

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

Dipartimento di Fisica e Astronomia “Galileo Galilei”
Corso di Laurea Triennale in Astronomia

Tesi di Laurea

La fisica delle anisotropie del fondo cosmico di
microonde

Relatore

Prof. Nicola Bartolo

Laureando

Riccardo Rossetto

Anno Accademico 2017/2018

Indice

Introduzione	v
1 Il fondo cosmico di microonde	1
1.1 Formazione delle anisotropie	1
1.2 Misurazioni del CMB	2
2 Spettro di potenza angolare	5
2.1 Campo di temperatura del CMB	5
2.2 Definizione dello spettro di potenza angolare	5
2.3 Funzione di correlazione a due punti	7
2.4 Campi Casuali	8
3 Spettro delle Anisotropie	9
3.1 Grandi Scale	9
3.2 Piccole Scale	10
4 Anisotropie in temperatura del CMB	11
4.1 Oscillazioni Acustiche	11
4.1.1 Oscillazioni Forzate	12
4.1.2 Soluzioni al prim'ordine	13
4.1.3 Baryon Drag	14
4.1.4 Effetto Doppler	15
4.1.5 Driving Force	16
4.1.6 Damping	16
4.2 Anisotropie Secondarie	17
4.2.1 Effetti Gravitazionali	17
4.2.2 Reionizzazione	17
5 Parametri Cosmologici	21
5.1 Sensibilità dello spettro di potenza	21
6 Non Gaussianità	23
6.1 Definizione del Bispettro	23
6.2 Approssimazione di flat-sky	24
6.3 Bispettro primordiale	25
6.4 Non-Gaussianità nell'universo a basso redshift	26
6.5 Non-Gaussianità alla ricombinazione	27

Introduzione

Lo scopo di questo lavoro di tesi è la riderivazione dei principali risultati che portano alla comprensione delle anisotropie in temperatura della radiazione cosmica di fondo (CMB). Sarà dato particolare rilievo alle oscillazioni acustiche, e alle informazioni fisiche che è possibile ricavare dallo studio dello spettro di potenza angolare. Successivamente si presenta brevemente le informazioni riguardanti i parametri cosmologici che è possibile ricavare dallo spettro di potenza. Infine si presenta lo studio delle non-Gaussianità, che contengono ulteriori informazioni fisiche, attraverso i concetti di funzione di correlazione a tre punti e di bispettro, che sono ulteriori osservabili del CMB che vanno al di là della funzione di correlazione a due punti. Il lavoro è strutturato come segue:

- Presentazione delle principali proprietà della CMB
- Approfondimento del concetto di spettro di potenza angolare
- Trattazione fisica delle anisotropie in temperatura, primarie e secondarie
- Oscillazioni acustiche nello spettro di potenza angolare, con interpretazione fisica
- Legame tra parametri cosmologici ed oscillazioni acustiche
- Presentazione del concetto di non-Gaussianità

1 Il fondo cosmico di microonde

La prima rilevazione del fondo cosmico di microonde (CMB) risale al 1965, ad opera di Penzias e Wilson, e segna un fondamentale punto di svolta nella cosmologia moderna. Il CMB ci offre uno sguardo sull'universo quando esso aveva solo 300.000 anni, e contiene una straordinaria quantità di informazioni fisiche. Lanciato nel 1989, il satellite COBE, ci da una prima misurazione di precisione dello spettro del CMB, il quale risulta sovrapporsi ad uno spettro di corpo nero di temperatura $T = 2.726 \pm 0.010K$ con una precisione elevatissima. Questa informazione ha profonde implicazioni fisiche. La radiazione era infatti stata precedentemente teorizzata da Gamow, Alpher ed Herman, come una conseguenza del disaccoppiamento tra materia e radiazione nei primi stadi di vita dell'universo, dovuto all'espansione e dunque al raffreddamento del fluido di fotoni-barioni che lo componevano precedentemente. L'effettiva osservazione del CMB costituisce dunque una prova molto solida della teoria del Big Bang, e testimonia l'incredibile omogeneità dell'universo. La radiazione inoltre, trascurando un'anisotropia di dipolo quasi certamente dovuta ad un effetto dato dal moto del nostro stesso sistema di riferimento, mostra un'incredibile isotropia. Omogeneità su grande scala ed isotropia sono le caratteristiche fondanti del Principio Cosmologico, fondamentale pilastro della teoria del Big Bang e di tutta la cosmologia moderna.

L'estrema isotropia misurata ha però posto anche alcune importanti problematiche. Il cosiddetto problema dell'orizzonte (horizon problem), ovvero l'apparente mancanza di una connessione causale tra le porzioni di cielo della superficie di ultimo scattering, che è attualmente spiegato tramite la teoria dell'inflazione; e l'iniziale totale mancanza di disomogeneità su piccola scala. Nel modello del big bang infatti, le perturbazioni crescono per instabilità gravitazionale con l'espansione, fino a formare le strutture che osserviamo oggi. L'osservazione di anisotropie risolve questo secondo problema.

1.1 Formazione delle anisotropie

Prima di $z_* = 1100$ (epoca della ricombinazione), i fotoni del CMB sono sufficientemente energetici da ionizzare l'idrogeno. Lo scattering di Compton quindi lega strettamente i fotoni agli elettroni, i

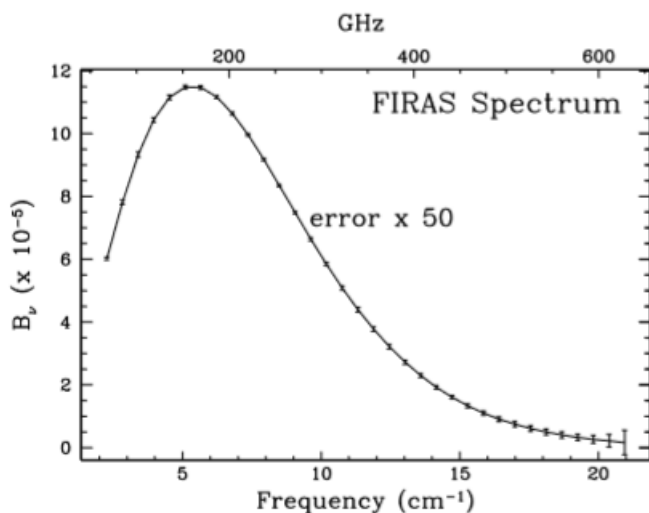


Figura 1.1: spettro del CMB misurato dallo strumento FIRAS, sovrapposto ad una curva di corpo nero di temperatura $T=2.725K$, con barre d'errore moltiplicate x50 per mettere in evidenza l'elevata precisione (Mather et al., 1994). Immagine presa da [6].

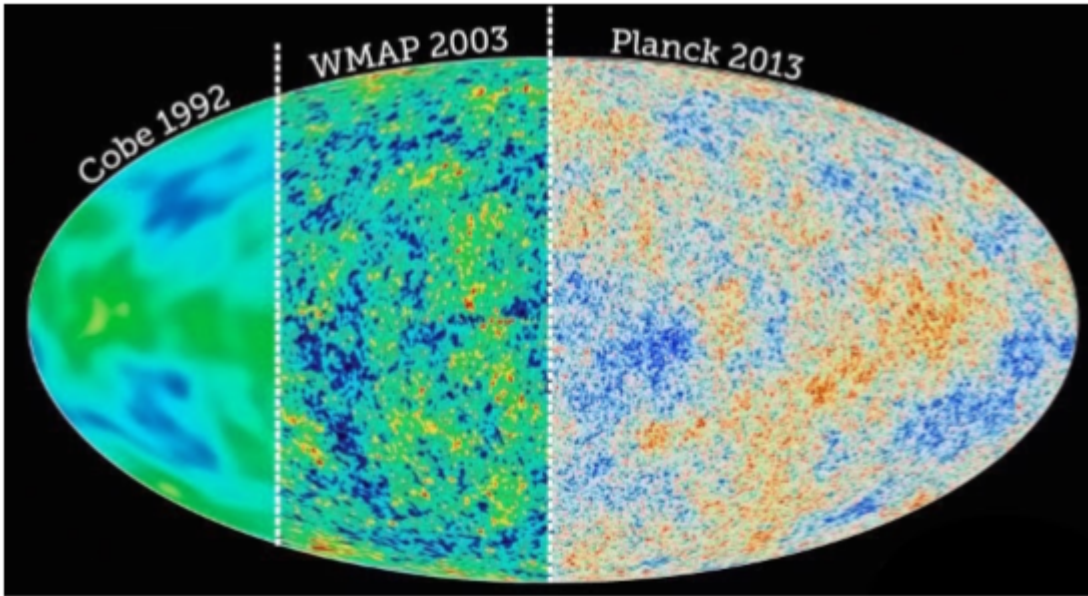


Figura 1.2: Mappe delle anisotropie a tutto cielo dei vari esperimenti.

quali sono legati ai barioni da interazioni di Coulomb. Il sistema può essere descritto da un punto di vista dinamico come un fluido di fotoni-barioni.

Le fluttuazioni nella densità totale di materia creano delle buche di potenziale gravitazionale, che possono crescere per instabilità fino a formare le strutture che osserviamo su grande scala. Queste fluttuazioni sono responsabili della formazione delle anisotropie. La pressione esercitata dai fotoni resiste alla compressione gravitazionale dovuta a porzioni di sovradensità, producendo così le oscillazioni acustiche del fluido. Regioni di compressione (sovradense) sono punti più caldi, regioni di rarefazione (sottodense) sono punti più freddi. Inoltre i fotoni subiscono un effetto di redshift gravitazionale quando escono dalle buche di potenziale, nel momento del free streaming. Le fluttuazioni risultanti appaiono all'osservatore come anisotropie sul cielo.

1.2 Misurazioni del CMB

Dopo la summenzionata osservazione del CMB da parte di Penzias e Wilson si sono succeduti esperimenti che hanno portato ad ottenere dati sempre più precisi e a scale angolari più piccole. I primi esperimenti si sono concentrati principalmente sull'osservazione dello spettro elettromagnetico, e le prime osservazioni sono state condotte da terra. A causa dell'interferenza atmosferica solo la regione di Rayleigh-Jeans era accessibile, per cui successive osservazioni hanno utilizzato palloni ad alta quota, che hanno reso accessibile anche la regione di Wien dello spettro. Tuttavia a causa di alcune discrepanze la natura di radiazione di corpo nero dello spettro del CMB fino a questo punto è rimasta in dubbio. La questione è stata definitivamente risolta ad opera della NASA nel 1989, con il lancio della prima missione spaziale dedicata all'osservazione del CMB, COBE (COsmic Background Explorer), il satellite ha ottenuto informazioni più precise anche nella regione dal millimetrico all'infrarosso, tramite lo strumento FIRAS(Far Infrared Absolute Spectrophotometer), che ha coperto lo spettro da 0.1 a 10mm. Il risultato ottenuto da FIRAS, visibile in figura (1.1), è quello di un perfetto spettro di corpo nero, con una deviazione minore del 0.03%.

Obiettivo ulteriore di COBE era la misura del grado di isotropia della radiazione, tramite lo strumento DMR(Differential Microwave Radiometer), che ha raggiunto una risoluzione angolare di 7, corrispondente ad un'ordine di multipolo $l \sim 30$. COBE ha così misurato l'anisotropia di dipolo dovuta al moto terrestre rispetto al sistema di riferimento della radiazione, e le anisotropie nella regione Sachs-Wolfe dello spettro di potenza. Per la spiegazione dei concetti di sviluppo in multipoli e spettro di potenza si veda il capitolo seguente.

La prima mappa completa, a tutto cielo, delle anisotropie su piccola scala è stata poi ottenuta dalla missione NASA WMAP(Wilkinson Microwave Anisotropy Probe), il quale ha raggiunto una

risoluzione angolare molto maggiore di COBE, arrivando ad $l \sim 1000$, portando ad una grande quantità di informazioni sulle anisotropie su piccola scala della radiazione. La missione ESA Planck ha poi superato ulteriormente questo risultato, portando ad una risoluzione angolare di $l \sim 3000$, aumentando inoltre la sensibilità delle misurazioni e le frequenze osservate.

2 Spettro di potenza angolare

2.1 Campo di temperatura del CMB

La principale grandezza a nostra disposizione per osservare il CMB è l'intensità in funzione della frequenza e della direzione sulla sfera celeste \hat{n} . Dato che, come detto sopra, lo spettro della radiazione si avvicina grandemente a quello di un corpo nero (Mather et al., 1994) con una temperatura T praticamente costante sul piano del cielo, si descrive l'osservabile generalmente tramite le fluttuazioni di temperatura

$$\Theta(\hat{n}, \vec{x}, \eta) = \frac{(T(\hat{n}, \vec{x}, \eta) - T(\eta))}{T(\eta)}, \quad (2.1)$$

dove $T(\hat{n}, \vec{x}, \eta)$ rappresenta il valore locale della temperatura, e $T(\eta)$ il valor medio.

