



# UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

Dipartimento di Fisica e Astronomia “Galileo Galilei”

Corso di Laurea in Fisica

Tesi di Laurea

Relazione raggio-massa per i pianeti extrasolari

Relatore

Dott. Francesco Marzari

Laureando

Gregorio Zustovi

Anno Accademico 2017/2018



# Indice

<b>Introduzione</b>	<b>v</b>
<b>1 Basi teoriche della ricerca</b>	<b>1</b>
1.1 Modello base . . . . .	1
1.2 Equazioni di stato dei solidi . . . . .	4
1.2.1 EOS universali per i metalli, a $T = 0K$ e successivo ampliamento a tutti solidi con $T \neq 0K$ . . . . .	5
1.2.2 Test di Universalità . . . . .	7
1.2.3 Confronto tra le EOS di Birch-Murnaghan e le EOS Universali e conclusione . . . . .	9
1.3 Diagrammi ternari . . . . .	10
<b>2 Osservazioni con estrapolazione e rielaborazione dei risultati</b>	<b>13</b>
2.1 Osservazione ed estrapolazione dei risultati . . . . .	14
2.1.1 Formazione planetaria . . . . .	14
2.1.2 Raggio massimo per pianeti terrestri e curve isoraggio . . . . .	17
2.2 Relazione tra raggio e massa . . . . .	19
<b>3 Conclusioni</b>	<b>23</b>



# Introduzione

Missioni spaziali, quali Kepler, TESS, CHEOPS, PLATO, rispettivamente le prime due di NASA (National Aeronautics and Space Administration) e le seconde due di ESA (European Space Agency), progettate per la ricerca di pianeti extrasolari, simili alla Terra, per composizione e struttura interna, negli ultimi dieci anni hanno raccolto informazioni per oltre 2700 pianeti.

La scoperta di un pianeta attorno ad una stella, viene fatta attraverso i cambiamenti della velocità radiale della stella, causati dalla gravità del pianeta ed attraverso i cambiamenti di luminosità della stella stessa, poichè al passaggio del pianeta, tra il telescopio e la stella, la luminosità della stella si azzerava (poichè essa viene coperta dal pianeta). Lo studio esposto in questo lavoro di tesi, è mirato ai pianeti extrasolari scoperti, aventi una massa medio piccola, di circa  $1 - 10M_{\oplus}$ , con  $M_{\oplus}$  la massa della Terra, per i quali, vengono selezionati quali potrebbero avere, una composizione interna simile alla Terra.

Considerate le dimensioni dei pianeti e la loro struttura, questi vengono chiamati Super-Terre, tra i quali, per esempio, GJ876d, un pianeta con una massa pari a  $7,5 M_{\oplus}$ , della costellazione dell'acquario, scoperta nel 2005 da Rivera [5], la prima Super-Terra scoperta.

Il lavoro di Diana Valencia [6] mira allo studio dei pianeti extrasolari scoperti e, con i dati raccolti, si prefigge l'obiettivo di calcolare la relazione che intercorre tra Raggio e Massa, per determinarne la composizione interna e successivamente classificare le Super-Terre, in pianeti terrestri o rocciosi (ovvero contenenti alte percentuali di ferro e Silicati) o oceanici (contenenti una quantità di acqua e ghiacci superiore al 10%). La difficoltà di questo lavoro è riuscire a distinguere e classificare i pianeti, poichè, a parità di raggio, si possono trovare differenti composizioni interne per i pianeti, ovvero, ad un determinato raggio, possono corrispondere diverse percentuali di Ferro, Olivina (e silicati), Acqua e ghiaccio.

La scelta di osservare con attenzione e catalogare solamente pianeti con una massa compresa tra  $1 - 10M_{\oplus}$  è dovuta al fatto che, per pianeti con masse (e raggi) maggiori possono ancora essere presenti Idrogeno ed Elio, non ancora esauriti dal processo di formazione del pianeta. L'elaborato si sviluppa in due capitoli:

- Primo capitolo: suddiviso a sua volta in tre paragrafi. In questo capitolo si discutono il modello teorico utilizzato (come ci si aspetta sia la composizione interna del pianeta), le equazioni dello stato solido più efficaci per lo studio (le equazioni di P.Vinet) ed infine vengono trattati ed approfonditi i diagrammi ternari (o triangolari), i diagrammi scelti per lo studio dei pianeti.
- Secondo capitolo: suddiviso in due paragrafi. In questo capitolo viene esposto lo studio di Valencia, a partire dai dati raccolti ed analizzati, per arrivare a determinare la legge che intercorre tra Raggio e Massa.



# Capitolo 1

## Basi teoriche della ricerca

In questo capitolo si espongono le basi teoriche dello studio. In primo luogo si espone il modello, preso come base, per lo studio di D. Valencia [6]; vengono poi espone le equazioni dello stato dei solidi, in particolare, la tipologia di P. Vinet [1]. Infine si discute cosa siano i diagrammi ternari, che tipologia di diagrammi ternari vengono usati nella ricerca da D. Valencia e come essi debbano essere letti ed interpretati.

### 1.1 Modello base

Il modello di partenza descrive la struttura interna del pianeta extrasolare (ricordiamo che si tratta di un pianeta, relativamente piccolo, come detto nell'introduzione), cercando di definire i vari strati di cui esso è composto. I vari strati godono della proprietà di avere una struttura interna o omogenea, dunque essi sono ben divisibili tra loro.

Ogni strato deve poter essere descritto tramite equazioni differenziali standard, risolte per densità  $\rho$ , pressione  $P$ , massa  $M$ , struttura della forza di gravità, sotto equilibrio idrostatico. Come vedremo nel paragrafo 1.2, in questo studio, vengono usate le equazioni di stato dei solidi (EOS), per densità  $\rho$ , pressione  $P$  e Temperatura  $T$ , di P.Vinet [1], poichè, rispetto a quelle di Birch-Murnaghan, queste estrapolano meglio i dati al terzo ordine, sotto condizioni di alta pressione.

Partendo dallo strato o guscio più esterno, un pianeta può essere diviso in tre macro regioni:

- Strato di acqua e ghiaccio (H<sub>2</sub>O Layer);
- Mantello roccioso;
- Nucleo.

Lo strato di acqua e ghiaccio a sua volta può essere sezionato in due sotto-gusci: Oceani d'acqua e Gusci di ghiaccio.

Questi ultimi, non sono altro che ghiaccio soggetto a forte pressione. Si parla infatti di ghiaccio VII e ghiaccio X (due delle quindici fasi conosciute):

- Ghiaccio VII [2]: è una forma cristallina cubica di ghiaccio e acqua. Esso si forma quando la pressione, a temperatura ambiente, è superiore ai 3 GPa e dato l'ampio range entro il quale esiste, può essere considerata la fase più stabile. Il ghiaccio VII, come si

può vedere nell'immagine sottostante, ha 4 punti tripli, in particolare, a  $T = 100K$  e  $P = 62GPa$ , con il ghiaccio VIII e il ghiaccio X e a  $T = 1000k$  e  $P = 47GPa$  con il ghiaccio X e l'acqua.

- Ghiaccio X: ottenuto aumentando la pressione esercitata sul ghiaccio VII, anche questo ha una struttura cubica.
- Ghiaccio I: si trova solo nei pianeti più freddi; il ghiaccio I è l'unico non creato in laboratorio e che si trova in natura.

Delle due fasi, quella che si trova maggiormente e che possiamo considerare come costituente di pianeti giganti e delle cosiddette lune di ghiaccio, è il ghiaccio VII.

