Università degli Studi di Padova

DIPARTIMENTO DI MATEMATICA "TULLIO LEVI-CIVITA"

Dipartimento di Fisica e Astronomia "Galileo Galilei"

Corso di Laurea Magistrale in Matematica

L'uso della matematica in fisica e le strategie di problem solving degli studenti di prima Liceo Scientifico: analisi della loro evoluzione attraverso il progetto Virtual School

Relatrice:
Dr. Marta Carli

Laureando: Michele Berto
Matricola: 1207711

Correlatrice:
Dott.ssa Stefania Lippiello

Anno Accademico 2022/2023
21/04/2023

Sommario

Introduzione......**5**

1 Inquadramento teorico...... **7**

1.1 La relazione tra matematica e fisica...... 7

1.2 La matematica nell'insegnamento della fisica...... 8

1.3 Il modello di Uhden et al. per l'uso della matematica nella didattica della fisica...... 11

1.3.1 Un esempio di applicazione...... 14

1.4 Il modello cognitivo dei giochi epistemici...... 17

1.5 Moduli di apprendimento online...... 21

2 La ricerca...... **24**

2.1 Scopo e domande di ricerca...... 24

2.2 Il progetto UniPD-Monash Virtual School...... 25

2.2.1 Il tema del corso estivo della Virtual School...... 26

2.2.2 Progettazione delle lezioni mediante il modello di Uhden et al...... 27

2.3 Metodologia della ricerca...... 29

2.3.1 Il test...... 30

2.3.2 Metodi di valutazione...... 34

2.4 Partecipanti...... 35

3 Analisi dei dati...... **36**

3.1 Analisi globale dei dati del campione...... 36

3.2 Analisi locale dei dati del campione...... 39

3.2.1 Comprensione della proporzionalità diretta...... 39

3.2.2 Lettura di un grafico in contesto fisico...... 42

3.2.3 Comprensione del calore specifico...... 43

3.2.4 Risoluzione di un'equazione in contesto matematico...... 44

3.2.5 Risoluzione di un'equazione in contesto fisico...... 47

3.2.6 Giochi epistemici rilevati...... 48

3.3 Un caso di studio: AS...... 49

3.3.1 Analisi prima intervista.. 49

3.3.2 Analisi seconda intervista..56

3.4 Un caso di studio: SB.. 59

4 Conclusioni e prospettive di ricerca futura..64

Bibliografia.. 69

Appendice..71

Appendice A: Trascrizione interviste ed elaborato AP.. 71

Appendice B: Trascrizione interviste ed elaborato AS.. 77

Appendice C: Trascrizione interviste ed elaborato CD.. 84

Appendice D: Trascrizione interviste ed elaborato CDA...90

Appendice E: Trascrizione interviste ed elaborato ER..98

Appendice F: Trascrizione interviste ed elaborato GDB.. 109

Appendice G: Trascrizione interviste ed elaborato SB.. 115

Appendice H: Test... 121

A Carlo Oro

Introduzione

Matematica e fisica sono due discipline intrinsecamente connesse e il ruolo della matematica in relazione alla fisica non è solo tecnico, ma anche e soprattutto strutturale, legato alla definizione e interpretazione di concetti, relazioni e problemi. Tale consapevolezza è rilevante anche nell'ambito dell'insegnamento della matematica e della fisica nella scuola secondaria di secondo grado.

Tuttavia, gli studenti hanno spesso difficoltà a utilizzare strumenti e metodi matematici in contesto fisico e a combinare matematica e fisica nella risoluzione dei problemi. La letteratura mostra che il problema principale non sta nella carenza delle competenze puramente matematiche, ma nell'uso della matematica in un contesto differente, quale la fisica. Ciò richiede lo sviluppo di strategie e atteggiamenti specifici, che devono essere supportati da azioni concrete da parte dell'insegnante, attraverso opportune scelte, strategie e metodologie didattiche.

Per capire quali siano le pratiche più efficaci a questo scopo si è considerata la ricerca sui processi messi in atto dagli studenti nella risoluzione di problemi di fisica e, in particolare, la loro interpretazione tramite gli "*epistemic games*", ossia gli approcci in cui gli studenti affrontano un problema di fisica e le mosse che attuano per risolverlo.

In questa tesi si descrive come si è tenuto conto di tali risultati nella progettazione delle lezioni di un corso estivo di fisica online per studenti di prima Liceo Scientifico e si analizza come, attraverso il percorso, siano evolute le strategie di *problem solving* degli studenti e l'utilizzo di alcuni strumenti matematici (lettura di grafici ed equazioni). Il corso è stato attuato all'interno del progetto "*Investigating the impact of Virtual School experiences on teaching and learning*", oggetto nel 2022 di un programma di ricerca congiunto tra l'Università di Padova e la Monash University in Australia. Il progetto, svolto in collaborazione con alcune scuole del territorio, era volto a supportare gli studenti in difficoltà con la fisica e, nel contempo, offriva un'opportunità di tirocinio e pratica riflessiva a studenti o neolaureati orientati all'insegnamento a scuola. Questi ultimi, infatti, erano incaricati di preparare le lezioni sotto la guida di insegnanti in servizio, tutor e ricercatori in ambito didattico.

La progettazione delle lezioni è stata arricchita dall'indagine oggetto di questa tesi, la quale ha previsto lo sviluppo di un test e di interviste pre/post condotte con un sottogruppo di 7 studenti che hanno preso parte al corso estivo. I test sono stati strutturati in due coppie di

esercizi isomorfi in matematica e fisica. Gli esercizi di fisica erano relativi al tema del percorso (i fenomeni termici) e richiedevano l'uso di grafici ed equazioni lineari.
Le interviste sono state trascritte e codificate in termini di epistemic games messi in atto dagli studenti nella risoluzione dei problemi, confrontando gli esercizi nei due contesti (matematica e fisica) e valutando l'evoluzione pre/post.

Il primo capitolo introduce alcuni tra i principali risultati della letteratura circa la modellizzazione di problemi di natura reale, concentrandosi sul modello di Uhden et al. (2012), e l'analisi delle strategie di risoluzione di problemi di fisica degli studenti, con particolare attenzione agli epistemic games. Le domande di ricerca e la metodologia sono illustrati nel secondo capitolo. Viene inoltre descritta più nel dettaglio la progettazione delle lezioni del corso estivo, contesto della presente tesi. Nel terzo capitolo vengono analizzati i dati raccolti dalle interviste pre/post e presentati due casi studio. Infine nella conclusione si cercherà di sintetizzare i risultati raggiunti rispondendo alle domande di ricerca.

Ci si augura che i risultati di questa tesi possano essere di interesse per stimolare una riflessione sull'insegnamento sia della matematica in quanto tale sia in relazione al suo ruolo nelle altre discipline scientifiche.

1 Inquadramento teorico

1.1 La relazione tra matematica e fisica

Il rapporto tra matematica e fisica è molto profondo e complesso. Se da un lato è possibile pensare alla nascita delle due discipline in modo distinto, è certo che sia storicamente, sia nella realtà odierna esse siano strettamente interconnesse. La fertilità di questo legame è a doppio senso e può essere ritrovata in numerosi aspetti. Per esempio, storicamente l'origine di molti concetti matematici fu motivata dallo studio di fenomeni fisici; per citare due casi celebri, l'analisi di Fourier fu sviluppata a partire dallo studio della propagazione del calore e la teoria della distribuzione prese forma dagli studi di Dirac sulle cariche puntiformi. Viceversa, è oggi impossibile pensare a una teoria fisica senza la sua formulazione matematica, che ne permette la strutturazione e le conferisce carattere esplicativo e predittivo. Si pensi per esempio al concetto di spazio-tempo curvo derivato dalle varietà Riemanniane, o agli spazi di Hilbert usati nella meccanica quantistica. Ancora, vi sono concetti in cui i contributi di matematica e fisica non possono essere separati, come quello di derivata, utilizzato per descrivere la velocità e l'accelerazione (Pospiech, 2019).

Gingras (2001) delinea tre effetti principali dell'introduzione della matematica come aspetto strutturale della fisica:

- sociale: la creazione di una scienza in cui è possibile partecipare solo con adeguate conoscenze matematiche;
- epistemologico: trasformò il significato del termine "spiegazione" rispetto al modo in cui veniva usato dai filosofi nel XVII secolo, rendendo necessaria per la spiegazione di un fenomeno la sua formulazione matematica;
- ontologico: portò alla scomparsa delle "sostanze" come i vortici cartesiani, l'etere luminifero o la caloria. Il modello simbolico della rappresentazione rese questi concetti obsoleti.

In particolare, l'effetto epistemologico è ciò che nella pratica ha contribuito a formare il modo in cui oggi pensiamo alla fisica.

Sarebbe pertanto riduttivo pensare al ruolo della matematica nella fisica come meramente tecnico. Nel discutere questo importante punto, Uhden et al. (2012) individuano tre aspetti principali riguardo al ruolo che la matematica assume in fisica: tecnico (un pratico strumento di calcolo), comunicativo (un linguaggio, con una propria semantica e una capacità rappresentativa), ma anche e soprattutto strutturale. Quest'ultimo è legato alla definizione e all'interpretazione di concetti, relazioni e problemi e a un modo di ragionare che guida il metodo ipotetico-deduttivo, in grado di indurre predizioni.

1.2 La matematica nell'insegnamento della fisica

Nonostante lo stretto e ricco rapporto tra matematica e fisica delineato nel paragrafo precedente, spesso nella fisica scolastica il ruolo della matematica è visto in maniera più ristretta e riduttiva, ad esempio come un mero strumento per risolvere gli esercizi di fine capitolo, oppure, viceversa, la fisica è presentata come una collezione di "formule" matematiche di cui si perde l'interpretazione fisica. Tali approcci sembrano erroneamente suggerire che la matematica ostacoli la comprensione concettuale della fisica, piuttosto che favorirla come invece avviene nell'effettiva costruzione della conoscenza fisica. Questa visione riduttiva del rapporto tra matematica e fisica porta ad alcune difficoltà, da parte degli studenti, nel conciliare le conoscenze e abilità matematiche con quelle fisiche. Il tema è molto studiato in letteratura, non solo a livello di scuola superiore ma anche a livello universitario. In particolare, è ben noto che la competenza matematica non garantisce il successo in fisica (Hudson & McIntire, 1977). È necessaria quindi una riflessione specifica sul ruolo della matematica nella didattica della fisica.

Tra le possibili cause specifiche della difficoltà a integrare efficacemente matematica e fisica, una è stata proposta da Redish (2006): egli afferma che l'uso della matematica in fisica è "semanticamente diverso" dalla semplice matematica. Sulla stessa linea, Karam, Uhden and Höttecke (2019) parlano di "*math as prerequisite illusion*", affermando che, nonostante la stretta interconnessione tra matematica e fisica, le due discipline non sono manifestazioni diverse della stessa attività e che è necessario riconoscerne le differenze. Ne riportiamo alcune (Redish, 2021):

- La matematica in matematica tende ad usare i simboli sempre con lo stesso significato: "x" e "y" per le variabili, "f" è una funzione mentre "a" e "b" sono parametri. Invece, se si apre un qualsiasi testo di fisica è facile trovare equazioni con molti simboli all'interno, anche più di 6. Oltre a ciò, lo stesso simbolo in fisica può avere diversi significati: per esempio Q solitamente identifica il calore, ma anche una carica elettrica.

- In matematica è indifferente come chiamiamo una variabile, mentre in fisica spesso i simboli sono legati al significato (si pensi ad esempio al simbolo t per il tempo oppure a m per la massa). Questo significato influisce su come interpretiamo le equazioni e gli altri oggetti matematici che contengono tali simboli.
- In fisica alcuni termini assumono più sfumature di significato, si pensi al termine "costante": vi sono costanti universali, parametri, quantità che rimangono costanti in seguito a leggi di conservazione, etc.

A partire da queste considerazioni, Bing & Redish (2007) affermano che una delle competenze che testimonia il progresso di uno studente in fisica è proprio l'abilità nel combinare i simboli e le strutture matematiche con la comprensione e l'intuizione del mondo fisico. Per utilizzare efficacemente la matematica in fisica, non è pertanto sufficiente avere conoscenze matematiche e fisiche separatamente: è necessario "mescolare" ("*blend*") tali conoscenze in un nuovo "spazio" cognitivo (Redish, 2021). Tale mescolamento cambia drasticamente il modo con cui diamo significato alla matematica che usiamo. Per esempio, scrivendo la seconda legge della dinamica $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$ non intendiamo $\vec{a}$ come una variabile qualsiasi, ma come l'accelerazione a cui un certo corpo di massa m è soggetto. Il modo in cui pensiamo e usiamo l'equazione è cambiato dal nostro combinare la comprensione fisica di cosa sia il vettore accelerazione $\vec{a}$ con la conoscenza di come gli elementi matematici si comportano.

Lo studio della relazione tra matematica e fisica implica anche un'attenzione alle diverse "rappresentazioni" con cui si può descrivere un fenomeno o una situazione fisica (es. vari linguaggi formali tra cui le equazioni, linguaggio verbale, grafici, altri tipi di diagrammi). Un esempio di diverse rappresentazioni della stessa situazione è rappresentato in Figura 1:

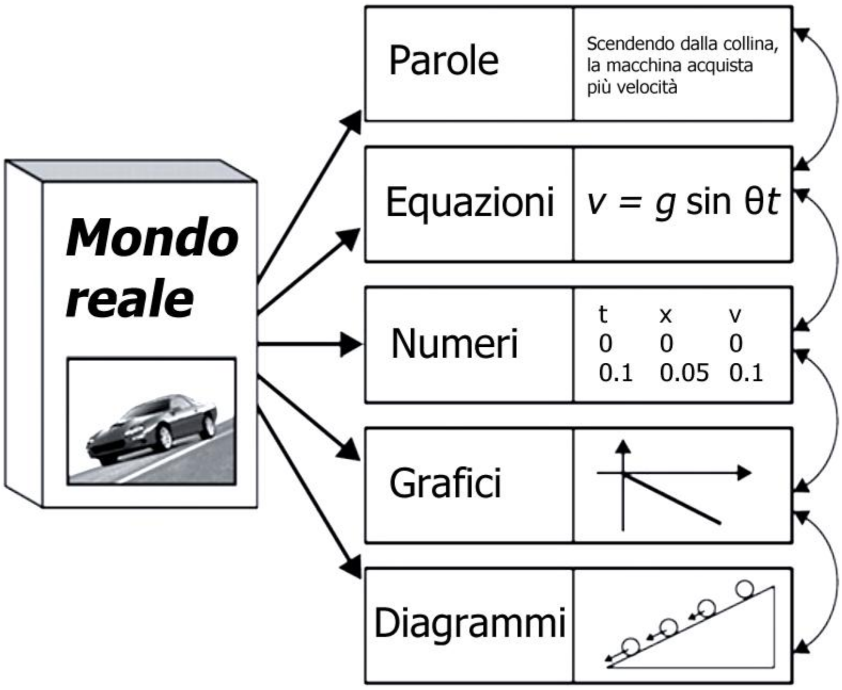


Figura 1: Diverse rappresentazioni di una macchina che scende da una collina (Redish 2002, in Hill et al. 2015)

La letteratura in didattica della fisica suggerisce che la capacità di utilizzare diverse rappresentazioni e di passare agevolmente dall'una all'altra ("*representational fluency*") sia uno degli elementi fondamentali della competenza in fisica (Hill et al., 2015). È quindi importante che l'insegnante aiuti gli studenti a sviluppare la representational fluency con opportune attività ed esercizi.

Per studiare le differenze tra come gli studenti approcciano i problemi in contesto matematico e fisico, molti autori hanno sviluppato test e strumenti specifici. Una delle strategie più diffuse è proporre degli esercizi "isomorfi" (si veda ad es. Nguyen & Rebello, 2011; Ivanjek et al., 2016; Ceuppens et al., 2019), cioè con lo stesso contenuto matematico e presentati in formato analogo, ma nel caso della fisica contestualizzato in un argomento di fisica. Questa strategia sarà seguita anche in questo lavoro di tesi.

1.3 Il modello di Uhden et al. per l'uso della matematica nella didattica della fisica

Per descrivere la relazione tra matematica e fisica in chiave educativa, è stata riconosciuta in letteratura la necessità di modelli che non solo la descrivano, ma che forniscano anche una prospettiva utile dal punto di vista didattico. In letteratura ne esistono di diversi, più o meno elaborati: in Figura 2 è mostrato uno schema base. Un elemento comune ai vari modelli è il doppio verso dei processi, ovvero da un lato la partenza da una situazione fisica che viene portata in matematica (la "matematizzazione" in senso stretto), e dall'altro il viceversa, cioè l'interpretazione o la "validazione" dei risultati.

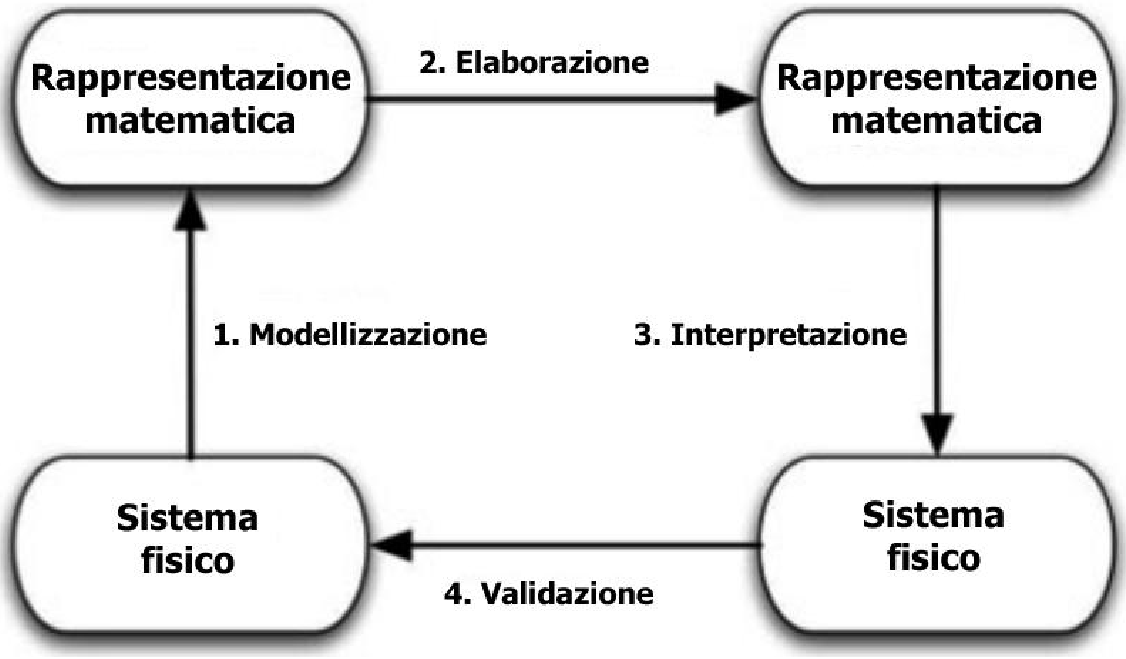


Figura 2: Ciclo di modellizzazione nel dominio fisico (Redish & Bing, 2009)

In questo paragrafo verrà illustrato uno di questi modelli, proposto da Uhden et al. (2012). Gli autori estendono i precedenti cicli di modellizzazione noti in letteratura (per esempio, Borromeo Ferri, 2006; Redish & Bing, 2009, Figura 2), ponendo particolare attenzione al ruolo della matematica nella fisica. Questo modello è stata usato per la costruzione ed esposizione delle lezioni del contesto di questa tesi, descritto nei capitoli successivi.

Il modello di Uhden et al. vuole evidenziare l'intreccio esistente tra aspetto qualitativo (fisico) e quantitativo (matematico) nella didattica della fisica. Allo stesso tempo permette di distinguere i due aspetti sopra discussi del ruolo della matematica in fisica, quello "tecnico" e quello "strutturale", dove per uso tecnico si intende quello strettamente algoritmico, mentre per strutturale quello più concettuale, legato al modo di ragionare, di mettere in relazione grandezze e di interpretare la realtà che ci circonda. Grazie a questa distinzione è possibile comprendere meglio come, dal punto di vista didattico, sia possibile lavorare sullo sviluppo delle abilità matematiche *strutturali*, che partecipano attivamente alla comprensione della fisica.

Rispetto ad altri diagrammi di modellizzazione presenti in letteratura, per esempio il ciclo di modellizzazione di Blum & Leiß (2005) o il ciclo di modellizzazione sulla fisica di Redish & Bing (2009), il modello di Uhden et al. (Figura 3) presenta due caratteristiche che lo rendono particolarmente interessante per una prospettiva di progettazione didattica. La prima è il non aver separato in due categorie distinte la parte qualitativamente fisica e quella di matematizzazione, in risonanza con la letteratura sul *blending* precedentemente discussa. La seconda riguarda il permettere di distinguere diversi "livelli di matematizzazione", suggerendo una più ampia gamma di sfumature nel blending e, da un punto di vista didattico, aiutando a costruire la comprensione matematica di un fenomeno fisico in modo graduale, aumentando poco a poco il livello di matematizzazione e passando tra differenti livelli ogni qualvolta ciò aiuti la comprensione.

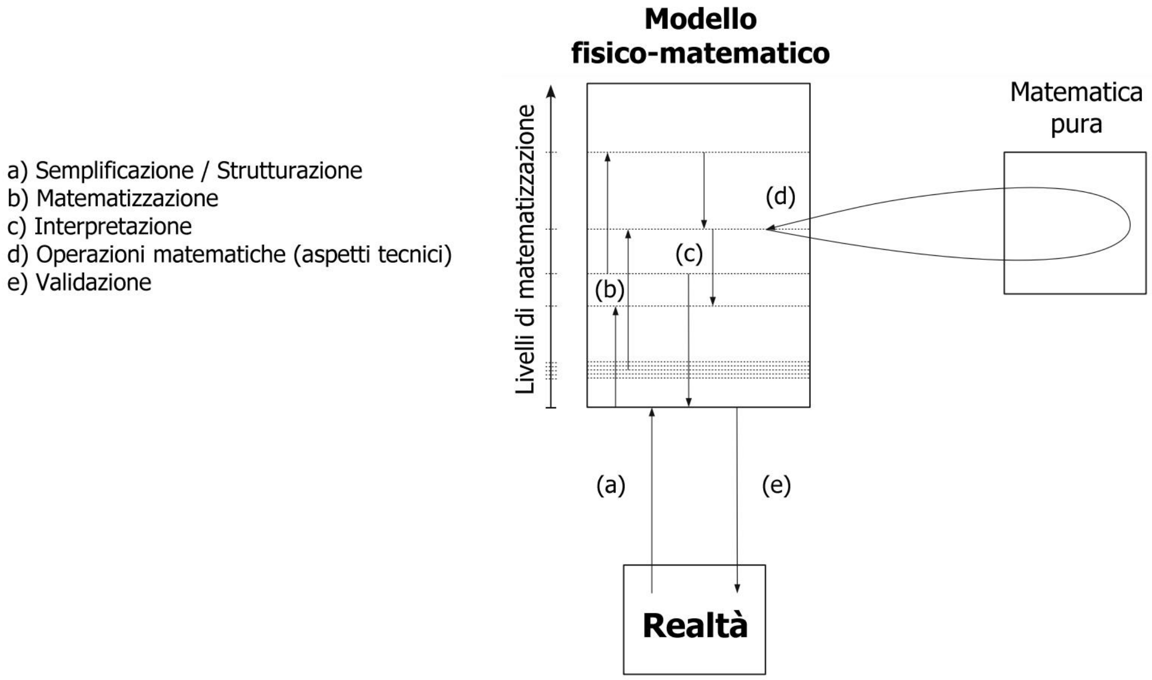


Figura 3: Ciclo di modellizzazione per la fisica di Uhden et al. (2012)

Descriviamo quindi il modello di Uhden et al. con l'aiuto della Figura 3. Le frecce dal basso verso l'alto (a e b) rappresentano la matematizzazione, mentre quelle dall'alto verso il basso (c ed e) l'interpretazione fisica delle espressioni matematiche, ossia l'abilità di descrivere il significato di equazioni a parole e con schemi e di predire fenomeni fisici direttamente da tale formalismo. In particolare, (a) descrive la prima idealizzazione di una situazione fisica dal mondo reale (ad es. uso del modello di punto materiale) e porta a un livello di matematizzazione "minimo" ("*ground state*" della matematizzazione) ma comunque non separato dalla struttura fisico-matematica, proprio come previsto dalle motivazioni epistemologiche che hanno portato alla costruzione di questo modello. Viceversa, la freccia (e) rappresenta la validazione del modello fisico-matematico elaborato, nella quale si verifica che i risultati ottenuti siano coerenti con la realtà. Le frecce (b) e (c) rappresentano il passaggio tra livelli via via più complessi di matematizzazione (ad esempio per una maggiore astrazione o per l'uso di strumenti matematici più sofisticati). La freccia (d) descrive invece l'aspetto tecnico della matematica, dalle regole algebriche all'uso di teoremi o proprietà aritmetiche. In questo passaggio non c'è nessun significato fisico e la freccia torna nel punto esatto del modello da dove era partita.

Come si può notare dal diagramma, ogni freccia può avere diverse lunghezze in base al "salto" nel livello di matematizzazione che essa rappresenta e può partire da diverse altezze, cioè da differenti gradi di astrazione matematica. Oltre a ciò, proprio come la modellizzazione di una certa situazione fisica non prevede necessariamente prima l'intera matematizzazione e poi la relativa interpretazione, la rappresentazione diagrammatica può prevedere diversi passaggi, in un verso o nell'altro, in un percorso misto simile a quello che può avvenire durante l'esposizione di una lezione o nella risoluzione di un problema. Differenti percorsi nel modello descrivono diversi approcci didattici o del ragionamento da parte dello studente. Questa rappresentazione può aiutare nella localizzazione di possibili fragilità e suggerire approcci più adeguati.

1.3.1 Un esempio di applicazione

Per dare concretezza al modello di Uhden et al., mostriamo con un esempio come sia possibile studiare la stessa situazione fisica con due approcci diversi. Si consideri il classico problema del corpo in caduta libera, cioè del moto di un oggetto lasciato cadere da fermo da una certa altezza sotto l'effetto della forza di gravità. Il corpo è quindi soggetto all'accelerazione di gravità $\vec{g}$ di modulo $g = 10\, m/s^2$. L'obiettivo è determinare la legge oraria del corpo, cioè la sua posizione in funzione del tempo $s = s(t)$.

Per prima cosa è bene sottolineare come il problema sia già in qualche modo semplificato, poiché sono state messe in atto alcune semplificazioni e modellizzazioni: ad esempio, è stata trascurata la resistenza dell'aria e l'oggetto è trattato secondo il modello di punto materiale, cioè le sue dimensioni effettive sono trascurate. Inoltre, notiamo che il problema possiede già un certo grado di matematizzazione, dato che tempo e spazio sono rappresentati da numeri reali. La rappresentazione del processo di risoluzione all'interno del modello non partirà quindi da un livello zero (la realtà fisica), ma da un grado già matematizzato.
Per affrontare il problema sono possibili diverse strade. La prima che presentiamo è quella più consigliabile da un punto di vista didattico, in cui si aumenta il grado di matematizzazione progressivamente (Figura 4a). Ad esempio, si può iniziare sottolineando che la soluzione del problema sarà una relazione non lineare: al passare del tempo, la velocità del corpo aumenta sempre di più e quindi in intervalli di tempo uguali verranno coperte distanze via via maggiori. Riconoscere la non-linearità, proprietà base del moto accelerato, significa muoversi nella direzione della matematizzazione, anche se a questo livello non abbiamo ancora studiato il caso particolare di accelerazione costante.

Per studiare e comprendere il significato di "accelerazione costante" è necessario riconoscere che in questo caso l'*incremento di velocità nell'unità di tempo* è costante e, nel caso della caduta libera, pari a circa $10\ m/s$ al secondo. Si può quindi interpretare tale incremento come accelerazione, che sarà per l'appunto costante, e avrà unità di misura m/s^2. Questo passaggio si può fare, ad esempio, con un esperimento in laboratorio o una simulazione virtuale.

Un ulteriore passaggio è esprimere l'incremento costante della velocità usando diverse rappresentazioni, come ad esempio una tabella con i valori di v ad un dato tempo t, il rispettivo grafico, e l'equazione $v = g \cdot t$ che da esso può essere dedotta.

Il passaggio successivo è quello che permette di giungere alla relazione cercata: interpretare l'area sottostante il grafico come lo spostamento $s(t)$ del corpo nell'intervallo di tempo considerato. Per supportare la comprensione di questo passaggio, più complesso dei precedenti, è possibile partire dal grafico del moto rettilineo uniforme. In questo caso l'area cercata è quella di un rettangolo di lati v e t e, dato che il prodotto della velocità per il tempo è uguale allo spostamento $s(t)$, è abbastanza comprensibile interpretarla come lo spostamento del corpo durante quel dato intervallo di tempo. Il passo compiuto è quindi nella direzione dell'interpretazione, dato che un ente matematico (l'area del rettangolo) viene relazionato a un concetto fisico (lo spostamento).

Nel caso più generale dove la velocità sia una qualsiasi funzione del tempo, comprendere che l'area sottostante il grafico (*v vs. t*) è uguale allo spostamento $s(t)$ del corpo richiede di aver compreso il concetto di velocità come derivata della posizione rispetto al tempo, una connessione che gli studenti potrebbero non avere. Tuttavia, nel caso di moto uniformemente accelerato, è possibile accompagnare l'inferenza per analogia e plausibilità rispetto al caso di moto uniforme. Questo passaggio rappresenta un ulteriore "salto" a un livello più alto di matematizzazione.

Infine, dalla formula $v = g \cdot t$, dal relativo grafico e dall'interpretazione dell'area precedentemente discussa, è possibile derivare algebricamente l'espressione:

$$s(t) = \frac{1}{2} v \cdot t = \frac{1}{2} (g \cdot t) \cdot t$$

$$\Rightarrow s(t) = \frac{1}{2} g \cdot t^2$$

raggiungendo il livello di matematizzazione desiderato. Questa equazione, ora, può essere usata per risolvere i problemi e ottenere quindi risultati che devono essere confrontati con la realtà per valutarne la plausibilità (validazione: frecce verso il basso, dalla matematizzazione alla realtà).

Confrontiamo questo approccio con uno più astratto (Figura 4b). Tale soluzione è quella che utilizzerebbe un esperto di fisica: è più sintetica ed elegante, ma richiede abilità e competenze di calcolo consolidate. Da un punto di vista didattico, quindi, potrebbe non essere la via più efficace per studenti che stanno ancora consolidando le abilità matematiche, fisiche e di blending. Questa volta il ragionamento invoca la relazione tra accelerazione e posizione come derivata seconda rispetto al tempo, cioè

$$a(t) = \frac{d^2 s}{dt^2}$$

Dato che l'accelerazione è quella di gravità, avremo un'equazione differenziale lineare del secondo ordine da risolvere. Nel farlo, le due costanti di integrazione dovranno essere ottenute imponendo le condizioni al contorno e cioè, in questo caso, il fatto che la velocità iniziale e la posizione iniziale siano entrambe nulle. Si trova quindi subito la legge oraria:

$$s(t) = s_0 + v_0 \cdot t + \frac{1}{2} g \cdot t^2$$

$$\Rightarrow s(t) = \frac{1}{2} g \cdot t^2$$

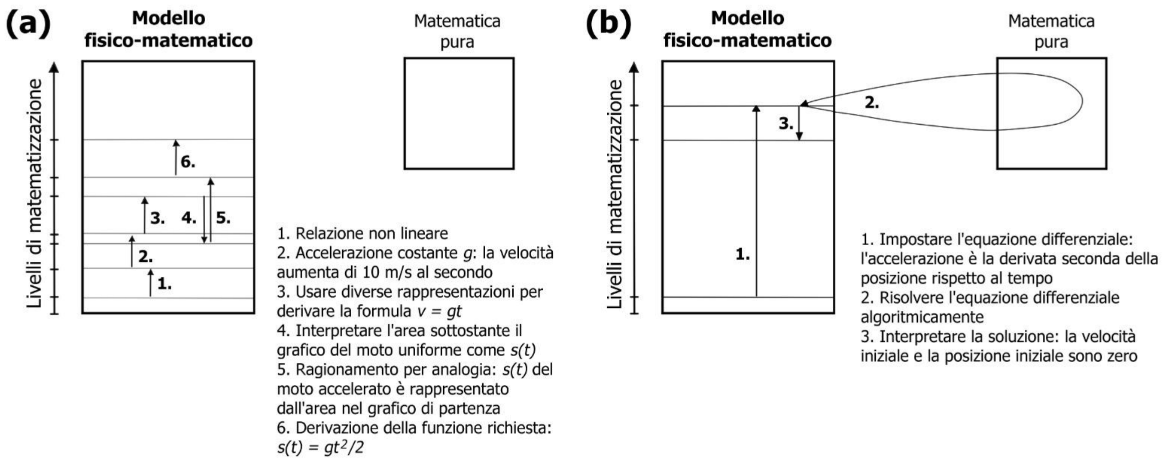


Figura 4: Confronto tra l'approccio didattico (a) e quello con ragionamento astratto (b) nel diagramma del modello di Uhden et al.

È interessante soffermarsi sul confronto tra i diagrammi dei due approcci. È rilevante notare come nel primo caso siano presenti più frecce di diverse lunghezze e non ci siano frecce verso la "matematica pura". Ciò significa che nell'approccio sono presenti più processi di matematizzazione/interpretazione con diversi gradi e che gli elementi matematici usati siano stati sempre strettamente connessi ai corrispettivi concetti fisici. Nel secondo, invece, è presente una freccia molto lunga nella direzione della matematizzazione, che rappresenta l'uso diretto di un concetto ad alto contenuto di matematizzazione (accelerazione come derivata seconda della posizione rispetto al tempo). La risoluzione dell'equazione differenziale è una procedura esclusivamente matematica, che può procedere senza interconnessi significati fisici, ed è per questo che nel diagramma è rappresentata una freccia che passa nella "matematica pura".

È chiaro come, nei due percorsi proposti, la matematica venga usata in modi diversi e diverse saranno quindi le implicazioni dal punto di vista dell'insegnamento e dell'apprendimento. Nell'approccio "didattico" c'è una graduale matematizzazione seguita dall'interpretazione, che permette di rimanere a contatto con il contesto fisico. Il secondo approccio è più astratto, ma permette di risolvere problemi in maniera molto più generale. Tuttavia, anche se più potente, ricavare la relazione può essere troppo tecnico se non si è ben compresa la relazione tra accelerazione e posizione.

Il modello di Uhden et al. presenta quindi interessanti potenzialità dal punto di vista didattico, dalla pianificazione di una lezione alla valutazione del ragionamento da parte di uno studente. La sua funzione principale, però, rimane quella di permettere un ripensamento efficace della matematica usata in fisica, concentrandosi sul suo aspetto strutturale.

1.4 Il modello cognitivo dei giochi epistemici

Affinché i modelli di relazione tra matematica e fisica possano essere utilizzati efficacemente nella didattica, è necessario avere anche una chiave di lettura circa il modo in cui gli studenti affrontano i problemi di fisica. La letteratura sul problem solving è ampia, perciò qui ci concentreremo su un modello cognitivo specifico per la fisica sviluppato da Tuminaro & Redish (2007), ovvero quello dei "giochi epistemici" (*epistemic games*). Tale modello sarà quello utilizzato in questa tesi per interpretare il ragionamento degli studenti.

I giochi epistemici furono introdotti originariamente da Collins & Ferguson (1993) nell'ambito dello studio della ricerca scientifica. Essi hanno definito un gioco epistemico come un complesso "insieme di regole e strategie che guidano una ricerca".

Tuminaro & Redish (2007) riprendono il concetto di gioco epistemico, ma ne danno una nuova definizione, già orientata all'applicazione specifica nella risoluzione di problemi di fisica: per gli autori un gioco epistemico è "un'attività coerente che usa particolari tipi di conoscenze e processi associati a queste conoscenze per creare conoscenza o risolvere problemi".