Naturalmente anche se il campo di temperatura è definito in tutti i punti dello spazio e del tempo noi possiamo osservarlo solo qui (\vec{x}_0) ed ora (η_0) dunque la nostra unica possibilità per osservare variazioni della radiazione, e dunque anisotropie, è variare la direzione di osservazione \hat{n} . Generalmente è consuetudine descrivere Θ in funzione degli angoli (θ, φ) piuttosto che del versore \vec{n} , per poter scrivere la funzione come una combinazione lineare di armoniche sferiche.

2.2 Definizione dello spettro di potenza angolare

Si decompone il campo di temperatura in armoniche sferiche, operando uno sviluppo in multipolo:

$$\Theta(\theta, \varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l a_{lm} Y_{lm}(\theta, \varphi), \quad (2.2)$$

dove a_{lm} sono i coefficienti costanti dipendenti dal valore che assume la funzione nei vari punti della sfera ed $Y_{lm}(\theta, \varphi)$ sono appunto le armoniche sferiche, definite come segue:

$$Y_{lm}(\theta, \varphi) = N e^{im\varphi} P_l^m(\cos\theta), \quad (2.3)$$

dove $P_l^m(\cos\theta)$ rappresentano i polinomi di Legendre, ed $m \leq |l|$. Queste ultime sono polinomi omogenei di grado l -esimo, che soddisfano l'equazione di Laplace. Sono ortonormali e costituiscono una base.

Possiamo pensare a questo sviluppo come ad una trasformata di Fourier generalizzata, dove in analogia alla corrispondenza del vettore d'onda \vec{k} con la variabile \vec{x} , l ed m sono legati alle variabili (θ, φ) . Approfondendo questa analogia possiamo pensare che se per la trasformata di Fourier la base di autofunzioni ortonormali che permette di decomporre una funzione su una circonferenza è data dalle funzioni $e^{i\vec{k}\vec{x}}$, in questo caso è data da $Y_{lm}(\theta, \varphi)$ che però fungono da base ortonormale sulla superficie di una sfera. Tutta l'informazione del campo di temperatura è contenuta nei coefficienti a_{lm} .

Vogliamo mettere in relazione il campo di temperatura, descritto da $\Theta(\theta, \varphi)$ con il nostro osservabile, costituito dai coefficienti a_{lm} . Per fare questo torniamo alla notazione che utilizza il versore \vec{n} . Iniziamo sfruttando l'ortonormalità delle armoniche sferiche, scrivendone la relazione di completezza:

$$\int Y_{lm}(\vec{n}) Y_{l'm'}^*(\vec{n}) d\Omega = \delta_{ll'} \delta_{mm'}, \quad (2.4)$$

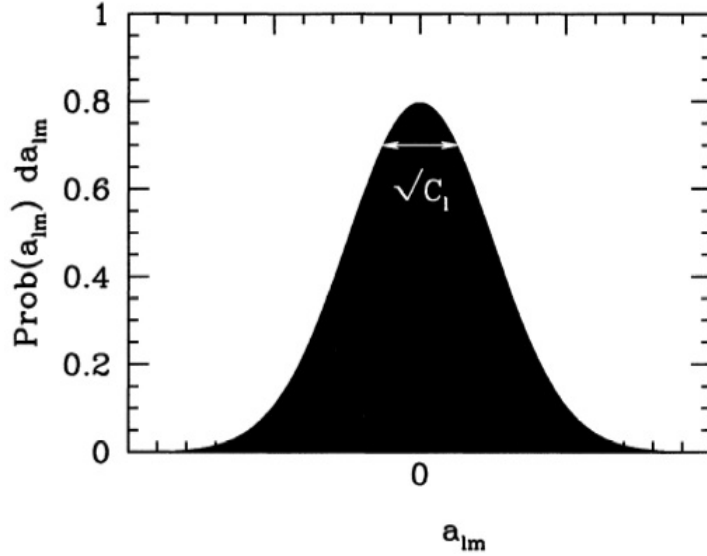


Figura 2.1: Distribuzione statistica degli a_{lm} , con il ruolo della varianza C_l messo in evidenza. Immagine presa da [3].

dove $d\Omega = \sin(\theta)d\theta d\varphi$ è l'angolo solido infinitesimo. A questo punto l'equazione (2.2) può essere riscritta moltiplicando da ambo le parti per $Y_{lm}^*(\vec{n})$ e integrando, ottenendo così:

$$a_{lm} = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \int \Theta(\vec{k}, \hat{n}, \eta) Y_{lm}^*(\hat{n}) d\Omega. \quad (2.5)$$

In (2.5) è stata sostituita a $\Theta(\vec{x})$ la sua trasformata di Fourier $\Theta(\vec{k})$. Essendo il campo di temperatura isotropo sappiamo che il valor medio dei coefficienti a_{lm} sarà nullo, ma questo non sarà vero per la varianza dunque, supponendo la gaussianità delle fluttuazioni:

$$\langle a_{lm} a_{l'm'}^* \rangle = \delta_{ll'} \delta_{mm'} C_l. \quad (2.6)$$

Si noti che, per un dato l tutti gli a_{lm} hanno la stessa varianza, per invarianza per rotazione del CMB (isotropia). Dunque, notato che per ogni l esistono $2l + 1$ valori di a_{lm} , questo suggerisce che al diminuire dell'ordine dello sviluppo diminuiranno anche i diversi coefficienti tramite cui campionare la distribuzione. Dunque, per piccoli l , si otterranno poche informazioni riguardanti C_l e per grandi l , viceversa, si otterranno molte informazioni, e la varianza sarà nota con una piccola incertezza. Vi è un'incertezza intrinseca che limita la precisione con cui è possibile conoscere la varianza di questa distribuzione, chiamata *varianza cosmica*:

$$\left(\frac{\Delta C_l}{C_l} \right)_{\text{cosmic variance}} = \sqrt{\frac{2}{2l + 1}}, \quad (2.7)$$

la quale fondamentale quantifica il fatto che l'universo a nostra disposizione è solo uno. (Dunque per esempio quando studio il termine di monopolo ho una grande incertezza, poichè sto studiando il valor medio su tutto il piano del cielo e dunque ho un solo valore a disposizione).

Dalla relazione (2.6) si evince il significato di C_l , di media quadratica dei coefficienti a_{lm} fissato un dato l . C_l plottato in funzione dell'ordine di multipolo l è proprio lo spettro di potenza, grandezza utile per caratterizzare l'ampiezza delle disomogeneità, che non contiene informazioni riguardo alla loro struttura spaziale.

Allo scopo di chiarificare il ruolo dello spettro di potenza, e ad uso seguente, si ricava la relazione che esprime C_l in termini di Θ_l . Possiamo ottenere questo risultato elevando al quadrato l'equazione (2.5), e prendendo il valore atteso della distribuzione. Una volta determinato il termine $\langle \Theta(\hat{n}, \vec{k}) \Theta^*(\hat{n}', \vec{k}') \rangle$, in cui la dipendenza da η è stata lasciata implicita, si ottiene:

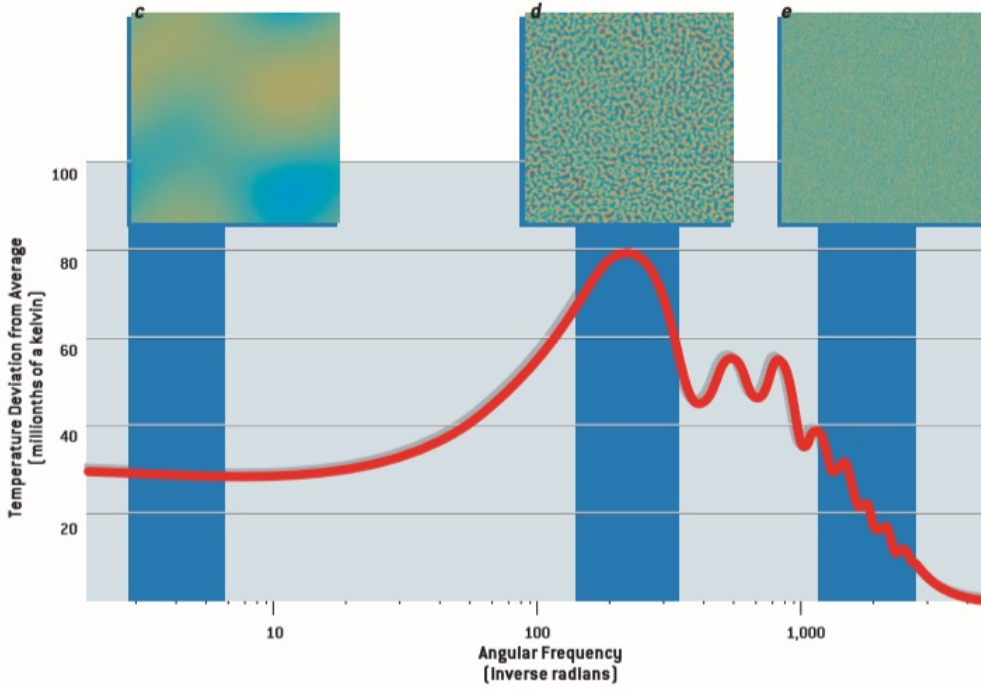


Figura 2.2: Spettro di potenza angolare. Quest'ultimo descrive l'ampiezza delle disomogeneità in funzione della dimensione angolare. Immagine presa da [2].

$$C_l = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} P(k) \int Y_{lm}^*(\vec{n}) \frac{\Theta(k, \hat{k} \cdot \hat{n})}{\delta(k)} d\Omega \int Y_{lm}(\vec{n}') \frac{\Theta^*(k, \hat{k} \cdot \hat{n}')}{\delta^*(k)} d\Omega', \quad (2.8)$$

dove $P(k)$ è lo spettro di potenza della materia e $\delta(k)$ è la variazione di densità della materia oscura. Si noti che gli argomenti dei Θ/δ dipendono esclusivamente dal modulo di k e dal prodotto scalare tra k e il versore \vec{n} , dunque differenti modi di Fourier con queste grandezze in comune evolvono nello stesso modo.

Espandendo a questo punto Θ e Θ^* in armoniche sferiche, utilizzando la relazione:

$$\Theta(k, \hat{k} \cdot \hat{n}) = \sum_l (-i)^l (2l+1) P_l(\hat{k} \cdot \hat{n}) \Theta_l(k). \quad (2.9)$$

E sfruttando l'ortonormalità delle armoniche sferiche si ottiene:

$$C_l = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty k^2 P(k) \left| \frac{\Theta_l(k)}{\delta(k)} \right|^2 dk, \quad (2.10)$$

dove $P(k)$ è lo spettro di potenza della materia. Per un approfondimento di tale concetto si veda [4]. L'equazione (2.10) è importante perchè chiarifica il ruolo dello spettro di potenza di integrale su tutti i modi di Fourier della varianza di $\Theta(\vec{k})$.

2.3 Funzione di correlazione a due punti

Abbiamo introdotto il concetto di campo di temperatura, descritto analiticamente dalla funzione $\Theta(\theta, \varphi)$, che quantifica la deviazione punto per punto dalla temperatura media. Siamo ora interessati a definire una funzione di correlazione angolare, ovvero

$$\xi(\hat{n}, \hat{n}') = \langle \Theta(\hat{n}), \Theta(\hat{n}') \rangle, \quad (2.11)$$

supposto che la funzione è valutata allo stesso tempo η . La funzione, in approssimazione di fluttuazioni gaussiane, contiene tutta l'informazione statistica del CMB. Il significato dell'equazione (2.11) può essere illustrato come segue. Possiamo immaginare che la nostra perturbazione sia distribuita sul

piano del cielo con alcune regioni in cui $\Theta > 0$ ed altre in cui $\Theta < 0$ con una dimensione angolare dell'ordine di θ_0 (supposto in questo esempio di guardare solo lungo un circolo massimo sul piano del cielo di un certo angolo φ per semplificare). Chiaramente dunque la funzione $\xi(\hat{n}, \hat{n}')$ risulterà mediamente positiva se si osserva lungo angoli $\theta \lesssim \theta_0$, e mediamente negativa se si osserva lungo angoli $\theta \gtrsim \theta_0$. Si usa dire che fra le regioni per cui $\xi(\hat{n}, \hat{n}') > 0$ vi è correlazione, mentre tra le regioni per cui $\xi(\hat{n}, \hat{n}') < 0$ vi è anticorrelazione. Conoscendo dunque il valore della funzione ξ per tutti i punti, si avrebbe una descrizione statistica completa delle anisotropie su qualunque scala angolare.

Scriviamo ξ come combinazione lineare dei C_l , ottenendo:

$$\xi(\hat{n}, \hat{n}') = \frac{1}{4\pi} \sum_{l=0}^{\infty} C_l (2l+1) P_l(\cos\theta). \quad (2.12)$$

Le equazioni (2.6) e (2.12) espongono qual'è fondamentalmente la motivazione per cui in cosmologia si preferisce lavorare nello spazio armonico. Nello spazio reale la funzione ξ è funzione dell'angolo tra le due direzioni scelte, mentre in questa descrizione è funzione di una matrice diagonale, i cui unici valori non nulli sono proprio i C_l . Questa rappresentazione è utile quindi perchè alleggerisce il calcolo della funzione di correlazione.