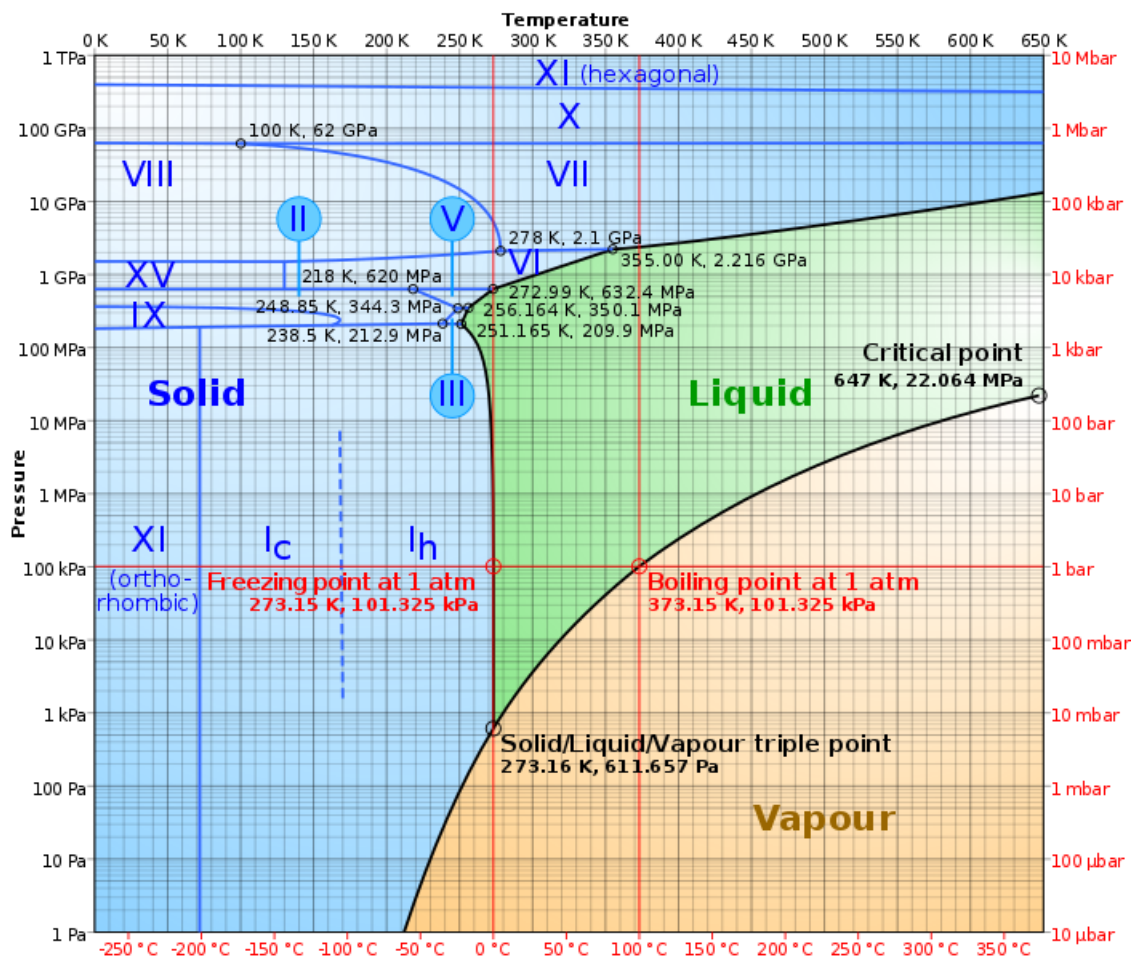


Figura 1.1: La figura mostra le varie fasi dell'acqua-ghiaccio, in un diagramma  $P,T$  [4]

Il mantello roccioso, il guscio intermedio, è composto principalmente da Olivina e Perovskite e minerali appartenenti allo stesso gruppo. Sezionando il mantello in due sub-strati, mantello superiore e mantello inferiore, si trova l'Olivina in quello superiore, soggetto ad una pressione più debole, e la Perovskite in quello più interno, dove la pressione è maggiore.

Il mantello superiore è composto da:



- Olivina ( $[Mg_{1-x}, Fe_x]_2SiO_4$ ) $^\alpha$ : è un nesosilicato caratterizzata da tetraedri  $SiO_4$  isolati e fonde a temperature molto elevate;
- Wadsleyite ( $[Mg_{1-x}, Fe_x]_2SiO_4$ ) $^\beta$ : scoperto nel 1966, è un minerale polimorfo (ovvero può presentarsi in forme cristalline differenti), facente parte della famiglia dell'Olivina;
- Ringwoodite ( $[Mg_{1-x}, Fe_x]_2SiO_4$ ) $^\gamma$ : è il minerale scoperto più recentemente dei tre (1969), fa parte del gruppo dell'Olivina.

Il mantello inferiore è invece composto da:

- Perovskite ( $[Mg_{1-x}, Fe_x]_2SiO_3$ ): ad una pressione di circa 22 Gpa, l'Olivina presente nel mantello non è più stabile e collassa, assumendo una struttura reticolare più densa, struttura della Perovskite;
- Post-Perovskite ( $[Mg_{1-x}, Fe_x]_2SiO_3$ ): si trova a profondità e pressioni maggiori, rispetto alla Perovskite;
- ferromagnesite ( $[Mg_{1-x}, Fe_x]_2O_3$ ).

Infine, arrivando allo strato più interno, si trova il Nucleo del pianeta. Questo è composto da ferro (Fe) e, se la curva della temperatura del pianeta, interseca la curva di fusione del ferro, si possono trovare, un Nucleo solido (interno) ed un Nucleo liquido (esterno).

lo spessore delle regioni di  $H_2O$ , mantello e Nucleo dipendono dal rapporto tra ghiaccio e massa, IMF (ice mass fraction), e dal rapporto tra Nucleo ferroso e massa, CMF (core mass fraction); questi dati sono assunti per ogni pianeta.

A titolo di esempio, come pianeta roccioso, la Terra ha un IMF trascurabile ( $IMF = 0,02\% - 0,1\%$ ) ed un CMF che è pari ad un terzo della propria massa ( $CMF = 32,59\%$ ). Il profilo della temperatura è modellizzato dopo quello della Terra, così da avere un dato base di partenza e, all'interno di ogni regione, il gradiente della temperatura è adiabatico (varia molto lentamente) e viene scambiato calore attraverso gli strati legati, attraverso il mantello superiore ed inferiore. A differenza del mantello, i gusci di  $H_2O$  ed il Nucleo di Ferro, vengono invece trascurati, a causa della loro bassa viscosità, la quale impedisce lo sviluppo degli strati, a causa dello spessore dei loro confini.

La temperatura della superficie di un pianeta extrasolare, viene presa pari a  $T = 550K$ ; questo valore è stato deciso, dopo aver rivelato e studiato il pianeta extrasolare GJ876d (Gliese 876d), il quale ha una temperatura superficiale compresa tra i 430 k ed i 650 k [5].

Attualmente, i modelli usati, non si sono evoluti nel tempo; questi corrispondono a pianeti che, come per la nostra Terra, hanno dapprima subito una differenziazione planetaria, ovvero, durante la loro formazione, i materiali più pesanti come Ferro e Nichel sono caduti verso l'interno del pianeta, a formare il nucleo interno (solido) ed il nucleo esterno (liquido e dove troviamo la maggior parte del Nichel), mentre i materiali più leggeri (Olivina e silicati), a formare il mantello, sono venuti in superficie, per poi raggiungere uno stato di equilibrio.

Con questo modello di partenza, si è in grado di calcolare il raggio totale di un pianeta, dati la sua massa e la sua composizione (e questo è quello che si vedrà nei risultati della ricerca, al paragrafo 2.2 dell'elaborato). Poiché i pianeti cercati, sono pianeti rocciosi, quindi ragionevolmente di composizione simile a quella terrestre, si possono fare assunzioni sensate sulla composizione dei pianeti extrasolari che saranno oggetto di studio.

Ricapitolando quindi questo modello, base per il nostro studio, partendo dall'interno si avrà, come per la Terra:

- Nucleo: composto principalmente da Ferro. Per quanto riguarda il Nucleo liquido, esso è composto da leghe metalliche leggere, ma poichè non si conosce l'esatta composizione di queste leghe, il modello di riferimento avrà un Nucleo di ferro puro; il fatto che ci siano queste leghe leggere e non solo ferro, non fa altro che ingrandire il raggio di poche centinaia di chilometri;
- Mantello: I minerali dominanti sono i silicati, con una piccola parte di ferro al loro interno (circa il 10%);
- Regione d'acqua: composta dalle due fasi del ghiaccio, Ghiaccio VII e Ghiaccio X. Se inoltre, il pianeta ha una temperatura bassa, si può trovare anche uno strato di Ghiaccio I, sopra gli oceani d'acqua. Questo strato è sottile a causa dell'instabilità del Ghiaccio I. Tenere in considerazione anche questo strato, ci permette di considerare i risultati dello studio che vado a presentare, adeguati anche per i pianeti, composti da ghiaccio, a bassa temperatura, come ad esempio Ganimede, Europa e Callisto. Per i pianeti invece, vicini alla loro stella madre, la temperatura della superficie è compresa tra  $T = 500K$  e  $T = 1500K$ , quindi si trova ghiaccio VII ad alta pressione, formato da acqua che potrebbe trovarsi anche in forma liquida, se la temperatura superficiale è sufficientemente alta (come mostrato nel diagramma della figura 1.1). Se però, temperatura e pressione della superficie, raggiungono e superano i valori del punto critico ( $T_{crit} = 647K$  e  $P_{crit} = 22,064MPa$ ), la struttura del pianeta oceanico varierà gradualmente da una fase di vapore, ad una fase di ghiaccio VII, in profondità [3].

## 1.2 Equazioni di stato dei solidi

In questo paragrafo verranno esposte le equazioni di stato dei solidi (EOS); in particolar modo verranno trattate quelle definite universali, dando una spiegazione di come vengono ricavate e del perchè è utile conoscerle, poichè essere costituiscono i calcoli del modello base dello studio di D. Valencia [6].

Le equazioni di stato dei solidi sono relazioni tra pressione  $P$ , volume  $V$  e temperatura  $T$  e dipendono dalla natura delle interazioni tra gli atomi. Queste, non solo ci forniscono un test delle teorie dello stato solido (per mezzo degli esperimenti, è possibile vedere quanto la teoria si avvicini alla pratica), ma ci permettono di determinare le proprietà termodinamiche della materia.

