

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA
FACOLTÀ DI INGEGNERIA



UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA
FACOLTÀ DI INGEGNERIA

—
DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA DELL'INFORMAZIONE

—
TESI DI LAUREA MAGISTRALE IN INGEGNERIA
DELL'AUTOMAZIONE

MODELLISTICA DEL FRONTE
D'AVANZAMENTO DI FENOMENI
FRANOSI

RELATORE: CH.MO PROF. ANGELO CENEDESE

CORRELATORE: CH.MO PROF. CARLO GREGORETTI

LAUREANDO: ANDREA LANZINI

ANNO ACCADEMICO 2011-2012

Indice

Sommario	VII
Introduzione	XII
1 Richiami di fluidodinamica	1
1.1 Introduzione ai fluidi	1
1.2 Cinematica: approcci lagrangiano ed euleriano	4
1.3 Equazioni di governo per fluidi newtoniani	6
1.3.1 Condizioni iniziali e condizioni al contorno	12
1.3.2 Forma di Crocco e vorticità	14
1.4 Moto browniano	16
2 Metodi mesh-free per descrizione lagrangiana del moto	19
2.1 Smoothed Particle Hydrodynamics	20
2.1.1 Tecnica di approssimazione di funzioni	21
2.1.2 Funzioni kernel utilizzate	23
2.1.3 Approssimazioni simmetriche e normalizzate	25
2.1.4 Esempio d'applicazione	27
3 Modello geometrico di deformazione del fronte	29
3.1 Structure Flexible B-Snake modificato	29
3.1.1 Modello di collegamento strumentazione-fronte	35
3.2 Tuning dei parametri	39
4 Modelli in spazio di stato per Debris-Flows	47
4.1 Modelli a fase fluida equivalente	47

4.1.1	Primo modello: flussi detritici a sedimenti rocciosi	48
4.1.2	Secondo modello: flusso ad acqua e sedimenti fini	57
4.1.3	Terzo modello: flussi a sedimenti piroclastici	63
4.2	Ulteriori modelli in spazio di stato	66
5	Filtraggio statistico dei modelli	75
5.1	Cenni al filtraggio ricorsivo e alla teoria di Kalman	76
5.1.1	Filtraggio ricorsivo Bayesiano	77
5.1.2	Filtro di Kalman e Filtro di Kalman Esteso	79
5.2	Esempio d'applicazione dell'EKF ad un modello di Debris-Flow .	83
	Conclusioni	93
	Appendice	99
	Bibliografia	119

Sommario

In questo lavoro di tesi sono stati sviluppati dei modelli matematici per simulare l'avanzamento di fenomeni franosi, in particolare di colate detritiche note anche come debris-flow. L'approccio proposto è piuttosto innovativo dato che non si basa sulle tecniche di approssimazione numerica presenti in letteratura ma sullo sviluppo di sistemi in spazio di stato a partire dalle leggi della dinamica che governano gli eventi franosi. Tali modelli derivanti dalla teoria dei sistemi descrivono l'evoluzione dello stato associato a degli accelerometri disposti sul campo e sono arricchiti da una rappresentazione visiva del fronte dei debris-flow, idealizzato come una curva geometrica continua e deformabile nel piano.

Le simulazioni d'avanzamento delle colate sono realizzate mediante una tecnica mesh-free denominata Smoothed Particle Hydrodynamics (SPH), rivelatasi necessaria per l'implementazione delle equazioni costitutive del moto in descrizione lagrangiana.

Si sono riproposti in spazio di stato vari modelli ricavati dalla letteratura, tra cui: tre modelli specifici di debris flow, due sistemi generici che modellano la dinamica per fluidi comprimibili non-newtoniani e per fluidi incompressibili newtoniani, un sistema adatto a modellare fluidi caratterizzati prevalentemente da moti vorticosi.

Il lavoro si conclude con l'applicazione di una tecnica di filtraggio statistico (Filtro di Kalman Esteso) ai sistemi in spazio di stato sviluppati, supponendo disponibili le misure derivanti dai sensori disposti sul canale di scorrimento e trasportati dal debris flow in evoluzione. Il filtraggio statistico è utilizzato per stimare lo stato associato all'evento e (in prospettiva) fornire una predizione della sua evoluzione e contemporaneamente filtrare i disturbi che affliggono i segnali provenienti dai

sensori. Tutte le simulazioni sono state condotte interamente in software Matlab.

Introduzione

Il lavoro di tesi qui proposto si collega ad un programma di ricerca di ateneo denominato "studio di nuovi sistemi di allarme per rischio idrogeologico e loro accettabilità sociale in una zona ad elevato valore turistico-ambientale" sviluppato dal dipartimento Territorio e Sistemi Agro Forestali (TESAF) dell'Università degli Studi di Padova.

Tale programma di ricerca rientra nel progetto Paramount (imProved Accessibility: Reliability and security of Alpine transport infrastructure related to mountainous hazards in a changing climate) dell'Alpine Space Programme, programma di cooperazione transnazionale dell'UE in cui i paesi coinvolti lavorano assieme per promuovere lo sviluppo regionale in maniera sostenibile.

Parte essenziale del programma prevede il miglioramento della strumentazione e delle tecniche utilizzate per il monitoraggio di eventi franosi che occorrono in alta montagna, tra questi i fenomeni naturali su cui ci si concentra maggiormente sono i cosiddetti debris-flow o colate detritiche.

In questo contesto si colloca la collaborazione con il Dipartimento di Ingegneria dell'Informazione dell'Università Degli Studi di Padova e questo lavoro di tesi.

Le colate detritiche sono dei miscugli solido-liquidi (acqua, fango, sedimenti e detriti legnosi) che si propagano con elevate velocità nei canali naturali che incidono i versanti alla base delle pareti rocciose. I debris flow sono innescati da piogge di elevata intensità che producono deflussi superficiali in grado di movimentare le quantità di materiale solido presenti nei canali formando un miscuglio solido-liquido che si propaga verso valle. Le caratteristiche peculiari dei fenomeni sono: fase di triggering dell'evento molto breve, velocità di propagazione molto elevate (fino a 10 m/s), movimentazione di grandi quantità di sedimenti.

I debris flow presentano inoltre un fronte costituito da sedimenti più grossi e una coda formata da una miscela di fase liquida e sedimenti fini e possono esaurirsi anche in più ondate successive.

Da quanto esposto si può comprendere la pericolosità intrinseca di questi fenomeni che, nei casi peggiori, riversano la loro violenza su centri abitati, infrastrutture e linee di trasporto presenti a fondo valle.

Ad un'altissima pericolosità del fenomeno è associata un'elevata imprevedibilità, dato che le colate possono defluire lungo canali già formati durante eventi precedenti o seguire percorsi completamente nuovi (improvvisi diramazioni dei canali principali). In tale contesto si comprende quanto sia importante ottenere dei modelli matematici a cui fare riferimento per studi e simulazioni dell'evento di debris flow ma soprattutto per lo sviluppo di una previsione ragionevole dell'avanzamento di tali fenomeni.

In questo lavoro di tesi si è cercato dunque di sviluppare dei modelli matematici con un approccio non ancora utilizzato in letteratura, consistente nella modellazione geometrica del fronte d'avanzamento delle colate attraverso i modelli in spazio di stato derivanti dalla teoria dei sistemi. I modelli sviluppati sono bidimensionali, ma l'estensione al caso tridimensionale può essere svolta senza alcuna difficoltà.

Questo approccio fortemente matematico e geometrico è pensato per una successiva integrazione con i dati provenienti dagli strumenti di misura posizionati sul canale di scorrimento e comunicanti con una base-station. I sensori a cui ci si riferisce sono degli accelerometri montati su sensori wireless *t - mote skyTM* che restituiscono i dati di posizione relativa e accelerazione istante per istante ad una stazione centrale di monitoraggio. Applicando la teoria del filtraggio statico al sistema in spazio di stato unito ai dati di misura, è possibile, sotto certe ipotesi, prevedere l'evoluzione dello stato caratterizzante la colata e dunque ottenere una stima della velocità di avanzamento del fronte. Le stime di posizione e velocità di propagazione dei debris flow costituiscono dei dati fondamentali per il progetto di sistemi d'allarme e monitoraggio di nuova generazione, basati su tecnologia wireless per la trasmissione dei dati. Il grado di accuratezza del modello matematico unito alla robustezza e velocità del protocollo di comunicazione sono

caratteristiche essenziali per poter identificare una colata poco a valle della zona di generazione e quindi per prevedere possibili deviazioni dai canali principali ed infine aumentare il tempo di preavviso.

L'approccio utilizzato in questa tesi nasce dalle seguenti idee:

- 1) creazione di un modello in spazio di stato utilizzato per simulare la dinamica di spostamento di un debris flow. Per semplicità si identifica tale dinamica con quella degli accelerometri fluttuanti nella colata in evoluzione. I sensori sono quindi pensati come particolari particelle della miscela solido-liquida che trasmettono misure;
- 2) rappresentazione fisica-visiva e deformazione del fronte del flusso durante il run-out mediante curve splines approssimanti. Tali curve geometriche piane possono essere deformate variando le posizioni di particolari punti, detti punti di controllo della curva;
- 3) sviluppo di un modello in spazio di stato che funge da collegamento tra la dinamica dei punti fisici del debris-flow (accelerometri) e quella dei punti di controllo della curva geometrica (punti virtuali) per ricreare l'avanzamento e la deformazione del fronte nello spazio bidimensionale;
- 4) unione dei modelli di stato relativi agli accelerometri e ai punti di controllo del fronte per avere una simulazione completa dell'avanzamento e della deformazione del fronte della colata;
- 5) previsione dello stato associato al debris-flow mediante filtraggio statistico, basato sul modello di stato complessivo e sulle misure provenienti dagli accelerometri sul campo.

Il presente elaborato è così suddiviso:

- nel primo capitolo si riportano i concetti fondamentali di fluidodinamica, risultati essenziali per lo sviluppo di modelli debris-flow consistenti;
- nel secondo capitolo si espone un metodo di approssimazione mesh-free presente in letteratura e qui utilizzato per la discretizzazione spaziale di vari operatori differenziali;

- nel terzo capitolo si descrive il progetto del sistema in spazio di stato che interconnette la dinamica degli accelerometri alla parte frontale e si discute il tipo di spline utilizzata per modellare il fronte;
- nel quarto capitolo sono trattati alcuni modelli di debris-flow ricavati dalla letteratura e trasformati in spazio di stato, dai più specifici ai più generici utilizzati in fluidodinamica. Si tratta infine l'espansione di questi sistemi per poter includere la dinamica della parte frontale del flusso. Le simulazioni del sistema complessivo sono tutte effettuate con il software Matlab;
- nel quinto capitolo si riporta un esempio di filtraggio statistico applicato ad uno dei modelli sviluppati;
- nelle conclusioni si riassume brevemente il lavoro svolto ed i risultati ottenuti. Si propongono inoltre alcuni miglioramenti e sviluppi futuri.

Capitolo 1

Richiami di fluidodinamica

Lo studio dei concetti basilari della fluidodinamica è stato parte essenziale di questo lavoro, dato che nella maggior parte dei modelli matematici esaminati i flussi detritici (tipicamente a fase mista) sono approssimati come fluidi incompressibili e non-newtoniani. Una breve rivisitazione delle equazioni del moto per i fluidi è quindi necessaria per comprendere appieno i modelli specifici di debris-flow sviluppati più in avanti nella trattazione.

1.1 Introduzione ai fluidi

Un fluido è un sistema continuo che non può opporre sforzo di taglio quando è a riposo. Lo sforzo di taglio (shear stress) è una forza che agisce parallelamente alla superficie considerata, mentre si dice pressione la forza che agisce perpendicolarmente alla superficie (figura (1.3)).

In generale, all'aumentare dello sforzo di taglio applicato si ha una diminuzione della viscosità del fluido. La viscosità è una proprietà del fluido che indica il grado di difficoltà incontrata da strati di fluido che scorrono l'uno sull'altro. Questa proprietà è connessa allo scambio di quantità di moto tra strati di fluido dovuto all'agitazione termica, pertanto la viscosità è una misura della diffusione di quantità di moto a livello molecolare.

L'applicazione di uno sforzo di taglio provoca un gradiente di velocità o velocità

di deformazione tangenziale (shear rate). La scienza della reologia studia il legame esistente tra lo sforzo di taglio applicato ed il gradiente di velocità prodotto. Mediante la reologia è possibile distinguere il comportamento dei fluidi in diverse categorie:

- 1) fluidi per i quali sforzo di taglio e velocità di deformazione sono direttamente proporzionali. La relazione matematica che li identifica è:

$$T = \mu \left(\frac{dv}{dy} \right) \quad (1.1)$$

dove T [Pa] è lo sforzo tangenziale e $\frac{dv}{dy}$ [1/s] il gradiente di velocità lungo la direzione normale al piano di applicazione di T .

I fluidi per cui vale la (1.1) si dicono newtoniani (ad esempio l'acqua, gasolio, olio di motore) e la costante di proporzionalità μ [Pa · s] è detta viscosità dinamica;

- 2) fluidi per i quali non sussiste una proporzionalità diretta tra sforzo di taglio e gradiente di velocità sono detti non-newtoniani (vernici, colle, gelatine, sangue e vari prodotti alimentari) e possono a loro volta essere suddivisi nelle sotto-categorie seguenti:

- 2a) fluidi pseudo-plastici (ad esempio vernice, sapone liquido), nei quali la viscosità diminuisce all'aumentare del gradiente di velocità:

$$T = K \left(\frac{dv}{dy} \right)^n, \quad (1.2)$$

con K viscosità apparente ed $n < 1$;

- 2b) fluidi dilatanti (ad esempio amidi e grassi alimentari, sabbia), caratterizzati anch'essi dall'equazione (1.2) in cui $n > 1$;
- 2c) fluidi di Bingham (soluzioni concentrate e colloidali), si comportano come i fluidi newtoniani solo dopo il raggiungimento di un certo valore dello sforzo di taglio:

$$T = \mu \left(\frac{dv}{dy} \right) + \tau_y, \quad (1.3)$$

con τ_y [Pa] detto yield stress (tensione di snervamento). I fluidi Binghamiani sono un caso particolare di fluidi plastici;

2d) fluidi viscoplastici (argilla termoplastica, fango), per i quali vale la relazione generale di Herschel-Bulkley:

$$T = K \left(\frac{dv}{dy} \right)^n + \tau_y, \quad (1.4)$$

per $n < 1$.

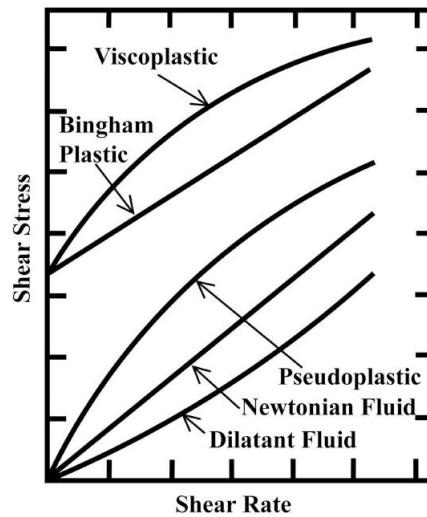


Figura 1.1: andamenti dello sforzo di taglio in funzione della velocità di deformazione per le categorie di fluido discusse.

In fluidodinamica si possono distinguere diversi tipi di moto caratteristici:

- (non) stazionari, in cui le particelle di fluido (non) possiedono velocità costante nel tempo;
- (in)compressibili, se la densità del fluido (non) varia con la pressione;
- viscosi o non viscosi, se il fluido non fluisce o fluisce facilmente;
- irrotazionale o rotazionale, se il fluido si muove di solo moto traslatorio o traslatorio e rotatorio.

Si riportano infine gli elementi descrittivi del moto utilizzati in fluidodinamica:

- ▶ traiettorie, luogo dei punti successivamente occupati dalle singole particelle fluide in movimento. Descrivono quindi la storia di ogni particella in moto;
- ▶ linee di corrente (streamlines), curve tangenti al vettore velocità in ogni punto del dominio d'interesse (campo);
- ▶ linee di fumo (streaklines), luogo dei punti occupati al generico istante da tutte le particelle che partono da un punto P del campo di moto, deciso a priori.

1.2 Cinematica: approcci lagrangiano ed euleriano

La cinematica, in generale, studia il movimento di un corpo indipendentemente dalle cause che lo provocano, è quindi necessaria ma non sufficiente per una completa descrizione di una massa fluida in movimento.

Dal punto di vista cinematico, un campo di moto fluido è descritto dai valori del vettore velocità ($[u \ v \ w]^T \in \mathbb{R}^3$) in ogni suo punto (definito dal vettore posizione $[x \ y \ z]^T \in \mathbb{R}^3$) al variare del tempo $t \in \mathbb{R}$. Ogni altra grandezza (posizione, accelerazione, deformazione) può essere ricavata per integrazione o derivazione del campo vettoriale di velocità.

Per la definizione di una qualsiasi grandezza del campo fluidodinamico possono essere utilizzate due descrizioni differenti.

L'approccio lagrangiano identifica un sistema materiale (insieme di punti, particelle) e ne segue gli spostamenti nello spazio. In ogni istante e per ogni punto materiale sono descritti i valori delle grandezze d'interesse (comprese le posizioni), ottenendo una descrizione spazio-temporale completa del campo (anche i valori di posizione delle particelle sono variabili dipendenti, l'unica variabile indipendente è il tempo t).

Nell'approccio euleriano, invece, si identifica un riferimento geometrico (punto o volume di controllo) fisso nello spazio, di cui se ne descrivono le grandezze d'interesse ad ogni istante. In questo caso i valori delle grandezze (variabili dipendenti) sono funzioni delle variabili indipendenti x, y, z, t (le posizioni non dipendono più

dal tempo ma sono stabilite a priori).

Quest'ultima descrizione è solitamente più vantaggiosa in fluidodinamica; a causa delle possibilità di deformazioni illimitate, si rivela piuttosto complesso analizzare lo storico delle diverse porzioni di materiale continuo. Generalmente, conviene fissare l'attenzione su porzioni di fluido (punti, superfici, volumi) prefissati nello spazio.

In questo lavoro occorre invece affrontare uno studio del fluido dal punto di vista lagrangiano; ottenere gli andamenti delle grandezze cinematiche al variare dello spazio oltre che del tempo è di vitale importanza per poter simulare l'avanzamento del fronte di un flusso di detriti o di una qualunque altra tipologia di fluido equivalente. Inoltre la descrizione lagrangiana è quella più utilizzata per la formulazione delle leggi fisiche.

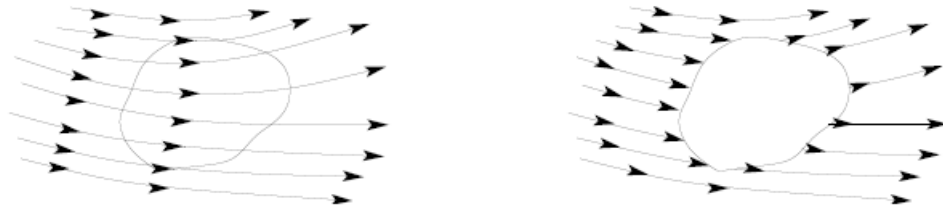


Figura 1.2: a sinistra un volume di controllo fisso utilizzato nell'approccio euleriano, a destra un volume materiale mobile usato nell'approccio lagrangiano

Dal punto di vista prettamente matematico, la differenza fra i due approcci si evidenzia nei termini contenenti le derivate temporali. Nelle equazioni che governano il fenomeno in approccio euleriano, la variazione temporale di una qualsiasi grandezza è descritta dalla derivata parziale (locale) della grandezza stessa rispetto al tempo. Dunque i valori della variabile d'interesse in due istanti temporali t , $t + dt$ sono riferiti alla medesima posizione spaziale e a diverse particelle.

Nell'approccio lagrangiano, le equazioni di governo di una grandezza d'interesse sono aggiornate in base alla derivata sostanziale (detta anche totale, materiale o avvettiva) della grandezza stessa rispetto al tempo. I valori della variabile d'interesse in diversi istanti temporali sono riferiti alla stessa particella di fluido e dunque alle posizioni spaziali diverse che essa assume durante il moto.

Definendo come $g(x, y, z, t)$ una qualunque grandezza scalare spazio-tempo dipen-

dente associata ad una particella di fluido, la relazione che intercorre tra la derivata parziale $\frac{\partial g}{\partial t}$ e sostanziale $\frac{Dg}{Dt}$ di g rispetto al tempo è:

$$\frac{Dg}{Dt} = \frac{\partial g}{\partial t} + \underbrace{u \frac{\partial g}{\partial x} + v \frac{\partial g}{\partial y} + w \frac{\partial g}{\partial z}}_{\text{termine convettivo}} \quad (1.5)$$

ricavata dalla regola di derivazione delle funzioni composte e con $\mathbf{r}(t) = [x(t) \ y(t) \ z(t)]^T$ e $\dot{\mathbf{r}}(t) = [u(t) \ v(t) \ w(t)]^T$ vettori spostamento e velocità associati alla particella in osservazione. Il termine convettivo (altamente non lineare) deriva dallo spostamento della particella materiale, mentre il primo termine a secondo membro indica la variazione temporale locale di g (nello stesso punto geometrico ma non materiale).

1.3 Equazioni di governo per fluidi newtoniani

Questa fase del lavoro è riservata alla sola comprensione ed esposizione delle leggi fisiche necessarie per la progettazione di un sistema in spazio di stato che modella la dinamica di un fluido, in genere non stazionario e comprimibile.

Le leggi basilari a cui si fa riferimento sono l'equazione di continuità e la legge di conservazione della quantità di moto, derivanti dalla meccanica classica ed applicate a livello microscopico.

Tali leggi dovrebbero essere completate dalla descrizione termodinamica del fluido in considerazione (legge di conservazione dell'energia); in questo lavoro si sono sempre ipotizzati fluidi all'equilibrio termodinamico, in modo tale da semplificare la trattazione e alleggerire la computazione degli algoritmi numerici.

La legge di continuità o conservazione della massa esprime il fatto che un qualunque sistema meccanico isolato non può perdere o acquistare massa. Considerando una massa fluida in movimento, tale legge descrive il legame presente tra le variabili cinematiche e la densità del fluido.

L'equazione matematica, in forma differenziale, che esprime il concetto di conservazione locale è la seguente:

$$\underbrace{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \rho + \rho \nabla \cdot \mathbf{v}}_{(1)} = 0, \quad (1.6)$$

in cui $\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \in \mathbb{R}$ rappresenta la divergenza del campo vettoriale di velocità $\mathbf{v}(x, y, z, t) = [u(x, y, z, t) \ v(x, y, z, t) \ w(x, y, z, t)]^T \in \mathbb{R}^3$ ed esprime il concetto fisico di velocità di variazione del volume di un fluido in movimento per unità di volume, $\rho(x, y, z, t) \in \mathbb{R}$ la densità locale ed istantanea relativa ad un volume infinitesimo di controllo dV e $\nabla \rho = [\frac{\partial \rho}{\partial x} \ \frac{\partial \rho}{\partial y} \ \frac{\partial \rho}{\partial z}]^T \in \mathbb{R}^3$ indica il gradiente del campo scalare densità. Si noti che la formulazione precedente è adatta ad una descrizione euleriana, la forma lagrangiana equivalente è invece:

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad (1.7)$$

per la definizione di derivata sostanziale (1.5) applicata ai termini in (1).

L'equazione precedente esprime l'espansione locale di volume di un fluido.

La seconda relazione fondamentale per descrivere la dinamica di un fluido in movimento è la seconda legge di Newton, espressa in una forma più adatta ai corpi continui ed eventualmente non isolati (cioè che possono acquistare o perdere massa), perciò detta anche equazione di conservazione della quantità di moto. Tale equazione vettoriale esprime le condizioni di equilibrio dinamico lungo ogni direzione del sistema di riferimento (qui scelto cartesiano) e la sua espressione in forma locale-differenziale in approccio euleriano è:

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \rho \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} + \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} - \mathbf{F}_{\mathbf{v}} = 0, \quad (1.8)$$

con $\mathbf{F}_{\mathbf{v}} \in \mathbb{R}^3 [Pa]$ forza esterna per unità di volume (denominata body-force).

In questo contesto si è sempre considerata $\mathbf{F}_{\mathbf{v}} = \rho \mathbf{g}$, cioè unicamente la forza di gravità per unità di volume.

Il simbolo $\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} \in \mathbb{R}^3$ indica l'effetto complessivo dovuto alle forze superficiali agenti sull'elemento infinitesimale di fluido e causate dagli attriti che si sviluppano durante le interazioni con gli strati di fluido che lo circondano; dunque $\boldsymbol{\sigma} \in \mathbb{R}^{3 \times 3} [Pa]$ rappresenta il tensore che descrive lo stato di sforzo totale locale per un fluido viscoso in moto generico. Tale sforzo totale è dato dalla somma tra gli sforzi

viscosi dovuti al moto e la variabile scalare pressione statica (o termodinamica) $p(x, y, z, t) \in \mathbb{R}$, definita come unico sforzo possibile agente sul fluido in condizioni di quiete (principio di Pascal). Questa componente isotropica dello sforzo agisce, per convenzione, in direzione normale alla superficie del fluido e si contrappone agli sforzi normali viscosi. Si può dunque scrivere: $\boldsymbol{\sigma} = p\mathbb{I}_3 - \boldsymbol{\tau}$, con

$$\boldsymbol{\tau} = \begin{bmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

tensore degli sforzi viscosi. I termini diagonali di $\boldsymbol{\tau}$ rappresentano le tensioni normali agenti sul fluido mentre i rimanenti coefficienti identificano gli sforzi di taglio (ancora più in generale, τ_{ij} rappresenta lo sforzo viscoso esercitato su un piano perpendicolare alla coordinata i -esima lungo la direzione j del sistema di riferimento scelto, come si vede in figura (1.3) e (1.4)).

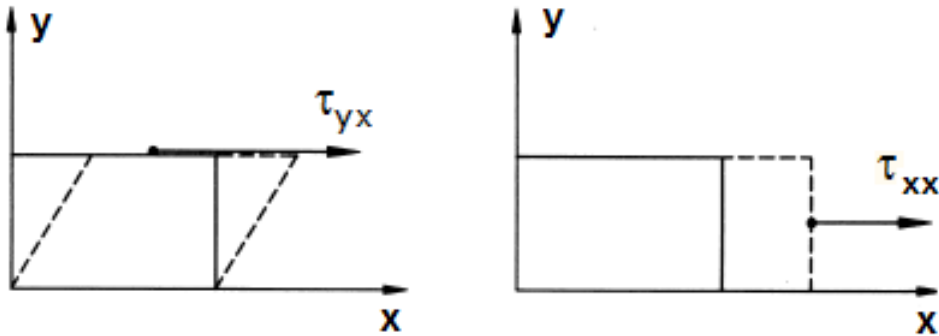


Figura 1.3: deformazione del corpo in conseguenza all'applicazione di uno sforzo di taglio (a sinistra) e uno sforzo normale (a destra), nel caso bidimensionale

La formula (1.8), valida per unità di volume, può allora essere riscritta nel modo seguente:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = \mathbf{g} - \frac{1}{\rho} \nabla p + \frac{1}{\rho} \nabla \cdot \boldsymbol{\tau}, \quad (1.9)$$

valendo $\nabla \cdot (p\mathbb{I}_3) = \nabla p$ ed intendendo con $\nabla \cdot \boldsymbol{\tau} \in \mathbb{R}^3$ l'applicazione dell'operatore divergenza ad ogni colonna della matrice $\boldsymbol{\tau}$, cioè:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\tau} = \left[\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}, \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z}, \quad \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} \right]^T$$

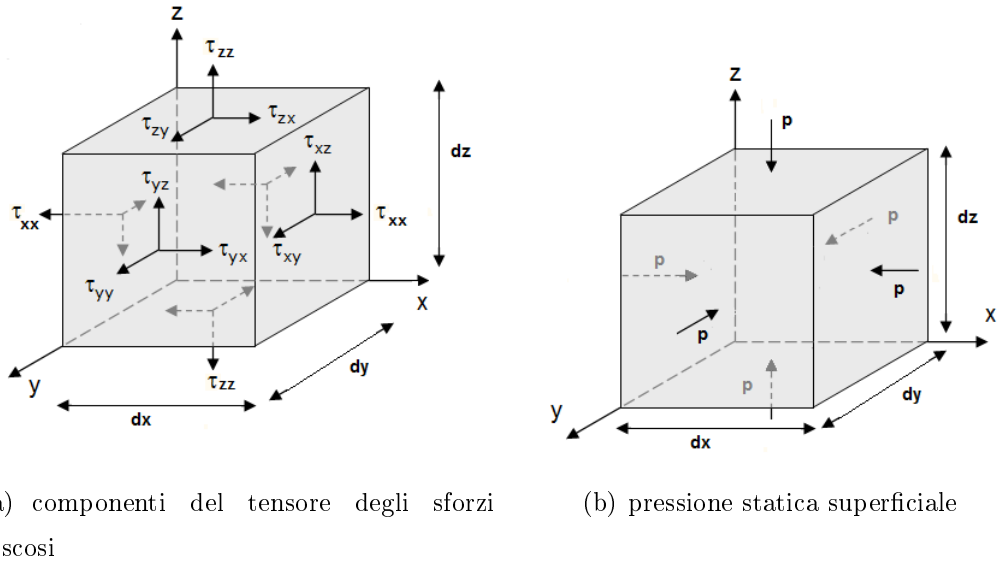


Figura 1.4: sforzi tangenziali-normali viscosi e pressione statica agenti sulla superficie che racchiude un volume infinitesimo di fluido $dV = dx dy dz$

Nel caso semplice di fluidi newtoniani, vale l'approssimazione in cui le tensioni tangenziali viscosi possono essere considerate direttamente proporzionali ai gradienti di velocità di deformazione. Per questo tipo di fluidi, Stokes individuò le seguenti relazioni:

$$\left\{ \begin{array}{l} \tau_{xx} = \lambda \nabla \cdot \mathbf{v} + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x}, \\ \tau_{yy} = \lambda \nabla \cdot \mathbf{v} + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y}, \\ \tau_{zz} = \lambda \nabla \cdot \mathbf{v} + 2\mu \frac{\partial w}{\partial z}, \\ \tau_{xy} = \tau_{yx} = \mu \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right), \\ \tau_{xz} = \tau_{zx} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right), \\ \tau_{yz} = \tau_{zy} = \mu \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right), \end{array} \right. \quad (1.10)$$

con $\lambda [Pa \cdot s]$ è il un coefficiente di viscosità secondaria e $\mu [Pa \cdot s]$ parametro che indica la viscosità dinamica (o molecolare).

Sostituendo le espressioni in (1.10) nella relazione (1.9), si ottiene la forma semplificata dell'equazione vettoriale della conservazione della quantità di moto per fluidi isotropi, newtoniani e comprimibili:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = \mathbf{g} - \frac{1}{\rho} \nabla p + \frac{\mu}{\rho} \nabla^2 \mathbf{v} + \frac{(\mu + \lambda)}{\rho} \nabla(\nabla \cdot \mathbf{v}), \quad (1.11)$$

in cui $\nabla^2 \mathbf{v} = [\nabla^2 u \quad \nabla^2 v \quad \nabla^2 w]^T \in \mathbb{R}^3$ rappresenta il vettore i cui elementi sono i laplaciani delle componenti della velocità.

Si ricorda che il laplaciano di una funzione scalare generica $g(x, y, z, t)$ è definito come $\nabla^2 g := \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial z^2}$.

Semplici manipolazioni algebriche permettono di riformulare il termine convettivo a primo membro nel modo seguente:

$$\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} + \frac{1}{2} \nabla(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}),$$

in cui si definisce $\boldsymbol{\omega} := \nabla \times \mathbf{v} = \left[\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}, \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right]^T \in \mathbb{R}^3$ vettore vorticità (rotore del campo di velocità).

L'equazione del moto (1.11), scritta in forma estesa, diventa allora:

$$\begin{aligned} & \underbrace{\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}}_{\text{accelerazione locale}} + \underbrace{\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}}_{\text{accelerazione di rotazione}} + \underbrace{\frac{1}{2} \nabla(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v})}_{\text{accelerazione di trasporto}} = \\ = & \underbrace{\mathbf{f}}_{\text{forze di volume}} - \underbrace{\frac{1}{\rho} \nabla p}_{\text{forze di pressione statica}} + \underbrace{\frac{\mu}{\rho} \nabla^2 \mathbf{v} + \frac{(\mu + \lambda)}{\rho} \nabla(\nabla \cdot \mathbf{v})}_{\text{forze viscosse}} \end{aligned} \quad (1.12)$$

in questo caso $\mathbf{f} = \mathbf{g}$. In generale il termine delle forze di volume comprende qualsiasi tipo di forza esterna (di natura elettro-magnetica, chimica, gravitazionale, ecc) interagente a distanza con l'elemento di fluido.

L'ultima equazione esprime, nella maniera più generica possibile, la legge del moto per fluidi non stazionari, irrotazionali, comprimibili e newtoniani. Il termine $(\mu + \lambda)$ prende il nome di viscosità di massa (bulk viscosity).

Passando alla descrizione lagrangiana, l'equazione (1.11) si trasforma in:

$$\frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \mathbf{g} - \frac{1}{\rho} \nabla p + \frac{\mu}{\rho} \nabla^2 \mathbf{v} + \frac{(\mu + \lambda)}{\rho} \nabla(\nabla \cdot \mathbf{v}), \quad (1.13)$$

Le equazioni di governo (1.6), (1.11) e (1.7), (1.13) dei fluidi newtoniani possono essere ulteriormente semplificate se si considerano solo fluidi incomprimibili (liquidi

ideali), cioè i fluidi per i quali si verifica $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ (campo di velocità solenoidale: non vi sono sorgenti $\nabla \cdot \mathbf{v} > 0$ o pozzi $\nabla \cdot \mathbf{v} < 0$ nel campo considerato) o equivalentemente la densità associata ad ogni elemento infinitesimo di fluido è costante nel tempo.

In ottica di una successiva implementazione in spazio di stato, conviene presentare le equazioni costitutive per i liquidi in forma di aggiornamento dinamico.

Nell'approccio euleriano si otterrà:

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} = -\mathbf{v} \cdot \nabla \rho \\ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} + \mathbf{g} - \frac{1}{\rho} \nabla p + \frac{\mu}{\rho} \nabla^2 \mathbf{v}, \end{cases} \quad (1.14)$$

mentre in quello lagrangiano:

$$\begin{cases} \frac{D\rho}{Dt} = 0 \\ \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \mathbf{g} - \frac{1}{\rho} \nabla p + \frac{\mu}{\rho} \nabla^2 \mathbf{v}, \end{cases} \quad (1.15)$$

Sia nel caso comprimibile che incomprimibile, le equazioni di continuità e di equilibrio del moto devono essere completate dall'equazione di stato, la quale approssima la relazione che intercorre tra le variabili densità, pressione e temperatura in ogni punto del campo: $\rho(t) = \rho(p(t), T(t))$.

In questo elaborato si sono ipotizzati solo fluidi in condizioni isoterme,

$\rho(t) = \rho(p(t))$, e dunque l'equazione di stato si scrive come:

$$\rho(t) = \rho_0 e^{(p(t)-p_0)/\epsilon}, \quad (1.16)$$

da cui è possibile ricavare l'equazione per il calcolo della pressione ad ogni istante $t \in \mathbb{R}$:

$$p(t) = p_0 + \epsilon \log \left(\frac{\rho(t)}{\rho_0} \right), \quad (1.17)$$

dove ρ_0 , p_0 indicano rispettivamente il campo scalare di densità e pressione all'istante iniziale $t = 0$. Solitamente, per i liquidi, si impone $p_0 = 0$ mentre il valore del parametro ϵ può essere ritenuto indipendente dalla pressione ma variante con la temperatura. Ad esempio, per un liquido a temperatura ambiente ($300^\circ K$) si può assumere che $\epsilon \approx 2.2 \times 10^9 \text{ N/m}$.

1.3.1 Condizioni iniziali e condizioni al contorno

Il sistema delle equazioni di Navier-Stokes è altamente non lineare. Una sua caratteristica peculiare è quella di costituire un sistema ibrido iperbolico/parabolico (o parabolico incompleto). Infatti l'equazione di conservazione della massa è un'equazione differenziale iperbolica mentre le equazioni del bilancio della quantità di moto sono di natura parabolica. Il carattere di incompletezza è dovuto all'assenza di un termine di tipo laplaciano nell'equazione di conservazione della massa. Questa asimmetria ha delle conseguenze di natura fondamentale sulla teoria delle equazioni di Navier-Stokes comprimibili. Ad esempio, se si considera un problema in una regione completamente delimitata da pareti solide, le condizioni al contorno per un sistema che descrive la dinamica fluido comprimibile viscoso, riguarderanno il campo di velocità ma non esisterà alcuna valida condizione al contorno per la densità o per la pressione.

Il problema delle condizioni al contorno per le equazioni di Navier-Stokes è una materia piuttosto complessa e non esiste una dimostrazione matematica di esistenza ed unicità della soluzione, vi sono però casi particolari in cui è possibile ricreare in maniera piuttosto sensata le condizioni al bordo del dominio (considerato sempre di forma rettangolare e con lati paralleli agli assi cartesiani, per semplicità).

