Primi stati eccitati del ${}^6\text{Li}$: $\alpha + d$ | 5 |
| 1.1 Matrice di mixing | 7 |
| 2 Stati risonanti del ${}^6\text{Li}$: ${}^3\text{He} + {}^3\text{H}$ | 9 |
| 2.1 $\mathbf{J}_{cluster}^\pi = 0^+$ | 9 |
| 2.2 $\mathbf{J}_{cluster}^\pi = 1^+$ | 10 |
| 2.3 Confronto sperimentale | 10 |
| 3 Tensori d'inerzia | 13 |
| 3.1 Funzioni d'onda $\alpha + d$ | 13 |
| 3.1.1 Tensore d'inerzia, $\alpha + d$ | 16 |
| 3.2 Funzioni d'onda ${}^3\text{H} + {}^3\text{He}$ | 17 |
| 3.2.1 Tensore d'inerzia, ${}^3\text{He} + t$ | 17 |
| Conclusioni | 18 |
| Bibliografia | 19 |

Introduzione

Il nucleo di ${}^6\text{Li}$, in natura il $(7.5 \pm 0.2)\%$ dell'abbondanza isotopica, costituisce un sistema legato semplice, formato da 3 protoni e 3 neutroni. Per questo motivo, si presta ad essere analizzato secondo diversi modelli fisici, che spiegano le sue proprietà e grandezze sperimentali. Inoltre, il litio ha importanti applicazioni in astrofisica nucleare, ed è molto utilizzato nei reattori nucleari, come nei blanket per reattori a fusione.

Esistono molteplici modelli con cui è possibile analizzare il nucleo di ${}^6\text{Li}$, i cui risultati non sono sempre in accordo. Alcune caratteristiche rimangono ancora ignote, come per esempio la ratio S/D nella funzione d'onda del ground state, in cui modelli diversi predicono addirittura segni opposti per l'ampiezza η dello stato D.

In questa tesi verranno analizzati due tipologie di modello a confronto: il modello a shell e il modello a cluster. Il modello a shell è un modello di campo medio che lega ogni singolo nucleone, il cui potenziale può essere associato, in prima approssimazione, a un oscillatore armonico.

La descrizione a cluster, invece, prevede che all'interno del nucleo di litio vengano considerati due aggregati più piccoli che interagiscono tra loro. La clusterizzazione (o raggruppamento) dei nuclei è un fenomeno che si osserva prevalentemente in nuclei leggeri, dal Berillio al Nichel, prevalentemente intorno all'energia di separazione in tali aggregati. L'idea che i nuclei potessero essere descritti come aggregati di cluster era già nata intorno al 1930, e indagata con maggiore interesse dal 1960, ma ad oggi il meccanismo di formazione di cluster non è ancora compreso a pieno.⁽¹⁾

La descrizione a cluster può essere schematizzata in una fase di transizione tra una struttura molecolare a una fase di liquido quantistico, in cui le funzioni d'onda risultano quasi completamente sovrapposte. La transizione è parametrizzata da una quantità adimensionale $\alpha = b/r_0$, dove b indica la dispersione della funzione d'onda del nucleone e r_0 è la tipica distanza tra due nucleoni, circa 1.2 fm. Quando $\alpha > 1$, i nucleoni sono delocalizzati e il nucleo ha struttura di liquido quantistico, mentre la transizione a stati di cluster avviene quando $\alpha \sim 1$.⁽²⁾

Si osserva che il modello a cluster in $\alpha + d$, ovvero un nucleo di ${}^4\text{He}$ e un deutone, descrive molto bene le energie e i numeri quantici del ground state e dei primi stati eccitati, appena sopra l'energia di separazione in $\alpha + d$, che verranno analizzati nel primo capitolo.

Per energie prossime alla soglia di separazione in ${}^3\text{H}$ e ${}^3\text{He}$, gli stati risonanti si possono invece spiegare con un modello a cluster in ${}^3\text{H} + {}^3\text{He}$. In tal caso, non c'è completa aderenza tra i risultati teorici e le misure sperimentali, in quanto vengono rivelati meno stati di quelli previsti. Tale configurazione verrà esaminata nel secondo capitolo. Uno schema complessivo dei livelli energetici del ${}^6\text{Li}$ è riportato in figura 1.

Infine, nel terzo capitolo, l'obiettivo sarà analizzare la dispersione spaziale del modulo delle funzioni d'onda, tramite lo studio dei tensori d'inerzia.