2.4 Campi Casuali

Allo scopo di chiarire il significato dello spettro di potenza e dell'ipotesi di Gaussianità delle perturbazioni, in questa sezione si presentano il concetto di *campo casuale* e di *funzione densità di probabilità* (PDF). Nel modello cosmologico standard i campi di densità delle varie componenti energetiche dell'universo (materia, radiazione, energia oscura) sono omogenei e dunque descrivibili come segue:

$$\rho(x, t) = \rho(t) + \delta(x, t), \quad (2.13)$$

dove $\delta(x, t)$ rappresenta il campo di perturbazione della densità. La teoria dell'inflazione, che è attualmente la teoria più accreditata per spiegare l'origine delle perturbazioni, stabilisce che il suddetto campo delle perturbazioni per via della suo originarsi da processi quantistici, è intrinsecamente non-deterministico, casuale. Dunque essendo il campo casuale è chiaro che la descrizione sarà, come visto, di tipo statistico. Per essere più precisi quando definiamo le perturbazioni come un campo casuale, vogliamo dire che per ogni punto x dello spazio, ad un certo momento t la quantità $\delta(x, t)$ è casuale. Possiamo associare alla variabile casuale la (PDF) $P(\delta(x))$, che quantifica la probabilità che la fluttuazione δ assuma un certo valore in un certo punto x . La distribuzione statistica di una variabile casuale δ può essere descritta dai momenti della PDF come segue. Si riportano qui i primi tre momenti poichè sono quelli di interesse nel nostro caso.

$$\mu_1 = \mu = \langle \delta(x) \rangle \quad \text{Media (Average)} \quad (2.14)$$

$$\mu_2 = \sigma^2 = [\delta(x) - \langle \delta(x) \rangle]^2 \quad \text{Varianza (Variance)} \quad (2.15)$$

$$\mu_3 = \int d\delta(x) [\delta(x) - \langle \delta(x) \rangle]^3 P_x(\delta(x)) \quad \text{Asimmetria (Skewness)} \quad (2.16)$$

Quando si prende in considerazione più di una variabile, come avviene per i campi casuali che sono un insieme di variabili casuali, entrano in gioco le funzioni di correlazione (2.11). Possiamo ora usare la notazione qui introdotta per far vedere che una distribuzione Gaussiana è interamente determinata dai primi due momenti:

$$P(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad (2.17)$$

dipende infatti unicamente dalla media μ e dalla varianza σ^2 . Intuitivamente questo fatto ci permette di comprendere perchè in approssimazione di completa Gaussianità delle perturbazioni, esse sono completamente descritte dallo spettro di potenza, quest'ultimo ricopre infatti per i campi scalari il ruolo che la varianza ricopre per le variabili casuali.

3 Spettro delle Anisotropie

Con lo scopo di ricavare alcune importanti caratteristiche dello spettro di potenza si trattano qui l'effetto Sachs-Wolf ordinario e quello integrato (ISW), per comprenderne l'andamento generale a grandi e piccole scale.

3.1 Grandi Scale

Il principale effetto che agisce su grandi scale di spazio è l'effetto Sachs-Wolfe ordinario (SW). L'effetto in questione si colloca temporalmente prima della ricombinazione, ed è quindi classificabile come un'anisotropia primaria. Nel momento del free-streaming i fotoni che si trovano nelle buche di potenziale soffrono un redshift gravitazionale, perdendo così energia. Viceversa per i fotoni che si trovano nelle creste, che invece acquistano energia tramite blueshift.

All'epoca della ricombinazione le perturbazioni responsabili di questo effetto, come già detto sono su scale di spazio molto grandi, più di quelle collegabili da rapporti causali. Inoltre l'ampia dimensione in gioco implica anche che l'unico termine a contribuire alle perturbazioni è quello di monopolo. L'effetto si può quindi scrivere analiticamente come:

$$\Theta_l = [\Theta_0(k, \eta_*) + \Psi(k, \eta_*)j_l[k(\eta_0 - \eta_*)], \quad (3.1)$$

con j_l la funzione di Bessel. Dunque le anisotropie su larga scala sono determinate da $\Theta_0 + \Psi$ valutate alla ricombinazione. Vogliamo ora ottenere un'espressione di questa quantità da inserire in equazione (3.1). L'espressione cercata è [3]:

$$\Theta_0(k, \eta_*) + \Psi(k, \eta_*) \simeq -\frac{\Omega_m H_0^2}{2k^2 D_1(a=1)} \delta(\eta_0), \quad (3.2)$$

dove D_1 rappresenta il fattore di crescita, e Ω_m la frazione di densità critica dovuta alla materia. Volendo determinare l'andamento dello spettro di potenza risultante inseriamo l'equazione in (3.1), e integriamo il risultato in (2.10) ottenendo così:

$$C_l^{SW} \simeq \frac{\Omega_m^2 H_0^4}{2\pi D_1^2(a=1)} \int_0^\infty \frac{dk}{k^2} P(k) \cdot j_l^2[k(\eta_0 - \eta_*)] \quad (3.3)$$

Scrivendo l'integrale sulla funzione di Bessel come combinazione lineare di funzioni Γ di Eulero si ottiene:

$$C_l \propto \frac{\Gamma(l + \frac{n-1}{2}) \Gamma(3-n)}{\Gamma(l + \frac{5-n}{2}) \Gamma^2(\frac{4-n}{2})}, \quad (3.4)$$

prendendo poi $n = 1$ risulta:

$$l(l+1)C_l^{SW} = const. \quad (3.5)$$

Questa è la motivazione per cui generalmente per visualizzare lo spettro di potenza si mette nel grafico $l(l+1)C_l$. A bassi l dove l'approssimazione di larga scala è valida ed è corretto considerare solo il contributo del monopolo, ci sarà un plateau (il Sachs-Wolfe plateau per l'appunto).

In realtà lo spettro effettivo non è completamente piatto per via di un contributo di dipolo che influisce leggermente alla ricombinazione.

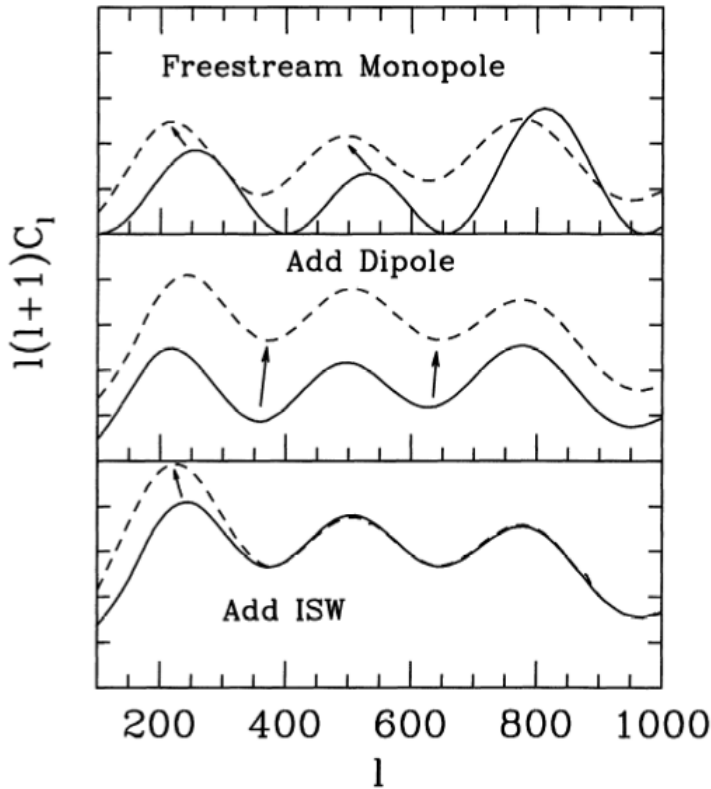


Figura 3.1: Spettro di potenza su piccole scale, e aggiunta dei vari contributi a partire dal monopolo, dall'alto verso il basso. Immagine presa da [3].

3.2 Piccole Scale

Lo spettro di anisotropie su piccola scala dipende non solo dal contributo del monopolo, ma anche dal dipolo e dall'effetto Sachs-Wolfe integrato (ISW). Analizziamo i contributi singolarmente:

- **Monopolo:** Il monopolo $(\Theta_0 + \Psi)(k, \eta_*)$ viaggia fino a noi per free streaming a partire dalla LSS. Notiamo in figura che quelli che sarebbero gli zeri dello spettro del monopolo, si spostano in realtà a valori maggiori, per via dei vari modi che contribuiscono alle anisotropie a varie scale angolari.
- **Dipolo:** Il dipolo, come vedremo, alla ricombinazione è più piccolo del monopolo, ed è fuori fase con esso. L'effetto, ben visibile in figura è quello di diminuire lo scarto tra i massimi e i minimi del monopolo. Proprio perchè fuori fase, il dipolo tende ad aumentare maggiormente quelli che erano i minimi dello spettro del monopolo
- **Early ISW:** L'effetto Sachs-Wolfe integrato è fondamentalmente dovuto ad un potenziale gravitazionale variabile. Possiamo immaginare che se un fotone entra in una buca di potenziale, la quale nel frattempo cambia, nel momento in cui esce il fotone non avrà la stessa energia di quando è entrato. Subito dopo la ricombinazione questo avviene perchè la transizione tra universo dominato dalla radiazione ed universo dominato dalla materia non è immediata, e ad η_* c'è ancora un residuo di radiazione. Come si vede in figura il maggior effetto di questo early ISW è sulla scala dell'orizzonte alla ricombinazione, ed è particolarmente importante perchè in fase con il monopolo. Essendo seguente alla ricombinazione è definibile come un'anisotropia secondaria.

4 Anisotropie in temperatura del CMB

Le sopracitate anisotropie in temperatura si dividono in due categorie principali, le anisotropie primarie che sono dovute ad effetti fisici precedenti alla ricombinazione (η_*), e le anisotropie secondarie, dovute ad effetti che agiscono sui fotoni nel percorso che va dalla superficie di ultimo scattering fino all'osservatore.

4.1 Oscillazioni Acustiche

Le oscillazione acustiche, che ora andiamo ad approfondire fanno parte delle anisotropie primarie. Cominciamo il nostro studio in approssimazione di un fluido perfetto di fotoni-barioni, e tralasciando gli effetti dinamici della gravità e dei barioni. In questa approssimazione (approssimazione di tight coupling) le perturbazioni possono essere descritte semplicemente tramite un'equazione di continuità e un'equazione di Eulero, che contengono le proprietà basilari delle oscillazioni.

La trattazione seguente sarà portata avanti nello spazio di Fourier. Per il monopolo del campo di temperatura:

$$\Theta_{00}(\vec{x}) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{i\vec{k}\vec{x}} \Theta(\vec{k}), \quad (4.1)$$

dove si omette il pedice 0 per $\Theta(\vec{k})$. Nei successivi passaggi si omette anche l'argomento k . Le perturbazioni di temperatura nello spazio di Fourier possono essere rappresentate dall'equazione di continuità (nello spazio di Fourier all'operatore di derivata si sostituisce il prodotto scalare col vettore d'onda \vec{k}):

$$\dot{\Theta} = -\frac{1}{3}k v_\gamma, \quad (4.2)$$

dove v_γ è scritta come uno scalare perchè definita come $\vec{v}_\gamma = (-i)v_\gamma \hat{k}$ (specificamente in questo studio è importante solo la componente della velocità parallela a \vec{k} poichè è l'unica che ha origine gravitazionale). Il termine v_γ rappresenta un momento di dipolo diretto lungo \vec{k} .

La derivata è rispetto al tempo conforme $\eta = \int dt/a(t)$, con $a(t)$ fattore di scala. Questa espressione si ricava semplicemente riscalandolo di modo che per la metrica di Friedmann-Robertson-Walker, rimanga vera la simmetria per raggi di luce $ds^2 = 0$. Possiamo pensare ad η come alla distanza che ha percorso un raggio di luce da $t = 0$ ad un certo momento t , e dunque come la dimensione della regione causalmente connessa al tempo t . L'equazione di continuità conserva il numero di fotoni, ma non la temperatura $T \propto n_\gamma^{1/3}$, con n_γ densità numerica dei fotoni. Questo comporta la presenza del fattore $1/3$.

In fluidodinamica l'equazione di Eulero rappresenta la conservazione della quantità di moto. Per i fotoni la densità di quantità di moto è data da $(p_\gamma + \rho_\gamma)v_\gamma$, dove l'equazione di stato dei fotoni stabilisce che $p_\gamma = \rho_\gamma/3$. In assenza di gravità e di effetti dovuti alla viscosità, inoltre, l'unico contributo alla forza è dato dal gradiente di pressione $\nabla p_\gamma = \nabla \rho_\gamma/3$. Considerato che $\rho_\gamma \propto T^4$, la forza diventa $4k\Theta\overline{\rho_\gamma}/3$ (nello spazio di Fourier). L'equazione di Eulero diventa dunque:

$$\dot{v}_\gamma = k\Theta. \quad (4.3)$$

Differenziando l'equazione di continuità e sostituendo al suo interno l'equazione di Eulero si ottiene la forma più basilare dell'equazione dell'oscillatore armonico:

$$\ddot{\Theta} + k^2 c_s^2 \Theta = 0, \quad (4.4)$$

dove $c_s \equiv \sqrt{\dot{p}/\dot{\rho}}$, che nel nostro caso in cui il contributo dinamico dei barioni è trascurato risulta $c_s = 1/\sqrt{3}$.