In queste attività gli studenti creano effettivamente nuova conoscenza e da qui l'uso del termine "epistemico". La parola "gioco" viene usata in un senso generale ma concreto: come altri veri e propri "giochi" sono infatti presenti delle componenti ontologiche (giocatori, pezzi e tavolo di gioco diventano concetti, principi ed equazioni) e una struttura (regole e mosse consentite) che differenziano un particolare "gioco" da altri.

Le componenti *ontologiche* dei giochi epistemici sono due: una "base di conoscenza" e una "forma epistemica". La *base di conoscenza* è l'insieme delle "risorse cognitive" da cui uno studente attinge per affrontare il problema: le sue conoscenze di fisica e matematica, ma anche le sue intuizioni o idee spontanee. La *forma epistemica* del gioco scelto è invece la sua rappresentazione esterna, per esempio uno schema realizzato dallo studente o le equazioni che scrive nella soluzione. Forma epistemica e base di conoscenza non sono indipendenti, anzi spesso la forma epistemica scelta guida l'attivazione di particolari risorse mentre inibisce l'attivazione di altre.

Le componenti *strutturali* dei giochi epistemici includono invece le condizioni di inizio/fine del gioco e le "mosse". Nella risoluzione dei problemi di fisica, le condizioni di inizio e fine di un gioco sono spesso determinate da ciò che uno studente si aspetta dal compito proposto; in particolare, dai suoi preconcetti sul come si risolve un esercizio e dalla categorizzazione che fa delle situazioni fisiche. Per esempio, se uno studente pensa che la risoluzione di un esercizio debba prevedere l'uso di formule e una soluzione numerica finale, sceglierà probabilmente un gioco epistemico che coinvolge fin da subito l'uso di equazioni. Le mosse di un gioco epistemico sono gli step che descrivono il gioco stesso, ovvero le procedure cognitive messe in atto da uno studente.

Specifichiamo ancora che questi giochi non sono, di norma, attività svolte consapevolmente dagli studenti: questa struttura teorica è infatti semplicemente un modo per analizzare il loro comportamento durante la risoluzione di problemi di natura fisica.

Tuminaro & Redish individuano 6 giochi epistemici, esplicitando che questi non hanno la pretesa di rappresentare la totalità dei processi che uno studente potrebbe attivare, ma riconoscendo che essi ben descrivono i comportamenti rilevati nel loro studio. Essi sono: *Mapping Meaning to Mathematics*, *Mapping Mathematics to Meaning*, *Physical Mechanism Game*, *Pictorial Analysis*, *Recursive Plug-and-Chug* e *Transliteration to Mathematics*. Analizziamo i giochi nello specifico.

1. *Mapping Meaning to Mathematics*: si tratta del gioco epistemico più complesso; lo studente inizia dalla comprensione concettuale della situazione fisica descritta in un problema e poi procede per trovare una soluzione quantitativa. Si tratta di un gioco che richiama il processo di matematizzazione descritto nei paragrafi precedenti. Le mosse di questo gioco sono: (i) creare un racconto sulla situazione fisica, (ii) tradurre le quantità del racconto in entità matematica, (iii) relazionare le entità matematiche in accordo con il racconto fisico ("interpretazione"), (iv) manipolare i simboli, (v) valutare e interpretare il racconto. Ognuna di queste mosse attiva risorse differenti: non solo conoscenze di fisica, ma anche elementi "primitivi" del ragionamento, conoscenze intuitive e "forme simboliche", ovvero il significato dato quasi in automatico alla forma di particolari relazioni matematiche. La forma epistemica per questo gioco è generalmente l'insieme delle espressioni che uno studente scrive.

2. *Mapping Mathematics to Meaning*: questo gioco è simile al primo per quanto riguarda la conoscenza di base attivata, ma procede al contrario: lo studente parte da una data equazione fisica-matematica e le dà significato. Le mosse sono: (i) identificare i concetti richiesti, (ii) trovare un'equazione che relaziona i concetti richiesti con altri concetti, (iii) raccontare una storia usando questa relazione tra i concetti, (iv) valutare la storia.

3. *Physical Mechanism Game*: in questo gioco epistemico lo studente descrive la situazione fisica rimanendo a un livello concettuale e descrittivo. La base di conoscenza attivata non include il riferimento esplicito a leggi fisiche quantitative. La forma epistemica qui è diversa dai due giochi precedenti ed è il racconto a parole.

4. *Pictorial Analysis*: uno studente si trova in questo gioco ogni qualvolta realizza una rappresentazione o schema della situazione fisica. La base di conoscenza utilizzata include tutte le risorse elencate finora, più le abilità rappresentative. La forma epistemica è ciò che distingue chiaramente questo gioco dagli altri, appunto il

diagramma rappresentato. Le mosse sono: (i) identificare i concetti richiesti, (ii) scegliere una rappresentazione esterna, (iii) spiegare con un esempio la situazione fisica, (iv) etichettare gli oggetti della rappresentazione.

5. *Recursive Plug-and-Chug*: lo studente inserisce quantità in un'equazione fisica (eventualmente in modo ricorsivo se è necessaria una catena di passaggi) e ricava risposte numeriche, senza però riflettere sul significato fisico dei passaggi svolti. Questo è ciò che accade quando uno studente "cerca un'equazione" che contenga le quantità "giuste" date dal problema e richieste come incognite, senza fermarsi a interpretare il significato fisico. Se nell'equazione identificata l'incognita è solo una, egli procederà direttamente a calcolare la soluzione numerica, altrimenti cercherà una nuova equazione che relazioni una delle incognite, in modo da calcolarla e inserirla nell'equazione di partenza. In questo gioco sono particolarmente interessanti le risorse che non sono attivate, piuttosto che quelle attivate: egli infatti fa affidamento solo sulle sue abilità di calcolo simbolico senza comprensione delle quantità fisiche o della situazione in esame;

6. *Transliteration to Mathematics*: lo studente ricalca esempi già visti e risolti per elaborare la soluzione, senza però aver davvero compreso concettualmente l'esempio scelto. Le mosse sono: (i) riconoscere le quantità richieste, (ii) trovare una soluzione che ben rispecchia il problema dato, (iii) inserire le quantità, (iv) valutare la soluzione.

È importante sottolineare che uno studente, nel corso della soluzione di un problema, potrebbe passare da un gioco all'altro. Ad esempio realizzando prima una rappresentazione della situazione, facendo alcune considerazioni concettuali, e poi procedendo a scrivere delle equazioni. In realtà, come nel modello di Uhden et al., sono possibili diversi passaggi e interconnessioni, tuttavia l'individuazione dei giochi aiuta a distinguere le fasi del ragionamento e a comprendere meglio non solo come sta procedendo lo studente, ma anche cosa lo aiuta e cosa invece lo vincola.
L'analisi del comportamento degli studenti tramite questi giochi ha infatti permesso agli autori di evidenziare che gli studenti spesso si approcciano ai problemi con aspettative vincolate. Se uno studente rimane "imbrigliato" ("*stuck*") in un gioco poco produttivo (es. il *Plug-and-Chug*), questo limita le risorse che egli può usare in un determinato compito. Se questo è un limite quando la soluzione di un problema richiede un approccio cognitivamente più complesso, è d'altra parte normale che in date situazioni si attivino giochi epistemici

meno sofisticati, che in quella situazione sono ugualmente efficaci. È infatti naturale che non si possa usufruire di tutta la nostra conoscenza nello stesso momento, ma ci si debba limitare ad un particolare sottoinsieme di strumenti.

Un'implicazione per l'insegnamento che emerge dallo studio è l'attenzione che dovremmo avere come insegnanti a non limitare gli approcci dei nostri studenti alla risoluzione dei problemi, cosa che talvolta si fa inconsapevolmente, ad esempio quando si sottolineano molto le "equazioni" che servono per risolvere un problema (magari enfatizzando l'uso dei formulari). Se un solutore esperto qual è un insegnante sa bene che le equazioni sono solo una risorsa e non la soluzione, ciò non è chiaro allo studente che potrebbe concentrare la sua attenzione solo sul trovare "la formula giusta" (gioco *Plug-and-Chug*). Analogamente, è importante essere consci dei processi cognitivi sopra descritti per interpretare in modo più profondo il ragionamento prodotto dagli studenti, invece che valutare solo la forma epistemica: ad esempio, la forma epistemica elaborata in un "gioco" di *Transliteration to Mathematics* potrebbe essere identica a quella di *Mapping Mathematics to Meaning*, ed è necessaria un'indagine più profonda per capire se lo studente ha davvero compreso ciò che ha scritto. Queste considerazioni ci suggeriscono che dobbiamo essere molto attenti a come educhiamo alla risoluzione di problemi. Infatti, potremmo abituare involontariamente gli studenti a seguire un determinato gioco epistemico, senza un'analisi critica di quando quel gioco sia appropriato e di quando non lo sia. Queste indicazioni più o meno esplicite potrebbero aiutare i ragazzi nel breve termine, facendo prendere un buon voto in un particolare test, ma avrebbero conseguenze negative nella loro formazione complessiva.

1.5 Moduli di apprendimento online

Come descritto nel capitolo successivo, in questo elaborato si sono studiati gli effetti di un corso estivo online, composto da otto lezioni sincrone. Per questo, concludiamo questo capitolo analizzando più nel dettaglio le caratteristiche dei moduli di apprendimento online.

Negli ultimi anni l'utilizzo di risorse online nella didattica è aumentato drasticamente. I motivi sono molteplici, tra cui: gli studenti sono ormai nativi digitali e usufruiscono con piacere di contenuti informatici; il naturale ricambio generazionale della classe insegnante, formata in e con nuove tecniche di educazione; la pandemia di COVID-19 ha obbligato le istituzioni scolastiche a ripensare la didattica, rendendo necessaria l'implementazione di lezioni da remoto per lunghi periodi di tempo sia per singoli studenti sia per intere classi. Chiaramente l'utilizzo di una didattica in remoto non porta solo vantaggi. Alcune delle difficoltà che possono nascere sono infatti: in caso di asincronia manca il feedback immediato degli studenti, motore di una lezione; la creazione di un buon contenuto digitale richiede molto tempo; non tutte le persone hanno a disposizione le infrastrutture tecniche per usufruire delle risorse online agevolmente.

Nella letteratura sono presenti varie modalità di didattica online, dalla consegna di esercizi *una tantum* a interi corsi da remoto, da lezioni sincrone a risorse somministrate prima dell'orario di insegnamento per aumentarne l'efficacia ("*flipped lesson*").

Nello specifico di questo lavoro di tesi, per la costruzione delle lezioni si è tenuto conto di alcune linee guida note in letteratura. Cobb et al. (2018) hanno indagato le procedure migliori per la creazione di moduli di apprendimento online efficaci. Il loro studio si riferisce ad una modalità asincrona, ma ben si adegua anche al resto della didattica in remoto. La loro ricerca è sintetizzata in sei suggerimenti di carattere generale:

1. *usare una formattazione del contenuto visivamente funzionale e regolare*. L'estetica non è assolutamente secondaria, anzi, è uno degli strumenti più potenti. È opportuno, ad esempio, indicare elementi dall'alto contenuto di informazioni con un carattere grassetto e differenziare la dimensione e il colore delle parole. Il risultato dev'essere pulito e facile da seguire, per non aumentare il carico cognitivo;

2. *fare riferimento esplicitamente ai contenuti presenti nei libri in adozione.* In questo modo lo studente non è disorientato e meglio può comprendere lo scopo dell'attività proposta;

3. *organizzare lezioni coerenti l'una con le altre.* Seguire un filo logico è fondamentale ed è buona norma includere gli obiettivi d'apprendimento all'inizio di ogni attività;

4. *riassumere gli elementi più importanti.* Gli studenti riescono così a concentrare la propria attenzione su un determinato concetto. Inoltre, finire la lezione sintetizzando i punti cruciali può servire anche come auto-analisi;

5. *costruire un canale di feedback.* È decisivo non perdere la risposta dello studente, quindi è bene prevedere una modalità di feedback. In caso di asincronia possono essere delle domande o degli esercizi da svolgere, mentre durante lezioni sincrone

oralmente o con gli strumenti della piattaforma usata, come richieste di chiarimento scritte sulla chat;

6. *scegliere attentamente i contenuti digitali e semplificarne la lunghezza.* Elementi come il testo, le immagini, gli audio e i video dell'attività proposta devono essere parte integrante della lezione e non un abbellimento, in quanto l'uso di elementi decorativi privi di contenuto didattico aumenta il carico cognitivo senza aumentare l'efficacia della lezione.

Indubbiamente, imparare a costruire delle attività online aumenta notevolmente gli strumenti in possesso al docente. Anche con unità mirate e di breve durata, egli vedrà il suo lavoro in aula potenziato e avrà la possibilità di spostare ed equilibrare il carico concettuale da parte degli studenti, ampliando la flessibilità delle lezioni.
Anche nell'ambito della didattica della Fisica esistono studi che hanno riscontrato come lezioni online opportunamente progettate possano essere efficaci per l'apprendimento. Per esempio, Hill et al. (2015) mostrano come risorse digitali costruite attentamente possano fare la differenza nella comprensione concettuale degli studenti e nella loro *representational fluency*. Come ulteriore effetto, si è notato un aumento della consapevolezza nei loro processi di apprendimento.

2 La ricerca

2.1 Scopo e domande di ricerca

La presente tesi è stata sviluppata all'interno del progetto "*Investigating the impact of Virtual School experiences on teaching and learning*", condotto congiuntamente dall'Università di Padova e dalla Monash University in Australia.
Tale progetto prevede il coinvolgimento di studenti universitari interessati all'insegnamento e di insegnanti a inizio carriera nella co-progettazione e realizzazione di lezioni di fisica online per studenti di scuola secondaria di secondo grado, erogate in aggiunta a quelle curricolari con finalità di recupero e/o potenziamento. Sono stati sviluppati in particolare due percorsi, entrambi per le classi prime, uno al Liceo Scientifico e uno in un Istituto Tecnico Informatico. Il percorso a cui si fa riferimento in questa tesi è quello del Liceo Scientifico.

Le lezioni sono state pensate a partire dalle difficoltà dei ragazzi rilevate dai loro insegnanti, coinvolti come tutor nel progetto. Tra queste, sono emerse quelle legate all'uso della matematica, nel caso specifico all'interno del tema fisico dei fenomeni termici, oggetto della Virtual School per le classi del Liceo Scientifico.
Il problema di ricerca che si è posto è stato dunque come progettare le lezioni online in modo da aiutare gli studenti nel superamento di tali difficoltà, con un'attenzione particolare al rapporto tra matematica e fisica. A questo scopo si è deciso di utilizzare il modello di Uhden et al. sopra presentato per la costruzione delle lezioni.

Le domande di ricerca sono state:
RQ 1: *Quali processi e strategie adottano gli studenti nel risolvere problemi di fisica che richiedono l'uso di strumenti matematici? Ci sono differenze tra il contesto puramente matematico e il contesto fisico?*

RQ 2: *Quali azioni può mettere in atto l'insegnante per supportare un uso consapevole e significativo della matematica nella fisica?*

2.2 Il progetto UniPD-Monash Virtual School

"UniPD-Monash Virtual School" è un progetto di ricerca che nasce dalla collaborazione tra l'Università di Padova e la Monash University. Ha avuto origine dall'esperienza della Monash Virtual School, nata nel 2020 allo scopo di offrire agli insegnanti in formazione, che a causa della pandemia non potevano completare il proprio tirocinio in presenza, un'opportunità di formazione sul campo. Nello specifico, gli insegnanti in formazione dovevano co-progettare un ciclo di lezioni di recupero di fisica o chimica per studenti dell'ultimo anno di scuola secondaria, sotto la supervisione di tutor, sia insegnanti che personale universitario. In tutto il processo erano previste diverse opportunità di riflessione e feedback. Dato il successo dell'iniziativa, la Virtual School è stata riproposta negli anni successivi anche oltre la fine dell'emergenza pandemica, con il duplice scopo di fornire un utile supporto agli studenti e di offrire una nuova opportunità formativa ai futuri insegnanti.

Nel 2022 il progetto è stato portato nel contesto italiano all'Università di Padova, focalizzandolo sulla fisica grazie alla collaborazione tra docenti e ricercatrici del Dipartimento di Filosofia, Sociologia, Pedagogia e Psicologia Applicata (FISPPA) e del gruppo di ricerca in didattica della fisica del Dipartimento di Fisica e Astronomia (DFA). Il profilo dei partecipanti è stato adattato al contesto italiano: in particolare, dal momento che non esiste attualmente in Italia un percorso formativo abilitante all'insegnamento nella scuola secondaria, i partecipanti sono stati reclutati tra studenti di Fisica, Astronomia o Matematica interessati all'insegnamento e tra gli insegnanti di Fisica nei primissimi anni di servizio. In questo modo, il percorso italiano ha costituito un'opportunità di colmare, seppur parzialmente e per un piccolo campione, una lacuna nella formazione dei futuri insegnanti offrendo un'opportunità di pratica riflessiva sotto supervisione. Nello specifico, sono stati reclutati 8 partecipanti di cui 4 prestavano già servizio a scuola (da massimo due anni), 3 erano studenti all'ultimo anno del corso di laurea magistrale in Matematica e una era dottoranda in Fisica.

Rispetto agli studenti di scuola secondaria, il progetto aveva lo scopo di rafforzare le competenze in fisica, specialmente per gli studenti più fragili. Nello specifico, il progetto ha preso la forma di un corso estivo di otto lezioni online ed è stato rivolto agli studenti di classe prima di due scuole del territorio: il Liceo Scientifico "J. Da Ponte" di Bassano del Grappa e l'Istituto Tecnico "F. Severi" di Padova. Due insegnanti esperte in servizio in queste scuole hanno svolto il ruolo di tutor. I partecipanti sono stati divisi in due sottogruppi da quattro persone, uno per ciascuna scuola, e sono stati seguiti dalle tutor nella progettazione delle lezioni. Le ricercatrici italiane e australiane hanno seguito il gruppo sia nella fase iniziale che durante la realizzazione delle lezioni, tramite feedback pre- e post-lezione e discussione sia con i partecipanti, sia con le tutor. Le attività discusse nella presente tesi sono quelle svolte per le classi prime del Liceo Scientifico "Jacopo Da Ponte".

Gli obiettivi del corso sono quindi riassumibili in:

- potenziare le competenze matematiche nell'ambito della fisica, in particolar modo quelle legate alla modellizzazione;
- potenziare l'uso di diverse forme di rappresentazione: linguaggio verbale, grafici e diagrammi, linguaggio numerico, linguaggio matematico formale;
- incoraggiare negli studenti la percezione delle proprie capacità e preparazione.

2.2.1 Il tema del corso estivo della Virtual School

Il corso estivo del gruppo relativo alla presente tesi si è tenuto dal 15 al 28 giugno 2022, con 3 lezioni le prime due settimane e 2 nell'ultima. La partecipazione è stata in media di 28 studenti.

Considerando nello specifico il programma di fisica e di matematica delle classi prime della scuola, è stata definita la macro-area disciplinare delle lezioni, riguardante i fenomeni termici. Per tale tema, sono state analizzate le problematiche rilevate dagli insegnanti.

Come prima cosa è stata notata una difficoltà notevole nella risoluzione di equazioni in contesto fisico e, legato a ciò, nella ricerca delle "formule inverse". All'interno del programma di termologia, questo problema matematico sorge per esempio nella determinazione della temperatura di equilibrio e più in generale negli esercizi sullo scambio di calore.

Una difficoltà più vicina al livello concettuale è che, trattando questo tema, vengono introdotte molteplici grandezze e concetti che poi verranno ripresi durante gli anni successivi; non è detto però che vengano sempre compresi a fondo. Si pensi a termini come: calore, temperatura, calore specifico, calore latente, dilatazione termica lineare e volumica.

Un'altra problematica rilevata in relazione alla termologia consiste nel dover affrontare il concetto di calore senza aver ancora approfondito quello di lavoro e, più in generale, di energia. Questo avviene per come sono stati distribuiti gli argomenti nell'arco del corso di studi, scelta derivante anche dalla ricerca di parallelismo tra matematica e fisica. L'approccio

risolutivo adottato dal libro di testo in uso nell'istituto è quello legato all'esperimento di Joule sull'equivalenza tra lavoro e calore; spesso però viene lasciato intuitivo e ciò può far sorgere delle misconcezioni.
A fronte di queste considerazioni e avendo ben presente gli obiettivi del corso, il macro-tema dei fenomeni termici e della calorimetria ci è quindi sembrato fin da subito l'area dove si sarebbe potuto ben strutturare un approfondimento.

2.2.2 Progettazione delle lezioni mediante il modello di Uhden et al.

In questo paragrafo presentiamo come sono state costruite le lezioni del corso estivo del progetto Virtual School, mettendo in evidenza come si sia tenuto conto, nella progettazione, dei suggerimenti contenuti nel modello di Uhden et al. presentato nel primo capitolo. Analizzeremo in particolare un segmento specifico, relativo alla dilatazione termica e al concetto di proporzionalità. Questi argomenti sono stati trattati nella quarta lezione del corso, dopo aver introdotto brevemente la notazione scientifica e i concetti di calore e temperatura. Con gli obiettivi del corso come guida, abbiamo impostato la lezione nel modo seguente; per ciascun "passaggio" è richiamata la fase corrispondente del modello di Uhden et al.

a) *Semplificazione/strutturazione* (partenza dal mondo reale): siamo partiti dalla descrizione del fenomeno della dilatazione termica usando come aggancio alcuni esempi provenienti dal mondo reale. Ad esempio abbiamo proposto delle foto dei cosiddetti giunti di espansione, ossia gli elementi installati in corrispondenza dei varchi strutturali (per esempio strade o ponti), che consentono la continuità tra le strutture e che garantiscono le deformazioni e gli spostamenti, fisiologici e non, dei singoli impalcati[1]. Altri esempi utilizzati sono stati il termometro al mercurio e una semplice sbarra metallica.

b) *Matematizzazione*: siamo partiti dal classico esperimento della sbarra metallica soggetta a una variazione di temperatura, con cui gli studenti hanno familiarità dalle lezioni scolastiche. Commentando questa situazione fisica, abbiamo dapprima assegnato alle grandezze in gioco le etichette ΔT (variazione di temperatura) e L_0 (lunghezza iniziale). Successivamente, abbiamo via via aumentato il grado di matematizzazione, ragionando su come tali grandezze variassero nell'esperimento:

[1] https://www.atlas-italy.com/giunti-dilatazione/

- prima osservando semplicemente che, per esempio, la lunghezza della sbarra *dipende* dalla temperatura;
- poi che, fissati il materiale e la lunghezza iniziale, la variazione della lunghezza della sbarra *aumenta* al crescere della variazione di temperatura;
- poi che, fissati il materiale e la lunghezza iniziale, la variazione della lunghezza della sbarra è *direttamente proporzionale* alla variazione di temperatura.

Ripetendo gli argomenti anche per le altre grandezze in gioco, siamo arrivati alla formula:

$$\Delta L = \lambda \cdot L_0 \cdot \Delta T$$

c) *Interpretazione*: partendo dall'espressione, abbiamo commentato il risultato andando a fornire un contesto fisico, in cui ogni grandezza rappresentata aveva un corrispettivo pratico. Abbiamo ripreso l'esempio della sbarra di ferro andando a controllare quanto valesse effettivamente il coefficiente di dilatazione termica λ del ferro. Abbiamo calcolato quindi la variazione di lunghezza ΔL che avremmo osservato se avessimo considerato una sbarra di 1 metro, ovvero $L_0 = 1\, m$, sottoposta a una variazione di temperatura di $80°\, C$, ovvero $\Delta T = 80°\, C$. Con questi dati, si è calcolato che la variazione di lunghezza è di $\Delta L = 9,6 \cdot 10^{-4} m$, cioè $\Delta L = 0,096\, cm$ e quindi la sbarra si allungherà di circa 1 millimetro, un risultato plausibile.

d) *Procedure con tecniche matematiche*: abbiamo proposto agli studenti una tipica richiesta legata alla dilatazione termica, ossia determinare la lunghezza finale L_t di una sbarra metallica sottoposta a una certa variazione di temperatura. Abbiamo esplicitato quindi la formula, ricordando la definizione di "Δ" e scrivendo che $\Delta L = L_t - L_0$. Spostando il termine L_0 e raccogliendolo (abilità di tecnica matematica), siamo arrivati a

$$L_t = L_0 \cdot (1 + \lambda \Delta T)$$

Abbiamo poi ragionato sulle diverse rappresentazioni matematiche di questa formula, sottolineando come essa sia una funzione e mostrando come sia possibile rappresentarla con un'equazione (rappresentazione in linguaggio analitico/formale) e una rappresentazione grafica. Abbiamo discusso la relazione tra le due rappresentazioni e abbiamo insistito in particolare su come sia possibile ricavare informazioni dal grafico, abilità che gli studenti esercitano meno rispetto alla manipolazione algebrica dell'equazione. La Figura 5 mostra un esempio di slide utilizzata durante il corso:

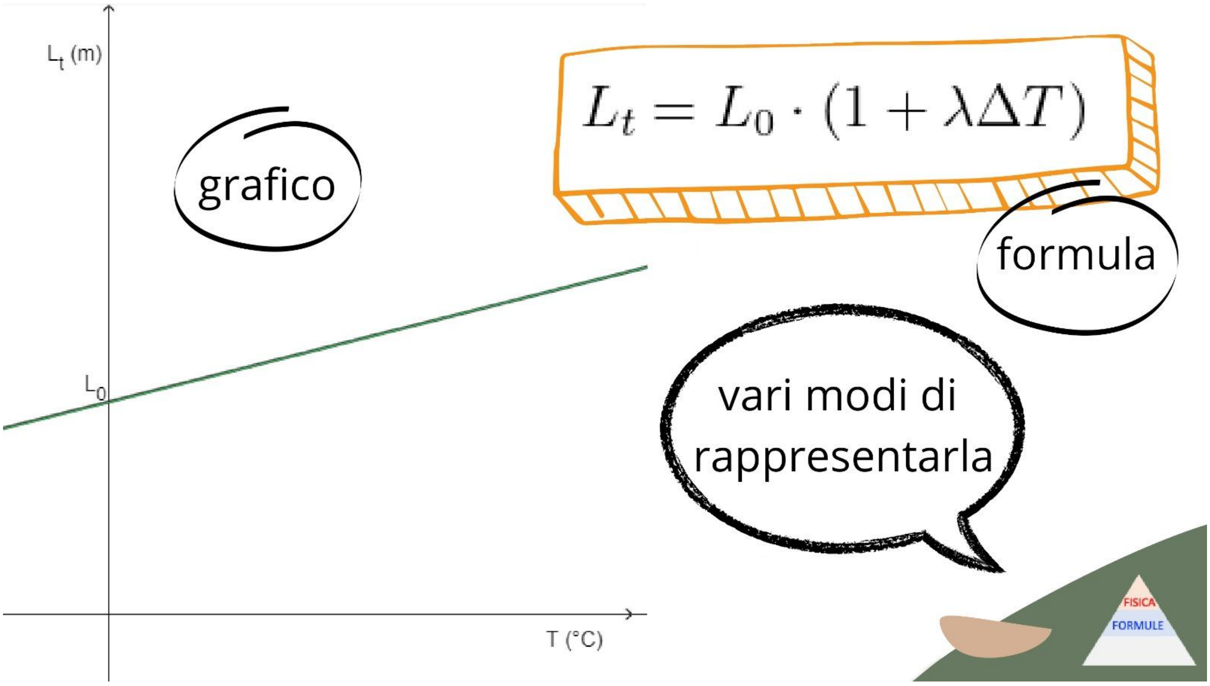


Figura 5: Esempio di slide utilizzata durante il corso estivo della Virtual School

e) *Validazione*: per tornare al mondo reale, abbiamo proposto un esercizio strettamente legato alla realtà, ovvero determinare di quanto si allunga un tratto di rotaia, soggetto a una variazione stagionale di temperatura. I valori numerici della lunghezza della rotaia e della variazione di temperatura sono stati forniti. Il quesito aveva perciò lo scopo di validare le relazioni trovate, applicandole a un problema reale e riflettendo sulla ragionevolezza del risultato ottenuto.

Proseguendo la lezione abbiamo continuato a lavorare secondo il modello di Uhden et al., aumentando ulteriormente il grado di matematizzazione e di interpretazione, utilizzando la dilatazione termica lineare per trattare quella superficiale e volumica.

2.3 Metodologia della ricerca

Per ottenere dati circa la domanda di ricerca, sono state condotte interviste individuali con un campione di 7 studenti (3 maschi, 4 femmine) partecipanti alla Virtual School, secondo un disegno di ricerca pre/post. Le interviste "pre" sono state proposte a inizio giugno, poco prima del corso estivo, e successivamente tra ottobre e novembre dell'anno scolastico successivo, circa 3 mesi dopo la chiusura del corso. In questo modo, è stato possibile studiare i cambiamenti a medio termine sulla comprensione concettuale e sulle strategie di risoluzione messe in atto dagli studenti.

Le interviste si sono svolte in presenza presso il Liceo Scientifico "J. Da Ponte", in orario scolastico. La durata delle interviste è stata di 20-30 minuti, durante i quali allo/a studente/ssa era richiesto di risolvere 4 esercizi, due di matematica e due di fisica. Si è cercato di rendere questi ultimi il più possibile isomorfi a quelli matematici: anche se l'isomorfismo era imperfetto, essi richiedevano per la soluzione l'utilizzo degli stessi strumenti matematici ed erano proposti in un formato analogo.

Durante il colloquio, lo studente era libero di iniziare a rispondere sia oralmente sia per iscritto; in entrambi i casi, l'intervistatore lo invitava a giustificare le proprie ipotesi e affermazioni.

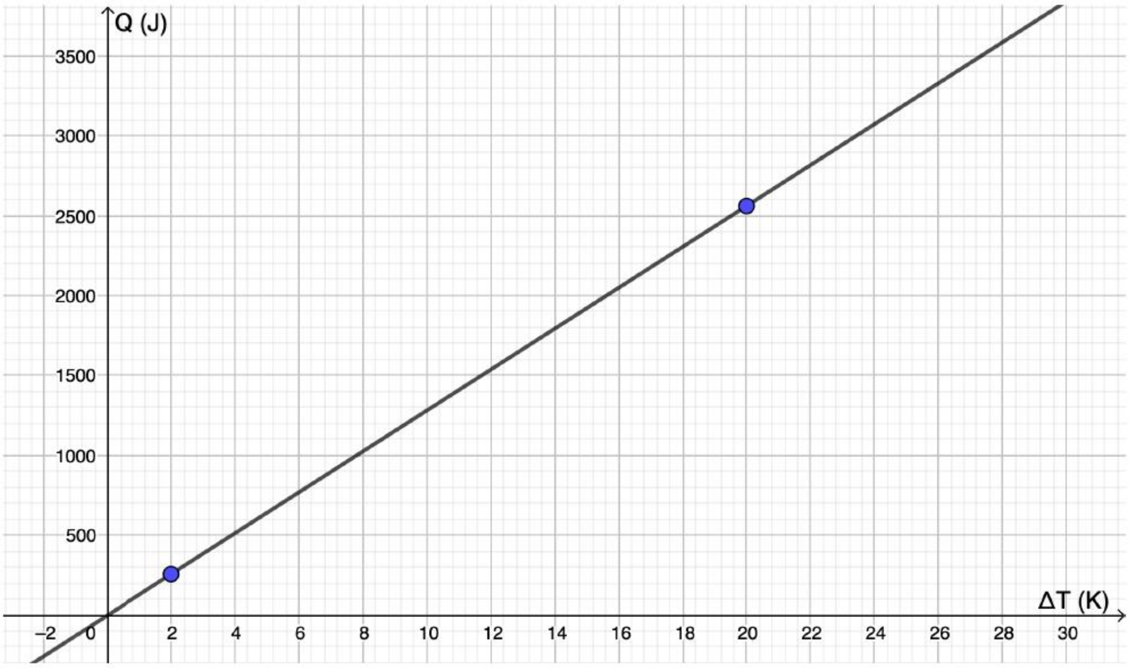
I dati sulle interviste sono stati raccolti tramite appunti e, ove possibile, supporti audio multimediali: in particolare è stato possibile registrare l'audio completo di 10 delle 14 interviste effettuate. Successivamente sono state trascritte le parti più rilevanti ai fini della ricerca.

Si è cercato di dare massima libertà agli studenti e di creare un clima più disteso possibile. Date le loro difficoltà nella materia, spesso accompagnate da un linguaggio scientifico rudimentale, si è scelto di aiutarli con qualche suggerimento, qualora non avessero saputo come proseguire, annotando ove questo accadesse e cercando comunque di interferire il meno possibile con il ragionamento dello studente.

2.3.1 Il test

Presentiamo ora le due coppie di esercizi isomorfi che componevano il test proposto ai partecipanti.

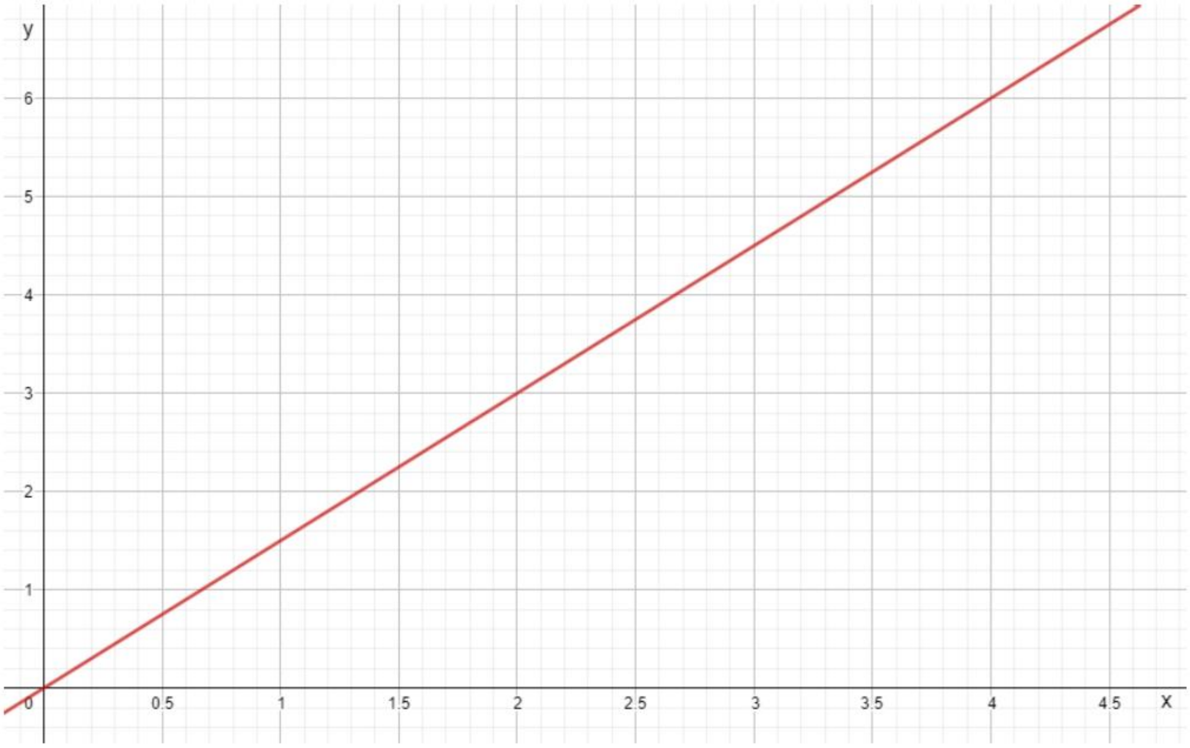
1) Considera un campione di 1 kg di piombo. Ricava dal grafico il suo calore specifico.



Se vengono forniti 1170 J di calore a un oggetto di piombo e si osserva una variazione di temperatura pari a 50 K, quanto vale la massa dell'oggetto?

2) Un blocco di ferro di massa 500 g ed alla temperatura iniziale di 145,0 °C viene immerso in 250 g di acqua alla temperatura di 20,0 ° C.
Sapendo che non ci sono dispersioni termiche e che il calore specifico del ferro è 452 J/(kg °C) e quello dell'acqua è 4186 J/(kg °C), calcolare la temperatura di equilibrio che raggiunge il sistema.