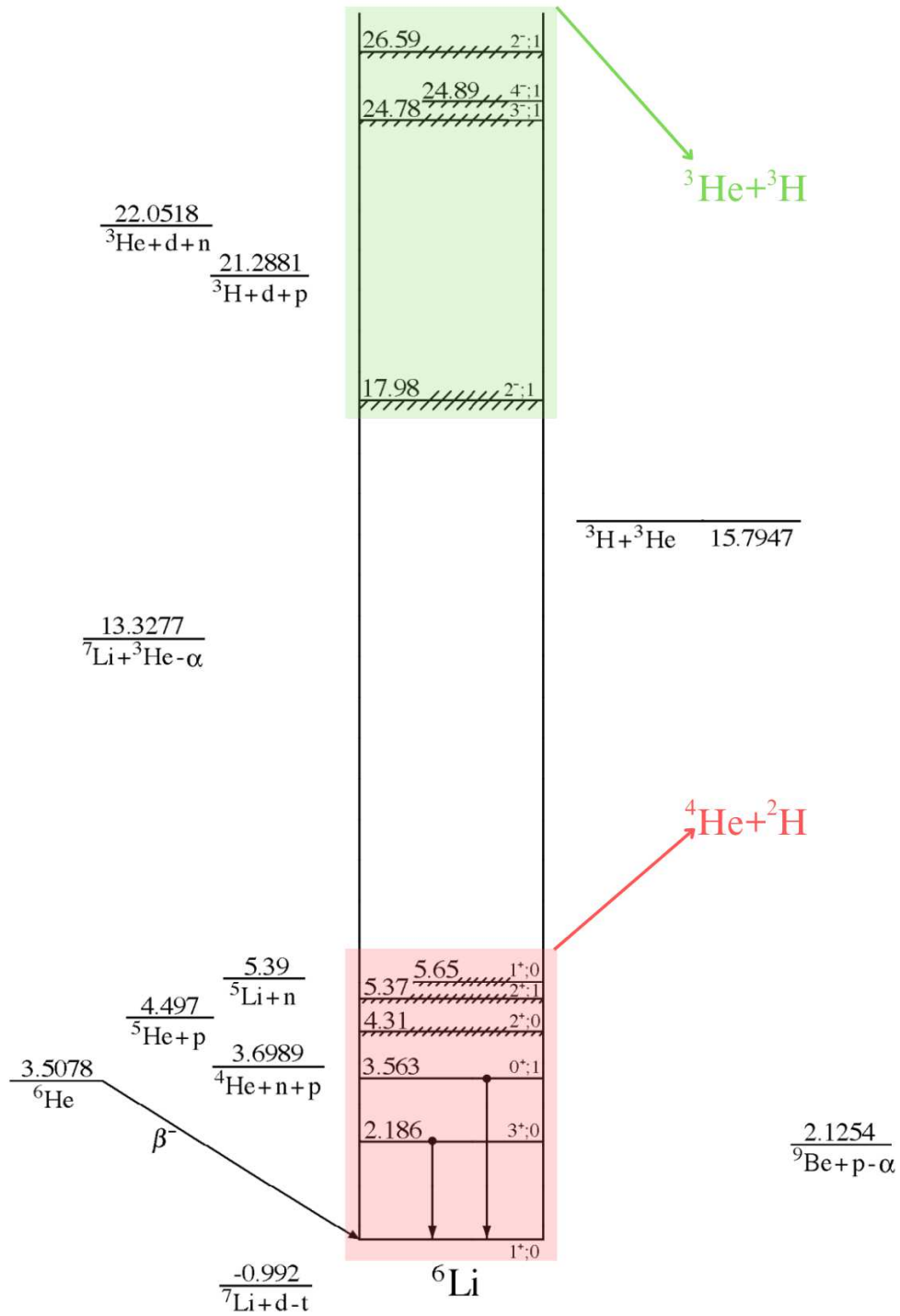


Figura 1: Livelli energetici di nucleo di ${}^6\text{Li}$ e relative energie di separazione, immagine adattata da TUNL Nuclear Data Project, Energy Level Diagram for ${}^6\text{Li}$

Capitolo 1

Primi stati eccitati del ${}^6\text{Li}$: $\alpha + d$

Per l'analisi del livello fondamentale e dei primi livelli energetici del ${}^6\text{Li}$ è possibile considerare due approcci. Il primo consiste in un modello a shell comprendente tutti i sei nucleoni del litio, considerando una buca di potenziale armonica come effetto medio complessivo dovuto all'attrazione nucleare e una correzione dovuta all'effetto spin-orbita. Il secondo metodo consiste nel considerare gli stati legati e risonanti del litio come sistema di due cluster, una particella $\alpha = {}^4\text{He}$ e un deutone, d .

Per quanto riguarda il modello a shell complessivo, dopo aver scelto un potenziale ragionevole, è necessario risolvere l'equazione di Schrödinger per un singolo nucleone. Nel caso dell'oscillatore armonico 3D, l'hamiltoniana che descrive il nucleone e i livelli energetici risultano:

$$H = \frac{1}{2M}\mathbf{p}^2 + \frac{1}{2}M\omega^2\mathbf{r}^2 \quad (1.1)$$

$$E_N = \left(N + \frac{d}{2}\right)\hbar\omega \rightarrow \left(N + \frac{3}{2}\right)\hbar\omega \quad (1.2)$$

dove $d \equiv 3$ è il numero di dimensioni, M è la massa di un nucleone e N è il numero di fononi per livello energetico. In coordinate cartesiane, $N = n_x + n_y + n_z$, mentre in coordinate polari, risulta $N = 2n + l$, con $l = N, N - 2, N - 4 \dots$ fino a 1 per N dispari o 0 per N pari.

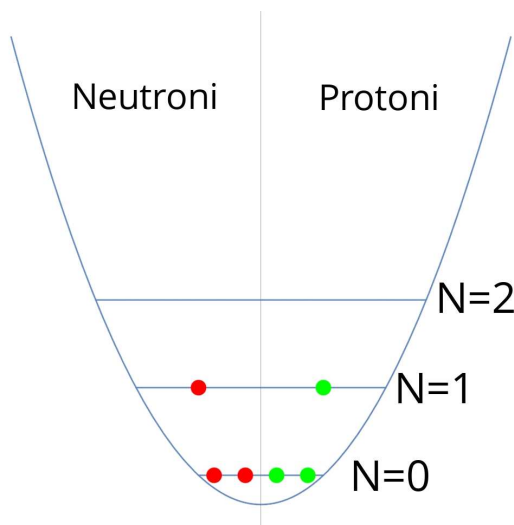


Figura 1.1: Modello a shell del ${}^6\text{Li}$

Ogni livello risulta degenerare con $d = \sum_l 2(2l + 1) = (N+1)(N+2)$, dove il 2 è dovuto alla degenerazione di spin. Se si considerano indistintamente protoni e neutroni, la degenerazione di ogni livello raddoppia.

Nel caso dello stato fondamentale del ${}^6\text{Li}$, il livello con $N = 0$ risulta occupato con due protoni e due neutroni, mentre il livello con $N = 1$ è parzialmente occupato con un neutrone e un protone. Il numero totale di fononi è dunque $N_{pho} = \sum_{i=1}^A N_i = 2$.

Per affinare il modello, è opportuno inserire un termine di accoppiamento spin-orbita, o accoppiamento $\vec{L} \cdot \vec{S}$, della forma:

$$V_{LS} = k \frac{dV(r)}{dr} \mathbf{L} \cdot \mathbf{S} = k \frac{dV(r)}{dr} \frac{1}{2} (\mathbf{J}^2 - \mathbf{L}^2 - \mathbf{S}^2) \quad (1.3)$$

Si consideri ora, invece, il modello a cluster, le cui predizioni risultano in accordo con le indagini sperimentali.

La funzione d'onda totale può essere descritta come prodotto tensoriale tra una funzione d'onda della particella α , del deutone e del moto relativo, funzione della posizione reciproca \vec{R} :

$$\psi(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_6) \rightarrow \tilde{\psi} = \psi_\alpha \otimes \psi_d \otimes \psi(\mathbf{R}) \quad (1.4)$$

Si considera, in questo caso, un fattore di preformazione prossimo all'unità, $P = |\langle \psi | \tilde{\psi} \rangle|^2 \sim 1$, per giustificare il modello.

Possiamo descrivere la struttura di ogni cluster con il modello a shell e deve valere la conservazione del numero di fononi, rispetto al modello collettivo, $N_{pho} = 2$.

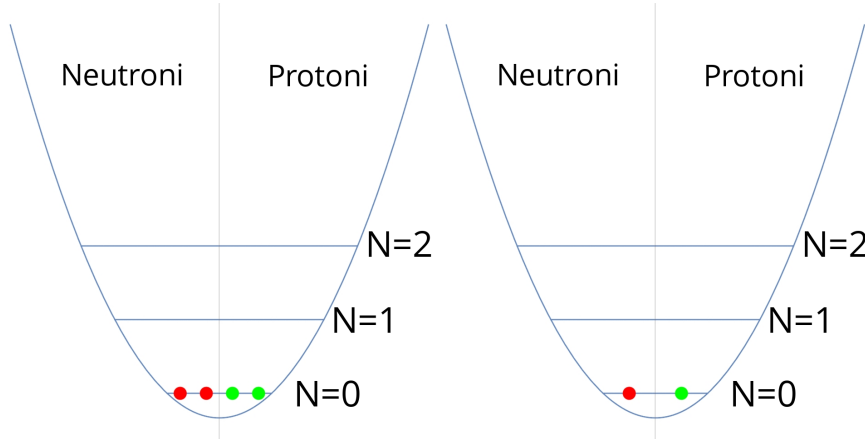


Figura 1.2: Modello a shell di due cluster: ${}^4\text{He}$ e ${}^2\text{H}$

Dunque, il moto relativo tra i cluster deve portare $N_{mr} = 2$.