Nel caso dei solidi, le teorie più diffuse sono due:

- le equazioni di Birch-Murnaghan;
- le equazioni universali (o di Vinet).

Le equazioni di stato di Birch-Murnaghan, mettono in relazione il Volume di un corpo, con la pressione alla quale esso è soggetto. Queste equazioni, ci permettono di descrivere le relazioni tra  $P$ ,  $V$ ,  $T$ , per un'ampia varietà di solidi.

Il secondo approccio, ovvero le equazioni universali, è basato sulle differenze energetiche delle varie classi di solidi. Ciò vuol dire che, ad esempio, la EOS degli alcali alogenuri è descritta dal potenziale di Born-Mayer, mentre quella dei solidi composti da gas rari è modellizzata dal potenziale di Buckingham. Conseguentemente, questo modello di equazioni ha portato ad una moltitudine di forme funzionali più o meno complicate.

La forma di queste equazioni universali non è assunta a priori, ma viene estrapolata dall'analisi

energetica dei solidi in esame. Essa è determinata tracciando le isoterme sperimentali, in un modo semplice, senza appoggiarsi ad alcun modello precedente; alternatively, essa può essere determinata derivando le relazioni universali dell'energia. Per la trattazione delle EOS universali, si procederà con vari steps: si ricaveranno le EOS universali per i metalli a  $T = 0K$ , si amplierà la descrizione alle altre classi di solidi con  $T \neq 0K$ , si mostreranno i test di verifica dell'universalità di queste equazioni ed infine si darà, in conclusione, il perchè queste EOS convengano, rispetto alle equazioni di Birch-Murnaghan.

### 1.2.1 EOS universali per i metalli, a $T = 0K$ e successivo ampliamento a tutti solidi con $T \neq 0K$

L'equazione di stato, isoterma, per i metalli, ha una forma semplice ed universale; questo risultato deriva dal fatto che, per sistemi metallici, la relazione tra energia di legame a  $T = 0K$  e distanza degli atomi, può essere descritta con buona accuratezza come:

$$E(a) = \Delta E E^*(a^*) \quad (1.1)$$

con  $E(a)$  energia di legame per atomo,  $\Delta E$  scala dell'energia,  $a$  misura la separazione tra due atomi e  $a^*$  è la scala della separazione e si ricava da:

$$a^* = (a - a_0)/l \quad (1.2)$$

dove  $a_0$  è la distanza di equilibrio tra i due atomi ed  $l$  è la lunghezza scala.

Considerando i metalli,  $\Delta E$  può essere definita come energia di legame per atomo, a  $P = 0$ , e  $a^*$  può quindi essere definita come:

$$a^* = (r_{WS} - r_{WSE})/l \quad (1.3)$$

Simile all'equazione (1.3), in questa  $a$  viene rinominata  $r_{WS}$  e  $a_0$  con  $r_{WSE}$ .  $r_{WS}$  è il raggio medio di Wigner-Seitz e si ricava da  $V = 4\pi r_{WS}^3$ , con  $V$  volume specifico per atomo;  $r_{WSE}$  è il valore a  $P = 0$  di  $r_{WS}$ .

La lunghezza scala  $l$  è definita:

$$l = [\Delta E / (d^2 E / da^2)_0]^{1/2} \quad (1.4)$$

che può essere riscritta nel seguente modo:

$$l = [\Delta E / 12\pi r_{WSE} B_0]^{1/2} \quad (1.5)$$

dove  $B_0$  è il modulo di compressibilità.

Il modulo di compressibilità, definito sempre maggiore di 0 o modulo di massa (in inglese Bulk modul) di una sostanza è l'aumento della densità provocato da una compressione. È definito secondo la relazione:

$$B_0 = \rho \frac{\partial P}{\partial \rho} \quad (1.6)$$

con  $P$  pressione e  $\rho$  densità della sostanze; esso rappresenta il grado di interazione tra le molecole. Se le molecole sono poco legate tra loro (sostanza volatili), i materiali si comprimono facilmente (alto coefficiente di comprimibilità); se invece le molecole sono molto legate, il materiale sarà più rigido ed il coefficiente di compressibilità sarà basso.

Si può descrivere meglio l'equazione (1.6), sottolineando che in base alla trasformazione in

atto, se trasformazione isoterma o adiabatica, il modulo di compressibilità, dipenderà rispettivamente dalla temperatura  $T$  o dall'entropia del corpo  $S$ . Tale equazione, nei due casi si può quindi scrivere:

$$B_0 = \rho \left( \frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_T \quad (1.7)$$

$$B_0 = \rho \left( \frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_S \quad (1.8)$$

A  $T = 0K$ , le curve dei metalli, in un diagramma  $P, V$ , vengono calcolate a partire dalle equazioni (1.1) e (1.3) e confrontate con gli esperimenti, ottenendo un buon accordo tra teoria e dati.

Quello che si deve dimostrare è che la forma della curva, sia la stessa per tutti i metalli; prima di tutto, si ricorda che a  $T = 0K$

$$P = - \partial E / \partial V \quad (1.9)$$

ed usando la (1.1) e la (1.5), si ottiene:

$$P = - (\Delta E / 4\pi r_{WSE} B_0) E^{*'}(a^*). \quad (1.10)$$

Poichè  $E^*$  è un'energia scalata,  $E^{*'}$ , che ne è la derivata, è una forza scalata. Inoltre, siccome queste equazioni contengono un termine di elasticità (compressibilità), ci si aspetta, dalla legge di Hooke, che  $E^{*'}$  sia proporzionale a  $a^*$  per  $a^*$  piccoli. Di conseguenza si può allora riscrivere  $E^{*'}$  tramite un prodotto tra  $a^*$  ed un fattore di deviazione dalla linearità della forza. Allora

$$E^{*'}(a^*) = a^* G^*(a^*) \quad (1.11)$$

dove  $G^*(a^*)$  è questa nuova funzione universale, che descrive la deviazione dalla linearità (e quindi dalla proporzionalità) nell'espressione della forza universale.

Si può inoltre, scrivere esplicitamente in  $P$  e  $V$  questa nuova funzione, partendo dalle equazioni (1.5), (1.10), (1.11), ottenendo:

$$G^*(a^*) = - \frac{(V/V_0)^{2/3} P(V)}{3B_0[1 - (V/V_0)^{1/3}]} \quad (1.12)$$

Per convenienza, si può ricavare una nuova funzione  $H(x)$  definita come

$$H(x) = - B_0 G^*(a^*) \quad (1.13)$$

e scrivere  $(V/V_0)^{1/3} = x$ . Così facendo, l'equazione (1.12) può essere riscritta nel seguente modo:

$$H(x) = \frac{x^2 P(x)}{3(1-x)}. \quad (1.14)$$

Questa scrittura permette di notare che questa equazione di stato è effettivamente universale per i metalli, in quanto per ogni metallo, la curva, in un grafico  $H(x), x$  ha sempre la medesima forma. Per poter determinare la forma della curva bisogna usare una approssimazione per  $E^*$ , accurata per i metalli:

$$E^*(a^*) = (1 + a^*) e^{a^*}. \quad (1.15)$$

Derivando ora  $E^*(a^*)$ , dall'equazione (1.15) si ottiene  $G^*(a^*) = - e^{-a^*}$ , e calcolando ora il logaritmo naturale di  $H(x)$

$$\ln H(x) \simeq \ln B_0 + \eta(1-x), \quad (1.16)$$

con  $\eta = \frac{r_{WSE}}{l}$  costante.

Quest'ultima equazione (1.16) mostra che il grafico con  $\ln H(x)$  sull'asse  $y$  e  $1 - x$  sull'asse  $x$  è circa lineare e la retta avrà come coefficiente angolare  $\eta$  e come intercetta  $\ln B_0$ . In conclusione, si può ora approssimare la curva  $P, V$  con l'equazione

$$P = \frac{3B_0(1-x)}{x^2} e^{\eta(1-x)} \quad (1.17)$$

e denotando  $B'_0 = [\partial B / \partial P]_{T, P=0}$  si può riscrivere  $\eta$  in funzione di  $B'_0$ , allora

$$\eta = \frac{3}{2}(B'_0 - 1). \quad (1.18)$$

Ora che è stata descritta la situazione per i metalli, a  $T = 0K$ , si deve generalizzare il risultato a tutti i solidi e a  $T \neq 0K$ . Ad una temperatura diversa da zero, si può utilizzare un'equazione analoga alla (1.9), sostituendo però all'energia  $E$ , l'energia libera di Helmholtz  $F$ , che dipende da  $T$  e  $V$ :

$$P = - [\partial F(T, V) / \partial V]_T. \quad (1.19)$$

Questo passaggio è dovuto al fatto che si sia in un caso di trasformazione isoterma (quindi a temperatura costante); l'energia libera di Helmholtz, infatti, per definizione è:

$$dF = -S dT - [P \partial V] \quad (1.20)$$

dove  $S$  è l'entropia. Poichè siamo nel caso di temperatura costante, il  $dT = 0$ , di conseguenza  $dF = - [P \partial V]$ , dal quale, calcoland la formula inversa, si arriva ad ottenere la (1.19).