Le condizioni al contorno più utilizzate in letteratura, per il campo di velocità e pressione in \mathbb{R}^2 , sono qui descritte concisamente e riassunte in tabella (1.1):

- condizioni di non slittamento (no-slip), utilizzate per modellare fluidi a contatto con pareti, in prossimità delle quali la velocità si annulla. Dunque non vi è flusso che attraversa le pareti e il fluido non scivola lungo le stesse;
- condizioni di slittamento libero (free-slip), che evidenziano una situazione opposta di quella precedente. La derivata della velocità in direzione normale al bordo deve annullarsi;
- condizioni di simmetria, utilizzate per assi o piani di simmetria. Tali luoghi dei punti non sono attraversati dal flusso, la velocità tangenziale al piano (asse) di simmetria deve essere uguale in ogni faccia dello stesso e dunque

la derivata della velocità tangenziale lungo la direzione normale al piano deve annullarsi;

- condizioni di uscita (outlet), utilizzate quando il fluido può attraversare liberamente il contorno e dunque il gradiente di velocità al contorno è posto a zero;
- condizioni di ingresso (inlet), adottate nel caso in cui si abbiano informazioni sul flusso in entrata o uscita dal dominio considerato. Concretamente, si affida un valore costante arbitrario alla componente della velocità normale al bordo, mentre si rende nulla la componente tangenziale;
- per quanto riguarda le condizioni per flussi influenzati dalle variazioni di pressione, solitamente si pone a zero la derivata della velocità tangenziale lungo la direzione normale al bordo e costante il valore di pressione.

condizione	bordo parallelo asse x	bordo parallelo asse y
no-slip	$u = 0, v = 0$	$u = 0, v = 0$
free-slip	$\frac{\partial u}{\partial y} = 0, v = cost$	$\frac{\partial v}{\partial x} = 0, u = cost$
simmetria	$\frac{\partial u}{\partial y} = 0, v = 0$	$\frac{\partial v}{\partial x} = 0, u = 0$
inlet	$u = 0, v = cost$	$v = 0, u = cost$
outlet	$\frac{\partial u}{\partial y} = 0, \frac{\partial v}{\partial y} = 0$	$\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \frac{\partial v}{\partial x} = 0$
pressione	$\frac{\partial u}{\partial y} = 0, p = cost$	$\frac{\partial v}{\partial x} = 0, p = cost$

Tabella 1.1: tabella che riassume le condizioni al contorno considerate per i campi di velocità e di pressione in \mathbb{R}^2 e per domini rettangolari con bordi paralleli agli assi coordinati.

Dalla tabella precedente si nota come le condizioni al contorno per le velocità siano sostanzialmente di tre tipi: condizioni sulle derivate parziali delle grandezze d'interesse (Neumann), condizioni sulle variabili stesse (Dirichlet) o miste. Infine, per le condizioni iniziali è richiesto un campo dato almeno per ogni variabile che evolve nel tempo (in questo caso ρ, p, \mathbf{v}) ed un controllo della compatibilità con le condizioni al contorno.

1.3.2 Forma di Crocco e vorticità

L'equazione vettoriale di bilancio della quantità di moto per il caso incomprimibile (1.14) può essere riscritta in una forma particolare, detta forma di Crocco.

Tale forma risulta estremamente vantaggiosa per descrivere la dinamica di moti vorticosi e annulla completamente il termine legato alla variazione di pressione nelle equazioni del moto. Ciò apporta un'enorme semplificazione alla trattazione, soprattutto nel caso di fluidi non in equilibrio termodinamico, per i quali non vale più la (1.17).

Ricordando la proprietà del doppio prodotto vettoriale

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}, \quad (1.18)$$

e sostituendo simbolicamente a \mathbf{b} l'operatore differenziale ∇ e imponendo $\mathbf{a} = \mathbf{c} = \mathbf{v}$, si ottiene:

$$\mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{v}) = (\nabla \mathbf{v}) \cdot \mathbf{v} - (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v},$$

in cui l'espressione generica $(\mathbf{d} \cdot \nabla)\mathbf{e} \in \mathbb{R}^3$ indica simbolicamente il vettore $\mathbf{d} \cdot \nabla \mathbf{e} \in \mathbb{R}^3$ per $\mathbf{d}, \mathbf{e} \in \mathbb{R}^3$ qualsiasi; in questo caso $(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}$.

L'equazione vettoriale di bilancio della quantità di moto, per fluidi incomprimibili e in approccio euleriano, può allora essere riscritta nel modo seguente:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\nabla \mathbf{v}) \cdot \mathbf{v} - \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{v}) + \frac{\nabla p}{\rho} = \mathbf{g} + \frac{\mu}{\rho} \nabla^2 \mathbf{v}.$$

Osservando infine che la quantità $(\nabla \mathbf{v}) \cdot \mathbf{v}$ rappresenta il gradiente di uno scalare, cioè $\nabla(\frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}{2}) = \nabla(\frac{v^2}{2})$, definendo poi il vettore vorticità $\boldsymbol{\omega} := \nabla \times \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ (rotore del campo di velocità) e riunendo tutti i termini sotto l'operatore di gradiente, si ottiene finalmente la forma di Crocco per fluidi incomprimibili isotropi in descrizione euleriana:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \nabla\left(\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho}\right) + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} = \mathbf{g} + \frac{\mu}{\rho} \nabla^2 \mathbf{v}. \quad (1.19)$$

Applicando l'operatore di rotore ad entrambi i membri dell'equazione precedente e ricordando che il rotore del gradiente di un vettore qualsiasi è il vettore

nullo ($\nabla \times \nabla p = 0$) e che la forza di gravità è irrotazionale ($\nabla \times \mathbf{g} = 0$), si arriva al sistema dinamico di sei equazioni in sei incognite (se in \mathbb{R}^3) per la vorticità e libero dalla pressione:

$$\begin{cases} \frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} + \nabla \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}) = \frac{\mu}{\rho} \nabla \times \nabla^2 \mathbf{v}, \\ \nabla \times \mathbf{v} = \boldsymbol{\omega}, \end{cases} \quad (1.20)$$

Occorre fare attenzione al fatto che non sempre il sistema (1.20) è equivalente all'equazione del moto in forma di Crocco; ciò accade perchè il sistema della vorticità è ottenuto per derivazione (tra le soluzioni del nuovo sistema, di ordine più elevato, vi sono anche funzioni che non sono soluzioni del sistema originario). Affinchè vi sia equivalenza tra il sistema della vorticità e la forma di Crocco, occorre che la soluzione di (1.20) permetta di risalire ad una pressione; ciò avviene sicuramente se il dominio di validità delle equazioni in (1.20) è monoconnesso. Come ultimo passo, si intende riscrivere la dinamica per la vorticità in forma semplificata. Ricordando la formula (1.18) per il doppio prodotto vettoriale, si può riscrivere l'addendo $\nabla \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v})$ come segue:

$$\nabla \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}) = (\nabla \cdot \mathbf{v})\boldsymbol{\omega} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\boldsymbol{\omega} - (\nabla \cdot \boldsymbol{\omega})\mathbf{v} - (\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla)\mathbf{v}.$$

Infine, valendo sempre $\nabla \cdot \boldsymbol{\omega} = 0$ (il rotore è un campo vettoriale solenoidale per definizione) ed essendo anche $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ per l'incompressibilità, il sistema (1.20) in formula euleriana diventa:

$$\begin{cases} \frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\boldsymbol{\omega} = (\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla)\mathbf{v} + \frac{\mu}{\rho} \nabla^2 \boldsymbol{\omega}, \\ \nabla \times \mathbf{v} = \boldsymbol{\omega}, \end{cases} \quad (1.21)$$

essendo anche $\nabla \times (\nabla^2 \mathbf{v}) = \nabla^2 (\nabla \times \mathbf{v}) = \nabla^2 \boldsymbol{\omega}$.

L'equivalente di (1.21) in forma lagrangiana è invece:

$$\begin{cases} \frac{D\boldsymbol{\omega}}{Dt} = (\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla)\mathbf{v} + \frac{\mu}{\rho} \nabla^2 \boldsymbol{\omega}, \\ \nabla \times \mathbf{v} = \boldsymbol{\omega}, \end{cases} \quad (1.22)$$

per la definizione di derivata sostanziale della vorticità:

$$\frac{D\boldsymbol{\omega}}{Dt} = \frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \boldsymbol{\omega} = \frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\boldsymbol{\omega}.$$

Le equazioni da implementare per poter simulare i moti vorticosi sono proprio le (1.21) o (1.22) a seconda dell'approccio scelto e nel caso bidimensionale si semplificano ulteriormente, dato che la vorticità diventa scalare

$$\omega = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \text{ e quindi il termine } (\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla) \mathbf{v} \text{ si annulla.}$$

1.4 Moto browniano

In questa sezione si riassumono i concetti fondamentali inerenti al moto browniano, essendo questo necessario a sviluppare il modello dinamico denominato "vorticità-velocità", ritenuto adatto a simulare debris-flow a fase liquida e turbolenti.

Il moto browniano deve il suo nome al botanico R. Brown, che nel 1827 osservò il moto incessante ed irregolare di particelle di polline sospese su uno specchio d'acqua apparentemente in equilibrio.

In generale, una qualsiasi particella in sospensione in un fluido esegue un moto browniano qualora presenti una massa molto più grande di quella delle particelle di fluido che lo circondano. A. Einstein (1905) e M. Smoluchowski (1906), indipendentemente, furono i primi a fornire una spiegazione teoretica del fenomeno. Una descrizione più elaborata del moto browniano, che considera anche effetti dovuti all'inerzia, fu proposta nel 1908 da Langevin ed è quella riassunta in questo lavoro.

Questo tipo di moto ha valenza molto generale ed è tutt'oggi utilizzato in diversi ambiti scientifici, tra i quali fisica, matematica finanziaria ed econometria.

Si ipotizza un particella di massa m immersa in un fluido, la cui posizione è descritta dalle coordinate cartesiane istantanee $\mathbf{x}(t) = [x(t) \ y(t)]^T$ e dalle velocità istantanee corrispondenti $\mathbf{v}(t) = [u(t) \ v(t)]^T$ (per semplicità si mostra solo il caso bidimensionale). Nel modello di Langevin l'effetto dell'interazione tra le molecole di fluido e il corpo più pesante è dato da tre forze: la forza di attrito viscoso $\mathbf{F}_v(t) = -m\nu\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$, con $\gamma > 0$ coefficiente di attrito viscoso; una perturbazione esterna $\mathbf{F}_{\text{ext}}(t) \in \mathbb{R}^2$ indipendente dalla posizione della particella m ; una forza di fluttuazione $\mathbf{F}(t) \in \mathbb{R}^2$, assunta anch'essa come forza esterna ed indipendente dalla velocità del corpo pesante. Tale forza è detta anche forza di Langevin.

Il sistema dinamico che modella il moto browniano perturbato agente sulla particella m è dunque:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{v}(t) \\ \dot{\mathbf{v}}(t) = -\nu\mathbf{v}(t) + \frac{\mathbf{F}(t)}{m} + \frac{\mathbf{F}_{\text{ext}}(t)}{m} \end{cases} \quad (1.23)$$

Si osserva che il sistema (1.23) è un sistema lineare e stocastico, dato che il termine $\mathbf{F}(t)$ è modellato come un processo aleatorio stazionario, solitamente gaussiano bianco a media nulla e funzione di covarianza (e autocorrelazione): $\Sigma(\tau) = E[\mathbf{F}(t)\mathbf{F}(t+\tau)] = 2Dm^2\delta(\tau)\mathbb{I}_2 \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$, con D coefficiente di diffusione nello spazio delle velocità e dipendente dalla temperatura d'equilibrio delle molecole di fluido.

Il sistema di stato discreto LTI stocastico, generalizzato ad N particelle di massa m immerse nel fluido, e discendente da (1.23) è il seguente:

$$\begin{cases} \mathbf{s}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{s}(k) + \mathbf{B}\mathbf{F}(k) \\ \boldsymbol{\phi}(k) = \mathbf{C}\mathbf{s}(k) \end{cases} \quad (1.24)$$

con:

$$\begin{aligned} \mathbf{s}(k) &= \begin{bmatrix} x_1(t), \dots, x_N(t) & y_1(t), \dots, y_N(t) & u_1(t), \dots, u_N(t) & v_1(t), \dots, v_N(t) \end{bmatrix}^T \mathbb{R}^{4N}, \\ \boldsymbol{\phi}(k) &= \begin{bmatrix} x_1(t), \dots, x_N(t) & y_1(t), \dots, y_N(t) \end{bmatrix}^T \mathbb{R}^{2N} \text{ stato ed uscita istantanei rispettivamente,} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \begin{bmatrix} \mathbb{I}_{2N} & T_c \mathbb{I}_{2N} \\ \mathbb{O}_{N \times 2N} & (1 - \nu T_c) \mathbb{I}_N & \mathbb{O}_N \\ \mathbb{O}_{N \times 2N} & \mathbb{O}_N & (1 - \nu T_c) \mathbb{I}_N \end{bmatrix} \mathbb{R}^{4N \times 4N}, \\ \mathbf{B} &= \begin{bmatrix} \mathbb{O}_{2N \times 2N} \\ \mathbb{I}_N \frac{T_c}{m} & \mathbb{O}_N \\ \mathbb{O}_N & \mathbb{I}_N \frac{T_c}{m} \end{bmatrix} \mathbb{R}^{4N \times 2N}, \\ \mathbf{C} &= \begin{bmatrix} \mathbb{I}_{2N} & \mathbb{O}_{2N} \end{bmatrix} \mathbb{R}^{2N \times 4N}, \end{aligned}$$

matrici del sistema e $t = kT_c$ [s], $k \in \mathbb{Z}^+$ e T_c [s] periodo di campionamento. La forza di Langevin è stata approssimata con il processo gaussiano bianco dis-

creto $\mathbf{F}(t) \sim N(\mathbf{0}_2, 2\nu T_c \mathbb{I}_2)$.

Si mostrano infine le traiettorie tipiche di un corpo soggetto a moto browniano. I valori scelti per i parametri di simulazione sono i seguenti: $T_c = 0.1$ [s], $\nu = 10$ [Pas], $m = 0.2$ [kg], $N = 4$ e tempo di simulazione $T = 200$ [s].

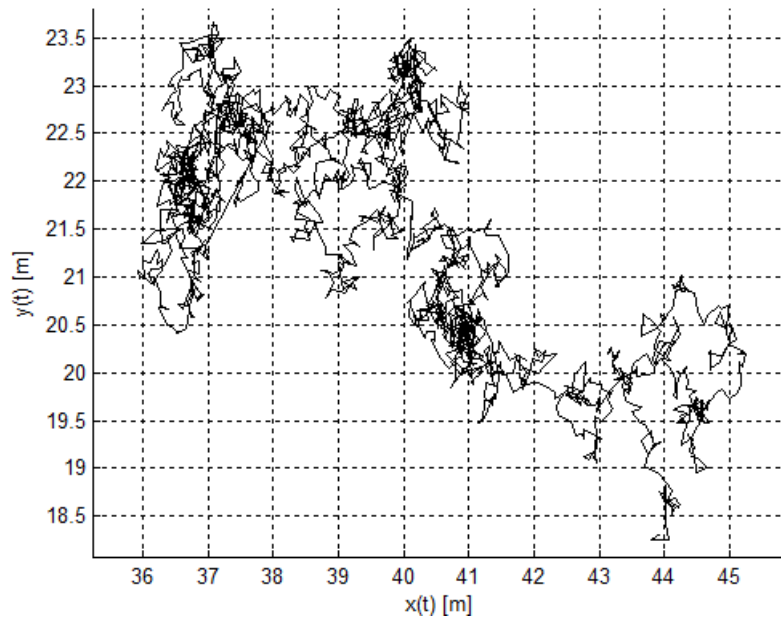


Figura 1.5: simulazione di moto browniano. Esempio di traiettoria compiuta da una delle N particelle di massa m , soggetta a continue interazioni con le molecole di fluido che la circondano.

Capitolo 2

Metodi mesh-free per descrizione lagrangiana del moto

In questo capitolo si tratteranno alcune problematiche connesse allo sviluppo di un modello in spazio di stato per un fluido, mediante approccio lagrangiano e dunque mesh-free .

Con questo termine si intende lo sviluppo di un modello non supportato da una meshgrid che discretizza spazialmente il dominio d'interesse.

La ragione che ha portato a questa scelta è legata al limitato numero di sensori disponibili per la misurazione dei valori del campo bidimensionale di velocità, caratterizzato da un'estensione spaziale considerevole (si pensi al percorso compiuto da una slavina in alta montagna, fino a valle).

L'intenzione principale è quella di sfruttare al massimo le poche informazioni disponibili, cioè le misure fornite dagli $N_a = 6 \div 15$ sensori trasportati dal debris-flow in evoluzione. Inoltre, la descrizione euleriana ("mesh-dependent") non permette di ricreare l'avanzamento di un fronte per costruzione, dato che le variabili spaziali non evolvono nel tempo ma sono decise a priori.

Le tecniche mesh-free prese in considerazione sono sostanzialmente tre:

- la prima è detta Smoothed Particle Hydrodynamics (SPH), è una tecnica di approssimazione di corpi continui presente in letteratura e originariamente sviluppata alla fine degli anni '70 per studio e simulazione di fenomeni astrofisici (modelli spazialmente non limitati) e riscoperta alla fine degli

anni '90 per la modellazione di fluidi qualsiasi (dinamiche comprendenti limiti fisici del campo);

- le ultime due sono tecniche di approssimazione delle derivate parziali spaziali (sviluppate interamente in questo elaborato) basate sui concetti di derivata direzionale e sviluppo di un funzione scalare in serie di Taylor in \mathbb{R}^n . Ciò che rende tali due metodi appetibili è la completa generalità, derivante dalla loro natura fortemente matematica.

Tutte e tre le approssimazioni mesh-free considerate o sviluppate hanno fornito discreti o buoni risultati. Per non appesantire eccessivamente la trattazione del lavoro svolto, si è deciso di scegliere una sola tra le tre alternative citate e utilizzarla per sviluppare i modelli in spazio di stato di debris-flow. La scelta finale è ricaduta sulla tecnica SPH, in quanto tale tecnica è sicuramente meno sensibile ai problemi di inversione di matrici e presenta un approccio matematico meno formale e più indirizzato verso l'implementazione numerica e dunque maggior stabilità del codice. Le altre due tecniche non sono comunque da trascurare e la loro trattazione è rimanda all'Appendice. Si potrebbero apportare dei miglioramenti per snellire il codice implementativo e rendere quindi la computazione più rapida, ad esempio rendendoli meno generici e utilizzando forti ipotesi restrittive provenienti dall'analisi sul campo vero e proprio. Un altro aspetto negativo relativo a questi approcci è proprio l'elevata onerosità computazionale, crescente col numero di accelerometri N_a .

2.1 Smoothed Particle Hydrodynamics

La tecnica di interpolazione Smoothed Particle Hydrodynamics (SPH) consente di approssimare numericamente le equazioni della dinamica dei fluidi, discretizzando la massa continua come un insieme di particelle che si muovono nello spazio secondo un approccio lagrangiano e quindi mesh-free.

Questo metodo numerico di approssimazione del continuo è stato sviluppato indipendentemente da Ginold, Monaghan e Lucy (1977) per la trattazione di problemi in astrofisica ed è stato in seguito utilizzato anche in meccanica dei fluidi

e dei solidi, vulcanologia, idrologia, ocnografia, balistica e in molti altri campi scientifici.

A ciascuna particella è associata una massa che costituisce l'unica proprietà fisica intrinseca; tale massa è distribuita in un certo volume sferico secondo una legge assegnata che caratterizza la particella come un'entità sfumata (smoothed).

Le particelle sono considerate come entità matematiche in mutua interazione, capaci di muoversi nel dominio d'interesse e compenetrarsi; ad ognuna di esse è associata una posizione e velocità.

La dinamica che si associa alle particelle fluide è, in questo caso, quella ricavata dalle equazioni di continuità, quantità di moto ed equazione di stato per i fluidi comprimibili o incomprimibili.

2.1.1 Tecnica di approssimazione di funzioni

Una qualsiasi funzione scalare reale $f(\mathbf{x}) : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, definita nello spazio continuo ($n = 2, 3$), può essere espressa mediante la proprietà rivelatrice della distribuzione δ di Dirac:

$$f(\mathbf{x}_0) = \int_{\Omega} \delta(\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}) f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad (2.1)$$

La tecnica di interpolazione SPH permette il calcolo del valore $f(\mathbf{x}_0)$ mediante l'approssimazione della distribuzione δ con una funzione continua

$W(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0, h) : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, chiamata funzione nucleo o kernel. Il parametro $h \in \mathbb{R}^+$ è denominato smoothing length (o smoothing parameter) e definisce la risoluzione spaziale (scala di discretizzazione) e l'estensione del supporto del kernel. In questo lavoro si sono considerati solo nuclei a supporto finito e di raggio $2h$. Un'alternativa potrebbe essere quella di adottare un kernel gaussiano (radial basis function) o un qualsiasi altro kernel a supporto non limitato.

Le proprietà fondamentali delle funzioni nucleo sono:

- 1) normalizzazione, e dunque, $\forall h \in \mathbb{R}^+, \mathbf{x}_0 \in \Omega$

$$\int_{\Omega} W(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0, h) d\mathbf{x} = 1;$$

2) simmetria, cioè, $\forall h \in \mathbb{R}^+, \mathbf{x}_0, \mathbf{x} \in \Omega$ deve valere

$$W(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0, h) = W(\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}, h) = W(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|_2, h);$$

3) grado di approssimazione, $\forall \mathbf{x}_0, \mathbf{x} \in \Omega$ si verifica che

$$\lim_{h \rightarrow 0} W(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0, h) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0).$$

L'approssimazione dell'eguaglianza (2.1) diventa allora:

$$f(\mathbf{x}_0) \approx \int_{\Omega} W(\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}, h) f(\mathbf{x}) d\mathbf{x}. \quad (2.2)$$

Ai fini implementativi, occorre discretizzare l'espressione precedente sostituendo l'operazione di integrazione con quella di somma. In questo caso bisognerà sommare unicamente i contributi derivanti dalle particelle fluide le cui posizioni \mathbf{x} ricadono in un intorno della posizione \mathbf{x}_0 , occupata dalla particella d'interesse. Dunque la discretizzazione spaziale si identifica con le posizioni istantanee occupate dalle particelle, le cui masse sono distribuite attorno ai baricentri secondo il kernel scelto.

La funzione $f(\mathbf{x})$, rappresentante una grandezza fisica generica, può assumere in questo contesto il significato di velocità, densità, pressione e talvolta profondità del fluido nel punto \mathbf{x} del dominio.

La stima del valore di $f(\cdot)$ nella posizione \mathbf{x}_i occupata dalla particella di fluido i -esima si calcola nel modo seguente:

$$f_i := \sum_{j=1}^N \frac{m_j}{\rho_j} f_j W_{ij} \approx f(\mathbf{x}_i), \quad (2.3)$$

con: N numero totale delle particelle utilizzate nella simulazione; m_j, ρ_j, f_j massa, densità e valore della grandezza scalare associata alla particella j -esima rispettivamente; $W_{ij} := W(\|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\|_2, h)$ e $W_{ij} \neq 0$ per $\|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\|_2 < 2h$.

Si noti che, nella (2.3), i contributi alla sommatoria dati dalle particelle limitrofe a quella d'interesse sono pesati dal volume associato ad ognuna di esse.

L'interessamento alla tecnica SPH è dovuto alla capacità di approssimazione degli operatori differenziali che si ritrovano nelle equazioni di governo dei fluidi, in

particolare il gradiente, la divergenza ed il laplaciano di una grandezza nella posizione occupata dalla particella i -esima:

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{\nabla} f_i := \sum_{j=1}^N \frac{m_j}{\rho_j} f_j \nabla W_{ij} \approx \nabla f(\mathbf{x})|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_i} \\ \tilde{\nabla} \cdot \mathbf{f}_i := \sum_{j=1}^N \frac{m_j}{\rho_j} \mathbf{f}_j \cdot \nabla W_{ij} \approx \nabla \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x})|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_i}, \\ \tilde{\nabla}^2 f_j := 2 \sum_{j=1}^N \frac{m_j}{\rho_j} (f_i - f_j) w_{ij} \approx \nabla^2 f(\mathbf{x})|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_i}, \end{array} \right. \quad (2.4)$$

con:

- $\nabla W_{ij} := \left[\frac{\partial W(\mathbf{x}-\mathbf{x}_j, h)}{\partial x} \quad \frac{\partial W(\mathbf{x}-\mathbf{x}_j, h)}{\partial y} \quad \frac{\partial W(\mathbf{x}-\mathbf{x}_j, h)}{\partial z} \right]_{|\mathbf{x}=\mathbf{x}_i}^T$, nel caso più generale in cui $\mathbf{x} = [x \ y \ z]^T$ rappresentano le coordinate cartesiane;
- $\mathbf{f}(\mathbf{x}) : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ grandezza vettoriale qualsiasi;
- $w_{ij} = \frac{\partial W(q)}{\partial q} \Big|_{q=q_{ij}}$, per $q_{ij} = h \|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\|_2$ (si veda la prossima sezione).

2.1.2 Funzioni kernel utilizzate

In letteratura si può trovare una lista vastissima di funzioni kernel, ma quella di gran lunga più utilizzata è la funzione nucleo a supporto finito proposta da Monaghan, cioè una spline del terzo ordine che rappresenta un buon compromesso tra accuratezza dell'approssimazione e onerosità computazionale:

$$W_{ij} = W(q_{ij}, h) = \frac{\sigma}{h^n} \begin{cases} 1 - \frac{3}{2}q_{ij}^2 + \frac{3}{4}q_{ij}^3, & \text{se } 0 \leq q < 1 \\ \frac{1}{4}(2 - q_{ij})^3, & \text{se } 1 \leq q < 2 \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases} \quad (2.5)$$

con $q_{ij} := \frac{\|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\|}{h}$ e

$$\sigma = \begin{cases} \frac{2}{3}, & \text{se } n = 1 \\ \frac{10}{7\pi}, & \text{se } n = 2 \\ \frac{1}{\pi}, & \text{se } n = 3 \end{cases}$$

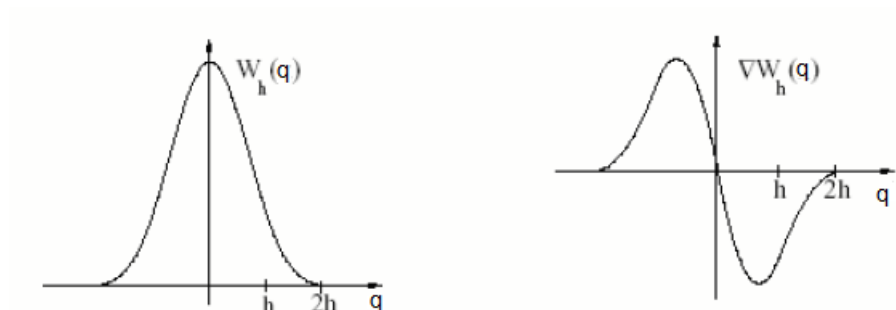


Figura 2.1: kernel di Monaghan e sua derivata prima per $n = 1$

Un'alternativa valida al kernel di Monaghan potrebbe essere la funzione nucleo detta "anti-clustering":

$$W_{ij} = W(q_{ij}, h) = \frac{15}{\pi(4h)^n} \begin{cases} (2 - q_{ij})^3, & \text{se } 0 \leq q < 2 \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases} \quad (2.6)$$

Questo particolare kernel evita infatti la formazione di addensamenti di particelle che tipicamente si formano utilizzando la spline cubica (2.5).

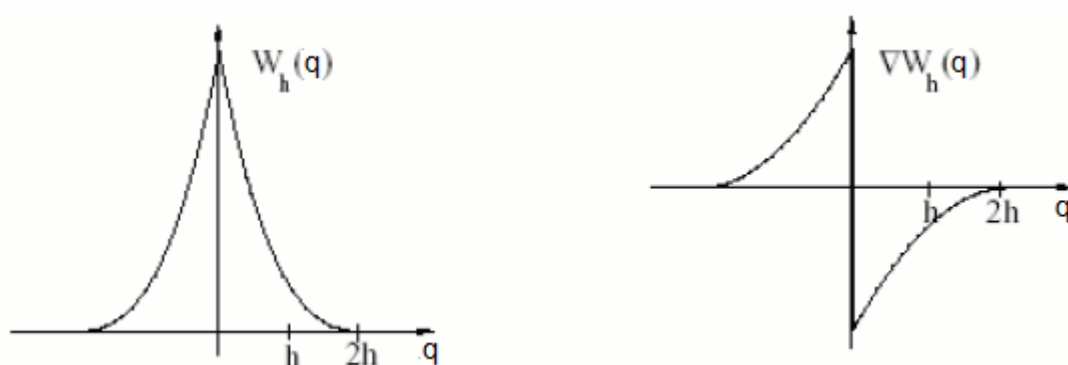


Figura 2.2: kernel anti-clustering e sua derivata prima per $n = 1$

La formazione dei clusters di particelle fluide si spiega osservando che il valore della derivata prima di (2.5) si porta a zero con continuità per $\mathbf{x}_i \rightarrow \mathbf{x}_j$ e dunque l'azione repulsiva del gradiente di pressione, che compare nelle (1.13) o (1.15), diventa trascurabile per particelle troppo vicine.

2.1.3 Approssimazioni simmetriche e normalizzate

Le approssimazioni degli operatori differenziali possono essere rese più stabili alitmicamente.

Sfruttando l'approssimazione della funzione identicamente nulla,

$$\tilde{0}_i = \sum_{j=1}^N \frac{m_j}{\rho_j} \nabla W_{ij} \approx 0 \quad \forall i,$$

si possono riscrivere le (2.4) in forma simmetrizzata. Ad esempio, il gradiente di $f(\mathbf{x})$ diventa:

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla} f_i &= \tilde{\nabla} f_i \pm f_i \tilde{0}_i = \\ &= \sum_{j=1}^N \frac{m_j}{\rho_j} f_j \nabla W_{ij} \pm f_i \sum_{j=1}^N \frac{m_j}{\rho_j} \nabla W_{ij} = \\ &= \sum_{j=1}^N \frac{m_j}{\rho_j} (f_j \pm f_i) \nabla W_{ij} \end{aligned} \quad (2.7)$$

La divergenza ed il laplaciano simmetrizzati necessitano invece di ulteriori manipolazioni algebriche e numeriche per rendere alitmicamente stabile il codice. Alcune tra le approssimazioni più utilizzate sono le seguenti:

$$\begin{cases} \tilde{\nabla} \cdot \mathbf{f}_i = \rho_i \sum_{j=1}^N m_j \left(\frac{\mathbf{f}_j}{\rho_j^2} + \frac{\mathbf{f}_i}{\rho_i^2} \right) \cdot \nabla W_{ij}, \\ \tilde{\nabla}^2 f_i = \sum_{j=1}^N 4m_j (f_i - f_j) \frac{(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j) \cdot \nabla W_{ij}}{(\rho_i^2 + \rho_j^2) d_{ij}^2 + \delta_n^2} \end{cases} \quad (2.8)$$

con $d_{ij} := \|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\|_2$ e $\delta_n = 0.1h$ fattore di correzione per impedire l'annullamento del denominatore del laplaciano approssimato.

Oltre ad una simmetrizzazione delle funzioni approssimate, solitamente, si esegue anche una normalizzazione.

La normalizzazione della stima di $f(\mathbf{x}_i)$ si basa essenzialmente sull'approssimazione della funzione unitaria:

$$\tilde{1}_i := \sum_{j=1}^N \frac{m_j}{\rho_j} W_{ij} \approx 1 \quad \forall i; \quad (2.9)$$

la stima SPH di $f(\mathbf{x}_i)$ diventa allora:

$$f_i = \frac{f_i}{\tilde{I}_i} = \frac{\sum_{j=1}^N \frac{m_j}{\rho_j} f_j W_{ij}}{\sum_{j=1}^N \frac{m_j}{\rho_j} W_{ij}}. \quad (2.10)$$

Si procede poi, a titolo di esempio, con la normalizzazione dell'operatore gradiente per $n = 2$. In realtà esistono vari metodi di normalizzazione in letteratura ([1] e [2]), in questo caso si utilizza quello basato sullo sviluppo di Taylor di $f(\mathbf{x}_j)$ arrestato al primo ordine:

$$f(\mathbf{x}_j) \simeq f(\mathbf{x}_i) + \left. \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_i} (x_j - x_i) + \left. \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial y} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_i} (y_j - y_i). \quad (2.11)$$

Innanzitutto si riscrivono le componenti in \mathbb{R}^2 di $\tilde{\nabla} f_i$:

$$\begin{cases} \left. \frac{\tilde{\partial} f}{\tilde{\partial} x} \right|_{\mathbf{x}_i} = \sum_{j=1}^N \frac{m_j}{\rho_j} f_j W_x, \\ \left. \frac{\tilde{\partial} f}{\tilde{\partial} y} \right|_{\mathbf{x}_i} = \sum_{j=1}^N \frac{m_j}{\rho_j} f_j W_y, \end{cases} \quad (2.12)$$

con $W_x := \frac{\partial W_{ij}}{\partial x}$ e $W_y := \frac{\partial W_{ij}}{\partial y}$.

Sostituendo l'espressione per lo sviluppo di Taylor (2.11) in (2.12) si ricava:

$$\begin{cases} \left. \frac{\tilde{\partial} f}{\tilde{\partial} x} \right|_{\mathbf{x}_i} = \sum_{j=1}^N \frac{m_j}{\rho_j} f_j W_x + \sum_{j=1}^N \frac{m_j}{\rho_j} \left. \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x} \right|_{\mathbf{x}_i} (x_j - x_i) W_x + \sum_{j=1}^N \frac{m_j}{\rho_j} \left. \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial y} \right|_{\mathbf{x}_i} (y_j - y_i) W_x, \\ \left. \frac{\tilde{\partial} f}{\tilde{\partial} y} \right|_{\mathbf{x}_i} = \sum_{j=1}^N \frac{m_j}{\rho_j} f_j W_y + \sum_{j=1}^N \frac{m_j}{\rho_j} \left. \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x} \right|_{\mathbf{x}_i} (x_j - x_i) W_y + \sum_{j=1}^N \frac{m_j}{\rho_j} \left. \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial y} \right|_{\mathbf{x}_i} (y_j - y_i) W_y. \end{cases}$$

Uguagliando membro a membro le espressioni precedenti con quelle in (2.12) si ottiene:

$$\begin{cases} \underbrace{\sum_{j=1}^N \frac{m_j}{\rho_j} (f_j - f_i) W_x}_{b_1} = \underbrace{\left. \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x} \right|_{\mathbf{x}_i} \sum_{j=1}^N \frac{m_j}{\rho_j} (x_j - x_i) W_x}_{a_{11}} + \underbrace{\left. \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial y} \right|_{\mathbf{x}_i} \sum_{j=1}^N \frac{m_j}{\rho_j} (y_j - y_i) W_x}_{a_{12}}, \\ \underbrace{\sum_{j=1}^N \frac{m_j}{\rho_j} (f_j - f_i) W_y}_{b_2} = \underbrace{\left. \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x} \right|_{\mathbf{x}_i} \sum_{j=1}^N \frac{m_j}{\rho_j} (x_j - x_i) W_y}_{a_{21}} + \underbrace{\left. \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial y} \right|_{\mathbf{x}_i} \sum_{j=1}^N \frac{m_j}{\rho_j} (y_j - y_i) W_y}_{a_{22}}. \end{cases} \quad (2.13)$$

Definendo poi $\mathbf{A} := \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ e $\mathbf{b} := [b_1 \ b_2]^T$, la soluzione del sistema lineare (2.13) si può riscrivere come

$$\tilde{\nabla} f_i = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{b}, \quad (2.14)$$

dove $\tilde{\nabla} f_i = \left[\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x} \Big|_{\mathbf{x}_i} \quad \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial y} \Big|_{\mathbf{x}_i} \right]^T$ è proprio l'approssimazione SPH del gradiente di $f(\cdot)$ calcolato in \mathbf{x}_i e normalizzato. Tale normalizzazione è detta completa al primo ordine e, come si può intuire, è piuttosto onerosa dal punto di vista computazionale. Un'alternativa meno impegnativa è la normalizzazione per linee, ottenibile imponendo $a_{12} = a_{21} = 0$.

2.1.4 Esempio d'applicazione

In questo esempio si simula il trasporto di alcuni accelerometri immersi in un liquido con proprietà simili a quelle dell'acqua ($\rho \approx 10^3 \text{ kg/m}^3$).

La dinamica di tutte le particelle è governata dalle equazioni di Navier-Stokes per fluidi incomprimibili (1.15) a due dimensioni. Gli operatori differenziali che compaiono in queste equazioni di governo sono stati discretizzati spazialmente utilizzando le approssimazioni non normalizzate presenti in (2.4) ed il kernel anti-clustering riportato in (2.6).

Si sono scelti $N_a = 15$ accelerometri (punti in grigio in figura (2.3)) ed un totale di $N = 200$ particelle di fluido (sensori compresi). I punti di fluido non coincidenti con gli strumenti di misura sono raffigurati in azzurro nella figura seguente. Un accelerometro ed il corrispondente intorno circolare sono stati colorati in rosso per evidenziare la risoluzione adottata nell'SPH (smoothing length h), scelta in questo caso pari a $10 m$, data la modesta estensione del canale e la limitata quantità di punti rappresentabile.

L'intorno circolare identifica le particelle di fluido che, rispetto al totale, influenzano realmente la dinamica dell'accelerometro considerato.

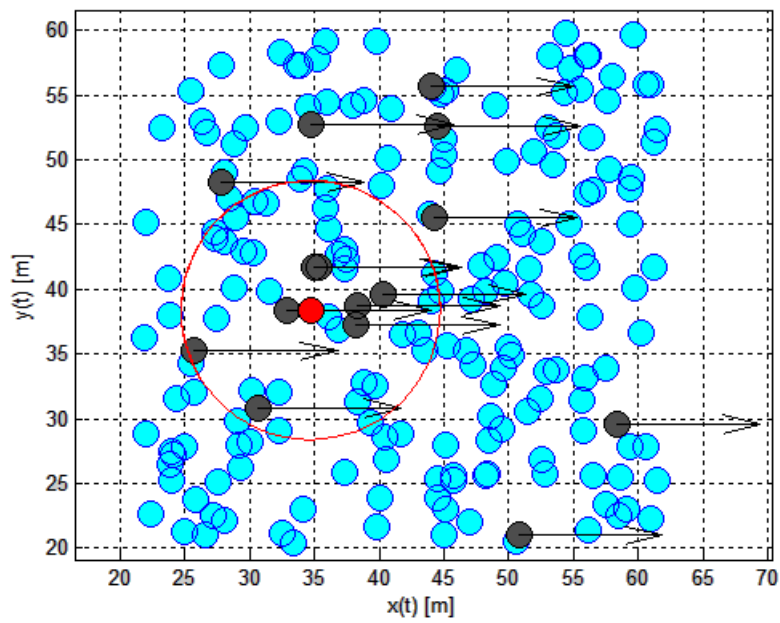


Figura 2.3: esempio di applicazione della tecnica SPH applicata per la creazione del modello in spazio di stato per un fluido incompressibile

Capitolo 3

Modello geometrico di deformazione del fronte

3.1 Structure Flexible B-Snake modificato

Per simulare in maniera semplice e compatta le deformazioni del fronte, si è implementato quello che in letteratura è noto come "Structure Flexible B-Snake", descritto nell'articolo [3].