Questa equazione, seppur semplificata, mette già in evidenza un primo importante aspetto delle oscillazioni acustiche. Il gradiente di pressione, nel momento in cui il sistema subisce una perturbazione agisce come la forza che cerca di ripristinare le condizioni iniziali, facendo oscillare il sistema a velocità c_s fino alla ricombinazione η_* . Fisicamente queste oscillazioni sono compressioni e rarefazioni del fluido, che comportano quindi il locale riscaldamento e raffreddamento.

Assumendo le perturbazioni iniziali nulle, $\dot{\Theta}(0) = 0$ la distribuzione di temperatura alla ricombinazione sarà quindi data da:

$$\Theta(\eta_*) = \Theta(0)\cos(ks_*), \quad (4.5)$$

dove $s = \int c_s d\eta$ è la distanza che può percorrere la perturbazione nel tempo η , chiamata generalmente *orizzonte del suono*. Questo mette in evidenza un altro aspetto importante delle oscillazioni. Anzitutto se si guarda su larga scala, dove $ks \ll 1$, i modi di Fourier associati non hanno fatto a tempo ad entrare nell'orizzonte del suono, e dunque si sta osservando la perturbazione nelle sue condizioni iniziali. Questo è ciò che stato fatto con l'esperimento COBE. Su piccole scale, invece, l'equazione (4.5) ci mostra che i modi oscillano nel tempo. I modi che alla ricombinazione sono al massimo o al minimo della loro oscillazione corrispondono ai picchi nello spettro di potenza (che come visto in (2.10) corrisponde alla varianza di $\Theta(k, \eta_*)$). Come si vede dall'equazione i massimi e minimi dell'oscillazione corrispondono ai numeri d'onda:

$$k_n = \frac{n\pi}{s_*}. \quad (4.6)$$

Questo mostra che i picchi dello spettro di potenza seguono una legge armonica.

Precedentemente si è parlato di anisotropie nel campo di temperatura osservato attualmente ad η_0 , mentre in questo capitolo abbiamo parlato di fluttuazioni del fluido di fotoni-barioni dell'universo alla ricombinazione. Sorge dunque spontaneo chiedersi qual'è la correlazione tra questi due differenti effetti fisici. Si consideri un modo di Fourier, un perturbazione dovuta ad un'onda piana. Fotoni provenienti da regioni calde e fredde separati da una tipica distanza k^{-1} viaggiano dalla superficie di ultimo scattering (LSS) con una separazione angolare $\theta \simeq k^{-1}/(\eta_0 - \eta_*)$, dove $(\eta_0 - \eta_*)$ è la distanza di comoving tra noi e LSS. Se decomponiamo il campo di temperatura in multipoli, allora una scala angolare di θ corrisponde circa ad $1/l$. Dunque sfruttando il fatto che $\eta_* \ll \eta_0$ si proiettano disomogeneità su scala k su anisotropie di scala angolare $l \simeq k\eta_0$.

4.1.1 Oscillazioni Forzate

La trattazione fatta finora approssimava le perturbazione tralasciando il contributo della gravità alla dinamica del sistema. In realtà la gravità contribuisce, altera l'equazione di Eulero con un termine dovuto al gradiente del potenziale gravitazionale $k\Psi$, che entra in competizione con il gradiente di pressione $k\Theta$, in equilibrio quando $\Theta + \Psi = 0$. Anche l'equazione di continuità varia. L'aggiunta della gravità provoca delle perturbazione nel fattore di scala, che diventano perturbazioni in temperatura con un effetto analogo a quello di redshift gravitazionale $\delta\Theta = -\delta\Phi$. All'equazione di continuità viene dunque aggiunto un termine $-\dot{\Phi}$. Con queste aggiunte l'equazione dell'oscillatore armonico diventa quindi:

$$\ddot{\Theta} + c_s^2 k^2 \Theta = -\frac{k^2}{3} \Psi - \dot{\Phi}. \quad (4.7)$$

Tuttavia, in un universo piatto e privo di pressione, Ψ e Φ sono costanti, dunque l'equazione è equivalente a (4.4), con la sostituzione del termine Θ con $\Theta + \Psi$. La soluzione nell'epoca dominata dalla materia è dunque:

$$\begin{aligned} [\Theta + \Psi](\eta) &= [\Theta + \Psi](\eta_{md})\cos(ks) \\ &= \frac{1}{3}\Psi(\eta_{md})\cos(ks), \end{aligned} \quad (4.8)$$

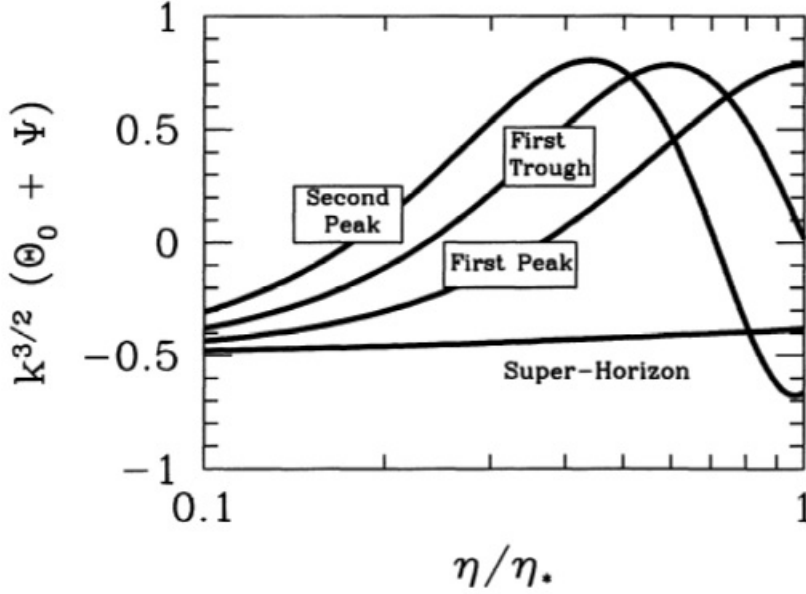


Figura 4.1: Esempio dell'evoluzione di quattro differenti modi prima della ricombinazione. Si vede che il modo corrispondente a larga scala (Super-Horizon) è quasi costante, sono mostrati i modi che alla ricombinazione sono al massimo e al minimo che corrispondono al primo e al secondo picco, ed un modo che ha già compiuto mezza oscillazione e dunque alla ricombinazione ha ampiezza nulla. Immagine presa da [3].

dove η_{md} segna l'inizio dell'epoca dominata dalla materia e si sono usate le condizioni iniziali del modello adiabatico $\Theta(0) = -2/3\Psi$, $\dot{\Theta}(0) = 0$. La formula (4.8) ci fa capire che la gravità agisce sull'oscillazione spostandone il punto zero, rendendo l'oscillazione forzata. Dopo la ricombinazione i fotoni devono uscire dalle buche di potenziale, e nel farlo subiscono un redshift gravitazionale e perdono energia pari a $\Delta T/T = \Psi$. La quantità $\Theta + \Psi$ è dunque l'effettiva temperatura osservata, ed è per questo definita *temperatura effettiva*.

Il limite per larga scala dell'equazione (4.8) restituisce l'effetto Sachs-Wolfe.

4.1.2 Soluzioni al prim'ordine

Allo scopo di meglio studiare alcune caratteristiche delle oscillazioni acustiche, in questo paragrafo si ricavano le equazioni al prim'ordine. Per descrivere il comportamento di ciascuna specie generalmente si utilizza l'equazione di Boltzmann, o del trasporto radiativo:

$$\frac{df}{dt} = C[f]. \quad (4.9)$$

L'equazione contiene una parte non collisionale df/dt che descrive gli effetti della gravità sulla distribuzione di fotoni f , ed una parte che tiene conto delle interazioni dei fotoni con le altre specie presenti nell'universo. Naturalmente la derivazione esplicita dell'equazione di Boltzmann per tutte le specie presenti è molto complessa e non viene riportata in questa sede. Tuttavia è un argomento molto trattato in letteratura, si rimanda per esempio a [6]. Si riporta qui l'equazione di Boltzmann al prim'ordine:

$$\frac{\partial \Theta}{\partial \eta} + n^i \frac{\partial \Theta}{\partial x^i} + 4 \frac{\partial \Phi}{\partial x^i} n^i - 4 \frac{\partial \Psi}{\partial \eta} = -\tau' [\Theta_0 + \frac{1}{2} \Theta_2 P_2(\hat{v} \cdot \vec{n}) - \Theta + 4 \vec{v} \cdot \vec{n}]. \quad (4.10)$$

In questa trattazione, inoltre viene utilizzata l'equazione di Eulero per i barioni nella sua forma più completa:

$$\dot{v}_b = -\frac{\dot{a}}{a} v_b + k\Phi + \dot{\tau}(v_\gamma - v_b)/R. \quad (4.11)$$

Osserviamo qualitativamente che il termine contenente \dot{a}/a tiene conto dell'espansione facendo decrescere il momento all'aumentare del fattore di scala, e il termine contenente la differenza delle velocità

tiene conto dello scambio di momento per scattering di Thomson tra fotoni ed elettroni (legati a barioni per interazioni di Coulomb). Si noti che $\dot{\tau}$ è la profondità ottica differenziale di Thomson, che descrive le collisioni in questione.

A scale di spazio intermedie, nè il contributo della pressione di radiazione nè quello della gravità possono essere ignorati. Dato che il tight coupling di barioni e fotoni è ancora valido, espandiamo le equazioni di Boltzmann e di Eulero per i barioni, nel tempo di scattering di Compton $\dot{\tau}^{-1} = (x_e n_e \sigma_T)^{-1}$, che fino a prima della ricombinazione è molto piccolo. All'ordine zero riotteniamo le identità di tight coupling

$$\dot{\Delta}_\gamma = \frac{4}{3} \dot{\Delta}_b, \quad (4.12)$$

$$\Theta_1 = v_\gamma = v_b, \quad (4.13)$$

$$\Theta_l = 0 \quad l \geq 2. \quad (4.14)$$

Dove Δ è definito come $\Delta\rho/\rho$ per i vari componenti del plasma primordiale. Queste equazioni ci dicono semplicemente che le fluttuazioni di densità dei barioni crescono adiabaticamente con quelle dei fotoni, e che la radiazione è isotropa nel sistema di riferimento dei barioni. Risostituendo nelle equazioni (4.10) (4.11) si ottengono le soluzioni al prim'ordine:

$$\dot{\Theta}_0 = \frac{k}{3} \Theta_1 - \dot{\Phi}, \quad (4.15)$$

$$\dot{\Theta}_1 = -\frac{\dot{R}}{1+R} \Theta_1 + \frac{1}{1+R} k \Theta_0 + k \Psi. \quad (4.16)$$

Dove $R = (p_b + \rho_b)/(p_\gamma + \rho_\gamma) = 3\rho_b/4\rho_\gamma$ è definita come il rapporto tra le densità di momento dovute a barioni e fotoni

4.1.3 Baryon Drag

Aggiungiamo ora al nostro studio della dinamica del sistema anche il contributo dei barioni. L'inserimento dei barioni nell'equazione che descrive l'evoluzione del sistema è concettualmente semplice, i barioni forniscono inerzia aggiuntiva all'equazione di Eulero, che influenza sia pressione che gradiente di potenziale. Dato che massa inerziale e gravitazionale sono uguali, operativamente è sufficiente moltiplicare a tutti i termini dell'equazione il termine $(1+R)$. Il termine di gradiente di pressione è l'unico che non viene moltiplicato dal nuovo fattore, poichè la pressione dovuta ai barioni è trascurabile. Un primo evidente effetto è che la velocità del suono si riduce a

$$c_s^2 = \frac{\dot{p}_\gamma}{\dot{\rho}_\gamma + \dot{\rho}_b} = \frac{1}{3(1+R)}, \quad (4.17)$$

riducendo così anche l'orizzonte del suono.