Da (1.19), si ottiene poi:

$$P = - dE(V)/dV + P^*(T, V) \quad (1.21)$$

con  $P^*$  definita come pressione termica e per alte temperature, questa può essere trascurata. Fino a che  $p^*$  non è trascurabile, il suo effetto è quello di traslare semplicemente il punto di equilibrio; ciò permette di dire quindi che la forma della curva, per isoterme a  $T = 0K$  e a  $T \neq 0K$  è identica, a meno di traslazioni.

### 1.2.2 Test di Universalità

In questo sottoparagrafo si mostra l'evidenza sperimentale che l'equazione di stato dei solidi, può essere descritta in termini di una singola funzione universale. Già nel sottoparagrafo precedente si è mostrato che le curve delle isoterme sperimentali, nel diagramma  $\ln H(x)$ ,  $x$ , seguono una funzione lineare con grande accuratezza. I test sperimentali fatti riguardano diverse tipologie di solidi:

- $H_2$  (Idrogeno) e  $D_2$  (Deuterio);
- metalli alcalini;
- elementi metallici e leghe;
- cristalli ionici;
- gas rari solidi;
- polimeri e solidi amorfi.

senza riportare lo studio di tutti i solidi analizzati, è importante soffermarsi sul fattore di confidenza (correlazione) calcolato per determinare la qualità dei dati fittati. Questo fattore, la cui equazione è

$$R = \left( \frac{\sum_{i=1}^N (y_i^{FIT} - \bar{y})^2}{\sum_{i=1}^N (y_i^{DATA} - \bar{y})^2} \right)^{1/2}. \quad (1.22)$$

In questa equazione  $y_i^{DATA}$  sono i valori plottati di  $\ln H(x)$ ,  $\bar{y}$  è la media degli  $N$  valori di  $y_i^{DATA}$ ,  $y_i^{FIT}$  sono i valori presi dalla retta fittata. Per essere sicuri che la funzione universale, interpoli bene i dati, il fattore di correlazione dell'equazione (2.1) deve avvicinarsi al valore 1. Come si può vedere dalle seguenti tabelle di dati, nelle quali riporto il solido in questione ed il fattore di confidenza,  $R > 0.999$  ad eccezione di pochi casi, per il quale comunque  $R > 0.9879$ .

<i>Materiale</i>	<i>Temperatura</i>	<i>R</i>
$H_2$	4.2 K	0.9999
$D_2$	4.2 K	0.9997

Tabella 1.1: parametro di Correlazione per  $H_2$  e  $D_2$

<i>Materiale</i>	<i>Temperatura</i>	<i>R</i>
$Li$	4.2 K	0.9999
$Li$	294 K	0.9999
$Na$	4.2 K	0.9986
$Na$	295 K	0.9879
$K$	4.2 K	0.9999
$K$	295 K	0.9999
$Rb$	4.2 K	0.9998
$Rb$	295 K	0.9999
$Cs$	4.2 K	0.9994
$Cs$	295 K	0.9997

Tabella 1.2: parametro di Correlazione per i metalli alcalini

<i>Materiale</i>	<i>Temperatura</i>	<i>R</i>
$Pt$	0 K	0.998
$Pt$	298 K	0.9997
$Mo$	0 K	0.9945
$Mo$	298 K	0.9999
$Be$	0 K	0.999
$Be$	298 K	0.9999

Tabella 1.3: parametro di Correlazione per altri elementi metallici e leghe

<i>Materiale</i>	<i>Temperatura</i>	<i>R</i>
<i>MgO</i>	0 <i>K</i>	0.9996
<i>SiC</i>	0 <i>K</i>	0.9997
<i>WC</i>	0 <i>K</i>	0.9999
<i>NaF</i>	298 <i>K</i>	0.9996
<i>LiCl</i>	298 <i>K</i>	0.9991
<i>NaCl</i>	298 <i>K</i>	0.9993
<i>NaBr</i>	298 <i>K</i>	0.9996

Tabella 1.4: parametro di Correlazione per i cristalli ionici

<i>Materiale</i>	<i>Temperatura</i>	<i>R</i>
<i>Ne</i>	4.2 <i>K</i>	0.9999
<i>Ne</i>	19.9 <i>K</i>	0.9999
<i>Kr</i>	4.2 <i>K</i>	0.99998
<i>Kr</i>	77 <i>K</i>	0.9998
<i>Ar</i>	4.2 <i>K</i>	20.99998
<i>Ar</i>	77 <i>K</i>	0.99996
<i>Xe</i>	4.2 <i>K</i>	0.99997
<i>Xe</i>	159 <i>K</i>	0.99995

Tabella 1.5: parametro di Correlazione per i gas rari solidi

<i>Materiale</i>	<i>Temperatura</i>	<i>R</i>
Polistirene	298 <i>K</i>	0.9977
Silicone	298 <i>K</i>	0.9988
Vetro	298 <i>K</i>	0.9989
Nylon	298 <i>K</i>	0.9994
Gomma	298 <i>K</i>	0.9988
Resina	298 <i>K</i>	0.991

Tabella 1.6: parametro di Correlazione per i polimeri ed i solidi amorfi

### 1.2.3 Confronto tra le EOS di Birch-Murnaghan e le EOS Universali e conclusione

Le equazioni di Birch-Murnaghan, sono più accurate a basse pressioni, mentre con funzioni non lineari, quindi troncando le serie di potenze di  $P$ , dall'equazione (1.17), le equazioni universali fittano meglio i dati; inoltre, per ogni classe di solidi, esiste una funzione universale, racchiudendo tutti i calcoli nell'unica equazione (1.17).

Per concludere, poichè nello studio dei pianeti, eseguito da D. Valencia [6], le pressioni in gioco sono elevate, le EOS utilizzate sono quelle universali (o di Vinet [1]).

### 1.3 Diagrammi ternari

In questo paragrafo saranno spiegati brevemente cosa sono i diagrammi ternari e perchè questi vengano usati nello studio della composizione interna delle Super-Terre.

I diagrammi ternari (o diagrammi triangolari), sono dei grafici con tre assi, formanti un triangolo equilatero. Questi vengono usati quando ho tre elementi che compongono una sostanza o un solido, per i quali la somma totale, in percentuale, è 100%. Nel caso dello studio della composizione di un pianeta, i tre contribuenti sono, come elencato per paragrafo 1.1,  $H_2O$ , mantello e Nucleo.

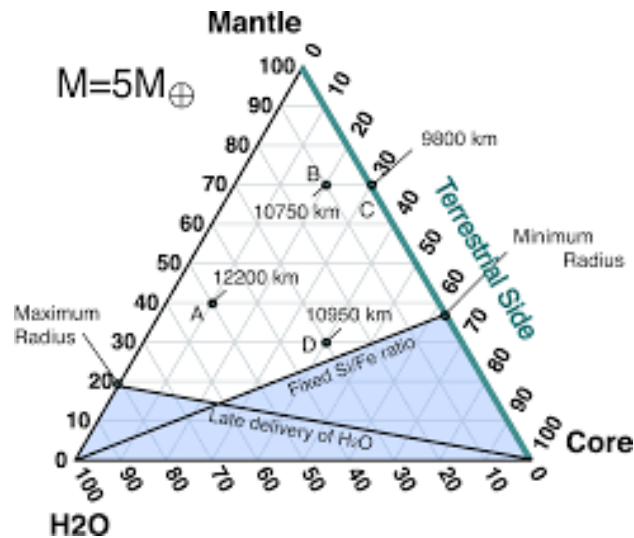


Figura 1.2: Esempio di un diagramma ternario

Prendendo come riferimento la figura 1.2, si può vedere che ogni vertice corrisponde al 100% di un particolare componente (in questo caso, il vertice in alto rappresenta il 100% della componente mantello, quello in basso a sinistra il 100% di  $H_2O$  e quello in basso a destra il 100% di Nucleo), mentre i lati, corrispondono agli assi del sistema. La percentuale rappresentata sugli assi, corrisponde alle percentuali di  $H_2O$ , mantello e Nucleo, rispetto alla massa del pianeta; riprendendo quindi il paragrafo 1.1, lungo i tre assi sono rappresentati IMF (Ice Mass Fraction), MMF (Mantle Mass Fraction) e CMF (Core Mass Fraction).

I segmenti paralleli agli assi, sono quei punti per i quali una delle tre grandezze si conserva, dunque, quello che si può immaginare è un reticolo triangolare. Prendendo di riferimento il punto A, ad esempio, seguendo i segmenti paralleli agli assi, avrà  $IMF = 50\%$ ,  $MMF = 40\%$  e  $CMF = 10\%$  e la somma delle tre componenti è, come ci si aspetta, 100%.

Una caratteristica particolare dei diagrammi triangolare, usati per lo studio della composizione interna dei pianeti è di poter contare su un quarto asse, come si vedrà in figura 1.3; il quarto asse è determinato dal colore di riempimento del grafico e dalla relativa legenda.