Con questo termine si è soliti indicare una B-spline cubica (si veda l'appendice A per un ulteriore approfondimento) utile a modellare una qualsiasi curva parametrica chiusa in \mathbb{R}^2 , continua e di classe C^2 ("close cubic B-spline").

Tali oggetti matematici sono ampiamente utilizzati per l'estrazione e la segmentazione dei contorni di strutture complesse, soprattutto in immagini bio-medicali e computer-vision.

La particolarità di queste curve risiede nella loro struttura flessibile; esse possono infatti essere deformate localmente, agendo su N punti di controllo

$\mathbf{P}_i = [x_i^c \ y_i^c]^T \in \mathbb{R}^2$, $i = 1, \dots, N$. Inoltre sono costituite da N segmenti curvilinei interconnessi $\mathbf{g}_i(s) = (\alpha_i(s), \beta_i(s)) \in \mathbb{R}^2$, $i = 1, \dots, N$, con $s \in [0, 1]$ variabile normalizzata per la parametrizzazione della curva.

Ogni segmento i -esimo è composto dalla combinazione lineare di quattro polinomi di terzo grado nella variabile s , in cui le coordinate dei punti di controllo fungono da combinatori (pesi per i polinomi):

$$\mathbf{g}_i(s) = \begin{bmatrix} s^3 & s^2 & s & 1 \end{bmatrix} \mathbf{M} \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{i-1}^T & \mathbf{P}_i^T & \mathbf{P}_{i+1}^T & \mathbf{P}_{i+2}^T \end{bmatrix}^T \text{mod}(N), \quad i = 1, \dots, N, \quad (3.1)$$

con

$$\mathbf{M} := \begin{bmatrix} -\frac{1}{6} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 4} \quad (3.2)$$

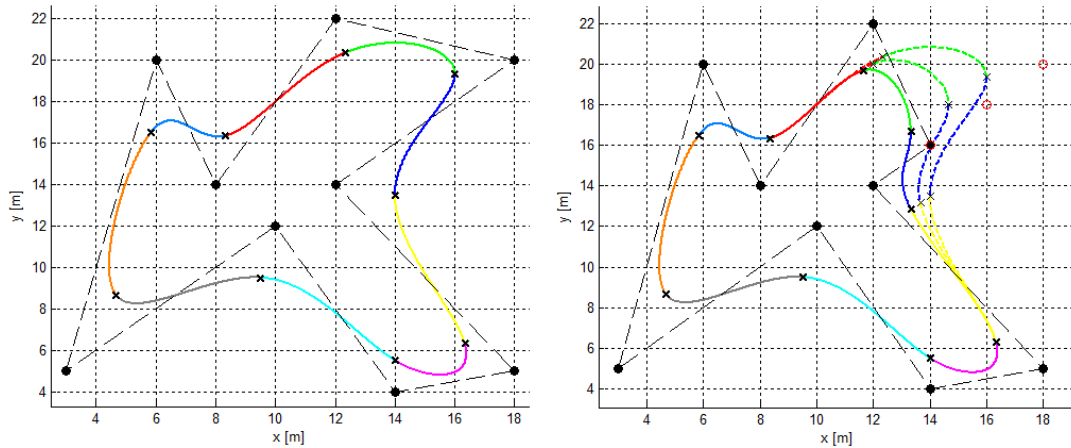
matrice quadrata dei coefficienti dei polinomi di terzo grado.

La parametrizzazione della curva B-spline, cubica e chiusa complessiva è infine:

$$\mathbf{r}(s) = \sum_{i=1}^N \mathbf{g}_i(s) \in \mathbb{R}^2, \quad s \in [0, 1], \quad (3.3)$$

con $K_i := \mathbf{g}_i(0) = \mathbf{g}_{i-1}(1) \text{mod}(N) \forall i$, punto nodale di $\mathbf{r}(s)$.

I coefficienti della matrice \mathbf{M} derivano dall'imposizione della condizione di continuità sulle derivate di (3.1) $\forall i$ fino al secondo ordine, calcolate su ogni punto nodale K_i .



(a) B-spline cubica chiusa associata ai punti di controllo scelti
(b) effetto dello spostamento di un punto di controllo

Figura 3.1: B-spline cubica chiusa nel piano, calcolata inserendo $N = 9$ punti di controllo (punti in nero). I segmenti componenti la curva sono evidenziati con colori diversi. I punti nodali sono contrassegnati con delle croci nere mentre il poligono di controllo è evidenziato in tratteggio. Infine il punto di controllo in movimento è stato contrassegnato con bordo rosso e i segmenti che si modificano a segno tratteggiato.

Come si vede in figura 3.1(b), lo spostamento di un punto di controllo non altera l'intera curva chiusa, ma solo i quattro segmenti che dipendono da esso.

Per poter simulare un avanzamento verosimile del fronte di un flusso detritico, è necessario apportare delle modifiche all'algoritmo originale [3]; bisogna infatti provvedere all'apertura della B-spline cubica chiusa (3.3).

Dati N punti controllo generici, la nuova B-spline cubica aperta è composta da $N_s = N - 1$ segmenti, distinti in due gruppi: i segmenti interni ($i = 2, \dots, N_s - 1$) e i due più esterni ($i = 1, N_s$).

La modifica dei segmenti interni consiste nel semplice annullamento della modularità nella dipendenza dai punti di controllo, cioè:

$$\mathbf{g}_i(s) = \begin{bmatrix} s^3 & s^2 & s & 1 \end{bmatrix} \mathbf{M} \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{i-1} \\ \mathbf{P}_i \\ \mathbf{P}_{i+1} \\ \mathbf{P}_{i+2} \end{bmatrix}, \quad i = 2, \dots, N_s - 1, \quad (3.4)$$

con $s \in [0, 1]$ e M stessa di (3.2).

I due segmenti più esterni devono invece essere completamente riprogettati, in modo da soddisfare a:

- condizioni al contorno che si desiderano sui punti nodali più esterni K_1, K_N :

$$\begin{aligned} \alpha_1^{(k)}(0) &= a_1^k & \beta_1^{(k)}(0) &= b_1^k \\ \alpha_{N_s}^{(k)}(1) &= a_N^k & \beta_{N_s}^{(k)}(1) &= b_N^k \end{aligned} \quad (3.5)$$

con $a_1^k, b_1^k, a_N^k, b_N^k$, costanti arbitrarie e (k) indicante la derivata k -esima rispetto ad s (solitamente $k = 0$ condizioni di Dirichlet, $k = 1$ di Neumann o miste);

- condizioni di classe C^2 sui punti nodali di congiunzione K_2, K_{N-1} con i segmenti interni adiacenti:

$$\begin{aligned} \alpha_1^{(k)}(1) &= \alpha_2^{(k)}(0) & \beta_1^{(k)}(1) &= \beta_2^{(k)}(0) \\ \alpha_{N_s-1}^{(k)}(1) &= \alpha_{N_s}^{(k)}(0) & \beta_{N_s-1}^{(k)}(1) &= \beta_{N_s}^{(k)}(0) \end{aligned} \quad (3.6)$$

con $k = 0, 1, 2$.

I nuovi segmenti esterni sono quindi calcolati dalla combinazione lineare di N_b polinomi di terzo grado in s ("polinomi base"), mediante le coordinate degli N_b punti di controllo ad essi più vicini.

L'espressione generale per i segmenti estremi è dunque:

$$\mathbf{g}_1(s) = \begin{bmatrix} \alpha_1(s) \\ \beta_1(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{N_b} x_j e_j(s) \\ \sum_{j=1}^{N_b} y_j e_j(s) \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{g}_{N_s}(s) = \begin{bmatrix} \alpha_{N_s}(s) \\ \beta_{N_s}(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{N_b} x_{N-N_b+j} f_j(s) \\ \sum_{j=1}^{N_b} y_{N-N_b+j} f_j(s) \end{bmatrix},$$

con:

$$\{e_j(s) = e_{3j}s^3 + e_{2j}s^2 + e_{1j}s + e_{0j}, \quad j = 1, \dots, N_b\}, \quad (3.7)$$

$$\{f_j(s) = f_{3j}s^3 + f_{2j}s^2 + f_{1j}s + f_{0j}, \quad j = 1, \dots, N_b\} \quad (3.8)$$

polinomi base per $\mathbf{g}_1(s)$ e $\mathbf{g}_{N_s}(s)$ rispettivamente, mentre

$$\{P_j = (x_j, y_j), \quad j = 1, \dots, N_p\} \text{ e } \{P_{N-N_b+j} = (x_{N-N_b+j}, y_{N-N_b+j}), \quad j = 1, \dots, N_p\}$$

sono i due gruppi di N_b punti di controllo più vicini a $\mathbf{g}_1(s)$ e $\mathbf{g}_{N_s}(s)$ rispettivamente.

I coefficienti incogniti in (3.7) e (3.8) si ricavano risolvendo il sistema lineare (o i sistemi lineari) ottenuto(i) imponendo le condizioni (3.5) e (3.6), in cui i valori $\alpha_2^{(k)}(0), \beta_2^{(k)}(0), \alpha_{N_s-1}^{(k)}(1), \beta_{N_s-1}^{(k)}(1), \quad k = 0, 1, 2$ sono i termini noti pre-calcolati.

Si sono effettuati in questo lavoro tre tipi diversi di design degli estremi, con:

- 1) $N_b = 2$ e polinomi base ricavati dalla risoluzione di due sistemi lineari indipendenti (uno per segmento, $e_j(s) \neq f_j(s)$) di dimensione $n = N_b(\deg[e_j] + 1) = 8$ e nei casi seguenti:
 - 1a) condizioni al contorno di Dirichlet (sulla posizione): $K_1 = P_1, K_N = P_N$;
 - 1b) condizioni al contorno di Neumann (sulla derivata): $\alpha_1^{(1)}(0) = 1, \alpha_{N_s}^{(1)}(1) = -1$ (tangenza orizzontale), $\beta_1^{(1)}(0) = 0 = \beta_{N_s}^{(1)}(1) = 0$;

1c) condizioni al contorno miste sulle derivate zero e prime:

$$\alpha_1(0) = x_1, \alpha_1^{(1)}(0) = 0 \text{ e } \alpha_{N_s}(1) = x_N, \alpha_{N_s}^{(1)}(1) = 0;$$

2) $N_b = 3$ e polinomi base ricavati dalla risoluzione di due sistemi lineari indipendenti di dimensione $n = 12$ (uno per segmento, $e_j(s) \neq f_j(s)$) e con condizioni al contorno per tutte le derivate fino al secondo ordine sui nodi estremi;

3) $N_b = 4$ e polinomi base ricavati dalla risoluzione di un unico sistema lineare ($e_j(s) = f_j(s)$) di dimensione $n = 2N_b(\deg[e_j] + 1) = 16$, per:

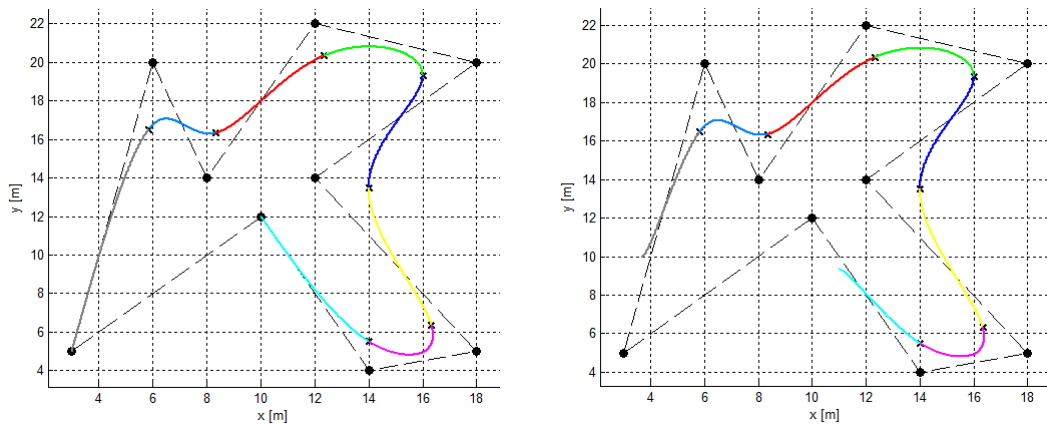
3a) condizioni al contorno di Dirichlet come in 1a);

3b) condizioni al contorno di Neumann come in 2a);

3c) condizioni al contorno miste sulle derivate zero e prime come in 3a).

In tutti e tre i casi si sono scelti $N = 9$ punti di controllo.

I tipi di design 1a) e 1b) sono da preferirsi, in quanto non presentano problemi di invertibilità delle matrici dei sistemi, come accade invece nel caso 1c), 3) e 4c). Infine i casi 4a) e 4b) presentano problemi d'invertibilità per particolari configurazioni dei punti di controllo.



(a) design 1a): condizioni al contorno di Dirichlet

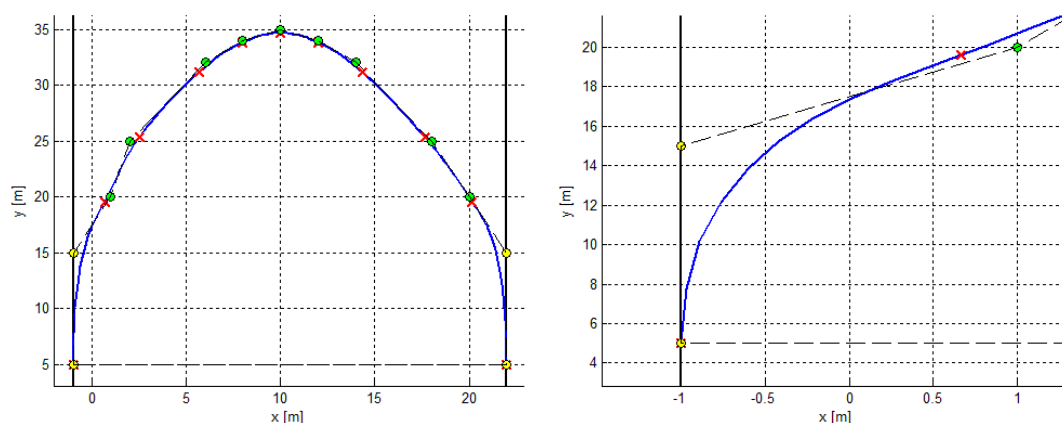
(b) design 1b): condizioni al contorno di Neumann

Figura 3.2: B-spline cubica aperta nel piano, calcolata inserendo 9 punti di controllo (punti in nero). I segmenti componenti la curva sono evidenziati con colori diversi. I punti nodali sono contrassegnati con delle croci nere mentre il poligono di controllo è evidenziato in tratteggio. Le condizioni al contorno nei due casi sono quelle espone in precedenza.

In alternativa al design proposto per il fronte ("Flexible B-Snake modificato") è possibile seguire una procedura più rigorosa e basata sulla teoria delle B-spline generiche. Con l'approccio teorico è possibile implementare anche le condizioni al contorno miste senza incorrere in problemi di invertibilità delle matrici (si rimanda all'Appendice per un approfondimento).

In sintesi, si sfrutta una delle proprietà delle B-spline strette (clamped) in cui i punti terminali della curva coincidono con i punti di controllo estremi ed in tali punti la curva è tangente ai lati del poligono di controllo.

Considerando per esempio un canale che si estende verticalmente nel piano, si possono ottenere le condizioni di tangenza verticale e contemporaneamente di aggancio al bordo del canale; basta infatti aggiungere due coppie di punti fittizi in modo tale che i segmenti estremi del poligono di controllo siano verticali e giacenti sui bordi del canale.



(a) esempio realistico di disposizione dei punti di controllo per un debris-flow (b) zoom sul margine sinistro del canale

Figura 3.3: realizzazione delle condizioni al contorno miste mediante le proprietà delle B-spline. Il fronte è rappresentato in blu, in verde i punti di controllo originali e in giallo quelli fittizi. Le croci in rosso sono invece i punti nodali della B-spline cubica, di tipo clamped e uniforme. Infine le rette verticali nere simboleggiano i margini del canale e i segmenti in tratteggio delineano il poligono di controllo.

3.1.1 Modello di collegamento strumentazione-fronte

In questa fase del lavoro si è progettato un modello in spazio di stato che riceve come ingresso le posizioni e velocità bidimensionali di N_a accelerometri e restituisce in uscita le posizioni di $N_c \leq N_a$ punti virtuali che determinano le variazioni del fronte del flusso detritico, denominati per questo punti di controllo.

Modellando geometricamente il fronte di un Debris Flow con una B-spline cubica e considerando quanto esposto nel paragrafo precedente, si coglie facilmente il legame che sussiste tra i punti virtuali e il fronte stesso.

Per una miglior comprensione, si riassumono i passi svolti:

- 1) prelievo delle informazioni provenienti dagli accelerometri (posizioni e velocità),
- 2) applicazione del modello d'interfacciamento accelerometri - punti di controllo del fronte,
- 3) calcolo delle posizioni dei punti di controllo nel piano,
- 4) variazione della spline che modella il fronte mediante la teoria delle B-spline cubiche.

Il modello d'interfacciamento (passo 2) è composto da una rete a maglia in cui la posizione di ogni punto di controllo è influenzata dalle informazioni, opportunamente pesate, provenienti da tutti gli accelerometri.

Per modellare il legame tra l'accelerometro j e il punto di controllo i , con $i = 1, \dots, N_c$ e $j = 1, \dots, N_a$, si è supposto un sistema del tipo massa-molla-smorzatore, agente lungo la direzione normale \mathbf{n}_{ij} e caratterizzato dai parametri:

- costante elastica della molla $k_{ij} = k_{el} [N/m]$, $\forall (i, j)$,
- coefficiente di attrito viscoso per lo smorzatore $b_{ij} = b_d [Ns/m]$, $\forall (i, j)$,
- $l_{ij} [m]$ lunghezza a riposo della molla supposta tra il punto i e l'accelerometro j ,
- $m_i [Kg]$ massa assegnata al p.to virtuale i -esimo,

- $w_{ij}(t)$ coefficiente che quantifica, ad ogni istante temporale t , l'influenza che ha l'accelerometro j sul punto di controllo i .

La scelta del sistema massa-molla-smorzatore come elemento base per modellare le interazioni punto-punto è ereditata dalla tipica modellazione dei fenomeni particellari. Questa tipologia di modello è utilizzata frequentemente in letteratura per descrivere, a livello microscopico, una larga percentuale di fenomeni naturali, compresi Debris Flows di natura anche molto diversa (dry-granular, mixed-phase, muddy debris flows e molto altro ancora, si veda [4]).

Il modello a maglia qui descritto è, in realtà, una forte semplificazione di quanto riportato in letteratura. In questo elaborato, infatti, si sono considerate esclusivamente le tensioni lungo le direzioni normali di collegamento punto-punto. L'introduzione delle tensioni tangenziali (trascurabili al di sotto di un certo valore di soglia [5]) porterebbero ad un modello sicuramente più accurato, ma al contempo eccessivamente complicato e difficilmente implementabile su calcolatore (per un approfondimento si rimanda a [6] e [7]).

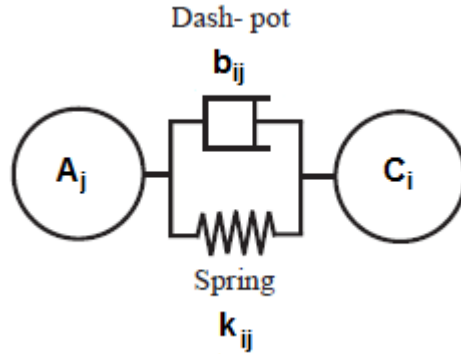


Figura 3.4: Sottosistema elementare utilizzato nel modello d'interfacciamento.

Con C_i si intende il punto di controllo i -esimo mentre A_j rappresenta il generico accelerometro j -esimo, per $i = 1, \dots, N_c$ e $j = 1, \dots, N_a$.

Nel sistema qui considerato, ogni punto di controllo i -esimo è governato dalle equazioni di Newton seguenti, valide in \mathbb{R}^2 e riportate in forma vettoriale:

$$\ddot{\mathbf{p}}_i^c(t) = -\frac{1}{m_i} \sum_{j=1}^{N_a} w_{ij}(t) (k_{el}(\mathbf{p}_i^c(t) - \mathbf{p}_j^a(t) - l_{ij}\mathbf{n}_{ij}(t)) + b_d(\dot{\mathbf{p}}_i^c(t) - \dot{\mathbf{p}}_j^a(t))), \quad (3.9)$$

per $i = 1, \dots, N_c$ e con:

$$\begin{aligned}\mathbf{p}_i^c(t) &= [x_i^c(t) \quad y_i^c(t)]^T \in \mathbb{R}^2 [m], \\ \dot{\mathbf{p}}_i^c(t) &= [u_i^c(t) \quad v_i^c(t)]^T \in \mathbb{R}^2 [m/s], \\ \ddot{\mathbf{p}}_i^c(t) &= [a_{i_x}^c(t) \quad a_{i_y}^c(t)]^T \in \mathbb{R}^2 [m/s^2],\end{aligned}$$

rispettivamente posizione, velocità e accelerazione istantanee del p.to di controllo i e

$$\begin{aligned}\mathbf{p}_j^a(t) &= [x_j^a(t) \quad y_j^a(t)]^T \in \mathbb{R}^2 [m] \\ \dot{\mathbf{p}}_j^a(t) &= [u_j^a(t) \quad v_j^a(t)]^T \in \mathbb{R}^2 [m/s],\end{aligned}$$

posizione e velocità dell'accelerometro j all'istante $t \in \mathbb{R}^+$, ricavate integrando le misure prelevate dallo strumento stesso.

Inoltre $\mathbf{n}_{ij}(t) = \frac{\mathbf{p}_i^c(t) - \mathbf{p}_j^a(t)}{\|\mathbf{p}_i^c(t) - \mathbf{p}_j^a(t)\|_2}$ è il versore normale diretto dall'accelerometro j al punto i .

Una volta definiti i vettori di stato, d'uscita e d'ingresso, rispettivamente:

$$\begin{aligned}\mathbf{s}(t) &:= \left[x_1^c \dots x_{N_c}^c \quad y_1^c \dots y_{N_c}^c \quad u_1^c \dots u_{N_c}^c \quad v_1^c \dots v_{N_c}^c \right]^T \in \mathbb{R}^{4N_c} \\ \zeta(t) &:= \left[x_1^c \dots x_{N_c}^c \quad y_1^c \dots y_{N_c}^c \right]^T \in \mathbb{R}^{2N_c}, \\ \boldsymbol{\tau}(t) &:= \left[x_1^a \dots x_{N_a}^a \quad y_1^a \dots y_{N_a}^a \quad u_1^a \dots u_{N_a}^a \quad v_1^a \dots v_{N_a}^a \right]^T \in \mathbb{R}^{4N_a}\end{aligned}$$

dalle equazioni (3.9) è possibile ricavare un modello in spazio di stato a tempo continuo, della forma:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{s}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{s}(t), \boldsymbol{\tau}(t), t) \\ \zeta(t) = C\mathbf{s}(t) \end{cases} \quad (3.10)$$

La mappa non lineare e tempo-variante di aggiornamento di stato, scritta per esteso $\forall i = 1, \dots, N_c$, diventa:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_i^c(t) = u_i^c(t), \\ \dot{y}_i^c(t) = v_i^c(t), \\ \dot{u}_i^c(t) = -\frac{1}{m_i} \sum_{j=1}^{N_a} w_{ij}(t) \left\{ k_{el} \left(1 - \frac{l_{ij}}{\|\mathbf{p}_i^c(t) - \mathbf{p}_j^a(t)\|_2} \right) (x_i^c(t) - x_j^a(t)) + \right. \\ \quad \left. + b_d (u_i^c(t) - u_j^a(t)) \right\}, \\ \dot{v}_i^c(t) = -\frac{1}{m_i} \sum_{j=1}^{N_a} w_{ij}(t) \left\{ k_{el} \left(1 - \frac{l_{ij}}{\|\mathbf{p}_i^c(t) - \mathbf{p}_j^a(t)\|_2} \right) (y_i^c(t) - y_j^a(t)) + \right. \\ \quad \left. + b_d (v_i^c(t) - v_j^a(t)) \right\} \end{array} \right. \quad (3.11)$$

con $t \in \mathbb{R}^+$, mentre la matrice C nella mappa lineare d'uscita è:

$$C = \begin{bmatrix} \mathbb{I}_{2N_c} & \mathbb{O}_{2N_c} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2N_c \times 4N_c}.$$

Per l'implementazione algoritmica è necessario discretizzare il modello a tempo continuo.

La discretizzazione temporale scelta è quella denominata "Eulero in avanti", in cui la derivata temporale è approssimata dalla differenza in avanti tra due campioni successivi della variabile d'interesse, divisa per il periodo di campionamento T_c [s] utilizzato. Il sistema (3.10) diviene:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{s}(t+1) = \mathbf{s}(t) + T_c \cdot \mathbf{f}(\mathbf{s}(t), \boldsymbol{\tau}(t), t) \\ \boldsymbol{\zeta}(t) = C\mathbf{s}(t) \end{array} \right. \quad (3.12)$$

La mappa di aggiornamento di stato (3.11) diventa quindi:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_i^c(t+1) = x_i^c(t) + T_c \cdot u_i^c(t), \\ y_i^c(t+1) = y_i^c(t) + T_c \cdot v_i^c(t), \\ u_i^c(t+1) = u_i^c(t) - \frac{T_c}{m_i} \sum_{j=1}^{N_a} w_{ij}(t) \left\{ k_{el} \left(1 - \frac{l_{ij}}{\|\mathbf{p}_i^c(t) - \mathbf{p}_j^a(t)\|_2} \right) (x_i^c(t) - x_j^a(t)) + \right. \\ \quad \left. + b_d (u_i^c(t) - u_j^a(t)) \right\}, \\ v_i^c(t+1) = v_i^c(t) - \frac{T_c}{m_i} \sum_{j=1}^{N_a} w_{ij}(t) \left\{ k_{el} \left(1 - \frac{l_{ij}}{\|\mathbf{p}_i^c(t) - \mathbf{p}_j^a(t)\|_2} \right) (y_i^c(t) - y_j^a(t)) + \right. \\ \quad \left. + b_d (v_i^c(t) - v_j^a(t)) \right\} \end{array} \right. \quad (3.13)$$

con $i = 1, \dots, N_c$ e $t \in \mathbb{Z}^+$, mentre l'equazione d'uscita a tempo discreto mantiene la forma precedente.

3.2 Tuning dei parametri

La taratura dei parametri k_{el} , b_d comuni a tutte le molle e gli smorzatori, della matrice $L = [l_{ij}] \in \mathbb{R}^{N_c \times N_a}$ delle lunghezze a riposo delle molle e la scelta della matrice dei pesi $W = [w_{ij}]$, con $i = 1, \dots, N_c$ e $j = 1, \dots, N_a$, è un problema a soluzione non proprio banale, dato che è necessario raccordare in maniera soddisfacente il comportamento del sistema d'interfacciamento a quello del fronte. La bontà della simulazione del fenomeno dipende anche (dalla stima delle condizioni iniziali dei punti virtuali e) dal numero di segmenti utilizzati per comporre la B-spline cubica, N_{seg} , e dunque dal numero di punti di controllo, N_c , e di accelerometri disponibili, N_a , valendo la relazione: $N_{seg} < N_c \leq N_a$.

In questo lavoro si è privilegiato un approccio di tipo **trial-and-error** per il tuning dei parametri, data la vastità di problemi da affrontare in relazione al tempo disponibile. Naturalmente, procedure di stima parametrica potrebbero apportare significativi miglioramenti.

Per la taratura dei parametri comuni e delle lunghezze iniziali delle molle, si

è considerato il classico sistema massa-molla-smorzatore, monodimensionale e a tempo continuo, per $N_a = N_c = 1$ (modello punto-punto).

Il modello di stato che si ottiene è un MISO LTI:

$$\begin{bmatrix} \dot{\tilde{y}}_c(t) \\ \dot{v}_c(t) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k_{el}}{m_c} & -\frac{b_d}{m_c} \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} \tilde{y}_c(t) \\ v_c(t) \end{bmatrix}}_{s(t) \text{ stato}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{k_{el}}{m_c} & \frac{b_d}{m_c} \end{bmatrix}}_B \underbrace{\begin{bmatrix} y_a(t) \\ v_a(t) \end{bmatrix}}_{u(t) \text{ ingresso}} \quad (3.14)$$

$$\underbrace{\tilde{y}_c(t)}_{\text{uscita}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}}_C \begin{bmatrix} \tilde{y}_c(t) \\ v_c(t) \end{bmatrix}$$

e con:

- $\tilde{y}_c(t) := y_c(t) - l_{eq} [m]$;
- $y_c(t)$, $y_a(t) [m]$ posizioni istantanee del punto di controllo e dell'accelerometro rispettivamente,
- $v_c(t) = \tilde{v}_c(t)$, $v_a(t) [m/s]$ velocità istantanee del p.to virtuale e dell'accelerometro rispettivamente;
- condizioni iniziali $\tilde{y}_c(0) = 4 - l_{eq} m$, $v_c(0) = 0 m/s$ per lo stato e $y_a(0) = 2 m$, $v_a(0) = 0 m/s$ per l'ingresso del sistema;
- $l_{eq} [m]$ lunghezza della molla a riposo, scelta in modo tale che $|y_c(0) - y_a(0)| \neq l_{eq}$ (molla inizialmente compressa o estesa);
- $m_c = 1 Kg$ massa del punto di controllo.

Il modello (3.14) potrebbe essere semplificato in un sistema SISO in forma canonica di controllo $\Sigma' := (A', B', C')$, con $A' = A$, $B' = [0 \ 1]^T$ e $C' = [\frac{k_{el}}{m_c} \ \frac{b_d}{m_c}]^T$, realizzazione minima della funzione di trasferimento

$$H(s) = \frac{\frac{b_d}{m_c} s + \frac{k_{el}}{m_c}}{s^2 + \frac{b_d}{m_c} s + \frac{k_{el}}{m_c}},$$

essendo (A', B') raggiungibile e (A', C') osservabile.

Si è comunque preferito mantenere la forma MISO perchè direttamente discendente dalle equazioni del sistema generale (3.11) e per far mantenere alle variabili

di stato un significato fisico preciso, permettendo quindi una semplificazione nella gestione delle condizioni iniziali (importanti per poter compiere simulazioni veritiere). Si è dunque preferito facilitare la comprensione del fenomeno, a scapito di una piccola complicazione del modello in forma minima.

Per il principio di sovrapposizione degli effetti, l'espressione generica dell'uscita del sistema si può esprimere come: $\tilde{y}_c(t) = \tilde{y}_l(t) + \tilde{y}_f(t)$. Il termine

$$\tilde{y}_l(t) = Ce^{At}s(0)$$

è noto come risposta libera e si ricava da condizioni iniziali non nulle per il sistema (tempo continuo) reso autonomo, mentre

$$\tilde{y}_f(t) = C \int_0^t e^{A(t-\sigma)}Bu(\sigma)d\sigma = h * u(t)$$

denota la risposta forzata e si ottiene immettendo l'ingresso esogeno e annullando le condizioni iniziali. Infine $h(t) \in \mathbb{R}^{1 \times 2}$ rappresenta la risposta impulsiva del sistema, anti-trasformata di Laplace della matrice di trasferimento:

$$H(s) = C(sI - A)^{-1}B = \begin{bmatrix} \frac{k_{el}/m_c}{\Psi_A(s)} & \frac{b_d/m_c}{\Psi_A(s)} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{1 \times 2}. \quad (3.15)$$

con $\Psi_A(s) = s^2 + \frac{b_d}{m_c}s + \frac{k_{el}}{m_c}$ polinomio caratteristico di A , le cui radici sono gli autovalori del sistema: $\lambda_{1/2} = \frac{-b_d \pm \sqrt{b_d^2 - 4k_{el}m_c}}{2m_c}$.

I parametri k_{el} , b_d sono scelti in modo da rendere il sistema $\Sigma := (A, B, C)$ asintoticamente stabile, cioè

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \tilde{y}_l(t) = 0 \quad \forall s(0), \Leftrightarrow \Re[\lambda_1], \Re[\lambda_2] < 0$$

e caratterizzato da un andamento d'uscita del tipo sovrasmorzato (autovalori reali distinti), al fine di rappresentare verosimilmente l'evoluzione del fronte del fluido (figura (3.5)). Valori dei parametri piuttosto ragionevoli sono:

$$k_{el} = 1 \text{ N/m e } b_d = 10 \text{ Ns/m}, \quad (3.16)$$

ricavati immettendo l'ingresso costante $u(t) = u(0) = [2 \ 0]^T, \forall t \in \mathbb{R}^+$ e scegliendo $l_{eq} = 1 \text{ m}$ (accelerometro sempre immobile sulla posizione iniziale e molla inizialmente in estensione).

Con queste assunzioni, l'espressione della risposta del sistema (3.11) diviene:

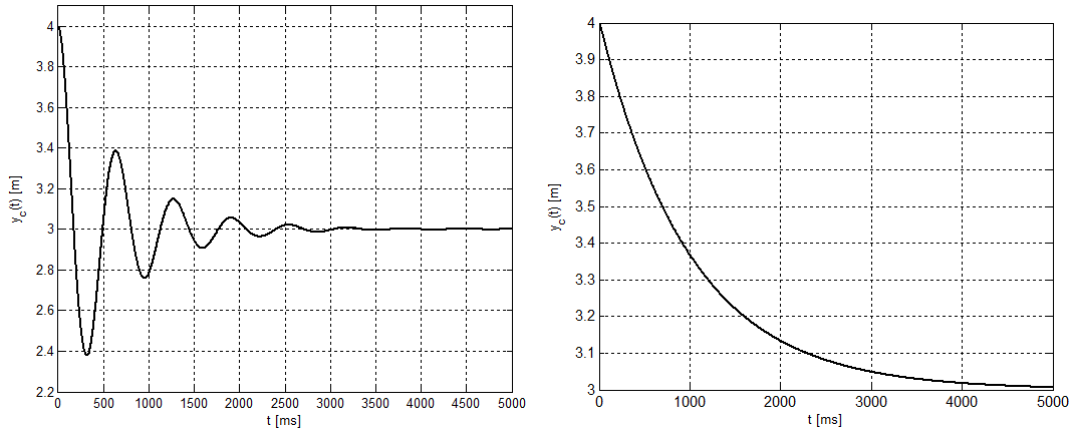
$$\begin{aligned} \tilde{y}_c(t) = & \underbrace{\frac{(\lambda_1 + b_d/m_c)y_a(0) + v_a(0)}{(\lambda_1 - \lambda_2)} e^{\lambda_1 t} + \frac{(\lambda_2 + b_d/m_c)y_a(0) + v_a(0)}{(\lambda_2 - \lambda_1)} e^{\lambda_2 t}}_{\tilde{y}_i(t)} + \\ & + \underbrace{\frac{y_a(0)}{m_c} \left(\frac{k_{el} + b_d\lambda_1}{\lambda_1(\lambda_1 - \lambda_2)} e^{\lambda_1 t} + \frac{k_{el} + b_d\lambda_2}{\lambda_2(\lambda_2 - \lambda_1)} e^{\lambda_2 t} + \frac{k_{el}}{\lambda_1\lambda_2} \right)}_{\tilde{y}_f(t)} 1(t), \end{aligned} \quad (3.17)$$

con $1(t)$ gradino unitario.

Infine si riporta l'espressione della posizione del punto di controllo a regime:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} y_c(t) = l_{eq} + \frac{k_{el}}{\lambda_1\lambda_2}.$$

I valori (3.16) risultano appropriati anche nel contesto più generale di rete a



(a) caso sottosmorzato - non accettabile

(b) caso sovrasmorzato - ragionevole

Figura 3.5: andamento della posizione del punto di controllo $y_c(t) = \tilde{y}_c(t) + l_{eq}$, per i valori dei parametri:

a) $k_{el} = 1$ N/m, $b_d = 0.3$ Ns/m,

b) $k_{el} = 1$ N/m, $b_d = 10$ Ns/m .

Tempo di campionamento $T_c = 10^{-2}$ s e durata della simulazione $T = 50$ s.

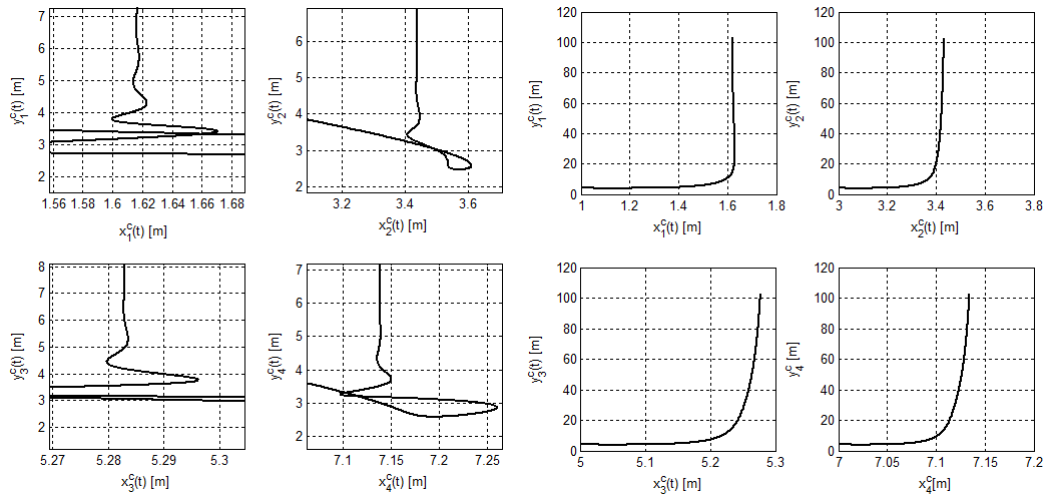
Infine $s(0)$, e l_{eq} sono gli stessi definiti in precedenza.

maglia (3.13) non costituita da sottosistemi MISO indipendenti, per la quale uno studio approfondito e generale risulta estremamente arduo.