Si prenda in considerazione ora il momento angolare totale e la parità; è noto che lo stato fondamentale del ${}^6\text{Li}$ sia $J_{tot}^\pi = 1^+$, il deutone sia, a sua volta, nello stato $J_d^\pi = 1^+$, mentre la particella α si trovi nello stato $J_\alpha^\pi = 0^+$. Per conservazione della parità e del momento angolare:

$$\mathbf{J}_{tot}^\pi = \mathbf{J}_d^\pi + \mathbf{J}_\alpha^\pi + \mathbf{L}^\pi \quad (1.5)$$

$$\vec{1}^+ = \vec{1}^+ + \vec{0}^+ + \vec{L}^\pi \quad (1.6)$$

Per le regole vettoriali, L può assumere i valori 0,1,2, ma sapendo che $\pi_L = (-1)^L$, il valore 1 deve essere escluso.

Lo stato fondamentale può essere descritto dunque da $L = 0$ e $L = 2$; ci si aspetta che lo stato fondamentale sia descritto dal termine spettroscopico 3S_1 , dato che normalmente si associa un'energia più bassa al momento angolare minore. Tuttavia, dall'analisi sperimentale del momento di quadrupolo elettrico e del momento magnetico, si evince che lo stato deve trovarsi in una sovrapposizione dei due e si stima che la maggior parte dello stato possa essere descritta da uno stato S, con $L = 0$. La ratio asintotica D/S non è ancora stata determinata teoricamente né sperimentalmente.

- $\mu = +0.8220473(6) \mu_N, +0.8220567(3) \mu_N$, momento di dipolo magnetico, $\mu_N = \frac{e\hbar}{2M}$ magnetone nucleare;
- $Q = -0.818(17)$ mb, momento di quadrupolo elettrico;
- $r = (2.09 \pm 0.02)$ fm $\sim r_0 A^{\frac{1}{3}}$, raggio nucleare quadratico medio (rms), $r_0 \sim 1.2$ fm;

Dallo spettro energetico del litio, si osserva che i primi livelli eccitati (1.1) possono essere correttamente descritti da un'analisi dei due cluster e del moto relativo con $\vec{L}^\pi = 2^+$. L'accoppiamento di L con

| Stato | Energia [MeV] |
|-------|---------------|
| 1^+ | 0 |
| 3^+ | 2.186 |
| 2^+ | 4.31 |
| 1^+ | 5.65 |

Tabella 1.1: Primi stati eccitati del ${}^6\text{Li}$, energie rispetto allo stato fondamentale

la particella α non apporta cambiamenti, mentre la somma tra \vec{L}^π e \vec{J}_d^π può essere 1^+ , 2^+ o 3^+ , esattamente come i livelli cercati.

Secondo il modello di oscillatore armonico, i livelli 1^+ , 2^+ e 3^+ dovrebbero essere degeneri, ma sperimentalmente non lo sono (1.1); è possibile spiegare lo splitting dei livelli con l'accoppiamento $\vec{L} \cdot \vec{S}$. Secondo la formula (1.3), ci si aspetta che i livelli siano splittati delle seguenti quantità ($L = 2, S = 1$):

- Livello $1^+ \rightarrow f(r) \frac{\hbar^2}{2} (J(J+1) - L(L+1) - S(S+1)) = -3f(r)\hbar^2$;
- Livello $2^+ \rightarrow f(r) \frac{\hbar^2}{2} (J(J+1) - L(L+1) - S(S+1)) = -f(r)\hbar^2$;
- Livello $3^+ \rightarrow f(r) \frac{\hbar^2}{2} (J(J+1) - L(L+1) - S(S+1)) = +2f(r)\hbar^2$;

La funzione $f(r)$ è negativa, dunque ci si aspetta che $E(3^+) < E(2^+) < E(1^+)$, come si verifica sperimentalmente. Inoltre, ci si aspetta che il salto energetico $\Delta E_{13} = E(1^+) - E(3^+)$ sia pari a $\frac{5}{2}\Delta E_{12} = \frac{5}{2}(E(1^+) - E(2^+))$, ma anche a $\frac{5}{3}\Delta E_{23} = \frac{5}{3}(E(2^+) - E(3^+))$. Dai dati sperimentali:

- $\Delta E_{13} \simeq 3.464$
- $\frac{5}{2}\Delta E_{12} \simeq 3.35$
- $\frac{5}{3}\Delta E_{23} \simeq 3.54$

Si osserva che le proporzioni sono confrontabili con le previsioni dell'accoppiamento $\vec{L} \cdot \vec{S}$, ma non compatibili, a causa di un termine di mixing: è ragionevole ipotizzare che il livello 1^+ abbia un'energia inferiore a quella teorizzata, a causa del mixing con il livello fondamentale, che era a sua volta una sovrapposizioni di stati con $L = 2$ e $L = 0$.

1.1 Matrice di mixing

Si ipotizza che i livelli 1^+ , avendo il medesimo spin totale, possano mescolarsi, con conseguente aumento in energia del livello fondamentale e diminuzione in energia del livello eccitato. Per stimare l'entità dello scostamento energetico, si osserva che il contributo unitario di accoppiamento spin-orbita per stati non mixati risulta:

$$\Delta E_{split} = \frac{1}{3}(E(2^+) - E(3^+)) = 0.708 \text{ MeV} = f(r)\hbar^2 \quad (1.7)$$

Pertanto, considerando i calcoli precedenti, ci si aspetta che il livello energetico 1^+ eccitato si trovi a:

$$\begin{aligned} \tilde{E}(1^+) &= E(2^+) + 2\Delta E_{split} \simeq 5.726 \text{ MeV} \\ \tilde{E}(1^+) &= E(3^+) + 5\Delta E_{split} \simeq 5.726 \text{ MeV} \end{aligned} \quad (1.8)$$

Dunque si stima che il livello eccitato 1^+ sia abbassato dal contributo di mixing di $\Delta E_{mix} = \tilde{E}(1^+) - E(1^+) \simeq 0.076 \text{ MeV}$. Si ipotizza che il livello fondamentale, per analogia, sia aumentato energeticamente della stessa quantità ΔE_{mix} .

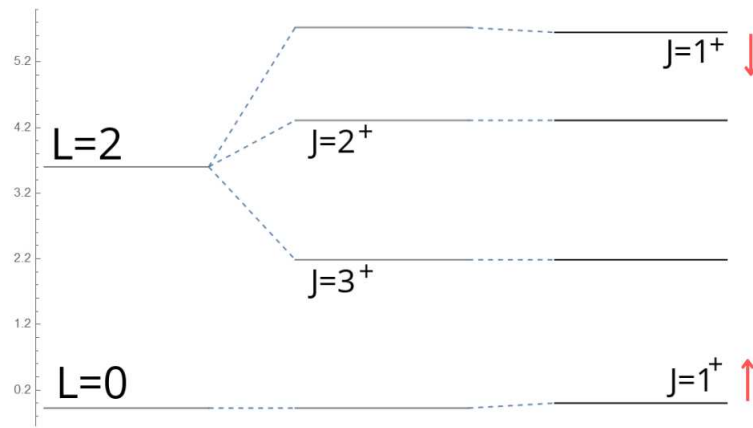


Figura 1.3: Schema grafico dei primi livelli energetici, con accoppiamento spin-orbita e mescolamento dei livelli 1^+

In tal caso, si può scrivere la matrice di mixing come:

$$\begin{pmatrix} 5.726 & a_1 \\ a_2 & -\Delta E_{mix} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 5.65 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.9)$$

A destra è riportata la matrice diagonale. Si ricava che il prodotto $a_1 \cdot a_2$ deve valere $a_1 \cdot a_2 = -0.435176$.