3) Sapendo che x e y sono direttamente proporzionali, ricava dal grafico la costante di proporzionalità



4) Risolvi la seguente equazione

$$\left(\frac{1}{2}-x\right)^2+\left(x+\frac{1}{3}\right)^3=\left(x+\frac{1}{3}\right)\left(x-\frac{1}{3}\right)+x\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{27}$$

La prima coppia (quesito 1 e quesito 3) riguarda l'utilizzo del linguaggio grafico e della proporzionalità diretta. L'esercizio 3 contiene come principale concetto matematico la proporzionalità diretta e la sua interpretazione grafica. Si indagano le abilità dell'intervistato nel ricavare informazioni quantitative da un grafico di proporzionalità diretta, valutando anche la capacità di passare dal linguaggio grafico a quello verbale o formale. Il problema 1 riguarda invece il calore specifico c, il cui prodotto con la massa di un corpo ($m \cdot c$) svolge il ruolo di costante di proporzionalità nell'equazione fondamentale della calorimetria $Q = m \cdot c \cdot \Delta T$. In particolare, vuole indagare quanto sia stato compreso il concetto di calore specifico e l'abilità nella lettura di un grafico. La quantità di calore Q fornita a un corpo e la variazione di temperatura ΔT dello stesso, sono infatti grandezze direttamente proporzionali, in assenza di passaggi di stato. L'esercizio richiede in particolare di ricavare il calore specifico dal grafico $Q\ vs\ \Delta T$ ed è quindi isomorfo al problema 3. Nel contesto fisico, l'intervista indaga inoltre la comprensione fisica concettuale del calore specifico.

Nella seconda coppia di esercizi (quesito 2 e 4), lo strumento matematico che si vuole indagare sono le equazioni algebriche. L'esercizio 4 consiste in un'equazione di terzo grado con prodotti notevoli, riconducibile al primo grado, in contesto puramente matematico. Qui è necessario risolvere due quadrati del binomio, un cubo di un binomio e un prodotto "somma per differenza". Successivamente, riconoscere la presenza di monomi opposti e trovare il minimo comun denominatore.

Nel problema 2, in contesto fisico, si propone di ricavare la temperatura di equilibrio in un sistema di due corpi inizialmente a temperatura diversa, in assenza di dispersioni termiche e di passaggi di stato. Qui la risoluzione richiede l'impostazione di un'equazione tecnicamente più semplice di quella presente in contesto matematico, ovvero:

$$m_{H20} \cdot c_{H20} \cdot (t_e - t_{H20}) = \quad - m_f \cdot c_f \cdot (t_e - t_f)$$

Come si può notare, non sono presenti prodotti notevoli e le uniche difficoltà stanno nel riconoscere e isolare l'incognita t_e. Sebbene le equazioni finali dei quesiti 2 e 4 siano entrambe di primo grado, nel contesto matematico vengono quindi richieste tecniche algebriche più avanzate.

2.3.2 Metodi di valutazione

Le interviste sono state trascritte e analizzate secondo due punti di vista complementari. Il primo livello di analisi è consistito nella ricerca di indicatori che permettessero di quantificare le abilità risolutive degli intervistati. Nello specifico, sono stati individuati i seguenti, qui riportati con i codici utilizzati per identificarli:

- *comprensione prop. dir.*: comprensione del concetto di proporzionalità diretta;
- *lettura grafico fis.*: si valutano le abilità nella lettura di un grafico in contesto fisico;
- *comprensione c*: comprensione del concetto di calore specifico;
- *risoluzione eq. mate.*: si valutano le abilità di risoluzione di un'equazione in contesto matematico;
- *risoluzione eq. fis.*: si valutano le abilità di risoluzione di un'equazione in contesto fisico;

Ognuno di questi è stato valutato con un livello da 0 a 3:

- *"livello 0"*: approccio assente al problema;
- *"livello 1"*: comprensione/risoluzione caratterizzata da ampie lacune o gravi errori concettuali;
- *"livello 2"*: comprensione/risoluzione parzialmente corretta del problema;
- *"livello 3"*: ottima risoluzione del quesito, con alcuni errori non gravi.

Il quesito 2, inoltre, è stato studiato utilizzando il modello dei giochi epistemici descritto al paragrafo 1.4. Tale esercizio, infatti, rispecchia un tipico problema di fisica proposto agli studenti nello studio della termologia e si presta quindi bene ad osservare le mosse epistemiche attuate dall'intervistato nella risoluzione. Questo studio va a completare quello sommativo presentato in precedenza, aumentando la comprensione degli approcci degli studenti, le loro difficoltà e gli effetti del corso.

A questo scopo, le parti delle interviste relative al problema 2 sono state codificate in termini dei 6 giochi epistemici individuati da Tuminaro & Redish (2007): *Mapping Meaning to Mathematics*, *Mapping Mathematics to Meaning*, *Physical Mechanism Game*, *Pictorial Analysis*, *Recursive Plug-and-Chug*, *Transliteration to Mathematics*). I casi dubbi nell'attribuzione di un gioco epistemico sono stati discussi tra diversi ricercatori fino al raggiungimento di un accordo.

Per ogni ragazzo/a intervistato/a è stata dunque elaborata una tabella come quella in Figura 6:

Indicatore	Livello 0	Livello 1	Livello 2	Livello 3
Comprensione prop. dir.				
Lettura grafico fis.				
Comprensione c				
Risoluzione eq. mate.				
Risoluzione eq. fis.				

Figura 6: Esempio di tabella riassuntiva delle valutazioni per ogni indicatore

Nel capitolo 3 verranno presentati alcuni risultati globali sul campione dei partecipanti e due casi di studio rilevanti.

2.4 Partecipanti

Gli studenti intervistati in questa ricerca sono stati 7 studenti (3 maschi, 4 femmine) di età compresa tra i 14 e i 15 anni, frequentanti il I anno del Liceo Scientifico "J. Da Ponte" di Bassano del Grappa (VI). Gli indirizzi scolastici di provenienza erano misti (Liceo delle Scienze Applicate e Liceo Scientifico a indirizzo Sportivo). Tutti gli studenti del campione avevano delle difficoltà in fisica, di diversa importanza, e hanno partecipato al corso estivo descritto al paragrafo 2.2. Uno degli studenti ha un piano didattico personalizzato (PDP). A 3 dei 7 partecipanti era stato assegnato un debito formativo in fisica, mentre a 2 dei 7 in matematica. I debiti formativi andavano recuperati con un test prima dell'inizio dell'anno scolastico successivo, come prevede l'ordinamento scolastico italiano. La partecipazione alla coppia di interviste è stata su base volontaria, previa autorizzazione via consenso informato.

3 Analisi dei dati

3.1 Analisi globale dei dati del campione

In questo capitolo illustreremo i risultati principali emersi dall'analisi dei dati raccolti. Per la maggior parte dello studio, sono stati usati gli elaborati degli studenti e la trascrizione delle interviste (consultabili in Appendice), assieme alle annotazioni prese durante le stesse. Dove necessario, verranno citati gli altri canali di informazione utilizzati.

Nelle Tabelle 1 e 2 mostriamo i dati riassuntivi delle valutazioni effettuate (numero di studenti che hanno ricevuto ciascuna valutazione), secondo gli indicatori presentati nel paragrafo 2.3.2 e i relativi livelli. Successivamente visualizziamo gli stessi dati in un grafico a barre (Grafico 1 e Grafico 2).

Tabella 1: Riepilogo dei livelli rilevati nell'intervista PRE

Indicatore	Livello 0	Livello 1	Livello 2	Livello 3
(A) Comprensione prop. dir.	1	5	1	0
(B) Lettura grafico fis.	1	4	0	2
(C) Comprensione c	2	3	2	0
(D) Risoluzione eq. mate.	0	3	1	3
(E) Risoluzione eq. fis.	2	3	0	2

Tabella 2: Riepilogo dei livelli rilevati nell'intervista POST

Indicatore	Livello 0	Livello 1	Livello 2	Livello 3
(A) Comprensione prop. dir.	0	2	3	2
(B) Lettura grafico fis.	0	3	1	3
(C) Comprensione c	0	5	2	0
(D) Risoluzione eq. mate.	0	0	1	6
(E) Risoluzione eq. fis.	0	4	2	1

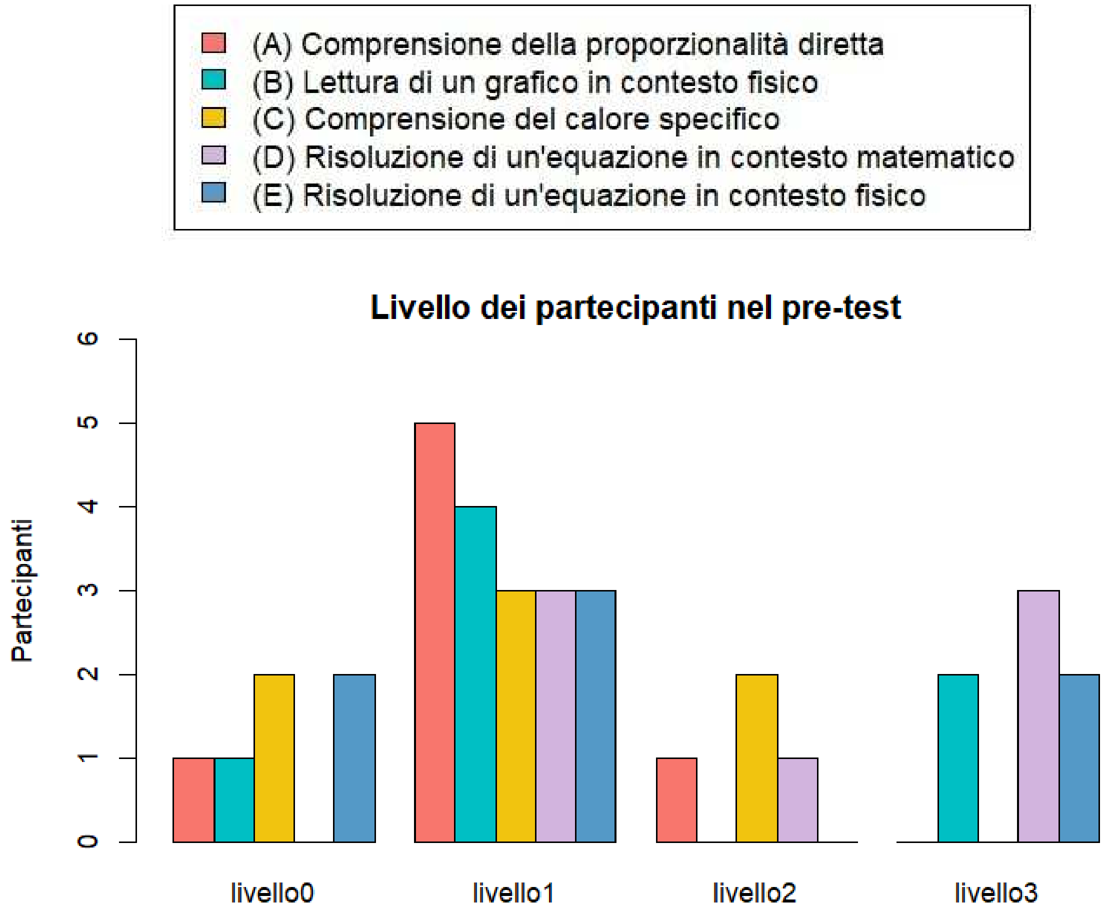


Grafico 1: Riepilogo dei livelli rilevati nella prima intervista

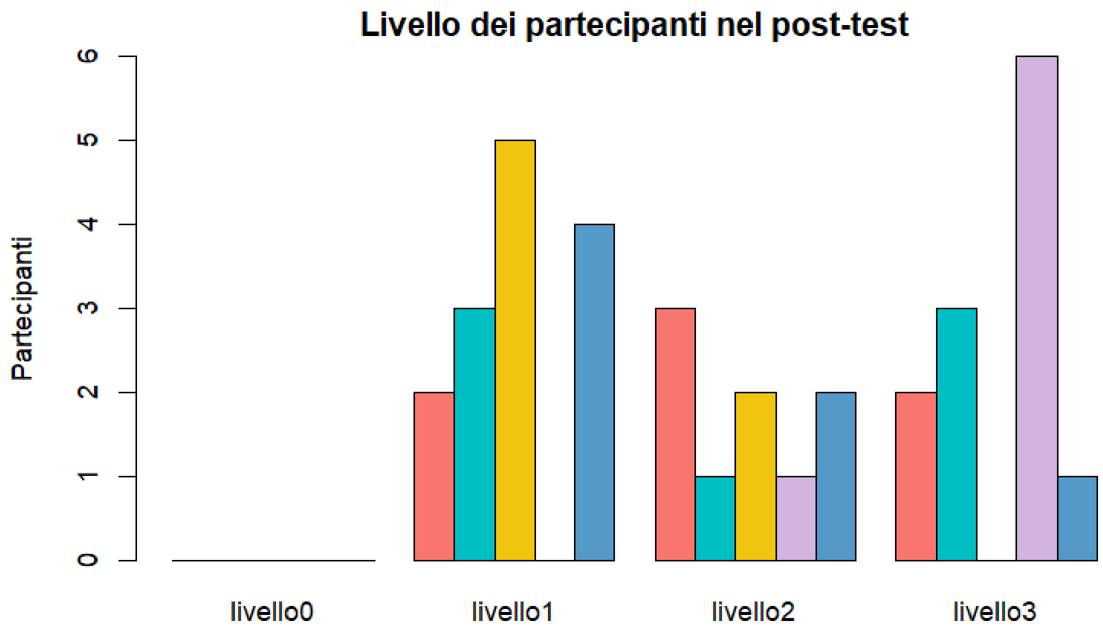


Grafico 2: Riepilogo dei livelli rilevati nella seconda intervista

Per quanto riguarda i livelli riscontrati, possiamo osservare come nella prima intervista siano stati rilevati globalmente alcuni mancati approcci ai quesiti proposti, codificati nel *"livello 0"*, in tutti gli esercizi ad esclusione della risoluzione dell'equazione in contesto puramente matematico. Al contrario, nella seconda intervista non si è mai riscontrato il livello 0.

Il *"livello 1"*, caratterizzato da ampie lacune e gravi errori concettuali, è il più presente nell'intervista pre-corso, con 18 valutazioni a questo livello su 35. Diversamente, in quella post-corso, le rilevazioni sono diminuite a 12.

Per il *"livello 2"* e il *"livello 3"*, corrispondenti a una comprensione parzialmente corretta e a una comprensione ottima, si sono riscontrati rispettivamente 4 e 7 istanze, per un totale di 11 valutazioni nella prima intervista. Successivamente, si sono alzate a 11 e 12 rilevazioni, per un totale di 23 studenti che raggiungono i livelli di positività.

In termini di frequenza assoluta, si nota quindi che è aumentato il numero di studenti nei livelli più alti. Possiamo quindi evidenziare come le prestazioni degli studenti siano state in linea di massima migliori nella seconda somministrazione del test rispetto che nella prima.

Vediamo ora i risultati globali sulle due coppie di esercizi isomorfi. Per quanto riguarda la prima coppia (esercizi 1 e 3, a cui si riferiscono gli indicatori A per il contesto matematico e B per il contesto fisico), possiamo notare come non ci siano grosse differenze tra i due contesti esaminati.

Al contrario, nella coppia di quesiti che comprende la risoluzione di un'equazione nei due diversi contesti (esercizi 2 e 4, a cui si riferiscono gli indicatori D e E, rispettivamente), si osservano delle differenze. In ambito matematico, tutti gli studenti hanno almeno tentato di risolvere il problema già nella prima intervista, mentre nel contesto fisico 2 intervistati presentavano un "*livello 0"*. Inoltre, 4 studenti riuscivano a risolvere l'equazione matematica con lievi errori o in maniera ottimale, mentre solo 2 mostravano la stessa abilità nel corrispettivo fisico.

La situazione circa quest'ultima coppia di quesiti diventa ancora più evidente nell'analisi dell'intervista post-corso. Qui tutti gli studenti riescono a risolvere l'equazione in contesto matematico con buone e ottime abilità (rispettivamente 1 e 6 casi), mentre in quello fisico 2 studenti possiedono ancora un livello base, 4 un buon livello e solamente 1 risolve l'esercizio con un livello ottimo.

3.2 Analisi locale dei dati del campione

Andiamo ora a commentare ciascun indicatore, evidenziando le caratteristiche più interessanti riscontrate.

3.2.1 Comprensione della proporzionalità diretta

Nella Tabella 3 confrontiamo i dati pre- e post- per l'indicatore A, "comprensione della proporzionalità diretta" in contesto matematico.

Tabella 3: Riepilogo dei livelli rilevati per l'indicatore "comprensione prop. dir." nelle interviste pre/post

Indicatore	Livello 0	Livello 1	Livello 2	Livello 3
Comprensione prop. dir. (PRE)	1	5	1	0
Comprensione prop. dir. (POST)	0	2	3	2

Nella prima intervista, 1 partecipante non riusciva a commentare il grafico della proporzionalità diretta in contesto matematico, 5 possedevano un livello base, 1 solo un buon livello. La maggior parte aveva compreso una delle caratteristiche della proporzionalità diretta, spiegando che all'aumentare di una grandezza si può osservare l'aumento anche dell'altra. Nessuno ha però mai sottolineato come questa crescita fosse lineare. Si è riconosciuta, inoltre, l'attivazione mnemonica della necessità di dividere le grandezze per individuare la cosiddetta "costante di proporzionalità". Tale oggetto è sempre stato considerato esclusivamente dal punto di vista numerico e non è mai stato messo in relazione con la pendenza del grafico. Uno degli errori più comuni è stato proprio nella determinazione della costante di proporzionalità: molti studenti infatti trovavano il suo inverso, a causa di un'attivazione mnemonica errata (un es. di appunti di uno studente è mostrato in Figura 7).

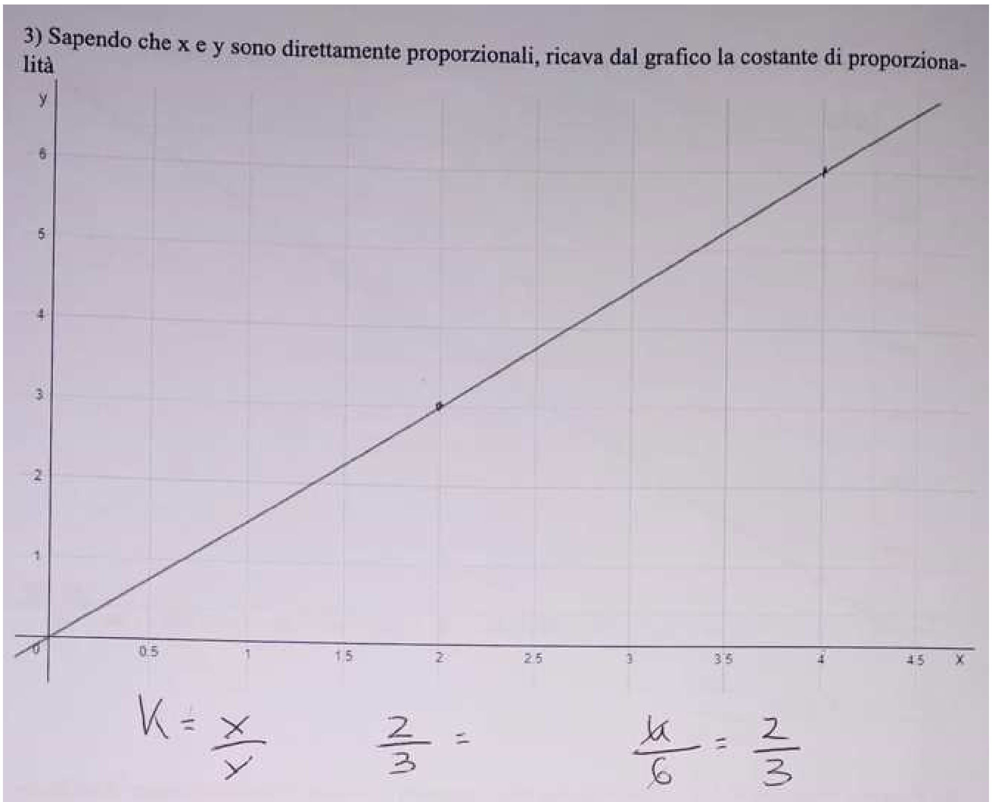


Figura 7: Errore nella determinazione della costante di proporzionalità (esercizio 3) da parte di uno studente

Nella seconda intervista la situazione generale è notevolmente migliorata. 2 studenti mostravano ancora ampie lacune, ma 3 avevano raggiunto una buona comprensione, per esempio riuscendo a calcolare la costante di proporzionalità in maniera corretta, come mostrato in Figura 8:

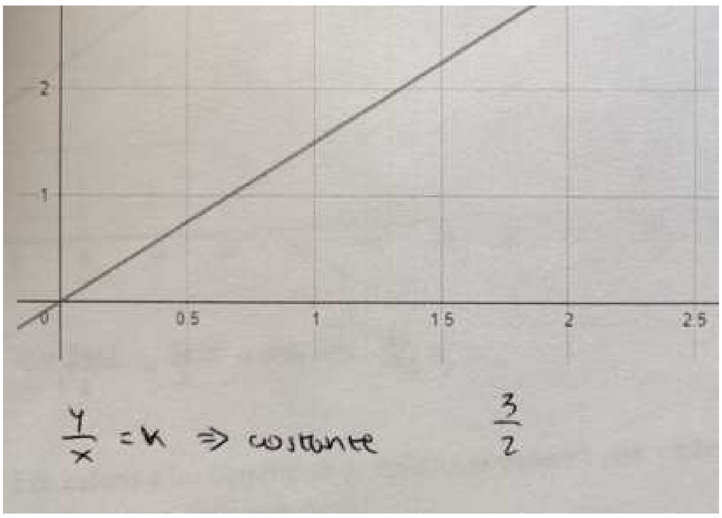


Figura 8: Corretta determinazione della costante di proporzionalità (esercizio 3) da parte di uno studente

Il *“livello 3”* è stato assegnato a 2 partecipanti, che mostravano una precisione concettuale e hanno notato un’analogia con il medesimo grafico nel contesto fisico. Mostriamo un esempio da una conversazione con un partecipante, codificato come GDB.

GDB: Allora sapendo che x e y sono direttamente proporzionali ricava dal grafico la costante di proporzionalità. Beh come prima cosa trovo un punto d'intersezione tra x e y, quindi per esempio vedo che x è 0,5 però non ho un valore preciso di y, quindi preferisco andare qui dove c'è x uguale a 2 e y uguale 3 e sapendo che sono direttamente proporzionali la divisione tra di loro, cioè quindi y fratto x, mi darà sempre k. Quindi posso prendere un solo punto e non mi serve verificare per ogni punto anche se effettivamente lo posso vedere perché 3 e 2 hanno l'intersezione, però anche i loro multipli che sono 6 e 4 hanno l'intersezione, quindi mi basta trovare la costante k facendo y fratto x uguale k, quindi 3 fratto 2 uguale 1,5 e questa è la costante di proporzionalità.

In questo svolgimento si osserva una precisione nella rilevazione numerica e una corretta determinazione della costante di proporzionalità. Nel successivo scambio, GDB riesce a notare un’analogia tra la coppia di esercizi isomorfi (1 e 3), sebbene aiutato dal ricercatore.

Berto: Secondo te questi due esercizi si somigliano? [il primo e il terzo, coppia di esercizi isomorfi]

GDB: Beh sì, perché in entrambi devo trovare un punto di intersezione.

Berto: [...] Nel primo esercizio la x e la y erano direttamente proporzionali, quindi immagino che anche qui c'è qualcosa che è direttamente proporzionale... Chi secondo te?

GDB: Beh allora... all'aumentare di... all'aumentare della variazione di temperatura aumenta anche il calore.

Berto: È vero, dal punto di vista matematico all'aumentare della variazione della temperatura aumenta il calore. Però questa non è solo una cosa matematica, cioè è una cosa matematica che rispecchia una cosa fisica, perché se io fornisco calore...

GDB: Aumenta la temperatura.

Berto: E quindi la costante di proporzionalità che qui era k, qui invece chi è la proporzionalità diretta?

GDB: Mh... Q fratto ΔT? È il calore specifico!

3.2.2 Lettura di un grafico in contesto fisico

Nella Tabella 4 confrontiamo i dati pre- e post- per l'indicatore B, "lettura di un grafico in contesto fisico".

Tabella 4: Riepilogo dei livelli rilevati per l'indicatore "lettura grafico fis." nelle interviste pre/post

Indicatore	Livello 0	Livello 1	Livello 2	Livello 3
Lettura grafico fis. (PRE)	1	4	0	2
Lettura grafico fis. (POST)	0	3	1	3

Durante la prima intervista, 1 ragazzo non è riuscito a commentare l'esercizio, 4 possedevano un livello base e 2 lo hanno approcciato con un ottimo livello, caratterizzato dal riconoscere le grandezze in gioco (Q e ΔT) e precisione nella lettura del dato. Ciò che ha penalizzato la maggior parte dei partecipanti è stata la lettura errata delle grandezze negli assi, non riconoscendo che la grandezza nell'asse delle ascisse era ΔT e non T. Questo errore è stato probabilmente causato dalla presenza nel grafico di due punti evidenziati e dalla nozione di variazione "Δ" nella legge fondamentale della calorimetria. Alcuni partecipanti hanno preso anche la differenza nell'ordinata Q, forse per analogia con quanto fatto per ΔT. Viene mostrato in Figura 9 un esempio. Sebbene prendendo la differenza in entrambe le coordinate il risultato sia matematicamente corretto, tale procedimento è stato comunque penalizzato poiché non manifestava una vera comprensione concettuale.

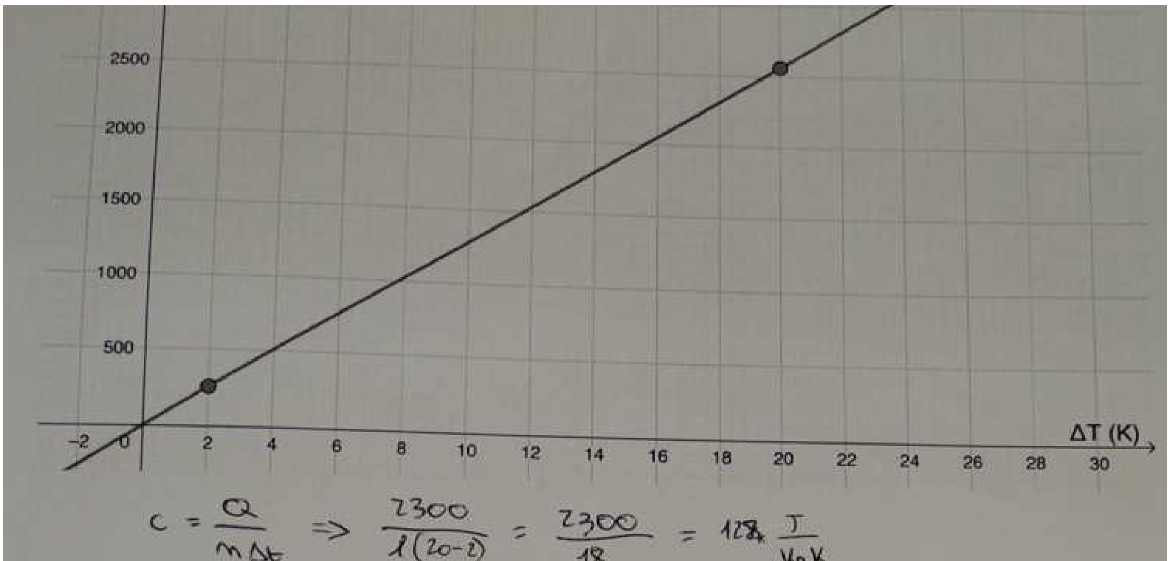


Figura 9: Errore nella lettura del grafico (esercizio 1) da parte di uno studente

Nella seconda intervista possiamo osservare come tutti gli studenti abbiano approcciato l'esercizio; complessivamente, dai 5 partecipanti con livello base o non classificabile si è passati a solo 3 con questo grado di abilità.

3.2.3 Comprensione del calore specifico

Nella Tabella 5 confrontiamo i dati pre- e post- per l'indicatore C, "comprensione del calore specifico".

Tabella 5: Riepilogo dei livelli rilevati per l'indicatore "comprensione c" nelle interviste pre/post

Indicatore	Livello 0	Livello 1	Livello 2	Livello 3
Comprensione c (PRE)	2	3	2	0
Comprensione c (POST)	0	5	2	0

L'indicatore *"comprensione c"* indaga la comprensione del concetto di calore specifico e non ha un corrispettivo matematico: è stato inserito per valutare la comprensione concettuale della costante di proporzionalità nello specifico ambito fisico proposto.
Durante la prima intervista, 2 partecipanti non riuscivano a spiegare minimamente il concetto, 3 invece lo facevano con errori rilevanti, 2 ne avevano una buona comprensione. Non si è rilevato nessun *"livello 3"*, che avrebbe potuto manifestarsi con l'aver ben inteso il significato della definizione. Al contrario, alla domanda "cosa ti ricordi sul calore specifico?", la quasi totalità degli intervistati rispondeva dichiarando la legge fondamentale della calorimetria. Di nuovo, si è osservata un'attivazione mnemonica in luogo di una comprensione concettuale.
Si è voluto premiare assegnando il "*livello 2*" a chi comunque ricordava tale equazione, la sapeva manipolare arrivando ad un risultato corretto. Inoltre, per risolvere l'esercizio, bisognava riconoscere che il calore specifico è una proprietà del materiale. È interessante sottolineare come, per la quasi totalità del campione, per *definizione* di calore specifico venga intesa la relativa "formula" (la legge fondamentale della calorimetria) e non l'enunciato del concetto.

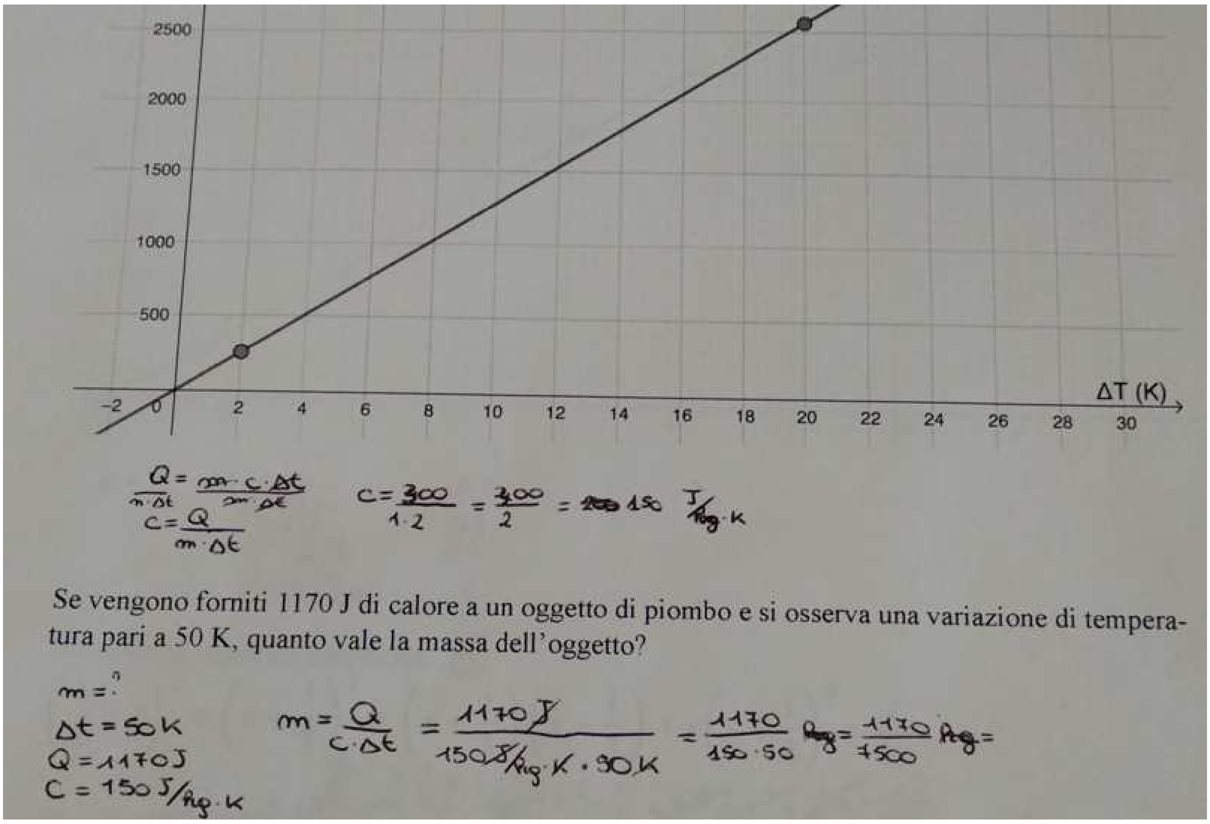


Figura 10: Esempio di svolgimento corretto dell'esercizio 1 da parte di uno studente

Nell'intervista post, tutti i ragazzi possedevano un *"livello 1",* eccetto 2 con una buona comprensione. Non si sono rilevati dei *"livello 3".* Ancora una volta, infatti, i partecipanti valutati positivamente ricordavano l'equazione fondamentale della calorimetria ma non sapevano spiegare il significato concettuale. È da notare come questo indicatore sia l'unico senza nemmeno una presenza di comprensione ottima nella seconda intervista.

3.2.4 Risoluzione di un'equazione in contesto matematico

Nella Tabella 6 confrontiamo i dati pre- e post- per l'indicatore D, "risoluzione di un'equazione in contesto matematico".