Si riportano di seguito le traiettorie nel piano di quattro dei $N_c = 9$ punti di controllo totali, nel caso generale di rete interconnessa con $N_a = 9$, ipotizzando un moto risultante uniformemente accelerato lungo l'asse y ed identico per tutti

gli strumenti di misura: $\ddot{\mathbf{p}}_j^a(t) = [0 \ 0.02]^T \text{ m/s}^2, \forall j, t$.

I coefficienti $w_{ij}(t), \forall (i, j)$ sono stati scelti in base alle distanze reciproche istantanee $d_{ij}(t)$ tra gli accelerometri ed i punti virtuali (si veda più avanti la sezione dedicata alla taratura dei pesi), mentre $l_{ij} = d_{ij}(0) - 1 \text{ m}, \forall (i, j)$ (molle tutte inizialmente estese).



(a) sistema interconnesso-caso non accettabile (b) sistema interconnesso-caso accettabile

Figura 3.6: traiettorie in \mathbb{R}^2 dei soli primi quattro punti di controllo $P_i^c(t), i = 1, \dots, 9$, per i valori dei parametri:

a) $k_{el} = 1 \text{ N/m}, b_d = 0.3 \text{ Ns/m}$,

b) $k_{el} = 1 \text{ N/m}, b_d = 10 \text{ Ns/m}$.

Tempo di campionamento $T_c = 10^{-2} \text{ s}$ e durata della simulazione $T = 100 \text{ s}$.

Posizioni iniziali punti di controllo: $X_c(0) = [1 : 2 : 17]^T, Y_c(0) = 4 \cdot 1_{N_c}$; posizioni iniziali accelerometri: $X_a(0) = [1 : 2 : 17]^T, Y_a(0) = 2 \cdot 1_{N_c}$; velocità iniziali nulle per tutti i punti.

Per quanto riguarda la scelta della lunghezza a riposo l_{eq} , è parso più ragionevole considerare uno stato iniziale di compressione o di equilibrio per la molla, piuttosto che di estensione: $l_{eq} \geq |y_c(0) - y_a(0)|$. Nei primi due casi infatti, la direzione di avanzamento del punto di controllo sarebbe concorde a quella dell'accelerometro. Nell'ultimo caso invece, si avrebbe un moto iniziale del punto virtuale opposto, in direzione, a quello dello strumento di misura, comportamento ritenuto non logicamente coerente con il fenomeno in questione.

In definitiva, la scelta più adatta sembrerebbe quella relativa all'equilibrio della molla $l_{eq} = |y_c(0) - y_a(0)|$, dato che un qualsiasi stato di pre-carica indurrebbe

un movimento del punto virtuale nonostante l'iniziale staticità del punto di controllo.

Nel caso generale di rete interconnessa, si è ipotizzata una dipendenza dei pesi $w_{ij}(t)$ dalle distanze reciproche istantanee $d_{ij}(t) := \|p_i^c(t) - p_j^a(t)\|_2, \forall i, j, t$.

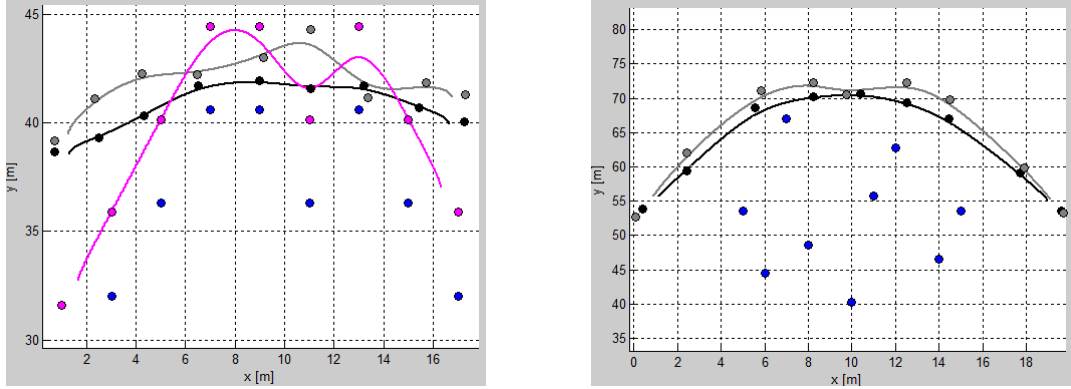
L'idea di base è quella che il comportamento di ogni punto di controllo sia maggiormente (o unicamente) influenzato dagli andamenti degli accelerometri più vicini. Supponendo una distribuzione iniziale totalmente arbitraria sia per i punti virtuali che per gli accelerometri, pare piuttosto ragionevole la scelta seguente:

$$w_{ij}(t) = \frac{1}{d_{ij}^k} \in]0, +\infty[, \forall i, j, t \text{ e } k \geq 0. \quad (3.18)$$

In alternativa si potrebbe effettuare una selezione degli accelerometri più restrittiva: fissato il punto di controllo i -esimo, ad ogni istante di tempo t , si tengono in considerazione solo gli $N_i \leq N_a$ accelerometri più vicini al punto stesso: j_1, j_2, \dots, j_{N_i} , con N_i arbitrario. Solo in relazione a questi accelerometri si utilizza la legge della distanza inversa precedente, mentre si rende il punto i insensibile ai rimanenti accelerometri: $w_{ij}(t) = 0$ per $j \neq j_1, j_2, \dots, j_{N_i}$.

Un'ultima possibilità potrebbe essere quella di considerare la rete come composizione di tanti sottosistemi indipendenti, in cui ogni accelerometro influisce sul corrispondente punto di controllo (dipendenza uno a uno, necessariamente $N_a = N_c = N$) e dunque vale: $W(t) = \mathbb{I}_N, \forall t$.

Si intuisce come le ultime due opzioni ("leggi di dipendenza locale") siano particolarmente o (unicamente) performanti per posizioni iniziali specifiche di tutti i punti del sistema e per andamenti di velocità degli accelerometri molto differenti tra loro, mentre la prima tipologia di scelta dei pesi ("legge di dipendenza globale") ha carattere più generale e dunque è da preferirsi, nonostante sia più funzionale per velocità degli ingressi abbastanza uniformi.



(a) disposizione iniziale frontale e corrispondenza punto-punto tra accelerometri e punti virtuali

(b) disposizione iniziale generica per tutti i punti del sistema

Figura 3.7: confronto evoluzioni del fronte per tipologie di pesi differenti. Sono riportati i frames più significativi tratti dalle simulazioni per diverse condizioni iniziali e andamenti degli accelerometri.

In blu sono rappresentati gli accelerometri, mentre i punti di controllo e le B-spline cubiche sono raffigurate in: nero per la prima tipologia di pesi, in grigio per la seconda e in viola per la terza.

Parametri comuni utilizzati: $N_a = N_c = 9$, $N_{seg} = 8$, tempo di campionamento $T_c = 10^{-2}$ s, tempo di simulazione $T = 100$ s, $k_{el} = 1$ N/m, $b_d = 10$ Ns/m, $L = D_0 - 1_{N_c} \in \mathbb{R}^9$ [m] con $D_0 = [d_{ij}(0)] \in \mathbb{R}^9$ [m] matrice delle distanze reciproche iniziali. Si sono scelte come condizioni al contorno quelle di Neumann, con tangenza verticale.

I frames precedenti sono tratti da simulazioni effettuate per le seguenti posizioni iniziali dei punti e accelerazioni misurate dagli strumenti:

$$a) X_a(0) = X_c(0) = [1 : 2 : 17]^T m,$$

$$Y_a(0) = 2 \cdot 1_9 m, Y_c(0) = 6 \cdot 1_9 m,$$

e accelerazioni risultanti costanti e solo lungo asse y :

$$\ddot{P}_y^a(t) = 0.1 \left[1.2 \ 1.4 \ 1.6 \ 1.8 \ 1.8 \ 1.6 \ 1.8 \ 1.6 \ 1.4 \right]^T m/s^2, \forall t;$$

$$b) X_a(0) = \left[10 \ 14 \ 15 \ 12 \ 7 \ 5 \ 6 \ 8 \ 11 \right]^T m,$$

$$Y_a(0) = \left[13 \ 15 \ 20 \ 25 \ 25 \ 20 \ 13 \ 15 \ 20 \right]^T m,$$

$$X_c(0) = \left[0 \ 2 \ [6 : 2 : 14] \ 18 \ 20 \right]^T m,$$

$$Y_c(0) = \left[20 \ 25 \ 32 \ 34 \ 35 \ 34 \ 32 \ 25 \ 20 \right]^T m,$$

e accelerazioni risultanti costanti e solo lungo asse y :

$$\ddot{P}_y^a(t) = 0.1 \left[1.3 \ 1.5 \ 1.6 \ 1.8 \ 2 \ 1.6 \ 1.5 \ 1.6 \ 1.7 \right]^T m/s^2, \forall t.$$

Dalle innumerevoli simulazioni compiute, si è portati a dire che la legge di assegnazione dei pesi (3.18) sia più adatta a rappresentare la deformazione di una struttura solida o di un fluido ad alta viscosità (sistema più compatto e mobilità limitata dei punti virtuali), la seconda e terza alternativa sembrerebbero invece più consone a modellare l'evoluzione di un fluido poco viscoso, vista la maggior mobilità dei punti di controllo, a parità dei valori di tutti gli altri parametri della rete.

Capitolo 4

Modelli in spazio di stato per Debris-Flows

4.1 Modelli a fase fluida equivalente

Si riportano in seguito una serie di modelli a due dimensioni che approssimano il comportamento di un flusso detritico in avanzamento (generalmente a fase mista) con quello di un "fluido equivalente" in movimento (modello fluidodinamico mono-fase), governato dalle equazioni di continuità e conservazione della quantità di moto nel sistema di riferimento considerato.

Tutti i modelli matematici che rientrano in questa categoria sono sviluppati a partire dalle equazioni di Navier-Stokes generalizzate per fluidi comprimibili; ciò che invece distingue realmente un modello dall'altro sono le differenti relazioni e parametri reologici utilizzati nella descrizione delle tensioni di taglio (shear stresses) che si suppone si manifestino nel fluido equivalente, generalmente non-newtoniano.

E' importante ricordare che, essendo questi modelli derivati dalla fluidodinamica, l'approccio di studio naturale e più immediato è quello euleriano. Per gli scopi di questo lavoro è necessario però trattare l'evoluzione delle grandezze caratterizzanti il fluido mediante un approccio lagrangiano; al fine di implementare i modelli in spazio di stato risulta allora indispensabile la tecnica di approssimazione SPH precedentemente esposta.

Per ogni modello presentato, si partirà dunque dalla trattazione euleriana (attenzione sulle variazioni temporali delle grandezze fondamentali del fluido) per passare in un secondo momento a quella lagrangiana, indispensabile per poter simulare l'avanzamento del fronte di un debris flow.

4.1.1 Primo modello: flussi detritici a sedimenti rocciosi

Il primo modello matematico considerato è stato sviluppato per simulare flussi detritici a larga scala innescati da rapide frane e costituiti prevalentemente da sedimenti rocciosi (Stony Debris-Flows) (si veda [8]). In questo modello si suppone una netta distinzione tra sedimenti di grosse dimensioni e sedimenti fini; per questi ultimi si ipotizza un comportamento simile a quello dell'acqua interstiziale. Il parametro di soglia che distingue le due categorie di detriti è la grandezza D_c [m] che esprime il massimo diametro per i sedimenti che si comportano come un fluido.

Sulla base di questa grandezza si definiscono i parametri fondamentali del modello:

- $C_d = (1-w)(1-P(D_c))$ concentrazione di sedimenti depositati nelle nicchie di distacco (solchi nel suolo provocati dal passaggio della frana);
- $\bar{\rho} = \frac{\bar{w}\rho_w + (1-\bar{w})\rho_s P(D_c)}{\bar{w} + (1-\bar{w})P(D_c)}$ [kg/m³] densità equivalente del debris-flow mediata nello spazio e nel tempo;
- $P(D_c)$ rapporto tra numero di sedimenti con diametro minore di D_c e sedimenti in totale;
- ρ_w, ρ_s [kg/m³] densità dell'acqua interstiziale e dei sedimenti solidi rispettivamente;
- $D = d(D_c)$ [m] media pesata dei sedimenti con diametro superiore a D_c ;
- w contenuto d'acqua nel letto roccioso e nel suolo franato;
- \bar{w} contenuto d'acqua nel flusso detritico, mediato nello spazio e nel tempo;
- C_* concentrazione volumetrica di sedimenti sul letto del canale;

- i_{er} tasso di erosione-deposizione relativo ai sedimenti del letto roccioso.

Le equazioni (in forma differenziale-locale) costitutive il modello sono riportate in seguito ((4.1),(4.3)) e si riferiscono ad un sistema di riferimento cartesiano e bidimensionale. L'approccio considerato è quello euleriano.

La prima relazione esprime l'equazione di continuità per il volume totale del debris-flow:

$$\frac{\partial C_d h}{\partial t} + \frac{\partial C_d u h}{\partial x} + \frac{\partial C_d v h}{\partial y} = i_{er} C_* (1 - P(D_c)), \quad (4.1)$$

con: $u(x, y, t), v(x, y, t)$ [m/s] velocità del flusso lungo le direzioni x, y rispettivamente, $h(x, y, t)$ [m] profondità del debris-flow e

$$i_{er} = \begin{cases} \delta_e \frac{C_\infty - C_d}{C_* - C_\infty} \frac{q}{d(D_c)}, & \text{se } C_\infty \leq C_d \quad (\text{erosione}) \\ \delta_d \frac{C_\infty - C_d}{C_*} \frac{q}{h}, & \text{se } C_\infty > C_d \quad (\text{deposizione}) \end{cases} \quad (4.2)$$

I parametri $\delta_e \setminus \delta_d$ sono dei coefficienti inerenti alla velocità di erosione \setminus deposizione, q rappresenta la portata media per unità di larghezza del debris-flow e C_∞ indica la concentrazione di sedimenti all'equilibrio.

Le ultime due equazioni del modello descrivono la conservazione della quantità di moto lungo gli assi del piano cartesiano:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = g \sin(\theta_x) - \frac{\tau_x}{\rho h} \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = g \sin(\theta_y) - \frac{\tau_y}{\rho h} \end{cases} \quad (4.3)$$

con g [m/s²] accelerazione di gravità, $\theta_x \setminus \theta_y$ [rad] gradiente di superficie del flusso lungo la direzione $x \setminus y$, $\tau_x \setminus \tau_y$ [Pa] tensione tangenziale esercitata dal letto del fiume nella direzione $x \setminus y$ e tale che:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\tau_x \setminus \tau_y}{\bar{\rho}h} = \frac{(u \setminus v)\sqrt{u^2 + v^2}D^2}{8h^3 \left\{ C_d + (1 - C_d)\frac{\bar{\rho}}{\rho_s} \right\} \left\{ \left(\frac{C_*}{C_d} \right)^{1/3} - 1 \right\}^2}, \quad \text{se } C_d \geq 0.4C_* \\ \frac{\tau_x \setminus \tau_y}{\bar{\rho}h} = \frac{1}{0.49} \frac{(u \setminus v)\sqrt{u^2 + v^2}D^2}{h^3}, \quad \text{se } 0.01 < C_d \leq 0.4C_* \\ \frac{\tau_x \setminus \tau_y}{\bar{\rho}h} = \frac{gn_m^2(u \setminus v)\sqrt{u^2 + v^2}}{h^{4/3}}, \quad \text{se } C_d \leq 0.01 \end{array} \right. \quad (4.4)$$

dove $n_m [s/m^{1/3}]$ è il coefficiente di scabrezza di Manning e il simbolo \setminus indica la scelta tra le variabili corrispondenti.

Infine, per completezza, si riporta anche l'equazione che esprime la variazione d'elevazione della superficie del letto:

$$\frac{\partial z}{\partial t} = -i_{er}.$$

Si ricava ora il modello in spazio di stato a tempo discreto, servendosi dell'approccio lagrangiano in cui l'aggiornamento temporale delle variabili d'interesse avviene calcolando la derivata sostanziale delle stesse rispetto al tempo.

Ricordando innanzitutto che il modello di debris-flow serve a definire la dinamica degli accelerometri, si sfrutta la tecnica SPH per associare ad ogni particella di fluido\accelerometro i -esimo una posizione nel piano $x_i(t), y_i(t) [m]$ ed una velocità $u_i(t), v_i(t) [m/s]$ istantanea. L'informazione sull'accelerometro è completata dalla profondità del flusso $h_i(t) [m]$ nella posizione da esso occupata.

Lo stato complessivo del sistema all'istante t sarà dunque:

$$\mathbf{z}(t) = [x_1(t) \dots x_{N_a}(t) \ y_1(t) \dots y_{N_a}(t) \ h_1(t) \dots h_{N_a}(t) \\ u_1(t) \dots u_{N_a}(t) \ v_1(t) \dots v_{N_a}(t)]^T \in \mathbb{R}^{5N_a},$$

con $t = kT_c [s]$, $k \in \mathbb{Z}^+$ e $T_c [s]$ periodo di campionamento scelto.

La discretizzazione temporale del modello a tempo continuo è effettuata ap-

prossimando le derivata temporale totale dello stato con la tecnica di Eulero in avanti:

$$\dot{\mathbf{z}}(t) \simeq \frac{\mathbf{z}(t+1) - \mathbf{z}(t)}{T_c}.$$

Le equazioni di aggiornamento di stato per ogni accelerometro-particella fluida sono le seguenti:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_i(t+1) = x_i(t) + T_c u_i(t), \quad i = 1, \dots, N_a \\ y_i(t+1) = y_i(t) + T_c v_i(t), \quad i = 1, \dots, N_a \\ h_i(t+1) = h_i(t) + T_c \left\{ \frac{i_{er}(h_i(t))}{(1-w)} - h_i(t) \tilde{\nabla} \cdot V(t) \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_i} \right\}, \quad i = 1, \dots, N_a \\ u_i(t+1) = u_i(t) + T_c \left\{ g \sin(\theta_x) - \frac{\tau_x(u_i(t), v_i(t), h_i(t))}{\bar{\rho} h_i(t)} \right\}, \quad i = 1, \dots, N_a \\ v_i(t+1) = v_i(t) + T_c \left\{ g \sin(\theta_y) - \frac{\tau_y(u_i(t), v_i(t), h_i(t))}{\bar{\rho} h_i(t)} \right\}, \quad i = 1, \dots, N_a \end{array} \right. \quad (4.5)$$

in cui i termini $i_{er}(h_i(t))$ e $\frac{\tau(x \setminus y)(u_i(t), v_i(t), h_i(t))}{\bar{\rho} h_i(t)}$ sono le espressioni in spazio di stato di (4.2) e (4.4) rispettivamente, mentre $\tilde{\nabla} \cdot V(t) \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_i}$ rappresenta l'approssimazione della divergenza del vettore velocità $V(t) = [u(t) \ v(t)]^T$ con tecnica SPH, nel punto (x_i, y_i) (si rimanda a 2.4).

Le uscite del sistema sono le posizioni degli accelerometri ed i valori $h_i(t)$, $\forall i$.

La mappa d'uscita è lineare nello stato e si può esprimere come segue:

$$\zeta(t) = C\mathbf{z}(t) = \left[x_1(t) \dots x_{N_a}(t) \quad y_1(t) \dots y_{N_a}(t) \quad h_1(t) \dots h_{N_a}(t) \right]^T \in \mathbb{R}^{3N_a}, \quad (4.6)$$

con $C = \left[\mathbb{I}_{3N_a} \quad \mathbb{O}_{3N_a \times 2N_a} \right]$.

Per poter simulare l'avanzamento del fronte del debris-flow occorre fare un ultimo passo: bisogna unire il modello per gli accelerometri (4.5) a quello del sistema che funge da interfacciamento tra gli stessi ed i punti di controllo che governano la forma del fronte (3.13). Lo stato associato al sistema a tempo discreto "unificato" sarà così definito:

$$\begin{aligned}
\mathbf{z}(t) &:= [\mathbf{z}_a(t) \quad \mathbf{z}_c(t)] \in \mathbb{R}^{5N_a+4N_c}, \\
\mathbf{z}_a(t) &:= [x_1^a(t) \dots x_{N_a}^a(t) \quad y_1^a(t) \dots y_{N_a}^a(t) \quad h_1^a(t) \dots h_{N_a}^a(t) \\
&\quad u_1^a(t) \dots u_{N_a}^a(t) \quad v_1^a(t) \dots v_{N_a}^a(t)]^T \in \mathbb{R}^{5N_a}, \\
\mathbf{z}_c(t) &:= [x_1^c(t) \dots x_{N_c}^c(t) \quad y_1^c(t) \dots y_{N_c}^c(t) \\
&\quad u_1^c(t) \dots u_{N_c}^c(t) \quad v_1^c(t) \dots v_{N_c}^c(t)]^T \in \mathbb{R}^{4N_c},
\end{aligned} \tag{4.7}$$

con N_a numero di accelerometri disposti sul campo e $N_c \leq N_a$ numero di punti virtuali che controllano la B-Spline cubica (fronte del flusso detritico), $\mathbf{z}_a(t)$ è lo stato associato agli accelerometri e ricavato dalle equazioni (4.5) mentre $\mathbf{z}_c(t)$ è lo stato relativo ai punti di controllo e ricavato dalle equazioni (3.13).

La mappa complessiva di aggiornamento di stato, in forma partizionata, diventa allora:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{z}_a(t+1) \\ \mathbf{z}_c(t+1) \end{bmatrix}}_{\mathbf{z}(t+1)} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{f}_{\mathbf{DF}}(\mathbf{z}_a(t)) \\ \mathbf{f}_{\mathbf{A2P}}(\mathbf{z}_a(t), \mathbf{z}_c(t)) \end{bmatrix}}_{\mathbf{f}(\mathbf{z}(t))}, \tag{4.8}$$

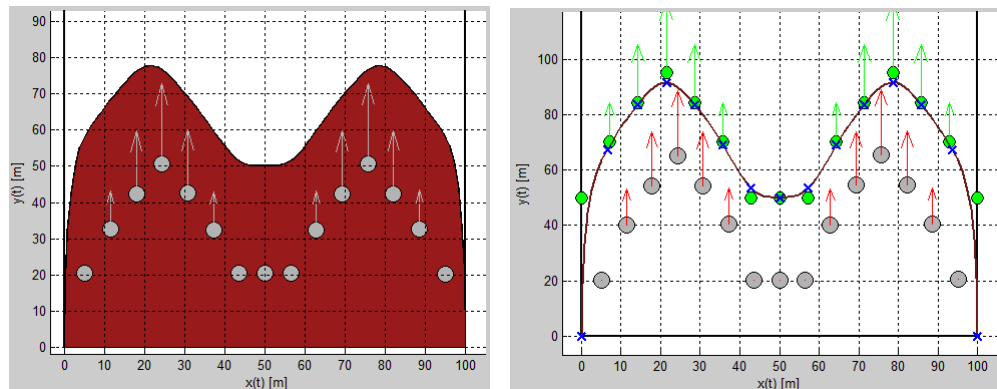
in cui $\mathbf{f}_{\mathbf{DF}}(\cdot)$ e $\mathbf{f}_{\mathbf{A2P}}(\cdot)$ riassumono le equazioni di aggiornamento presenti in (4.5) ed in (3.13) rispettivamente.

L'uscite del sistema unificato sono le stesse del sottosistema relativo agli accelerometri (4.6), visto che i punti di controllo non forniscono dati di misura. Questa scelta è più adatta a svolgere un successivo filtraggio statistico del modello.

$$\boldsymbol{\zeta}(t) = C\mathbf{z}(t) = [x_1^a(t) \dots x_{N_a}^a(t) \quad y_1^a(t) \dots y_{N_a}^a(t) \quad h_1^a(t) \dots h_{N_a}^a(t)]^T \in \mathbb{R}^{3N_a}, \tag{4.9}$$

$$\text{con } C = \begin{bmatrix} \mathbb{I}_{3N_a} & \mathbb{O}_{3N_a \times 2N_a + 4N_c} \end{bmatrix}.$$

Si riportano infine i risultati di una simulazione d'avanzamento del debris flow trattato in questo modello, in cui si è supposta la presenza di un ostacolo (o diramazione) nel canale principale di scorrimento. Inoltre tutti i valori scelti per i parametri di simulazioni e per i coefficienti significativi sono riportati in tabella (4.1).



(a) frame tratto dal video di simulazione (b) scheletro della struttura per l'avanzamento del flusso

Figura 4.1: simulazione dell'avanzamento del fronte del flusso detritico a larga scala, supponendo il canale ostruito o soggetto a diramazione.

Nella simulazione, il canale si estende lungo la direzione verticale del piano cartesiano (rette parallele in nero). In figura 4.1(b) si notano tutte e tre le strutture fondamentali sviluppate in questo lavoro: il modello di debris-flow associato agli accelerometri (cerchi in grigio e vettore velocità in rosso), il modello che movimentata i punti di controllo della curva parametrica (cerchi in verde) ed infine la B-Spline cubica che modella geometricamente il fronte (in marrone). I segmenti componenti la curva sono delimitati dai punti nodali (croci blu).

Le condizioni iniziali scelte per gli accelerometri fotografano un flusso detritico già in movimento all'istante t_0 , data la difficoltà nel ricreare la fase di triggering; si sono inoltre imposte le condizioni di no-slip presso i bordi est-ovest del canale (velocità degli accelerometri pressochè nulle nei pressi dei margini) e le profondità iniziali del flusso associate ad ogni accelerometro sono scelte tutte uguali, in mancanza di dati concreti relativi alla superficie libera.

$$\begin{aligned}
X_a(0) &= \left[x_W + 1 : \frac{x_E - x_W - 2}{N_a - 1} : x_E - 1 \right]^T m, \\
Y_a(0) &= 20 * \mathbf{1}_{N_a} m, \\
H_a(0) &= \mathbf{1}_{N_a} m, \\
U_a(0) &= \mathbf{0}_{N_a} m/s, \\
V_a(0) &= [0, 1, 2, 3, 2, 1, 0.1, 0.1, 0.1, 1, 2, 3, 2, 1, 0]^T m/s, \\
X_c(0) &= \left[x_W : \frac{x_E - x_W}{N_p - 1} : x_E \right]^T m, \\
Y_c(0) &= 50 * \mathbf{1}_{N_a} m, \\
U_c(0) &= V_c(0) = \mathbf{0}_{N_c} m/s
\end{aligned} \tag{4.10}$$

Per poter ricreare al meglio l'ostruzione causata dall'ipotetico ostacolo, si è preferito utilizzare il modello d' interfacciamento che rende la curva più flessibile, cioè quello in cui ogni punto di controllo è movimentato dal corrispondente accelerometro ($N_a = N_c$ e matrice dei pesi $W = I_{N_c}$, si rimanda alla trattazione del sistema di collegamento accelerometri-punti di controllo).

La curva B-spline utilizzata è di tipo clamped, adatta ad implementare facilmente le condizioni di tangenza verticale ai margini del canale, mentre il kernel $W(q)$, necessario per l'approssimazione degli operatori differenziali nella Smoothed Particle Dynamics, è di tipo anti-clustering e normalizzato.

Infine si riporta il grafico che riassume le posizioni assunte dal fronte in diversi istanti temporali

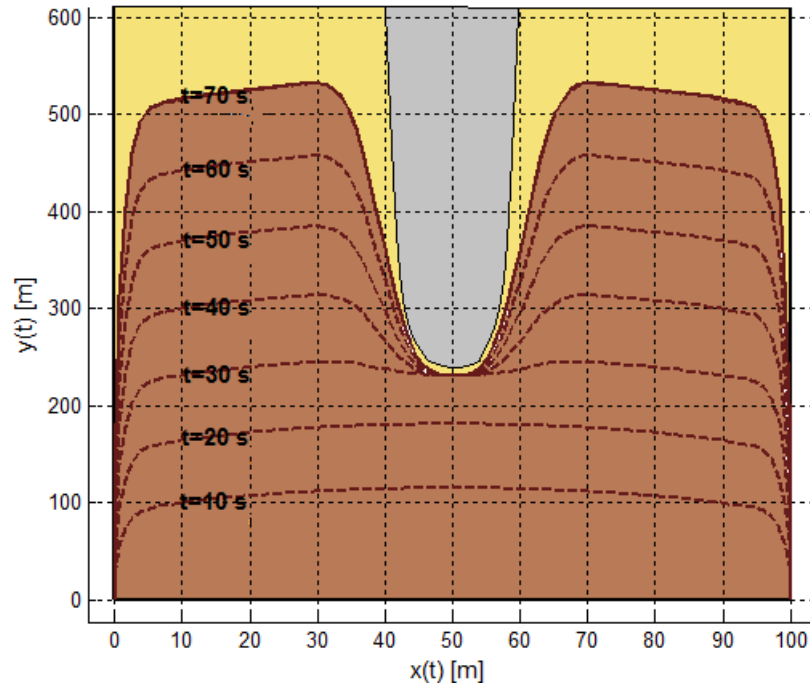


Figura 4.2: "fotografie" del fronte simulato negli istanti temporali scelti e per distribuzione parabolica delle velocità iniziali $V(0, x) = -0.25 \cdot 10^{-2} (x(0) - \frac{w_{ch}}{2}) + 7$, con w_{ch} larghezza del canale. In grigio si nota l'ostacolo roccioso, in giallo il letto del canale ed in marrone la colata detritica.

Prima di proseguire con i prossimi modelli, si ritiene utile soffermarsi sui termini di shear stress $\frac{\tau_x}{\rho h}$, $\frac{\tau_y}{\rho h}$. Essi approssimano le forze di attrito che si instaurano all'interno del flusso in movimento o nei contatti con le pareti del canale, dipendono e contemporaneamente contrastano la velocità istantanea del fluido equivalente e sono influenzati dal diametro medio pesato dei sedimenti di grandi dimensioni; più le dimensioni di questi sedimenti sono grandi e più le velocità degli accelerometri tendono a discostarsi dalle condizioni iniziali e ad uniformarsi ad un valore di regime comune più basso (ipotizzando una pendenza di canale trascurabile, come può presentarsi nelle fasi terminali del deflusso, cioè nei pressi del bacino di deposizione). Conviene allora modificare maggiormente i valori di D_c , $D = d(D_c)$, θ_x, θ_y e delle distribuzioni iniziali di velocità se si intende simulare scenari nettamente differenti.

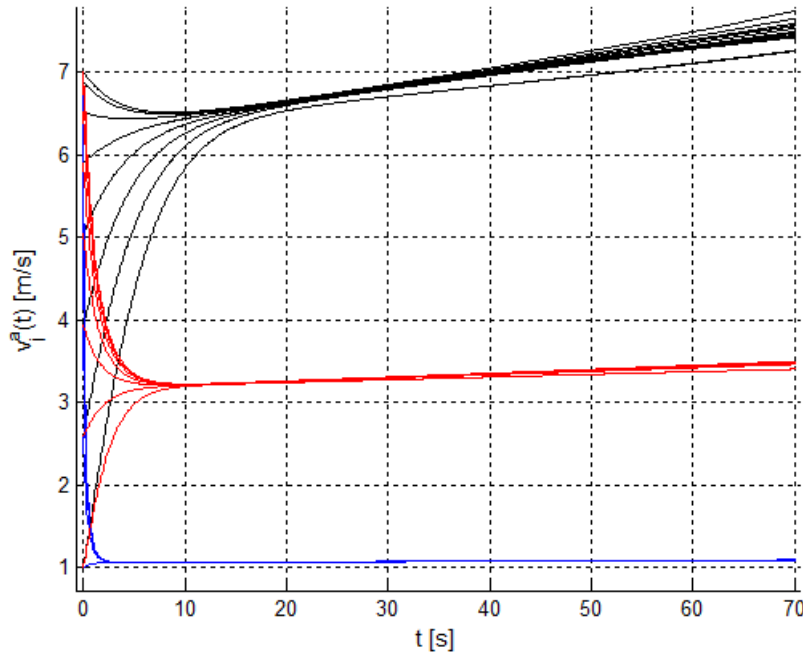


Figura 4.3: effetto della variazione del parametro $D = d(D_c)$ sulle velocità degli accelerometri $v_i^a(t)$ $i = 1, \dots, N_a$ lungo la direzione di scorrimento nel canale, in assenza di ostacoli. In nero sono riportati gli andamenti temporali per $D = 0.5$ m, in rosso per $D = 1$ m e in blu per $D = 3$ m.

Modifiche ai parametri apportate rispetto ai valori in tabella (4.1): $T = 70$ s, $\theta_y = 5$ deg. Infine le condizioni iniziali di velocità scelte sono: $V_a(0) = -(0.25 \cdot 10^{-2})(X_a(0) - \frac{(x_E - x_W)}{2})^2 + 7$ m/s

Un'altra questione importante da affrontare riguarda proprio l'impostazione delle pendenze o meglio dei gradienti di superficie del letto lungo le direzioni degli assi cartesiani.

Per semplicità, si sono scelti dei valori di θ_x, θ_y costanti nello spazio; si potrebbe in alternativa rendere tali parametri dipendenti in maniera continua dalle coordinate spaziali, ma data la presenza di forti discontinuità nel suolo sarebbe ancor più adeguato suddividere il canale virtuale a settori di area arbitraria (a seconda della risoluzione desiderata) ed affidare a ciascuno di essi dei valori pertinenti di pendenza, sulla base di dati concreti. La difficoltà nel ricavare un modello affidabile risiede proprio nella scelta di tutti i parametri appena citati, variabili da evento ad evento nello stesso sito e solitamente deducibili da misure granulometriche o da osservazioni dirette sul campo.

4.1.2 Secondo modello: flusso ad acqua e sedimenti fini

Questo modello numerico nasce dalla semplificazione del lavoro sviluppato in [5] per flussi a doppia fase ed approssima il comportamento di un debris-flow, composto prevalentemente da acqua e sedimenti fini, con quello di un fluido non-newtoniano ed incomprimibile. Tale semplificazione (da modello bifase a monofase) si è rivelata necessaria data la difficoltà dell'implementazione delle equazioni di governo mediante approccio euleriano (fase fluida) e lagrangiano (fase solida) in contemporanea, soprattutto per quanto riguarda la realizzazione delle forze di trasporto che mettono in collegamento le due fasi. Questi problemi sono solitamente risolti con tecniche agli elementi finiti e non geometriche, come in questo lavoro.

Il modello proposto è sostanzialmente governato dalle equazioni di Navier-Stokes a due dimensioni, mediate sulla profondità del fluido e basato sull'approccio euleriano e su coordinate cartesiane.

La prima equazione costitutiva è l'equazione di continuità:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial \bar{u}h}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}h}{\partial y} = 0, \quad (4.11)$$

in cui la variabile $h(x, y, t)$ [m] è la profondità del flusso e $\bar{u}(x, y, t)$, $\bar{v}(x, y, t)$ [m/s] sono le velocità del flusso lungo gli assi cartesiani e mediate sulla profondità. Trattando, per ipotesi, un fluido incomprimibile si ha che $\nabla \cdot \bar{V} = \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} = 0$ (divergenza nulla per il campo vettoriale di velocità $\bar{V} = \begin{bmatrix} \bar{u} & \bar{v} \end{bmatrix}^T$) e dunque la (4.11) si semplifica in:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial h}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial h}{\partial y} = -h \nabla \cdot \bar{V} = 0, \quad (4.12)$$

Le equazioni di conservazione della quantità di moto sono invece:

$$\begin{cases} \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = -g(S_{fx} + \frac{\partial h}{\partial x}) \\ \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} = -g(S_{fy} + \frac{\partial h}{\partial y}) \end{cases} \quad (4.13)$$

con g [m/s^2] accelerazione di gravità e S_{fx}, S_{fy} tensioni di taglio agenti sul fluido lungo gli assi cartesiani e mediate sulla profondità ed esprimibili mediante la formulazione quadratica combinata con il modello reologico di Cross-Bingham:

$$S_{fx} = \frac{\mu_{eff}^u \dot{\gamma}_u}{\rho g h} + \frac{n_m^2 \bar{u}^2}{h^{4/3}} \quad S_{fy} = \frac{\mu_{eff}^v \dot{\gamma}_v}{\rho g h} + \frac{n_m^2 \bar{v}^2}{h^{4/3}} \quad (4.14)$$

con $\dot{\gamma}_u = \frac{3\bar{u}}{h}$ [Hz], $\dot{\gamma}_v = \frac{3\bar{v}}{h}$ [Hz] e $\mu_{eff}^{u,v}$ [Pas] coefficienti di viscosità effettiva del fluido lungo gli assi cartesiani e definiti da:

$$\mu_{eff}^u = \mu \frac{10^3 + K_B \dot{\gamma}_u}{1 + K_B \dot{\gamma}_u} \quad \mu_{eff}^v = \mu \frac{10^3 + K_B \dot{\gamma}_v}{1 + K_B \dot{\gamma}_v}$$

dove $K_B = \frac{10^3 \mu}{\tau_y}$ [s] e infine i parametri fondamentali viscosità dinamica μ [Pas] e la tensione di snervamento τ_y [Pa] sono considerati come funzioni della concentrazione volumetrica di sedimenti C_v :

$$\mu = \alpha_1 e^{\beta_1 C_v} \quad \tau_y = \alpha_2 e^{\beta_2 C_v} \quad (4.15)$$

I coefficienti empirici $C_v, \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ derivano direttamente da valutazioni sul campo e dati empirici.

Analogamente a quanto fatto per il modello precedente, si ricava il sistema in spazio di stato a tempo discreto, avvalendosi sempre dell'approccio lagrangiano con tecnica SPH che coinvolge N_a accelerometri-punti di fluido in totale. Il passaggio da sistema a tempo continuo a tempo discreto avviene in conseguenza della discretizzazione di Eulero in avanti per le derivate temporali.