Capitolo 2

Stati risonanti del ${}^6\text{Li}$: ${}^3\text{He} + {}^3\text{H}$

Si vuole ora studiare la struttura dei livelli energetici superiori alla soglia di separazione in ${}^3\text{He}$ e ${}^3\text{H}$, ovvero stati risonanti di cluster.

Rispetto al modello a shell (1.1), è possibile interpretare questi livelli energetici promuovendo un nucleone, per esempio un protone in figura, dal livello fondamentale ($N=0$) al livello energetico successivo ($N=1$), aumentando di un'unità il numero di fononi complessivo: in questo caso bisognerà giustificare un modello a cluster con $N_{pho} = 3$.

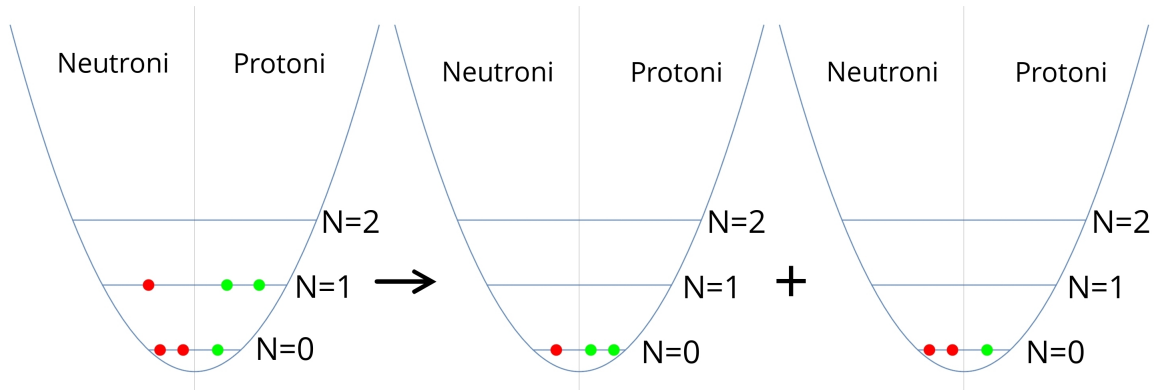


Figura 2.1: Modello per stati risonanti: cluster di ${}^3\text{He}$ e ${}^3\text{H}$

Risulta evidente che il numero di fononi deve essere attribuito al moto relativo dei due cluster, come nel caso analizzato in precedenza.

Entrambi gli stati fondamentali di ${}^3\text{He}$ e ${}^3\text{H}$ sono del tipo $\mathbf{J}^\pi = \frac{1}{2}^+$, dunque la somma vettoriale potrà dare $\mathbf{J}_{cluster}^\pi = 0^+$ oppure $\mathbf{J}_{cluster}^\pi = 1^+$.

Gli stati finali possono essere ottenuti dall'equazione:

$$\mathbf{J}_{tot}^\pi = \mathbf{J}_{cluster}^\pi + \mathbf{L}^\pi \quad (2.1)$$

Si analizzano ora separatamente i due casi con $\mathbf{J}_{cluster}^\pi = 0, 1$.

2.1 $\mathbf{J}_{cluster}^\pi = 0^+$

Considerando il numero di fononi, $N_{pho} = 2n+l$, ci sono due casi possibili per ottenere $N_{pho} = N_{mr} = 3$, ovvero $(n = 1, l = 1)$ e $(n = 0, l = 3)$. Accoppiando ora il momento angolare orbitale e quello di spin si possono ottenere i seguenti stati:

$$\mathbf{J}_{tot}^\pi \rightarrow \vec{0}^+ + \vec{1}^- \rightarrow \vec{1}^- \quad \text{per } (n = 1, l = 1) \quad (2.2)$$

$$\mathbf{J}_{tot}^\pi \rightarrow \vec{0}^+ + \vec{3}^- \rightarrow \vec{3}^- \quad \text{per } (n = 0, l = 3) \quad (2.3)$$

| Stato | Energia [MeV] |
|-------|------------------|
| 2^- | 17.98 ± 0.03 |
| 3^- | 24.78 ± 0.05 |
| 4^- | 24.89 ± 0.06 |
| 2^- | 26.59 ± 0.07 |

Tabella 2.1: Stati eccitati del ${}^6\text{Li}$, osservati sperimentalmente, rispetto allo stato fondamentale

| Stato | Larghezza Γ [MeV] |
|-------|--------------------------|
| 2^- | 3.012 ± 0.007 |
| 3^- | 6.75 ± 0.11 |
| 4^- | 5.32 ± 0.11 |
| 2^- | 8.68 ± 0.13 |

Tabella 2.2: Larghezze di decadimento Γ degli stati eccitati risonanti

Si osserva che in entrambi i casi, ci si aspetta, come verificato sperimentalmente, uno stato a parità negativa.

2.2 $J_{cluster}^\pi = 1^+$

Anche in questo caso il numero di fononi $N_{pho} = N_{mr} = 3$ può essere analizzato nelle configurazioni $(n = 1, l = 1)$ e $(n = 0, l = 3)$, ma i contributi angolari del moto relativo andranno sommati vettorialmente con il momento dei cluster; ci si aspettano due tripletti:

$$\mathbf{J}_{tot}^\pi \rightarrow \vec{1}^+ + \vec{1}^- \rightarrow \vec{0}^-, \vec{1}^-, \vec{2}^- \quad \text{per } (n = 1, l = 1) \quad (2.4)$$

$$\mathbf{J}_{tot}^\pi \rightarrow \vec{1}^+ + \vec{3}^- \rightarrow \vec{2}^-, \vec{3}^-, \vec{4}^- \quad \text{per } (n = 0, l = 3) \quad (2.5)$$

In notazione spettroscopica ${}^{2J_{cl}+1}L_{J_{tot}}$, è possibile riassumere gli 8 stati teoricamente attesi:

- Singoletto 1P_1 ;
- Tripletto ${}^3P_0, {}^3P_1, {}^3P_2$;
- Singoletto 1F_3 ;
- Tripletto ${}^3F_2, {}^3F_3, {}^3F_4$;

2.3 Confronto sperimentale

Dall'analisi teorica degli stati risonanti, ci si aspetta di osservare 8 stati, di cui due stati di singoletto e due stati di tripletto, privi di degenerazione grazie all'accoppiamento spin-orbita.

Tuttavia, i dati sperimentali rivelano solo 4 di questi stati (tab 2.1), di cui due stati $J^\pi = 2^-$, uno stato $J^\pi = 3^-$ e uno stato $J^\pi = 4^-$.

Si può ragionevolmente ipotizzare che lo stato 4^- sia uno degli stati di tripletto derivante da $J_{cl}^\pi = 0^+$, $(n = 0, l = 3)$, mentre non è immediato riuscire a ricollegare lo stato 3^- a una specifica coppia di numeri quantici, poiché potrebbe derivare sia dal tripletto $J_{cl}^\pi = 1^+$, $(n = 0, l = 3)$, quanto dal singoletto $J_{cl}^\pi = 0^+$, $(n = 1, l = 1)$. Allo stesso modo, non è noto a priori in quale ordine energetico si debbano disporre i due stati 2^- , entrambi rivelati sperimentalmente, per poter correttamente ricollegarli ai due stati di tripletto: $J_{cl}^\pi = 1^+$, $(n = 1, l = 1)$ e $J_{cl}^\pi = 1^+$, $(n = 0, l = 3)$.