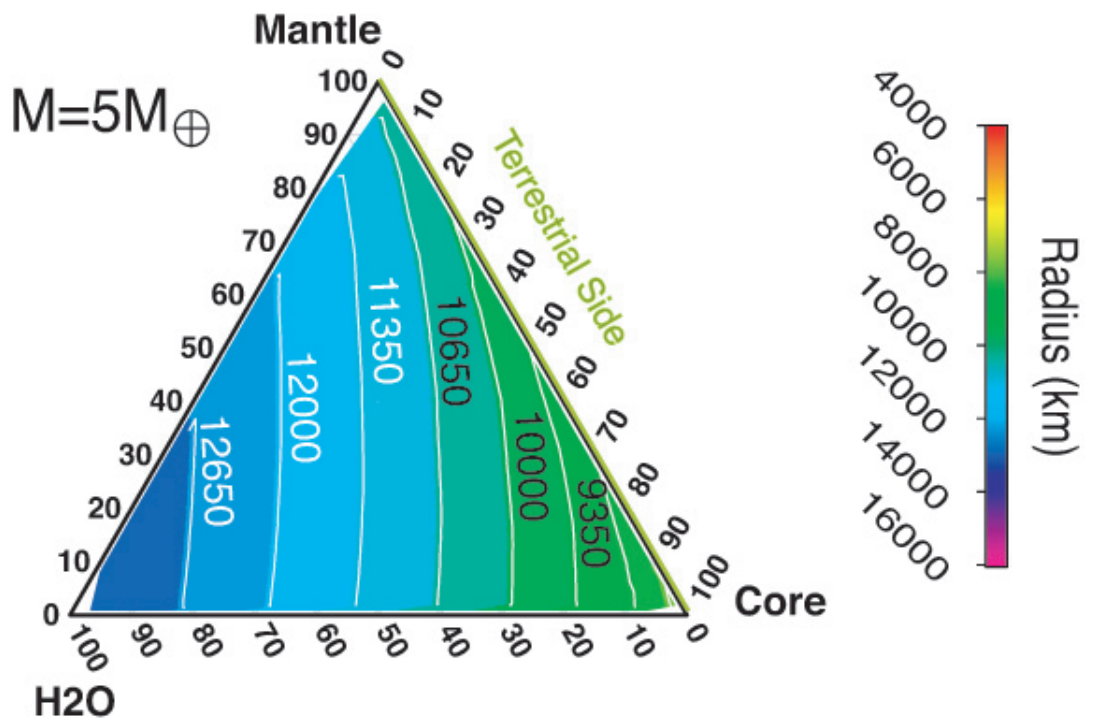


Figura 1.3: Diagramma ternario con la rappresentazione a colori

Come si può vedere, il colore rappresenta la dimensione del raggio del pianeta ( il perchè dei valori nell'immagine verrà discusso nel capitolo 2, quando si parlerà dei risultati della ricerca).

Poichè ghiaccio e acqua sono meno densi rispetto al Nucleo di ferro e quindi le molecole sono molto più distanziate tra di loro, il raggio medio di un pianeta tende ad aumentare con l'aumentare dell' IMF e con il diminuire del CMF. Le curve per le quali il raggio è costante, si chiamano curve Isoraggio.



## Capitolo 2

# Osservazioni con estrapolazione e rielaborazione dei risultati

In questo capitolo si mostra lo studio di Valencia [1] ed i risultati ottenuti. Dalle osservazioni fatte in passato e da quelle che verranno effettuate nel futuro prossimo, si arriva al calcolo della relazione che intercorre tra il raggio e la massa, per i pianeti extrasolari.

Tra le missioni, lanciate per l'osservazione e la ricerca dei pianeti extrasolari, vanno citate:

- Kepler: missione in opera dal 2009; grazie a questa si sono scoperti oltre 2700 pianeti orbitanti attorno a stelle diverse dal Sole. Per fare ciò, il telescopio Kepler è dotato di un fotometro che monitora costantemente la luminosità delle stelle. I dati sono trasmessi a terra, dove vengono analizzati in cerca di periodiche diminuzioni di luminosità causate da pianeti extrasolari che transitano di fronte alla loro stella. La missione Kepler, ormai in attività da nove anni tra non molto terminerà, lasciando campo alle missioni TESS e PLATO; [11];
- CHEOPS: acronimo di CHaracterising ExOPlanets Satellite è una missione che partirà nel 2019. A differenza di Kepler, la missione CHEOPS ha lo scopo di misurare i raggi degli esopianeti noti, permettendo così di determinarne la densità e conseguentemente, di specificare la natura del pianeta (se roccioso o oceanico) [12];
- TESS: acronimo di Transiting Exoplanet Survey Satellite è stata lanciata nel 2018. Come per la missione Kepler, il telescopio TESS che dà il nome alla missione è stato pensato per la ricerca dei pianeti extrasolari grazie all'utilizzo del metodo fotometrico del transito [13];
- PLATO: acronimo di PLANetary Transits and Oscillations of stars è una missione che prende il nome dalla sonda PLATO e la partenza prevista della missione è nel 2026. La missione, come TESS e Kepler, è quella di studiare i pianeti extrasolari, tramite il metodo del transito (quindi anche la sonda PLATO sarà dotata di un sensore fotometrico). PLATO è vista, per l'ESA, come la continuazione della missione Kepler [14].

Lo studio è stato fatto calcolando i raggi, minimo e massimo, per pianeti con una massa pari a 1, 2.5, 5, 7.5, 10  $M_{\oplus}$ . Si vedrà inoltre, tramite le curve isoraggio, presenti nei grafici ternari, che la lunghezza di un raggio, può essere ottenuta, con condizioni iniziali differenti e quindi, con percentuali differenti di ferro, silicati ed acqua e quindi avere pianeti differenti (oceanici

e rocciosi) con uguale raggio.

Nel primo capitolo si è stabilito il modello teorico, preso come riferimento da Valencia, della composizione interna che ci si aspetta da un pianeta terrestre. Questo capitolo sarà invece diviso in due sezioni:

- nel primo paragrafo si esporranno i risultati ottenuti dalle osservazioni, partendo dalle condizioni iniziali del pianeta;
- nel secondo paragrafo si prenderanno in considerazione i risultati del primo paragrafo, per ricavare la relazione tra raggio e massa, per un pianeta extrasolare.

## 2.1 Osservazione ed estrapolazione dei risultati

In questo paragrafo verranno discusse le condizioni iniziali che potrebbe avere un pianeta, legate alla sua formazione nel disco protoplanetario e successivamente, una volta raccolti in un diagramma triangolare, si analizzeranno i dati per avere un range sulla dimensione del raggio che può avere un pianeta.

### 2.1.1 Formazione planetaria

Le condizioni iniziali di un pianeta, influiscono notevolmente sulla dimensione del raggio che esso può avere; a titolo di esempio, un pianeta con una concentrazione di ferro elevata, a parità di massa, avrà un raggio minore rispetto ad un pianeta composto da una maggiore percentuale di ghiaccio ed acqua e da una percentuale minore di ferro.

Inoltre, lo studio del disco protoplanetario, permette di spiegare il perché, in riferimento alla figura 1.2, le zone colorate di azzurro, siano aree nelle quali è molto improbabile trovare un pianeta (così dicendo quindi si esclude l'esistenza di un pianeta puramente ferroso o di un pianeta puramente formato da ghiaccio ed acqua).

Un disco protoplanetario è un disco circumstellare in rotazione, ovvero un toro (un anello) di materia, principalmente polvere e gas, che ruota attorno alla stella madre, una stella giovane. Importante sottolineare, per la futura formazione dei pianeti, che un disco di formazione è più caldo all'interno, vicino alla stella e più freddo alle estremità. Essendo però prevalentemente fluido, le velocità lineari all'interno del disco sono differenti, così da creare calore per attrito viscoso. Calore che viene propagato verso l'esterno del disco; si può dunque parlare di gradiente di temperatura [9]. Con il raffreddarsi del disco e l'aggregarsi della materia (polvere e gas) per forza di gravità, si iniziano a formare i planetesimi, che poi diventano pianeti, una volta completata la loro formazione.

La formazione di un pianeta, a partire dal disco, però non è casuale, ovvero, un pianeta non può essere composta da un miscuglio disordinato di ferro, roccia ed acqua; questo per due ragioni principalmente:

1. abbondanza di materiale nel disco protoplanetario. Quali elementi e soprattutto la loro percentuale in un disco, posso favorire la formazione di pianeti principalmente rocciosi, o al contrario, ricchi di acqua e ghiaccio (oceanici).
2. differenziazione planetaria. La differenziazione planetaria è un processo di separazione degli elementi che compongono un pianeta, fino a formare i gusci descritti al capitolo 1. La separazione dei vari costituenti può essere chimica o fisica [10]:

- chimica se un elemento, di densità elevata è chimicamente più affine ad un elemento leggero e più abbondante, esso tenderà a legarsi e a stare insieme all'elemento leggero;
- fisica (o gravitazionale) quando l'elemento, sotto forza di gravità, a causa della sua densità, tende ad essere attratto verso il centro dalla sua forza peso (ovvero elementi più densi, si trovano verso il centro del pianeta, elementi meno densi, verso l'esterno).