In questo caso, dall'equazione (4.12), si nota che la derivata totale temporale della profondità rimane costante su ogni particella di fluido, cioè $\frac{D}{Dt} h_i(t) := \dot{h}_i(t) = 0$, $\forall i$ e dunque, discretizzando nel tempo, si ottiene: $h_i(t+1) = h_i(t) = h_i(0) =:$

$h_i^0, \forall i$.

Lo stato complessivo del sistema sarà così formato:

$$\mathbf{z}(t) = \left[x_1(t) \dots x_{N_a}(t) \quad y_1(t) \dots y_{N_a}(t) \quad \bar{u}_1(t) \dots \bar{u}_{N_a}(t) \quad \bar{v}_1(t) \dots \bar{v}_{N_a}(t) \right]^T \in \mathbb{R}^{4N_a}, \quad (4.16)$$

Le equazioni per l'aggiornamento dello stato degli accelerometri sono le seguenti:

$$\begin{cases} x_i(t+1) = x_i(t) + T_c \bar{u}_i(t), \quad i = 1, \dots, N_a \\ y_i(t+1) = y_i(t) + T_c \bar{v}_i(t), \quad i = 1, \dots, N_a \\ \bar{u}_i(t+1) = \bar{u}_i(t) - gT_c \left\{ \frac{\tilde{\partial} h(0)}{\tilde{\partial} x} \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_i} + S_{fx}(\bar{u}_i, h_i^0) \right\}, \quad i = 1, \dots, N_a \\ \bar{v}_i(t+1) = \bar{v}_i(t) - gT_c \left\{ \frac{\tilde{\partial} h(0)}{\tilde{\partial} y} \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_i} + S_{fy}(\bar{v}_i, h_i^0) \right\}, \quad i = 1, \dots, N_a \end{cases} \quad (4.17)$$

dove T_c [s] è il periodo di campionamento, $S_{fx}(\bar{u}_i, h_i^0)$ e $S_{fy}(\bar{v}_i, h_i^0)$ sono le tensioni di taglio presenti in (4.14) e riscritte in termini di variabili di stato, mentre $\frac{\tilde{\partial} h(0)}{\tilde{\partial} x} \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_i}$ e $\frac{\tilde{\partial} h(0)}{\tilde{\partial} y} \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_i}$ sono le componenti cartesiane del vettore $\tilde{\nabla} h(0) \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_i}$, cioè del gradiente di $h(0)$ approssimato con la tecnica SPH e valutato nel punto (x_i, y_i) (2.4).

Le variabili d'uscita sono definite dalla mappa statica e lineare seguente:

$$\boldsymbol{\zeta}(t) = \left[x_1(t) \dots x_{N_a}(t) \quad y_1(t) \dots y_{N_a}(t) \right] = C \mathbf{z}(t) \in \mathbb{R}^{2N_a}, \quad (4.18)$$

in cui $C = \left[\mathbb{I}_{2N_a} \quad \mathbb{O}_{2N_a} \right]$.

I passi svolti per simulare l'avanzamento del fronte del debris sono gli stessi esposti nel modello precedente:

- noto il numero di sensori disponibili N_a e scelto il numero di punti di controllo del fronte N_c , si crea il vettore di stato unificato e la dinamica del

sistema congiunto esattamente come in (4.8); $f_{DF}(\cdot)$ si riferisce, in questo caso, all'aggiornamento della dinamica dei sensori in (4.17), la dinamica dei punti di controllo è invece governata sempre dalla stessa equazione di aggiornamento $f_{A2P}(\cdot)$, che riceve in ingresso lo stato degli accelerometri. Riassumendo:

$$\mathbf{z}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{z}_a(t) & \mathbf{z}_c(t) \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^{4(N_a+N_c)},$$

con $\mathbf{z}_a(t)$ stesso di (4.16);

- le uscite del sistema complessivo sono ancora le posizioni dei sensori:

$$\zeta(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbb{I}_{2N_a} & \mathbb{O}_{2N_a \times 4N_c} \end{bmatrix}}_C \begin{bmatrix} \mathbf{z}_a(t) \\ \mathbf{z}_c(t) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2N_a}, \quad (4.19)$$

- per quanto riguarda l'applicazione del moto SPH, si è privilegiata un'approssimazione non normalizzata dell'operatore gradiente in modo da velocizzare la computazione; si sono considerati unicamente kernel anti-clustering al fine di evitare fenomeni irrealistici di sovrapposizione tra le particelle che identificano gli strumenti di misura;
- la curva parametrica che modella il fronte è sempre una basis-spline di terzo grado e di tipo stretto;
- nel modello d'interfacciamento sensori-punti virtuali della spline (abbreviato con la sigla "A2P") ogni accelerometro aziona solo il corrispondente punto di controllo ($N_a = N_c$ e matrice dei pesi $W = I_{N_c}$). Tale scelta si è rivelata ancora una volta vincente per poter simulare realisticamente l'effetto di propagazione del flusso in scenari con ostacoli o diramazioni;
- si è supposto un canale che si estende lungo la direzione y del piano.

Seguono dei frame significativi estratti dai video di simulazione dell'avanzamento del fronte (figure (4.4) e (4.5)). Il primo si basa su uno scenario privo di

ostruzioni nel canale mentre il secondo mostra le posizioni del fronte nel tempo in presenza di due ostacoli. I parametri utilizzati per le simulazioni sono gli stessi riportati in tabella (4.1) fino al coefficiente di Manning. I valori scelti per i coefficienti caratteristici del modello sono invece: $C_v = 0.7$, $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 1$, $\beta_1 = 1$, $\beta_2 = 0.5$, in modo tale da avere tensioni di taglio non troppo elevate.

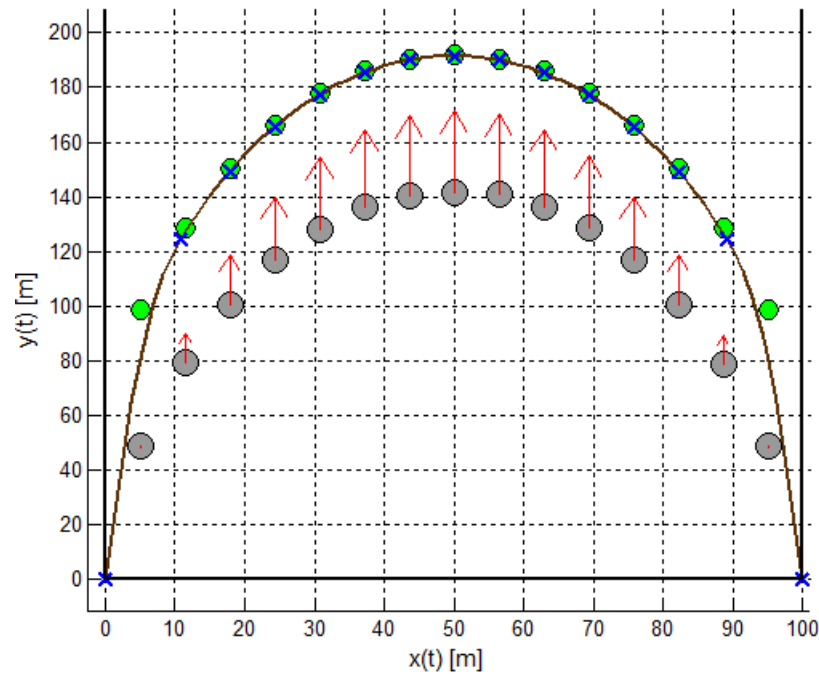


Figura 4.4: frame tratto dalla simulazione di avanzamento del debris-flow in assenza di ostacoli. Si vedono i punti di controllo della spline in verde, gli accelerometri in grigio e il fronte in marrone.

Le condizioni iniziali utilizzate in tutte le simulazioni sono le seguenti, motivate da ragionamenti analoghi a quanto esposto nel modello precedente (distribuzione parabolica delle velocità iniziali $v^a(x, 0)$ al variare di x , flusso inizialmente in movimento):

$$\begin{aligned}
X_a(0) &= \left[x_W + 1 : \frac{x_E - x_W - 2}{N_a - 1} : x_E - 1 \right]^T m, \\
Y_a(0) &= 20\mathbf{1}_{N_a} m, \\
H_a(0) &= 3\mathbf{1}_{N_a} m, \\
U_a(0) &= \mathbf{0}_{N_a} m/s, \\
V_a(0) &= -(2 \cdot 10^{-3}) \left(X_a(0) - \frac{(x_E - x_W)}{2} \right)^2 + 5 m/s, \\
X_c(0) &= \left[x_W : \frac{x_E - x_W}{N_p - 1} : x_E \right]^T m, \\
Y_c(0) &= 50\mathbf{1}_{N_a} m, \\
U_c(0) &= V_c(0) = \mathbf{0}_{N_c} m/s
\end{aligned}$$

Le grandezze più difficili da impostare sono i valori $h_i^a(0)$ di profondità del flusso associate a ciascun accelerometro. Variando il range di tali quantità, il parametro di smoothing h_{SPH} e la densità del fluido equivalente ρ , è possibile transitare da una dinamica caratteristica di un moto turbolento ad un moto laminare. Nelle simulazioni mostrate in questo caso non si nota un moto turbolento; l'esiguo volume associato ad ogni punto di fluido ($m_i^a \simeq 200 g$ e densità circa quella dell'acqua $\rho \simeq 1000 kg/m^3$) pesa la differenza punto-punto tra i valori di profondità nell'approssimazione SPH. Per tale motivo i valori del gradiente di profondità sono praticamente trascurabili. D'altra parte, un aumento sproporzionato della massa dei punti di fluido o la diminuzione della densità del debris-flow risulterebbero troppo irrealistici in questo contesto, verrebbero infatti a mancare due caratteristiche importanti: strumentazione leggera (dato che gli accelerometri sono identificati con i punti di fluido) e flusso liquido.

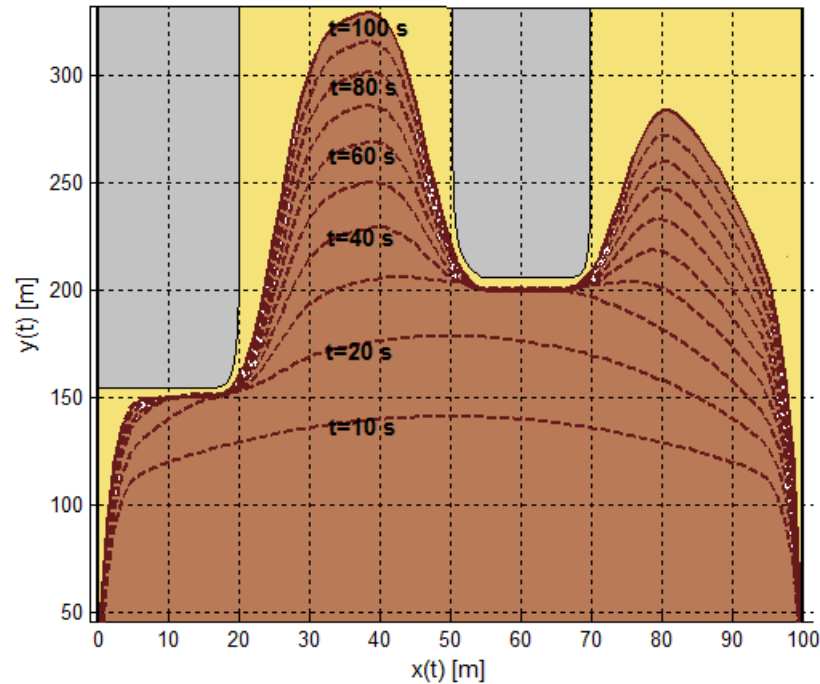


Figura 4.5: visualizzazione delle posizioni del fronte (tratteggio marrone) negli istanti indicati. Si è simulata la presenza di ostacoli (in grigio) sul letto del canale (in giallo)

4.1.3 Terzo modello: flussi a sedimenti piroclastici

Il terzo modello proposto è ripreso dall'articolo riportato in [9], in cui si è sviluppato un modello bidimensionale per approccio euleriano, basato su studi e rilevamenti postumi all'evento di debris-flow occorso nell'ottobre 1954 nella regione Campania, ed in particolare nella cittadina di Maiori (5700 abitanti), collocata a circa 20 km ad ovest di Salerno nei pressi del bacino alluvionale del torrente Regina (area di circa 33 km²).

Questo enorme evento si è manifestato in seguito a intense e prolungate precipitazioni (area investita di circa 500 km²) ed ha provocato ingenti danni a strutture e proprietà private (320 edifici distrutti in totale) oltre che la perdita di 318 vite. I flussi detritici che si manifestano in queste zone sono caratterizzati da sedimenti prevalentemente piroclastici e si suppone siano governati dalle seguenti equazioni di continuità (4.20) e conservazione della quantità di moto lungo le direzioni degli assi cartesiani (4.21):

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial uh}{\partial x} + \frac{\partial vh}{\partial y} = 0, \quad (4.20)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = g(-S_{fx} + S_{ox} - \frac{\partial h}{\partial x}) \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = g(-S_{fy} + S_{oy} - \frac{\partial h}{\partial y}) \end{cases} \quad (4.21)$$

con $h(x, y, t)$ [m] e $u(x, y, t), v(x, y, t)$ [m/s] profondità e velocità del flusso detritico lungo gli assi rispettivamente, $S_{ox} \setminus S_{oy}$ pendenza del canale di scorrimento lungo la direzione $x \setminus y$ e

$$\begin{cases} S_{fx} = \frac{\tau_b}{\rho gh} + \frac{K \mu_b u}{8 \rho gh^2} + \frac{n_m^2 u^2}{h^{4/3}} \\ S_{fy} = \frac{\tau_b}{\rho gh} + \frac{K \mu_b v}{8 \rho gh^2} + \frac{n_m^2 v^2}{h^{4/3}} \end{cases} \quad (4.22)$$

componenti lungo gli assi della forze d'attrito dovute alla resistenza del canale di scorrimento. Infine τ_b [Pa] indica la tensione di snervamento, ρ [kg/m³] la densità del debris flow considerato come una mistura equivalente, g [m/s²] è l'accelerazione di gravità, μ_b [Pas] il coefficiente viscosità di Bingham, K indica il coefficiente di resistenza del flusso laminare e n_m [s/m^{1/3}] è il parametro di pseudo-resistenza di Manning che tiene conto delle perdite d'energia (velocità) dovute sia ad attrito per collisione che alla turbolenza. I parametri μ_b e τ_b sono definiti come funzioni esponenziali della concentrazione volumetrica di sedimenti C_v , esattamente come nel modello precedente (4.15).

Usando le stesse identiche tecniche di discretizzazione temporale e di approssimazione degli operatori differenziali viste nei due modelli precedenti, si ricava il sistema in spazio di stato in approccio lagrangiano che descrive la dinamica particellare del debris-flow in questione, in cui si considera un numero campione N_a di punti di fluido (coincidenti con gli accelerometri).

Le grandezze fondamentali che descrivono la dinamica discretizzata degli accelerometri sono raccolte nel vettore di stato

$$\mathbf{z}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \dots x_{N_a}(t) & y_1(t) \dots y_{N_a}(t) & h_1(t) \dots h_{N_a}(t) \\ u_1(t) \dots u_{N_a}(t) & v_1(t) \dots v_{N_a}(t) \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^{5N_a},$$

governato dalle equazioni di aggiornamento temporale

$$\left\{ \begin{array}{l} x_i(t+1) = x_i(t) + T_c u_i(t), \quad i = 1, \dots, N_a \\ y_i(t+1) = y_i(t) + T_c v_i(t), \quad i = 1, \dots, N_a \\ h_i(t+1) = h_i(t) (1 - T_c \tilde{\nabla} \cdot V(t)|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_i}), \quad i = 1, \dots, N_a \\ u_i(t+1) = u_i(t) + g T_c \left\{ S_{ox} - S_{fx}(u_i(t), h_i(t)) - \frac{\tilde{\partial} h(t)}{\tilde{\partial} x} \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_i} \right\}, \quad i = 1, \dots, N_a \\ v_i(t+1) = v_i(t) + g T_c \left\{ S_{oy} - S_{fy}(v_i(t), h_i(t)) - \frac{\tilde{\partial} h(t)}{\tilde{\partial} y} \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_i} \right\}, \quad i = 1, \dots, N_a \end{array} \right. \quad (4.23)$$

dove T_c [s] è il periodo di campionamento, $S_{fx}(u_i(t), h_i(t))$ e $S_{fy}(v_i(t), h_i(t))$ sono le espressioni per le tensioni di taglio in (4.22) riscritte in funzione delle variabili di stato e $\frac{\tilde{\partial} h(t)}{\tilde{\partial} x} \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_i}$ e $\frac{\tilde{\partial} h(t)}{\tilde{\partial} y} \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_i}$ sono le componenti cartesiane del vettore $\tilde{\nabla} h(t)|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_i}$, che esprime l'approssimazione mediante tecnica SPH del gradiente della profondità del flusso che si incontra nel punto $(x_i(t), y_i(t))$.

Infine si riportano le uscite del sistema, posizione e profondità del fluido associate ad ogni accelerometro calcolate mediante la relazione lineare:

$$\zeta(t) = C\mathbf{z}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \dots x_{N_a}(t) & y_1(t) \dots y_{N_a}(t) & h_1(t) \dots h_{N_a}(t) \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^{3N_a}, \quad (4.24)$$

$$\text{con } C = \begin{bmatrix} \mathbb{I}_{3N_a} & \mathbb{O}_{3N_a \times 2N_a} \end{bmatrix}.$$

Il procedimento per ottenere il sistema non lineare a tempo discreto che unisce la dinamica dei sensori a quella dei punti di controllo del fronte è analogo a quello

descritto negli altri due modelli. Basta infatti utilizzare le stesse identiche relazioni fornite in (4.8), in cui $f_{DF}(\cdot)$ riassume il modello (4.23). Le espressioni dello stato complessivo del sistema congiunto e dell'uscita sono identiche a quelle presenti in (4.7) e (4.9) nel primo modello.

In questo caso si è deciso di non riportare simulazioni, in quanto si nota che nelle equazioni di conservazione della quantità di moto (4.21) sono riassunte le caratteristiche fondamentali presenti negli altri due modelli: l'effetto dovuto alla pendenza del canale e comprimibilità del fluido (modello 1), effetto dovuto al gradiente della superficie libera del debris-flow, formulazione quadratica degli shear stresses nelle velocità e dipendenza esponenziale della viscosità dinamica e della tensione di snervamento dalla concentrazione di sedimenti (modello 2). Dunque i risultati di simulazione inerenti alla dinamica di questo sistema riproporrebbero le stesse problematiche trattate in precedenza.

4.2 Ulteriori modelli in spazio di stato

I modelli trattati in questa sezione presentano un carattere più generale rispetto ai precedenti. Questi modelli sono infatti utilizzati per simulare la dinamica di fluidi in generale e per tale motivo sono trattati per ultimi. La loro generalità implica un grado di approssimazione della realtà molto minore rispetto ai modelli specifici. Si presentano dunque tre ultimi modelli, ricavati dalla letteratura e riproposti in spazio di stato. In particolare il primo si basa su un'approssimazione numerica della dinamica sviluppata per il solo metodo SPH ed il secondo tratta il caso di fluidi governati principalmente da moti vorticosi. Infine il terzo modello è la riproposizione in spazio di stato del sistema di equazioni di Navier-Stokes per fluidi newtoniani (capitolo 1).

Si intende precisare che la procedura di connessione ai punti di controllo (aumento dello spazio di stato) ed alla spline che modella il fronte è identica a quella eseguita nei tre modelli specifici di debris-flow e perciò non sarà trattata in questa sezione.

Modello nativo SPH per fluidi non-newtoniani

Il modello qui proposto è tridimensionale e ricavato dalle equazioni non lineari di Navier Stokes:

$$\begin{cases} \frac{D\rho}{Dt}(t) + \rho(t)\nabla \cdot \mathbf{v}(t) = 0, \\ \rho(t)\frac{D\mathbf{v}}{Dt}(t) = -\nabla p(t) + \boldsymbol{\tau}_{int}(t) + \boldsymbol{\tau}_{bed}(t) + \mathbf{f}(t) \end{cases} \quad (4.25)$$

con $p(t) \in \mathbb{R} [Pa]$ pressione, $\rho(t) \in \mathbb{R} [kg/m^3]$ densità, $\mathbf{v}(t) = [u(t) v(t) w(t)]^T \in \mathbb{R}^3 [m/s]$ vettore delle velocità lungo gli assi cartesiani, $\boldsymbol{\tau}_{int}(t) [Pa]$ tensione di taglio viscosa interna, $\boldsymbol{\tau}_{bed}(t) [Pa]$ tensione di taglio viscosa dovuta al letto del canale e $\mathbf{f}(t) = \mathbf{g} \in \mathbb{R}^3 N/m^3$ forza esterna per unità di volume.

Le equazioni (4.25) sono discretizzate spazialmente utilizzando la tecnica SPH, mentre la discretizzazione temporale è stata compiuta col metodo di Eulero. Il sistema in spazio di stato discreto che si ricava è infine:

$$\begin{cases} \mathbf{x}_i(t+1) = \mathbf{x}_i(t) + T_c(\mathbf{v}_i(t) + \Delta\mathbf{v}_i(t)), \\ \rho_i(t+1) = \rho_i(t) + T_c \sum_{j=1}^N m_j (\mathbf{v}_i(t) - \mathbf{v}_j(t)) \cdot \nabla W_{ij} \\ \mathbf{v}_i(t+1) = \mathbf{v}_i(t) + T_c \left(- \sum_{j=1}^N m_j \left(\frac{p_j(t)}{\rho_j^2} + \frac{p_i(t)}{\rho_i^2} + \Pi_{ij} \right) \nabla W_{ij} + \mathbf{g} \right), \end{cases} \quad (4.26)$$

in cui i termini viscosi sono approssimati con il modello di viscosità artificiale

$$\Pi_{ij} = \frac{-\alpha_k \bar{c}_{ij} \mu_{ij} + \beta \mu_{ij}}{0.5(\rho_i - \rho_j)}, \quad (4.27)$$

dove

$$\mu_{ij} = \frac{(\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j) \cdot (\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j) h_{SPH}}{\|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\|^2 + \eta^2}$$

è il termine di viscosità dinamica associato all'interazione tra le particelle i e j (non costante per fluidi non-newtoniani), h_{SPH} è la smoothing length scelta, $\bar{c}_{ij} = \frac{c_i + c_j}{2}$, c_i, c_j sono le velocità del suono associate alle particelle corrispondenti (ordine di grandezza circa 10 volte superiore la massima velocità stimata), $\alpha_k = 0.1$ è il coefficiente di viscosità lineare e $\beta \simeq 0$ (caso di maggior regime

turbolento), $\eta = 0.05h_{SPH}$ è un fattore correttivo impiegato per prevenire divergenze numeriche qualora due particelle dovessero collidere.

La funzione nucleo utilizzata è la spline di terzo grado proposta da Monaghan (2.5) e si è preferita la formula simmetrizzata per il gradiente di pressione.

L'introduzione dei termini di viscosità artificiale è necessaria perchè il sistema di equazioni differenziali della fluidodinamica, essendo altamente non lineare ed iperbolico, conduce ad evoluzioni fortemente instabili e può produrre risultati spuri. Questi inconvenienti vengono limitati o soppressi con l'ausilio dei contributi artificiali specialmente nella simulazione di fronti d'urto. Inoltre questa formulazione della viscosità artificiale conserva il momento lineare ed angolare totali.

Per chiudere il problema correttamente occorre calcolare i valori di pressione per ogni particella; ciò si ottiene utilizzando la seguente equazione di stato:

$$p_i(t) = B \left[\left(\frac{\rho_i(t)}{\rho_0} \right)^\gamma - 1 \right], \quad (4.28)$$

in cui $\gamma = 7$, $\rho_0 = 2600 \text{ kg/m}^3$ è la densità di riferimento della superficie del terreno all'interno dell'area d'interesse, $B = \frac{c_0^2 \rho_0}{\gamma}$ e c_0 è la velocità di riferimento del suono considerando un basso numero di Mach ($0.01 \div 0.1$).

Infine il termine $\Delta \mathbf{v}_i(t)$ applicato nell'equazione di aggiornamento delle posizioni $\mathbf{x}_i(t) = [x_i(t) \ y_i(t) \ z_i(t)]^T \in \mathbf{R}^3$ è calcolato con

$$\Delta \mathbf{v}_i(t) = 0.5 \sum_{j=1}^N m_j \frac{(\mathbf{v}_j - \mathbf{v}_i)}{\rho_i - \rho_j} W_{ij}$$

e rappresenta un fattore correttivo (tecnica XSPH) che costringe le particelle a muoversi con una velocità dipendente dal valore medio locale (nel neighbourhood di i).

Lo stato del sistema (4.26) è dato da:

$$\mathbf{z}(t) = [x_1(t) \dots x_{N_a}(t) \ y_1(t) \dots y_{N_a}(t) \ z_1(t) \dots z_{N_a}(t) \ \rho_1(t) \dots \rho_{N_a}(t) \ u_1(t) \dots u_{N_a}(t) \ v_1(t) \dots v_{N_a}(t) \ w_1(t) \dots w_{N_a}(t)]^T \in \mathbb{R}^{7N_a},$$

con N_a numero di accelerometri identificati con le particelle di fluido, mentre le uscite (posizioni accelerometri) sono calcolate con l'ormai usuale relazione lineare $\zeta(t) = C\mathbf{z}(t) \in \mathbb{R}^{3N_a}$, dove $C = \begin{bmatrix} \mathbb{I}_{3N_a} & \mathbb{O}_{4N_a} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3N_a \times 7N_a}$.

A differenza di tutti gli altri modelli in spazio di stato esposti (nati in approccio euleriano, convertiti in descrizione lagrangiana e discretizzati spazialmente con i kernel), questo modello è stato pensato per un'implementazione diretta in SPH ([10] e [11]).

Modello velocità-vorticità-moto browniano per fluidi incomprimibili

Il modello in questione si basa essenzialmente sul lavoro svolto da Cuzol e Memin [12], in cui i fenomeni vorticosi sono trattati come entità discretizzate da particelle.

Le equazioni che governano il moto di questi punti di vortice derivano da quelle sviluppate in (1.22) e sono semplificate per i fluidi incomprimibili e per il caso bidimensionale:

$$\frac{D\omega}{Dt}(t) = \nu \nabla^2 \omega(t) \quad (4.29)$$

$$\text{dove } \omega(t) = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}.$$

Essendo il campo di velocità solenoidale (cioè a divergenza nulla per l'incomprimibilità supposta), la velocità $\mathbf{v}(t)$ delle particelle può essere espressa come il gradiente ortogonale di un potenziale scalare [12], cioè:

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \nabla^\perp \phi(\mathbf{x}) = \left[\frac{\partial \phi(\mathbf{x})}{\partial y} \quad - \frac{\partial \phi(\mathbf{x})}{\partial x} \right]^T \in \mathbb{R}^2. \quad (4.30)$$

Il potenziale ϕ è soluzione dell'equazione di Poisson: $\nabla^2 \phi(\mathbf{x}) = \omega(\mathbf{x})$. Scegliendo allora la funzione di Green associata all'operatore lagrangiano in 2D [12],

$G(\mathbf{x}) = \frac{1}{2\pi} \log(\|\mathbf{x}\|) \in \mathbb{R}$, la soluzione della equazione di Poisson si scrive come:

$$\phi(\mathbf{x}) = G * \omega(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^2} G(\mathbf{x} - \mathbf{u}) \omega(\mathbf{u}) d\mathbf{u}. \quad (4.31)$$

La velocità delle particelle può essere infine calcolata mediante l'integrale di Biot-Savart:

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = K * \omega(\mathbf{x}), \quad (4.32)$$

che lega la componente solenoidale del campo vettoriale di velocità $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ allo scalare vorticità $\omega(\mathbf{x})$. La funzione $K(\mathbf{x})$ è semplicemente il gradiente ortogonale

della funzione di Green: $K(\mathbf{x}) = \nabla^\perp G(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{x}^\perp}{2\pi\|\mathbf{x}\|^2}$, con $\mathbf{x}^\perp(t) = [y(t) \quad -x(t)]^T$. Considerando allora N particelle di vortice (compresi gli N_a accelerometri) il sistema in spazio di stato a tempo discreto e bidimensionale che si ricava è il seguente:

$$\begin{cases} x_i(t+1) = x_i(t) + T_c \left(\frac{y_i(t)}{2\pi\|\mathbf{x}_i(t)\|^2} \omega_i(t) + \bar{u} \right) + \sqrt{2\nu} (F_i^x(t) - F_i^x(t-1)) \\ y_i(t+1) = y_i(t) + T_c \left(\frac{-x_i(t)}{2\pi\|\mathbf{x}_i(t)\|^2} \omega_i(t) + \bar{v} \right) + \sqrt{2\nu} (F_i^y(t) - F_i^y(t-1)) \\ \omega_i(t+1) = \omega_i(t) + T_c \tilde{\nabla}^2 \omega(t) \Big|_{\mathbf{x}(t)=\mathbf{x}_i(t)} \end{cases} \quad (4.33)$$

per $i = 1, \dots, N$ e con \bar{u}, \bar{v} componenti aggiuntive delle velocità (costanti di trasporto supposte note o stimate, necessarie in caso di dominio non limitato), $\mathbf{F}(t) \sim N(\mathbb{O}_{2N}, 2\nu T_c \mathbb{I}_{2N})$ è una perturbazione Gaussiana legata alla diffusione del calore (forza di Langevin trattata nel moto browniano, si rimanda al primo capitolo), con $\nu = \frac{\mu}{\rho}$ viscosità cinematica e ρ assunta costante nel tempo e uguale per tutte le particelle.

Lo stato del sistema è espresso dal vettore

$\mathbf{z}(t) = [x_1(t), \dots, x_N(t) \quad y_1(t), \dots, y_N(t) \quad \omega_1(t), \dots, \omega_N(t)]^T \in \mathbb{R}^3$ mentre le componenti del vettore d'uscita $\boldsymbol{\zeta}(t) \in \mathbb{R}^{2N_a}$ sono le posizioni dei soli accelerometri all'istante corrente.

Ancora una volta l'operatore differenziale, che compare a secondo membro nell'equazione di aggiornamento della vorticità, esprime l'approssimazione SPH del Laplaciano di ω (smoothing length $5m$) calcolata nella posizione occupata della particella i all'istante $t = kT_c$ [s].

Variando i parametri ν, \bar{u}, \bar{v} e le condizioni iniziali per la vorticità $\omega_i(0) \forall i$ è possibile alterare le tre dinamiche fondamentali alla base del modello: vorticità, diffusione e trasporto.

Si mostra di seguito un frame tratto dalla simulazione del sistema appena esposto, in cui i valori utilizzati per i parametri sono: $T_c = 0.1$ s campionamento, $T = 50$ s durata simulazione, $\nu = \frac{1}{10^3} N \cdot s \cdot m^2/kg$ (bassa diffusione), $m_i = 0.2$ kg masse particelle, $N_a = 15$ numero di accelerometri e $N = 200$ numero totale di particelle di fluido (compresi gli strumenti di misura). Per simulare una regione del canale

ad alta vorticosità si è scelta una velocità di trasporto pari a $\bar{\mathbf{v}} = [0.1 \ 0]^T \text{ m/s}$, e come condizioni iniziali per la vorticità $\Omega(0) = 10 * \mathbf{1}_N \text{ s}^{-1}$.

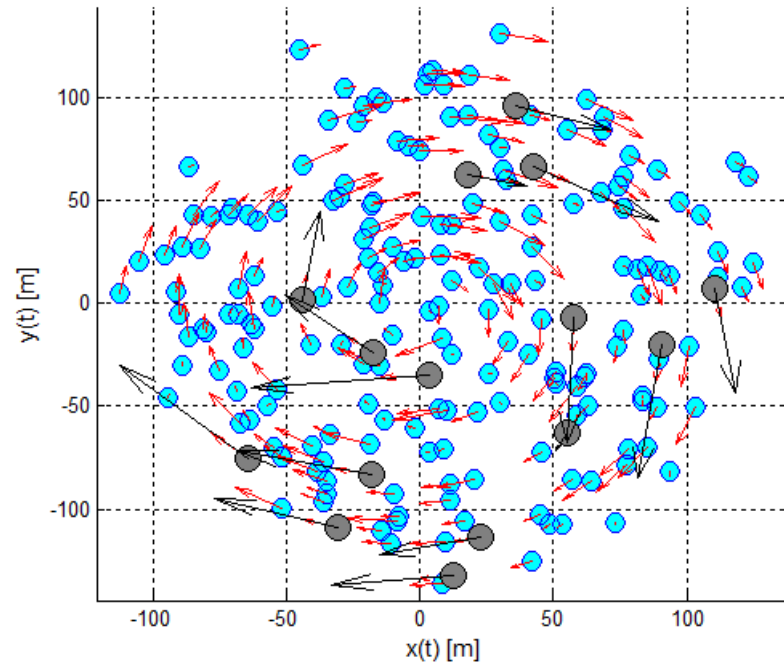


Figura 4.6: frame tratto dalla simulazione del modello per fluidi ad alta vorticità. I cerchi più grandi in grigio evidenziano gli accelerometri mentre quelli più piccoli e azzuri rappresentano particelle di fluido generiche. I vettori velocità sono mostrati in nero per gli accelerometri ed in rosso per i punti di fluido.

Modello per fluidi incomprimibili e newtoniani

In quest'ultimo modello la dinamica di un debris flow è approssimata con quella di fluido viscoso incomprimibile e newtoniano (approssimazione talvolta utilizzata in letteratura [4]).

Le equazioni di aggiornamento in spazio di stato sono ricavate direttamente dalle equazioni di Navier Stokes (1.15) in 2D e leggermente modificate per includere le pendenze del canale lungo gli assi cartesiani:

$$\begin{cases} x_i(t+1) = x_i(t) + T_c u(t), \\ y_i(t+1) = y_i(t) + T_c v(t), \\ u_i(t+1) = u_i(t) + T_c \left(-\frac{1}{\rho} \frac{\tilde{\partial} p(t)}{\tilde{\partial} x} \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_i} + \nu \tilde{\nabla}^2 u(t) \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_i} + g \sin(\theta_x) \right), \\ v_i(t+1) = v_i(t) + T_c \left(-\frac{1}{\rho} \frac{\tilde{\partial} p(t)}{\tilde{\partial} y} \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_i} + \nu \tilde{\nabla}^2 v(t) \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_i} + g \sin(\theta_y) \right), \end{cases} \quad (4.34)$$

per $i = 1, \dots, N_a$ e con: N_a numero di accelerometri posizionati sul campo, T_c [s] periodo di campionamento, θ_x, θ_y [rad] pendenze del canale rispetto assi coordinati, densità $\rho = \rho_i(0) = \text{cost} \forall i$ (incomprimibilità), $\nu = \frac{\mu}{\rho}$ viscosità cinematica. Infine i termini $\tilde{\nabla} p(t) \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_i}$ e $\tilde{\nabla}^2 \mathbf{v}(t) \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_i}$ rappresentano sempre le approssimazioni SPH, simmetriche e non normalizzate, del gradiente e del laplaciano della pressione e della velocità, rispettivamente, calcolate nella posizione $\mathbf{x}_i(t)$ all'istante discreto t .

L'equazione di stato utilizzata per il calcolo della pressione statica è la stessa di (1.17).

Lo stato $\mathbf{z}(t) \in \mathbb{R}^{4N_a}$ è composto dalle posizioni e velocità di tutti gli N_a accelerometri (4.17) e in uscita sono rese solo le loro posizioni (4.18).

tempo di simulazione T	100 s
tempo di campionamento T_c	$10^{-3}s$
numero accelerometri N_a	15
numero p.ti controllo fronte N_c	15
massa per accelerometro m_a	0.2 kg
massa per p.to controllo m_p	0.2 kg
bound canale rettangolare x_W, x_E, y_S, y_N	0,100,0,1000 m
smoothing parameter h_{SPH}	10 m
lunghezze molle all'equilibrio $[L_{eq}]_{ij}$	$[D^0]_{ij}$ [m], $i = 1, \dots, N_a, j = 1, \dots, N_c$
costanti elastiche molle $[k_{el}]_{ij}$	1, N/m , $i = 1, \dots, N_a, j = 1, \dots, N_c$
coefficienti smorzamento $[b_d]_{ij}$	10, Pas , $i = 1, \dots, N_a, j = 1, \dots, N_c$
n_m	$0.05 s/m^{1/3}$
θ_x	0 deg
θ_y	10 deg
w, \bar{w}	0.34, 0.37
$\rho_w, \bar{\rho}$	$10^3, 5.14 \cdot 10^3 kg$
D_c	$10^{-2} m$
$P(D_c)$	0.5
$d(D_c)$	0.5 m
δ_e, δ_d	$7 \cdot 10^{-4}, 5 \cdot 10^{-2}$
C_d, C_*, C_∞	0.33, 0.7, 0.5
q	$418 \cdot 10^{-2} m^2/s$

Tabella 4.1: tabella riassuntiva di tutti i parametri presenti nel primo modello di debris-flow.

Capitolo 5

Filtraggio statistico dei modelli

L'ultima fase del lavoro svolto è dedicata all'applicazione della teoria del filtraggio statistico ai modelli in spazio di stato proposti nel capitolo precedente.

L'algoritmo ricorsivo scelto per il filtraggio implementa il ben noto Extended Kalman Filter (EKF).

Si propone dunque un esempio di filtraggio applicato ad uno solo dei modelli sviluppati, essendo sufficiente per la comprensione della procedura comune utilizzata in questa fase.

L'applicazione del Filtro di Kalman Esteso si rende necessaria per la stima dello stato associata all'evento franoso e dunque per ottenere una previsione dell'avanzamento del fronte. In secondo luogo, il filtro EKF può essere utilizzato per compiere un semplice filtraggio dei segnali disturbati provenienti dagli accelerometri sul campo (ad esempio un filtraggio passa-basso per eliminare disturbi dovuti ad eventi poco significativi o non attinenti ad un debris-flow).

Si tiene a precisare che in questo elaborato si faranno solo richiami alla teoria del filtraggio non-lineare e del Filtro di Kalman. Per una trattazione molto più esaustiva e generale, si rimanda il lettore agli innumerevoli testi ed articoli che si trovano in letteratura, ad esempio [13]. Il capitolo si conclude con la dimostrazione di alcuni risultati ottenuti dal filtraggio con l'EKF applicato ad un modello di debris-flow scelto.