Tabella 6: Riepilogo dei livelli rilevati per l'indicatore "risoluzione eq. mate" nelle interviste pre/post

Indicatore	Livello 0	Livello 1	Livello 2	Livello 3
Risoluzione eq. mate. (PRE)	0	3	1	3
Risoluzione eq. mate. (POST)	0	0	1	6

Risolvere un'equazione in contesto matematico è sicuramente l'abilità più consolidata dal campione. Tutti gli intervistati, infatti, conoscevano in qualche grado le procedure da attuare e le difficoltà principali sono state nel riconoscere e svolgere i prodotti notevoli presenti. Si è valutato con il livello massimo chi arrivava al risultato corretto o compiva un lieve errore. Mostriamo un esempio di valutazione ottima:

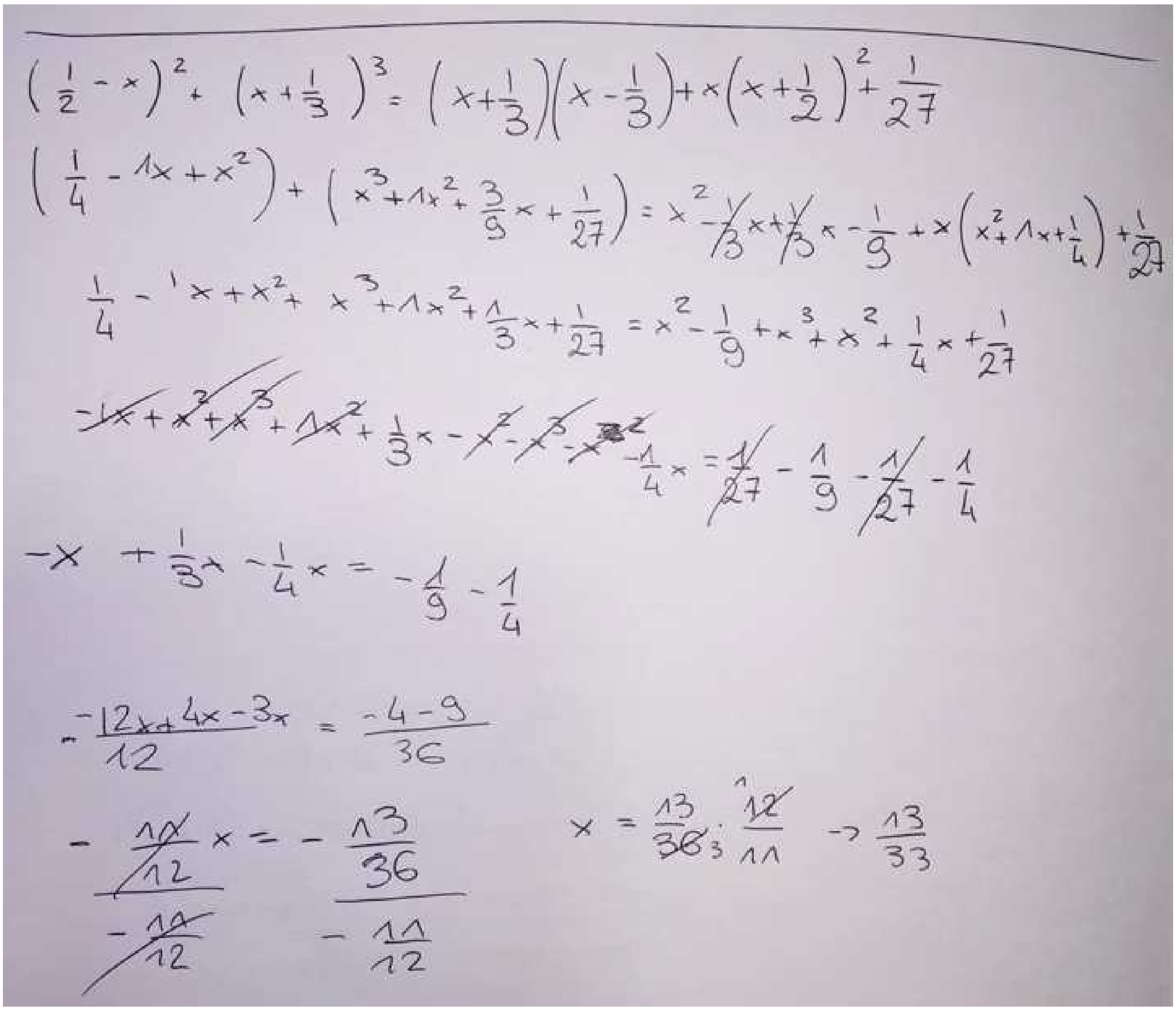


Figura 11: Esempio di ottimo svolgimento dell'esercizio 4 da parte di uno studente

Mostriamo ora un esempio di "*livello 1*". Qui il primo quadrato è stato svolto in maniera errata senza il doppio prodotto, mentre per lo svolgimento del cubo si è aiutato lo studente. Come si può vedere, infatti, alla fine dell'esercizio c'è la risoluzione del cubo mediante l'effettivo prodotto dei tre medesimi fattori. Anche il terzo prodotto notevole, *"*somma per differenza*"* è inesatto.

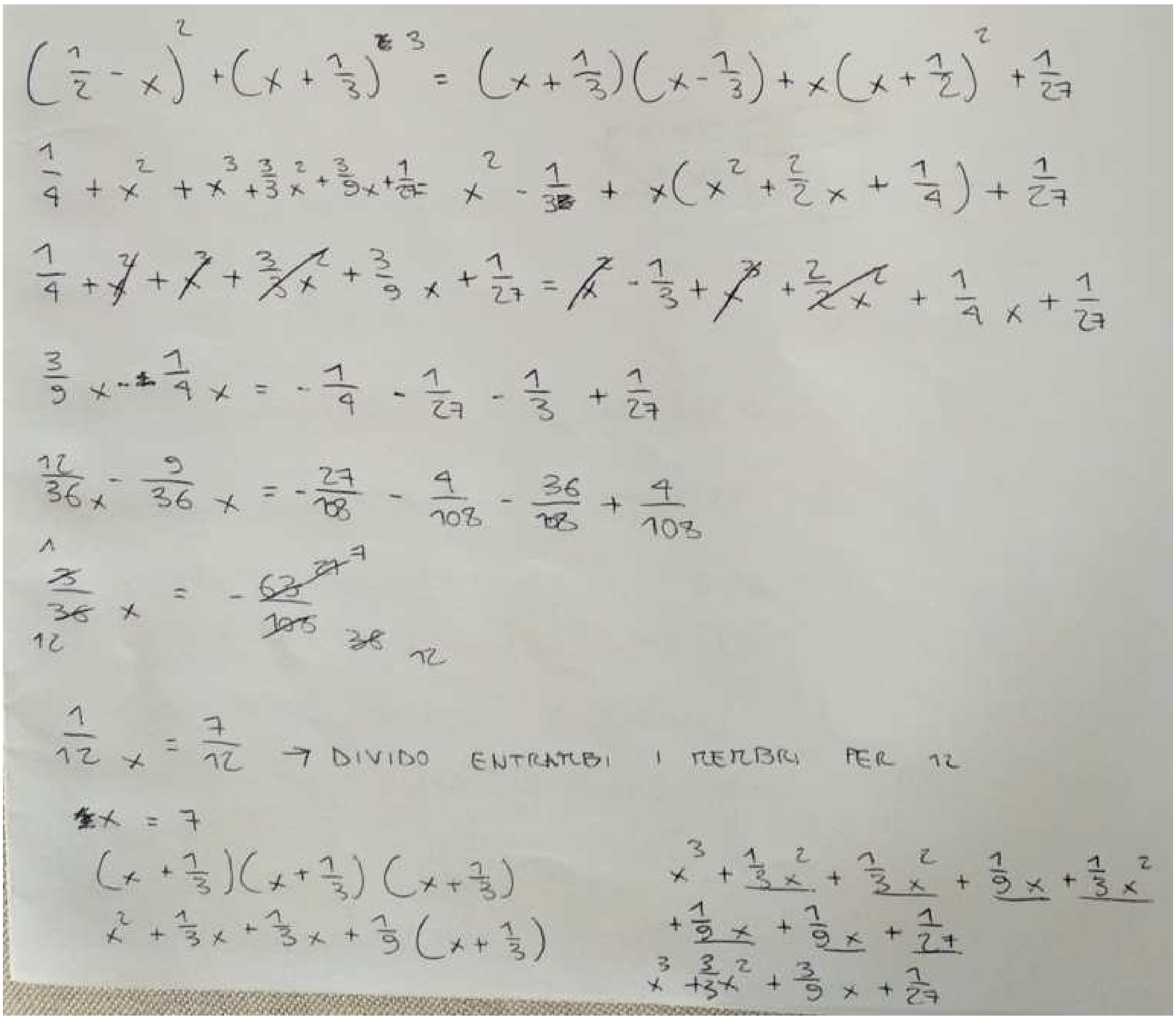


Figura 12: Esempio di livello base (esercizio 4) di uno studente

Durante la prima intervista si sono rilevati 3 "*livello 1*", 1 "*livello 2*" e 3 "*livello 3*". Nella seconda, invece, nessuno studente mostrava ampie lacune e né ha compiuto gravi errori. Tutti sapevano infatti risolvere in maniera ottima l'equazione in contesto puramente matematico, ad eccezione di un partecipante che è stato lievemente aiutato. È importante osservare come questo indicatore sia quello con più valutazioni ottime rilevate, sia nel pre-test che ancor più nel post-test.

3.2.5 Risoluzione di un'equazione in contesto fisico

Infine, nella Tabella 7 confrontiamo i dati pre- e post- per l'indicatore E, "risoluzione di un'equazione in contesto fisico".

Tabella 7: Riepilogo dei livelli rilevati per l'indicatore "risoluzione eq. fis." nelle interviste pre/post

Indicatore	Livello 0	Livello 1	Livello 2	Livello 3
Risoluzione eq. fis. PRE	2	3	0	2
Risoluzione eq. fis. POST	0	4	2	1

Nella prima intervista, 2 partecipanti sono stati valutati con il "*livello 0*" per mancato approccio all'esercizio. 3 studenti sono stati valutati con un livello base, caratterizzato dalla sostituzione puntuale dei dati senza convertirli nelle unità di misura fondamentali e dal successivo calcolo diretto senza comprensione simbolica. Altri invece, non sapevano in che modo proseguire nella risoluzione. Infine, 2 studenti sono arrivati ad un risultato corretto con un'esatta sostituzione dei dati o una manipolazione efficace dei termini dell'equazione e sono stati valutati con il *"livello 3"*.

Qui di seguito un esempio di come un intervistato si sia "sbloccato" in seguito ad un aiuto dell'intervistatore, il quale lo invitava a cambiare il nome dell'incognita da "t" a "x":

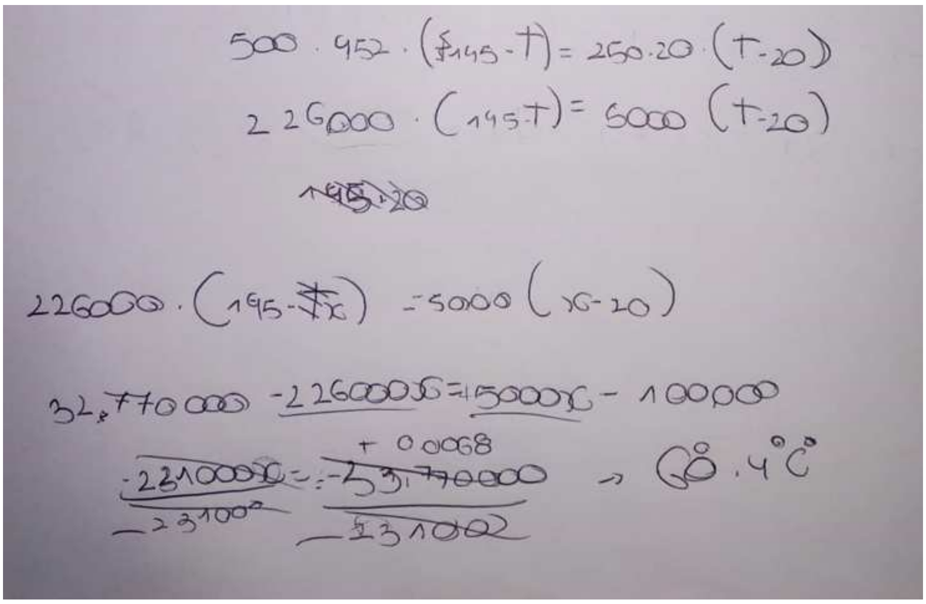


Figura 13: Determinazione della temperatura di equilibrio (esercizio 2) da parte di uno studente

Questo episodio sembra confermare la struttura teorica del *blend cognitivo* e le principali difficoltà circa l'uso della matematica in fisica trattate da Redish (2021). Una di queste riguarda la differenza nell'uso dei simboli tra matematica e fisica. In matematica, infatti, i simboli hanno sempre un significato univoco ("x" e "y" sono sempre variabili, "a" e "b" parametri, etc.), mentre in fisica sono carichi di significato e ciò cambia il modo in cui li interpretiamo. L'intervistato probabilmente era in difficoltà nel coniugare il concetto di "variabile incognita" con quello di "t", inteso come simbolo fisico che indica la "temperatura di equilibrio". Cambiando lettera, il significato che "t" portava con sé è svanito ed è stato possibile interpretare il simbolo "x" come "incognita da determinare" e risolvere l'equazione.
Nell'intervista successiva, è presente solo un *"livello 3"*. Non sono stati rilevati però *"livello 0"*. I più hanno presentato un'abilità risolutiva base dell'equazione (4 partecipanti) e 2 invece un buon livello.

3.2.6 Giochi epistemici rilevati

Passiamo ora allo studio dei giochi epistemici messi in atto dagli studenti nella risoluzione dell'esercizio 2. La Tabella 8 riassume il numero di partecipanti che hanno adottato ciascun gioco epistemico nelle interviste PRE e POST.

Tabella 8: Riepilogo dei giochi epistemici rilevati nelle interviste pre/post

Giochi ep.	MeanMath	MathMean	Phys	Pict	P&C	Translit
PRE	1	0	0	1	3	2
POST	1	1	1	0	1	3

Per questa parte dello studio, si è analizzata la risoluzione dell'esercizio da parte dell'intervistato/a cercando di scegliere il gioco epistemico che meglio si adattava all'approccio adottato dal partecipante. È importante specificare come non sempre lo studente attui tutte le "mosse" che caratterizzano un certo gioco epistemico; tuttavia è possibile riconoscerne alcune e, sulla base di queste, attribuire al ragionamento il gioco epistemico più vicino a quello adottato.
Nell'intervista PRE, 1 partecipante ha adottato un approccio *Mapping Meaning to Mathematics* (MeanMath), 1 quello del *Pictorial Analysis* (Pict), 3 quello del *Recursive Plug-and-Chug* (P&C), 2 studenti *Transliteration to Mathematics* (Translit). È interessante

notare come 5 su 7 abbiano scelto P&C e Translit, due giochi le cui conoscenze prerequisite sono quelle della comprensione sintattica del simbolismo fisico e delle equazioni, ma non della relativa comprensione concettuale.

Nell'intervista POST la situazione è un po' più distribuita: 3 partecipanti hanno scelto il gioco Translit, mentre gli altri hanno scelto ciascuno un gioco diverso ad esclusione di *Pictorial Analysis*.

Nel seguito approfondiamo i dati sopra illustrati presentando due casi di studio, corrispondenti agli studenti codificati come "AS" e "SB". Questa analisi offre l'opportunità di mostrare un esempio di come sia stata condotta l'analisi individuale di ogni studente, evidenziandone gli aspetti maggiormente interessanti; inoltre aiuta a capire meglio i processi messi in atto dallo studente nella risoluzione dei problemi e come il suo approccio sia evoluto tra il pre-test e il post-test.

3.3 Un caso di studio: AS

AS è uno studente del Liceo Scientifico a cui è stato assegnato il debito formativo in fisica, mentre non ha avuto il debito in matematica. Nell'analizzare le sue interviste pre/post osserveremo come lo studente abbia cambiato il suo approccio soprattutto verso la risoluzione di un problema di natura fisica. Le parti in corsivo sono tratte dalla trascrizione dell'intervista, mentre le immagini sono parti dell'elaborato dello studente. Il materiale è consultabile nella sua interezza in Appendice B.

3.3.1 Analisi prima intervista

Nella prima intervista, dopo aver velocemente ricordato lo scopo della ricerca, viene dato allo studente il test.

AS: Posso cominciare da dove voglio io?
Berto: Sì.
[guarda gli esercizi e comincia dall'equazione, iniziando molto velocemente lo svolgimento]

Guardando rapidamente il test, lo studente sceglie di cominciare risolvendo l'equazione in contesto matematico. Analizzando il resto della sua intervista, vedremo che lo studente va spesso verso questo approccio; potremmo ipotizzare che si trovi a suo agio con l'applicazione meccanica di una procedura, abilità principale richiesta nella risoluzione di un'equazione lineare con prodotti notevoli. Dopo aver svolto qualche passaggio, chiedo allo studente di spiegarmi le tecniche utilizzate:

Berto: Ok, sei arrivato ad un risultato. Cos'hai fatto? Puoi raccontarmi?
AS: Allora, prima ho calcolato tutte le parentesi con gli esponenti. Poi ho calcolato questa alla fine, x per la parentesi. Poi avendo tutte le frazioni, tutte le x le ho divise a destra, a sinistra…
[…]
Berto: Qui invece cos'è successo? Ho visto che semplificavi.
AS: x^2 e meno x^2 e x^3 e meno x^3 li ho semplificati perché fanno zero.

AS sa bene ciò che deve fare per arrivare al risultato dell'equazione: sciogliere prima tutte le parentesi e trattare successivamente i monomi, semplificando dove possibile (per esempio, cancellando due monomi opposti *"perché fanno zero").* Poi vorrebbe ricondursi alla forma normale dell'equazione lineare, "$ax = b$", mettendo i termini incogniti come membro di sinistra dell'equazione (*"tutte le x le ho divise a destra, a sinistra",* usa il termine *divise* per intendere il processo di separazione dei termini dell'equazione tra quelli che contengono l'incognita e quelli che non la contengono).

Berto: Queste parentesi come le hai trattate? Qui c'è il quadrato e quindi hai fatto il quadrato, e queste due per esempio [prodotto notevole "somma per differenza"]? Come siamo passati da qua a questa riga qui? Queste parentesi come sono state sciolte?
AS: Ho fatto il prodotto notevole.
[si accorge di aver sbagliato a svolgere il quadrato]
AS: Questo è sbagliato. C'è pure questo [scrive il doppio prodotto]
Berto: Di cosa ti sei accorto?
AS: Mi sono dimenticato, era un prodotto notevole anche questo e questo [indica i due quadrati del binomio presenti nell'esercizio]

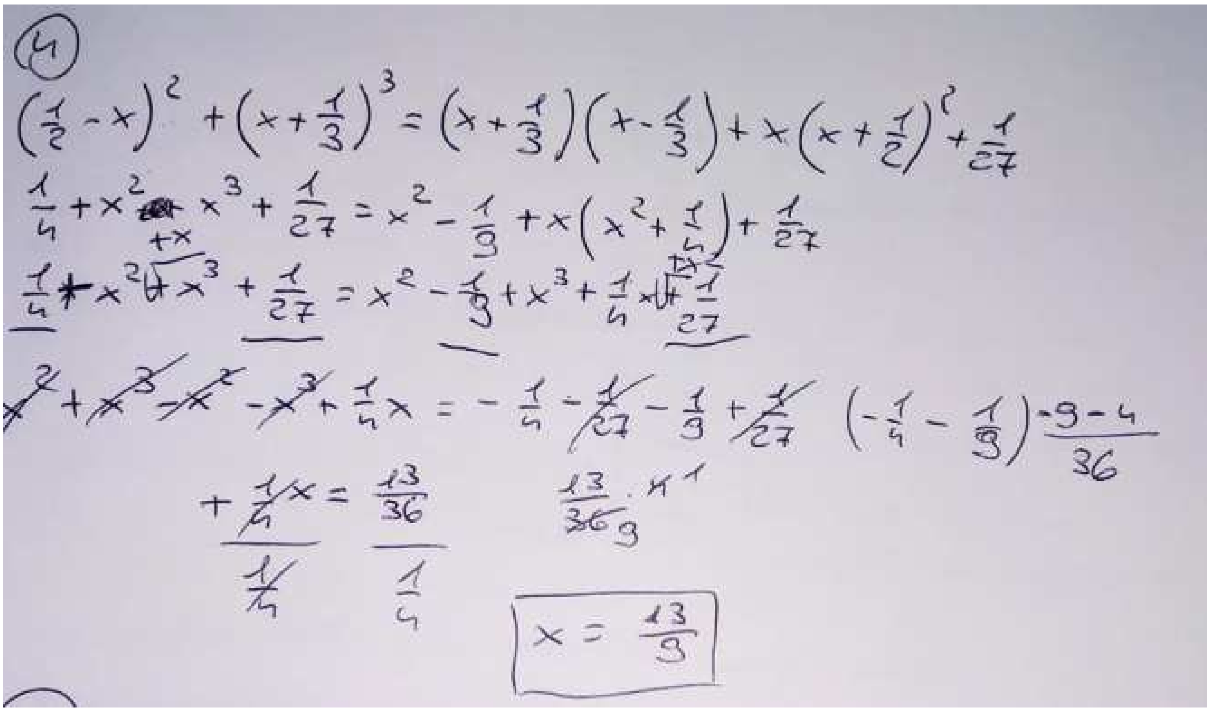


Figura 14: Svolgimento dell'esercizio 4 da parte di AS nell'intervista PRE

Chiedendo ad AS come sia passato dalle due parentesi $(x+\frac{1}{3})(x-\frac{1}{3})$ ai due termini $x^2-\frac{1}{9}$, egli prontamente risponde "*Ho fatto il prodotto notevole",* riconoscendo una sorta di insegnamento ricevuto durante le ore di lezione.

È interessante osservare come l'attivazione della risorsa cognitiva "prodotto notevole" e la successiva giustificazione del passaggio siano decisive nell'innescare il riconoscimento anche di altri "prodotti notevoli", ossia i due quadrati del binomio. Nonostante questo, però, il cubo del binomio è svolto in modo non corretto, elevando al cubo i due termini.

Procedendo sceglie di cimentarsi con il secondo esercizio, ossia la risoluzione del problema di fisica. Dopo aver ricopiato i dati numerici utili, etichettandoli con la lettera standard della grandezza relativa (*m* per massa, *c* per calore specifico, etc.), AS scrive l'equazione:

$$m_{H20}\cdot c_{H20}\cdot(t_e-t_0)=m\cdot c\cdot(t_e-t_0)$$

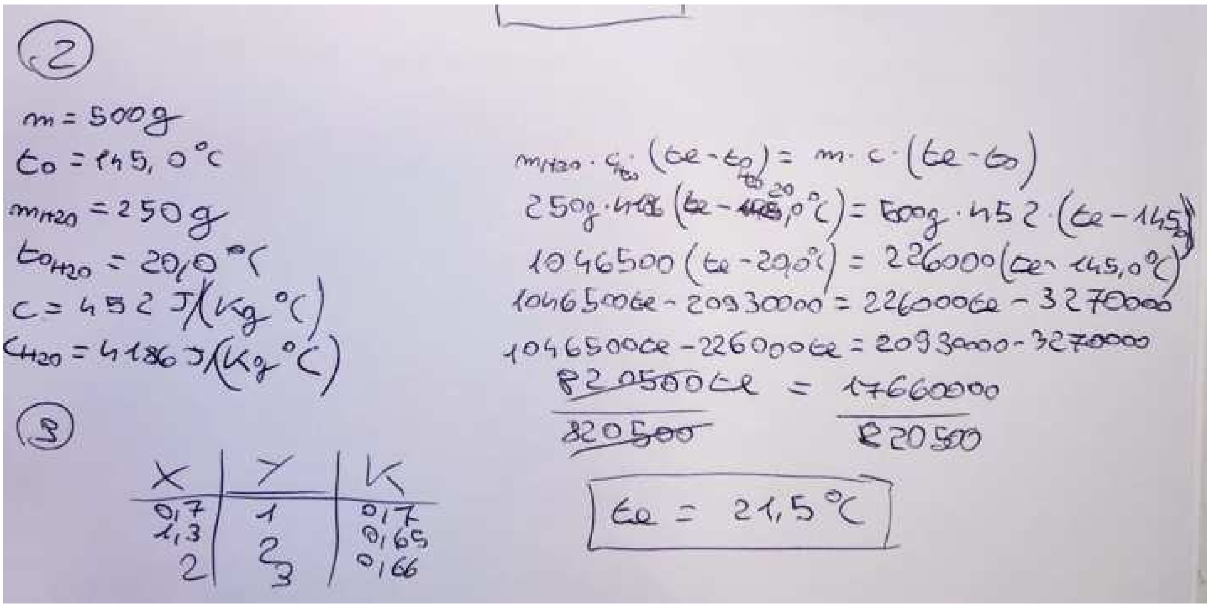


Figura 15: Svolgimento dell'esercizio 2 e 3 da parte di AS nell'intervista PRE

Berto: Questa equazione da dove viene fuori?
AS: È un metodo che ci ha insegnato la prof., fare l'equazione e viene più semplice, per trovare Te.
Berto: Quindi vi ha insegnato questo metodo e ti ricordi quest'equazione?
AS: Sì.

Sebbene assomigli molto alla formula effettivamente corretta, manca un segno "-". Se è vero che assegnare il calore assorbito come positivo e quello ceduto come negativo è una convenzione, è altrettanto vero che il segno è collegato al significato fisico ed è necessario assegnarlo in modo coerente. Dal punto di vista fisico, infatti, l'equazione è derivata uguagliando il calore assorbito da un corpo con il calore ceduto da un altro ed è una stretta conseguenza del primo principio della termodinamica. Riconoscere l'importanza del segno "-" significa quindi comprendere la situazione dal punto di vista della fisica. Non farlo, potrebbe indicare l'attivazione mnemonica di un paradigma risolutivo, dove le abilità algebrico-matematiche sono le uniche utilizzate.

Passiamo ora all'analisi dei giochi epistemici. Nell'analisi dell'approccio di AS, ci è sembrato che il gioco epistemico attivato fosse quello della *Transliteration to Mathematics*, rappresentato nelle sue mosse in Figura 16: egli correttamente identifica le richieste del problema ("*per trovare* T_e"), trova un modello di soluzione che ben si adatta alla situazione in esame ("*è un metodo che ci ha insegnato la prof., fare l'equazione e viene più semplice*") e inserisce i dati del problema; manca la mossa conclusiva della valutazione della soluzione trovata. Questo gioco si caratterizza per l'assenza di una comprensione concettuale e dell'interpretazione fisica dell'esempio preso come modello.

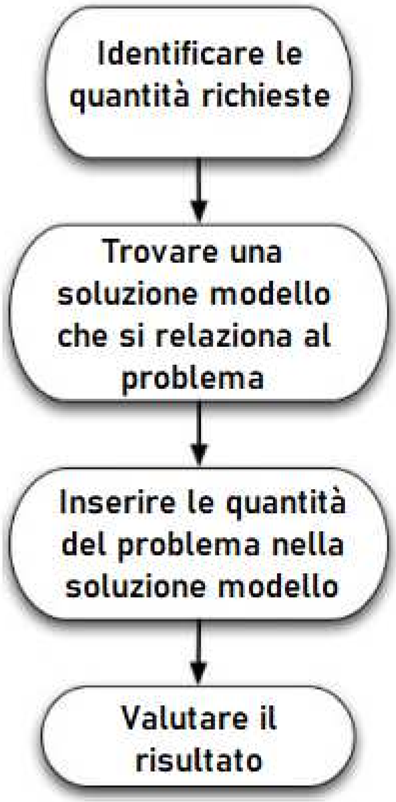


Figura 16: Mosse relative al gioco epistemico Transliteration to Mathematics

Possiamo notare anche come non venga attivato nessun tipo di accorgimento numerico nella risoluzione: né la conversione nelle unità di misura del Sistema Internazionale (lo studente utilizza direttamente il dato sulla massa espressa in "grammi"), né l'uso della notazione scientifica. Nelle prime due righe c'è l'inserimento di alcune unità di misura, poi però tralasciate alla presenza di numeri molto alti.

L'intervista poi segue con il terzo esercizio riguardo la proporzionalità diretta in contesto puramente matematico. Come prima cosa, viene domandato ad AS quali fossero le sue conoscenze sull'argomento:

Berto: Cosa ti ricordi riguardo la proporzionalità diretta?

AS: La mia retta passa per lo zero e non è curva. Che "x" e "y" devono avere lo stesso errore sempre, cioè devono avere sempre lo stesso risultato, costantemente.

Berto: Cosa significa che "x" e "y" devono avere lo stesso risultato?

AS: Che se "x" viene moltiplicato per 3 e "y" pure, cioè allora, se "x" viene moltiplicato per 3, per 2, quello che vogliamo e viene diviso per "y" il risultato è il triplo o il doppio.

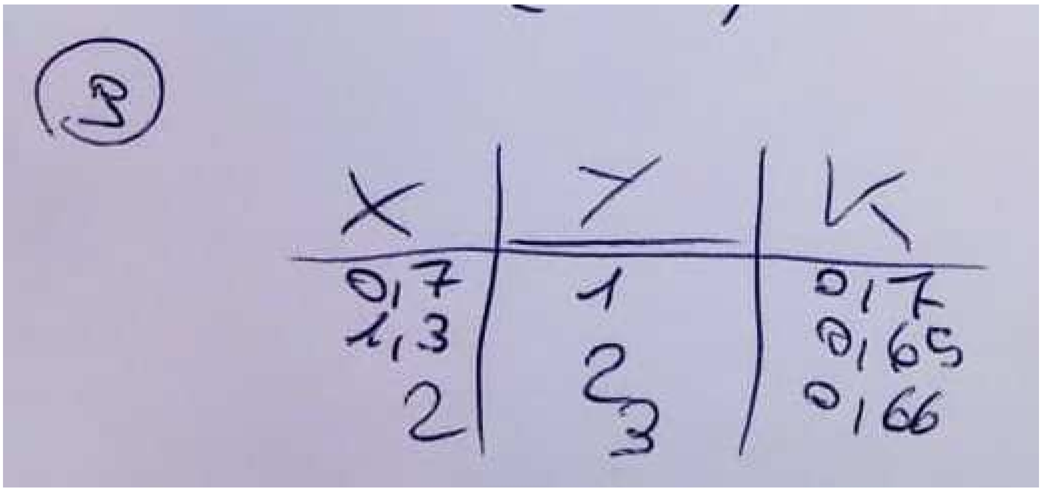


Figura 17: Svolgimento dell'esercizio 3 da parte di AS nell'intervista PRE

AS ricorda che nel concetto di proporzionalità diretta è presente qualcosa di costante ("*"x" e "y" devono avere lo stesso errore sempre, cioè devono avere sempre lo stesso risultato, costantemente"*) e che operativamente è necessario fare una divisione tra le due quantità ("*Se "x" viene moltiplicato per 3, per 2, quello che vogliamo e viene diviso per "y""*). Un'altra abilità che è possibile osservare è l'aver compreso in parte la caratterizzazione grafica della proporzionalità diretta ("*La mia retta passa per lo zero e non è curva"*). Non c'è nessun collegamento tra la pendenza della retta e la costante di proporzionalità.

È interessante però come venga utilizzato il termine "errore" nella sua personale descrizione della proporzionalità diretta. Vengono mescolati due campi: quello della proporzionalità diretta e quello della teoria della misura e dell'errore. Questo viene confermato anche dal passaggio successivo dove cerca numericamente il valore della costante della proporzionalità.

AS: Il "k" non mi è venuto uguale per tutte perché c'è l'incertezza; le ho prese non misurando niente quindi l'incertezza è molta.

È probabile che la lettura di grafico di proporzionalità diretta attivi in AS delle risorse cognitive legate al tema della misura. È possibile ipotizzare ad esempio che abbia visto questo tipo di grafici soprattutto in fisica, per esempio all'interno di esperienze di laboratorio, come nello studio della legge di Hooke, in programma nel primo anno di fisica del Liceo Scientifico. AS sta quindi forse tentando di trasferire le idee e i concetti viste in quell'ambito nell'esercizio proposto, che ha caratteristiche visive (*surface features*) simili.

Come passaggio finale, AS prova a cimentarsi con il primo esercizio. Fin da subito è in grossa difficoltà, quindi è stato indagato il livello base delle conoscenze.

Berto: Se dovessi definire a parole tue che cos'è il calore specifico, cosa diresti?
AS: È pressoché la temperatura di un chilogrammo di una sostanza.
Berto: Fammi un esempio.
AS: L'acqua che è 4186 J su chilogrammo per gradi centigradi. Significa che 1 litro d'acqua, 1 chilo in questo caso, è composta da 4186 joule.

AS sembra aver compreso che il "calore specifico" è una grandezza intensiva (*"...di un chilogrammo di una sostanza"*), anche se lo definisce in maniera scorretta, in quanto lo identifica con una temperatura; probabilmente ricorda che la temperatura è presente nella definizione, ma il ricordo è confuso. Prontamente sa il calore specifico dell'acqua a memoria, enunciato con la relativa unità di misura. Quando però va ad applicarci un contesto perde significato. Viene quindi mostrato come, per sopperire alla difficoltà nella comprensione dell'argomento, AS abbia attivato maggiormente la memoria.

Mostriamo ora la Tabella 9 che riassume l'analisi delle abilità indagate di AS.

Tabella 9: Riepilogo delle valutazioni per AS nell'intervista PRE

Indicatore	Livello 0	Livello 1	Livello 2	Livello 3
Comprensione prop. dir.		✓		
Lettura grafico fis.	✓			
Comprensione c	✓			
Risoluzione eq. mate.		✓		
Risoluzione eq. fis.		✓		
Gioco epistemico	*Transliteration to Mathematics*			

Nell'esercizio 3, la costante di proporzionalità è calcolata erroneamente come $\frac{x}{y}$ e anche la definizione è molto lacunosa. Si è comunque deciso di valutare con il *"livello 1"* in quanto è stata riconosciuta una caratteristica grafica della nozione.
Nell'indicatore *"lettura grafico fis."* si è optato per il *"livello 0"* in quanto, di fronte all'esercizio 1, c'è stato un blocco effettivo che non ha permesso alcuna valutazione.
Per quanto riguarda *"comprensione c"*, sebbene siano presenti dei vaghi ricordi di grandezze in qualche modo citate nella definizione, la comprensione del concetto di calore specifico è pressoché assente, come anche la conoscenza della legge fondamentale della calorimetria.
La procedura risolutiva delle equazioni in contesto matematico è nota ad AS, tuttavia solo uno dei tre prodotti notevoli è stato inizialmente svolto correttamente e senza aiuto esterno.
Per la risoluzione dell'equazione in contesto fisico, l'approccio è base (assente la notazione scientifica o una qualsiasi valutazione del risultato ottenuto) e consiste nel sostituire tutti i dati, aiutato poi dalla calcolatrice. Anche in questo modo meccanico, il risultato verrà errato, data l'assenza del segno negativo.
Nella risoluzione del problema 2, il gioco epistemico attuato è *Transliteration to Mathematics*, come discusso precedentemente.
Concludiamo sottolineando come la tabella riassuntiva rispecchi il percorso scolastico di AS, che aveva avuto il debito formativo in fisica me non in matematica.

3.3.2 Analisi seconda intervista

Procediamo analizzando la seconda intervista di AS, avvenuta a ottobre dello stesso anno. Durante le vacanze estive, lo studente ha seguito il corso della Virtual School, descritto nel paragrafo 2.2. Prima dell'inizio del nuovo anno scolastico, AS ha superato il suo debito formativo in fisica. Questa volta lo studente sceglie di iniziare con il secondo esercizio (problema di fisica).

Berto: Ok qua hai scritto i dati. Che problema è? Di cosa si sta parlando? [l'esercizio 2]
AS: Calorimetria.
Berto: Calorimetria, ok. È un problema che riguarda?
AS: La dispersivi... cioè come spiego, la condivisione di calore.
Berto: Ok, lo scambio di calore tra corpi. Cosa ti ricordi di questa cosa?
AS: Io di solito usavo una formula, che è massa per calore specifico per Δt.

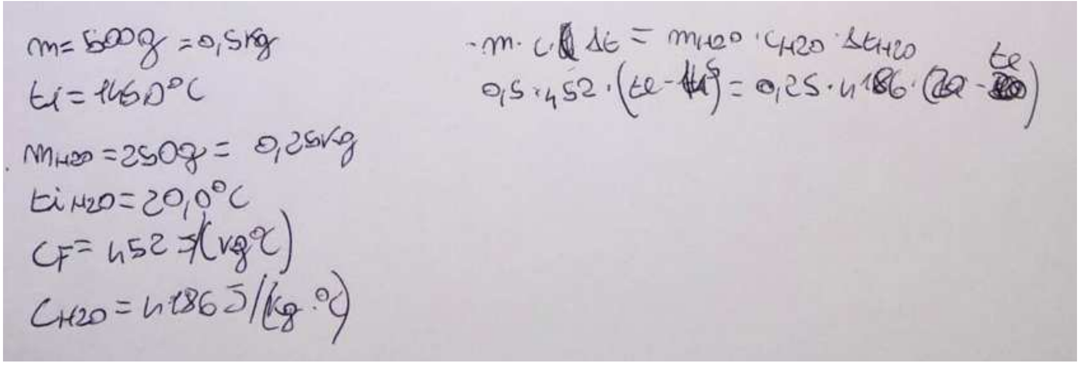


Figura 18: Svolgimento dell'esercizio 2 da parte di AS nell'intervista POST

AS identifica subito che il macro-tema dell'esercizio è la calorimetria e, più nel dettaglio, la "*condivisione di calore*". È interessante notare come venga prima accennata "*la dispersività*", andando ad unire il concetto di scambio di calore tra due corpi e quello di dispersione termica.

L'intervistato ha ancora, come risorsa principale, una formula (la stessa della prima intervista), però stavolta non applica l'equazione e basta: afferma invece "*Io di solito usavo una formula, che è massa per calore specifico per Δt*". C'è traccia di un processo metacognitivo o comunque una maggiore consapevolezza delle proprie risorse. Analizzando il seguito dell'intervista notiamo ulteriori differenze rispetto al pre-test:

Berto: Quindi a sinistra abbiamo mcΔt del ferro e a destra dell'acqua?