Per minimizzare queste differenze, nella genesi dei pianeti, e quindi costruire un modello che sia il più generale possibile, si deve quindi fare due assunzioni.

La prima assunzione è che i pianeti modello abbiano avuto una differenziazione planetaria. Questa assunzione non è restrittiva poichè, tutti i pianeti terrestri e grandi satelliti, ad oggi conosciuti, hanno subito una differenziazione planetaria.

La seconda assunzione è che l'abbondanza di elementi chimici, nei vari dischi di formazione (protoplanetari) sia la stessa, per il sistema solare ed i sistemi vicini. Questa assunzione, che può invece sembrare restrittiva, in realtà è adeguata allo studio, poichè, nello studio delle Super-Terre, nel prossimo futuro, ci si concentra nei sistemi vicini (la missione che permette questo studio è la missione Kepler<sup>1</sup>[11]).

Fatte queste due assunzioni, i pianeti da considerarsi rocciosi, e quindi buoni candidati per lo studio di D. Valencia, si possono individuare tre possibili scenari di formazioni di un pianeta.

1. Formazione e post-differenziazione dovunque, nel disco protoplanetario. Durante la formazione gli elementi costituenti del pianeta (acqua e ghiaccio, silicati e metalli) condensano a temperature  $T_{cond}$  differenti. Successivamente al disco di formazione, con il raffreddarsi della temperatura, gli elementi refrattari (con un alto equilibrio a  $T_{con}$ ) condensano per primi. Allora si trova che i silicati siano i primi a condensare (a  $1750K > T_{con} > 1060K$ ), seguiti dai metalli (a  $1450K > T_{con} > 1050K$ ). Infine a condensare sono il ghiaccio e l'acqua, che dipendono però dalla pressione (1.1). Prendendo di riferimento il disco del sistema solare, si trova che il maggior elemento costituente è l'idrogeno ( $H$ , al 74%), seguito da Ossigeno ( $O$ , al 1,07%), ferro ( $Fe$ , allo 0,1%) ed infine da Silicio ( $Si$ ) e Magnesio ( $Mg$ ), che si trovano in egual misura. Durante la sequenza di condensazione, la pressione presente nel disco è molto bassa (dell'ordine di  $10^{-4}bar$ ), il  $Si$  condensa prima del  $Fe$ . Se il  $Fe$  rimane immiscibile, dopo la condensazione dei vari elementi, esso tende a cadere verso il centro del pianeta e a formare il nucleo di ferro del pianeta. In questo caso si avrà il rapporto tra CMF ed MMF più alto possibile (circa dello 0,6%. Questo valore è già stato visto, in figura 1.2 e che verrà poi riportata sotto; infatti, il segmento che parte dal vertice in basso a sinistra, incontra il lato obliquo destro (che rappresenta proprio il ratio CMF) nel valore 0,6<sup>2</sup>. Ogni valore  $CMF/MMF < 0,6$  è quindi plausibile per la formazione di un pianeta, secondo questo primo scenario (ogni valore più alto, invece, è altamente improbabile). In quel punto quindi, si ha il minimo raggio possibile.
2. Formazione e post-differenziazione, seguita da collisioni tra due protopianeti nella fase finale della loro formazione [8]. La collisione tra due protopianeti determina la configurazione dell'orbita, la massa e la composizione di questi pianeti. A seguito della

<sup>1</sup> La missione Kepler ha lo scopo di ricercare pianeti simili alla Terra (le Super-Terre), nei sistemi solari vicini al nostro.

<sup>2</sup> in realtà il lato obliquo rappresenterebbe il CMF, poichè però, su quel lato,  $IMF = 0$ , allora esso rappresenta anche il rapporto tra CMF ed MMF

collisione, gli stati possibili sono quattro: un nucleo di pure leghe metalliche, nucleo e mantello, mantello puro, mantello e oceani d'acqua. Tutti i processi che inducono gli elementi leggeri a scappare dal pianeta, a causa del vento solare esauriscono gli elementi volatili, come acqua, ghiaccio e gas. Questa condizione può permettere ai silicati di formare pianeti terrestri (pianeti composti da nucleo, o da nucleo e mantello).

Al contrario, tutti i processi che coinvolgono gli elementi pesanti (come gli impatti distruttivi, che impediscono l'accrescimento del pianeta), esauriscono ferro e silicati, lasciando così la possibilità di formazione dei cosiddetti pianeti leggeri (pianeti formati da un mantello o da mantello e oceani d'acqua).

3. Scenario 1 o 2 seguito da un trasporto d'acqua; questo scenario ha due possibili stati iniziali: il primo, dove il pianeta ha un nucleo, un mantello ed oceani d'acqua, il secondo dove i pianeti avranno solo un mantello ed oceani d'acqua.

Nello studio dei diagrammi ternari, viene lecito domandarsi come sia possibile avere pianeti con un grande nucleo di ferro ed un grande strato di  $H_2O$  (in figura 1.2, sono i pianeti che tendono a stare lungo la base del triangolo, dove  $MMF = 0$ ).

Per avere questo stato iniziale, si deve considerare un protopianeta di puro ferro che acquista acqua dal passaggio delle comete. Una cometa è un corpo celeste relativamente piccolo, composto prevalentemente da sostanze volatili ghiacciate, come biossido di carbonio, metano e acqua, mescolate con aggregati di polvere e vari minerali; la sublimazione delle sostanze volatili quando la cometa è in prossimità del Sole, causa la formazione della chioma e della coda. Il pianeta, dopo aver preso l'acqua e sostanze volatili dalla cometa, infine cattura anche gli elementi rocciosi, sottoforma di polvere, quali Si, Fe, Mg, (tutti in egual proporzioni). Si deve considerare che la proporzione di questi elementi deve essere la stessa che si presume avesse il disco circumstellare del sistema solare.

Il disco protoplanetario del sistema solare non è noto e per questo si fa riferimento al MMSN (Minimum Mass Solar Nebula), ovvero al disco protoplanetario che contiene la minima quantità di elementi solidi per dare origine al sistema solare, come lo si conosce oggi. L'MMSN viene stimato a partire dallo studio delle composizioni chimiche e dalla massa dei pianeti del sistema solare [7] e le ultime stime, rivelano che l'MMSN doveva avere una massa di circa 100 volte quella di Giove [15].

Le due definizioni più conosciute dell'MMSN sono quella di Weidenschilling (1977) e di Hayashi (1981) e l'assunzione principale è che i pianeti del sistema solare, si siano formati dove ora stanno orbitando (di conseguenza l'MMSN, non prevede la migrazione planetaria, poichè la Minimum Mass Solar Nebula si basa sull'assunzione che i pianeti si siano formati con gli elementi presenti localmente intorno a loro e alle orbite attuali) [7].

La MMSN, si presume fosse composta principalmente da condrite carbonifera (o condrite CI)<sup>3</sup>, che ha un rapporto tra  $h_2O/Si$  pari al 22-23%.

Quindi, se si considera un pianeta composto da un nucleo puro di ferro, risultato di questo tipo di formazione, questo avrà almeno un  $IMF/MMF = 23\%$ . Di conseguenza, riprendendo l'immagine 1.2, sull'asse corrispondente al  $MMF$ , si trova che il raggio massimo per un pianeta, si avrà per un  $IMF/MMF = 23\%$ . Al di sotto di questo valore, è molto improbabile che esista un pianeta .

<sup>3</sup> Le meteore, sono composte della stessa sostanza dei planetesimi, e sono ricche di condrite, di conseguenza, si può stimare che anche la Minimum Mass Solar Nebula fosse ricca di questo minerale

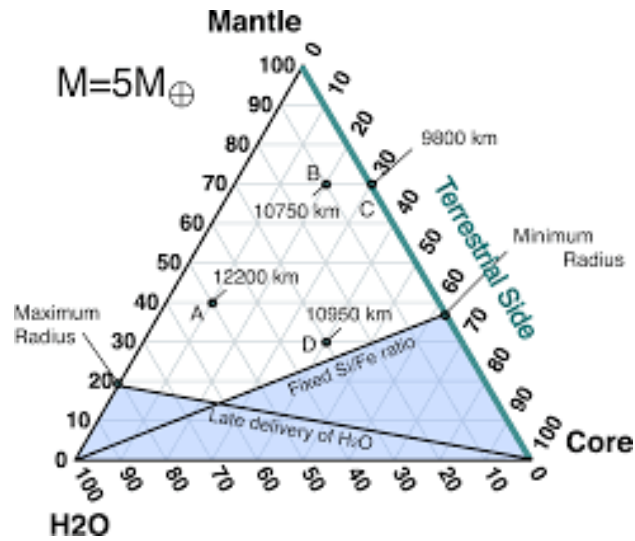


Figura 2.1: Le zone d'ombra (in azzurro), sono le regioni nelle quali è molto improbabile trovare pianeti

### 2.1.2 Raggio massimo per pianeti terrestri e curve isoraggio

Qui sotto vengono ora riportati i diagrammi triangolari, relativi al raggio che può avere un pianeta di massa pari a 1, 2.5, 5, 7.5, 10  $M_{\oplus}$ .