5.1 Cenni al filtraggio ricorsivo e alla teoria di Kalman

Il problema del filtraggio consiste nello stimare ricorsivamente lo stato di un sistema dinamico (processo aleatorio n -dimensionale con una propria descrizione statistica) utilizzando un modello avente un certo grado di affidabilità (bontà dell'approssimazione della realtà) ed un insieme di misure affette da rumore.

Nel capitolo precedente si è visto che un sistema dinamico a tempo discreto, generalmente non-lineare e tempo variante, può essere modellato attraverso le seguenti equazioni:

$$\begin{cases} \mathbf{z}(t+1) = \mathbf{f}(\mathbf{z}(t), \mathbf{w}(t), t), \\ \boldsymbol{\zeta}(t) = \mathbf{h}(\mathbf{z}(t), \mathbf{v}(t), t). \end{cases} \quad (5.1)$$

con: $\mathbf{z}(t) \in \mathbb{R}^n$ vettore di stato, $\boldsymbol{\zeta}(t) \in \mathbb{R}^p$ vettore d'uscita (misure), $\mathbf{w}(t) \in \mathbb{R}^q$ rumore di modello, $\mathbf{v}(t) \in \mathbb{R}^r$ rumore di misura t istante di tempo discreto.

La prima equazione corrisponde alla mappa dinamica di aggiornamento di stato a tempo discreto mentre la seconda individua la mappa statica d'uscita. Nel caso di debris-flow si è visto che la caratteristica di tempo-varianza è assente.

Nel caso in cui le mappe di aggiornamento di stato e di uscita siano lineari e i rumori di modello e misura siano modellati come processi aleatori Gaussiani, la soluzione ottima per il problema di filtraggio è fornita dal Filtro di Kalman.

Nel caso in cui $\mathbf{f}(\cdot)$, $\mathbf{h}(\cdot)$ siano non lineari non esiste generalmente una soluzione ottima in forma chiusa. Se però si assumono rumori di processo e di misura additivi e Gaussiani, è possibile risolvere il problema di filtraggio linearizzando le equazioni del sistema nell'intorno della stima corrente ed applicare il filtro di Kalman al sistema linearizzato. Tale procedura di stima prende il nome di Filtro di Kalman Esteso (Extended Kalman Filter o EKF).

Lo sviluppo in serie di Taylor delle funzioni $\mathbf{f}(\cdot)$, $\mathbf{h}(\cdot)$ fino al primo ordine comporta l'introduzione di errori aggiuntivi (oltre al rumore di modello), tanto più significativi tanto più la dinamica originaria è non-lineare. Dunque, in casi di alta non linearità o di rumori non Gaussiani, l'utilizzo dell'EKF potrebbe rivelarsi totalmente inadeguato (potrebbe addirittura causare la divergenza delle stime)

e bisognerebbe ricorrere ad altre metodologie di filtraggio. Un'alternativa valida consisterebbe nell'utilizzare la cosiddetta Trasformazione Unscented, ben nota in letteratura, in congiunzione alla teoria di Kalman per implementare l'Unscented Kalman Filter, in breve UKF (non trattato in questo lavoro, si rimanda a [14]).

5.1.1 Filtraggio ricorsivo Bayesiano

Tenendo sempre in considerazione il sistema non lineare e tempo variante (5.1), si definiscono con $\mathbf{z}^t(t) := [\mathbf{z}(0), \dots, \mathbf{z}(t)]$ e $\boldsymbol{\zeta}^t(t) := [\boldsymbol{\zeta}(1), \dots, \boldsymbol{\zeta}(t)]$ rispettivamente la sequenza degli stati (processi aleatori in genere vettoriali) e la sequenza delle misure fino all'istante discreto t .

Il fine ultimo è stimare l'evoluzione di stato $\mathbf{z}(t)$ avvalendosi delle informazioni apportate dalle misure $\boldsymbol{\zeta}^t$ fino all'istante t corrente. Tutte le informazioni fornite da $\boldsymbol{\zeta}^t$ sullo stato attuale sono rappresentate dalla funzione di distribuzione di probabilità (PDF) condizionata a posteriori:

$$p(\mathbf{z}(t)|\boldsymbol{\zeta}^t). \quad (5.2)$$

La funzione $p(\mathbf{z}(0)|\boldsymbol{\zeta}(0)) = p(\mathbf{z}(0))$ è invece la PDF a priori dello stato iniziale.

L'obiettivo del filtraggio ricorsivo è quindi fornire una stima della PDF a posteriori, in quanto, nota la $p(\mathbf{z}(t)|\boldsymbol{\zeta}^t)$, è possibile determinare qualsiasi statistica del processo di stato. Un esempio è la media condizionata (detta anche stima a Minimo Errore Quadratico Medio):

$$\mathbb{E}[\mathbf{z}(t)|\boldsymbol{\zeta}^t] = \hat{\mathbf{z}}(t) = \int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{z}(t)p(\mathbf{z}(t)|\boldsymbol{\zeta}^t)d\mathbf{z}(t). \quad (5.3)$$

La tecnica di stima della PDF a posteriori $p(\mathbf{z}(t)|\boldsymbol{\zeta}^t)$ è detta ricorsiva perchè è calcolata sulla base della stima effettuata all'istante precedente $p(\mathbf{z}(t-1)|\boldsymbol{\zeta}^{t-1})$ e sulla misura corrente $\boldsymbol{\zeta}(t)$.

La ricorsione consiste di due passi: aggiornamento temporale o predizione e aggiornamento rispetto alle misure (filtraggio).

Nella fase di predizione si calcola la densità condizionata $p(\mathbf{z}(t)|\boldsymbol{\zeta}^{t-1})$ a partire dalla $p(\mathbf{z}(t-1)|\boldsymbol{\zeta}^{t-1})$:

$$p(\mathbf{z}(t)|\mathbf{y}^{t-1}) = \int_{\mathbf{z}(t-1)} p(\mathbf{z}(t)|\mathbf{z}(t-1), \boldsymbol{\zeta}^{t-1})p(\mathbf{z}(t-1)|\boldsymbol{\zeta}^{t-1})d\mathbf{z}(t-1), \quad (5.4)$$

mentre nella fase di filtraggio si ricava la $p(\mathbf{z}(t)|\boldsymbol{\zeta}^t)$ a partire da $p(\mathbf{z}(t)|\boldsymbol{\zeta}^{t-1})$ calcolata nella predizione:

$$p(\mathbf{z}(t)|\boldsymbol{\zeta}^t) = \frac{p(\boldsymbol{\zeta}(t)|\mathbf{z}(t), \boldsymbol{\zeta}^{t-1})p(\mathbf{z}(t)|\boldsymbol{\zeta}^{t-1})}{p(\boldsymbol{\zeta}(t)|\boldsymbol{\zeta}^{t-1})} \quad (5.5)$$

In generale il termine di condizionamento rispetto a $\boldsymbol{\zeta}^{t-1}$, nelle PDF $p(\boldsymbol{\zeta}(t)|\mathbf{z}(t), \boldsymbol{\zeta}^{t-1})$ e $p(\mathbf{z}(t)|\boldsymbol{\zeta}^{t-1})$, non permette di realizzare uno stimatore ricorsivo; bisogna dunque fare due ipotesi sul sistema per poter eliminare tale condizionamento:

- si assume che la sequenza di stato sia un processo Markoviano e quindi:

$$p(\mathbf{z}(t)|\mathbf{z}^{t-1}) = p(\mathbf{z}(t)|\mathbf{z}(t-1)), \quad (5.6)$$

- si assume che le misure siano condizionatamente indipendenti dalla sequenza degli stati, cioè:

$$p(\boldsymbol{\zeta}^t|\mathbf{z}^t) = \prod_{k=1}^t p(\boldsymbol{\zeta}(k)|\mathbf{z}(k)). \quad (5.7)$$

Sotto le assunzioni (5.6) e (5.7), si può dimostrare che il passo di predizione (5.4) diventa:

$$p(\mathbf{z}(t)|\boldsymbol{\zeta}^{t-1}) = \int_{\mathbf{z}(t-1)} p(\mathbf{z}(t)|\mathbf{z}(t-1))p(\mathbf{z}(t-1)|\boldsymbol{\zeta}^{t-1})d\mathbf{z}(t-1) \quad (5.8)$$

mentre il passo di aggiornamento rispetto alle misure (5.5) si può riscrivere nel modo seguente:

$$p(\mathbf{z}(t)|\zeta^t) = \frac{p(\zeta(t)|\mathbf{z}(t))p(\mathbf{z}(t)|\zeta^{t-1})}{p(\zeta(t)|\zeta^{t-1})} \quad (5.9)$$

Il filtraggio Bayesiano è esprimibile (almeno concettualmente) in forma ricorsiva se valgono le assunzioni di markovianità dello stato e di misure condizionatamente indipendenti. Si può dimostrare che il sistema generico (5.1) soddisfa tali ipotesi se: \mathbf{w}^t , \mathbf{v}^t sono sequenze a variabili aleatorie indipendenti, \mathbf{w}^t , \mathbf{v}^t e $\mathbf{z}(0)$ (condizioni iniziali per lo stato) sono mutuamente indipendenti.

Nel filtraggio ricorsivo si cerca di quantificare anche l'incertezza associata alla stima prodotta. Tale incertezza è rappresentata dalla matrice di covarianza dell'errore di stima $\tilde{\mathbf{z}}(t) := \mathbf{z}(t) - \hat{\mathbf{z}}(t)$, cioè $\mathbf{P}(t) = \mathbb{E}[\tilde{\mathbf{z}}(t)\tilde{\mathbf{z}}(t)^T] \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

Dato che non si conosce il valore vero $\mathbf{z}(t)$ dello stato, occorre stimare la matrice di covarianza $\mathbf{P}(t)$. Infine, alle grandezze stimate $\hat{\mathbf{z}}(t)$, $\hat{\mathbf{P}}(t)$, generalmente si richiedono le seguenti proprietà:

- correttezza, il valore atteso della stima è uguale al valore vero (unbiased estimate);
- efficienza, cioè allo stimatore $\hat{\mathbf{z}}(t)$ è associata la "più piccola matrice" di covarianza $\hat{\mathbf{P}}(t)$ tra tutti gli stimatori corretti;
- consistenza, la stima converge al valore vero all'aumentare del numero di misure disponibili. Inoltre la stima della matrice di covarianza è consistente se, oltre a convergere alla covarianza vera, soddisfa la disuguaglianza matriciale $\hat{\mathbf{P}}(t) \geq \mathbf{P}(t)$, cioè la covarianza non deve essere mai sottostimata;
- robustezza, cioè bassa sensibilità della stima ai disturbi di misura e di modello.

Queste caratteristiche definiscono, in gran parte, il grado di bontà di uno stimatore.

5.1.2 Filtro di Kalman e Filtro di Kalman Esteso

Il problema del filtraggio si riduce alla stima della PDF condizionata dello stato $\mathbf{z}(t)$ rispetto alle misure ζ^t . Nell'ipotesi di un processo di stato Gaussiano e di

una dinamica lineare, la densità condizionata $p(\mathbf{z}(t)|\boldsymbol{\zeta}^t)$ è esattamente quella di un processo Gaussiano e quindi completamente caratterizzata dai suoi primi due momenti, media e covarianza. In questo caso la stima della densità condizionata dello stato equivale alla stima della sua media e covarianza.

Il Filtro di Kalman (KF) fornisce proprio una procedura iterativa per il calcolo di queste due quantità e quindi per la propagazione delle stime nel tempo. Inoltre il filtro di Kalman è uno stimatore ottimo, in quanto minimizza l'errore quadratico medio $\text{tr}[\mathbf{P}(t)]$.

Si consideri allora il caso in cui il sistema (5.1) si riduce al seguente sistema LTI discreto:

$$\begin{cases} \mathbf{z}(t+1) = \mathbf{A}\mathbf{z}(t) + \mathbf{w}(t) \\ \boldsymbol{\zeta}(t) = \mathbf{C}\mathbf{z}(t) + \mathbf{v}(t) \end{cases} \quad (5.10)$$

con: $\mathbf{w}(t)$ rumore di modello, bianco a media nulla e matrice di covarianza

$\mathbf{Q} := \mathbb{E}[\mathbf{w}(t)\mathbf{w}^T(t)] \in \mathbb{R}^n$; $\mathbf{v}(t)$ rumore di misura, bianco a media nulla e matrice di covarianza $\mathbf{R} := \mathbb{E}[\mathbf{v}(t)\mathbf{v}^T(t)] \in \mathbb{R}^p$.

Si suppone che lo stato iniziale $\mathbf{z}(0)$ sia modellabile come un processo aleatorio gaussiano a media e covarianza note e che i disturbi di misura, modello e le condizioni iniziali siano tra loro scorrelati.

Solo se sono rispettate tutte le ipotesi fatte sul sistema e sui segnali, è possibile utilizzare il Filtro di Kalman per risolvere il problema di filtraggio. L'algoritmo ricorsivo è dato dalle note equazioni di aggiornamento e predizione dello stimatore di Kalman ad un passo:

- inizializzazione, cioè assegnazione della media $\hat{\mathbf{z}}(0|-1)$ e covarianza $\hat{\mathbf{P}}(0|-1)$ a priori dello stato;
- passo di predizione temporale

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{z}}(t+1|t) &= \mathbf{A}\hat{\mathbf{z}}(t|t) \\ \hat{\mathbf{P}}(t+1|t) &= \mathbf{A}\hat{\mathbf{P}}(t|t)\mathbf{A}^T + \mathbf{Q} \end{aligned} \quad (5.11)$$

- passo di aggiornamento (filtraggio) rispetto alle misure

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{z}}(t+1|t+1) &= \hat{\mathbf{z}}(t+1|t) + \mathbf{K}(t+1)\mathbf{e}(t+1) \\ \hat{\mathbf{P}}(t+1|t+1) &= \hat{\mathbf{P}}(t+1|t) - \mathbf{K}(t+1)\mathbf{\Lambda}(t+1)\mathbf{K}^T(t+1)\end{aligned}\tag{5.12}$$

in cui: la scrittura $\hat{\mathbf{z}}(t+1|t)$ simboleggia la stima dello stato al tempo $t+1$ elaborata all'istante t ; la variabile $\mathbf{e}(t+1) := \boldsymbol{\zeta}(t+1) - \mathbf{C}\hat{\mathbf{z}}(t+1|t) \in \mathbb{R}^p$ è detta innovazione;

$\mathbf{K}(t+1) = \mathbf{P}(t+1|t)\mathbf{C}^T\mathbf{\Lambda}(t+1)^{-1} \in \mathbb{R}^{n \times p}$ è il guadagno di Kalman;

$\mathbf{\Lambda}(t+1) := \mathbb{E}[\mathbf{e}(t+1)\mathbf{e}^T(t+1)] = \mathbf{C}\hat{\mathbf{P}}(t+1|t)\mathbf{C}^T + \mathbf{R} \in \mathbb{R}^p$ matrice di covarianza dell'innovazione.

Nel caso in cui almeno una tra le variabili aleatorie $\mathbf{z}(0), \mathbf{w}(t), \mathbf{v}(t)$ non possa essere considerata Gaussiana, lo stimatore di Kalman non è più ottimo nel senso del Minimo Errore Quadratico Medio ma rimane comunque lo stimatore corretto a minima varianza tra tutti quelli lineari nelle misure.

Nel caso generale (5.1), la soluzione del problema del filtraggio è infinito-dimensionale, cioè si devono conoscere tutti i momenti della densità condizionata dello stato per poterla caratterizzare completamente. In questo caso non è possibile ottenere una soluzione esatta al problema del filtraggio e si deve ricorrere ad una soluzione approssimata.

Il metodo di linearizzazione, sul quale si basa il Filtro di Kalman Estesio, è la tecnica più usata per trovare tale soluzione. L'idea è quella di approssimare le funzioni di aggiornamento di stato ed uscita non lineari mediante uno sviluppo in serie di Taylor al primo ordine (o ad ordini superiori a seconda del grado di approssimazione che si desidera) nell'intorno della stima corrente. Una volta linearizzato il sistema (5.1) e assunto una PDF condizionata Gaussiana, si può applicare il filtro di Kalman al sistema linearizzato e calcolare media e covarianza della $p(\mathbf{z}(t)|\boldsymbol{\zeta}^t)$.

La stima fornita dal filtro EKF, in generale, è non corretta, inconsistente e offre buone prestazioni solo se le approssimazioni compiute (linearizzazione e ipotesi di gaussianità della densità condizionata) sono ragionevoli.

In questo lavoro si è deciso disturbare le evoluzioni deterministiche di stato e d'uscita dei modelli di debris flow con rumori additivi e gaussiani bianchi (scelta

parsa più ragionevole e semplice da trattare).

Il sistema non lineare stocastico che si deve considerare è quindi il seguente:

$$\begin{cases} \mathbf{z}(t+1) = \mathbf{f}(\mathbf{z}(t)) + \mathbf{w}(t) \\ \boldsymbol{\zeta}(t+1) = \mathbf{h}(\mathbf{z}(t)) + \mathbf{v}(t) \end{cases} \quad (5.13)$$

in cui $\mathbf{w}(t) \sim N(\mathbb{O}_n, \mathbf{Q})$ e $\mathbf{v}(t) \sim N(\mathbb{O}_p, \mathbf{R})$ sono i rumori di modello e di misura e si assume $\mathbf{z}(0) \sim N(\hat{\mathbf{z}}(0|-1), \hat{\mathbf{P}}(0|-1))$ come stato all'istante iniziale.

Per trovare la stima dello stato $\mathbf{z}(t)$ bisogna innanzitutto linearizzare le funzioni $\mathbf{f}(\mathbf{z}), \mathbf{h}(\mathbf{z})$ del sistema (5.13) attorno ai punti $\hat{\mathbf{z}}(t|t)$ e $\hat{\mathbf{z}}(t|t-1)$ rispettivamente; si trovano così le matrici Jacobiane

$$\mathbf{F} = \left[\frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{z})}{\partial \mathbf{z}} \right] \Big|_{\mathbf{z}(t)=\hat{\mathbf{z}}(t|t)} \quad \mathbf{H} = \left[\frac{\partial \mathbf{h}(\mathbf{z})}{\partial \mathbf{z}} \right] \Big|_{\mathbf{z}(t)=\hat{\mathbf{z}}(t|t-1)} \quad (5.14)$$

necessarie a ottenere l'approssimazione al primo ordine delle funzioni non lineari di aggiornamento di stato e di uscita:

$$\begin{cases} \mathbf{f}(\mathbf{z}(t)) \approx \mathbf{f}(\hat{\mathbf{z}}(t|t)) + \mathbf{F}(\mathbf{z}(t) - \hat{\mathbf{z}}(t|t)) \\ \mathbf{h}(\mathbf{z}(t)) \approx \mathbf{h}(\hat{\mathbf{z}}(t|t-1)) + \mathbf{H}(\mathbf{z}(t) - \hat{\mathbf{z}}(t|t-1)) \end{cases} \quad (5.15)$$

Infine si procede applicando le equazioni del filtro di Kalman (5.11) e (5.12) al sistema linearizzato (5.15).

L'algoritmo EKF di stima ricorsiva dello stato si può riassumere nei seguenti passi:

- inizializzazione, cioè assegnazione della media $\hat{\mathbf{z}}(0|-1)$ e covarianza $\hat{\mathbf{P}}(0|-1)$ a priori dello stato;
- passo di predizione temporale

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{z}}(t+1|t) &= \mathbf{f}(\hat{\mathbf{z}}(t|t)) \\ \hat{\mathbf{P}}(t+1|t) &= \mathbf{F}\hat{\mathbf{P}}(t|t)\mathbf{F}^T + \mathbf{Q} \end{aligned} \quad (5.16)$$

- passo di aggiornamento rispetto alle misure

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{z}}(t+1|t+1) &= \hat{\mathbf{z}}(t+1|t) + \mathbf{K}(t+1)\mathbf{e}(t+1) \\ \hat{\mathbf{P}}(t+1|t+1) &= \hat{\mathbf{P}}(t+1|t) - \mathbf{K}(t+1)\mathbf{\Lambda}(t+1)\mathbf{K}^T(t+1)\end{aligned}\quad (5.17)$$

con: $\mathbf{e}(t+1) := \boldsymbol{\zeta}(t+1) - \mathbf{h}(\hat{\mathbf{z}}(t+1|t)) \in \mathbb{R}^p$ innovazione;

$\mathbf{K}(t+1) = \mathbf{P}(t+1|t)\mathbf{H}^T\mathbf{\Lambda}(t+1)^{-1} \in \mathbb{R}^{n \times p}$ guadagno di Kalman;

$\mathbf{\Lambda}(t+1) := \mathbb{E}[\mathbf{e}(t+1)\mathbf{e}^T(t+1)] = \mathbf{H}\hat{\mathbf{P}}(t+1|t)\mathbf{H}^T + \mathbf{R} \in \mathbb{R}^p$ matrice di covarianza dell'innovazione.

In ultimo si osservi che:

- oltre agli errori di processo e di misura, sono presenti errori di linearizzazione, che non possono essere quantificati e di cui non si tiene conto nel valutare la covarianza dell'errore di stima (in pratica non vi sono garanzie sulla qualità delle stime ottenute);
- la stima risulta fortemente dipendente dalla scelta delle condizioni iniziali;
- nel caso di eventi franosi sarebbe più indicato effettuare predizioni a più passi in avanti, cioè calcolare $\mathbb{E}[\mathbf{z}(t+m)|\boldsymbol{\zeta}^t] \forall t$, con $m > 1$. Tali predizioni possono essere compiute, sia mediante KF che EKF, in catena aperta (senza correzione data dall'innovazione):

$$\begin{aligned}\text{KF} \left\{ \begin{aligned} \hat{\mathbf{z}}(t+m|t) &= \mathbf{A}^m \hat{\mathbf{z}}(t|t), \\ \text{KF: } \hat{\mathbf{P}}(t+m|t) &= \mathbf{A}^m \hat{\mathbf{P}}(t|t) (\mathbf{A}^m)^T + \sum_{k=0}^{m-1} \mathbf{A}^k \mathbf{Q} (\mathbf{A}^k)^T \end{aligned} \right. \\ \\ \text{EKF} \left\{ \begin{aligned} \hat{\mathbf{z}}(t+m|t) &= \mathbf{f}^{(m)}(\hat{\mathbf{z}}(t|t)), \\ \text{EKF: } \hat{\mathbf{P}}(t+m|t) &= \mathbf{F}^m \hat{\mathbf{P}}(t|t) (\mathbf{F}^m)^T + \sum_{k=0}^{m-1} \mathbf{F}^k \mathbf{Q} (\mathbf{F}^k)^T \end{aligned} \right.\end{aligned}$$

5.2 Esempio d'applicazione dell'EKF ad un modello di Debris-Flow

Tutti i modelli non lineari sviluppati per i debris sono deterministici. Introducendo ora il disturbo di processo $\mathbf{w}(t)$ che quantifica l'accuratezza del modello ed

il disturbo di misura $\mathbf{v}(t)$ che identifica il degrado delle osservazioni, si arriva a sistemi in spazio di stato stocastici e a tempo discreto.

Il modello preso in esame per l'applicazione del Filtro di Kalman Esteso è descritto dalle equazioni (4.1) e (4.3). Esso simula la dinamica di un debris-flow a sedimenti rocciosi. La scelta finale è ricaduta su tale modello in quanto è parso il più completo tra i primi tre sviluppati.

Il filtraggio del modello può a questo punto essere svolto in due maniere diverse:

- 1) si applica l'Extended Kalman Filter al solo sistema del debris flow (accelerometri) (4.5) e (4.6) disturbato da rumori gaussiani e si immette la dinamica filtrata degli accelerometri nel sistema di stato che interfaccia la strumentazione ai punti di controllo del fronte (3.13). Il sistema discreto soggetto a filtraggio si può riscrivere come:

$$\begin{cases} \mathbf{z}_a(t+1) = \mathbf{f}_{\text{DF}}(\mathbf{z}_a(t)) + \mathbf{w}_a(t) \\ \zeta_a(t) = \mathbf{C}_a \mathbf{z}_a(t) + \mathbf{v}_a(t) \end{cases} \quad (5.18)$$

- 2) si applica l'EKF al sistema in spazio di stato completo (4.8) e (4.9), cioè il modello che ingloba la dinamica degli accelerometri (debris-flow) e quella dei punti di controllo. In questo caso si è scelto di partizionare il disturbo di processo in tal modo: $\mathbf{w}(t) = [\mathbf{w}_a(t) \ \mathbf{w}_c(t)]^T \in \mathbb{R}^{5N_a+4N_c}$, in cui $\mathbf{w}_a(t) \sim N(\mathbb{O}_{5N_a}, \mathbf{Q}_a) \in \mathbb{R}^{5N_a}$ è il rumore additivo gaussiano bianco che affligge la dinamica degli accelerometri (bassa varianza) mentre $\mathbf{w}_c(t) \sim N(\mathbb{O}_{4N_c}, \mathbf{Q}_c) \in \mathbb{R}^{4N_c}$ è il rumore additivo gaussiano bianco che disturba l'evoluzione dei punti virtuali (alta varianza). Supponendo poi $\mathbf{w}_a(t)$ e $\mathbf{w}_c(t)$ scorrelati, la matrice di covarianza di $\mathbf{w}(t)$ diventa:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_a & \mathbb{O}_{5N_a \times 4N_c} \\ \mathbb{O}_{4N_c \times 5N_a} & \mathbf{Q}_c \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(5N_a+4N_c) \times (5N_a+4N_c)}. \quad (5.19)$$

Il rumore di misura $\mathbf{v}_a(t) \sim N(\mathbb{O}_{3n_a}, \mathbf{R}_a)$ non deve essere partizionato in quanto i punti di controllo della spline sono considerati punti che non offrono osservazioni. Il sistema complessivo stocastico e discreto può essere scritto nel modo seguente:

$$\left\{ \begin{array}{l} \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{z}_a(t+1) \\ \mathbf{z}_c(t+1) \end{bmatrix}}_{\mathbf{z}(t+1)} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{f}_{\mathbf{DF}}(\mathbf{z}_a(t)) \\ \mathbf{f}_{\mathbf{A2P}}(\mathbf{z}_a(t), \mathbf{z}_c(t)) \end{bmatrix}}_{\mathbf{f}(\mathbf{z}(t))} + \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{w}_a(t) \\ \mathbf{w}_c(t) \end{bmatrix}}_{\mathbf{w}(t)}, \\ \underbrace{\boldsymbol{\zeta}_a(t)}_{\mathbf{C}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{C}_a & \mathbb{O}_{3N_a \times (2N_a + 4N_c)} \end{bmatrix}}_{\mathbf{C}} \begin{bmatrix} \mathbf{z}_a(t) \\ \mathbf{z}_c(t) \end{bmatrix} + \mathbf{v}_a(t) \end{array} \right. \quad (5.20)$$

Si ricorda che $\mathbf{z}_a(t) \in \mathbb{R}^{5N_a}$ indica lo stato degli accelerometri, $\mathbf{z}_c(t) \in \mathbb{R}^{4N_c}$ rappresenta lo stato dei punti di controllo e le uscite $\boldsymbol{\zeta}_a(t)$ sono identificate con le posizioni in 2D e la profondità del flusso relative agli accelerometri.

In entrambi i casi la relazione d'uscita è lineare e dunque questo permette di dire immediatamente che $\mathbf{H} = \mathbf{C}_a$ o $\mathbf{H} = \mathbf{C}$.

Per ricavare la matrice Jacobiana F nei due casi occorre fare una distinzione. Ponendo:

$$\mathbf{F}_{\mathbf{AA}} := \left. \frac{\partial \mathbf{f}_{\mathbf{DF}}(\mathbf{z}_a)}{\partial \mathbf{z}_a} \right|_{\mathbf{z}_a(t) = \hat{\mathbf{z}}_a(t|t)} \in \mathbb{R}^{5N_a \times 5N_a} \quad (5.21)$$

la matrice jacobiana di $\mathbf{f}_{\mathbf{DF}}(\cdot)$ inerente al primo caso (filtraggio parziale), la matrice jacobiana relativa ad $\mathbf{f}(\cdot)$ nel sistema del secondo caso (filtraggio completo) può essere scritto come:

$$\mathbf{F} := \left. \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{z})}{\partial \mathbf{z}} \right|_{\mathbf{z}(t) = \hat{\mathbf{z}}(t|t)} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{\mathbf{AA}} & \mathbb{O}_{5N_a \times 4N_c} \\ \mathbf{F}_{\mathbf{CA}} & \mathbf{F}_{\mathbf{CC}} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(5N_a + 4N_c) \times (5N_a + 4N_c)}, \quad (5.22)$$

con: $\mathbf{F}_{\mathbf{AA}}$ come in (5.21), esprime la dinamica linearizzata accelerometro-accelerometro (4.5); $\mathbf{F}_{\mathbf{CA}} \in \mathbb{R}^{4N_c \times 5N_a}$ esprime l'influenza che hanno gli accelerometri nelle dinamica linearizzata dei punti virtuali e infine $\mathbf{F}_{\mathbf{CC}} \in \mathbb{R}^{4N_c \times 4N_c}$ è la matrice jacobiana relativa al sottosistema linearizzato dei punti di controllo (3.13).

I calcoli sviluppati sono basati sulla scelta del kernel anti-clustering (2.6), sull'approssimazione SPH non normalizzata per la divergenza del campo di velocità (2.4) e sulla scelta di un interfacciamento punto-punto tra accelerometri e controlli del

fronte ($N_a = N_c$ e matrice dei pesi $W = \mathbb{I}_{N_c}$). Senza queste assunzioni (in particolare la seconda riportata) sarebbe estremamente arduo ricavare i coefficienti degli Jacobiani $\mathbf{F}_{AA}, \mathbf{F}$ in forma chiusa.

Una volta calcolata la matrice \mathbf{F}_{AA} o \mathbf{F} attorno alla stima ottima ottenuta al passo precedente $\hat{\mathbf{z}}_a(t|t)$ o $\hat{\mathbf{z}}(t|t)$, si utilizzano le formule del Filtro di Kalman Esteso (5.16) e (5.17) per propagare le stime EKF nel tempo e ottenere quindi gli andamenti predetti e filtrati di \mathbf{z}_a o \mathbf{z} .

Si mostrano infine i risultati ottenuti nel caso di filtraggio EKF applicato al sistema completo (5.20). I parametri utilizzati per la simulazione del modello di debris a sedimenti rocciosi sono gli stessi riportati in tabella (4.1) a meno di: $T_c = 10^{-2} s$ e $\theta_y = 5 deg$. Le condizioni iniziali scelte per lo stato complessivo sono le stesse riportate in (4.10).

I valori scelti per le matrici di covarianza dei rumori di misura $\mathbf{w}_a, \mathbf{w}_c$ e di modello \mathbf{v}_a sono rispettivamente: $\mathbf{Q}_a = 10^{-4}\mathbb{I}_{5N_a}$, $\mathbf{Q}_c = 10^{-2}\mathbb{I}_{4N_c}$ e $\mathbf{R}_a = 10^{-1}\mathbb{I}_{3N_a}$ (valore assegnato dal datasheet dei sensori *t - moteTMsky*); mentre le condizioni iniziali per le stime predette sono: $\hat{\mathbf{z}}(0|-1) = \mathbf{z}_0 + 10 * \mathbf{1}_{(5N_a+4N_c)}$ e $\hat{\mathbf{P}}(0|-1) = \mathbb{I}_{(5N_a+4N_c)}$.

5.2. ESEMPIO D'APPLICAZIONE DELL'EKF AD UN MODELLO DI DEBRIS-FLOW⁸⁷

a) Risultati relativi agli accelerometri:

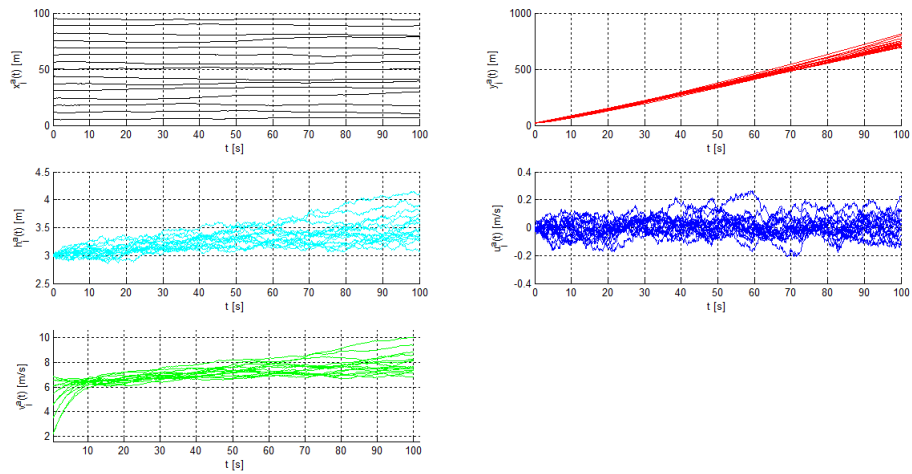


Figura 5.1: evoluzione dello stato "vero" $z_a(t)$ degli accelerometri. In nero e rosso sono riportate le evoluzioni delle coordinate x_a, y_a [m] nel piano, in azzurro le profondità del flusso h_a [m] e infine in blu e verde le velocità u_a, v_a [m/s] lungo gli assi. La stessa legenda si manterrà anche in tutti gli altri risultati.

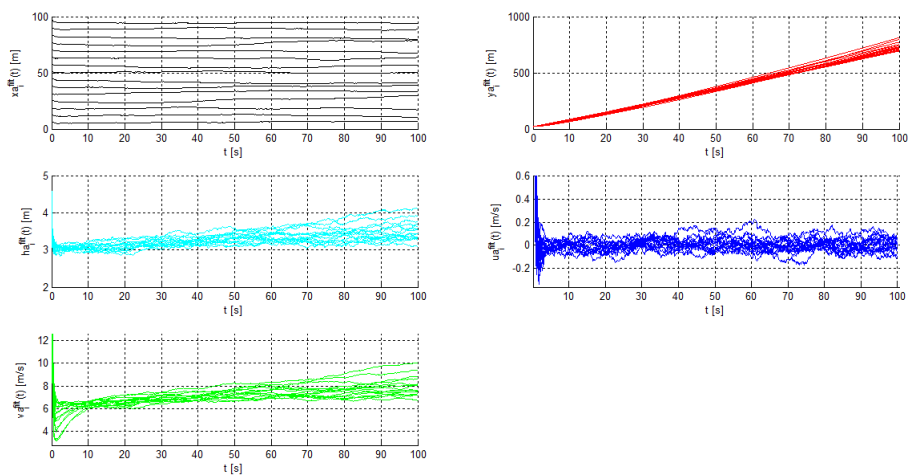


Figura 5.2: andamento della stime filtrate $\hat{z}_a(t|t)$ relative agli accelerometri.

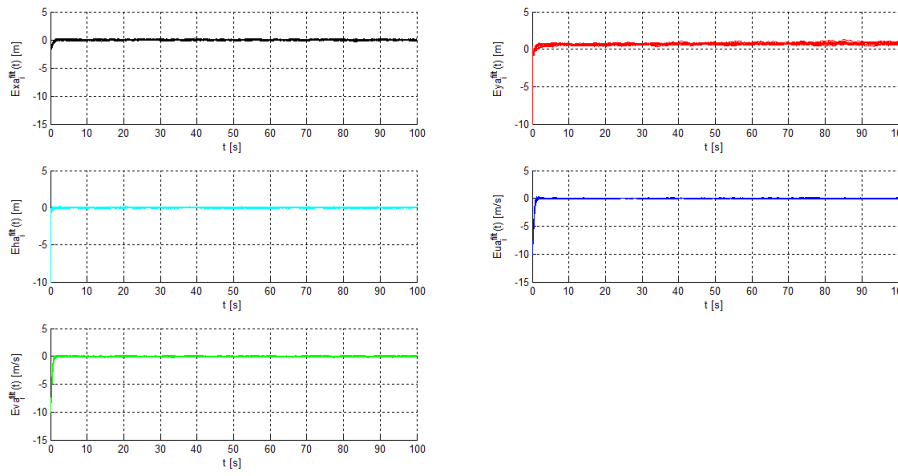


Figura 5.3: andamenti temporali degli errori di stima filtrata $e_a(t) = z_a(t) - \hat{z}_a(t|t)$ relativi allo stato degli accelerometri.

b) Risultati relativi ai punti di controllo del fronte:

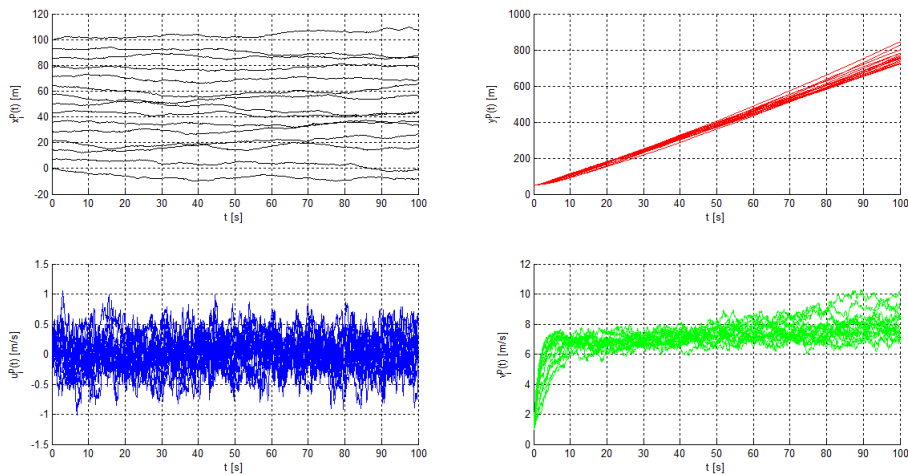


Figura 5.4: evoluzione dello stato "vero" $z_c(t)$ relativo ai punti di controllo del fronte.