Prendiamo ora il limite in cui $\dot{\Psi} = \dot{\Phi} = 0$, che corrisponde ad un universo che è sempre stato dominato dalla materia. Supponiamo inoltre R costante. In questa approssimazione l'equazione diventa:

$$\ddot{\Theta}_0(1+R) + \frac{k^2}{3} \Theta_0 = -(1+R) \frac{k^2}{3} \Psi. \quad (4.18)$$

Torna quindi ad essere analoga a (3.5) con $[\Theta_0 + (1+R)\Psi]$ come argomento al posto di Θ_0 . La soluzione diventa quindi:

$$[\Theta_0 + (1+R)\Psi](\eta) = [\Theta_0 + (1+R)\Psi](\eta_{md}) \cos(ks). \quad (4.19)$$

Mettiamo in evidenza alcuni aspetti:

- Il punto zero dell'oscillazione diventa $\Theta_0 = -(1+R)\Psi$, e si sposta ulteriormente all'aumentare del contenuto di barioni

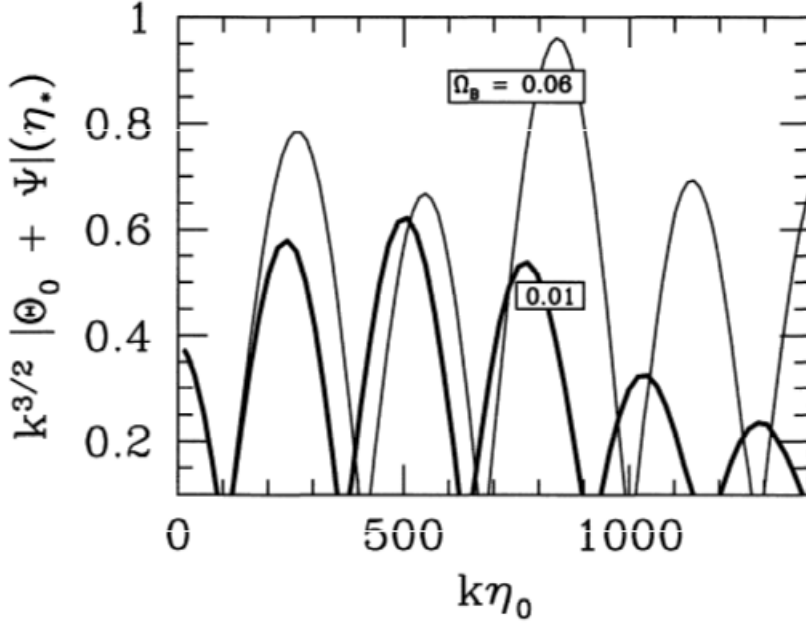


Figura 4.2: Perturbazioni alla ricombinazione in due modelli con differente contenuto di barioni. In figura è possibile osservare l'effetto di incremento dei picchi dispari da parte dei barioni, e l'effetto di damping per $k\eta_0 \gtrsim 500$. Immagine presa da [3].

- L'ampiezza dell'oscillazione è proporzionale ad R

Questi due effetti vengono spiegati mettendo in evidenza che la soluzione (4.19) è quella di un oscillatore armonico di massa $m_{eff} = 1 + R$. Da un punto di vista fenomenologico la gravità fornita dai barioni aumenta unicamente l'effetto di compressione dell'oscillazione, dunque sullo spettro di potenza questo effetto si tradurrà in un aumento dei soli picchi dispari. Si nota inoltre che, diminuendo la velocità c_s , anche la frequenza dell'oscillazione diminuisce, portando i picchi ad un certo k_n a spostarsi a k maggiori, ed aumentando così anche la distanza tra i vari picchi. Infine, anche se abbiamo preso $\dot{R} = 0$, in realtà la massa evolve. Per capire come, è sufficiente ricordare che in meccanica classica l'andamento dell'energia $E = \frac{1}{2}m_{eff}\omega^2 A^2$ rispetto alla frequenza ω è un invariante adiabatico, dunque se $m_{eff} \propto \omega^{-2}$ allora $A \propto m^{-1/4} \propto (1 + R)^{-1/4}$, comportando un piccolo decadimento dell'ampiezza nel tempo.

4.1.4 Effetto Doppler

La velocità del fluido lungo la linea di vista $v_\gamma/\sqrt{3}$ (mediata in tutte le direzioni spaziali) comporta uno spostamento doppler della temperatura osservata. Dalle equazioni (4.16) e (4.19) si ottiene:

$$\frac{v_\gamma(\eta)}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}[\Theta_0(0) + (1 + R)\Psi]c_s \sin(kr_s), \quad (4.20)$$

assumendo $\dot{\Phi} = 0$ e condizioni iniziali adiabatiche. L'equazione contiene alcune interessanti informazioni:

- La velocità è fuori fase di $\pi/2$ rispetto alla temperatura
- Il punto zero dell'oscillazione non è modificato dal doppler
- Le oscillazione dovute a questo effetto hanno un'ampiezza di un fattore $c_s = 1/\sqrt{3(1 + R)}$ più piccola rispetto alle oscillazioni dovute alla temperatura

Le oscillazioni dovute alla velocità sono quindi simmetriche rispetto al punto zero, a differenza delle oscillazioni in temperatura. L'effetto in questione inoltre, diminuisce all'aumentare di R , per conservazione della quantità di moto. I picchi di compressione in temperatura sono dunque più prominenti sia dei picchi di rarefazione, sia di quelli di velocità.

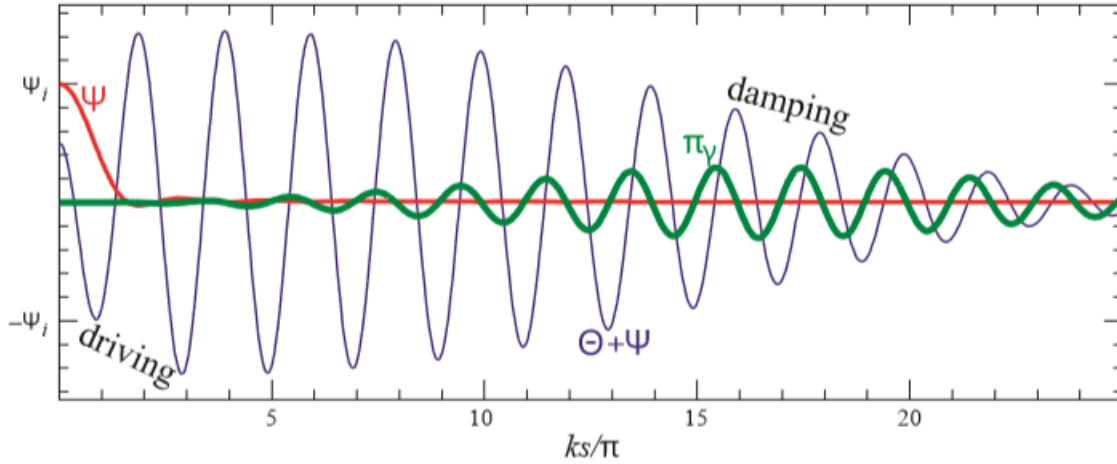


Figura 4.3: Evoluzione del potenziale Ψ per effetto di driving e damping. Soluzione a scale angolari molto più piccole dell'orizzonte del suono alla ricombinazione $ks_* \gg 1$. Immagine presa da [1].

4.1.5 Driving Force

Finora abbiamo trascurato la densità di radiazione rispetto alla materia. Il rapporto materia-radiazione ha il seguente andamento $\rho_m/\rho_r = 24\Omega_m h^2 (10^3/z)$, dunque per una stima ragionevole dei parametri è dell'ordine dell'unità alla ricombinazione. Inoltre le fluttuazioni responsabili dei picchi più grandi sono entrate nell'orizzonte a tempi precedenti, quando l'universo era dominato dalla radiazione.

Includere la radiazione cambia il tasso di espansione dell'universo, e dunque la dimensione dell'orizzonte del suono alla ricombinazione, introducendo un'ambiguità nell'interpretazione della posizione dei picchi. Tuttavia il rapporto materia radiazione ha un altro effetto sullo spettro che ci permette di distinguerlo dagli altri effetti fisici.

La radiazione guida le oscillazioni acustiche facendo evolvere la gravità con esse, la materia non agisce in questo modo. Qualitativamente sappiamo che la densità di fondo diminuisce nel tempo, e questo porterà ad una diminuzione del potenziale. In particolare durante l'era dominata dalla radiazione quando si verifica il primo picco di compressione dell'onda, e la pressione comincia a contrastare la gravità, il potenziale gravitazionale newtoniano e quello dovuto alla curvatura spaziale devono decadere.

Nel momento in cui l'universo diventa dominato dalla materia il potenziale gravitazionale non è più dovuto alle perturbazioni di densità del fluido di fotoni barioni, ma alla materia oscura fredda, che non dà contributi di pressione. L'ampiezza delle oscillazioni dunque diminuisce all'aumentare del rapporto tra materia oscura fredda e radiazione. Le perturbazioni di densità dovute alla radiazione smetteranno di crescere all'attraversamento dell'orizzonte, portando a questo effetto. Il risultato sarà che all'equivalenza materia-radiazione, vicino alla scala dell'orizzonte l'ampiezza delle oscillazioni aumenta, lasciando sulla CMB una traccia della transizione materia-radiazione.

Nel momento in cui viene a mancare il potenziale gravitazionale l'alternanza di altezza tra picchi pari e dispari, presente per via del Baryon Drag, viene anch'essa a mancare. L'osservazione di un terzo picco alto (Halverson et al. 2001) è dunque una buona indicazione dell'effettiva presenza della materia oscura fredda e del fatto che essa domina la densità di energia alla ricombinazione.

4.1.6 Damping

Il fluido di fotoni-barioni ha alcune imperfezioni che corrispondono a viscosità e conduzione di calore nel fluido, smorzando così le oscillazioni. Per descrivere quantitativamente questi effetti si presentano le equazioni del moto nella loro forma completa. Le equazioni di continuità rimangono invariate poichè i numeri di fotoni e barioni si conservano separatamente. Si ricorda poi l'equazione di Eulero per i barioni (4.11), e si presenta qui quella per i fotoni:

$$\dot{v}_\gamma = k(\Theta + \Psi) - \frac{k}{6}\pi_\gamma - \dot{\tau}(v_\gamma - v_b). \quad (4.21)$$

Gli effetti messi in evidenza nell'equazione per i barioni dai termini che tengono conto degli urti tra fotoni ed elettroni, e lo scambio di momento risultante, danno origini alle imperfezioni per conduzione di calore. Inoltre, fintanto che il mezzo è otticamente spesso $\dot{\tau}/k \gg 1$, i fotoni e barioni non possono "scivolare" gli uni sugli altri, e non è presente viscosità. A mano a mano che il mezzo diventa otticamente sottile invece questo effetto prende di importanza, portando ad uno smorzamento delle fluttuazioni. Nell'equazione di Eulero per i fotoni è presente un termine π_γ , che quantifica la viscosità dovuta alla radiazione. Sfruttando l'equazione di continuità (4.2) $kv_\gamma \approx -3\dot{\Theta}$, si mette in evidenza l'effetto di damping dovuto alla viscosità. Scrivendo poi l'equazione completa dell'oscillatore, si otterrà [1] che le fluttuazioni sono smorzate di un fattore esponenziale $e^{-k^2\eta/\dot{\tau}}$, e che dunque la scala a cui le oscillazioni vengono smorzate sarà $k_d = \sqrt{\dot{\tau}/\eta}$. Per misurare la rapida crescita del cammino libero medio sono necessarie integrazioni dettagliate delle equazioni del moto, che restituiscono una scala di damping $k_d s_* \approx 10$, che porta ad una sostanziale soppressione delle oscillazioni dopo il terzo picco.

4.2 Anisotropie Secondarie

Gli effetti che possono alterare le anisotropie tra la ricombinazione ed il momento presente si dividono in due categorie: effetti gravitazionali, ed effetti di rescattering dovuti alla reionizzazione.

4.2.1 Effetti Gravitazionali

Come già visto, gradienti nel potenziale gravitazionale causano la formazione di buche di potenziale. Se la profondità di una buca varia mentre un fotone la attraversa, il blueshift dovuto all'entrata nella buca di potenziale ed il redshift dovuto all'uscita non si elidono più vicendevolmente. Questo porta a fluttuazioni in temperatura. I principali effetti di questo tipo sono l'early ISW dovuto alla radiazione, il late ISW dovuto all'espansione rapida e il Rees-Sciama, dovuto alla presenza di strutture non lineari.

Late ISW

Il late ISW è sempre dovuto a variazioni nel potenziale gravitazionale. Tuttavia l'effetto dovuto all'energia oscura a tempi recenti, provoca variazioni differenti dall'effetto dovuto alla radiazione nello spettro delle anisotropie. Il contributo è differente per via della scala di tempo molto più ampia in cui avviene la variazione del potenziale. Dunque l'effetto sullo spettro si presenta solo ad l molto piccoli, a scale angolari molto grandi. Il late ISW è grandemente influenzato dall'energia oscura dalla sua quantità, equazione di stato, proprietà di aggregazione e potrebbe quindi fungere da indicatore per effettuare misure sull'energia oscura. Essendo tuttavia confinato a ordini di sviluppo in multipolo molto piccoli purtroppo l'effetto è difficilmente misurabile a causa della varianza cosmica (2.7).

Effetto Rees-Sciama

Se immaginiamo, in tempi recenti, il passaggio di fotoni attraverso una buca di potenziale dovuta ad una struttura singola e isolata, è chiaro che il potenziale sarà influenzato non solo dalle fluttuazioni di densità della struttura in questione, ma anche dal moto effettivo della struttura lungo la linea di vista. L'evoluzione di queste buche di potenziale sarebbe non lineare, e concettualmente comporterebbe la presenza di una certa scala angolare l_{NL} a cui le fluttuazioni uscirebbero appunto dal regime di linearità.

4.2.2 Reionizzazione

Il fenomeno della reionizzazione si verifica seguentemente all'ultimo scattering, probabilmente per via della radiazione prodotta dalla prima generazione di stelle massive. L'idrogeno neutro torna ad essere ionizzato, portando così i fotoni ad essere nuovamente accoppiati agli elettroni. Questo scattering secondario porta ad una perturbazione sul segnale primario, cancellando in parte le anisotropie primarie e generandone di nuove.