Tuttavia, è lecito ipotizzare che stati con lo stesso momento angolare totale e parità siano mescolati da un termine di mixing, come succedeva nel modello precedente per cluster di alpha e deutone. In questo caso, i dati sono insufficienti per poter ricavare i parametri matriciali necessari per poter spiegare i

risultati teorici.

Inoltre, si osserva che le larghezze degli stati risonanti (tab 2.2) aumentano notevolmente al crescere dell'energia dello stato, il che potrebbe far pensare che sia difficile distinguere sperimentalmente due stati con una distribuzione molto sovrapposta.

Lo stato $J^\pi = 0^-$, invece, è uno stato piuttosto difficile da osservare sperimentalmente, possibile motivo per cui non appare tra gli stati misurati.

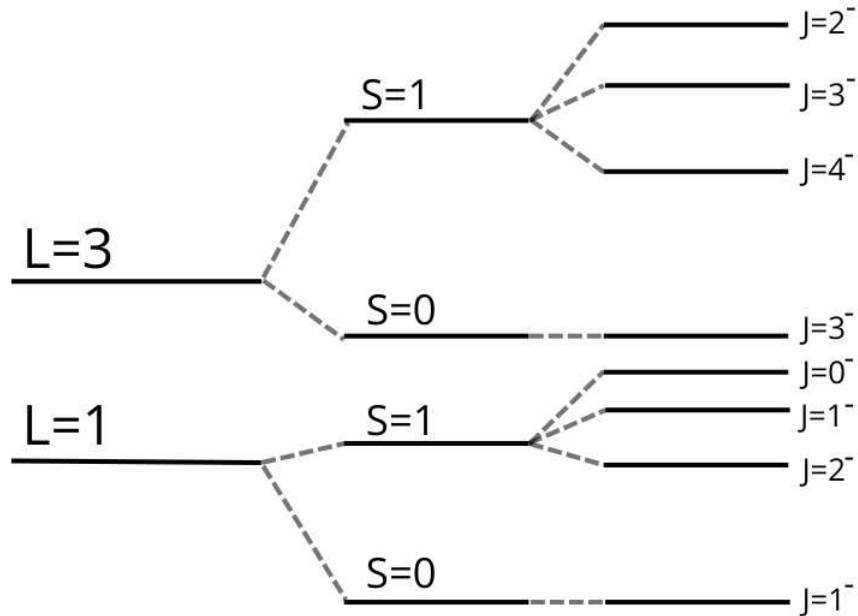


Figura 2.2: Schema grafico dei livelli energetici superiori, con accoppiamento spin-orbita

Capitolo 3

Tensori d'inerzia

Per studiare l'ipotesi di overlap tra orbitali di funzioni d'onda, si procede ad analizzare le funzioni d'onda dei sistemi di cluster e i rispettivi momenti d'inerzia.

3.1 Funzioni d'onda $\alpha + d$

Per quanto riguarda il modello a cluster di particella alpha e deutone, è possibile scrivere la funzione d'onda complessiva in termini di autofunzioni dell'oscillatore armonico in 3 dimensioni, del tipo:

$$\begin{aligned}\psi_{nlm} &= R_{nl}(r) Y_l^m(\theta, \phi) \\ R_{nl}(r) &= N_{nl} r^l e^{-\nu r^2} L_{(n-1)}^{l+1/2}(2\nu r^2) \quad \nu = \mu \frac{\omega}{2c^2} \\ N_{nl} &= \sqrt{\sqrt{\frac{2\nu^3}{\pi}} \frac{2^{n+2l+2} (n-1)! \nu^l}{[(2n+2l-1)!!]}} \quad \mu = \frac{5m^2}{m+5m} = \frac{5}{6}m\end{aligned}\tag{3.1}$$

Dove $Y_l^m(\theta, \phi)$ indicano le funzioni armoniche e $L_{n-1}^{l+1/2}(2\nu r^2)$ i polinomi di Laguerre generalizzati:

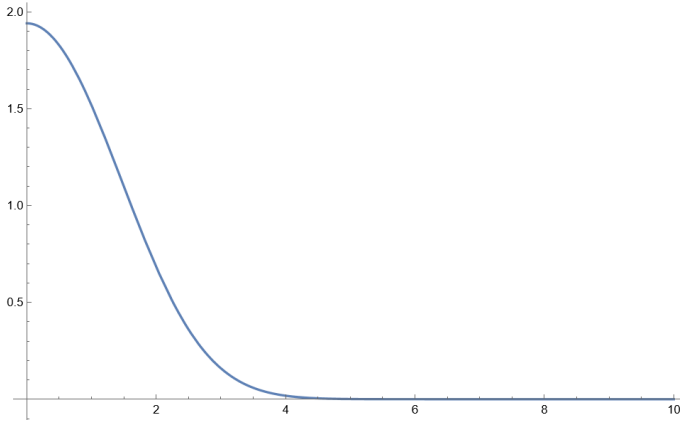
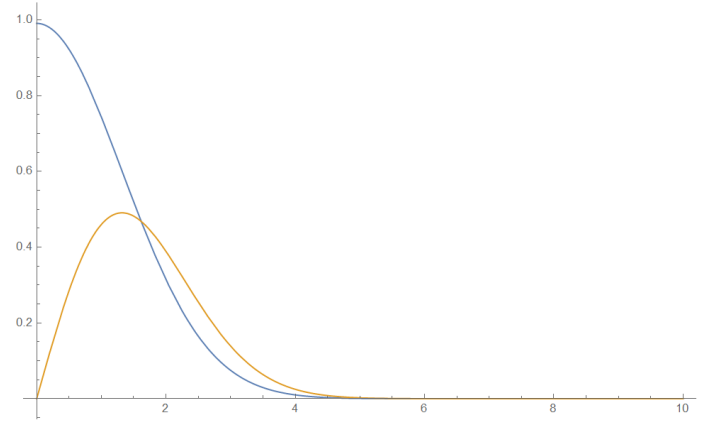
$$\begin{aligned}L_n^\alpha(x) &:= \frac{x^{-\alpha} e^x}{n!} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x} x^{n+\alpha}) \\ L_{n-1}^{l+1/2}(2\nu r^2) &:= (2\nu r^2)^{-l-1/2} \frac{e^{2\nu r^2}}{(n-1)!} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} (e^{-2\nu r^2} x^{n+l-1/2})\end{aligned}\tag{3.2}$$

In prima approssimazione, la massa del neutrone e del protone si considerano uguali all'unità di massa atomica, $m_n \simeq m_p \simeq m_{u.m.a} = 931.494 \text{ MeV}/c^2$. Nel modello a shell preso in considerazione, si considera il moto di un nucleone sotto l'azione di un campo medio dovuto ai restanti A-1=5 nucleoni. Le autofunzioni sono descritte in coordinate sferiche, secondo le trasformazioni:

$$\begin{cases} x = r \sin \theta \cos \phi \\ y = r \sin \theta \sin \phi \\ z = r \cos \theta \end{cases} \rightarrow \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad r \in [0, +\infty) \\ \theta = \arccos \frac{z}{r} \quad \theta \in [0, \pi) \\ \phi = \arctan \frac{y}{x} \quad \phi \in [0, 2\pi) \end{cases}\tag{3.3}$$