5.2. ESEMPIO D'APPLICAZIONE DELL'EKF AD UN MODELLO DI DEBRIS-FLOW89

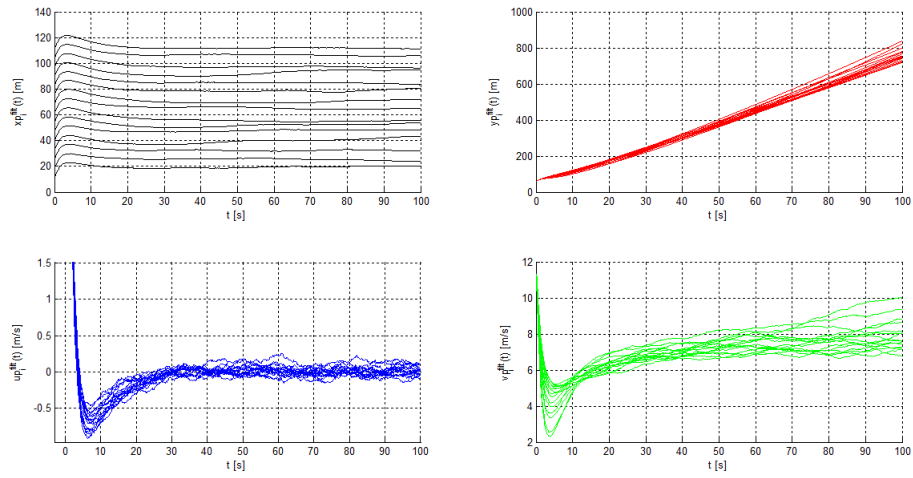


Figura 5.5: andamenti temporali delle stime filtrate $\hat{z}_c(t|t)$ relative ai punti di controllo del fronte.

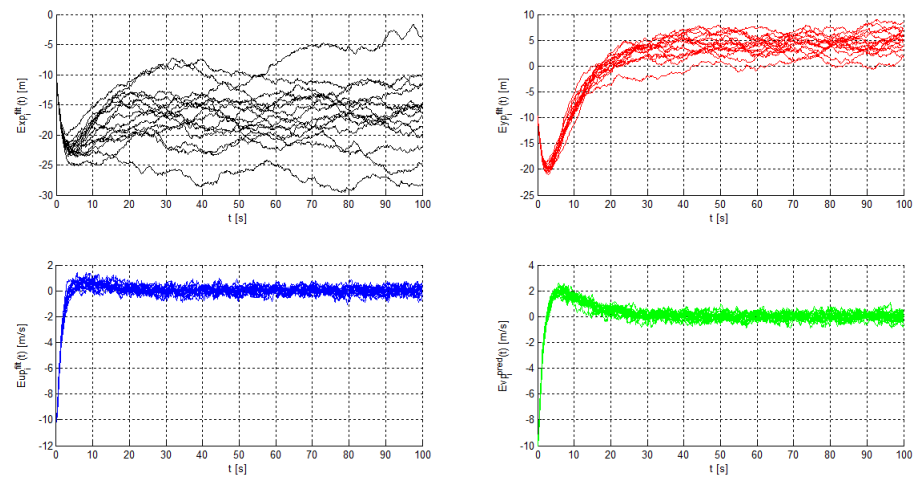


Figura 5.6: andamenti temporali degli errori di stima filtrata $e_a(t) = z_c(t) - \hat{z}_c(t|t)$ relativi allo stato dei punti virtuali.

c) Matrice di covarianza di errore di stima per lo stato complessivo:

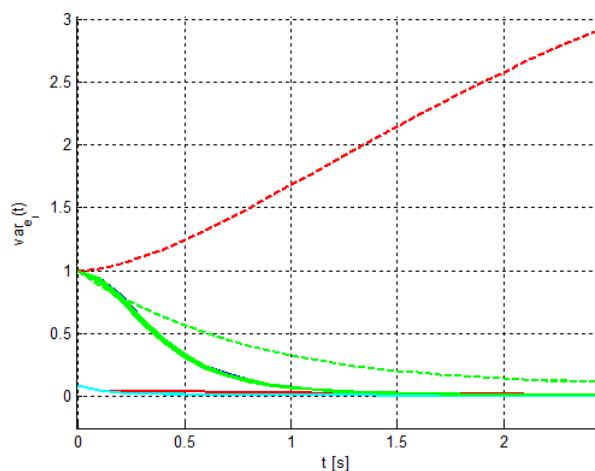


Figura 5.7: elementi diagonali della matrice di covarianza dell'errore di stima $\hat{\mathbf{P}}(t|t)$. Gli andamenti a linea continua sono riferiti agli accelerometri mentre quelli in tratteggio ai punti di controllo del fronte.

Dalle simulazioni si nota che le stime filtrate relative allo stato degli accelerometri sono piuttosto soddisfacenti (5.1), (5.2) e (5.3), infatti gli andamenti temporali degli elementi diagonali della matrice di covarianza dell'errore sono convergenti o limitati da un bound superiore abbastanza basso (5.7). Per quanto riguarda invece le stime inerenti ai punti di controllo (5.4), (5.5) e (5.6), si osservano errori filtraggio contenuti per le velocità ma ricostruzioni delle posizioni anche molto discostanti dai valori veri (5.7).

La differenza tra la bontà della stima di $\mathbf{z}_a(t)$ e di $\mathbf{z}_c(t)$ può imputarsi alla diversa natura dei punti considerati: gli accelerometri sono punti fisici reali che si spostano sul campo mentre i punti di controllo sono virtuali e non offrono misure. La spiegazione di questo comportamento, in termini più rigorosi, potrebbe essere data dal fatto che la coppia (\mathbf{F}, \mathbf{C}) del sistema linearizzato risulta non rivelabile $\forall t$, cioè gli autovalori del sottosistema non osservabile non sono asintoticamente stabili. La non rivelabilità probabilmente è causata dalla forma particolare della matrice \mathbf{C} delle uscite, che presenta un sottoblocco completamente nullo.

La rivelabilità della coppia (\mathbf{A}, \mathbf{C}) , per un sistema stocastico LTI, è condizione necessaria ma non sufficiente per far sì che tutti gli elementi di $\hat{\mathbf{P}}(t|t)$ abbiano evoluzioni temporali limitate superiormente $\forall \hat{\mathbf{P}}(0| - 1)$ (Teorema Fondamentale della Teoria del filtro di Kalman [13]).

5.2. ESEMPIO D'APPLICAZIONE DELL'EKF AD UN MODELLO DI DEBRIS-FLOW⁹¹

La giusta strategia di filtraggio è quindi quella parziale, cioè quella che consiste nell'applicazione del Filtro di Kalman Esteso al solo sistema discreto degli accelerometri e nel conseguente inserimento delle dinamiche filtrate nel sistema d'interfacciamento tra gli strumenti di misura ed il fronte.

Conclusioni

In questa tesi si è cercato di fornire dei validi modelli in spazio di stato discreto per fenomeni franosi (debris-flow in particolare), in ottica di previsione e stima della velocità di avanzamento del fronte delle colate detritiche.

Un'assunzione risultata fondamentale è stata quella di considerare un flusso detritico, tipicamente a fase mista solido-liquida, come un liquido equivalente.

Si è cercato di costruire un modello d'avanzamento che tenesse conto di tre strutture fondamentali:

- 1) la dinamica degli accelerometri (*t - moteTMsky*) posizionati sul campo, identificata con i modelli di debris-flow forniti dalla letteratura e riproposti in descrizione Lagrangiana del moto;
- 2) la dinamica d'interfacciamento tra gli accelerometri ed i punti virtuali che determinano la forma del fronte;
- 3) la modellazione geometrica del fronte stesso mediante una curva B-spline di terzo grado.

Le varie fasi del lavoro che hanno portato all'obiettivo prefissato possono essere riassunte in questo modo:

- introduzione e comprensione preliminare dei fenomeni franosi, ed in particolare dei debris-flow, che si verificano generalmente in alta montagna [4],[15];
- studio delle basi di fluidodinamica e delle equazioni di governo per fluidi generici (equazioni di Navier-Stokes in congiunzione all'equazione di stato per fluidi all'equilibrio termodinamico).

Si è compresa la distinzione tra fluidi newtoniani e non-newtoniani mediante le curve reologiche che li caratterizzano.

In una fase successiva si sono apprese le due metodologie di studio utilizzate in fluidodinamica: metodo euleriano, consistente nella discretizzazione spaziale di un dominio d'interesse mediante mesh-grid fissata a priori (studio delle proprietà locali di un fluido); metodo lagrangiano, consistente nell'analisi delle proprietà del fluido con tecniche mesh-free che permettono l'inseguimento di un volume mobile d'interesse. Si sono inoltre considerate le equazioni di governo per moti prevalentemente vorticosi (equazioni della dinamica in forma di Crocco e definizione di vorticità) e si è fornita un'alternativa allo studio dei fluidi mediante l'introduzione di un modello stocastico lineare e tempo invariante basato sul moto browniano. La congiunzione di tale moto all'equazione per la vorticità per fluidi newtoniani incomprimibili si è rivelata necessaria per lo sviluppo di un modello realistico per i vortici (modello velocità-vorticità-diffusione). Tutti questi argomenti sono trattati nel primo capitolo;

- nel secondo capitolo si espone una tecnica mesh-free per poter simulare l'avanzamento del fronte del flusso detritico in approccio lagrangiano. Per la discretizzazione degli operatori differenziali che compaiono nelle equazioni di governo dei fluidi, si è preso spunto dalla teoria offerta dalla tecnica Smoothed Particle Hydrodynamics (SPH), nata negli anni '70 per la simulazione di fenomeni astrofisici e riscoperta alla fine degli anni '90 per la risoluzione di problemi di fluidodinamica. In aggiunta si sono offerte due alternative (presenti in Appendice) per la discretizzazione delle derivate parziali rispetto allo spazio. La prima tecnica si basa sul concetto di derivata direzionale mentre la seconda utilizza lo sviluppo in serie di Taylor multidimensionale.
- il terzo capitolo espone il progetto del sistema in spazio di stato inerente all'interfacciamento tra gli accelerometri ed i punti di controllo del fronte e la scelta effettuata per la modellazione geometrica dello stesso. Si sono fornite due alternative per la rappresentazione geometrica del fronte: implemen-

tazione della curva basata sulla teoria generica delle curve B-spline nel piano [16]; implementazione basata sulla modifica di un algoritmo di riconoscimento e segmentazione di contorni utilizzato per immagini biomediche [3]. Il sistema d'interfacciamento è stato sviluppato come una rete a maglia in cui la dinamica di ogni punto di controllo è influenzata dalle evoluzioni degli accelerometri, opportunamente pesate in base al criterio della distanza inversa o dal più semplice collegamento punto-punto. Dalle simulazioni è emerso che la seconda tipologia di connessione fornisce un fronte maggiormente deformabile ed è dunque da preferirsi in caso di disposizioni degli accelerometri non troppo generiche. Il capitolo si conclude con alcune riflessioni sul tuning dei parametri del modello d'interfacciamento;

- si è proceduto con una fase di ricerca di modelli matematici di debris-flow presenti in letteratura. Tra tutti quelli visionati [15], si sono scelti i più adatti ad una implementazione in codice Matlab. Essendo questi modelli sviluppati generalmente in descrizione euleriana, si è dovuto procedere con la conversione delle equazioni in approccio lagrangiano e con una discretizzazione spaziale che riprende in parte i concetti offerti dalla tecnica SPH. Successivamente si è provveduto alla riscrittura dei modelli in spazio di stato discreto mediante la tecnica di discretizzazione temporale di "Eulero in avanti" e si è aumentato lo spazio di stato aggiungendo la dinamica del sistema di collegamento tra accelerometri e punti di controllo del fronte. Si sono dunque riunite in un solo sistema le dinamiche degli accelerometri e dei punti virtuali. Come ultimo passo, si sono effettuate delle simulazioni in Matlab dell'avanzamento del fronte utilizzando i tre modelli più specifici tra quelli a disposizione. I parametri utilizzati nei modelli di debris-flow sono quelli riportati dalla letteratura. La scelta delle condizioni iniziali si è invece rivelata più ardua, in quanto le simulazioni sono state condotte a partire da una situazione di movimento del flusso già instaurato, data la difficoltà nel simulare la fase di triggering. Le condizioni iniziali imposte e le dimensioni e la pendenza del canale di deflusso sono state scelte in base all'esperienza diretta sul campo (Borca di Cadore e Fiammes, BL, Canale 1 e 8) e ad informazioni sulle distribuzioni di velocità verosimili, derivanti dalla

letteratura e da dati empirici (distribuzioni paraboliche di velocità).

Oltre ai tre modelli specifici citati, si sono infine proposti altri modelli più generici. Questi modelli sono utili a modellare la dinamica di un fluido qualsiasi in approccio lagrangiano e uno tra questi è pensato specificatamente per l'implementazione mediante tecnica SPH. L'ultimo modello di stato proposto approssima il comportamento di fluidi generici governati essenzialmente da vortici e dal moto browniano (sistema stocastico). Tutto questo è argomentato nel quarto capitolo;

- l'ultima fase del lavoro è interamente dedicata al filtraggio statistico di uno dei modelli in spazio di stato esposti nel capitolo 4. I modelli progettati sono stati corrotti con rumori gaussiani bianchi che rappresentano il disturbo di processo e di misura. Il filtraggio è stato condotto allo scopo di stimare lo stato associato all'evento franoso e contemporaneamente ripulire dal rumore i dati provenienti dai sensori piazzati sul canale di scorrimento.

L'algoritmo scelto per la stima ricorsiva dello stato è il Filtro di Kalman Esteso (EKF), basato essenzialmente sulla linearizzazione delle equazioni di aggiornamento di stato non lineari, sull'assunzione di funzioni di distribuzione gaussiane per il processo di stato e per i disturbi e sull'applicazione del Filtro di Kalman (KF) al sistema linearizzato e discretizzato temporalmente.

Si sono proposte due strategie diverse di filtraggio: nella prima si applica l'EKF al sistema relativo agli accelerometri e successivamente si simula l'avanzamento del flusso inserendo la dinamica filtrata nel sistema di collegamento con i punti di controllo del fronte; nella seconda alternativa ci si propone di applicare l'EKF all'intero sistema aumentato che riunisce le dinamiche dei punti fisici e virtuali. Dalle simulazioni si è osservato che la tecnica di filtraggio da adottare è la prima, in quanto non è possibile stimare correttamente le posizioni dei punti virtuali.

I miglioramenti e sviluppi futuri da considerare sono innumerevoli. Alcuni di questi potrebbero essere:

- adozione di una procedura di identificazione parametrica per il modello d'interfacciamento tra accelerometri e punti di controllo del fronte. Si potrebbe inoltre adottare una tecnica di identificazione a scatola grigia, utilizzando l'algoritmo di stima EKF. Basterebbe infatti aumentare lo stato del sistema d'interfacciamento con l'introduzione dei parametri ignoti come nuove variabili. Le dinamiche associate alle nuove variabili di stato diverrebbero quelle tipiche di un random walk. Applicando infine l'EKF si otterrebbero contemporaneamente gli andamenti filtrati delle variabili associate ai punti di controllo del fronte (utile in caso di dinamiche molto disturbate o ricche di incertezze di modello) e gli andamenti stimati dei parametri incogniti;
- generalizzazione al caso tridimensionale dei modelli di debris-flow e d'interfacciamento, con conseguente modellamento geometrico del fronte mediante superfici B-spline nello spazio;
- aggiunta dell'equazione di conservazione dell'energia tra le equazioni di governo per fluidi (Navier-Stokes) e conseguente introduzione delle nuove variabili temperatura assoluta, energia interna, conducibilità termica ed altre due equazioni che esprimono le proprietà termo-fisiche del fluido in esame;
- simulazione di debris-flow a doppia fase mediante l'unione dell'approccio euleriano, consigliato per la fase fluida, a quello lagrangiano, usato soprattutto per simulare la fase solida-granulare;
- modellamento dei bordi del dominio d'interesse mediante la tecnica delle "particelle immagine". Tale tecnica prevede la modifica delle equazioni del moto per le particelle di fluido situate in prossimità dei limiti del dominio. I bordi sono discretizzati mediante particelle interagenti con quelle del fluido. Queste tecniche sono ampiamente utilizzate per la modellazione degli ostacoli e per l'interazione fluido-letto di scorrimento negli approcci mesh-free e in particolare nell'SPH;
- utilizzo di dati reali inerenti ai gradienti di superficie del letto lungo gli assi coordinati. In tutte le simulazioni svolte si sono invece considerate condizioni poco realistiche di pendenze costanti in tutto il canale;

- applicazione di una differente tecnica di filtraggio. La procedura necessaria all'implementazione dell'EKF si rivela infatti estremamente dispendiosa nel calcolare le matrici jacobiane, troppo sensibile alle condizioni iniziali imposte per la PDF a priori dello stato e poco adatta per sistemi altamente non lineari come quelli derivanti dalla fluidodinamica (modesta presenza di errori di linearizzazione che potrebbero far divergere le stime inspiegabilmente). Una valida alternativa potrebbe essere rappresentata dall'algoritmo denominato Unscented Kalman Filter (UKF), il quale approssima la descrizione statistica del processo aleatorio di stato lasciando inalterata la funzione di aggiornamento relativa. Ciò fa sì che le stime ricavate tramite UKF siano molto più affidabili di quelle elaborate dall'algoritmo EKF.

Appendice

Cenni sulla teoria delle B-Splines

Dati $n + 1$ punti di controllo $\mathbf{P}^c = \{\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_1, \dots, \mathbf{P}_n\}$, con $\mathbf{P}_i \in \mathbb{R}^{n_s}$, e $m + 1$ nodi (knots) $S = \{s_0, s_1, \dots, s_m\}$, con $s_j \in \mathbb{R}$ tali che $s_0 \leq s_1 \leq \dots \leq s_{m-1} \leq s_m$, la curva B-spline di grado p definita da \mathbf{P}^c e S è:

$$\mathbf{C}(s) = \sum_{i=0}^n N_{i,p}(s) \mathbf{P}_i \in \mathbb{R}^{n_s}, \quad (5.23)$$

dove generalmente il dominio della curva, partizionato da S , è il compatto $[0, 1]$ e le $N_{i,p}(s) \in \mathbb{R}$ per $i = 0, \dots, n$ indicano le funzioni base della B-spline di grado p e i valori $\mathbf{C}(s_j)$, $j = 0, \dots, m$ che suddividono la curva in segmenti sono denominati knot points.

I segmenti componenti $\mathbf{C}(s)$ sono a loro volta curve di grado p e ognuno di essi è definito su un intervallo semi-aperto $[s_j, s_{j+1})$, $j = 0, \dots, m$, detto knot span j -esimo.

Le curve $\mathbf{C}(s)$ sono dette uniformi o non-uniformi a seconda che tutti i nodi siano equispaziati (lunghezze dei knot spans tutte uguali) o meno.

Il sotto-intervallo generico $[s_j, s_{j+1})$ può eventualmente non esistere, ciò accade quando il nodo corrispondente s_j presenta una molteplicità $k > 1$: $s_j = s_{j+1} = \dots = s_{j+k-1}$, in questo caso si parla di nodo multiplo. Se invece $k = 1$ il nodo è detto semplice.

I tre indici n, m, p sono le informazioni (ingressi) caratterizzanti la curva e devono soddisfare la relazione: $m = n + 1 + p$. Per alterare la forma di una B-spline si possono modificare le posizioni dei punti di controllo, le posizioni dei nodi o il grado della curva.

Generalmente le curve B-splines possono essere distinte in tre grandi categorie: aperte, strette (clamped) o chiuse (loop).

Nel primo caso, la curva non tocca nè la prima nè l'ultima parte del poligono i cui lati congiungono, in ordine, i punti di controllo (poligono di controllo).

Nel secondo caso la curva è tangente al primo e all'ultimo segmento del poligono di controllo in \mathbf{P}_0 e \mathbf{P}_n . Tale configurazione si raggiunge imponendo una molteplicità pari a $p + 1$ per il primo e l'ultimo nodo: $s_0 = s_1 = \dots = s_p$ e $s_{m-p} = \dots = s_{m-1} = s_m$.

Infine, si può ottenere la chiusura della curva ($\mathbf{C}(s_0) = \mathbf{C}(s_m)$) mediante la ripetizione di opportuni nodi e punti di controllo. Quest'ultimo caso non è stato approfondito particolarmente, dato che l'obiettivo è quello di modellare l'avanzamento di un fronte fluido-detrítico aperto.

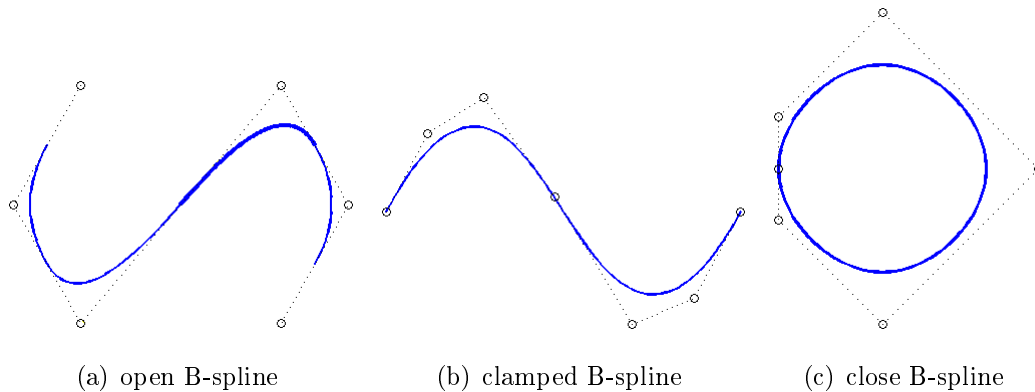


Figura 5.8: sono mostrate le tre categorie più importanti di B-splines. I punti di controllo sono rappresentati con dei cerchietti.

Gli elementi fondamentali per questa tipologia di splines sono le cosiddette basi $N_{i,p}(s)$, le quali sono non-nulle solo su alcuni knot spans adiacenti. Proprio per tale motivo le B-spline hanno carattere locale, intendendo con ciò che la modifica di un punto di controllo non comporta l'alterazione dell'intera curva ma solo di un numero ristretto di segmenti che ad esso afferiscono.

Le basi che appaiono in (5.23) si calcolano utilizzando la formula ricorsiva di Cox-de Boor, con passo base:

$$N_{i,0}(s) = \chi_{[s_i, s_{i+1})} \tag{5.24}$$

dove $\chi_{[s_i, s_{i+1})}$ è la funzione indicatrice per il knot span i -esimo; il passo ricorsivo è invece:

$$N_{i,p}(s) = \frac{s - s_i}{s_{i+p} - s_i} N_{i,p-1}(s) + \frac{s_{i+p+1} - s}{s_{i+p+1} - s_{i+1}} N_{i+1,p-1}(s) \tag{5.25}$$

Dalle formule appena esposte è possibile fare le seguenti osservazioni:

- 1) ogni base $N_{i,p}(s)$ è non-nulla nel sotto-intervallo semi-aperto $[s_i, s_{i+p+1})$, composto dai $p+1$ knot spans consecutivi $[s_i, s_{i+1}), [s_{i+1}, s_{i+2}), \dots, [s_{i+p}, s_{i+p+1})$ (proprietà di supporto locale);

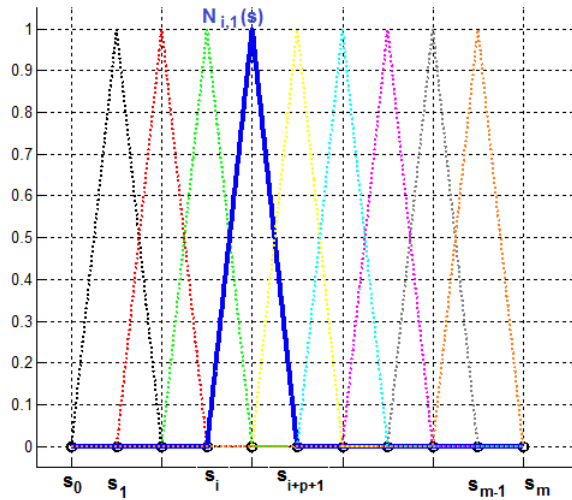


Figura 5.9: esempio che mostra il supporto locale della funzione base $N_{i,p}(s)$ generica (in blu), per $p = 1, n = 8, m = 12, i = 3$ e vettore dei nodi uniforme.

- 2) su ogni knot span $[s_i, s_{i+1})$, vi sono al più $p + 1$ funzioni base di grado p non-nulle:

$$N_{i-p,p}(s), N_{i-p+1,p}(s), \dots, N_{i-1,p}(s), N_{i,p}(s).$$

Il calcolo delle basi in (5.25) e la determinazione dei relativi sotto-intervalli in cui le funzioni sono non-nulle, possono risultare più chiari osservando il seguente schema triangolare (caso di soli nodi semplici):

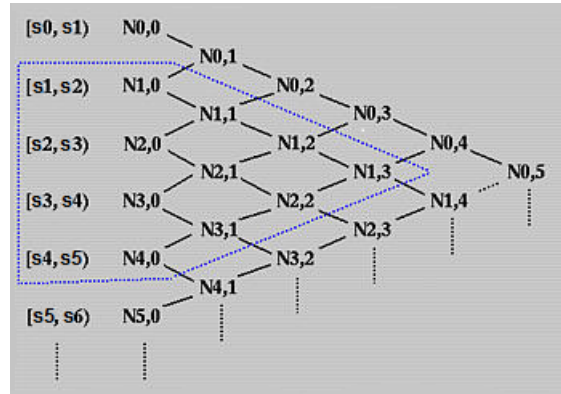


Figura 5.10: schema di calcolo triangolare per la determinazione ricorsiva delle basi $N_{i,p}(s)$. In tratteggio è evidenziato il percorso che conduce al sotto-intervallo in cui la base generica è non-nulla.

I coefficienti che compaiono nella (5.25) indicano il rapporto tra la distanza del punto s dall'estremo sinistro s_i (destra s_{i+p+1}) dell'intervallo $[s_i, s_{i+p}]$ ($[s_{i+1}, s_{i+p+1}]$) in cui $N_{i,p-1}(s)$ ($N_{i+1,p-1}(s)$) è non-nulla e la lunghezza dell'intervallo stesso (si veda la figura seguente). Pertanto $N_{i,p}(s)$ si ottiene dalla combinazione lineare delle basi di grado inferiore $N_{i,p-1}(s), N_{i+1,p-1}(s)$ pesate da coefficienti compresi tra 0 e 1.

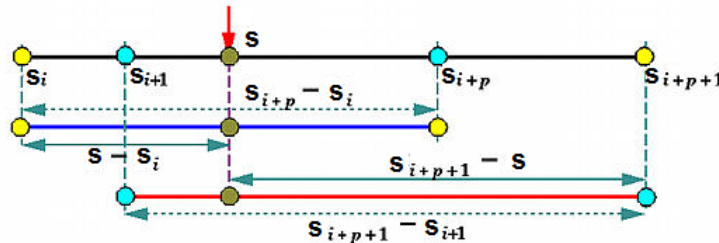


Figura 5.11: significato dei coefficienti nella combinazione lineare per il calcolo della base $N_{i,p}(s)$.

Ulteriori proprietà degne di nota delle basi sono:

- a) non-negatività: $\forall(i, p, s) N_{i,p} \geq 0$;
- b) la somma di tutte le funzioni base non-nulle di grado p sul generico knot span $[s_i, s_{i+1}]$ è 1 (partizione dell'unità);
- c) il supporto locale della funzione base generica $N_{i,p}(s)$ è ottenuto attraverso l'unione dei nodi compresi nell'intervallo $[s_i, s_{i+p+1}]$;
- d) influenza dei nodi multipli:

- d1) in un nodo di molteplicità k , la base $N_{i,p}(s)$ è C^{p-k} continua (abbassamento della classe di continuità);
- d2) ogni nodo di molteplicità k riduce al più a $k - 1$ la dimensione del supporto (numero di knot spans consecutivi che lo compongono) su cui le basi sono non-nulle (riduzione del supporto locale);
- d3) in ogni nodo interno di molteplicità k , il numero di basi non-nulle è al più $p - k + 1$, con p ancora grado di $N_{i,p}(s)$

La forma più comune di B-spline è quella cubica ($p = 3$) e uniforme. Si può dimostrare che ogni segmento componente la curva $\mathbf{C}(u)$ può essere riscritto nella stessa identica forma matriciale esposta in (3.4), in cui le funzioni base sono riportate nell'esempio di figura 5.12(a), per $n = 8$ (si noti che, per un dato valore s , solo $p + 1$ funzioni base sono non-nulle ed è per questo che ogni segmento della curva dipende dai solo quattro punti di controllo più vicini):

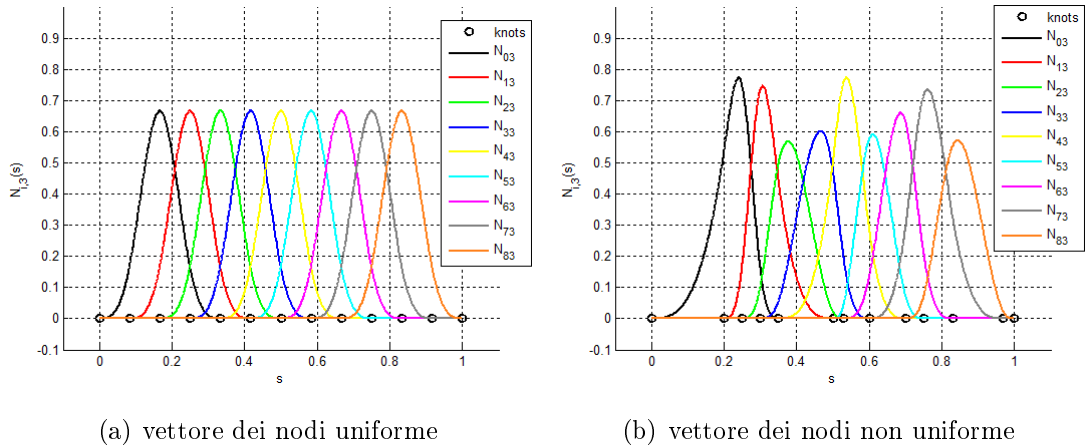


Figura 5.12: polinomi base per una B-spline con $p = 3, n = 8, m = 12$ e $s \in [0, 1]$. I nodi sono tutti semplici.

Infine si elencano le proprietà fondamentali delle B-spline, supponendo $\mathbf{C}(u)$ di grado p e dati $n + 1$ punti di controllo:

- la spline $\mathbf{C}(u)$ è utilizzata per rappresentare una qualsiasi curva aperta come composizione di $N_s = n - p + 1$ segmenti polinomiali di grado p e adiacenti (non vale per le curve chiuse che ne possiedono di più).

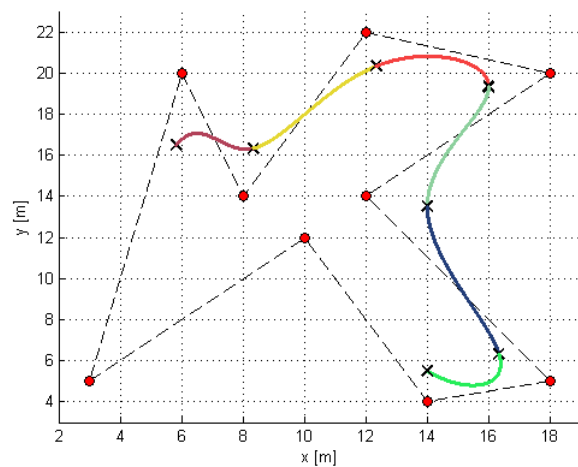


Figura 5.13: esempio di B-spline aperta e non stretta per $n = 8$, $p = 2$, $m = 12$. I sei segmenti componenti sono mostrati in colori differenti, i punti di controllo sono riportati in cerchi rossi mentre i punti nodali sono raffigurati come croci in nero. Infine è riportato anche il poligono di controllo in linea tratteggiata.

In questo modo è anche possibile rappresentare strutture complesse mediante polinomi di grado relativamente basso (più basso è il grado e meglio la spline approssima il poligono di controllo);

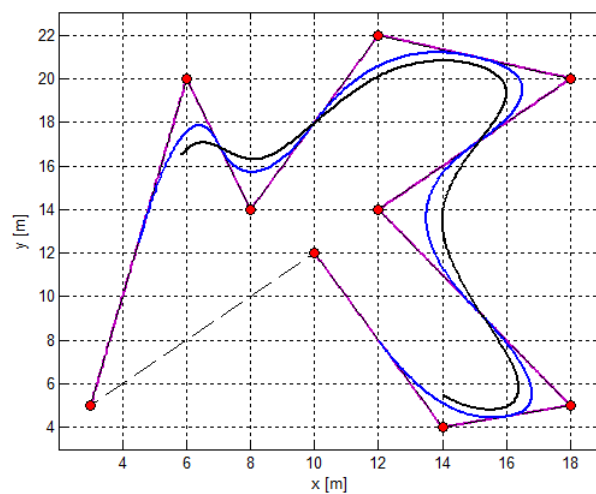
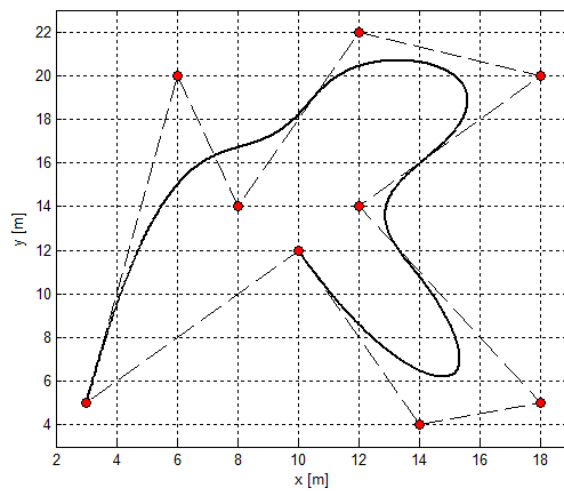


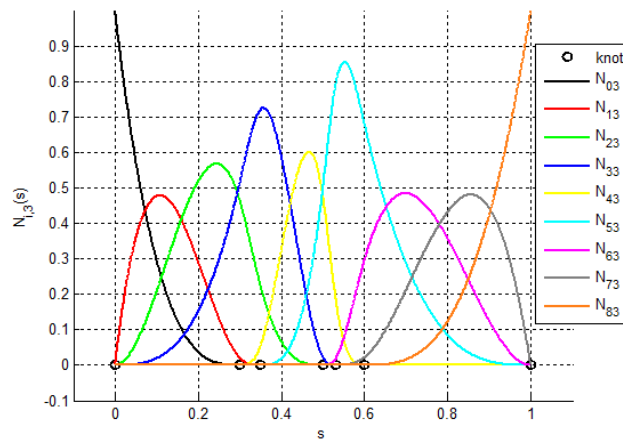
Figura 5.14: B-spline uniforme di grado rispettivamente: $p = 1$ in viola, $p = 2$ in blu e $p = 3$ in nero. In rosso sono raffigurati i punti di controllo mentre il poligono di controllo è evidenziato in tratteggio nero. I nodi sono tutti semplici.

- deve sempre valere: $m = p + 1 + n$;
- una curva B-spline aperta ha come dominio effettivo il sottointervallo $[s_p, s_{p+N_s}]$ (ciò deriva dalla proprietà di supporto locale delle basi) e si dice "stretta" se tocca i due punti di controllo estremi $\mathbf{C}(0) = \mathbf{P}_0$, $\mathbf{C}(1) = \mathbf{P}_n$ ed in essi è tangente al poligono di controllo.

Questa proprietà si rivela utile nel modellare realisticamente il fronte di un fluido o flusso detritico vincolato da pareti di un canale.



(a) clamped B-spline



(b) funzioni base

Figura 5.15: esempio di B-spline cubica non uniforme e stretta nell'immagine a sinistra. I nove punti di controllo sono colorati in rosso mentre le linee tratteggiate indicano il poligono di controllo. Nell'immagine a destra sono riportate le funzioni base che generano la curva. In questo caso i nodi $s_0 = 0$ e $s_m = 1$ hanno molteplicità quattro mentre tutti gli altri knots sono semplici.

- una curva B-spline è contenuta nel dominio convesso del suo poligono di controllo (proprietà di **Strong Convex Hull** che si traduce in un maggior controllo della forma della curva). Inoltre, se $s \in [s_i, s_{i+1})$, allora $\mathbf{C}(s)$ appartiene al convex hull definito dai punti di controllo $\mathbf{P}_{i-p}, \mathbf{P}_{i-p+1}, \dots, \mathbf{P}_i$;

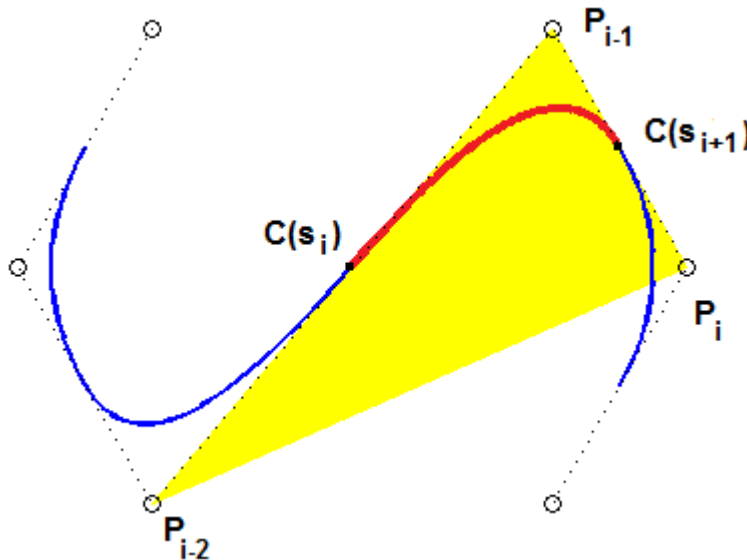


Figura 5.16: esempio che evidenzia la proprietà di Strong Convex Hull per una B-spline uniforme di grado $p = 2$, con 7 punti di controllo (raffigurati in cerchietti). In giallo è evidenziato il guscio convesso che contiene il segmento di curva interessato (in rosso), avente estremi $\mathbf{C}(s_i), \mathbf{C}(s_{i+1})$.