Soppressione dei picchi

La reionizzazione sopprime l'ampiezza dei picchi acustici con un'intensità pari alla frazione di fotoni che collidono. Tuttavia, a differenza del plasma primordiale il mezzo è ora otticamente sottile, dunque ora il cammino libero medio dei fotoni è dell'ordine dell'orizzonte stesso. Non possono dunque formarsi nuove oscillazioni acustiche. Possiamo pensare a questo effetto come un analogo dell'effetto di damping, che smorza le fluttuazioni.

Effetto Sunyaev-Zel'dovich

Per gli ammassi di galassie, dove la temperatura può raggiungere valori molto alti $T_e \sim 10keV$, i moti termici risultanti sono di una frazione consistente della velocità della luce $v \sim 0.2c$. L'effetto risultante è quello di un trasferimento di energia tra il gas di elettroni caldi e i fotoni del CMB, più freddi, lasciando così un'impronta nello spettro del CMB spostando fotoni dal lato di Rayleigh-Jeans alla coda di Wien. Questo effetto è chiamato appunto **effetto Sunyaev-Zel'dovich termico (SZ)**. L'effetto dà il contributo più importante alle anisotropie di temperatura dopo la coda di damping, mentre invece su scale angolari maggiori risulta solamente in rumore non correlato ($C_l = const$). Nonostante ci si aspetti che l'effetto SZ domini lo spettro delle anisotropie secondarie, non rende necessariamente gli altri effetti non misurabili e nemmeno contamina i picchi acustici. Questo perchè l'effetto SZ ha una frequenza facilmente distinguibile [1], e questo permette di distinguerlo dalle altre anisotropie secondarie. Inoltre deriva principalmente da ammassi molto grandi, i quali sono molto rari. I contributi allo spettro di potenza sono dunque non-Gaussiani(?) e localizzati in regioni precise dello spazio. Un'ulteriore effetto di anisotropia è prodotto dalla velocità peculiare degli ammassi, tramite effetto Doppler. Questo effetto è del tutto nonlineare, e non porta a distorsioni spettrali al prim'ordine. Questo effetto è chiamato **effetto Sunyaev-Zel'dovich cinetico**, ed ha ripercussioni trascurabili sullo spettro di potenza anche per via della già menzionata rarità di ammassi di galassie così grandi.

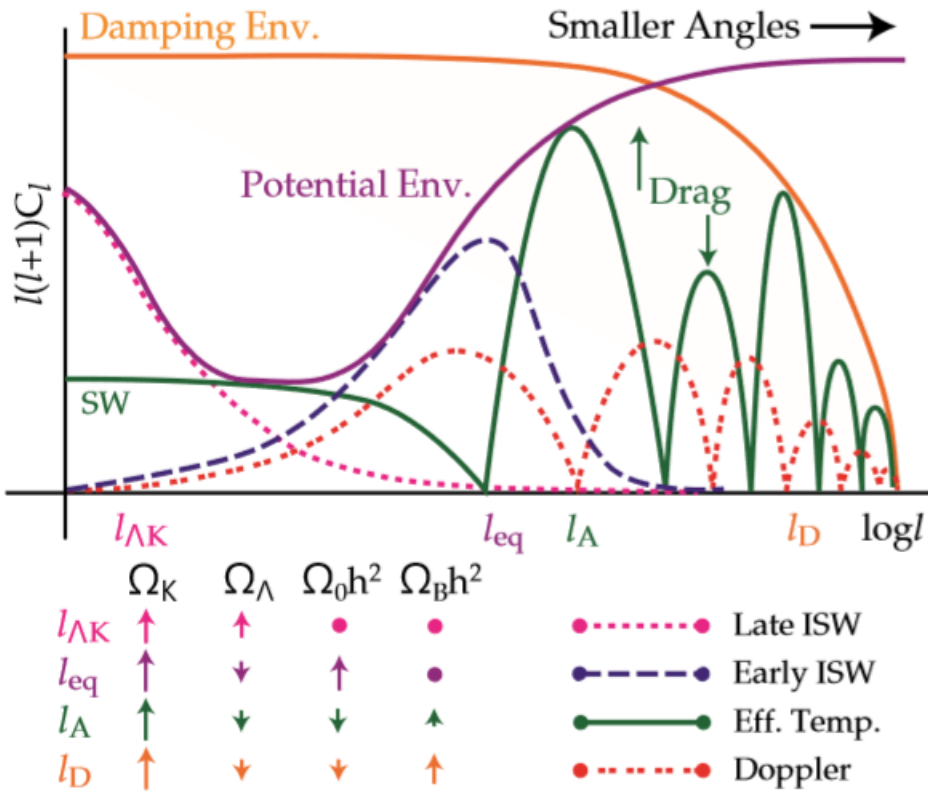


Figura 4.4: Spettro di potenza, sono messi in evidenza i contributi dei vari effetti di anisotropia, primari e secondari. La suddivisione nei vari effetti fisici permette di estrarre quattro fondamentali scale spaziali nello spettro: $l_{\Lambda k}$ e l_{eq} , che racchiudono il Sachs-Wolfe plateau, l_A che è lo spazio che separa tra di loro i picchi acustici, ed l_D che è la scala caratteristica del damping. Immagine presa da [5].

5 Parametri Cosmologici

Dopo aver parlato dei meccanismi fisici sottostanti i fenomeni delle anisotropie in temperatura del CMB, si presenta qui brevemente quali informazioni fisiche è possibile ricavarne. La fenomenologia osservata per i picchi acustici è descrivibile tramite quattro osservabili (precisate le condizioni iniziali) che si riportano qui in termini di ordine di multipolo (si possono vedere in figura 4.4). Questi sono l'estensione angolare dell'orizzonte del suono alla ricombinazione $l_a = \pi D_*/s_*$, l'estensione dell'orizzonte all'equivalenza materia-radiazione $l_{eq} = k_{eq}D_*$, la scala di damping $l_d = k_d D_*$ e infine il valore del rapporto di densità di momento tra barioni e fotoni R_* . l_a determina lo spazio presente tra i picchi, l_{eq} ed l_d concorrono per determinarne l'ampiezza, ed R_* determina l'intensità del baryon drag, ed, insieme ad l_{eq} che determina la profondità delle buche di potenziale, determina anche la differenza di altezza tra i picchi pari e dispari. Vediamo quindi quali informazioni fisiche è possibile ricavare da queste informazioni sui picchi. Si veda in figura (5.1) le dipendenze dello spettro di potenza al variare dei diversi parametri cosmologici, che verrà ora spiegata più approfonditamente.

5.1 Sensibilità dello spettro di potenza

Il parametro di densità totale Ω_{tot} è intrinsecamente legato alla curvatura. Nel caso in cui l'Universo non sia piatto si osserverà una variazione della distanza di diametro angolare [13]. Per un Universo aperto vedremo le stesse scale fisiche sottendere angoli minori, e viceversa per un Universo chiuso. Per un dato contenuto di materia e radiazione la dimensione dell'orizzonte acustico definisce quindi la posizione del primo picco. Si può quindi notare come al variare del parametro di densità totale, varierà la posizione l del primo picco (attualmente stimata ad $l \sim 200$), e tutto lo spettro di potenza sarà traslato. Questa è la ragione per cui la misurazione del primo picco costituisce un potente metodo di misurazione della curvatura dell'universo. Si è poi visto in 4.1.3 che all'aumentare del contenuto di barioni sono amplificate le compressioni e smorzate le rarefazioni, che corrispondono rispettivamente ai picchi dispari e pari. Al variare del parametro di densità dei barioni cambierà dunque il rapporto di altezza tra picchi pari e dispari. Inoltre all'aumentare della densità dei barioni cambierà anche il cammino libero medio dei fotoni, che sposterà così la scala angolare di damping a valori di l maggiori. Il parametro di densità della materia Ω_m determina il momento in cui avviene l'epoca dell'equivalenza, in cui i contributi di energia di materia e radiazione si equivalgono. La prima conseguenza è che, dato che il tasso di espansione dipende dalla componente dominante, la dimensione dell'orizzonte del suono alla ricombinazione sarà influenzata dalla durata dell'epoca dominata dalla radiazione. Inoltre, l'effetto di driving fa evolvere il potenziale gravitazionale nel tempo, mentre la materia oscura non dà contributi di pressione. Dato che la radiazione non tende ad aggregarsi come la materia, all'aumentare della durata dell'epoca dominata dalla radiazione, aumenterà anche l'ampiezza delle oscillazioni. Inoltre, su piccole scale, i modi di oscillazione sono entrati nell'orizzonte e hanno cominciato ad oscillare durante la dominazione della radiazione, ed in questo momento, durante la fase di rarefazione il potenziale gravitazionale decresce (dato che è dominato dalla densità dei fotoni, che sta diminuendo, rendendo la rarefazione più intensa. Su piccole scale dunque i picchi di rarefazione sono più intensi di quelli di compressione. Dunque il rapporto tra picchi pari e dispari su piccole scale (ma sufficientemente grandi da non essere smorzate dal damping) è un ottimo indicatore del momento dell'equivalenza. Questo perchè, se l'equivalenza avviene prima, l'effetto di incremento dei picchi dispari, di compressione, si può osservare su scale angolari sempre più piccole. Per quanto riguarda invece la componente di energia oscura, questa non era dominante alla ricombinazione, abbiamo dunque che

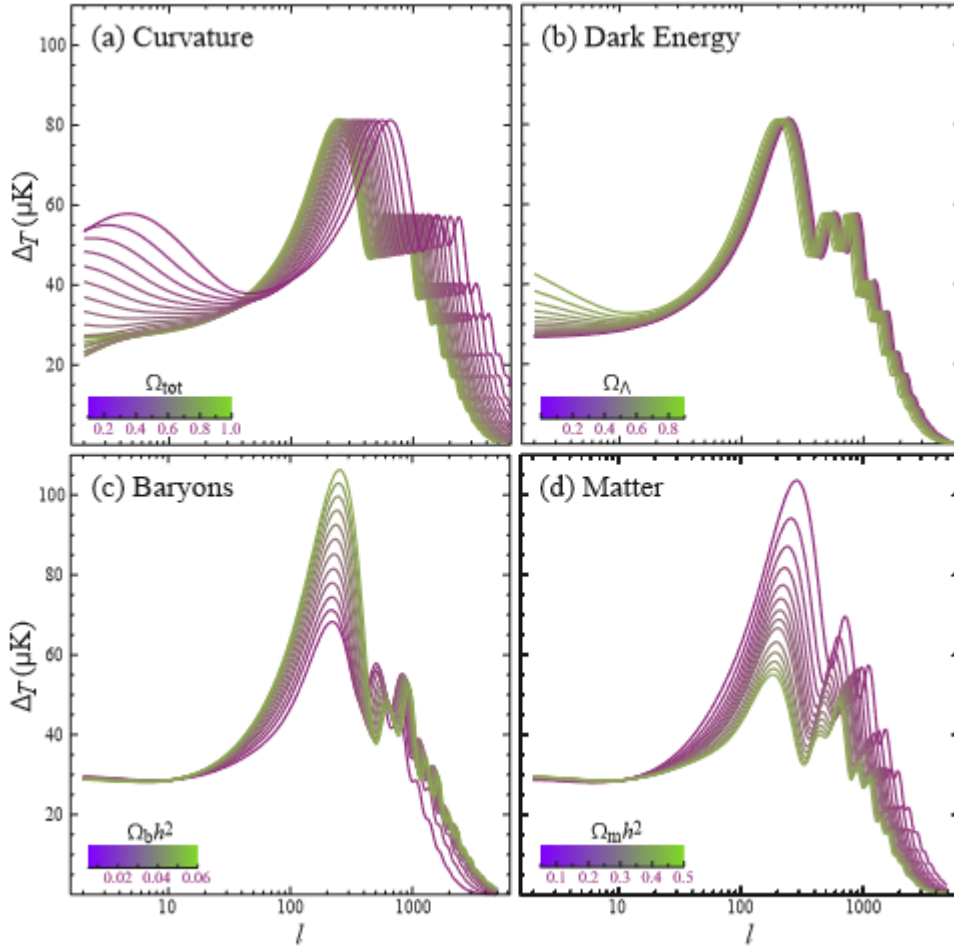


Figura 5.1: Sensibilità delle oscillazioni acustiche dai fondamentali parametri cosmologici. In (a) dipendenza dalla curvatura, messa in evidenza dalla variazione di Ω_{tot} tra 0 e 1, in (b) la dipendenza dal parametro di densità della costante cosmologica, in (c) la densità dei barioni $\Omega_b h^2$, in (d) la densità di materia $\Omega_m h^2$. Immagine presa da [1]

tutti gli effetti di anisotropie primarie sono indipendenti da quest'ultima. Possiamo osservare degli effetti della costante cosmologica esclusivamente sul seguente processo di free streaming dei fotoni, e dunque sulle anisotropie secondarie. Il late ISW, in particolar modo, che dipende dalle variazioni di potenziale su larga scala è un'utile metro di misura. Per una più completa derivazione delle dipendenze dello spettro di potenza dai parametri cosmologici si veda [1].