La funzione complessiva per i 6 nucleoni, nel modello $\alpha + d$, risulta descritta da:

$$\begin{aligned}|\psi_{\alpha+d}|^2(r, \phi, \theta) &= 4|R_{10}(r)Y_0^0(\theta, \phi)|^2 + 2|R_{11}(r)Y_1^m(\theta, \phi)|^2 \\ \psi_{100}(r, \phi, \theta) &= N_{10} e^{-\nu r^2} \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \\ \psi_{11m}(r, \phi, \theta) &= N_{11} e^{-\nu r^2} r Y_1^m(\theta, \phi) \\ N_{10} &= \sqrt{8\sqrt{\frac{2\nu^3}{\pi}}} \simeq 0.6965 \\ N_{11} &= \sqrt{\sqrt{\frac{2\nu^3}{\pi}} \frac{64\nu}{15}} \simeq 0.3407\end{aligned}\tag{3.4}$$

Figura 3.1: Distribuzione radiale di $\alpha + d$ Figura 3.2: Funzioni d'onda radiali $R_{10}(r)$ e $R_{11}(r)$

Si ricordano le funzioni armoniche per $l=1$:

$$\begin{aligned}
 Y_1^{-1}(\theta, \phi) &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{2\pi}} e^{-i\phi} \sin \theta \\
 Y_1^0(\theta, \phi) &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{\pi}} \cos \theta \\
 Y_1^1(\theta, \phi) &= -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{2\pi}} e^{i\phi} \sin \theta
 \end{aligned} \tag{3.5}$$

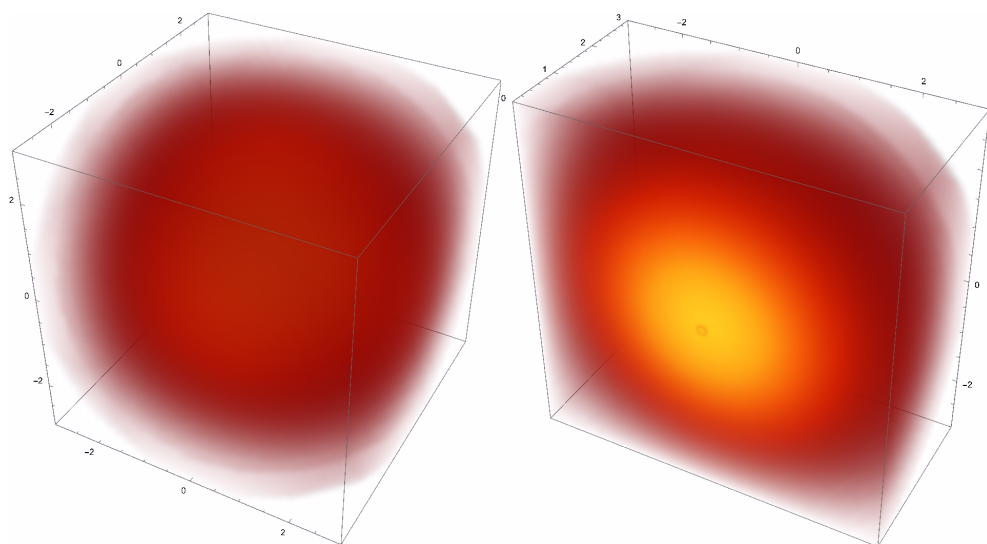
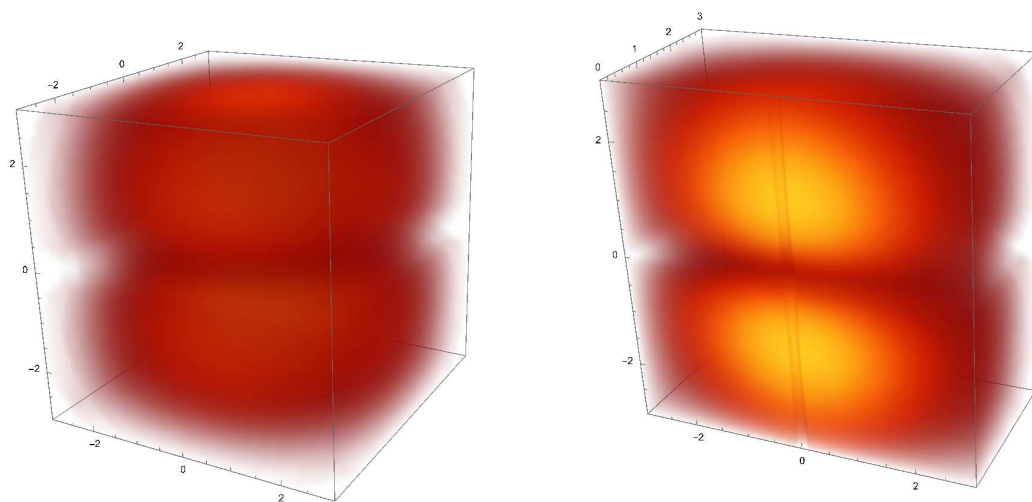
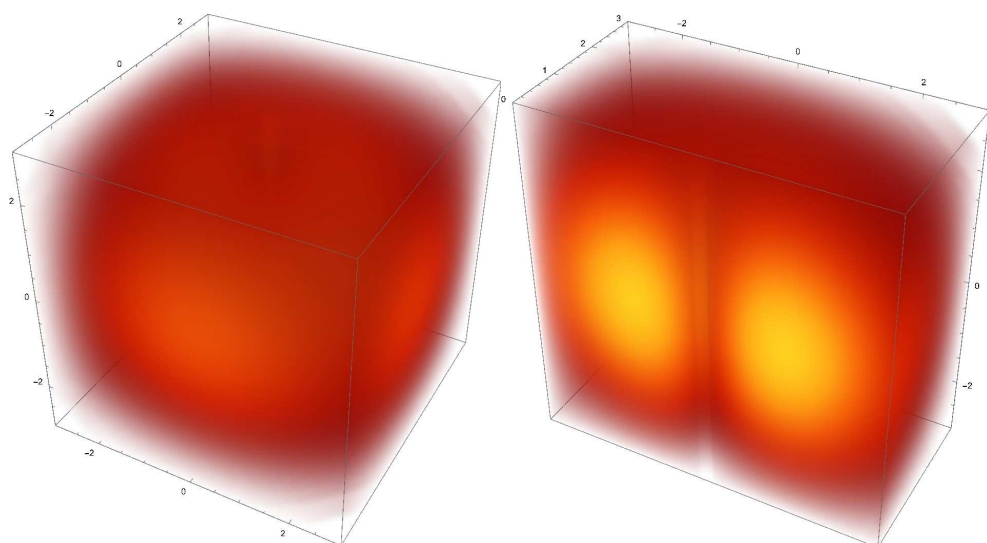
Il modulo quadro dell'autofunzione può essere considerato come una densità numerica spaziale, in quanto:

$$\int_0^{+\infty} dr \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \psi_{nlm}^* \psi_{nlm} r^2 \sin \theta = 6 \tag{3.6}$$

Per $(n=1, l=0)$ e $(n=1, l=1)$, il raggio quadratico medio r_{rms} vale:

$$\begin{aligned}
 \sqrt{\langle r^2 \rangle_{10}} &= \left(\int_0^{+\infty} \psi_{10}^* r^2 \psi_{10} r^2 dr \right)^{\frac{1}{2}} \simeq 1.62 \text{ fm} \\
 \sqrt{\langle r^2 \rangle_{11}} &= \left(\int_0^{+\infty} \psi_{11}^* r^2 \psi_{11} r^2 dr \right)^{\frac{1}{2}} \simeq 2.09 \text{ fm}
 \end{aligned} \tag{3.7}$$

Dall'analisi dei raggi medi si deduce che le distribuzioni funzionali non sono ben separate tra loro, ma sono sovrapposte. Si può osservare anche graficamente che le distribuzioni spaziali hanno un'area sovrapposta non trascurabile (figure 3.3, 3.4, 3.5).