- cambiando la posizione del punto di controllo generico \mathbf{P}_i si influenza $\mathbf{C}(s)$ solo nell'intervallo $[s_i, s_{i+p+1})$ e dunque ogni punto di controllo influenza i $p + 1$ segmenti più prossimi ad esso e a ogni segmento è a sua volta influenzato dai $p + 1$ punti di controllo più vicini (variazioni locali della curva). Questa proprietà deriva direttamente dalla definizione (5.23) e dalla proprietà di supporto locale della base $N_{i,p}(s)$, relativa al punto di controllo \mathbf{P}_i . Se ne deduce che, per modellare curve particolarmente complesse in spazi ristretti, è conveniente aggiungere ulteriori nodi e quindi punti di controllo, a parità di grado (si ricordi la relazione tra m, n, p);

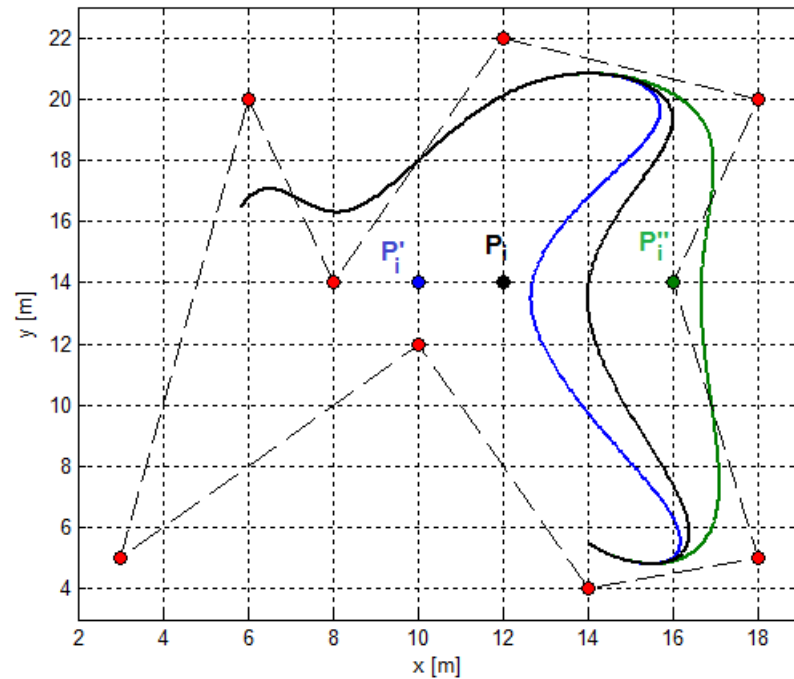


Figura 5.17: effetto locale dello spostamento di un punto di controllo. Esempio per B-spline uniforme cubica aperta e 9 punti di controllo. I punti di controllo rimasti inalterati sono colorati in rosso, mentre quello modificato P_i è colorato in nero, blu e verde (colori corrispondenti a quelli delle tre curve risultanti).

- se s non è un nodo, $\mathbf{C}(s)$ è posizionato all'interno di un segmento di grado p ed è quindi infinitamente differenziabile. Se invece s è un nodo di molteplicità $k \geq 1$ e appartiene al supporto di $N_{i,p}(s)$, poichè quest'ultima è C^{p-k} continua in quel nodo, lo è anche $\mathbf{C}(s)$;
- se la curva è in un piano (spazio), questo significa che nessuna linea retta (piano) interseca una curva B-spline più volte di quelle che interseca il poligono di controllo della curva (proprietà di **variation diminishing**);
- applicare una trasformazione affine alla curva $\mathbf{C}(s)$ (operazione difficoltosa) è equivalente ad applicare la stessa trasformazione ai suoi punti di controllo (operazione semplice) (proprietà di **invarianza affine**). La nuova curva che si ricava è l'unica B-spline riferita ai punti di controllo trasformati.

Metodi matematici per approssimare derivate spaziali

In questa sezione si intendono trattare alcune problematiche connesse alla costruzione di un modello in spazio di stato per un fluido, mediante approccio Lagrangiano e dunque mesh-free .

Con questo termine si intende lo sviluppo di un modello non supportato da una qualsiasi griglia fissata che discretizza spazialmente il dominio d'interesse.

La ragione che ha portato a questa scelta è legata al limitato numero di sensori disponibili per la misurazione dei valori del campo bidimensionale di velocità, caratterizzato da un'estensione spaziale in genere considerevole.

L'intenzione principale è quella di sfruttare al massimo le poche informazioni disponibili, cioè le misure fornite da un basso numero di sensori trasportati dal debris-flow in evoluzione.

Il modello matematico a cui ci si riferisce si basa sulle equazioni di Navier-Stokes (1.15) per fluidi incomprimibili .

Il dominio spaziale è di tipo rettangolare $\Omega = [x_W, x_E] \times [y_S, y_N] \subseteq \mathbb{R}^2$ e le condizioni al contorno di Dirichlet sono di tipo no-slip, cioè $u(x(t), y(t)) = v(x(t), y(t)) = 0, \forall (x(t), y(t)) \in \partial\Omega$.

Nell'approccio "mesh-free" si sono distinte due tecniche principali per l'approssimazione delle derivate spaziali prime e seconde del campo di velocità: la prima si avvale della definizione di derivata direzionale mentre la seconda si appoggia allo sviluppo in serie di Taylor di una funzione in due variabili, supposta di classe $C^n(\Omega)$, con $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ dominio per il campo e $n = n(N_a)$, $n \geq 3$, dipendente cioè dal numero di sensori a disposizione.

Metodo delle derivate direzionali

In tutti i ragionamenti seguenti si farà riferimento alla situazione riportata nella prossima figura:

In rosso sono evidenziate le posizioni degli accelerometri i, j, l, m ; il rettangolo in blu è il confine considerato (approssimazione del canale) ed è specificato dalle coordinate (x_W, x_E, y_S, y_N) ; in verde sono invece rappresentati dei punti ausiliari

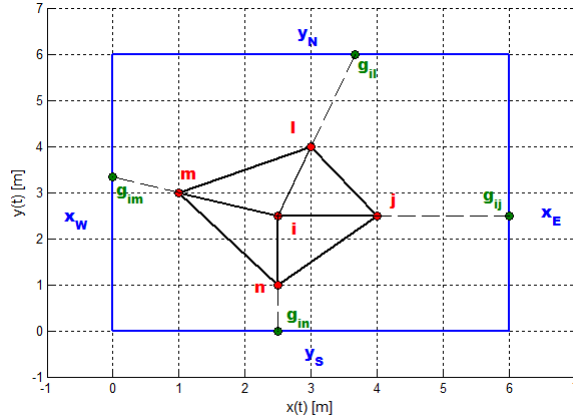


Figura 5.18: Possibile configurazione che può assumere un sistema di $N_a = 5$ accelerometri nel piano.

Sono rappresentati in rosso gli accelerometri, in verde i punti ausiliari, in nero i segmenti di collegamento tra i vari punti e in blu i bounds del sistema

non appartenenti al sistema vero e proprio, ma utili al calcolo delle derivate seconde parziali, chiamati per questo "punti ghosts" .

Il sistema in figura (5.18) rappresenta la situazione seguente: all'istante t , si vuole aggiornare il valori dell'accelerazione sul punto i , conoscendo i valori di velocità $\mathbf{v}_i(t) := \mathbf{v}(x_i(t), y_i(t)) = [u(x_i(t), y_i(t)) \ v(x_i(t), y_i(t))]$ sul punto stesso e in tutti i suoi neighbours $\mathbf{v}_j(t)$, $\mathbf{v}_l(t)$, $\mathbf{v}_m(t)$, $\mathbf{v}_n(t)$ e le loro coordinate nel piano $\mathbf{P}_i(t) = [x_i(t) \ y_i(t)]$, $\mathbf{P}_j(t)$, $\mathbf{P}_l(t)$ e $\mathbf{P}_m(t)$.

Le formule fondamentali necessarie per l'approssimazione delle derivate prime di $u(x(t), y(t))$ nel punto i rispetto agli assi cartesiani (stesse anche per $v(x(t), y(t))$), sono:

- definizione di derivata prima direzionale di $u(x(t), y(t))$ lungo la direzione della congiungente tra i ed uno dei suoi vicini, appartenenti all'insieme $N_i(t) = \{j, l, m, n\}$ (ad esempio j):

$$\frac{\partial u(x(t), y(t))}{\partial n_{ij}} = \frac{\partial u(x(t), y(t))}{\partial x} \cos(\theta_{ij}(t)) + \frac{\partial u(x(t), y(t))}{\partial y} \sin(\theta_{ij}(t)), \quad (5.26)$$

con $n_{ij}(t) = [\cos(\theta_{ij}(t)) \ \sin(\theta_{ij}(t))]^T$ versore applicato sul punto i e diretto lungo la congiungente tra i e j all'istante t , $\theta_{ij}(t) = \arctan(P_j(t) - P_i(t))$. Stesso ragionamento per qualunque altro vicino di i .

- approssimazione delle derivate prime direzionali sul punto i mediante dif-

ferenze in avanti:

$$Du_{ij}(t) := \frac{u(x_j(t), y_j(t)) - u(x_i(t), y_i(t))}{d_{ij}(t)} \simeq \frac{\partial u(x_i(t), y_i(t))}{\partial n_{ij}} \quad (5.27)$$

con $d_{ij}(t) = \|P_j(t) - P_i(t)\|$. Dunque, $\forall t$, si approssima la derivata direzionale con una combinazione lineare dei valori del campo nei due punti d'interesse;

- per determinare l'approssimazione $\tilde{\nabla}u$ del gradiente di $u(x(t), y(t))$ nel punto i all'istante t , si scelgono due punti appartenenti ad $N_i(t)$, oltre ad i stesso, (ad esempio j ed l) e si risolve un sistema lineare di dimensione due, la cui soluzione è:

$$\tilde{\nabla}u|_{x_i} = A^{-1}(t)b_u(t) \simeq \left[\frac{\partial u(x_i(t), y_i(t))}{\partial x} \quad \frac{\partial u(x_i(t), y_i(t))}{\partial y} \right]^T, \quad (5.28)$$

con

$$A(t) = \begin{bmatrix} \cos(\theta_{ij}(t)) & \sin(\theta_{ij}(t)) \\ \cos(\theta_{il}(t)) & \sin(\theta_{il}(t)) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}, \quad b_u(t) = \begin{bmatrix} Du_{ij}(t) \\ Du_{il}(t) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2, \quad (5.29)$$

La condizione di invertibilità per la matrice $A(t)$ del sistema è:

$$\theta_{il}(t) \neq \theta_{ij}(t) + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \quad (5.30)$$

Per l'approssimazione delle derivate seconde parziali $\frac{\partial^2 u(x(t), y(t))}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 u(x(t), y(t))}{\partial y^2}$ nel punto $(x_i(t), y_i(t))$ sono invece necessari i seguenti passi (stesso procedimento per $v(x(t), y(t))$):

- dalla definizione, si ricava la formula per il calcolo della derivata seconda direzionale lungo la congiungente il punto $(x_i(t), y_i(t))$ ed uno dei suoi neighbours, ad esempio, $(x_j(t), y_j(t))$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u(x(t), y(t))}{\partial n_{ij}^2} &= \cos^2(\theta_{ij}(t)) \frac{\partial^2 u(x(t), y(t))}{\partial x^2} + \sin(2\theta_{ij}(t)) \frac{\partial^2 u(x(t), y(t))}{\partial x \partial y} + \\ &+ \sin^2(\theta_{ij}(t)) \frac{\partial^2 u(x(t), y(t))}{\partial y^2}, \end{aligned} \quad (5.31)$$

con $n_{ij}(t)$, $\theta_{ij}(t)$ già introdotti precedentemente;

- si approssima la derivata seconda direzionale di u sul punto $(x_i(t), y_i(t))$ mediante differenze finite in avanti, sfruttando il punto ausiliario $g_{ij}(t)$ che si incontra sul bordo $\partial\Omega$ del dominio seguendo la direzione individuata da $n_{ij}(t)$:

$$D^2u_{ij} := \frac{2u(x_i(t), y_i(t))}{d_{ij}d_{ig_{ij}}} - \frac{2u(x_j(t), y_j(t))}{d_{ij}(d_{ig_{ij}} - d_{ij})} + \frac{2u(x_{g_{ij}}(t), y_{g_{ij}}(t))}{d_{ig_{ij}}(d_{ig_{ij}} - d_{ij})}, \quad (5.32)$$

con $d_{ij}(t)$ distanza tra i punti i e j prima definita e $d_{ig_{ij}} = \|P_{g_{ij}}(t) - P_i(t)\|$ distanza tra punto i e il punto g_{ij} (si veda la figura (5.18)). Si noti che l'approssimazione compiuta in (5.32) non è altro che la combinazione lineare delle velocità dei tre punti (due accelerometri ed un ghost) che si incontrano lungo la direzione d'interesse;

- per determinare le approssimazioni delle derivate seconde parziali lungo gli assi $\frac{\partial u(x(t), y(t))}{\partial x^2}$, $\frac{\partial u(x(t), y(t))}{\partial y^2}$ sul punto $(x_i(t), y_i(t))$ occorre innanzitutto scegliere tre vicini del punto stesso. Convienne sicuramente considerare i punti j , l già scelti per le derivate prime e aggiungerne un ultimo, ad esempio il punto $(x_m(t), y_m(t))$ (si veda la figura (5.18)).

Successivamente si ricavano i tre punti ausiliari sul bordo $g_{ij}(t)$, $g_{il}(t)$, $g_{im}(t)$ lungo le tre direzioni $n_{ij}(t)$, $n_{il}(t)$, $n_{im}(t)$ e si risolve, ad ogni istante t , un sistema lineare di dimensione tre, la cui soluzione è:

$$e_u(t) = C^{-1}(t)d_u(t) \quad (5.33)$$

dove:

$$e_u(t) := \begin{bmatrix} e_{u_1}(t) & e_{u_2}(t) & e_{u_3}(t) \end{bmatrix}^T \simeq \begin{bmatrix} \frac{\partial u(x(t), y(t))}{\partial x^2} & \frac{\partial u(x(t), y(t))}{\partial x \partial y} & \frac{\partial u(x(t), y(t))}{\partial y^2} \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^3,$$

$$C(t) := \begin{bmatrix} \cos^2(\theta_{ij}(t)) & \sin(2\theta_{ij}(t)) & \sin^2(\theta_{ij}(t)) \\ \cos^2(\theta_{il}(t)) & \sin(2\theta_{il}(t)) & \sin^2(\theta_{il}(t)) \\ \cos^2(\theta_{im}(t)) & \sin(2\theta_{im}(t)) & \sin^2(\theta_{im}(t)) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3},$$

$$d_u(t) := \begin{bmatrix} D^2u_{ij} & D^2u_{il} & D^2u_{im} \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^3$$

Riassumendo, le approssimazioni ottenute per le derivate spaziali delle velocità sono della forma:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u(x_i(t), y_i(t))}{\partial x} &\simeq \phi_j^x(t)u(x_j(t), y_j(t)) + \phi_i^x(t)u(x_i(t), y_i(t)) + \phi_l^x(t)u(x_l(t), y_l(t)) \\
\frac{\partial u(x_i(t), y_i(t))}{\partial y} &\simeq \phi_j^y(t)u(x_j(t), y_j(t)) + \phi_i^y(t)u(x_i(t), y_i(t)) + \phi_l^y(t)u(x_l(t), y_l(t)) \\
\frac{\partial^2 u(x_i, y_i, t)}{\partial x^2} &\simeq \xi_j^x(t)u(x_j(t), y_j(t)) + \xi_i^x(t)u(x_i(t), y_i(t)) + \xi_l^x(t)u(x_l(t), y_l(t)) + \\
&\quad + \xi_m^x(t)u(x_m(t), y_m(t)) + \Gamma_u^x(t) \\
\frac{\partial^2 u(x_i(t), y_i(t))}{\partial y^2} &\simeq \xi_j^y(t)u(x_j(t), y_j(t)) + \xi_i^y(t)u(x_i(t), y_i(t)) + \xi_l^y(t)u(x_l(t), y_l(t)) + \\
&\quad + \xi_m^y(t)u(x_m(t), y_m(t)) + \Gamma_u^y(t)
\end{aligned} \tag{5.34}$$

dove:

$$\begin{aligned}
\Gamma_u^x(t) &= \xi_{g_{ij}}^x u(x_{g_{ij}}(t), y_{g_{ij}}(t)) + \xi_{g_{il}}^x u(x_{g_{il}}(t), y_{g_{il}}(t)) + \xi_{g_{im}}^x u(x_{g_{im}}(t), y_{g_{im}}(t)) \\
\Gamma_u^y(t) &= \xi_{g_{ij}}^y u(x_{g_{ij}}(t), y_{g_{ij}}(t)) + \xi_{g_{il}}^y u(x_{g_{il}}(t), y_{g_{il}}(t)) + \xi_{g_{im}}^y u(x_{g_{im}}(t), y_{g_{im}}(t))
\end{aligned}$$

e i coefficienti delle combinazioni lineari sono espressi in funzione delle componenti delle matrici $A^{-1}(t) = [\tilde{a}_{mn}]$ con $m, n = 1, 2$ e $C^{-1}(t) = [\tilde{c}_{hk}]$ con $h, k = 1, 2, 3$:

asse	$j \in N_i(t)$	$l \in N_i(t)$	i
x	$\phi_j^x(t) = \frac{\tilde{a}_{11}}{d_{ij}}$	$\phi_l^x(t) = \frac{\tilde{a}_{12}}{d_{il}}$	$\phi_i^x(t) = -\phi_j^x(t) - \phi_l^x(t)$
y	$\phi_j^y(t) = \frac{\tilde{a}_{21}}{d_{ij}}$	$\phi_l^y(t) = \frac{\tilde{a}_{22}}{d_{il}}$	$\phi_i^y(t) = -\phi_j^y(t) - \phi_l^y(t)$

Tabella 5.1: coefficienti delle combinazioni lineari che approssimano le derivate prime di $u(x(t), y(t))$ rispetto ad x e y e calcolate nel punto $(x_i(t), y_i(t))$

$\forall i = 1, \dots, N_a$, $j, l, m \in N_i(t)$ e g_{ij}, g_{il}, g_{im} punti ausiliari sul bordo relativi ad i (per la componente $v(x(t), y(t))$ della velocità, le formule sono analoghe, basta sostituire v ad u).

Se valgono le no-slip conditions, le formule per le derivate seconde in (5.34) si semplificano, essendo $\Gamma_u^x(t) = \Gamma_u^y(t) = 0$.

Si riportano ora alcune osservazioni:

- 1) tutta la procedura appena elencata deve essere ripetuta per ogni accelerometro $(x_i(t), y_i(t))$, con $i = 1, \dots, N_a$ e ad ogni istante di tempo t ;

$N_i(t)$	asse x	asse y
i	$\xi_i^x(t) = \frac{2\tilde{c}_{11}}{d_{ij}d_{ig_{ij}}} + \frac{2\tilde{c}_{12}}{d_{il}d_{ig_{il}}} + \frac{2\tilde{c}_{13}}{d_{im}d_{ig_{im}}}$	$\xi_i^y(t) = \frac{2\tilde{c}_{31}}{d_{ij}d_{ig_{ij}}} + \frac{2\tilde{c}_{32}}{d_{il}d_{ig_{il}}} + \frac{2\tilde{c}_{33}}{d_{im}d_{ig_{im}}}$
j	$\xi_j^x(t) = -\frac{2\tilde{c}_{11}}{d_{ij}(d_{ig_{ij}}-d_{ij})}$	$\xi_j^y(t) = -\frac{2\tilde{c}_{31}}{d_{ij}(d_{ig_{ij}}-d_{ij})}$
l	$\xi_l^x(t) = -\frac{2\tilde{c}_{12}}{d_{il}(d_{ig_{il}}-d_{il})}$	$\xi_l^y(t) = -\frac{2\tilde{c}_{32}}{d_{il}(d_{ig_{il}}-d_{il})}$
m	$\xi_m^x(t) = -\frac{2\tilde{c}_{13}}{d_{im}(d_{ig_{im}}-d_{im})}$	$\xi_m^y(t) = -\frac{2\tilde{c}_{33}}{d_{im}(d_{ig_{im}}-d_{im})}$
g_{ij}	$\xi_{g_{ij}}^x(t) = -\frac{2\tilde{c}_{11}}{d_{ig_{ij}}(d_{ig_{ij}}-d_{ij})}$	$\xi_{g_{ij}}^y(t) = -\frac{2\tilde{c}_{31}}{d_{ig_{ij}}(d_{ig_{ij}}-d_{ij})}$
g_{il}	$\xi_{g_{il}}^x(t) = -\frac{2\tilde{c}_{12}}{d_{ig_{il}}(d_{ig_{il}}-d_{il})}$	$\xi_{g_{il}}^y(t) = -\frac{2\tilde{c}_{32}}{d_{ig_{il}}(d_{ig_{il}}-d_{il})}$
g_{im}	$\xi_{g_{im}}^x(t) = -\frac{2\tilde{c}_{13}}{d_{ig_{im}}(d_{ig_{im}}-d_{im})}$	$\xi_{g_{im}}^y(t) = -\frac{2\tilde{c}_{33}}{d_{ig_{im}}(d_{ig_{im}}-d_{im})}$

Tabella 5.2: coefficienti delle combinazioni lineari che approssimano le derivate seconde di $u(x(t), y(t))$ rispetto ad x e y e calcolate nel punto $(x_i(t), y_i(t))$

- 2) ogni accelerometro deve possedere almeno due neighbours per l'aggiornamento delle derivate prime del campo nella posizione che occupa e almeno tre vicini per le derivate seconde, se ne deduce che l'algoritmo è applicabile se $N_a \geq 4$;
- 3) l'inserimento dei punti ausiliari sarebbe da effettuarsi solo in assenza di rette passanti per tre accelerometri, lungo le direzioni interessate. Ciò si tradurrebbe in maggiori controlli e in un appesantimento eccessivo dell'algoritmo. Si è preferito dunque inserire sempre i "punti ghost", data la semplicità nel ricavare le loro posizioni (appartengono al bordo $\partial\Omega$) e velocità (date direttamente dalle condizioni al contorno di Dirichlet). Tuttavia questa semplicità implementativa si riflette in approssimazioni meno affidabili, soprattutto se gli accelerometri sono distanti dal bordo;
- 4) il criterio adottato per la scelta dei tre neighbours, per ogni punto i , è basato sulla semplice nozione di distanza euclidea. Per approssimare le derivate nel punto i , si considerano i tre vicini j , l e m a distanza minore da i , tra tutti i punti del neighbourhood $N_i(t)$. Nulla vieta di adottare criteri di selezione diversi, se considerati più efficienti dal punto di vista algoritmico;
- 5) i continui problemi d'inversione delle matrici $A(t)$ e $C(t)$, anche quando gli accelerometri sono distanti dal bordo, porta a sconsigliare l'utilizzo di

questa procedura e a favorire il prossimo metodo.

Metodo dello sviluppo di Taylor

Come si evince dal nome, questo metodo sfrutta lo sviluppo in serie di Taylor di una funzione dipendente da due variabili per calcolare, ancora una volta, il gradiente e le derivate seconde spaziali del campo vettoriale $\mathbf{v}(x(t), y(t))$ di velocità (o pressione, profondità, ecc ecc) nelle posizioni istantanee degli accelerometri.

Per facilitare la trattazione e la comprensione della procedura, si suppone di aver a disposizione solo $N_a = 6$ accelerometri da poter posizionare sul canale del debris-flow. Questo è anche il numero minimo necessario di accelerometri per poter applicare l'algoritmo. Nel seguito si accennerà ad una trattazione più generica. Si suppone di dover calcolare le derivate spaziali del campo sulla posizione istantanea $(x_i(t), y_i(t))$ occupata dall'accelerometro i -esimo, con $i = 1, \dots, N_a$.

Introduciamo inoltre la notazione di funzione scalare generica dipendente da due variabili $f(x(t), y(t))$, al fine di rappresentare senza distinzione le due componenti $u(x(t), y(t))$ e $v(x(t), y(t))$ della velocità, dato che il procedimento sarà esattamente lo stesso per entrambe.

Gli step fondamentali dell'algoritmo sono i seguenti:

- 1) dato il numero di accelerometri N_a , si ricava il grado n dello sviluppo in serie della funzione $f(x, y)$ attorno al punto (x_i, y_i) ad ogni istante di tempo t , attraverso la formula:

$$n = \lceil \frac{\sqrt{1 + 8N_a} - 3}{2} \rceil \quad (5.35)$$

In questo caso $n = 2$;

- 2) si effettua lo sviluppo in serie di Taylor di $f(x, y)$ attorno al centro (x_i, y_i) fino al grado n (grado 2 in questo esempio):

$$\begin{aligned}
f(x, y) &= f(x_i, y_i) + f_x(x_i, y_i)(x - x_i) + f_y(x_i, y_i)(y - y_i) + \\
&+ \frac{f_{xx}(x_i, y_i)}{2}(x - x_i)^2 + f_{xy}(x_i, y_i)(x - x_i)(y - y_i) + \\
&+ \frac{f_{yy}(x_i, y_i)}{2}(y - y_i)^2 + o(\|\mathbf{x}\|^2),
\end{aligned} \tag{5.36}$$

$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$ t.c. $\|[(x - x_i) \ (y - y_i)]^T\| \leq \epsilon$ con $\epsilon > 0$ arbitrariamente piccolo e con:

$$\begin{aligned}
f_x(x_i, y_i) &:= \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \Big|_{(x_i, y_i)}, \quad f_y(x_i, y_i) := \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \Big|_{(x_i, y_i)} \\
f_{xx}(x_i, y_i) &:= \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2} \Big|_{(x_i, y_i)}, \quad f_{yy}(x_i, y_i) := \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2} \Big|_{(x_i, y_i)} \\
f_{xy}(x_i, y_i) &:= \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y} \Big|_{(x_i, y_i)}
\end{aligned} \tag{5.37}$$

3) si considerano tutti gli $N_a - 1$ accelerometri rimanenti come appartenenti alla neighbourhood $N_i(t)$ dell'accelerometro i -esimo, in modo che lo sviluppo (5.36) possa essere valido per ogni posizione $(x(t), y(t))$ dei punti di misura.

Si calcola dunque la $f(x, y)$ per ogni coppia (x_j, y_j) , con $j = 1, \dots, N_a$, e $j \neq i$ e si combinano linearmente le espressioni ottenute, trascurando gli infinitesimi di ordine superiore al secondo:

$$\begin{aligned}
D_f(x_i, y_i) &:= \sum_{j=1}^{N_a} \alpha_{ij} f(x_j, y_j) = \\
&= f(x_i, y_i) \underbrace{\sum_{j=1}^{N_a} \alpha_{ij}}_{(1)} + f_x(x_i, y_i) \underbrace{\sum_{j=1, j \neq i}^{N_a} \alpha_{ij} h_{ij}}_{(2)} + f_y(x_i, y_i) \underbrace{\sum_{j=1, j \neq i}^{N_a} \alpha_{ij} k_{ij}}_{(3)} + \\
&+ f_{xx}(x_i, y_i) \underbrace{\frac{\sum_{j=1, j \neq i}^{N_a} \alpha_{ij} h_{ij}^2}{2}}_{(4)} + f_{xy}(x_i, y_i) \underbrace{\sum_{j=1, j \neq i}^{N_a} \alpha_{ij} h_{ij} k_{ij}}_{(5)} + \\
&+ f_{yy}(x_i, y_i) \underbrace{\frac{\sum_{j=1, j \neq i}^{N_a} \alpha_{ij} k_{ij}^2}{2}}_{(6)},
\end{aligned} \tag{5.38}$$

dove si è sottointesa la dipendenza temporale delle variabili presenti in (5.38) per non complicare ulteriormente la notazione e $h_{ij} := x_j - x_i$, $k_{ij} := y_j - y_i$;

- 4) a seconda di quale derivata si desidera approssimare mediante $D_f(x_i, y_i)$, si devono imporre le seguenti condizioni:

$$\begin{aligned} D_f(x_i, y_i) &\simeq f_x(x_i, y_i) \Rightarrow (1) = (3) = (4) = (5) = (6) = 0 \text{ e } (2) = 1, \\ D_f(x_i, y_i) &\simeq f_y(x_i, y_i) \Rightarrow (1) = (2) = (4) = (5) = (6) = 0 \text{ e } (3) = 1, \\ D_f(x_i, y_i) &\simeq f_{xx}(x_i, y_i) \Rightarrow (1) = (2) = (3) = (5) = (6) = 0 \text{ e } (4) = 1, \\ D_f(x_i, y_i) &\simeq f_{yy}(x_i, y_i) \Rightarrow (1) = (2) = (3) = (4) = (5) = 0 \text{ e } (6) = 1, \end{aligned}$$

Tali condizioni, compattate, portano a quattro differenti sistemi lineari di dimensione N_a , da risolvere $\forall i$ e $\forall t$:

$$\mathbf{D}^i \boldsymbol{\alpha}_x^i = \mathbf{b}_x, \quad \mathbf{D}^i \boldsymbol{\alpha}_y^i = \mathbf{b}_y, \quad \mathbf{D}^i \boldsymbol{\beta}_x^i = \mathbf{d}_x, \quad \mathbf{D}^i \boldsymbol{\beta}_y^i = \mathbf{d}_y, \quad (5.39)$$

con $\boldsymbol{\alpha}_x^i$, $\boldsymbol{\alpha}_y^i$, $\boldsymbol{\beta}_x^i$, $\boldsymbol{\beta}_y^i \in \mathbb{R}^{N_a}$ vettori delle variabili incognite (non sono altro che i vecchi coefficienti α_{ij} rinominati in modo diverso per i quattro casi) e:

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_x &:= \begin{bmatrix} 0 & 1 & \mathbb{O}_{1 \times N_a - 2} \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^{N_a}, & \mathbf{b}_y &:= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & \mathbb{O}_{1 \times N_a - 3} \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^{N_a}, \\ \mathbf{d}_x &:= \begin{bmatrix} \mathbb{O}_{1 \times 4} & 1 & \mathbb{O}_{1 \times N_a - 5} \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^{N_a}, & \mathbf{d}_y &:= \begin{bmatrix} \mathbb{O}_{1 \times 5} & 1 & \mathbb{O}_{1 \times N_a - 4} \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^{N_a}, \\ \mathbf{D}^i &:= \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ h_{i1} & h_{i2} & \dots & h_{iN_a} \\ k_{i1} & k_{i2} & \dots & k_{iN_a} \\ \frac{h_{i1}^2}{2} & \frac{h_{i2}^2}{2} & \dots & \frac{h_{iN_a}^2}{2} \\ h_{i1}k_{i1} & h_{i2}k_{i2} & \dots & h_{iN_a}k_{iN_a} \\ \frac{k_{i1}^2}{2} & \frac{k_{i2}^2}{2} & \dots & \frac{k_{iN_a}^2}{2} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{N_a \times N_a}, \end{aligned} \quad (5.40)$$

- 5) si ricavano le approssimazioni delle derivate del campo generico $f(x, y)$, utilizzando i coefficienti appena calcolati:

$$f_x(x_i, y_i) \simeq \sum_{j=1}^{N_a} \alpha_{ij}^x(x, y) f(x_j, y_j), \quad f_y(x_i, y_i) \simeq \sum_{j=1}^{N_a} \alpha_{ij}^y(x, y) f(x_j, y_j) \quad (5.41)$$

$$f_{xx}(x_i, y_i) \simeq \sum_{j=1}^{N_a} \beta_{ij}^x(x, y) f(x_j, y_j), \quad f_{yy}(x_i, y_i) \simeq \sum_{j=1}^{N_a} \beta_{ij}^y(x, y) f(x_j, y_j) \quad (5.42)$$

Sostituendo $u(x, y)$ e $v(x, y)$ ad $f(x, y)$ in (5.41) e (5.42), si trovano le approssimazioni teoriche cercate.

Si riportano alcune osservazioni sul metodo appena esposto:

- a) l'algoritmo è già predisposto per un generico numero di sensori $N_a \geq 6$. In ogni caso, si è deciso di utilizzare le informazioni provenienti da tutti i sensori per approssimare le derivate della velocità su ogni posizione $(x_i(t), y_i(t))$ con $i = 1, \dots, N_a$. Tale scelta non è affatto obbligatoria, si potrebbe decidere di aggiornare i valori delle derivate parziali utilizzando un sottoinsieme di sensori $6 \leq N_n < N_a$ appartenenti ad un intorno piccolo a piacere di quello i -esimo, in modo da snellire la procedura e da ridurre eventuali problemi di invertibilità della matrice \mathbf{D}^i , ma a scapito di approssimazioni sempre meno accurate;
- b) data la natura dell'algoritmo, più sono vicini i valori di posizione e velocità istantanei degli accelerometri e meglio vengono approssimate le derivate spaziali; purtroppo l'eccessiva vicinanza dei sensori comporta un'alta probabilità di non invertibilità della matrice \mathbf{D}^i (si vedano le formule in (5.40)), dato che $h_{ij}, k_{ij} \rightarrow 0$ per $\mathbf{P}_j(t) \rightarrow \mathbf{P}_j(t)$.

Anche una distribuzione molto ampia per le velocità iniziali tende a far divergere l'algoritmo (questo problema dovrebbe risolversi diminuendo T_c). Nella discretizzazione di Eulero, il tempo di campionamento pesa la variazione di velocità tra due istanti successivi; per bassi valori del parametro, $T_c \leq 10^{-3}$, è possibile ridurre eventuali brusche variazioni e quindi evitare la divergenza dell'algoritmo, dato che si approssima sempre meglio la derivata temporale per $T_c \rightarrow 0$. Aspetto negativo: si è costretti ad effettuare simulazioni lentissime).

Occorre regolare opportunamente le distanze e le velocità iniziali $x_i(0), y_i(0), u_i(0), v_i(0), \forall i$, assieme al coefficiente di viscosità cinematica $\nu = \frac{\mu}{\rho}$, al fine di raggiungere un compresso soddisfacente.

Quanto appena esposto rappresenta la fase più complicata di tutto il metodo, cioè l'impostazione degli stati iniziali degli accelerometri e di alcuni parametri fondamentali in modo da ottenere i comportamenti caratteristici di un fluido incomprimibile;

- c) problemi di invertibilità si riscontrano anche in particolari configurazioni delle posizioni $\mathbf{P}_i(t) \forall i$ degli accelerometri (in aggiunta ai problemi in prossimità dei bound), ad esempio quando la maggioranza dei sensori presenta una stessa coordinata istantanea (una riga o colonna intera di \mathbf{D}^i si annulla e dunque $\det(\mathbf{D}^i) = 0$);
- d) questo metodo sembra essere più robusto e alitmicamente più compatto di quello precedente e, nonostante tutto, comporta meno problemi di invertibilità.
- e) la procedura di approssimazione delle derivate parziali deve essere svolta sia per il campo vettoriale di velocità che per quello scalare di pressione (si vedano le equazioni (1.15))

Bibliografia

- [1] S. Shao and E. Lo, “Incompressible sph method for simulating newtonian and non-newtonian flows with a free surface,” *Advances in Water Resources*, vol. 26, pp. 787–800, 2003.
- [2] —, “Simulation of near-shore solitary wave mechanics by an incompressible sph method,” *Applied Ocean Research*, vol. 24, pp. 275–286, 2002.
- [3] D. S. Y. Wang, E. Teoh, “Structure-adaptive b-snake for segmenting complex objects,” *7th International Conference on Control, Automation, Robotics And Vision (ICARCV 2002)*, vol. 2, pp. 1–4, 2002.
- [4] T. Takahashi, *Debris Flow: Mechanics, Prediction and Countermeasures*. Taylor and Francis.
- [5] R. G.-M. C.E. Martinez, F. Miralles-Wilhelm, “Quasi-three dimensional two-phase debris-flow model accounting for boulder transport,” in *5-th International Conference on Debris Flow Hazards. Mitigation, Mechanics, Prediction and Assessment*, 2011, pp. 457–466.
- [6] S. Luding, “Shear flow modeling of cohesive and frictional fine powder,” *Powder Technology*, vol. 158.
- [7] L. V.-Q. X. Zhang, “An accurate elasto-plastic frictional tangential force displacement model for granular flow simulations: Displacement-driven formulation,” *Journal of Computational Physics*, vol. 225, pp. 730–752, 2007.
- [8] K. T. Y. S. Y. Nishiguchi, T. Uchida, “Prediction of run-out process for a debris flow triggered by a deep rapid landslide,” in *5-th International*

- Conference on Debris Flow Hazards. Mitigation, Mechanics, Prediction and Assessment*, 2011, pp. 477–485.
- [9] R. M. D. C. S. Tessitore, D. Di Martire, “Comparison of 2d models for the simulation of the october 1954 debris-flow and flood event at maiori (campania region, italy),” in *5-th International Conference on Debris Flow Hazards. Mitigation, Mechanics, Prediction and Assessment*, 2011, pp. 513–522.
- [10] V. B. G. Viccione, “Simulating triggering and evolution of debris-flow with sph,” in *5-th International Conference on Debris Flow Hazards. Mitigation, Mechanics, Prediction and Assessment*, 2011, pp. 523–532.
- [11] A. P. L. Minatti, “Sph numerical approach in modelling 2d muddy debris flow,” in *5-th International Conference on Debris Flow Hazards. Mitigation, Mechanics, Prediction and Assessment*, 2011, pp. 467–475.
- [12] E. M. Anne Cuzol, “A stochastic filtering technique for fluid flow velocity fields tracking,” *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, vol. 31, 2009.
- [13] G. Picci, *Filtraggio Statistico (Wiener, Levinson, Kalman) e Applicazioni*. Libreria Progetto Padova.
- [14] J. U. Simon Julier, “Unscented filtering and nonlinear estimation,” in *Proceedings of the IEEE*, vol. 92, 2004.
- [15] A. VV, *5-th International Conference on Debris Flow Hazards. Mitigation, Mechanics, Prediction and Assessment*. R. Genevois, D. Hamilton, A. Prestininzi.
- [16] *Matlab R2009a Spline Toolbox documentation: B-Spline Properties, B-Form*, 2009.