Analizzando i grafici sottostanti, si può notare che non tutte le curve isoraggio, intersecano l'asse che identifica i pianeti terrestri (in 2.1 chiamato Terrestrial Side), di conseguenza, il raggio massimo per un pianeta terrestre è identificato dalla curva isoraggio, con isoraggio maggiore, che interseca l'asse dei pianeti terrestri. Si può quindi vedere che, in relazione alla massa di un pianeta, il raggio massimo è:

$M/M_{\oplus}$	$R$
1	6600Km
2,5	8600Km
5	10400Km
7,5	11600Km
10	12200Km

Tabella 2.1: tabella riassuntiva con massa e raggio massimo dei pianeti terrestri, o Super-Terre.

Dai grafici sottostanti si vede anche che al crescere della massa del pianeta, le isocurve tendono ad essere significativamente meno separate, di conseguenza, per un pianeta con una massa piccola, risulta meno complicato identificare la composizione del pianeta, dato il raggio massimo.

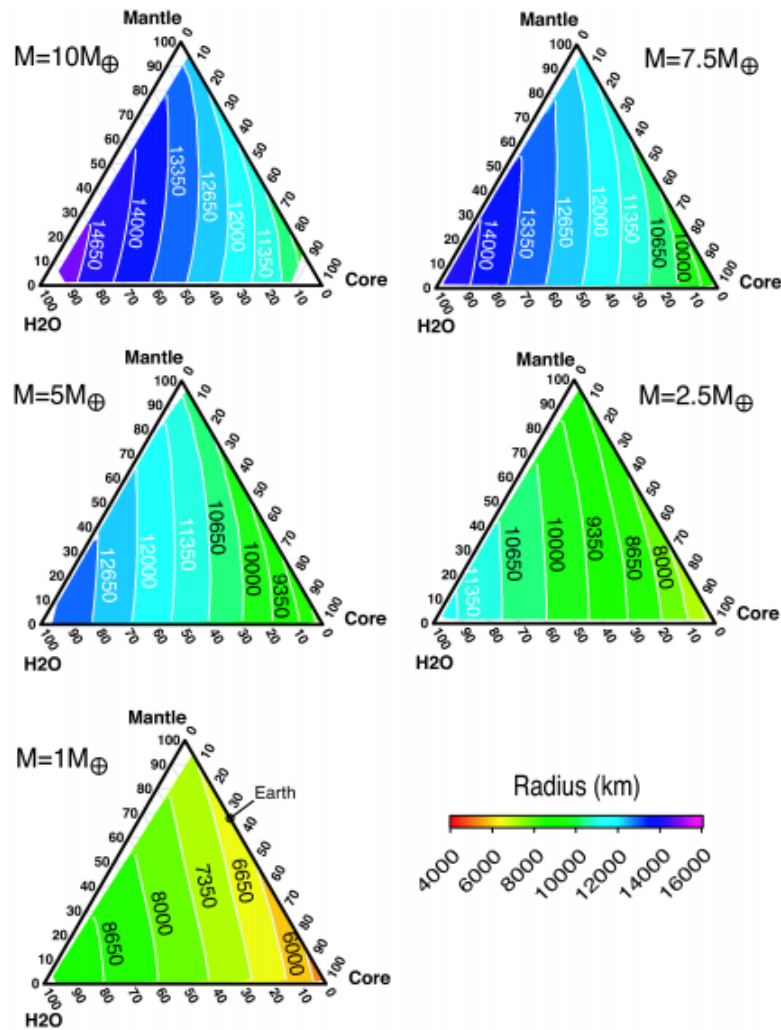


Figura 2.2: Diagrammi ternari per le diverse masse dei pianeti.

Le curve con raggio costante sono meno sensibili aumentando la MMF; lo si può vedere, notando che le curve tendono ad essere linee quasi verticali.

Lo si può vedere bene nel diagramma dei pianeti con una  $M = 5 M_{\oplus}$ , per i quali, il raggio pari a 11300 Km rimane costante per un MMF compreso tra 0% e 85%.

Per un pianeta con  $M = 1 M_{\oplus}$ , le curve isoradio risultano inclinate perchè dipendono leggermente di più dalla massa del mantello e risultano meno sensibili all'aumentare della massa del nucleo di ferro e più sensibili al contenuto di acqua del pianeta. Come conseguenza di questa dipendenza da elementi poco densi (acqua) ed elementi ad alta densità (ferro), si ha che il raggio cambia rapidamente in base alle diverse proporzioni tra CMF ed IMF che un pianeta può avere.

Nel caso di un pianeta con massa  $M = 10 M_{\oplus}$ , pianeta per il quale la pressione interna è molto alta, le isocurve mostrano che pianeti molto ricchi di acqua ( $H_2O > 70\%$ ), il raggio dipende fortemente dalla quantità di CMF e diventano meno indipendenti quando la composizione interna del pianeta ha un alto contenuto di ferro.



In generale, il trend è che le curve isoraggio non dipendano dalla percentuale di  $MMF$ , ma che dipendano quasi esclusivamente dalle percentuali di IMF (elementi leggeri) e CMF (elementi pesanti).

## 2.2 Relazione tra raggio e massa

In questo paragrafo, con i dati raccolti dai diagrammi del paragrafo precedente, si stimerà la relazione tra il raggio e la massa, per i pianeti extrasolari. Nel grafico, allegato qui sotto, si può notare come la relazione tra raggio e massa, sia effettivamente una relazione di potenza, ovvero al crescere della massa, il raggio tende a crescere, seppure lentamente, non linearmente, ma secondo una legge di potenza. Il grafico utilizzato per l'analisi dei dati è il seguente:

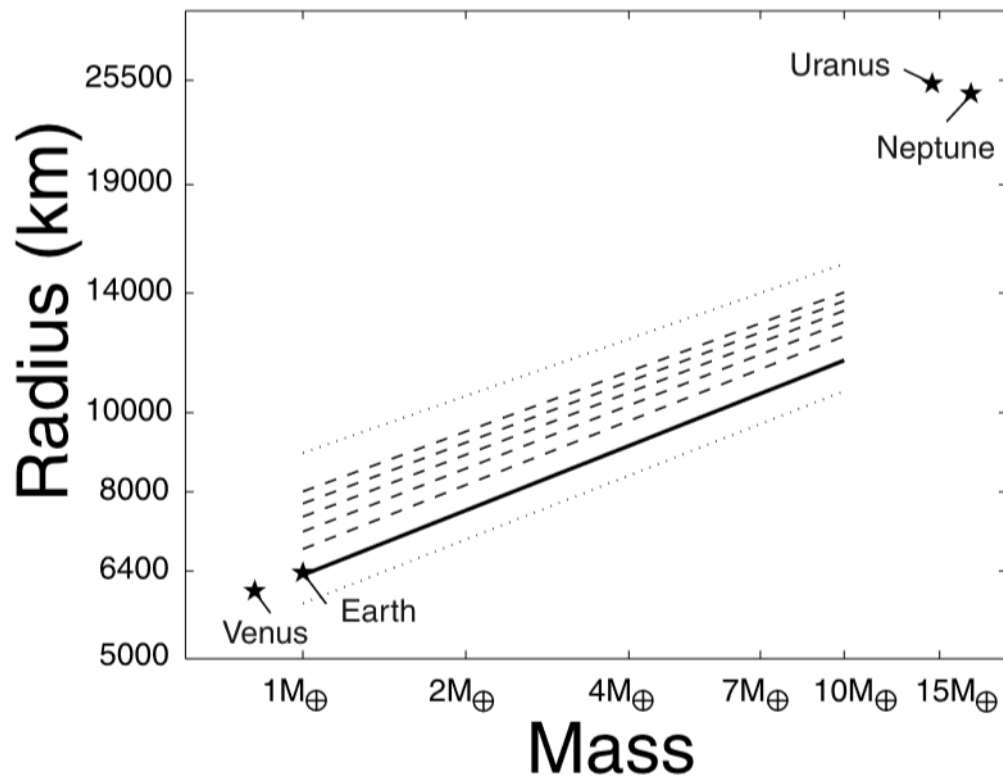


Figura 2.3: La figura riporta la relazione tra massa e raggio, per pianeti oceanici e rocciosi.

Dalla figura (2.3) emerge che i pianeti terrestri, quelli cercati, stanno lungo la retta continua, passante per la Terra e Venere. Le linee tratteggiate invece raffigurano la relazione raggio-massa per i pianeti oceanici (ricchi d'acqua) ed andando ad aumentare il raggio, questi avranno una percentuale di  $h_2O$  che cresce dal 10% al 50%.

Nella figura (2.3) Urano e Nettuno, sono molto al di fuori della relazione tra  $R$  e  $M$ ; ciò è dovuto alla loro composizione interna (ed esterna).