AS: Sì, solo che questo Δt bisogna, cioè dobbiamo cambiarlo, perché qua… Allora o mettiamo il meno qua all'inizio [dell'equazione] oppure cambiamo direttamente la formula del Δt.

Berto: Perché?

AS: Perché mettendo il "meno" qua è come se invertissi questi due dati.

Berto: È vero è vero, ma perché hai bisogno di questo "meno"?

AS: Perché non sono uguali. Cioè dicendo così, cioè scrivendo anche il "meno" è come se scrivo che questa massa per calore specifico per Δt del ferro è uguale alla massa per calore specifico per Δt dell'acqua, quindi non c'è scambio di calore, sono uguali.

Berto: Quindi questo "meno" rappresenta lo scambio di calore?

AS: Sì, perché in questo caso il calore del ferro viene dato all'acqua perché è più caldo dell'acqua.

Berto: Quindi "meno" è quando il calore viene dato?

AS: Sì.

Anche solo dal punto di vista della correttezza algebrica, rispetto alla formula usata nella prima intervista, quella scritta in questa occasione contiene "*il meno"*. Rispondendo alla richiesta di chiarimenti, AS dà prima una spiegazione puramente algebrica (*"mettendo il "meno" qua è come se invertissi questi due dati"*), ma poi aggancia un'interpretazione fisica corretta: se non mette il meno, "*non c'è scambio di calore*". Questa frase rende evidente che lo studente stia collegando la matematica con la sua interpretazione fisica. Incoraggiato dall'intervistatore, AS rafforza l'interpretazione: "*Sì, perché in questo caso il calore del ferro viene dato all'acqua perché è più caldo dell'acqua"*. L'intervistato tende ad attivare la propria conoscenza delle "formule" come prima risorsa, ma possiamo osservare come sia stata attivata anche una comprensione della situazione fisica.

Figura 19: Mosse relative al gioco epistemico Mapping Mathematics to Meaning

Il suo nuovo approccio sembra essere inscrivibile nel gioco *Mapping Mathematics to Meaning*, rappresentato nelle sue mosse in Figura 19. AS, infatti, ora parte da un'equazione che relaziona i concetti del problema ("*Io di solito usavo una formula, che è massa per calore specifico per Δt."*) e successivamente spiega il significato del segno negativo, raccontando a parole la relazione che lega tali oggetti matematici. Manca anche in questo caso la mossa finale, la valutazione del "racconto" fisico.

3.4 Un caso di studio: SB

Discutiamo in questo paragrafo un secondo caso studio, relativo allo studente identificato come SB. In questo caso non riportiamo l'intervista nella sua interezza, ma commentiamo alcuni passaggi specifici.

Si tratta di un caso interessante, non solo perché differente dal precedente, ma anche perché ci induce a riflettere sul ruolo della memoria nella risoluzione dei problemi. Talvolta infatti l'attivazione mnemonica, pur risultando un'àncora per lo studente, può sviare dal proprio ragionamento, divenendo così, nel medio termine, addirittura uno strumento peggiorativo delle abilità nel *problem solving.* Come vedremo è questo il caso di SB, che rimanendo fermo nell'attivazione di risorse e strategie puramente mnemoniche subisce, tra l'intervista pre- e quella post-, l'effetto del maggior tempo passato dalla memorizzazione e peggiora le sue abilità risolutive. Anche in questo caso, le immagini sono parti dell'elaborato, consultabile nella sua interezza in Appendice G.

Mettiamo a confronto la risoluzione del secondo quesito di SB nelle due interviste. Di seguito la risoluzione proposta nell'intervista pre:

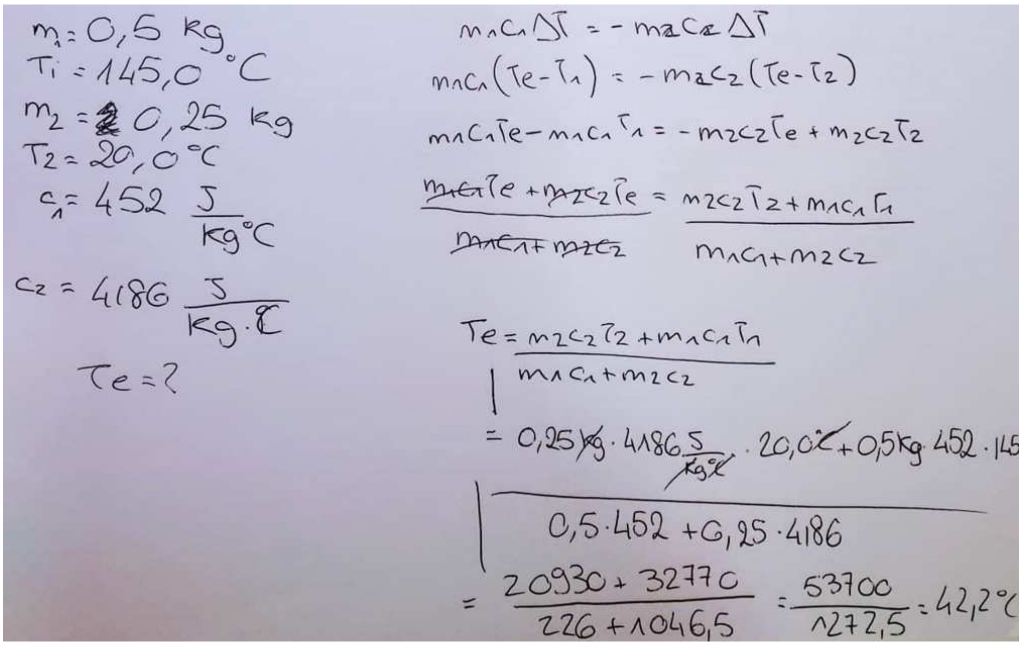


Figura 20: Svolgimento dell'esercizio 2 da parte di SB nell'intervista PRE

Dal punto di vista della forma epistemica, ossia la rappresentazione esterna della soluzione, l'impostazione sembra eccellente: i dati sono stati trascritti già convertiti nell'unità di misura standard, la richiesta è stata identificata e l'equazione di partenza ha un effettivo significato fisico (il calore assorbito è uguale al calore ceduto). SB ha un'ottima abilità nella manipolazione algebrica dell'equazione in contesto fisico e arriva ad esplicitare l'incognita T_e. Solo a quel punto, procede nella sostituzione dei dati, abbozzando anche una semplificazione delle unità di misura nel primo termine, e arriva al risultato corretto. Alla richiesta dell'intervistatore circa il monitoraggio/validazione del risultato, però, afferma *"farei la verifica con $Q = mc\Delta T$"*. È ipotizzabile che SB intendesse sostituire nell'equazione di partenza il valore numerico trovato. Questa risposta sembra suggerire che, nonostante la soluzione apparentemente impeccabile, non ci sia una riflessione circa la situazione fisica reale. Lo studente infatti non si chiede se il risultato trovato (una temperatura di equilibrio pari a 42,2°C) sia ragionevole per la situazione fisica proposta; la sua proposta di "valutazione" dei risultati rimane nell'ambito algebrico.

Dall'intervista si evince in effetti che il gioco epistemico intrapreso da SB sia *Transliteration to Mathematics.* Lo studente ricorda un modello di risoluzione offerto dall'insegnante e, seppur con ottime abilità di tecnica matematica, emula quel paradigma, non menzionando mai esplicitamente un'argomentazione di tipo fisico o comunque legata al contesto fisico.

Nel post-test, SB risolve il medesimo quesito in questo modo:

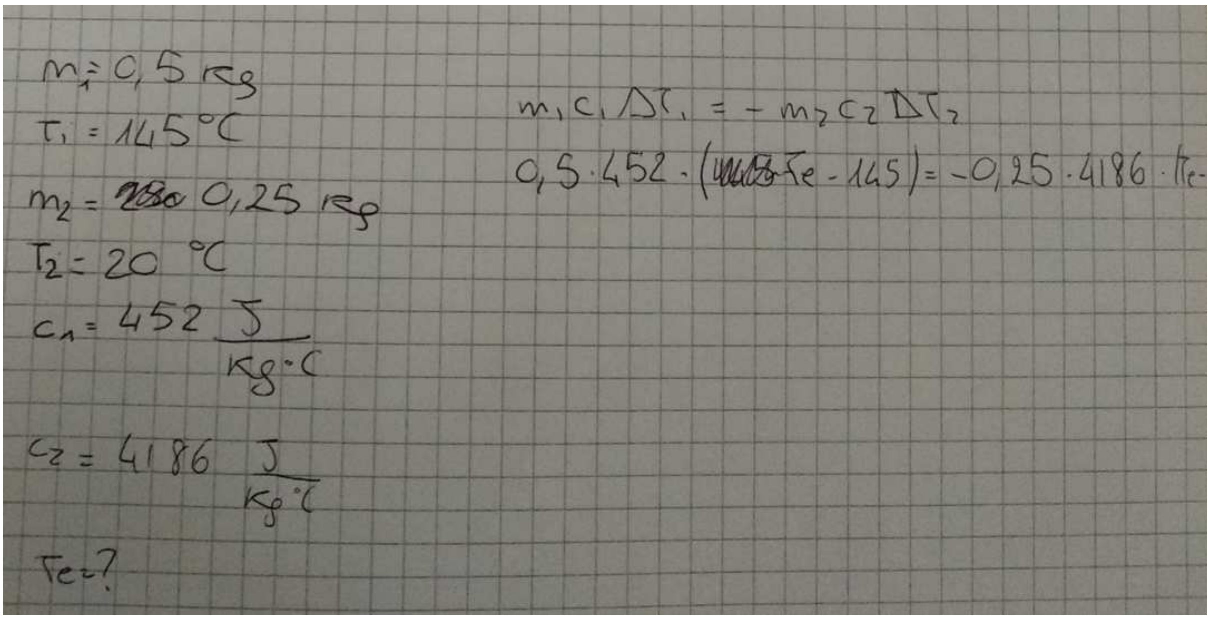


Figura 21: Svolgimento dell'esercizio 2 da parte di SB nell'intervista POST

Il punto di partenza è lo stesso, ma lo sviluppo è sensibilmente diverso. Non c'è più nessuna manipolazione algebrica e il gioco epistemico iniziato è chiaramente quello del *Recursive Plug-and-Chug,* rappresentato nelle sue mosse in Figura 22. SB infatti, dopo aver scritto l'equazione, sostituisce subito i dati per un calcolo diretto. Non solo la comprensione del problema fisico è nulla, ma anche la forma epistemica è minima.

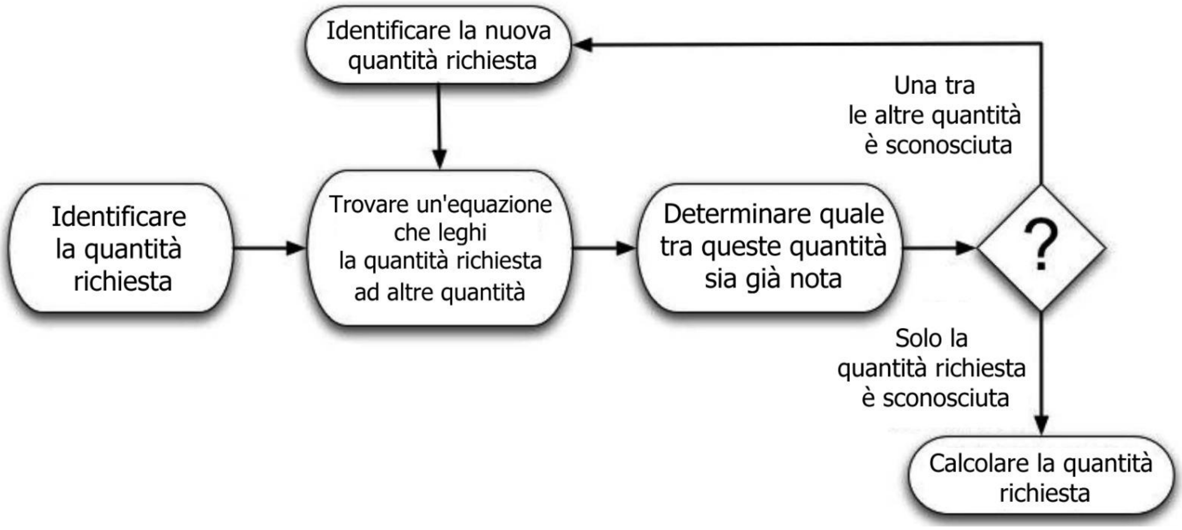


Figura 22: Mosse relative al gioco epistemico Recursive Plug-and-Chug

Si riporta a seguire una parte della seconda intervista:

[secondo esercizio]
Berto: Cos'hai fatto? Raccontami.
SB: Ho fatto la formula inversa per trovare la temperatura di equilibrio.
Berto: La prima cosa che hai scritto cos'è e da dove ti viene fuori?
SB: È la formula del calore…
Berto: È vero, centra il calore. Ma ad esempio qui [a sinistra dell'equazione] mi hai scritto una cosa e qui [a destra] la stessa cosa ma con il meno. Perché?
[vuoto]

Quando gli viene chiesto in che modo ha risolto il quesito, si può notare che dichiara di aver fatto ricorso alla formula senza procedere ad alcun ragionamento fisico ("*Ho fatto la formula inversa per trovare la temperatura di equilibrio*"). Se sollecitato a proseguire la spiegazione, lo studente non dà alcuna risposta.

Tale cambio di resa è confermato anche da come si pone nei confronti del primo quesito. Nell'intervista di giugno, SB ricorda che la legge fondamentale della calorimetria è "$Q = mc\Delta T$" e, dal punto di vista tecnico, risolve correttamente l'esercizio. Nel secondo colloquio, al contrario, ripensando alla stessa legge, pronuncia a voce alta solo il monomio "$mc\Delta T$". Soltanto con un aiuto esterno, lo studente riesce a ricordare la formula e procede alla risoluzione numerica. Riportiamo le immagini del quesito svolto nel pre-test e poi successivamente nel post-test.

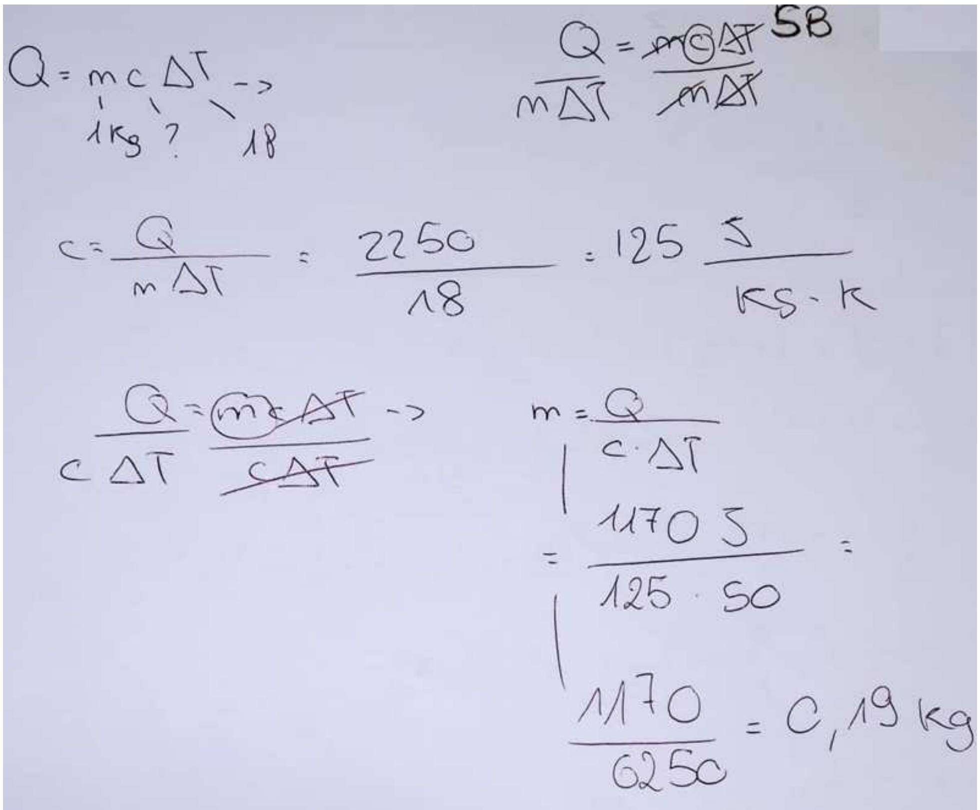


Figura 23: Svolgimento dell'esercizio 1 da parte di SB nell'intervista PRE

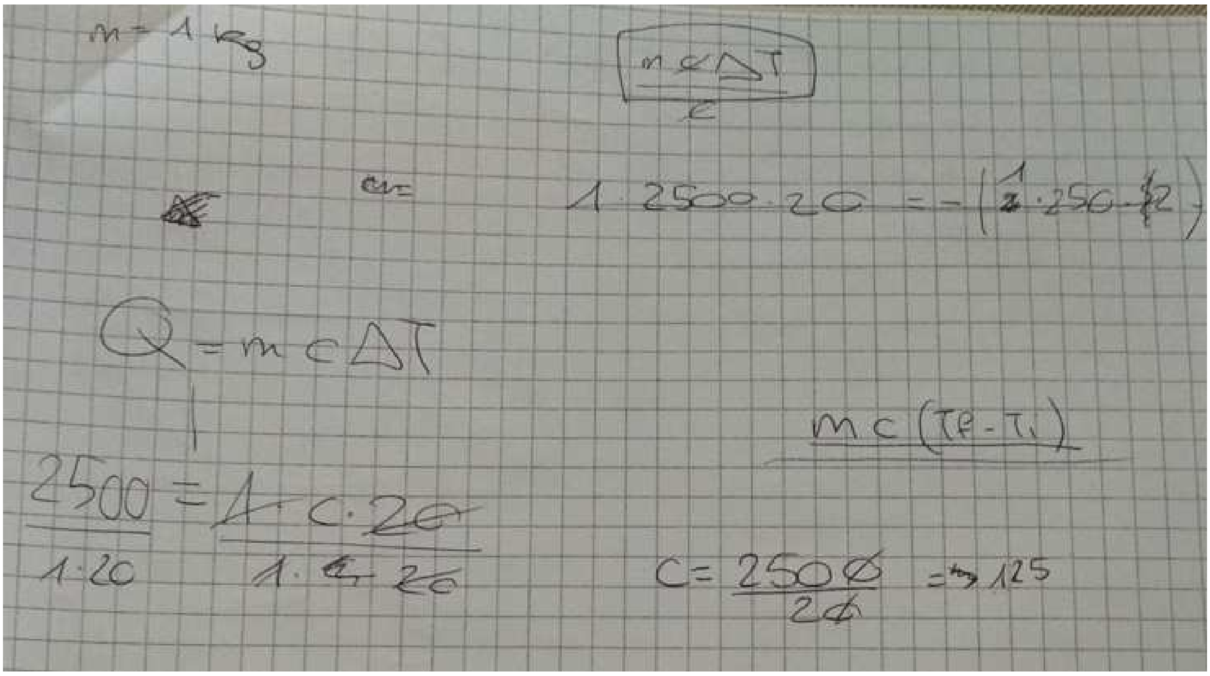


Figura 24: Svolgimento dell'esercizio 1 da parte di SB nell'intervista POST

Dalla Figura 23 e dalla Figura 24 si può notare come l'ordine con cui venga svolto l'esercizio sia diverso. Nel secondo caso lo spazio di lavoro risulta più disordinato, riflettendo una maggior confusione dello studente.
In particolare, nel post-test si osserva un tentativo di divisione per c di un monomio senza avere di fronte un'equazione. Questo rappresenta l'esempio di attivazione di un meccanicismo acquisito senza la comprensione del principio di fondo (in tal caso, il secondo principio di equivalenza delle equazioni).

Dall'esame della risoluzione di questi due quesiti nel pre e post test, possiamo quindi ipotizzare che la qualità del problem solving suggerita dalla forma epistemica prodotta da SB nella prima intervista fosse probabilmente "solo" una conseguenza di un ricordo più vivido, piuttosto che di una comprensione profonda della situazione fisica e matematica. Nel medio termine, il richiamo alla memoria ha, per forza di cose, un'intensità minore ed emergono le difficoltà dello studente nell'impostare il problema.

4 Conclusioni e prospettive di ricerca futura

In questo lavoro di tesi abbiamo indagato in che modo gli studenti utilizzano e integrano le proprie conoscenze di matematica nello studio della fisica nella scuola secondaria di secondo grado. Ci siamo in questo modo inseriti in un filone di ricerca molto attuale, che comprende diverse sfaccettature e aspetti specifici. In particolare, in questo studio abbiamo analizzato le strategie di problem solving degli studenti in problemi che richiedono l'uso di strumenti matematici (confrontando gli approcci in contesto puramente matematico e in contesto fisico) e abbiamo riflettuto sulle azioni che può mettere in atto un insegnante per favorire un uso più efficace della matematica nell'apprendimento della fisica. Il contesto in cui si è svolto lo studio sono le classi prime del Liceo Scientifico "J. Da Ponte" di Bassano del Grappa (VI). Ci siamo quindi concentrati su un gruppo di studenti in difficoltà con la fisica, che hanno svolto durante l'estate un corso estivo ("UniPD Virtual School") progettato tenendo conto dei risultati della ricerca didattica disciplinare.

Siamo partiti da un'analisi della letteratura circa le strategie di problem solving degli studenti in fisica e circa il processo di modellizzazione dei problemi di fisica in ambito didattico.

Per categorizzare le strategie di problem solving ci siamo ispirati al modello degli *epistemic games* di Tuminaro & Redish (2007), che individuano una serie di "giochi epistemici" che gli studenti tipicamente utilizzano per approcciarsi a un problema: ad esempio, nel *Recursive Plug-and-Chug* gli studenti identificano la quantità da ricavare e cercano una relazione - o una catena di relazioni - che possa portarli a risolvere l'equazione che ha tale variabile come incognita, senza prestare attenzione al meccanismo fisico; nel *Mapping Meaning to Mathematics*, invece, gli studenti partono da una comprensione concettuale di una situazione fisica e poi procedono con la matematizzazione e la soluzione.

Per quanto riguarda il processo di modellizzazione fisico-matematica ci siamo concentrati sul modello di Uhden et al. (2012), che suggerisce una serie di step per i processi di "matematizzazione" e "interpretazione". Tali passaggi sono utili non solo per comprendere la complessa interconnessione tra matematica e fisica che si attua nella risoluzione di un problema, ma anche come guida per l'insegnante per accompagnare gli studenti ad apprendere in modo più consapevole strategie di problem solving efficaci. Utilizzando questo modello, abbiamo infatti progettato le lezioni del corso estivo della Virtual School. Si sono analizzate quindi nel dettaglio le strategie risolutive verso i problemi di fisica da parte di un campione di 7 partecipanti, confrontando gli approcci pre/post, indagando l'uso di alcuni strumenti matematici specifici (grafici; equazioni) e analizzando nel dettaglio alcuni casi di studio.

Grazie ai risultati descritti nel capitolo precedente, proviamo ora a rispondere alle domande di ricerca che hanno orientato il lavoro di tesi.

RQ 1: Quali processi e strategie adottano gli studenti nel risolvere problemi di fisica che richiedono l'uso di strumenti matematici? Ci sono differenze tra il contesto puramente matematico e il contesto fisico?

All'interno del campione analizzato, le strategie adottate dagli studenti sono principalmente ascrivibili ai giochi epistemici *Recursive Plug-and-Chug* e *Transliteration to Mathematics*, per un totale di 5 rilevazioni su 7 nel pre-test e 4 su 7 nel post-test. Questo tipo di giochi epistemici è caratterizzato dall'assenza di attivazione di risorse cognitive quali, per esempio, la conoscenza intuitiva e l'interpretazione fisica della situazione. Vengono invece usate principalmente la comprensione sintattica dei simboli fisici e delle equazioni e le attivazioni mnemoniche.

Dopo il corso estivo, si è rilevata una lieve ma maggiore attenzione alla comprensione concettuale. Per esempio, nel primo caso studio analizzato (AS), lo studente mostrava significativamente più consapevolezza dello strumento matematico nel contesto fisico. D'altra parte, è stata comunque osservata una resistenza diffusa nell'uso sistematico della memoria, anche a discapito del rendimento, come mostrato dal secondo caso studio (SB).

Nella lettura di un grafico di proporzionalità diretta non ci sono state grosse differenze tra contesto puramente matematico e contesto fisico. Nel pre-test, la situazione era leggermente migliore in fisica, mentre nel post-test la situazione nei due contesti si è eguagliata. La difficoltà più comune nel contesto fisico è stata nel riconoscere correttamente le grandezze degli assi; in ambito matematico, invece, i problemi principali erano legati al concetto di proporzionalità diretta e quindi alla determinazione numerica della costante di proporzionalità.

Per quanto riguarda la risoluzione di un'equazione, invece, nei due contesti si osservano notevoli differenze. Nel contesto puramente matematico, risolvere un'equazione è abilità acquisita dalla maggior parte degli studenti e ancor più consolidata dopo il corso estivo ed eventuale ulteriore studio individuale. Le difficoltà più riscontrate in ambito matematico nel pre-test sono state nel riconoscere e svolgere correttamente i prodotti notevoli, in particolar modo il cubo di un binomio. Nel post-test, la maggior parte degli studenti era in grado di risolvere correttamente l'equazione proposta.

Nel contesto fisico, invece, la risoluzione dell'equazione nel pre-test era particolarmente lacunosa e anche nel post-test si sono osservate difficoltà diffuse. La quasi totalità del campione sostituiva immediatamente il dato numerico nell'equazione, spesso non convertito nell'unità di misura fondamentale, mostrando però difficoltà a maneggiare numeri elevati. Nessuno ha usato la notazione scientifica.

Questi dati, seppur con i limiti connaturati allo studio (il campione è piccolo, costituito da studenti in difficoltà, frequentanti una sola scuola), si allineano con i risultati della letteratura (es. Uhden et al., 2012; Pospiech, 2019) che sottolineano come spesso il ruolo della matematica in fisica sia visto come puramente "tecnico" e viceversa la fisica sia intesa spesso come una mera applicazione di formule matematiche. Per esempio, come emerge dalle interviste, per i partecipanti allo studio la definizione di un concetto coincide quasi sempre con una "formula" che contenga il simbolo corrispondente al concetto e che in qualche modo aiuti la risoluzione di un esercizio. In questo modo, lo studio di una situazione fisica diventa un esercizio matematico con un contesto pragmatico, e la procedura risolutiva ha come scopo ultimo arrivare a un valore numerico. L'applicazione tecnica della matematica è invece solo una parte del quadro generale, in cui dovrebbe essere riconosciuto e supportato un ruolo strutturale della matematica, che deve avere come obiettivo la comprensione concettuale della situazione fisica studiata.

RQ 2: Quali azioni può mettere in atto l'insegnante per supportare un uso consapevole e significativo della matematica nella fisica?

Come abbiamo visto, uno dei vantaggi del modello di Uhden et al. è l'offrire una struttura teorica adeguata al potenziamento del ruolo strutturale della matematica in fisica. Nonostante i limiti del nostro studio, sia nel numero dei partecipanti che nella durata del corso estivo (8 ore), si sono rilevate tracce di un cambiamento nell'approccio alla risoluzione dei problemi di fisica, in termini soprattutto di una maggiore consapevolezza dei processi di matematizzazione e interpretazione. Il dato quantitativo è ancora poco significativo in quanto i cambiamenti sono stati rilevati in pochi studenti, i quali mostrano ancora insicurezza nell'approccio e un uso ancora molto importante di risorse legate alla memoria e all'applicazione di procedure routinarie. Pensiamo però che un utilizzo più costante del modello nel corso delle lezioni curricolari, reso esplicito dall'insegnante in alcuni esercizi modello e ripreso poi con continuità, potrebbe, nel tempo, favorire un cambiamento più significativo e consolidato.

Un'altra delle strategie che possono aiutare la consapevolezza da parte degli studenti del ruolo strutturale della matematica in fisica è creare costantemente dei collegamenti tra le due discipline. Creare sempre più esempi e rimandi tra matematica e fisica, sia nei concetti che nelle procedure, può aiutare a coglierne l'interconnessione, superando la visione della fisica come mera applicazione tecnica della matematica. Grazie all'attenzione posta nella progettazione della Virtual School a questo aspetto, è possibile che il corso estivo abbia contribuito a offrire una prospettiva diversa. Anche in questo caso, è importante che gli insegnanti siano per primi consapevoli della ricchezza e complessità dell'interazione tra matematica e fisica e offrano agli studenti occasioni per coglierla e comprenderla. Una strategia efficace è ad esempio offrire diverse rappresentazioni matematiche di un concetto fisico (grafici, equazioni, spiegazioni a parole, etc.) e allenare gli studenti al passaggio tra l'una e l'altra rappresentazione ("*representational fluency*"). Un'altra attenzione da avere è quella di proporre esercizi e problemi in cui gli studenti possano mettere in campo e valorizzare tutte le loro risorse cognitive e di ragionamento, non solo quelle di attivazione mnemonica o applicazione tecnica.
Sono attualmente in corso presso l'Università di Padova alcune sperimentazioni ("FisicaMente al Liceo") basate proprio sul modello di Uhden et al. e sulla cura del rapporto tra matematica e fisica, che stanno esplorando l'efficacia degli approcci proposti.

Per quanto riguarda infine il corso estivo della "Virtual School", dalla cui organizzazione è nata l'idea per questo lavoro, sono necessarie ulteriori ricerche per studiare più a fondo l'effetto del corso sull'apprendimento della fisica e, in particolare, sul consolidamento del ruolo strutturale della matematica. Sarà però sicuramente interessante continuare lo studio, allargando il campione e studiando l'effetto della Virtual School in più contesti, intesi sia come diversi ambiti della fisica che diverse strutturazioni del corso.
In conclusione, la presente tesi si pone come studio di una delle prime sperimentazioni che ha permesso di mettere in relazione il modello di Uhden et al. con l'effettiva pratica didattica. Per quanto siano necessarie ulteriori ricerche, comprendere quali ragionamenti mettono in campo gli studenti e, di risposta, quali azioni può attuare l'insegnante, è alla base per la progettazione di interventi didattici più efficaci. A livello personale, sono convinto che questo studio abbia contribuito alla mia formazione didattica circa il ruolo e l'uso della matematica in fisica, come anche riguardo gli approcci e le difficoltà riscontrate dai ragazzi in queste due discipline. Sono fiducioso che l'applicazione di questi metodi all'interno di una progettualità interdisciplinare scolastica potrà aiutarmi sensibilmente.

Bibliografia

Blum, W., & Leiß, D. (2005). "Filling up" the problem of independence-preserving teacher interventions in lessons with demanding modelling tasks. In *Working group 13: Applications and modelling*, p. 1623.

Borromeo Ferri, R. (2006). Theoretical and empirical differentiations of phases in the modelling process. *ZDM, 38*(2), 8695.

Bing, Thomas J., and Edward F. Redish. 'The Cognitive Blending of Mathematics and Physics Knowledge'. In *AIP Conference Proceedings*, 883:26–29. Syracuse, New York (USA): AIP, 2007. https://doi.org/10.1063/1.2508683.

Ceuppens, Stijn, Laurens Bollen, Johan Deprez, Wim Dehaene, and Mieke De Cock. '9th Grade Students' Understanding and Strategies When Solving x(t) Problems in 1D Kinematics and y(x) Problems in Mathematics'. *Physical Review Physics Education Research* 15, no. 1 (3 January 2019): 010101. https://doi.org/10.1103/PhysRevPhysEducRes.15.010101.

Cobb, C. A., C. T. Watson, and S. R. Ellis. 'Establishing Best Practices for Effective Online Learning Modules: A Single Institution Study'. *Medical Science Educator* 28, no. 4 (December 2018): 683–91. https://doi.org/10.1007/s40670-018-0613-7.

Collins, A., & Ferguson, W. (1993). Epistemic forms and epistemic games: Structures and strategies to guide inquiry. *Educational Psychologist, 28*(1), 25–42. https://doi.org/10.1207/s15326985ep2801_3

Gingras, Yves. 'What Did Mathematics Do to Physics?' *History of Science* 39, no. 4 (December 2001): 383–416. https://doi.org/10.1177/007327530103900401.

Hill, M, M D Sharma, and H Johnston. 'How Online Learning Modules Can Improve the Representational Fluency and Conceptual Understanding of University Physics Students'. *European Journal of Physics* 36, no. 4 (1 July 2015): 045019. https://doi.org/10.1088/0143-0807/36/4/045019.

Hudson, H. T., & McIntire, W. R. (1977). Correlation between mathematical skills and success in physics. *American Journal of Physics, 45*(5), 470–471.

Ivanjek, Lana, Ana Susac, Maja Planinic, Aneta Andrasevic, and Zeljka Milin-Sipus. 'Student Reasoning about Graphs in Different Contexts'. *Physical Review Physics Education Research* 12, no. 1 (16 February 2016): 010106. https://doi.org/10.1103/PhysRevPhysEducRes.12.010106.

Karam, R., Uhden, O., Höttecke, D. (2019). The "Math as Prerequisite" Illusion: Historical Considerations and Implications for Physics Teaching. In: Pospiech, G., Michelini, M., Eylon, BS. (eds) *Mathematics in Physics Education*. Springer, Cham, pp. 37–52. https://doi.org/10.1007/978-3-030-04627-9_2

Nguyen, Dong-Hai, and N. Sanjay Rebello. 'Students' Understanding and Application of the Area under the Curve Concept in Physics Problems'. *Physical Review Special Topics - Physics Education Research* 7, no. 1 (28 June 2011): 010112. https://doi.org/10.1103/PhysRevSTPER.7.010112.

Pospiech, G. (2019). Framework of Mathematization in Physics from a Teaching Perspective. In: Pospiech, G., Michelini, M., Eylon, BS. (eds) *Mathematics in Physics Education*. Springer, Cham, pp. 1–33. https://doi.org/10.1007/978-3-030-04627-9_1

Redish E. F. (2002). *Teaching Physics with the Physics Suite* (Maryland: University of Maryland Physics Education Research Group)

Redish, E. F. (2006). Problem solving and the use of math in physics courses. In *ArXiv physics e-prints invited talk presented at the conference, world view on physics education in 2005: Focusing on change, Delhi, August 21–26, 2005. To be published in the proceedings, arXiv:physics/0608268.*

Redish, E. F., & Bing, T. J. (2009). Using math in physics: Warrants and epistemological frames. In D. Raine, C. Hurkett & L. Rogers (Eds.) *Physics community and cooperation, Vol. 2. GIREP-EPEC & PHEC 2009 international conference*, University of Leicester, Leicester , UK.

Redish, Edward F. 'Using Math in Physics: Overview'. *The Physics Teacher* 59, no. 5 (May 2021): 314–18. https://doi.org/10.1119/5.0021129.

Tuminaro, Jonathan, and Edward F. Redish. 'Elements of a Cognitive Model of Physics Problem Solving: Epistemic Games'. *Physical Review Special Topics - Physics Education Research* 3, no. 2 (6 July 2007): 020101. https://doi.org/10.1103/PhysRevSTPER.3.020101.

Uhden, Olaf, Ricardo Karam, Maurício Pietrocola, and Gesche Pospiech. 'Modelling Mathematical Reasoning in Physics Education'. *Science & Education* 21, no. 4 (April 2012): 485–506. https://doi.org/10.1007/s11191-011-9396-6.