Figura 3.3: Rappresentazione 3-dimensionale di ψ_{100} e sezioneFigura 3.4: Rappresentazione 3-dimensionale di ψ_{110} e sezioneFigura 3.5: Rappresentazione 3-dimensionale di ψ_{111} e sezione

3.1.1 Tensore d'inerzia, $\alpha + d$

Per un sistema di n corpi rigidi di massa m_p , è possibile descrivere le coordinate del tensore d'inerzia come:

$$I_{ij} = \sum_{p=1}^n m_p [(x_p)_k (x_p)_k \delta_{ij} - (x_p)_i (x_p)_j] \quad (3.8)$$

E in termini matriciali:

$$\bar{I} = \sum_{i=1}^n m_i \begin{pmatrix} (y_i^2 + z_i^2) & -x_i y_i & -x_i z_i \\ -x_i y_i & (x_i^2 + z_i^2) & -y_i z_i \\ -x_i z_i & -y_i z_i & (x_i^2 + y_i^2) \end{pmatrix} \quad (3.9)$$

Generalizzando per un sistema continuo, bisognerà integrare sul volume $dx dy dz$ la densità $\rho(x, y, z)$. Nel caso di interesse, la densità $\rho(r, \phi, \theta) = m|\psi|^2$, in coordinate sferiche, andrà integrata nel volume $r^2 dr d\phi \sin \theta d\theta$. In definitiva:

$$\begin{aligned} I_{xx} &= m \int dr \int d\theta \int d\phi \psi^* \psi \sin \theta r^2 (1 - \sin^2 \theta \cos^2 \phi) r^2 \\ I_{xy} &= I_{yx} = m \int dr \int d\theta \int d\phi \psi^* \psi r^2 \sin \theta (\cos \phi \sin \phi \sin^2 \theta) r^2 \\ I_{xz} &= I_{zx} = m \int dr \int d\theta \int d\phi \psi^* \psi \sin \theta r^2 (\cos \theta \sin \theta \cos \phi) r^2 \\ I_{yy} &= m \int dr \int d\theta \int d\phi \psi^* \psi \sin \theta r^2 (1 - \sin^2 \theta \sin^2 \phi) r^2 \\ I_{yz} &= I_{zy} = m \int dr \int d\theta \int d\phi \psi^* \psi \sin \theta r^2 (\cos \theta \sin \theta \sin \phi) r^2 \\ I_{zz} &= m \int dr \int d\theta \int d\phi \psi^* \psi \sin \theta r^2 (1 - \cos^2 \theta) r^2 \end{aligned} \quad (3.10)$$

Si calcolano separatamente le componenti di densità numerica per $\psi_{100}(r, \phi, \theta) = R_{10}(r) Y_0^0(\theta, \phi) = \frac{R_{10}(r)}{\sqrt{4\pi}}$ e $\psi_{11m}(r, \phi, \theta) = R_{11}(r) Y_1^m(\theta, \phi)$. Per la funzione ψ_{100} , i termini fuori dalle diagonali integrano a zero:

$$\begin{pmatrix} \frac{N_{10}^2}{16} \frac{1}{\nu^{5/2}} \sqrt{\frac{\pi}{2}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{N_{10}^2}{16} \frac{1}{\nu^{5/2}} \sqrt{\frac{\pi}{2}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{N_{10}^2}{16} \frac{1}{\nu^{5/2}} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2.7868 & 0 & 0 \\ 0 & 2.7868 & 0 \\ 0 & 0 & 2.7868 \end{pmatrix} \quad (3.11)$$

E si osserva che $\frac{N_{10}^2}{16} \frac{1}{\nu^{5/2}} \sqrt{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2\nu} = 0.8606 fm^2$.

Per semplicità, nella trattazione si omette il fattore di massa, considerando le sole distribuzioni spaziali.

I termini diagonali risultano uguali tra loro, $I_{xx} = I_{yy} = I_{zz}$, in accordo con il fatto che la distribuzione analizzata è sferica.

Per quanto riguarda le funzioni d'onda dell'orbitale P, si analizzano separatamente i casi per $m = 0, \pm 1$, osservando che, dato che $|Y_1^1(\theta, \phi)|^2 = |Y_1^{-1}(\theta, \phi)|^2$, il tensore per $m = 1$ deve essere uguale a quello per $m = -1$.

Caso $m_l = 0$:

$$\begin{pmatrix} \frac{N_{11}^2}{32} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{3}{\nu^{7/2}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{N_{11}^2}{32} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{3}{\nu^{7/2}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{N_{11}^2}{64} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{3}{\nu^{7/2}} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 5.5736 & 0 & 0 \\ 0 & 5.5736 & 0 \\ 0 & 0 & 2.7868 \end{pmatrix} \quad (3.12)$$

Caso $m_l = \pm 1$:

$$\begin{pmatrix} \frac{N_{11}^2}{128} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{9}{\nu^{7/2}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{N_{11}^2}{128} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{9}{\nu^{7/2}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{N_{11}^2}{32} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{3}{\nu^{7/2}} \end{pmatrix} \rightarrow m \begin{pmatrix} 4.1802 & 0 & 0 \\ 0 & 4.1802 & 0 \\ 0 & 0 & 5.5736 \end{pmatrix} \quad (3.13)$$

Rispetto al caso precedente, si osserva che per $m_l = 0$ si ha $I_{xx} = I_{yy} > I_{zz}$ come per un rotore assiale oblatto, mentre per $m_l = \pm 1$ si ha $I_{xx} = I_{yy} < I_{zz}$, come per un rotore assiale prolato.

In conclusione, il tensore d'inerzia che descrive il sistema a cluster $\alpha + d$, deve essere della forma:

$$I_{tot\alpha+d} = 4I_{100} + I_{11m_{l_1}} + I_{11m_{l_2}} \quad (3.14)$$

dove $m_{l_i} = 0, \pm 1$. Le configurazioni possibili sono molteplici, ma per descrivere lo stato fondamentale, con $J = 1$, è ragionevole assumere che lo stato più probabile, per ragioni di pairing⁽⁸⁾, sarà quello con $m_{l_1} = -m_{l_2}$ e, per semplicità, verranno analizzati solo questi casi.