La prima causa di questa "irregolarità" è legata alla grande massa di questi due pianeti; poiché

la massa di questi supera le  $10M_{\oplus}$ , essi contengono al loro interno una percentuale di elio (He) ed Idrogeno (H), non esaurita durante la formazione planetaria.

La seconda causa è legata di più alla composizione interna di questi due pianeti; essi non sono considerati *giganti gassosi* come Giove e Saturno, poichè la quantità di *He* ed *H* è limitata ( $< 20\%$ , contro il  $> 90\%$  di Giove e Saturno), ma vengono considerati *giganti ghiacciati*. L'appellativo viene dato poichè rispetto alla massa totale, la massa del nucleo interno (composto da Ferro, Nichel e Silicio) è molto piccolo, in relazione alla massa del mantello esterno; inoltre, il mantello esterno è composto principalmente da acqua, metano ed ammoniaca, quindi i cosiddetti ghiacci.

La combinazione di queste due cause, fa sì che, preso un diagramma ternario (2.1), il loro posizionamento in esso si avvicini al lato obliquo, del diagramma, per il quale il  $IMF \sim 100\%$ . Come è stato detto nel paragrafo 1.3, relativo ai diagrammi ternari, in quella zona ci si aspetta pianeti con un rapporto tra  $R$  ed  $M$  molto elevato (poichè pianeti composti prevalentemente da materiali leggeri).

Come detto sopra, la relazione tra raggio e massa è una relazione di potenza, quindi, ci si aspetta un'equazione del tipo:

$$R = \alpha R_{\oplus} (M/M_{\oplus})^{\beta} \quad (2.1)$$

dove  $R$  e  $M$  sono, rispettivamente, raggio e massa del pianeta in osservazione,  $R_{\oplus}$  e  $M_{\oplus}$  sono due costanti e corrispondono al raggio terrestre ( $\sim 6300Km$ ) e alla massa terrestre ( $\sim 6 \times 10^{24}Kg$ ) ed  $\alpha$  e  $\beta$  sono due costanti, determinate a partire dall'analisi del grafico in figura 2.3.  $\alpha$  e  $\beta$  risultano essere  $\alpha = 1$  e  $\beta \sim 0,27$ .

Da un'analisi più approfondita, tenendo presente che con pressioni elevate, la EOS che meglio trova accorto con i dati, è quella universale o di Vinet, e che recentemente è stato scoperto un nuovo silicato (la postperovskite <sup>4</sup>) che, in accordo con i modelli studiati, compone gran parte dei mantelli inferiori delle Super-Terre, il valore di  $\beta$  è calcolabile ed è  $\beta = 0,262$ .

Poichè però è possibile ottenere la stessa lunghezza del raggio, con composizioni interne differenti, in particolar modo, il raggio è tanto più grande, quanto più è alta la percentuale di acqua nel pianeta; è quindi possibile ottenere una relazione tra raggio e massa, che tiene conto dell' $IMF$ . La relazione diventa dunque:

$$R = (1 + 0,56 IMF) R_{\oplus} (M/M_{\oplus})^{0,262(1 - 0,138 IMF)} \quad (2.2)$$

Questo modo di scrivere la relazione permette di ricavare una stima del raggio del pianeta osservato, conoscendone solo massa e percentuale di massa di  $H_2O$  del pianeta. Nella prossima tabella, sono mostrati i coefficienti  $\alpha$  e  $\beta$ , in relazione al parametro  $IMF$  del pianeta:

<sup>4</sup> La postperovskite è un silicato che si trova ad alta pressione. Scoperto nel mantello inferiore della Terra, è un silicato molto stabile a pressioni elevate. Rispetto alla Perovskite, la Postperovskite (o ppv) ha un contenuto maggiore di ferro, nella propria struttura chimica, rendendola più densa.

$H_2O(\%)$	$\alpha$	$\beta$
0	1	0,262
10	1,076	0,260
20	1,130	0,257
30	1,178	0,252
40	1,223	0,248
50	1,265	0,244

Tabella 2.2: Valore delle costanti  $\alpha$  e  $\beta$ , in relazione alla percentuale di acqua contenuta nel pianeta. In questa tabella si suppone che il rapporto tra  $Fe/Si$  sia simile a quello della terra.

Il coefficiente  $\alpha$  mostra quale dovrebbe essere il raggio teorico della Terra, a varie percentuali di acqua.



## Capitolo 3

# Conclusioni

Nello studio è stata presentata la relazione che c'è tra la massa  $M$  ed il raggio  $R$  per i pianeti extrasolari, dove operano le missioni Kepler, CHEOPS, TESS, PLATO (dal 2016), in un range di pianeti con una massa compresa tra  $1 M_{\oplus}$  e  $10 M_{\oplus}$ .

La composizione interna di un pianeta può essere descritta bene con tre elementi: ferro e in alcuni casi Nichel (nucleo), Silicati (mantello) ed acqua. Il raggio di un pianeta dipende dalla percentuale di ciascun elemento, all'interno del pianeta. I diagrammi che meglio descrivono questi rapporti, sono i diagrammi triangolari; Tanto più è alta la percentuale di acqua (e materiali volatili), tanto più, a parità di massa, il raggio di un pianeta sarà grande (ad esempio, se la Terra avesse almeno un  $IMF = 50\%$ , avrebbe un raggio più grande del 26%). Un'altra caratteristica del raggio di un pianeta è la variabilità del suo raggio che dipende quasi esclusivamente dalle concentrazioni di acqua e ferro, mentre la quantità di silicati presenti, non influisce sulla dimensione del raggio. Questo fattore è estrapolato dalle osservazioni, tramite la rappresentazione delle isocurve (o curve isoraggio).

Lo studio esposto, inoltre, permette di calcolare il raggio critico, ovvero la misura del raggio per la quale un pianeta è roccioso (se il suo raggio è minore del raggio critico) od oceanico (se il suo raggio è maggiore del raggio critico); per essere un pianeta di tipo oceanico, la percentuale di acqua contenuta, deve essere maggiore del 10%. Il risultato principale dello studio è che i calcoli fatti sul modello teorico iniziale, hanno una soglia di precisione di  $R$  ed  $M$ , che permette di stimare la composizione interna di un pianeta extrasolare, nota la temperatura di questi, infatti, a temperature interne differenti, gli elementi componenti possono trovarsi in stati diversi e quindi i pianeti possono avere raggi diversi (e la relazione  $R$ - $M$  essere con corretta). La missione che si occupa di calcolare la densità di un pianeta, al fine di migliorare le stime sul raggio è la missione CHEOPS.



# Bibliografia

- [1] P. Vinet, J. H. Rose, J. Ferrante, e J. R. Smith, “Universal features of the equation of state of solids”, *Journal of Physics: Condensed Matter* **1**, 1941 (1989).
- [2] *Ice-seven*, (2002) [http://www1.lsbu.ac.uk/water/ice\\_vii.html](http://www1.lsbu.ac.uk/water/ice_vii.html).
- [3] W. Wagner, e A. Pruß, “The iapws formulation 1995 for the thermodynamic properties of ordinary water substance for general and scientific use”, *Journal of Physical and Chemical Reference Data* **31**, 387–535 (2002) 10.1063/1.1461829.
- [4] *Water phase diagram*, (2002) [http://www1.lsbu.ac.uk/water/water\\_phase\\_diagram.html](http://www1.lsbu.ac.uk/water/water_phase_diagram.html).
- [5] E. J. Rivera, J. J. Lissauer, R. P. Butler, G. W. Marcy, S. S. Vogt, D. A. Fischer, T. M. Brown, G. Laughlin, e G. W. Henry, “A 7.5 m planet orbiting the nearby star, gj 876”, *The Astrophysical Journal* **634**, 625 (2005).
- [6] D. Valencia, D. D. Sasselov, e R. J. O’Connell, “Detailed models of super-earths: how well can we infer bulk properties?”, *The Astrophysical Journal* **665**, 1413 (2007).
- [7] A. Crida, “Minimum mass solar nebulae and planetary migration”, *The Astrophysical Journal* **698**, 606 (2009).
- [8] R. A. Marcus, S. T. Stewart, D. Sasselov, e L. Hernquist, “Collisional stripping and disruption of super-earths”, *The Astrophysical Journal Letters* **700**, L118 (2009).
- [9] A. M. Mandell, “Condensation sequence”, in *Encyclopedia of astrobiology*, a cura di R. Amils, M. Gargaud, J. Cernicharo Quintanilla, H. J. Cleaves, W. M. Irvine, D. Pinti, e M. Viso, (Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 2014), pp. 1–2, 10.1007/978-3-642-27833-4\_340-4.
- [10] I. de Pater, e J. J. Lissauer, *Planetary sciences*, 2<sup>a</sup> ed. (Cambridge University Press, 2015).
- [11] [https://www.nasa.gov/mission\\_pages/kepler/overview/index.html](https://www.nasa.gov/mission_pages/kepler/overview/index.html).
- [12] <http://cheops.unibe.ch/>.
- [13] <https://tess.mit.edu/>.
- [14] [sci.esa.int/plato/](http://sci.esa.int/plato/).
- [15] <https://www.cfa.harvard.edu/news/su201542>.