Appendice

Appendice A: Trascrizione interviste ed elaborato AP

Seconda intervista

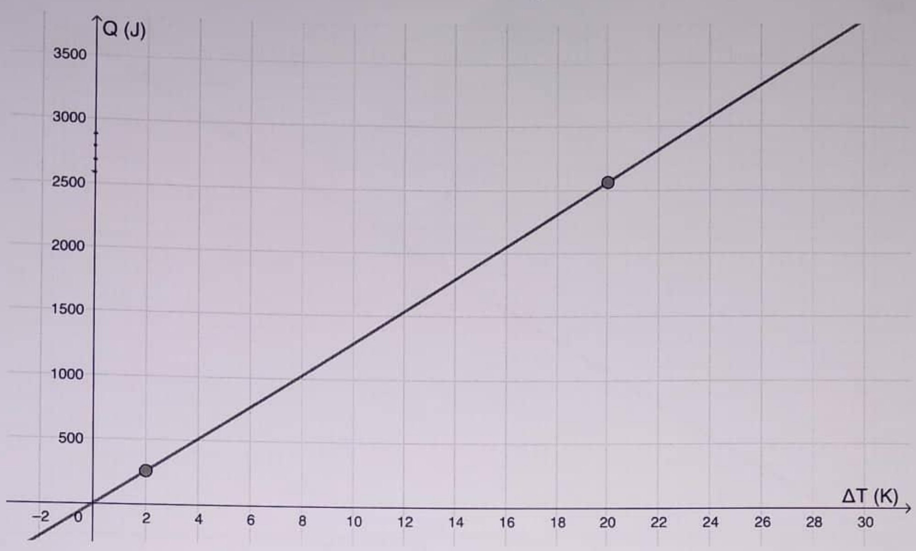
Lippiello: Allora adesso ci sarebbe questa cosa qui, giusto per vedere un po' i ragionamenti, vai tranquilla, non c'è nessun voto, nessuno solo per riprendere un po' le cose. Se c'è qualche formula che non ti ricordi non ti preoccupare te la dico io, solo per vedere se qualcosina poi è rimasto anche di... Allora [legge l'esercizio]. Qui c'è il calore, qui c'è la temperatura
AP: Quindi il calore specifico si calcolava calore fratto... Mi sembra il calore fratto delta T.
Lippiello: Sì, e c'era anche in mezzo...
AP: E la massa. Per la massa.
Lippiello: Esatto, qua sotto sì. Però tanto è 1 quindi...
AP: Quindi il calore è...
Lippiello: Sì circa eh. Sì, più o meno a metà strada, poco meno. Vediamo, tu hai messo, se fosse proprio a metà, 250. Se vuoi usare anche questo va benissimo. Sì, Eh, aspetta, però mi hai preso questo punto.
AP: E quindi 250 diviso 2.
Lippiello: Cioè il delta T è 2, se invece usi la differenza tra questi due dovevamo vedere anche la differenza tra gli altri due. Però va bene prendere questo punto, allora il delta T però... Scrivilo sì, non importa il conto sì e quello che viene viene
AP: E invece qua è venti...
Lippiello: Qua sotto. No, tranquilla, allora tu io hai letto qua e tu mi hai detto questo asse quindi in corrispondenza... Eh sì.
AP: E quindi questo?
Lippiello: Ci sono dei punti non è detto che ti servano tutti e due insomma
AP: Ah quindi sì, sì Eh.
Lippiello: Puoi anche fare così. Sì, sì. Fa quello che fa non importa. Prova a farmi questo qua

[secondo esercizio]
AP: Questo? Massa 500 grammi che magari portati a chilogrammi...
Lippiello: Sì, non occorre che fai tutti i conti anche a quello che dici come ragionamento [va bene]
AP: Sì è che di solito mi scrivo.
Lippiello: Certo, certo. Va benissimo. […] Non è per vedere cosa vi ricordate a livello di memoria, ma come procedure sai, tranquilla. Se poi non ti ricordi una formula basta che me la chiedi
AP: Allora io questa me l'ero imparata a memoria, oppure cioè, io ho il PDP, quindi avevo le formule quindi diciamo che mi sono imparata procedure
Lippiello: Capito, ho capito, allora passiamo a un altro piano. con la formula tu metteresti dentro e ok. E se ti chiedessi soltanto così a livello proprio così qualitativo a parole che cosa sta succedendo, me lo riusciresti a descrivere?
AP: C'è appunto un blocco di ferro, quindi una massa con una sua temperatura che viene immerso all'interno di un contenitore con dell'acqua. Quindi diciamo che si uniscono questi due, diciamo materiali cioè anche le loro temperature e ovviamente la temperatura che disperderà il calore sarà quella del ferro perché è più calda ed è quella che assorbirà più calore sarà quella dell'acqua e quindi poi si dovrà raggiungere una temperatura che equilibrerà.

Lippiello: Perfetto, perfetto, quindi la situazione fisica è chiara insomma. E poi il conto si farebbe con quello che hai, ok. Andiamo un attimo qua [terzo esercizio]. Questo è un contesto solo matematica, questo era un contesto fisico, adesso ti chiederei sapendo che x e y, sono i due assi...
AP: ...sono direttamente proporzionali, calcola dal grafico la costante di proporzionalità. Quindi k sarebbe uguale a y fratto x
Lippiello: Bravissima, scrivilo pure. E vedi dove si vede meglio il puntino insomma, se ce n'è uno che si vede un pochino meglio
AP: Questo?
Lippiello: Anche a me ispira.
AP: Quindi sei... quattro...
Lippiello: Benissimo. E qui [quarto esercizio] giusto per iniziarla, insomma, giusto se, per capire se, ma magari me lo dici anche a voce, di solito le equazioni ti vengono, non ti vengono, hai problemi nei conti?
AP: Eh sì, cioè questo è con i prodotti notevoli e questo è il quadrato di un binomio. [...] Questo è un trinomio quindi...
Lippiello: Sì, sì tranquilla. Questi sono i prodotti notevoli e li hai riconosciuti e poi si applica. Qual è l'obiettivo poi dell'equazione, cosa faresti una volta che hai sciolto tutti i conti?
AP: Allora le x da una parte e i numeri invece dall'altra e poi sommo anche quelli e poi divido la x per farla andare via e si vede cosa viene fuori.
Lippiello: Ok, ok. Perfetto, perfetto. Volevo soltanto... Tra questi due grafici qua [primo e terzo esercizio], questo è in contesto fisico e questo invece è in contesto matematico. Qui non hai avuto nessun tipo di dubbio a fare il conto qui invece forse ti ha confuso il doppio punto. Però era la stessa cosa. Vedi è una retta, diciamo che qui erano numeri un po' più brutti rispetto a questi però il senso era lo stesso no? Perché la massa era di un chilo quindi qua non c'entrava e dovevi proprio fare il rapporto tra queste due di questo punto, di questo punto o di un altro se ce n'era un altro in mezzo che andava meglio. Ecco, giusto per abituarti anche in futuro. Bene che tu il contesto matematico ce l'hai, ecco sappi che a volte cambia solo il contesto ma lo strumento è lo stesso insomma ecco quindi adesso che le mettiamo a confronto forse si vede di più che sono la stessa richiesta diciamo.

Prima intervista

1) Considera un campione di 1 kg di piombo. Ricava dal grafico il suo calore specifico.



$c = 130 \ \frac{J}{kg \cdot K}$

Se vengono forniti 1170 J di calore a un oggetto di piombo e si osserva una variazione di temperatura pari a 50 K, quanto vale la massa dell'oggetto?

$\Delta T = 50 \ K \qquad m = ? \qquad \frac{Q}{\Delta T} \cdot c \qquad \frac{J}{}$

$Q = 1170 \ J$

2) Un blocco di ferro di massa 500 g ed alla temperatura iniziale di 145,0 °C viene immerso in 250 g di acqua alla temperatura di 20,0 ° C.
Sapendo che non ci sono dispersioni termiche e che il calore specifico del ferro è 452 J/(kg °C) e quello dell'acqua è 4186 J/(kg °C), calcolare la temperatura di equilibrio che raggiunge il sistema.

$\underset{(acqua)}{Q_{ass.}} = -\underset{(ferro)}{Q_{ced.}} \qquad m_1 \cdot c_1 \cdot (T_e - T_1) = -m_2 \cdot c_2 \cdot (T_e - T_2)$

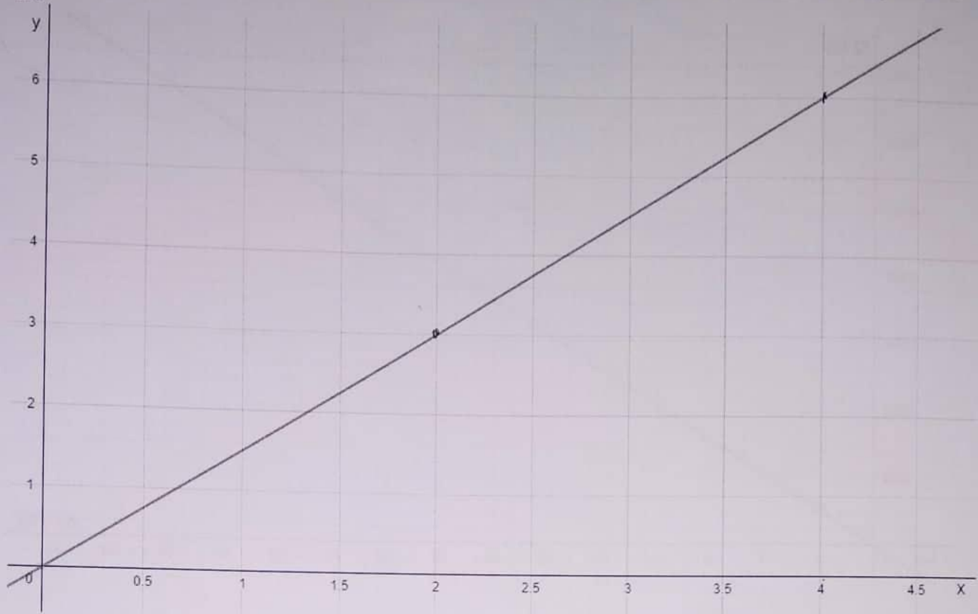
$m_{ferro} = 500 \ g \qquad m_{acqua} = 250 \ g$

$t_1 = 145{,}0 \ °C \qquad t_2 = 20{,}0 \ °C$

$c_1 = 452 \ \frac{J}{kg \cdot °C} \qquad c_2 = 4186 \ \frac{J}{kg \cdot °C}$

$T_e = ?$

3) Sapendo che x e y sono direttamente proporzionali, ricava dal grafico la costante di proporzionalità



$K = \frac{x}{y}$ $\qquad \frac{2}{3} = \qquad \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

4) Risolvi la seguente equazione

$$\left(\frac{1}{2}-x\right)^2+\left(x+\frac{1}{3}\right)^3=\left(x+\frac{1}{3}\right)\left(x-\frac{1}{3}\right)+x\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{27}$$

$$\frac{1}{4} - x + x^2 + x^3 + x^2 + \frac{1}{3}x + \frac{1}{27} = x^2 - \frac{1}{9} + x\left(x^2 + x + \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{27}$$

$$\frac{1}{4} - x + \cancel{x^2} + \cancel{x^3} + \cancel{x^2} + \frac{1}{3}x + \cancel{\frac{1}{27}} = \cancel{x^2} - \frac{1}{9} + \cancel{x^3} + \cancel{x^2} + \frac{1}{4}x + \cancel{\frac{1}{27}}$$

$$x + \frac{1}{3}x - \frac{1}{4}x = -\frac{1}{4} - \frac{1}{9}$$

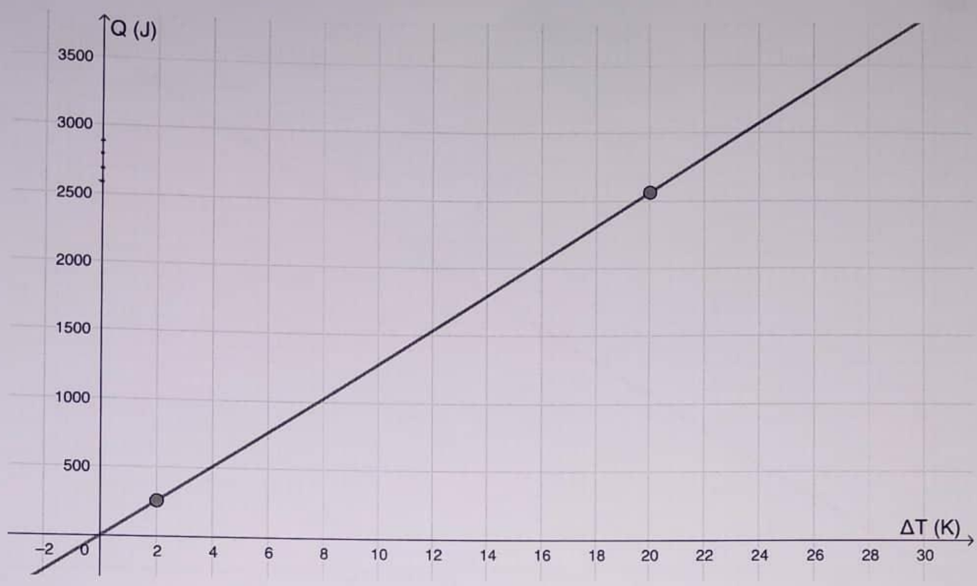
$$\frac{12x + 4x - 3x}{12} = \frac{-9-4}{36}$$

$$\frac{13x}{12} = -\frac{13}{36} \qquad \frac{\cancel{39}x}{\cancel{39}} = -\frac{13}{39}$$

$$\frac{39x}{\cancel{36}} = -\frac{13}{\cancel{36}}$$

Seconda intervista

1) Considera un campione di 1 kg di piombo. Ricava dal grafico il suo calore specifico.



$c = 130 \frac{J}{kg \cdot K}$

Se vengono forniti 1170 J di calore a un oggetto di piombo e si osserva una variazione di temperatura pari a 50 K, quanto vale la massa dell'oggetto?

$\Delta T = 50\ K$ $\quad m = ?$ $\quad \frac{Q}{\Delta T} \cdot c$ $\quad \frac{J}{\ }$

$Q = 1170\ J$

2) Un blocco di ferro di massa 500 g ed alla temperatura iniziale di 145,0 °C viene immerso in 250 g di acqua alla temperatura di 20,0 ° C.
Sapendo che non ci sono dispersioni termiche e che il calore specifico del ferro è 452 J/(kg °C) e quello dell'acqua è 4186 J/(kg °C), calcolare la temperatura di equilibrio che raggiunge il sistema.

$\underset{(acqua)}{Q_{ass.}} = - \underset{(ferro)}{Q_{ced.}}$ $\quad m_1 \cdot c_1 \cdot (T_e - T_1) = - m_2 \cdot c_2 \cdot (T_e - T_2)$

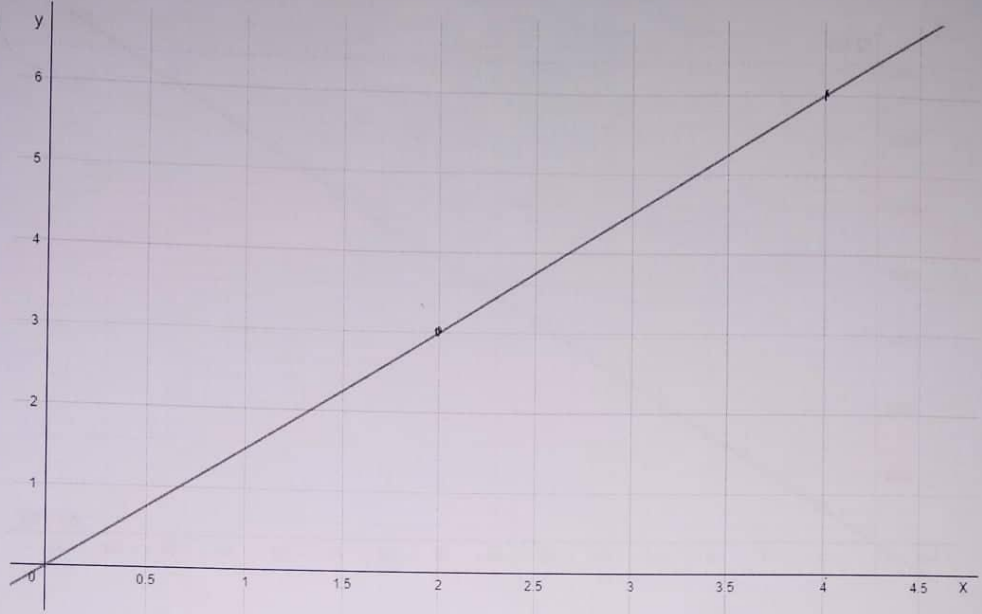
$m_{ferro} = 500\ g$ $\quad m_{acqua} = 250\ g$

$t_1 = 145{,}0\ °C$ $\quad t_2 = 20{,}0\ °C$

$c_1 = 452 \frac{J}{kg \cdot °C}$ $\quad c_2 = 4186 \frac{J}{kg \cdot °C}$

$T_e = ?$

3) Sapendo che x e y sono direttamente proporzionali, ricava dal grafico la costante di proporzionalità



$K = \frac{x}{y} \qquad \frac{2}{3} = \qquad \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

4) Risolvi la seguente equazione

$$\left(\frac{1}{2}-x\right)^2+\left(x+\frac{1}{3}\right)^3=\left(x+\frac{1}{3}\right)\left(x-\frac{1}{3}\right)+x\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{27}$$

$\frac{1}{4} - x + x^2 + x^3 + x^2 + \frac{1}{3}x + \frac{1}{27} = x^2 - \frac{1}{9} + x\left(x^2 + x + \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{27}$

$\frac{1}{4} - x + \cancel{x^2} + \cancel{x^3} + \cancel{x^2} + \frac{1}{3}x + \cancel{\frac{1}{27}} = \cancel{x^2} - \frac{1}{9} + \cancel{x^3} + \cancel{x^2} + \frac{1}{4}x + \cancel{\frac{1}{27}}$

$x + \frac{1}{3}x - \frac{1}{4}x = -\frac{1}{4} - \frac{1}{9}$

$\frac{12x + 4x - 3x}{12} = \frac{-9-4}{36}$

$\frac{13x}{12} = -\frac{13}{36} \qquad \frac{\cancel{39}x}{\cancel{39}} = -\frac{13}{39}$

$\frac{39x}{\cancel{36}} = -\frac{13}{\cancel{36}}$

Appendice B: Trascrizione interviste ed elaborato AS

Prima intervista
AS: Posso cominciare da dove voglio io?
Berto: Sì.
[guarda gli esercizi e comincia dall'equazione, iniziando molto velocemente lo svolgimento]

Berto: Ok, sei arrivato ad un risultato. Cos'hai fatto? Puoi raccontarmi?
AS: Allora, prima ho calcolato tutte le parentesi con gli esponenti. Poi ho calcolato questa alla fine, x per la parentesi. Poi avendo tutte le frazioni, tutte le x le ho divise a destra, a sinistra…
Berto: Queste parentesi come le hai trattate? Qui c'è il quadrato e quindi hai fatto il quadrato, e queste due per esempio [prodotto notevole "somma per differenza"]? Come siamo passati da qua a questa riga qui? Queste parentesi come sono state sciolte?
AS: Ho fatto il prodotto notevole.
[si accorge di aver sbagliato a svolgere il quadrato]
AS: Questo è sbagliato. C'è pure questo [scrive il doppio prodotto]
Berto: Di cosa ti sei accorto?
AS: Mi sono dimenticato, era un prodotto notevole anche questo e questo [indica i due quadrati del binomio presenti nell'esercizio]

Berto: Qui invece cos'è successo? Ho visto che semplificavi.
AS: x^2 e meno x^2 e x^3 e meno x^3 li ho semplificati perché fanno zero.

Berto: Ho visto che sei andato sparato su questo esercizio. Perché? Ti piacciono le equazioni?
AS: Sì.

[inizia l'es.2 sulla temperatura di equilibrio]
Berto: Questa equazione da dove viene fuori?
AS: È un metodo che ci ha insegnato la prof. Fare l'equazione e viene più semplice, per trovare Te.
Berto: Quindi vi ha insegnato questo metodo e ti ricordi quest'equazione?
AS: Sì.

[durante lo svolgimento ci sono numeri alti]
AS: Posso usare il telefono come calcolatrice?
Berto: Sì, sì.

Berto: Cosa ti ricordi riguardo la proporzionalità diretta?
AS: La mia retta passa per lo zero e non è curva. Che "x" e "y" devono avere lo stesso errore sempre, cioè devono avere sempre lo stesso risultato, costantemente.
Berto: Cosa significa che "x" e "y" devono avere lo stesso risultato?
AS: Che se "x" viene moltiplicato per 3 e "y" pure, cioè allora. Se "x" viene moltiplicato per 3, per 2, quello che vogliamo e viene diviso per "y" il risultato è il triplo o il doppio.

Berto: Riusciresti a trovare la costante di proporzionalità?
AS: Posso scrivere dei valori?
Berto: Va bene.

AS: Il "k" non mi è venuto uguale per tutte perché c'è l'incertezza; le ho prese non misurando niente quindi l'incertezza è molta.

Berto: Se dovessi definire a parole tue che cos'è il calore specifico, cosa diresti?
AS: È pressoché la temperatura di un chilogrammo di una sostanza.
Berto: Fammi un esempio.
AS: L'acqua che è 4186 J su chilogrammo per gradi centigradi. Significa che 1 litro d'acqua, 1 chilo in questo caso, è composta da 4186 joule.

Seconda intervista

Berto: Avevi il debito l'anno scorso?
AS: Sì, in fisica.
Berto: Ti è piaciuto il corso che è stato fatto quest'estate?
AS: Sì.
Berto: Se dovessi scegliere due o tre cose, cosa hai preferito?
AS: Intanto le spiegazioni nelle slides e poi i kahoot, perché mi davano quella competitività che di solito a scuola non avevo.
Berto: E cosa non ti è piaciuto? C'è qualcosa che miglioreresti?
AS: L'aspetto negativo è che la maggior parte dei lavori che abbiamo fatto in gruppo erano con la propria classe, invece era meglio con altre persone, perché avendo già rapporti con i propri compagni di classe era ovvio che si parlava un poco più di altro.

Berto: Ok qua hai scritto i dati. Che problema è? Di cosa si sta parlando? [l'esercizio 2]
AS: Calorimetria.
Berto: Calorimetria, ok. È un problema che riguarda?
AS: La dispersivi... cioè come spiego, la condivisione di calore.
Berto: Ok, lo scambio di calore tra corpi. Cosa ti ricordi di questa cosa?
AS: Io di solito usavo una formula, che è massa per calore specifico per Δt.
[...]
Berto: Quindi a sinistra abbiamo $mc\Delta t$ del ferro e a destra dell'acqua?
AS: Sì, solo che questo Δt bisogna, cioè dobbiamo cambiarlo, perché qua… Allora o mettiamo il meno qua all'inizio [dell'equazione] oppure cambiamo direttamente la formula del Δt.
Berto: Perché?
AS: Perché mettendo il "meno" qua è come se invertissi questi due dati.
Berto: È vero è vero, ma perché hai bisogno di questo "meno"?
AS: Perché non sono uguali. Cioè dicendo così, cioè scrivendo anche il "meno" è come se scrivo che questa massa per calore specifico per Δt del ferro è uguale alla massa per calore specifico per Δt dell'acqua, quindi non c'è scambio di calore, sono uguali.
Berto: Quindi questo "meno" rappresenta lo scambio di calore?
AS: Sì, perché in questo caso il calore del ferro viene dato all'acqua perché è più caldo dell'acqua.
Berto: Quindi "meno" è quando il calore viene dato?
AS: Sì.
[...]

Berto: Se dovessi svolgere interamente l'equazione, come procederesti? Qual è il tuo obiettivo?
AS: Il mio obiettivo è trovare Te.

Berto: Come faresti?
AS: Moltiplicherei questi due [la massa e il calore specifico] per Te e quindi trovo Joule fratto gradi centrigradi per Te.
Berto: Quindi come un'equazione con incognite Te?
AS: Sì, e poi separo Joule su gradi centigradi per Te con Joule su gradi centigradi per Te.

[nell'esercizio dell'equazione, riguardo il prodotto notevole "somme per differenza"]
Berto: Questi due sono simili e quindi ho fatto il binomio, cioè ho fatto… Siccome cambia solo il segno ho scritto il "meno"perché la formula è così.
AS: Qual è la formula?
Berto: Siccome sono simili e cambia solo il segno, si scrive quello che cambia, perciò il "meno" viene scritto e il "più" no, perché il "più" dice che è uguale mentre il "meno" no, mi hanno detto così. No, mi sto confondendo...

[nell'esercizio sul calore specifico]
AS: Ti ricordi qualcosa riguardo il calore specifico? Cos'è o delle formule legate?
Berto: Il calore specifico è la… In base a un chilogrammo di qualcosa, quanti joule servono per farlo cominciare a sciogliersi, cioè a cambiare stato, se è solido sciogliersi, se è liquido…
Berto: Ti ricordi se c'è una formula legata al calore specifico?
AS: Partendo dalla formula iniziale che è Q=mcΔt, se dobbiamo trovare il resto… [inverte la formula]
Berto: In questa formula si legge che è la quantità di calore che dobbiamo dare a un chilo, a una massa, per farla aumentare di un grado. Non so se lo noti.
AS: Sì.
Berto: Quindi quello che avevi detto tu inizialmente sui passaggi di stato, non trova un corrispettivo in questa formula qua.
AS: No.
Berto: E come leggeresti questo grafico?
AS: In questo caso non ci sono i gradi centigradi ma i gradi Kelvin.
Berto: Ti crea problemi questo?
AS: No, perché alla fine è uguale.

Berto: Questo grafico cosa ci indica?
AS: Questo grafico indica i Joule che ci servono per cambiare la temperatura, cioè che dobbiamo aggiungere al chilogrammo per cambiare… i kelvin, per cambiare di un grado kelvin.
Berto: Quindi se aggiungiamo 2600 Joule [indico il punto nel grafico], il corpo quanti gradi kelvin cambia?
AS: Più di uno. Perché in questo caso il corpo parte a circa 300.
[lo aiuto poi a leggere il grafico]

Berto: Ti ricordi cosa significa essere direttamente proporzionali?
AS: Una proporzionalità diretta, cioè, essendo direttamente proporzionali si ha una retta passante per l'origine che moltiplicando per "x" si moltiplica "y" e dividendo…
Berto: Cioè aumentando l'una…
AS: Aumenta anche l'altra.
Berto: In che modo?
AS: Costante.
Berto: Riusciresti a trovarla?
AS: La costante si trova facendo [fa la tabella "x", "y", "k" e scrivendo k=y/x]

Berto: Ti senti più sicuro quest'anno in fisica?
AS: Sì, mi è servito soprattutto non essere bocciato.
Berto: Perché hai studiato anche per l'esame di recupero e hai fatto un lavoro in più che ti ha potenziato?
AS: Sì, sì.

Prima intervista

(4)

$$\left(\frac{1}{2}-x\right)^2+\left(x+\frac{1}{3}\right)^3=\left(x+\frac{1}{3}\right)\left(x-\frac{1}{3}\right)+x\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{27}$$

$$\frac{1}{4}+x^2\ x^3+\frac{1}{27}=x^2-\frac{1}{9}+x\left(x^2+\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{27}$$

$$\frac{1}{4}+x^2+x^3+\frac{1}{27}=x^2-\frac{1}{9}+x^3+\frac{1}{4}x+x^2+\frac{1}{27}$$

$$\cancel{x^2}+\cancel{x^3}-\cancel{x^2}-\cancel{x^3}+\frac{1}{4}x=-\frac{1}{4}-\cancel{\frac{1}{27}}-\frac{1}{9}+\cancel{\frac{1}{27}} \qquad \left(-\frac{1}{4}-\frac{1}{9}\right)\frac{-9-4}{36}$$

$$+\frac{\frac{1}{4}x}{\frac{1}{4}}=\frac{\frac{13}{36}}{\frac{1}{4}} \qquad \frac{13}{\cancel{36}_9}\cdot \cancel{4}^1$$

$$\boxed{x=\frac{13}{9}}$$

(2)

$m = 500\,g$

$t_0 = 145,0\,°C$

$m_{H_2O} = 250\,g$

$t_{0H_2O} = 20,0\,°C$

$c = 452\ J/(Kg\,°C)$

$c_{H_2O} = 4186\ J/(Kg\,°C)$

$$m_{H_2O}\cdot c_{H_2O}\,(t_e-t_0)=m\cdot c\cdot(t_e-t_0)$$

$$250g\cdot 4186\,(t_e-20,0°C)=500g\cdot 452\cdot(t_e-145,0)$$

$$1046500\,(t_e-20,0°C)=226000\,(t_e-145,0°C)$$

$$1046500t_e-20930000=226000t_e-32770000$$

$$1046500t_e-226000t_e=20930000-32770000$$

$$\frac{820500t_e}{820500}=\frac{17660000}{820500}$$

$$\boxed{t_e=21,5\,°C}$$

(3)

X	Y	K
0,7	1	0,7
1,3	2	0,65
2	3	0,66

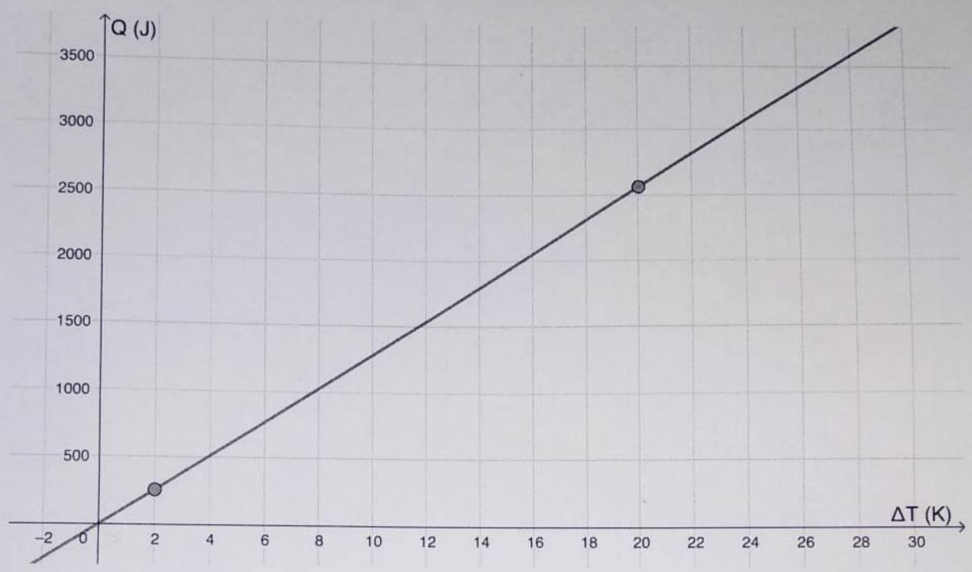
(1)

Seconda intervista

$Q = m \cdot c \cdot \Delta t$

$c = \frac{Q}{m \cdot \Delta t}$

1) Considera un campione di 1 kg di piombo. Ricava dal grafico il suo calore specifico.



$Q = \frac{2600 \, J}{kg}$ $\quad \Delta t$

Se vengono forniti 1170 J di calore a un oggetto di piombo e si osserva una variazione di temperatura pari a 50 K, quanto vale la massa dell'oggetto?

2) Un blocco di ferro di massa 500 g ed alla temperatura iniziale di 145,0 °C viene immerso in 250 g di acqua alla temperatura di 20,0 ° C.
Sapendo che non ci sono dispersioni termiche e che il calore specifico del ferro è 452 J/(kg °C) e quello dell'acqua è 4186 J/(kg °C), calcolare la temperatura di equilibrio che raggiunge il sistema.

$m = 500 g = 0,5 kg$

$t_i = 145,0 °C$

$m_{H_2O} = 250 g = 0,25 kg$

$t_{i\,H_2O} = 20,0 °C$

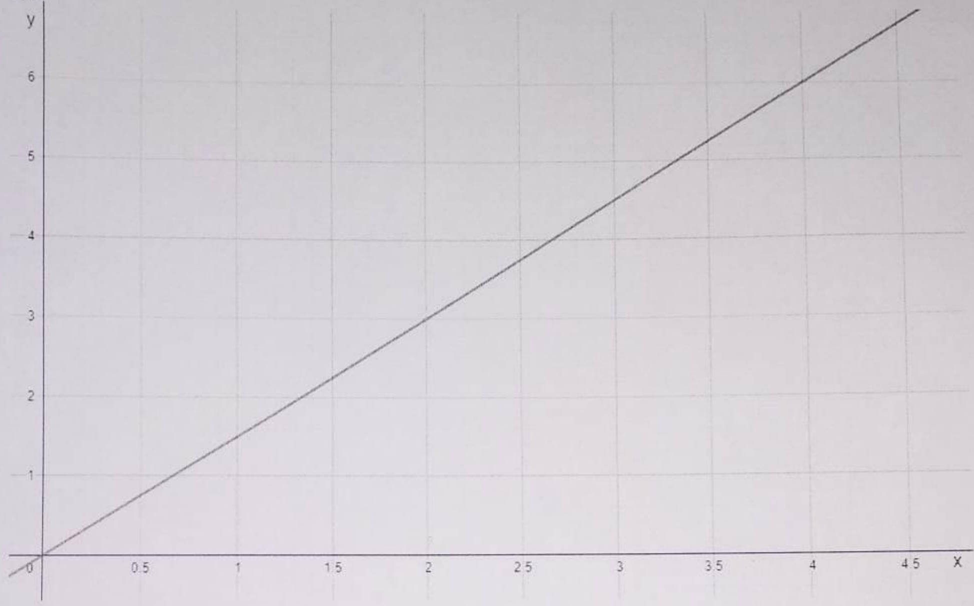
$c_F = 452 \, J/(kg °C)$

$c_{H_2O} = 4186 \, J/(kg \cdot °C)$

$-m \cdot c \cdot \Delta t = m_{H_2O} \cdot c_{H_2O} \cdot \Delta t_{H_2O}$

$0,5 \cdot 452 \cdot (t_e - 145) = 0,25 \cdot 4186 \cdot (t_e - 20)$

3) Sapendo che x e y sono direttamente proporzionali, ricava dal grafico la costante di proporzionalità



x	y	K
$\cancel{0}$	0	$\cancel{0}$ ND
1	1,5	$\frac{1,5}{1} = 1,5$
2	3	$\frac{3}{2} = 1,5$

4) Risolvi la seguente equazione

$$\left(\frac{1}{2}-x\right)^2+\left(x+\frac{1}{3}\right)^3=\left(x+\frac{1}{3}\right)\left(x-\frac{1}{3}\right)+x\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{27}$$

$$\frac{1}{4}+\cancel{x^2}-\cancel{x}+x^3+\frac{1}{27}+\cancel{x^2}+\frac{1}{3}x=\cancel{x^2}-\frac{1}{3}^2+\underbrace{x\left(x^2+\frac{1}{4}+x\right)}_{x^3+\frac{1}{4}x+\cancel{x^2}}+\frac{1}{27}$$

$$(A+B)\,(A-B)=A-B$$

$$A^2\cancel{-AB}+\cancel{AB}-B^2$$

Appendice C: Trascrizione interviste ed elaborato CD

Seconda intervista

Lippiello: Allora adesso ti chiedo giusto per vedere, se non ti ricordi una formula eccetera te la dico io non c'è problema insomma. Solo per vedere un po' cosa si attiva a distanza di un po' di tempo insomma, vai tranquilla. Allora [legge il primo esercizio]. Se ti ricordi qualcosa...
CD: Poco niente. È vero ho fatto il debito, però...
Lippiello: Allora io ti dico questa cosa qua "Q uguale m c deltaT", magari questo ti può aiutare
CD: Sì, sì. Allora la temperatura è qua, qui c'è la temperatura iniziale e qui c'è la temperatura finale
Lippiello: Beh c'è già un deltaT in realtà. Beh vedi tu, fai tu, senza... Puoi interpretarlo anche così. E poi cosa faresti per trovare il calore specifico?
CD: Ah dobbiamo trovare il calore specifico? Quindi dobbiamo fare la formula inversa. Dove devo scrivere?
Lippiello: Dove vuoi tranquilla.
CD: Se Q fratto m deltaT. Vabbè il calore, qui non si capisce molto...
Lippiello: Beh vai a occhio, sì sì non importa anche se non è giusto giusto, circa.
CD: È la metà...
Lippiello: Quindi 250.
CD: 250 fratto, questo è 2. Vabbè 2 perché la massa è un chilo quindi 250 diviso 2.
Lippiello: Va bene, non mi interessa il conto, va bene il procedimento. Perfetto, brava, benissimo. Quindi hai saputo interpretare bene. Questo qui [esercizio due]? Giusto l'impostazione.
CD: Qui ci sono due... Allora qui c'è un blocco di ferro che va immerso in un... in dell'acqua. Quindi abbiamo due calori da migliorare(?). Ah beh noi sappiamo la formula, quindi abbiamo... Ah no spè, il calore specifico del ferro è questo. Ah la temperatura di equilibrio? Vabbè è facile. O si può ricavare dalle formule... Allora, o verso, cioè i calcoli oppure la...
Lippiello: La formula finale. Tu, giusto per il compito, te la sei imparata la formula finale o te la ricavavi?
CD: Beh dipende, perché mi hanno detto che se ci sono cambi di stato non ti consigliano di fare la formula perché è totalmente diversa
Lippiello: Esatto. Cosa si imposta in generale?
CD: Si impostano le due equazioni e poi... si trova l'altro.
Lippiello: Qual è l'equazione che stai pensando? Giusto per impostarla.
[la scrive]
Lippiello: Ok te la ricordi, bravissima. Non me la ricordo neanch'io. Ok, quindi comunque in questa tipologia ti viene da usare così, quando ci sono i passaggi di stato...
CD: Sì, sì.
Lippiello: Ok, tranquilla, poi ci sarebbero i conti...
CD: Vabbè questo, l'm1 è quello del ferro e l'm2 quello dell'acqua. Lo scrivo velocemente... Che poi non so se sia giusto perché è in grammi quindi bisognerebbe fare in chili
Lippiello: Sì diciamo che in questo caso essendoci sia sopra che sotto, essendo una divisione viene giusto lo stesso però hai ragione, in generale è sempre meglio trasportarlo in chilogrammi è vero.
[...]
Lippiello: Stavamo dicendo eventualmente delle equazioni. Intanto prova, prima di arrivare all'equazione, mi sapresti spiegare un po' a livello fisico che cosa si trasferisce, che cosa sta succedendo insomma? Chi magari sta dando qualcosa chi magari sta prendendo, ti ricordi un pochino questa parte?