Le combinazioni possibili sono dunque:

- $m_{l_1} = 0, m_{l_2} = 0$;
- $m_{l_1} = 1, m_{l_2} = -1$;
- $m_{l_1} = -1, m_{l_2} = 1$;

Rispettivamente:

Caso $m_{l_1} = m_{l_2} = 0$:

$$\begin{pmatrix} 22.294 & 0 & 0 \\ 0 & 22.294 & 0 \\ 0 & 0 & 16.721 \end{pmatrix} \quad (3.15)$$

Caso $m_{l_1} = 1 \wedge m_{l_2} = -1$ o viceversa:

$$\begin{pmatrix} 19.507 & 0 & 0 \\ 0 & 19.507 & 0 \\ 0 & 0 & 22.294 \end{pmatrix} \quad (3.16)$$

Si osserva che, in queste due configurazioni, la forma spaziale risulta essere un ellissoide oblatto nel primo caso, con $m_{l_1} = m_{l_2} = 0$, mentre nel secondo caso si può ricondurre a un ellissoide prolato, quando $m_{l_1} = -m_{l_2} = \pm 1$.

3.2 Funzioni d'onda ${}^3\text{H} + {}^3\text{He}$

Il modello a cluster per ${}^3\text{H}$ ($= t$) e ${}^3\text{He}$ può essere descritto da funzioni d'onda equivalenti a quelle del modello analizzato nella sezione precedente, avendo accortezza di spostare un nucleone dalla shell S ($N = 0$) alla shell P ($N = 1$).

In tal caso la densità della funzione d'onda complessiva è descritta dalla somma:

$$|\psi_{t+{}^3\text{He}}|^2(r, \phi, \theta) = 3|R_{10}(r)Y_0^0(\theta, \phi)|^2 + 3|R_{11}(r)Y_1^m(\theta, \phi)|^2 \quad (3.17)$$

Anche in questo caso la distribuzione rappresenta correttamente una densità numerica:

$$\int_0^{+\infty} dr \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \psi_{t+{}^3\text{He}}^* \psi_{t+{}^3\text{He}} r^2 \sin \theta = 6 \quad (3.18)$$

3.2.1 Tensore d'inerzia, ${}^3\text{He} + t$

Per il modello a cluster in ${}^3\text{He}$ e ${}^3\text{H}$, è possibile considerare il tensore d'inerzia complessivo come:

$$3I_{100} + \sum_{i=1}^3 I_{11m_{l_i}} \quad (3.19)$$

In questo caso, le possibilità sono molteplici, in quanto bisognerà considerare gli accoppiamenti di spin e momenti angolari in una configurazione non simmetrica, ma con 3 nucleoni in uno stato S e 3 nucleoni in uno stato P. Si prenda in considerazione, per semplicità, il caso in figura 3.6, in cui nel livello $N = 0$ sono presenti due neutroni e un protone, mentre nel livello $N = 1$ sono presenti un neutrone e due protoni.

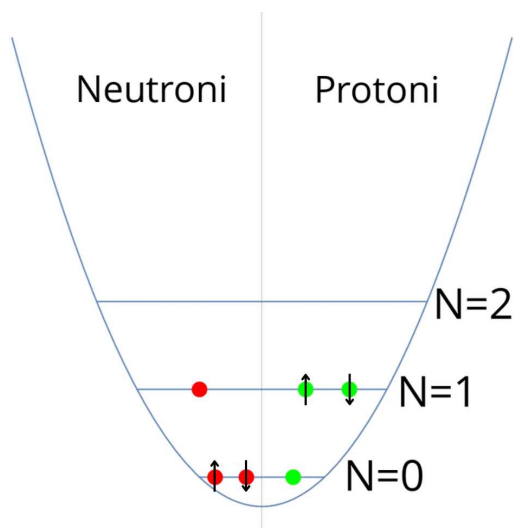


Figura 3.6: Modello a shell in ${}^3\text{He}+{}^3\text{H}$

Si vuole descrivere, tra le possibili energie, quella minore, associata a $J^\pi = 2^-$. I due protoni nella shell P e i due neutroni nella shell S saranno accoppiati in modo da dare un contributo nullo al momento angolare totale.

In definitiva, il momento J^π dovrà essere dato dalla somma degli spin dei due nucleoni spaiati e del momento angolare del nucleone della shell P:

$$\vec{J} = 1\vec{1}/2 + 1\vec{1}/2 + \vec{1} \quad (3.20)$$

Ipotizzando di avere due $m_{l_1} = -1$, $m_{l_2} = 1$ per i due protoni e $m_{l_0} = 0$ per il neutrone, nella shell P, il tensore totale risulta:

$$\begin{pmatrix} 22.294 & 0 & 0 \\ 0 & 22.294 & 0 \\ 0 & 0 & 22.294 \end{pmatrix} \quad (3.21)$$

E si osserva che nel tensore risultante tutti i termini sulla diagonale sono uguali tra loro, $I_{xx} = I_{yy} = I_{zz}$, e descrive pertanto una simmetria sferica, che è un risultato inatteso.

Conclusioni

L'obiettivo della tesi è stato dare una descrizione dei livelli ad alta energia del ${}^6\text{Li}$, in un modello a cluster che tenesse conto della sottostante descrizione nel modello a shell, indagando non solo i momenti angolari e le parità associate, ma anche analizzando, con un approccio più originale, i tensori d'inerzia di alcune specifiche configurazioni.

Dal punto di vista sperimentale, è stato osservato come i primi livelli energetici fossero ben descritti dal modello a cluster, con una correzione di spin-orbita e una correzione di mixing tra i livelli 1^+ .

Invece, vicino alla soglia di separazione in ${}^3\text{He}+{}^3\text{H}$, è ragionevole ipotizzare che i livelli non osservati sperimentalmente esistano, ma siano fortemente mixati o difficili da misurare.

Con l'avvento di nuove tecniche di misura, questi potrebbero essere rilevati in futuro, ed essere studiati con modelli sempre più raffinati, per poter correttamente indagare la struttura nucleare del litio e di altri nuclei di piccola massa, che sono soggetti a clusterizzazione.

Bibliografia

1. W. Von Oertzen, M. Freer, Y. Kanada-En'yo, Nuclear clusters and nuclear molecules, *Physics Reports*, 432, Issue 2, pp 43-113, (2006);
2. J.P. Ebran, E. Khan, T. Niksic, D. Vretenar, How atomic nuclei cluster, *Nature* 487, pp 341–344 (2012);
3. D.R. Tilley, C.M. Cheves, J.L. Godwin, G.M. Hale, H.M. Hofmann, J.H. Kelley, C.G. Sheu, H.R. Weller, *Nuclear Physics*, A708 (2002);
4. L. Fortunato, *Appunti di Fisica Nucleare*, GEDI Gruppo Editoriale (2018);
5. K. Heyde, *Basics Ideas and Concepts in Nuclear Physics*, Institute of Physics Publishing, Bristol and Philadelphia (1999);
6. K. Wildermuth, Y.C. Tang, *A unified theory of the nucleus*, Vieweg Braunschweig (1977);
7. K. Wildermuth, Th. Kanellopoulos, The “cluster model” of the atomic nuclei, *Nuclear Physics*, 7, pp 150-162, (1958);
8. D.J. Rowe, *Nuclear Collective Motion*, Methuen, (1970).