6 Non Gaussianità

In Sezione 2 abbiamo mostrato che descrivere le fluttuazioni con (2.6), in approssimazione Gaussiana, riduce il numero di valori da prendere in considerazione, in quanto riduce la funzione di correlazione alla determinazione dei valori sulla diagonale della matrice C_l . Prendendo ad esempio la mappa di temperatura dell'esperimento WMAP si ha che contiene 10^6 pixel, ed invece la funzione di correlazione a due punti associata contiene solo ~ 1000 valori. Questo tipo di compressione dei dati è appunto giustificata unicamente se la distribuzione statistica delle fluttuazioni osservate è Gaussiana. Qualunque informazione contenuta dal discostarsi della distribuzione da una perfetta Gaussiana non è contenuta nello spettro di potenza (che come visto rappresenta la trasformata di Fourier della funzione di correlazione a due punti), ma deve essere estratta dalla misura di funzioni di correlazione di ordine maggiore.

Da un punto di vista statistico la ricerca di queste non-Gaussianità si traduce quindi nella misura di ulteriori osservabili del CMB che vanno al di là dello spettro di potenza, ovvero la funzione di correlazione a tre punti e la sua trasformata nello spazio armonico, il bispettro. In questa sezione si presentano le quantità statistiche in discussione, per poi mostrare quali informazioni fisiche è possibile ricavare dalle non-Gaussianità delle perturbazioni.

6.1 Definizione del Bispettro

La funzione a tre punti correla le fluttuazioni di tre differenti punti nello spazio, ed è un'utile misura della non gaussianità perchè assume valore zero nel caso di perfetta gaussianità. Analogamente il bispettro, sua trasformata nello spazio armonico correla le fluttuazioni con tre vettori d'onda, che formano un triangolo nello spazio di Fourier, e possono dunque assumere differenti conformazioni. Si può pensare al bispettro come una misura del grado di deviazione dall'approssimazione gaussiana delle oscillazioni considerate. Ricordando la formula (2.5) possiamo definire il bispettro angolare come:

$$B_{l_1 l_2 l_3}^{m_1 m_2 m_3} \equiv \langle a_{l_1 m_1} a_{l_2 m_2} a_{l_3 m_3} \rangle. \quad (6.1)$$

Per distinguere le proprietà geometriche da quelle fisiche è possibile scrivere il bispettro, sfruttando l'invarianza per rotazioni, come:

$$B_{l_1 l_2 l_3}^{m_1 m_2 m_3} = G_{l_1 l_2 l_3}^{m_1 m_2 m_3} b_{l_1 l_2 l_3}, \quad (6.2)$$

dove $b_{l_1 l_2 l_3}$ è lo *spettro ridotto* e $G_{l_1 l_2 l_3}^{m_1 m_2 m_3}$ è l'integrale di Gaunt:

$$\begin{aligned} G_{l_1 l_2 l_3}^{m_1 m_2 m_3} &= \int d^2 \hat{n} Y_{l_1 m_1}(\hat{n}) Y_{l_2 m_2}(\hat{n}) Y_{l_3 m_3}(\hat{n}) \\ &= \sqrt{\frac{(2l_1 + 1)(2l_2 + 2)(2l_3 + 3)}{4\pi}} \begin{pmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (6.3)$$

dove la matrice senza zeri rappresenta il simbolo $3j$ di Wigner, che assicura che il bispettro soddisfi l'invarianza per traslazioni, ovvero le condizioni triangolari e le regole di selezione $m_1 + m_2 + m_3 = 0$, $l_1 + l_2 + l_3 = \text{pari}$, e $|l_i - l_j| \leq l_k \leq l_i + l_j$. Il fatto che sia possibile scrivere il bispettro ridotto $b_{l_1 l_2 l_3}$ come una funzione indipendente da m , che contiene peraltro tutte le proprietà fisiche del bispettro completo, rispecchia l'invarianza per rotazioni (isotropia) della radiazione. Come per lo spettro di potenza, la quantità che possiamo osservare è il valor medio del bispettro sugli m , definiamo dunque

il bispettro mediato sull'angolo come:

$$B_{l_1 l_2 l_3} = \sum_{m_1 m_2 m_3} \begin{pmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} B_{l_1 l_2 l_3}^{m_1 m_2 m_3}, \quad (6.4)$$

dove la matrice è sempre il simbolo 3j di Wigner. Sostituendo poi (5.2) in (5.4) e sfruttando la definizione dell'integrale di Gaunt possiamo riscrivere il bispettro mediato sull'angolo come:

$$B_{l_1 l_2 l_3} = \sqrt{\frac{(2l_1 + 1)(2l_2 + 2)(2l_3 + 3)}{4\pi}} \begin{pmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} b_{l_1 l_2 l_3}, \quad (6.5)$$

dove si è sfruttata l'uguaglianza:

$$\sum_{m_1 m_2 m_3} \begin{pmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} G_{l_1 l_2 l_3}^{m_1 m_2 m_3} = \sqrt{\frac{(2l_1 + 1)(2l_2 + 2)(2l_3 + 3)}{4\pi}} \begin{pmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (6.6)$$

Come già menzionato la funzione di correlazione a tre punti, quando diversa da zero, contiene informazioni ulteriori rispetto allo spettro di potenza, per via della sua sensibilità ai fenomeni non lineari. Questi fenomeni possono essersi verificati nell'epoca pre-ricombinazione influenzando così le anisotropie primarie, creando una non-Gaussianità primordiale legata all'inflazione, oppure possono essere legati alle interazioni subite dai fotoni dopo la ricombinazione, influenzando così le anisotropie secondarie.

6.2 Approssimazione di flat-sky

Per cominciare si riporta la soluzione integrale dell'equazione di luminosità [10]:

$$\Theta(\hat{n}) = \int \frac{d^3 \vec{k}}{(2\pi)^3} \zeta(\vec{k}) \int_0^{\eta_0} d\eta e^{i\vec{k}\hat{n}(\eta_0 - \eta)} S(k, \eta). \quad (6.7)$$

Dove $\zeta(\vec{k})$ qui rappresenta la perturbazione di densità e $S(k, \eta)$ è la Source function del CMB che codifica gli effetti dovuti a perturbazioni della metrica, ISW, effetto doppler, redshift gravitazionale, ed altri sul CMB osservato. Si noti inoltre che nella trattazione seguente con η_0 si intende il momento attuale. L'approssimazione di flat sky, come suggerito dal nome, consiste nel considerare una superficie di cielo sufficientemente piccola da approssimare la superficie sferica di osservazione al piano tangente alla sfera in quel punto. Lo sviluppo in armoniche sferiche si riduce allora ad una trasformata di Fourier. Abbiamo dunque:

$$a(\vec{l}) = \int d^2 \hat{n} e^{-i\vec{l}\cdot\hat{n}} \Theta(\hat{n}), \quad (6.8)$$

dove \vec{l} è il vettore bidimensionale sul piano del cielo. Si separa ora l'esponenziale nell'integrale sulla linea di vista in due parti dipendenti dalle componenti del vettore d'onda k parallela e perpendicolare al piano tangente rispettivamente:

$$a(\vec{l}) = \int \frac{d^3 \vec{k}}{(2\pi)^3} \zeta(\vec{k}) \int_0^{\eta_0} d\eta S(k, \eta) \int d^2 \hat{n} e^{-i\vec{l}\cdot\hat{n}} e^{i\vec{k}^{\parallel}\cdot\hat{n}(\eta_0 - \eta)} e^{ik^z(\eta_0 - \eta)}. \quad (6.9)$$

Valutando poi l'integrale su \hat{n} si ottiene una funzione δ , che impone che il vettore \vec{l} sia uguale alla parte parallela del vettore d'onda \vec{k}^{\parallel} moltiplicato per la distanza dall'ultimo scattering:

$$a(\vec{l}) = \int \frac{d^3 \vec{k}}{(2\pi)^3} \zeta(\vec{k}) \int_0^{\eta_0} d\eta S(k, \eta) e^{ik^z(\eta_0 - \eta)} (2\pi)^2 \delta^{(2)}(\vec{l} - \vec{k}^{\parallel}(\eta_0 - \eta)). \quad (6.10)$$

L'approssimazione è valida quando si considerano scale sufficientemente piccole perchè il piano tangente ben approssimi la superficie sferica (LSS) in questione. Si mette ora in evidenza che non stiamo considerando la ricombinazione come un processo istantaneo, nonostante la source function sia fortemente piccata alla ricombinazione η_{*} , essa ha una larghezza $\delta\eta_{*}$ non trascurabile. Tiriamo quindi

fuori dall'integrale in $d\eta$ la fase $e^{ik^z(\eta_0-\eta_*)}$ la quale, quando valuteremo funzioni di correlazione a più punti diventerà trascurabile per conservazione del momento:

$$a(\vec{l}) = \int \frac{dk^z}{2\pi} e^{ik^z(\eta_0-\eta_*)} \int d^2\vec{k} \zeta(\vec{k}) \int_0^{\eta_0} d\eta S(k, \eta) e^{ik^z(\eta_0-\eta)} \delta^{(2)}(\vec{l} - \vec{k}^{\parallel}(\eta_0 - \eta)). \quad (6.11)$$

Definiamo a questo punto una funzione di trasferimento per la radiazione:

$$\Delta^T(l, k_z) = \int_0^{\eta_0} d\eta S(k, \eta) e^{ik^z(\eta_0-\eta)} \delta^{(2)}(\vec{l} - \vec{k}^{\parallel}(\eta_0 - \eta)), \quad (6.12)$$

e scriviamo quindi un'espressione per il bispettro usando (6.11):

$$\begin{aligned} \langle a(\vec{l}_1) a(\vec{l}_2) a(\vec{l}_3) \rangle &= \int d\eta_1 d\eta_2 d\eta_3 \int \frac{d^3\vec{k}_1}{(2\pi)} \frac{d^3\vec{k}_2}{(2\pi)} \frac{d^3\vec{k}_3}{(2\pi)} \langle \zeta(\vec{l}_1) \zeta(\vec{l}_2) \zeta(\vec{l}_3) \rangle S(k_1, \eta_1) S(k_2, \eta_2) S(k_3, \eta_3) \\ &\times e^{ik_1^z(\eta_*-\eta_1)} e^{ik_2^z(\eta_*-\eta_2)} e^{ik_3^z(\eta_*-\eta_3)} \delta^{(2)}(\vec{l}_1 - \vec{k}_1^{\parallel}(\eta_0 - \eta_1)) \delta^{(2)}(\vec{l}_2 - \vec{k}_2^{\parallel}(\eta_0 - \eta_2)) \delta^{(2)}(\vec{l}_3 - \vec{k}_3^{\parallel}(\eta_0 - \eta_3)). \end{aligned} \quad (6.13)$$

Usando ora la definizione della funzione di correlazione a tre punti per le perturbazioni di densità, che conterrà una dipendenza dalla forma del triangolo formato dai vettori (k_1, k_2, k_3) :

$$\langle \zeta(\vec{l}_1) \zeta(\vec{l}_2) \zeta(\vec{l}_3) \rangle = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{k}_1 + \vec{k}_2 + \vec{k}_3) F(k_1, k_2, k_3). \quad (6.14)$$

Scambiando ora l'integrale sulla linea di vista con quello nello spazio di Fourier, e definendo k' il k tale che $\vec{k}^{\parallel} = \vec{l}/(\eta_0 - \eta_*)$, si ottiene:

$$\langle a(\vec{l}_1) a(\vec{l}_2) a(\vec{l}_3) \rangle = (\eta_0 - \eta_*)^2 \delta^{(2)}(\vec{l}_{123}) \int dk_1^z dk_2^z dk_3^z \delta(k_{123}^z) F(k'_1, k'_2, k'_3) \tilde{\Delta}^T(l_1, k_1^z) \tilde{\Delta}^T(l_2, k_2^z) \tilde{\Delta}^T(l_3, k_3^z), \quad (6.15)$$

dove

$$\tilde{\Delta}^T(l, k^z) = \int_0^{\eta_0} \frac{d\eta}{(\eta_0 - \eta)^2} S(\sqrt{(k^z)^2 + l^2/(\eta_0 - \eta)^2}, \eta) e^{ik^z(\eta_0-\eta)}. \quad (6.16)$$

Utilizzando ora la definizione di bispettro $\langle a(\vec{l}_1) a(\vec{l}_2) a(\vec{l}_3) \rangle = (2\pi)^2 \delta^{(2)}(\vec{l}_1 + \vec{l}_2 + \vec{l}_3) B(\vec{l}_1, \vec{l}_2, \vec{l}_3)$ [9], si ottiene:

$$B(\vec{l}_1, \vec{l}_2, \vec{l}_3) = \frac{(\eta_0 - \eta_*)^2}{(2\pi)^2} \int dk_1^z dk_2^z dk_3^z \delta^{(1)}(k_{123}^z) F(k'_1, k'_2, k'_3) \tilde{\Delta}^T(l_1, k_1^z) \tilde{\Delta}^T(l_2, k_2^z) \tilde{\Delta}^T(l_3, k_3^z). \quad (6.17)$$

Questa formula è del tutto generale e può essere utilizzata per calcolare il bispettro in limite di flatky prodotto da qualunque campo di perturbazione primordiale. In limite di flatsky la funzione δ impone che i modi formino un triangolo chiuso, la stessa funzione è svolta in 3D dal simbolo $3j$ di Wigner. Si può applicare il formalismo di flatsky per ottenere stime analitiche, come si può vedere in [15]. Si potrebbe pensare di applicare il suddetto formalismo per ottenere stime analitiche anche per effetti secondari come l'effetto Rees-Sciama o Sunyaev-Zel'dovich, ripercorrendo il procedimento tracciato in [16][17], utilizzando però il formalismo appena introdotto.