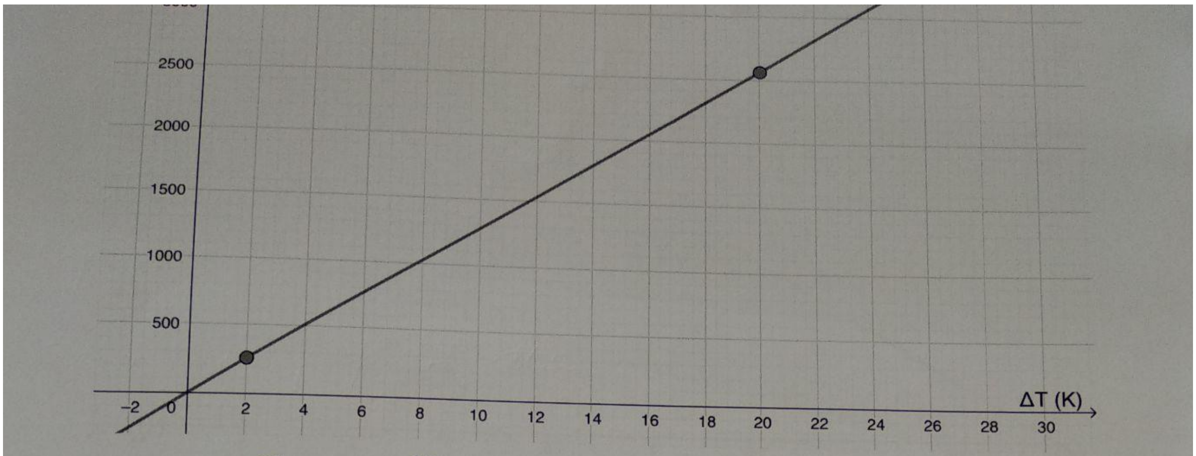
CD: Se per esempio hai un recipiente d'acqua e hai una, questo materiale tipo il ferro e l'acqua si trova a una certa temperatura, per esempio sì vabbè,
Lippiello: Qui 20 gradi per esempio.
CD: Sì, e il ferro in questo caso cede il calore che magari è più caldo e quindi cede calore all'acqua e quindi...
Lippiello: Ok, quindi benissimo hai usato il termine "cede calore" che era quello dove volevo arrivare. Ok, quindi il ferro cede calore e questo calore chi se lo prende?

CD: L'acqua
Lippiello: L'acqua ok. Quindi l'equazione che avrebbe a che fare con quello che abbiamo appena detto come la, giusto per scriverla per farci sempre i conti, ma ti ricordi che c'era di mezzo l'idea di...
CD: Del calore della... il ferro cede calore quindi.
Lippiello: Ok, ok era questa l'equazione da cui si ricavava questa formula qua.
CD: Sì sì.
Lippiello: Ed è il calore che appunto viene trasferito da una sostanza all'altra.
CD: Cioè il calore ceduto e il calore acquisito.
Lippiello: Bravissima, perfetto. La situazione fisica era chiara bene. Adesso invece passiamo ad un contesto matematico. Qui la domanda è [legge il terzo esercizio]. Ti dice qualcosa? Cosa faresti, avresti bisogno di qualche formula per capire cosa si potrebbe?
CD: La la, quella della... direttamente proporzionale è y fratto x.
Lippiello: Ok, sì sì.
CD: E trovi k, che è la costante.
Lippiello: Ok brava, scrivilo scrivilo. E per esempio qui se la dovessi trovare numericamente cosa guarderesti?
CD: Beh prendo un dato, per esempio questo tre, tre mezzi.
Lippiello: Giusto per curiosità, ti accorgi che... se dovessi confrontarli questi due problemi, noti qualcosa?
CD: Beh anche questo [esercizio 1] è direttamente proporzionale perché passa per l'origine.
Lippiello: Esatto, brava. Hai detto che c'è una retta passante per l'origine e quindi è una proporzionalità diretta. Quindi se anche non sapevamo la formula, la pendenza, la costante di proporzionalità l'avremmo saputa trovare in questo contesto? Bisognava sapere sì che il calore specifico era la costante di proporzionalità è vero, però in generale una volta capito questo il conto è lo stesso no?
CD: Sì.
Lippiello: Giusto per capire che diciamo, la domanda la parte operativa era la stessa perché hai fatto 250 diviso 2 e qui hai fatto 3 diviso 2. Giusto per vedere che a volte i problemi sono gli stessi solo che qui c'è un contesto fisico, tutto qua
CD: Ah ok.
Lippiello: Ecco. Questa [esercizio 4], come qui [esercizio 2] c'era un'equazione anche qui abbiamo un'equazione. Giusto senza fare tutti i conti, mi dici a voce insomma.
CD: Prima lo svilupperei, poi trasporterei le x di qua e i numeri di qua.
[...]
Lippiello: Quindi hai riconosciuto che c'era anche un prodotto notevole.
CD: Non sono sicura però provo... [...] No questo è sbagliato.
[...]
Lippiello: Bene va via un po' di roba. Sì era solo per vedere se a livello di equazione c'erano le procedure quindi bene. Anzi brava che ti sei ricordata anche i prodotti notevoli sarà contenta la professoressa, che non glielo diciamo ma idealmente.
CD: No, già la verifica di matematica non so come sia andata [...] le disequazioni.

Lippiello: Secondo te è stato perché ti hanno confuso magari le varie procedure o il conto?
CD: No c'era da trovare principalmente nel grafico ho avuto problemi che era da trovare una funzione, cioè ti davano una funzione in un grafico senza la
Lippiello: L'espressione algebrica.
CD: E dovevo ricavare la disuguaglianza e non lo sapevo fare, cioè.
Lippiello: Ok era perché era un po' al contrario ok ho capito. Quello ti ha messo un po' in difficoltà.
CD: Sì
Lippiello: E invece non so c'erano delle disequazioni fratte da risolvere?
CD: Beh le fratte non ho problemi cioè per i calcoli non ho problemi

Lippiello: Ok quindi la parte è più magari il passaggio dal grafico alla scrittura. Ok per capire cosa che vi mette più in difficoltà insomma e cercare poi di conseguenza di aiutarvi insomma. E in fisica come sta andando?
CD: In fisica benissimo. A parte che abbiamo cambiato anche prof quindi... con l'altra prof non capivo molto. Con questa sto capendo di più e quindi mi stanno venendo tutti gli esercizi
Lippiello: Ok ok bene dai. Quindi sei anche partita con il piede giusto mi fa piacere!

Prima intervista



$$c = \frac{Q}{m\Delta t} \Rightarrow \frac{2300}{1(20-2)} = \frac{2300}{18} = 128\ \frac{J}{kg\,K}$$

Se vengono forniti 1170 J di calore a un oggetto di piombo e si osserva una variazione di temperatura pari a 50 K, quanto vale la massa dell'oggetto?

$m = 0{,}18\ kg$

2) Un blocco di ferro di massa 500 g ed alla temperatura iniziale di 145,0 °C viene immerso in 250 g di acqua alla temperatura di 20,0 ° C.
Sapendo che non ci sono dispersioni termiche e che il calore specifico del ferro è 452 J/(kg °C) e quello dell'acqua è 4186 J/(kg °C), calcolare la temperatura di equilibrio che raggiunge il sistema.

$Q = -Q$

$$t_e = \frac{c_1 \cdot m_1 \cdot t_1 + c_2 \cdot m_2 \cdot t_2}{c_1 m_1 + c_2 \cdot m_2}$$

$\Delta t = 50\ K$

$Q = 1170\ J$

$c = \cancel{1}28$

$\Delta L = \lambda L_0 \Delta t$

$$\frac{Q}{c\,\Delta t} = m c \Delta t$$

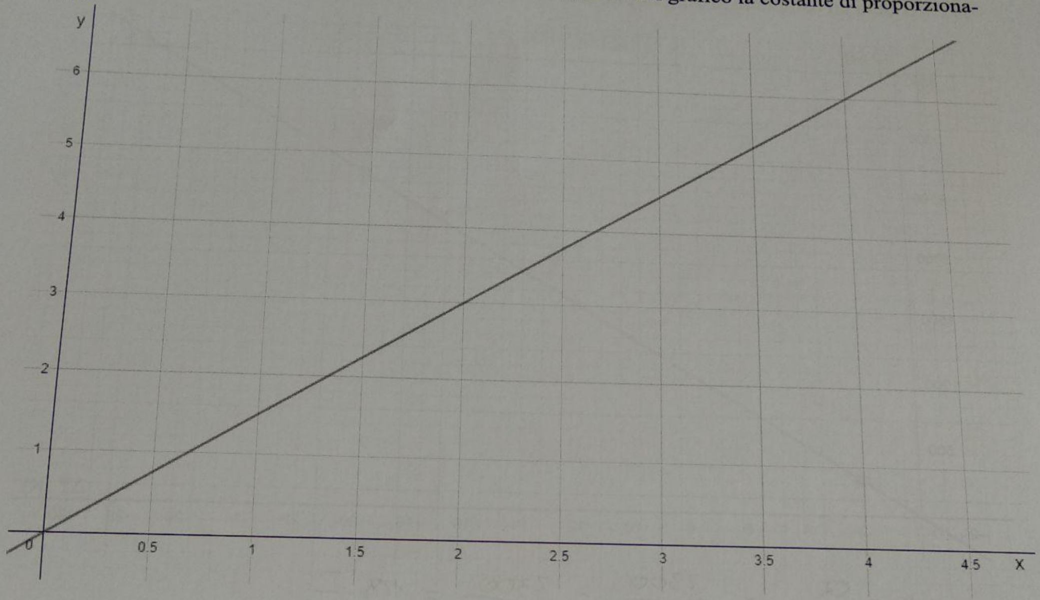
$$\frac{Q}{m\Delta t} = m c \Delta t$$

$\cancel{\Delta t m}$

$$\frac{1170}{128 \cdot 50}$$

$$\frac{1170}{6400} = 0{,}18$$

3) Sapendo che x e y sono direttamente proporzionali, ricava dal grafico la costante di proporzionalità



4) Risolvi la seguente equazione

$$\left(\frac{1}{2}-x\right)^2+\left(x+\frac{1}{3}\right)^3=\left(x+\frac{1}{3}\right)\left(x-\frac{1}{3}\right)+x\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{27} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4}-x+x^2+x^3+\cancel{x^2}+\frac{1}{3}x+\frac{1}{27}=\cancel{x^2}-\cancel{\frac{1}{3}x}+\cancel{\frac{1}{3}x}-\frac{1}{9}+x\left(x^2+x+\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{27} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4}-x+\cancel{x^2}+\cancel{x^3}+\frac{1}{3}x+\frac{1}{27}=-\frac{1}{9}+\cancel{x^3}+\cancel{x^2}+\frac{1}{4}x+\frac{1}{27} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -x+\frac{1}{3}x-\frac{1}{4}x=-\frac{1}{9}+\cancel{\frac{1}{27}}-\frac{1}{4}-\cancel{\frac{1}{27}} \Rightarrow \frac{-12+4-3}{12}x=\frac{-4-9}{36} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\frac{11}{\cancel{12}}x=-\frac{13}{36} \Rightarrow -11x=-\frac{13}{3} \Rightarrow x=\frac{13}{3}\cdot\frac{1}{11} \Rightarrow x=\frac{13}{33}$$

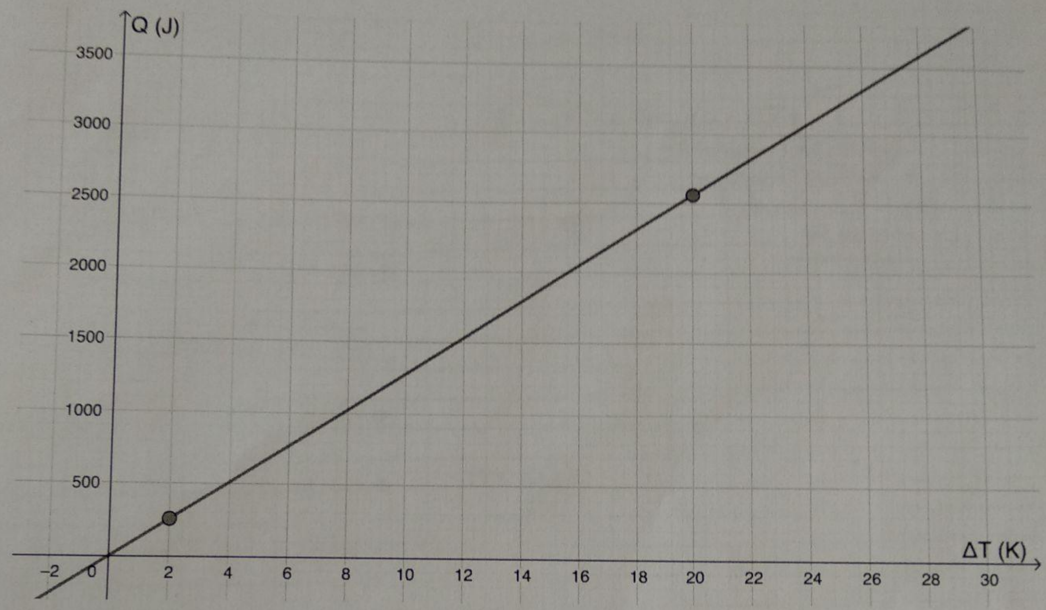
Seconda intervista

$Q = m c \Delta t$

$c = \frac{Q}{m \Delta t} \Rightarrow \frac{250}{2}$

CD

1) Considera un campione di 1 kg di piombo. Ricava dal grafico il suo calore specifico.



Se vengono forniti 1170 J di calore a un oggetto di piombo e si osserva una variazione di temperatura pari a 50 K, quanto vale la massa dell'oggetto?

2) Un blocco di ferro di massa 500 g ed alla temperatura iniziale di 145,0 °C viene immerso in 250 g di acqua alla temperatura di 20,0 ° C.
Sapendo che non ci sono dispersioni termiche e che il calore specifico del ferro è 452 J/(kg °C) e quello dell'acqua è 4186 J/(kg °C), calcolare la temperatura di equilibrio che raggiunge il sistema.

$$t_e = \frac{m_1 c_1 t_1 + m_2 c_2 t_2}{m_1 c_1 + m_2 c_2} = \frac{500 \cdot 452 \cdot 145 + 250 \cdot 4186 \cdot 20}{500 \cdot 452 + 250 \cdot 4186}$$

$Q = -Q$

Appendice D: Trascrizione interviste ed elaborato CDA

Seconda intervista

Berto: Qui ci sono degli esercizietti come l'altra volta. Senza nessuna ansia, qui non siamo per fare ansia, qui le ansie le lasciamo fuori, qui è un mondo di pace non preoccuparti. Esercizietti come l'altra volta, tu fai quello che ti senti, se non ti senti, ti aiuto. Nel senso, io qualcosa mi ricordo di ste robe quindi... Quello che ti piace di più, tipo ti piace di più la matematica, parti da quelle robette là che immagino tu sai fare insomma fai quello che vuoi tu, padrona te del mondo
CDA: Vorrei iniziare dalle cose difficili
[...]
CDA: Posso scrivere qua o devo scrivere qua?
Berto: Dove vuoi tu.
[risolve l'esercizio]
Berto: Beh intanto dimmi cos'hai fatto, che sono un po' storto [e non ci vedo]
CDA: Allora qua ho fatto la formula inversa per il calore specifico che è Q fratto massa per la variazione di temperatura [...] e la temperatura è qua e è 2 per 1 perché la massa è un chilogrammo.
Berto: Ok. E il 400?
CDA: E il 400... spero di averlo fatto giusto qua. Secondo me era 300, perché non vedo bene. Forse era 300.
Berto: Ok quindi il calore specifico è 150.
CDA: Sì.
[aggiunge le unità di misura]
Berto: Ah adesso è cambiato, il calore specifico è 150 joule fratto...
CDA: fratto massa per chilogrammo perché sono le unità di misura di questo
Berto:
massa per... m per K cos'è? cosa significa?
CDA: Che è massa per il calore, cioè la variazione di temperatura che è misurata con i kelvin è la K.
Berto: E la m?
CDA: È la massa
Berto: Che è l'unità di misura de?
CDA: Ah, chilogrammi! Ecco dove mi perdo!
Berto: Vabbè ti sei dimenticata solo l'unità di misura. Ok. Perché hai scritto l'unità di misura? Cioè...
CDA: Perché bisogna scriverlo con l'unità di misura.
Berto:
Perché?
CDA: Perché sennò non sappiamo di che cos'è. Il calore specifico... sennò non sappiamo l'unità di misura del calore specifico.
[...]

Berto: Cosa ti è piaciuto di più del corso?
CDA: Come erano strutturate le lezioni. Erano molto interessati, perché all'inizio magari si faceva un quiz o un esercizio o si controllavano alcuni esercizi, era molto divertente e riuscivi anche a capire come parlavano, cioè...
Berto: Quindi un linguaggio più semplice di quello che invece...

CDA: Sì, alcune volte qua fanno, usano linguaggi un po' più difficili un po' più complicati. Lì invece era molto semplice da capire e comunque capivi l'argomento anche se avevano delle parole più semplici, un metodo un po' più semplice
Berto: Sì... E invece c'è qualcosa che non ti è piaciuto o comunque che avresti cambiato, non lo so...
CDA: Gli orari a volte... Tipo alle due e mezza erano un po' scomodi però comunque posso capire...
Berto: Avresti preferito la mattina?
CDA: Avrei preferito la mattina. [...] Però comunque non è per tutti così, alcune persone sono più comode la mattina quindi ti adatti.
Berto: Magari si potrebbe alternare, fare una volta così. Una volta si adatta uno e...

CDA: Beh sì di fatto a volte, di fatto alcune volte facevamo la mattina e alcune volte il pomeriggio e quindi era comodo. Comunque ho capito anche che agli altri magari sono scomodi ad alcuni orari come sono scomode da altri.
Berto: Va bene. Allora lì bisogna trovare la massa, quindi hai invertito di nuovo la formula...
CDA: Sì.
Berto: Ok. Questa m è...
CDA: La massa. I chilogrammi!
Berto: Ok, non ti stanno simpatici i chilogrammi!
CDA: No e infatti è la cosa che ho sbagliato.
Berto: Cioè qui hai cancellato questa J con questa J
CDA: Sì.
Berto: E le K si possono, cioè qui c'erano...
CDA: Sì perché questa è sotto, è una frazione quindi si può cancellare.
Berto: Va bene. E quindi verrà insomma quello che deve venire fuori, sto 1170 diviso 7500 farà boh zero virgola qualcosa. Va bene, va bene. Beh fai, prova se riesci a fare il 3 [terzo esercizio].

Berto: Ti chiedo cosa, cosa stai facendo?
CDA: Ho, per trovare la k, che è la costante di proporzionalità. Io almeno ho fatto che x e y ho fatto prima una tabella dei dati e poi dividi la x fratto la y e trovi la costante.
Berto: Dividi...
CDA: La x fratto la y.
Berto: Ok e trovi una costante. Secondo te questi due esercizi [primo e terzo] sono simili? Se sì, perché sono simili oppure cos'hanno di simile?
CDA: Sono simili perché basta sostituire Q qua e delta T e sostituire anche magari le unità di misura perché qua è zero cinque qua invece è due e più o meno è simile
Berto: È vero, però uno ti ricordo io che questa k qua, cioè essere direttamente proporzionali significa che all'aumentare di una aumenta l'altra, no? Te lo ricordi questo?
CDA: Sì.
Berto: E infatti qui aumentando la x aumenta anche la y in maniera lineare e per trovarla di solito fai la grandezza, la y diviso la x. Tu mi hai detto il contrario, ma non è importante, diciamo, insomma è importante fino a un certo punto. Ok quindi possiamo dire che... cioè qui ci sono due grandezze proporzionali, cioè se qui la x e la y erano direttamente proporzionali, chi è che è direttamente proporzionale qui?
CDA: La Q e la…
Berto: cioè il calore e...
CDA: e i kelvin?

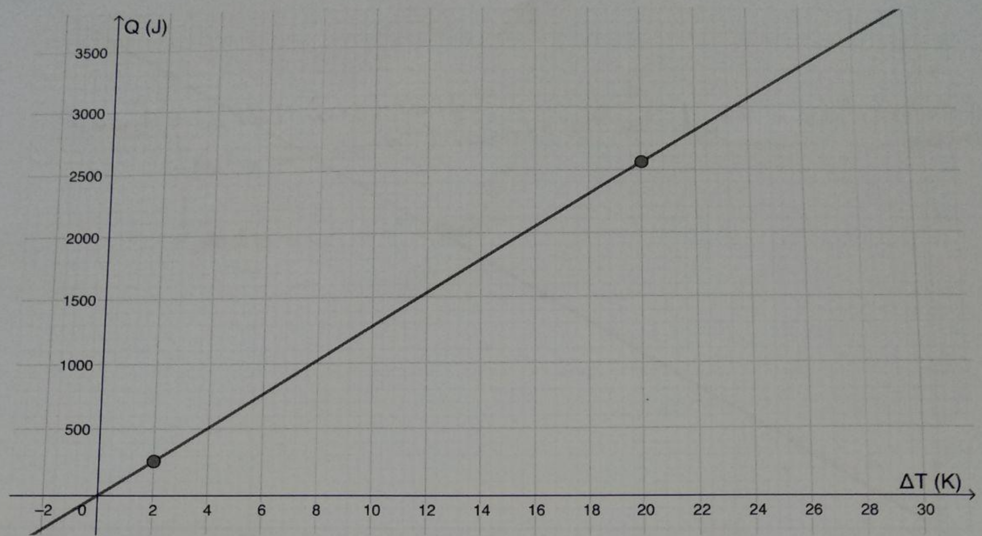
Berto: e la variazione di temperatura. Ti ricordi quando abbiamo fatto durante il corso abbiamo parlato di questa cosa, cioè a un dato oggetto cioè con una data massa, cosa significa che calore e variazione di temperatura sono direttamente proporzionali? Che più aumentiamo la sua temperatura, più facciamo variare la temperatura e più significa che stiamo fornendo calore. Cioè più lo mettiamo sotto il fornello e più aumenta la sua temperatura, questo significa essere direttamente proporzionali.
[...]

[secondo esercizio]
[scrive la formula]
Berto: Allora io non so minimamente se è giusta, figurati se mi ricordo questa roba a memoria!
CDA: Allora la formula base dovrebbe essere m1 per c1 per aperta parentesi Te meno T1 più, non so se è più o meno, credo più, m2 per c2 per Te meno T2 e quindi dovrebbe venire facendo questo...
Berto: La formula aspetta, qua c'è un uguale e qua non c'è un uguale, com'è possibile?
CDA: Mh, non me la ricordo questa.
Berto: Mh ok vabbè, almeno che cos'è questa cosa? Poi ce la ricordiamo.
CDA: Serve per trovare la temperatura di equilibrio.
Berto: Ok quindi siamo nella situazione in cui ci sono due oggetti che sono a contatto e bisogna trovare la temperatura a cui arrivano. E ti ricordi un po' come funziona? Cioè c'è qualcuno che dà calore e qualcuno che lo riceve
CDA: E qualcuno che lo perde
Berto: E queste quantità devono essere...
CDA: uguali
Berto: Uno dà 20 e uno riceve...
CDA: sì, venti è uguale
Berto: Quindi saranno uguali il calore...
CDA: ricevuto e quello dato.
Berto: E quindi se tu scrivi matematicamente questa cosa, fai calore che dai calore che ricevi. Calore è Q e quindi...
[scrive l'equazione con i Q]
Berto: Q uguale a -Q ecco così infatti mi piace vedi! Perché qui a sinistra c'è un calore, perché come hai scritto m c delta T è un calore, qui a destra c'è un calore ma con la meno. Quindi uno mi rappresenta...
CDA: Quello che ha ricevuto e quello che ha dato il calore.
Berto: Sì. E quindi se dopo tu la vai a svolgere immagino venga una cosa del genere [la prima formula che aveva scritto]
CDA: Sì
Berto: Se viene così allora questa era giusta, se non viene così è sbagliata. Però io ti faccio ragionare che scritta a memoria tu mi dici che le cose non te le ricordi oppure te le ricordi male tipo qui te la ricordavi male, se invece ci ragioni è giusto.
CDA: Sì
Berto: Cioè è giusto il concetto, il calore ricevuto e il calore dato. Quindi ti conviene, a parere mio, affidarti al ragionamento più che alla memoria, però poi vedi tu! [...] Ok qui chi sono le incognite e quali sono i dati?
CDA: In questo caso l'incognita è Te
Berto: E tutto l'altro lo abbiamo?
CDA: Sì

Berto: Va bene, quindi dovrai trovare insomma quell'incognita lì come sai fare. Ti chiedo senza farti perdere altro tempo se riesci magari a iniziarmi questa [quarto esercizio].
[inizia a svolgerla]
Berto: Ok quindi hai visto che c'erano alcuni prodotti notevoli. Li hai fatti... boh sono un po' incerto su questo però vabbè! Tutto il resto mi sembra... C'è il cubo di questo.
CDA: Sì
Berto: Poi c'è il triplo prodotto del quadrato di questo, quindi x alla seconda per un terzo quindi fa x alla seconda, perché devi fare il triplo prodotto. Poi devi fare il triplo prodotto di questo per il quadrato di questo, quindi fa un terzo x e poi il cubo di questo.
CDA: Sì
Berto: Chi è il cubo di un terzo?
CDA: Ah sì un ventisettesimo.
Berto: Eh sì!
CDA: Quindi si elimina, si elimina questo.
Berto: E quindi si eliminano un po' di cose immagino. Opplà opplà opplà. Va bene va bene va bene, non voglio farti perdere altro tempo. Per me va bene così, grazie.

Prima intervista

1) Considera un campione di 1 kg di piombo. Ricava dal grafico il suo calore specifico.



$$\frac{Q = c \cdot m \cdot \Delta t}{m \cdot \Delta t \quad m \cdot \Delta t} \qquad c = \frac{Q}{m \cdot \Delta t} \qquad c = \frac{2550\ J}{1\,kg \cdot 20\,K} = \frac{2550\ J}{20\ kg \cdot K} = 127{,}5\ J/kg \cdot K$$

Se vengono forniti 1170 J di calore a un oggetto di piombo e si osserva una variazione di temperatura pari a 50 K, quanto vale la massa dell'oggetto?

$\Delta t = 50\,K$

$Q = 1170\,J$

$m = ?$

$$\frac{Q}{c \cdot \Delta t} = \frac{m \cdot c \cdot \Delta t}{c \cdot \Delta t}$$

$$m = \frac{Q}{c \cdot \Delta t} = \frac{1170\,J}{127{,}5\,J/(kg \cdot K) \cdot 50\,K} = \frac{1170}{127{,}5 \cdot 50\,kg} = \frac{1170}{6375\,kg} =$$

$$= 0{,}18\ kg$$

2) Un blocco di ferro di massa 500 g ed alla temperatura iniziale di 145,0 °C viene immerso in 250 g di acqua alla temperatura di 20,0 ° C.
Sapendo che non ci sono dispersioni termiche e che il calore specifico del ferro è 452 J/(kg °C) e quello dell'acqua è 4186 J/(kg °C), calcolare la temperatura di equilibrio che raggiunge il sistema.

$m = 500\,g = 0{,}5\,kg$

$t_1 = 145{,}0\,°C$

$m_2 = 250\,g = 0{,}25\,kg$

$t_2 = 20\,°C$

$c_1 = 452\,J/kg \cdot °C$

$c_2 = 4186\,J/kg \cdot °C$

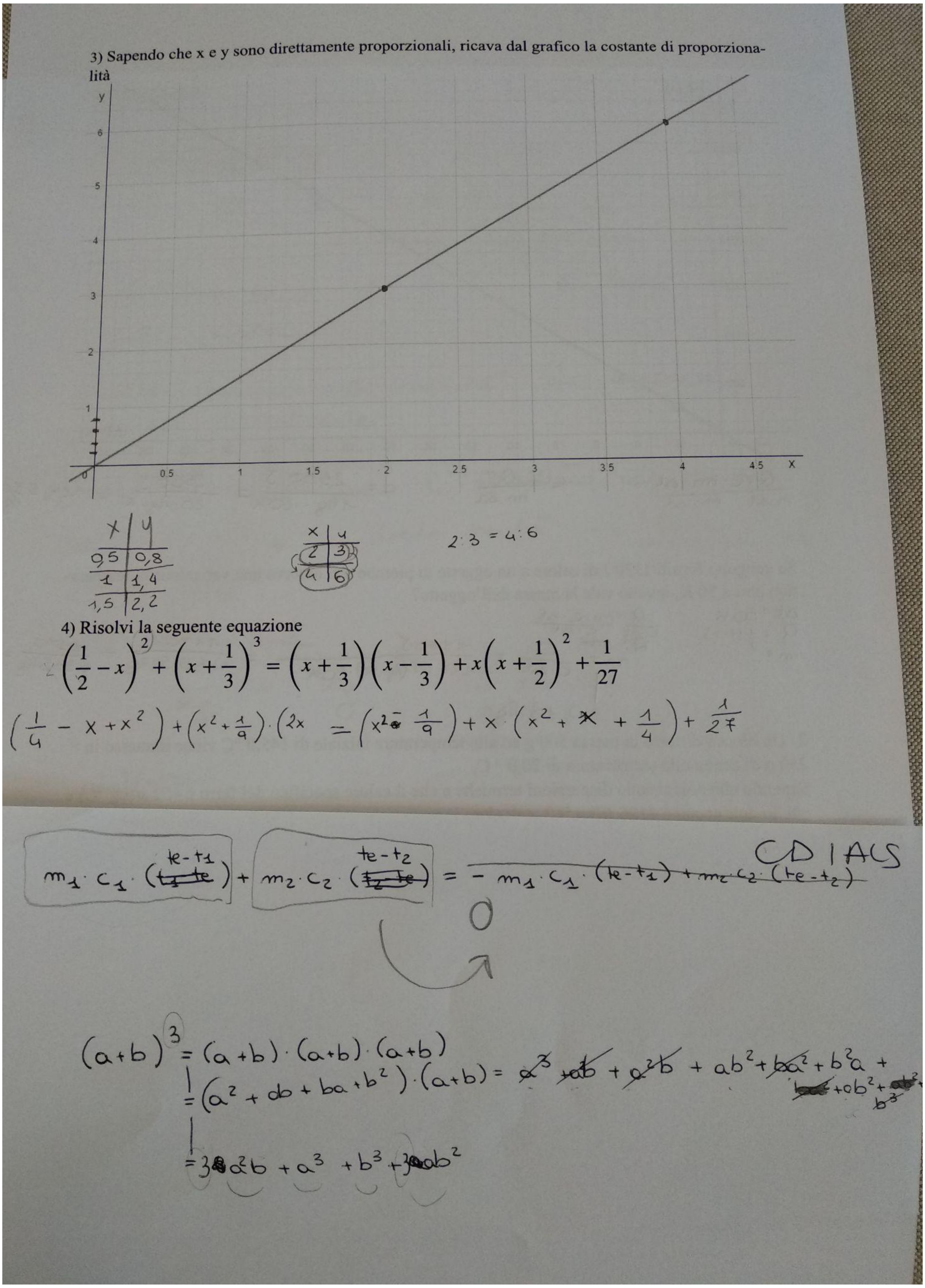
$Te = ?$

$$Te = \frac{m_1 c_1 \cdot t_1 + m_2 \cdot c_2 \cdot t_2}{m_1 \cdot c_1 + m_2 \cdot c_2} =$$

$$= \frac{0{,}5\,kg \cdot 452\,J/kg\,°C \cdot 145{,}0\,°C + 0{,}25\,kg \cdot 4186 \cdot 20\,°C}{0{,}5\,kg \cdot 452\,J/kg\,°C + 0{,}25\,kg \cdot 4186}$$

$$= \frac{32770 + 20930}{226 + 1046{,}5}$$

$$= \frac{53700}{1272{,}5} = 42{,}2\ °C$$



3) Sapendo che x e y sono direttamente proporzionali, ricava dal grafico la costante di proporzionalità

x	y
0,5	0,8
1	1,4
1,5	2,2

x	y
2	3
4	6

$2 : 3 = 4 : 6$

4) Risolvi la seguente equazione

$$\left(\frac{1}{2}-x\right)^2+\left(x+\frac{1}{3}\right)^3=\left(x+\frac{1}{3}\right)\left(x-\frac{1}{3}\right)+x\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{27}$$

$$\left(\frac{1}{4}-x+x^2\right)+\left(x^2+\frac{1}{9}\right)\cdot\left(2x\right.=\left(x^2-\frac{1}{9}\right)+x\cdot\left(x^2+\cancel{x}+\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{27}$$

CD | ACS

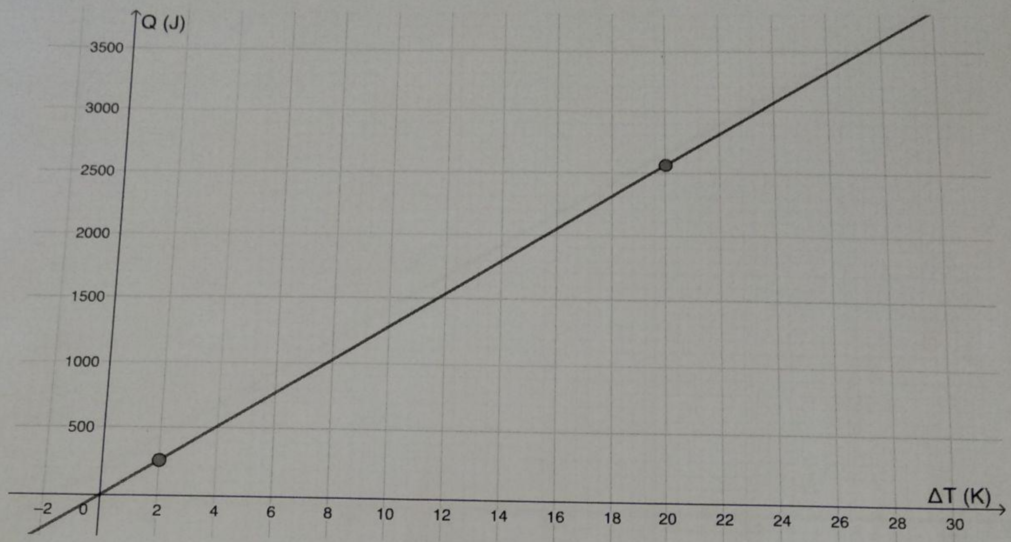
$$\boxed{m_1\cdot c_1\cdot(t_e-t_1)}+\boxed{m_2\cdot c_2\cdot(t_e-t_2)}=\cancel{-m_1\cdot c_1\cdot(t_e-t_1)+m_2\cdot c_2\cdot(t_e-t_2)}$$

0

$$(a+b)^3=(a+b)\cdot(a+b)\cdot(a+b)$$
$$=(a^2+ab+ba+b^2)\cdot(a+b)=\cancel{a^3}+\cancel{ab}+\cancel{a^2b}+ab^2+\cancel{ba^2}+b^2a+\cancel{ba^2}+ab^2+\cancel{ab^2}+b^3$$
$$=3a^2b+a^3+b^3+3ab^2$$

Seconda intervista

1) Considera un campione di 1 kg di piombo. Ricava dal grafico il suo calore specifico.