6.3 Bispettro primordiale

Per ottenere dal bispettro informazioni sul potenziale primordiale dobbiamo determinare una relazione che leghi le anisotropie rilevate alle perturbazioni primordiali. Per ottenere questa relazione si utilizza il concetto di *funzione di trasferimento* $\Delta(k, \tau)$, che lega i momenti di multipolo del potenziale primordiale $\phi(k)$ a quelli del CMB, descrivendo l'evoluzione lineare delle perturbazioni:

$$a_{lm} = 4\pi(-i)^l \int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3} \phi(\vec{k}) \Delta(\vec{k}) Y_{lm}^*(\vec{k}). \quad (6.18)$$

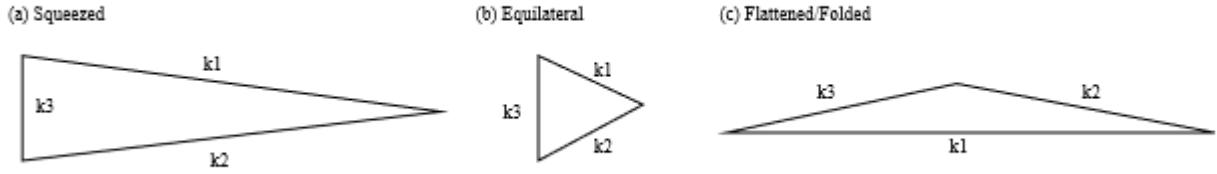


Figura 6.1: Varie conformazioni che può assumere il bispettro primordiale. Le differenti forme sono indice della presenza di diversi processi fisici durante l'inflazione. Immagine presa da [8].

Inserendo a questo punto nell'equazione (6.5) la definizione di bispettro (6.1), e utilizzando la formula appena ricavata per mettere in relazione gli a_{lm} con i potenziali primordiali, si ottiene:

$$B_{l_1 l_2 l_3} = (4\pi)^3 (-i)^{l_1 + l_2 + l_3} \sum_{m_1 m_2 m_3} \begin{pmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} \int \frac{d^3 k_1}{(2\pi)^3} \frac{d^3 k_2}{(2\pi)^3} \frac{d^3 k_3}{(2\pi)^3} \times Y_{l_1 m_1}^*(k_1) Y_{l_2 m_2}^*(k_2) Y_{l_3 m_3}^*(k_3) \langle \phi(\vec{k}_1) \phi(\vec{k}_2) \phi(\vec{k}_3) \rangle \Delta(k_1, \tau) \Delta(k_2, \tau) \Delta(k_3, \tau). \quad (6.19)$$

Dove $\langle \phi(\vec{k}_1) \phi(\vec{k}_2) \phi(\vec{k}_3) \rangle$ rappresenta la funzione di correlazione a tre punti del potenziale primordiale, che può essere definita come segue:

$$\langle \phi(\vec{k}_1) \phi(\vec{k}_2) \phi(\vec{k}_3) \rangle = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(k_1 + k_2 + k_3) B_{prim}(k_1, k_2, k_3). \quad (6.20)$$

Nella formula appena scritta $B_{prim}(k_1, k_2, k_3)$ è il bispettro primordiale, in quanto funzione solo del potenziale primordiale. Differenti modelli predicono differenti potenziali ϕ , e fanno dunque differenti previsioni sul bispettro primordiale. Il bispettro primordiale viene generalmente definito tramite il parametro di ampiezza f_{NL} che descrive la 'quantità' di non-Gaussianità di una particolare configurazione e la funzione F , che descrive la dipendenza del bispettro dalle varie conformazioni triangolari che esso può assumere:

$$B_{prim}(k_1, k_2, k_3) = f_{NL} F(k_1, k_2, k_3). \quad (6.21)$$

Abbiamo già detto che dal bispettro è possibile ricavare informazioni riguardanti processi fisici avvenuti durante l'inflazione. La presenza o assenza di questi vari effetti fisici è ricavabile dalla forma che assume il bispettro. Le principali sono riportate in figura (5.1).

6.4 Non-Gaussianità nell'universo a basso redshift

Le iniziali fluttuazioni, che nonostante abbiano una componente non-Gaussiana data dalla fase inflazionaria, sono per la maggior parte Gaussiane. Tuttavia, con l'evolversi delle strutture cosmiche esse attraversano vari processi non-lineari, che porta un'ulteriore componente di non-Gaussianità nelle perturbazioni. Questa proprietà rende la non-Gaussianità un modo efficace per ricavare informazioni sull'evoluzione delle strutture cosmiche, e in generale sui processi fisici non-lineari dell'universo a basso redshift. Vediamo più in dettaglio quali sono le principali informazioni che è possibile ricavare:

- Anisotropie secondarie: La non-Gaussianità può essere utilizzata per ricavare informazioni aggiuntive su vari effetti già nominati in questo lavoro come l'effetto Sunyaev-Zeldovich, gli effetti dovuti all'epoca della reionizzazione, l'ISW.
- Epoca della ricombinazione: La non-Gaussianità può essere usata anche piccoli effetti non-lineari che si devono essere verificati alla ricombinazione, come per esempio l'evoluzione non-lineare del fluido di fotoni barioni o la non-linearità nel processo di trasferimento radiativo.
- Evoluzione delle strutture cosmiche: La non-Gaussianità offre anche alcuni strumenti di misura per quanto riguarda il processo di formazione delle galassie e la fisica del del Mezzo Intergalattico (IGM).

6.5 Non-Gaussianità alla ricombinazione

Allo scopo di chiarire l'utilità dell'approssimazione di flatsky, si riporta qui la stima della non-Gaussianità generata all'epoca ricombinazione nella suddetta approssimazione. Come si vede in [15] il contributo principale al bispettro generato alla ricombinazione è dato da:

$$\Theta_{SW}^{(2)} = \frac{1}{4}\Theta_{00}^{(2)} + \Phi^{(2)}, \quad (6.22)$$

Dove, come noto $\Theta_{00}^{(2)}$ rappresenta la fluttuazione di densità intrinseca dei fotoni e $\Phi^{(2)}$ rappresenta il redshift gravitazionale dovuto al potenziale, però si prendono i contributi di entrambe le quantità al second'ordine. Su grandi scali questa quantità si riduce al effetto SW, mentre su piccole scale [15]:

$$\frac{1}{4}\Theta_{00}^{(2)} + \Phi^{(2)} \simeq -R\Phi^{(2)} = -\frac{R}{14}G(\vec{k}_1, \vec{k}_2, \vec{k})F(k_1)F(k_2)\Phi^{(1)}(k_1)\Phi^{(1)}(k_2)\eta_*^2, \quad (6.23)$$

dove $F(k)$ è la funzione di trasferimento. Si sta assumendo che su G agisca una convoluzione come segue:

$$\frac{1}{(2\pi)^3} \int d\vec{k}_1 d\vec{k}_2 \delta^{(3)}(\vec{k}_1 + \vec{k}_2 + \vec{k}) G(\vec{k}_1, \vec{k}_2, \vec{k}) F(k_1) F(k_2) \Phi^{(1)}(k_1) \Phi^{(1)}(k_2). \quad (6.24)$$

Inserendo poi la perturbazione (6.22) all'interno di (6.8), e sviluppando l'approssimazione di flatsky, si ottiene:

$$B_{rec}(l_1, l_2, l_3) = \frac{(\eta_0 - \eta_*)^2}{(2\pi)^2} \int dk_1^z dk_2^z dk_3^z \delta^{(1)}(k_{123}^z) [G(\vec{k}'_1, \vec{k}'_2, \vec{k}'_3) T(k'_1) T(k'_2) P(k'_1) P(k'_2) \\ \times \tilde{\Delta}^T(l_1, k_1^z) \tilde{\Delta}^T(l_2, k_2^z) \tilde{\Delta}^T(l_3, k_3^z) + \text{permutazioni}]. \quad (6.25)$$

Si mette così in evidenza l'utilità dell'approssimazione di flatsky, che permette di determinare un'espressione semplificata per il bispettro dovuto alle non-Gaussianità alla ricombinazione, e che rispetto al bispettro in tre dimensioni è più leggero da un punto di vista di calcolo. Portando quindi avanti il calcolo, come si può vedere in [15], questo formalismo permette di stimare in maniera analitica le non-Gaussianità. Questo tipo di ragionamento è applicabile anche ad altri effetti, come alcune anisotropie secondarie, ed in generale permette di ricavare espressioni analiticamente più semplici, per stimare il valore assunto dalla funzione di correlazione a tre punti, e dunque per rilevare non-Gaussianità.

Bibliografia

- [1] Wayne Hu and Scott Dodleson, *Cosmic Microwave Background Anisotropies*, arXiv:astro-ph/0110414, 2001.
- [2] Wayne Hu and Martin White, *The Cosmic Symphony*, Scientific American 290N2 44, 2004.
- [3] Scott Dodleson, *Modern Cosmology*, (2003) ACADEMIC PRESS, Elsevier Inc., San Diego, ISBN-13: 978-0-12-219141-1, ISBN-10: 0-12-219141-2.
- [4] Francesco Lucchin, *Introduzione alla Cosmologia*, (1990) Nicola Zanichelli S.p.A., Bologna, ISBN: 9788808012432.
- [5] W. Hu, N. Sugiyama, and J. Silk, *The Physics Of Microwave Background Anisotropies*, arXiv:astro-ph/9604166, 1996.
- [6] Wayne Hu, *Wandering in the Background: A CMB Explorer*, arXiv:astro-ph/9508126v2, 2009(v2).
- [7] N.Bartolo, S.Matarrese, A.Riotto, *CMB Anisotropies at Second-Order II: Analytical Approach*, arXiv:astro-ph/0610110v2, 2007(v2).
- [8] E.Komatsu, N.Afshordi, N.Bartolo, D.Baumann, J.R.Bond, E.I.Buchbinder, C.T.Byrnes, X.Chen, D.J.H.Chung, A.Cooray, P.Creminelli, N.Dalal, O.Dore, R.Easther, A.V.Frolov, K.M.Gorski, M.G. Jackson, J.Khoury, W.H.Kinney, L.Kofman, K.Koyama, L.Lebland, J.-L.Lehners, J.E.Lidsey, M.Liguori, E.A.Lim, A.Linde, D.H.Lyth, J.Maldacena, S.Matarrese, L.McAllister, P.McDonald, S.Mukohyama, B.Ovrut, H.V.Peiris, C.Raeth, A.Riotto, Y.Rodriguez, M.Sasaki, R.Scoccimarro, D.Seery, E.Sefusatti, U.Seljak, L.Senatore, S.Shandera, E.P.S.Shellard, E.Silverstein, A.Slosar, K.M.Smith, A.A.Starobinsky, P.J.Steinhardt, F.Takahashi, M.Tegmark, A.J.Tolley, L.Verde, B.D.Wandelt, D.Wands, S.Weinberg, M.Wyman, A.P.S.Yadav, M.Zaldarriaga, *Non-Gaussianity as a Probe of the Physics of the Primordial Universe and the Astrophysics of the Low Redshift Universe*, arXiv:0902.4759v4 [astro-ph.CO], 2009(v4).
- [9] Eiichiro Komatsu, David N. Spergel, *Acoustic Signatures in the Primary Microwave Background Bispectrum*, arXiv:astro-ph/0005036v2, 2000(v2).
- [10] Daniel Babich, Paolo Creminelli, Matias Zaldarriaga, *The shape of non-Gaussianities*, arXiv:astro-ph/0405356v1, 2004.
- [11] Andrew Liddle, David Lyth, *Cosmological Inflation and Large-Scale Structure*, (2000) CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS, Cambridge, ISBN-13:978-0521575980, ISBN-10:0521575982.
- [12] Wayne Hu, <http://background.uchicago.edu/index.html>, online tutorials.
- [13] A.Franceschini, Dispense del corso di Cosmologia per Laurea Triennale in Astronomia, Università di Padova, 2018.
- [14] Andrew Liddle, *An Introduction to Modern Cosmology*, (2003), ISBN-13:978-1118502143, ISBN-10:9781118502143.

BIBLIOGRAFIA

- [15] Nicola Bartolo, Antonio Riotto, *On the non-Gaussianity from Recombination*, arXiv:0811.4584v3, 2009(v3).
- [16] David Spergel and David Goldberg, *The Microwave Background Bispectrum Paper I: Basic Formalism*, arXiv:astro-ph/9811252v2, 1999(v2).
- [17] David Goldberg and David Spergel, *The Microwave Background Bispectrum Paper II: A Probe of the Low Redshift Universe*, arXiv:astro-ph/9811251v2, 1999(v2).