$Q = m \cdot c \cdot \Delta t$

$c = \frac{Q}{m \cdot \Delta t}$

$c = \frac{300}{1 \cdot 2} = \frac{300}{2} = \cancel{200}\ 150\ J/kg \cdot K$

Se vengono forniti 1170 J di calore a un oggetto di piombo e si osserva una variazione di temperatura pari a 50 K, quanto vale la massa dell'oggetto?

$m = ?$

$\Delta t = 50 K$

$Q = 1170 J$

$c = 150\ J/kg \cdot K$

$m = \frac{Q}{c \cdot \Delta t} = \frac{1170\ J}{150\ J/kg \cdot K \cdot 50 K} = \frac{1170}{150 \cdot 50}\ kg = \frac{1170}{7500}\ kg =$

2) Un blocco di ferro di massa 500 g ed alla temperatura iniziale di 145,0 °C viene immerso in 250 g di acqua alla temperatura di 20,0 ° C.
Sapendo che non ci sono dispersioni termiche e che il calore specifico del ferro è 452 J/(kg °C) e quello dell'acqua è 4186 J/(kg °C), calcolare la temperatura di equilibrio che raggiunge il sistema.

$Te = ?$

$m_1 = 500 g$ $\quad m_2 = 250 g$

$t_1 = 145° C$ $\quad t_2 = 20,0° C$

$c_1 = 452\ J/kg \cdot °C$ $\quad c_2 = 4186\ J/kg \cdot °C$

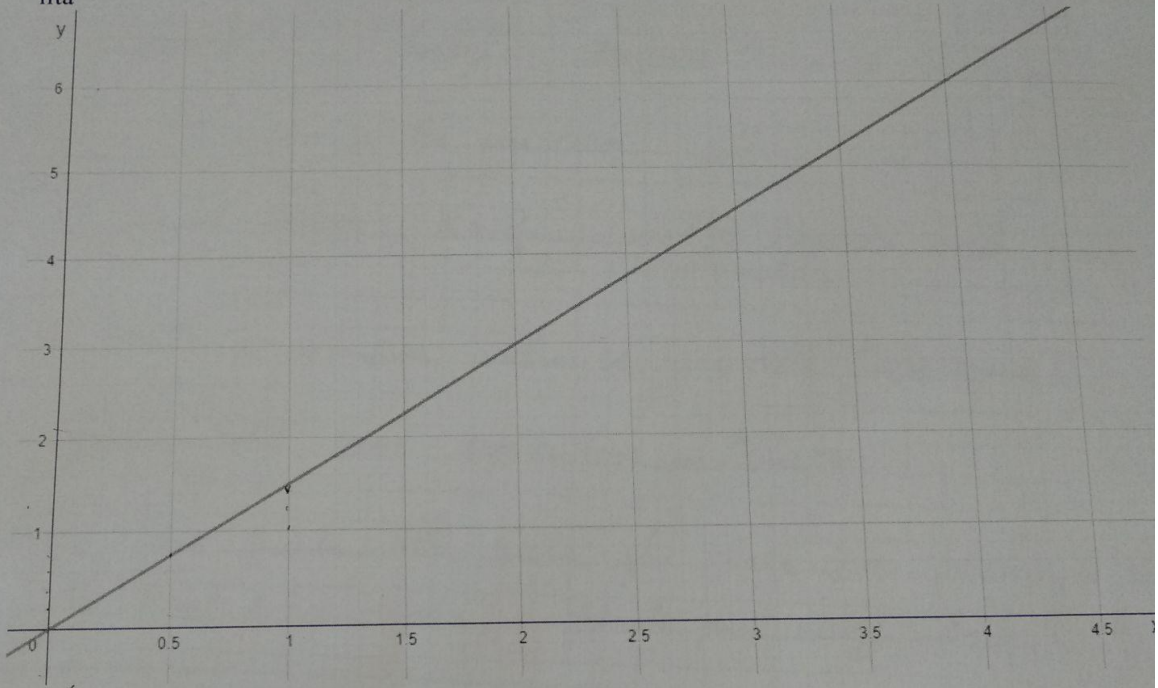
$Te = \frac{m_1 \cdot c_1 \cdot t_1 + m_2 \cdot t_2 \cdot c_2}{m_1 \cdot c_1 + m_2 \cdot c_2} =$

$m_1 \cdot c_1 \cdot (te - t_1) = - m_2 \cdot c_2 \cdot (te - t_2)$

$m_1 \cdot c_1 \cdot te - m_1 \cdot c_1 \cdot t_1 = - m_2 \cdot c_2 \cdot te$

$+$

3) Sapendo che x e y sono direttamente proporzionali, ricava dal grafico la costante di proporzionalità



K = ?

x	y
0,5	0,8
1	1,4
1,5	2,2

K =
$\frac{0,5}{0,8}$
$\frac{1}{1,4}$
$\frac{1,5}{2,2}$

4) Risolvi la seguente equazione

$$\left(\frac{1}{2}-x\right)^2+\left(x+\frac{1}{3}\right)^3=\left(x+\frac{1}{3}\right)\left(x-\frac{1}{3}\right)+x\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{27}$$

$\cancel{\frac{1}{4}}\, x \cancel{+x^2} \cancel{+x^3} + x^2 + \frac{1}{3}x + \cancel{\frac{1}{27}} = x^2 - \frac{1}{9} \cancel{+x^3} \cancel{+x^2} + \cancel{\frac{1}{4}x} + \cancel{\frac{1}{27}}$

Appendice E: Trascrizione interviste ed elaborato ER

Prima intervista

[primo esercizio]
Berto: Quali sono i tuoi dubbi?
ER: Più che altro la calorimetria non avevo tanto capito perché sono rimasto in d.a.d. molto tempo io e molte lezioni le ho dovute saltare.
Berto: Però qui ho visto che andavi spedito con le tue cose. Cosa ti ha fermato?
ER: Il numero un po' alto, perché non mi ricordo se il calore specifico è così alto.
Berto: Ah, è il 130 che ti dà fastidio?
ER: Eh sì.
Berto: Vabbè, può essere.
ER: Vabbè teniamocelo, non c'è tanto da fare. Allora abbiamo definito joule... temperatura...

[quarto esercizio]
Berto: Che cos'è che ti ha fatto venire il dubbio che quello che hai fatto prima non era giusto?
ER: No in realtà è che mi è venuto un attimo...
Berto: Un lampo di genio?
ER: Lampo di genio per niente, però... È che la prof mi diceva su ogni volta che sbagliavo.
[...]
Berto: Cos'è successo?
ER: Mi è venuto il dubbio perché qua c'è l'x due alla seconda e non so se...
Berto: Ma [ti è venuto il dubbio] perché c'è x alla seconda?
ER: Perché c'è x alla seconda e perché facciamo di primo grado noi.
Berto: Ci sta. Quindi tu dici qua mi trovo delle cose che sono alla seconda, non le so ancora svolgere quindi dovranno andare via in qualche modo.
ER: Eh sì.
Berto: Ha senso.

[torniamo al primo esercizio]
Berto: Allora nel primo mi pare che tu avessi scritto questo risultato nella prima parte. E nella seconda?
ER: Ma sono due cose differenti? Il piombo... Ah no perché sono lo stesso problema. Quindi dovrei avere questo.
Berto: Sì diciamo che sono due cose differenti però magari questo può aiutarti nella risoluzione del secondo.
ER: Perché io avrei il calore specifico, che non so neanche se è corretto.
Berto: Vabbè, quello hai!
ER: Quello ho e questo userò.
Berto: Eh nella vità è così, fai con quello che hai non con quello che non hai!

[dopo aver scritto il risultato]
ER: Oddio... Mi pare una cosa troppo insensata
Berto: [non] ti piace?
ER: Mi piace la sicurezza e non lo sono per niente quindi...
Berto: Non sei sicuro su questo 0,18?
ER: No, però fammici pensare potrebbe essere che se lo trasformo in grammi diventa... potrebbe anche aver senso. Potrebbe.

[leggendo il secondo esercizio]
ER: Eh ricordatele te mo le formule di questa!
[scrivendo i dati]
ER: Comunque mi fa davvero felice vedere un numero così alto, perché non lo so.
Berto: Ti piacciono i numeri alti?
ER: No, il fatto che questo qua [il calore specifico nel primo esercizio] è alto.
Berto: Cosa significa alto?
ER: Boh cioè è altino rispetto a quelli che ci davano nelle verifiche, che erano bassissimi.
Berto: Boh io non le ho fatte le tue verifiche però mi sembrano...
ER: Sì di solito dovrebbero essere delle grandezze del genere infatti però a tutti uscivano delle altezze basse. Ah no, non è vero mi sto confondendo con chimica. Ah no non è vero è giusto. Perché fino cinque minuti fa stavo facendo chimica e usciva tutto bassissimo.
Berto: Questa cosa qua [la formula] da dove viene fuori?
ER: Non lo so è la prima formula che mi è venuta in mente guardando tutti i dati che avevo ma...
Berto: Cioè tu dici ho la massa, ho la temperatura e ho il calore specifico...
ER: E tentiamo!
Berto: Ma questa cosa qui [la formula per la temperatura di equilibrio] è una formula, e ci sta...
ER: E sarebbe Q però.
Berto: Quindi riconosci che quella cosa lì è...
ER: Sì è sbagliata però.
Berto: No no, non ho detto così assolutamente. No, riconosci che questa qui, tu mi hai detto, è una Q. Perché?
ER: Perché mi ricordo la formula a memoria
Berto: Che formula ti ricordi?
ER: Q uguale m per c per delta t, dalla quale derivano tutte le altre.
Berto: Ok quindi tu mi hai scritto Q uguale a Q
ER: Sì, Q uguale a Q in poche parole.
Berto: E che significato ha?
ER: È la temperatura di equilibrio che non so farla, quindi siamo messi bene
[...]
Berto: Quindi hai scritto Q uguale a Q e ci sta, bisogna un attimo capire forse che senso ha questo calore. Cosa succede secondo te in quella situazione lì?
ER: Che immergendo il solido di una temperatura definita...
Berto: cioè perché si parla di temperatura di equilibrio del sistema per esempio?
ER: Perché se io inserisco un solido di una definita temperatura all'interno di magari un liquido o qualcos'altro le temperature andranno a variare fino a trovare una temperatura stabile in cui tutte e due hanno la stessa temperatura alla fine.
Berto: Quindi c'è una variazione, qualcuno che dà e qualcuno che riceve
ER: Quindi se io trovassi il Q di questo e il Q di questo poi potrei trovare anche la... potrei.
[cerco di aiutarlo a trovare un errore]
Berto: Cosa rappresenta 145?
ER: Sarebbe la temperatura reale solido quindi non sarebbe delta T ma sarebbe T

[...]
ER: e se fosse delta T l'incognita?
Berto: Ma il delta cosa significa? La parola delta
ER: La variazione.

Berto: La variazione, cioè da quello che c'era alla fine meno quello che c'era all'inizio. E quello che c'è alla fine qual è?
ER: Ah è vero!! Quindi...

[...]
Berto: C'è un motivo particolare per cui qui hai scritto t0 meno t e qui t meno t0?
ER: Perché sennò qua mi uscirebbe negativo
Berto: E non ti piace...
ER: No.

[...]
ER: Mi ricordavo come arrivare a questa parte ma non mi ricordo più come si continuava dopo
Berto: Quindi da qua, fin qua possiamo dire che ci siamo arrivati e non sai come continuare questa cosa?
ER: No. Mi ricordavo che bisognava fare un passaggio

[terzo esercizio]
ER: Non so minimamente come si faccia.
Berto: Minimamente?
ER: No. I grafici è una cosa che una parte della classe ha fatto e l'altra parte no.
Berto: Perché?
ER: Non lo so, la professoressa ci ha diviso e poi ha fatto così. Poi ha cercato di cambiare le cose però è andata a finire male quindi ha fatto tipo due verifiche.
Berto: Cioè ha fatto una lezione...
ER: Ha fatto tipo alcuni facevano una verifica su una cosa cioè un bordello strano boh tanto tempo fa. Ha cercato di farci capire però alla fine non ho mai capito. Nello specifico io che sono una persona che ha bisogno di tipo una spiegazione abbastanza dettagliata per capire bene le cose sennò, sennò va male.
Berto: Ok. Dire che due grandezze sono direttamente proporzionali a te non dice nulla?
ER: No, sì, cioè nel senso che se una cresce, cresce anche l'altra
Berto: Ok questa è una cosa giusta.
ER: E fin qua.
Berto: Ad esempio?
ER: Ad esempio potrei fare un caso con l'economia però vabbè. Facciamo caso che una pianta cresca più acqua si dà. Quindi la sua crescita è direttamente proporzionale alla quantità di acqua fornita.
Berto: Ok. E questa costante di proporzionalità cosa centra? Cosa significa?
[vuoto]
Berto: E ti ricordi altri tipi di proporzionalità?
ER: Era inversa, mi sembra di sì. Quella in cui uno sale e l'altra scende
Berto: Ok quindi nel caso della pianta cosa succederebbe?
ER: Se do... Meno acqua do e più la pianta sale, ad esempio

Seconda intervista
[va subito sull'equazione]

[secondo esercizio]
ER: Qual era il simbolo del calore specifico? Lambda? C piccolo?

Berto: C piccolo, ma puoi scriverlo come vuoi!
ER: Allora devo trovare la temperatura di equilibrio...
Berto: Intanto hai scritto i dati.
ER: Intanto ho scritto i dati. Allora cosa potrei fare... Allora io devo trovare la temperatura finale. Quindi potrebbe essere massa per c per t0 meno tf è uguale a massa per c per tf meno t0. Però l'acqua andava portata prima.
Berto: Questa cosa che mi hai detto...
ER: Sì, non ricordo bene, ora stiamo facendo un'altra cosa.
Berto: No tranquillo, mi sembra sia giusta, ma è un tuo ricordo?
ER: Più che altro avevo fatto un esercizio quest'estate e mi sembra fosse così.
Berto: Qui hai messo tf meno t0 e qui t0 meno tf, perché?
ER: In poche parole la temperatura finale sarà sempre maggiore della temperatura più bassa tra i due e quindi per tenerlo positivo e non doverlo passare dopo faccio direttamente, porto tf, perché la temperatura di equilibrio è sicuramente di questa, essendo che questo è più alto di questo, e quindi t0. In questo caso perché questo si deve abbassare e questo si deve alzare per trovare una temperatura di equilibrio e si vanno incontro per trovare una temperatura di equilibrio [fa un disegno schematico]
Berto: Quindi hai fatto un ragionamento per dire voglio che questo sia positivo e questo sia positivo?
ER: Sì.
ER: La calcolatrice ce l'ho?
Berto: No, mi interessava solo questo…
ER: Ah solo la formula? Ah allora se è solo la formula va bene.

[primo esercizio]
ER: Sappiamo la temperatura iniziale e la temperatura finale. È venti? Sì è venti. Qua è più o meno 2500, vabbè più o meno.
Berto: Tu devi trovare la c hai detto? Cosa ti viene in mente?
ER: Allora cosa potrei fare, ho la temperatura finale, la temperatura zero e ho il peso. Quindi dovrebbe essere questo diviso massa per 20.
Berto: Devi spiegarmi quello che stai facendo perché ti sto seguendo poco. Da quello che sto capendo tu ti ricordi l'unità di misura del calore specifico, però non ti ricordi la formula.
ER: Sì.
Berto: E quindi dici siccome mi ricordo l'unità di misura abbastanza fiduciosamente mi ricavo qual è la formula.
ER: Sì però ora sto pensando che potrebbero essere tipo due joule, uno qua e uno qua...
Berto:La formula te la dico: Q uguale...
ER: E qual è il Q, non mi ricordo...
Berto: Il Q grande è uguale a m c delta T
ER: È vero sì.
Berto: Come leggi questa cosa ora con questi dati? Cos'è che ci manca, cos'abbiamo?
ER: Ci manca... Allora abbiamo la quantità di calore che gli viene dato da questo e questo. Quindi devo fare questo meno questo [indica i due punti del grafico]
Berto: Perché vuoi prendere entrambi?
ER: Perché non è che parte da zero, parte da questo [il primo punto] ed essendo che non parte da zero dovrebbero magari sottrarre 2500 meno 350 o comunque quello che è, dovrebbe essere, potrebbe essere.
Berto: Qui hai un campione di un chilo, quindi la massa ce l'abbiamo e dobbiamo trovare il calore specifico. Questo grafico cosa ci dà? In ordinata ci dà direttamente la Q. Prova a fare questo [il terzo esercizio]

ER: Beh all'aumentare di x aumenta anche y quindi la costante è k.
Berto: Ti ricordi qual è il legame matematico che ci sta sotto alla proporzionalità diretta? Tu hai detto che all'aumentare di uno aumenta anche l'altro, ma ci sono tanti modi in cui aumentando uno aumenta anche l'altro. Mentre questo è in maniera abbastanza lineare.
ER: All'aumentare di x dovrebbe aumentare anche y
[vuoto]

Prima intervista

1

$Q = c \cdot m \cdot \Delta T \qquad C = \frac{Q}{m \cdot \Delta T}$

$\hookrightarrow 130\ J/Kg \cdot K$

$m = 1\ Kg \qquad \Delta T = (20-2) = 18\ K \qquad Q = 2600 - 250 = 2350\ J$

$Q = 1170\ J \qquad C = 130\ J/Kg \cdot K$

$\Delta T = 50\ K \qquad m = \frac{1170\ J}{50\ K \cdot 130\ J/Kg\,K} = 0{,}18\ Kg$

$\cancel{\frac{2x}{6}} \qquad \frac{2x^2 - 3x^2}{3} = \frac{1}{3}x^2$

$-x + \frac{1}{4} + \frac{1}{27} + \frac{2}{3}x^2 + \frac{2}{9}x = -\frac{1}{9} + x + \frac{1}{4}x + \frac{1}{27}$

$-x + \frac{2}{3}x^2 + \frac{2}{9}x - x^2 + \frac{1}{4}x = \cancel{+\frac{2}{3}x} + \frac{1}{4} \cancel{+\frac{1}{27}} - \frac{1}{9} \cancel{+\frac{1}{27}}$

2)

$_1m = 500g \longrightarrow 452\ J \backslash Kg \cdot °C$

$_1t_0 = 145{,}0C°$ $\quad 4186\ J \backslash Kg \cdot °C$

$_2m_{H_2O} = 250g$

$_2t_0 = 20\ °C$

Q

$m \cdot C \cdot \Delta t = m \cdot C \cdot \Delta t$

$500 \cdot 452 \cdot 145 = 250 \cdot 4186 \cdot 20$

$32{,}770{,}000 = 20{,}780{,}000$

$Q_1 \qquad Q_2$

$m \cdot C \cdot (T_0 - T) = m \cdot C\,(T - t_0)$

$500 \cdot 452 \cdot (145 - T) = 250 \cdot 20 \cdot (T - 20)$

$226000 \cdot (145 - T) = 5000\,(T - 20)$

$\cancel{145 \cdot 20}$

$226000 \cdot (145 - x) = 5000\,(x - 20)$

$32{,}770000 - 226000x = 5000x - 100000$

$+\ 0.0068$

$\dfrac{-231000x}{-231000} = \dfrac{-32{,}770000}{-231000} \rightarrow 68{,}4\ °C$

$\cancel{\frac{4+-3}{6}} = \cancel{\frac{1}{6}}x^2 \qquad \frac{2-3}{3} = -\frac{1}{3}x^2$

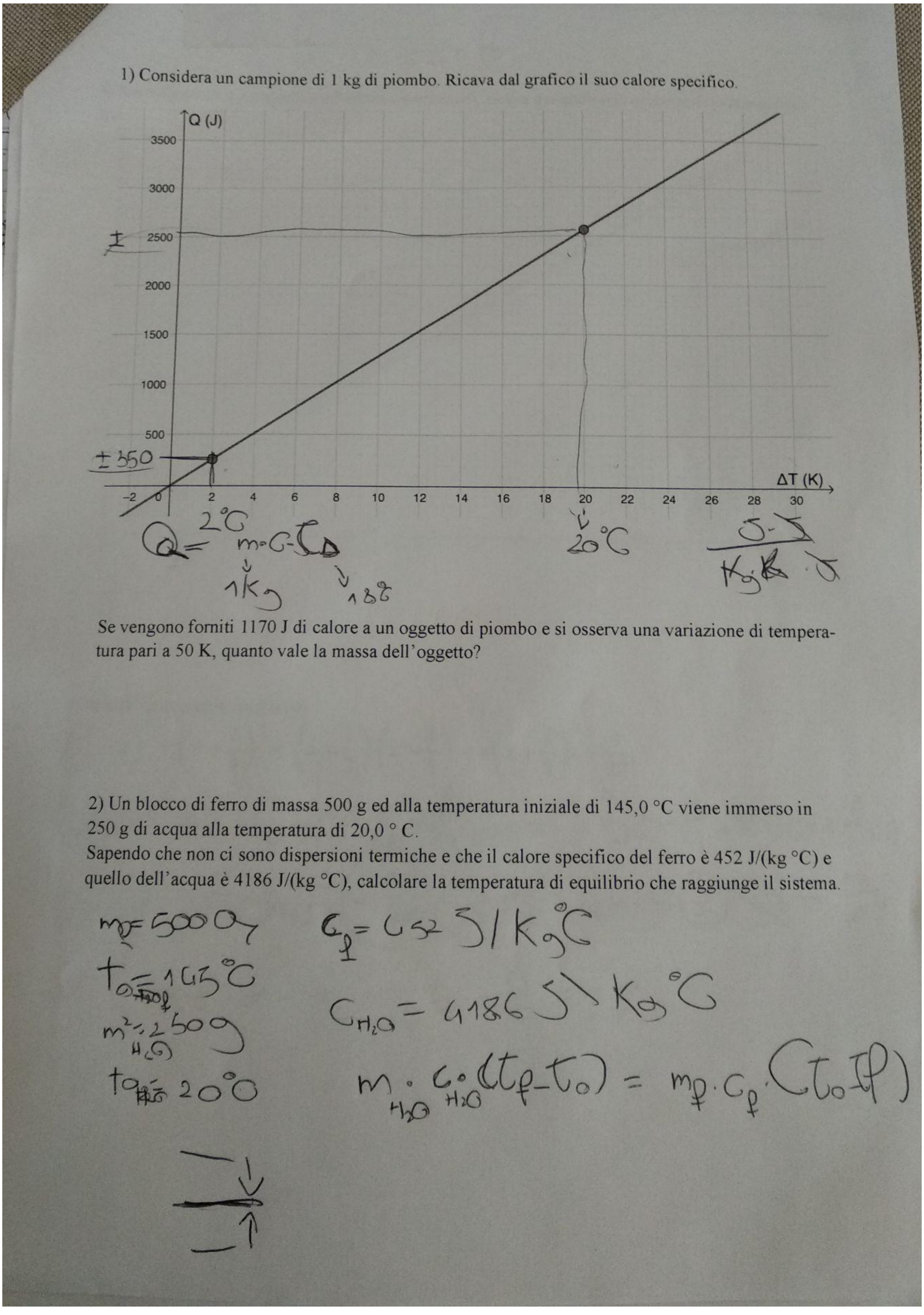
$$\frac{1}{4} + x^2 - x + x^3 + \frac{1}{27} + \frac{2}{3}x^2 + \frac{2}{9}x = x^2 - \frac{1}{9} + x^3 + \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}x^2$$

$+\frac{1}{4}x \qquad +\frac{1}{27}$

$$\cancel{x^2} - x \cancel{+x^3} + \frac{2}{3}x^2 + \frac{2}{9}x \cancel{-x^2} \cancel{-x^3} + \frac{1}{4}x - \frac{1}{2}x^2 = -\frac{1}{9} \cancel{-\frac{1}{4}} \cancel{-\frac{1}{27}}$$

$\cancel{-\frac{1}{3}x^2} \quad \frac{\qquad\qquad}{36} = \underline{\qquad\qquad}$

Seconda intervista


1) Considera un campione di 1 kg di piombo. Ricava dal grafico il suo calore specifico.

$Q = m \cdot c \cdot \Delta T$

1 kg

$\frac{J \cdot J}{kg\,K \cdot J}$

Se vengono forniti 1170 J di calore a un oggetto di piombo e si osserva una variazione di temperatura pari a 50 K, quanto vale la massa dell'oggetto?

2) Un blocco di ferro di massa 500 g ed alla temperatura iniziale di 145,0 °C viene immerso in 250 g di acqua alla temperatura di 20,0 ° C.
Sapendo che non ci sono dispersioni termiche e che il calore specifico del ferro è 452 J/(kg °C) e quello dell'acqua è 4186 J/(kg °C), calcolare la temperatura di equilibrio che raggiunge il sistema.

$m_f = 500\,g$

$t_{0f} = 145\,°C$

$m_{H_2O} = 250\,g$

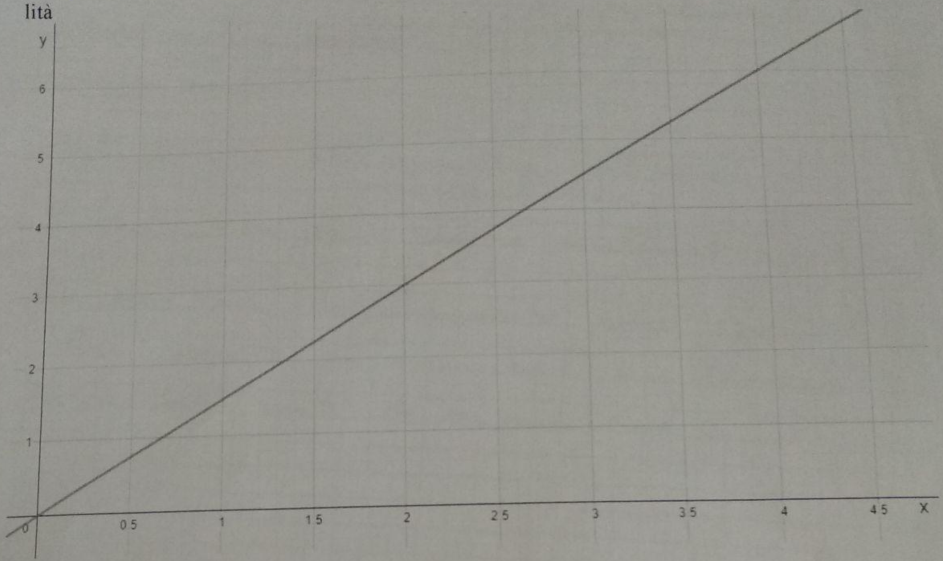
$t_{0H_2O} = 20\,°C$

$c_f = 452\,J/kg\,°C$

$c_{H_2O} = 4186\,J/kg\,°C$

$m_{H_2O} \cdot c_{H_2O} \cdot (t_f - t_0) = m_f \cdot c_f \cdot (t_0 - t_f)$

3) Sapendo che x e y sono direttamente proporzionali, ricava dal grafico la costante di proporzionalità



4) Risolvi la seguente equazione

$$\left(\frac{1}{2}-x\right)^2+\left(x+\frac{1}{3}\right)^3=\left(x+\frac{1}{3}\right)\left(x-\frac{1}{3}\right)+x\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{27}$$

$$\left(\frac{1}{4}+x^2-x\right)+\left(x^3+\frac{1}{27}+\frac{1}{3}x+x^2\right)=\left(x^2-\frac{1}{9}+x\left(x^2+1+x\right)\right)$$

$$\frac{1}{4}+\cancel{x^2}-x+\cancel{x^3}+\frac{1}{27}+\frac{1}{3}x+\cancel{x^2}=\cancel{x^2}-\frac{1}{9}+\cancel{x^3}+x+\cancel{x^2}+\frac{1}{27}$$

$$-x-x+\frac{1}{3}x=-\frac{1}{4}-\frac{1}{27}-\frac{1}{9}+\frac{1}{27}$$

$C = m \cdot \Delta t \cdot$

$$\frac{Q}{m \cdot \Delta t} = \frac{\cancel{m} \cdot c \cdot \cancel{\Delta t}}{\cancel{m} \cdot \cancel{\Delta t}}$$

$$\cancel{\frac{850}{1 \cdot \Delta}} \quad \frac{250\ J}{1\,kg \cdot 2\,K} = \cancel{125\ J/kg}\ K \qquad 125\ J/(kg \cdot K)$$

$$\frac{3}{2} = 1{,}5$$

$$-Q_D = Q_R$$

$$m \cdot c \cdot \Delta t = m \cdot c \cdot \Delta t$$

$$0{,}5\ kg \cdot 452\ J/(kg \cdot °C) \cdot (T_e - 145\ °C) = 0{,}25\ kg \cdot 4186 \cdot (T_e - 2$$

$$\frac{1}{4} - 2x + x^2 + x^3$$

Appendice F: Trascrizione interviste ed elaborato GDB

Prima intervista
[La registrazione inizia da circa metà dell'intervista]

GDB: Inizialmente pensavo che per trovare il calore, sapendo che il calore specifico è i joule che servono per alzare di un grado ho pensato questi sono i joule che sono stati usati e questi sono i gradi perciò se usando questi joule si è alzato di questi gradi divido i joule per i gradi e trovo semplicemente quanti joule sono serviti per un grado. Poi però ero insicuro della formula perché mi è venuta in mente un'altra formula, che era massa per variazione di temperatura per, se non mi sbaglio, per Q se non mi sbaglio. Solo che non sono sicuro neanche di quella. Questa [la prima] mi sembra corretta logicamente però non mi sembra una formula adatta.
Berto: Il tuo dubbio è nato dal fatto che nell'altra formula che ti ricordi c'era la massa mentre qui non l'hai usata.
GDB: Esatto. Ma ho dei problemi a ricordare le formule in questo momento.
[Gli ricordo la formula e lui la inverte correttamente]

[sulla seconda parte dell'esercizio]
GDB: Qui potrei usare questa formula [l'equazione fondamentale] se avessi la massa, no no, la posso usare lo stesso perché Q ce l'ho, la massa è l'incognita, la variazione di temperatura ce l'ho ed è un oggetto di piombo perciò ho anche c perché l'ho ricavato.
[ri-inverte la formula in funzione della massa e risolve l'esercizio]

[Leggendo l'esercizio 2 nota che nell'unità di misura ci sono i gradi centigradi al denominatore, quindi torna nel primo a correggere i kelvin]
[non sa fare l'esercizio, ha un vuoto e prova a ricordare la formula]

Berto: Quindi c'è un ricevente e c'è qualcuno che dà?
GDB: Sì, c'è uno scambio di calore tra i due corpi, ad un certo punto si arriverà ad una temperatura di equilibrio perché un corpo precedentemente era più freddo dell'altro e quindi venendo a contatto il corpo più caldo dà sempre calore a quello più freddo e non il contrario.

Seconda intervista
Berto: Grazie. E allora passiamo alle nostre cose. Questo è un esercizio come l'altra volta. Se magari non ti ricordi non è un problema. Tu fai quello che ti senti, poi ci sono qua io. Io qualcosa mi ricordo di 'ste robette e mi interessa più come ragioni, come pensi, quello che fai. Non se ti ricordi la robetta.
GDB: Ok, allora considera un campione di un chilo di piombo. Ricava dal grafico il suo calore specifico. Ok, beh dal grafico vedo che intanto parte dallo zero, quindi parte dall'origine e qui vedo che all'incirca per… eh... Beh, se per 500 joule servono una variazione di temperatura di due kelvin vedo che qui è circa a metà. Quindi per 250 joule c'è una variazione... no? Vedo che il punto è una variazione di temperatura di due kelvin e vedo che a circa metà del quadretto quindi posso dire che per due, per una variazione di temperatura di due kelvin ho circa 250 joule di calore, cioè di energia.
Berto: Perché ti correggi tra calore ed energia?
GDB: Perché i joule sono un'energia che viene data.

Berto: Sì, ma anche il calore è in joule.
GDB: Sì.
Berto: Perché il calore è un'energia.
GDB: Sì, sì.
Berto: Qua cosa ci chiede?

GDB: Mi chiede di ricavare il calore specifico del piombo.
Berto: Lo riusciresti a trovare?
GDB: So che la formula del calore specifico è massa per variazione di temperatura, ehm… massa per variazione di temperatura e il terzo… e il terzo non lo saprei, cioè non me lo ricordo.
Berto: Mmmh allora dipende quello che vuoi dirmi, perché di solito immagino che tu, cioè la forma standard dell'equazione fondamentale della calorimetria, di solito lega queste cose, cioè lega il calore specifico, lega la massa, lega la variazione di temperatura e lega che cosa? la Q, cioè il calore che forniamo un oggetto lo lega alla variazione di temperatura che si osserva.
GDB: Quindi Q uguale m per c per delta t.
Berto: Esattamente. Perché te lo sei ricordato subito adesso?
GDB: Perché ho pensato al dato Q e mi ha ricordato la formula e non avevo pensato di aggiungerlo.
Poi effettivamente vedendo che va messa la Q mi è venuta in mente la formula. Quindi io posso trovarmi la formula inversa, quindi posso dividere ambo i membri per m per delta T e quindi trovo che la formula per il calore specifico è uguale Q fratto massa per variazione di temperatura.
Berto: Ok.
GDB: Quindi io il calore la variazione di temperatura ce l'ho e anche la massa, quindi posso dire che 250 fratto un chilo per due kelvin, quindi 250 joule fratto un chilogrammo per due kelvin è uguale a 125 chilogrammo per Kelvin e questo tra parentesi.
Berto: Perché hai messo le parentesi?
GDB: No si può anche tralasciare, però si fa prima il joule su chilogrammo e poi per kelvin. Sì, alla fine è la stessa cosa. Nell'ordine delle operazioni si potrebbero tralasciare le parentesi.
Berto: Il Kelvin dov'è? Al numeratore o al denominatore?
GDB: Al numeratore.
Berto: Sei sicuro? Io qui lo vedo al denominatore.
GDB: 125 joule fratto chilogrammo per kelvin. Beh i kelvin sono gradi centigradi quindi per grado centigrado.
Berto: Vabbè se c'è scritto kelvin però metti kelvin. Non sono esattamente la stessa cosa.
GDB: Cioè nella variazione di temperatura 1 kelvin equivale a 1 grado centigrado.
Berto: Secondo me ti ricordavi ci fossero delle parentesi quadre, però poi ti sei detto vista così è effettivamente la stessa cosa, che è verissimo. Perfetto quindi abbiamo trovato il nostro calore specifico.

[passiamo all'esercizio sulla proporzionalità]
GDB: Allora sapendo che x e y sono direttamente proporzionali ricava dal grafico la costante di proporzionalità. Beh come prima cosa trovo un punto d'intersezione tra x e y, quindi per esempio vedo che x è 0,5 però non ho un valore preciso di y, quindi preferisco andare qui dove c'è x uguale a due e y uguale tre e sapendo che sono direttamente proporzionali la divisione tra di loro, cioè quindi y fratto x mi darà sempre k quindi posso prendere un solo punto e non mi serve verificare per ogni punto anche se effettivamente lo posso vedere perché tre e due hanno l'intersezione però anche i loro multipli che sono sei e quattro hanno

l'intersezione, quindi mi basta trovare la costante k facendo y fratto x uguale k quindi tre fratto due uguale 1,5 e questa è la costante di proporzionalità
Berto: Secondo te questi due esercizi si somigliano? [il primo e il terzo]
GDB: Beh sì, perché in entrambi devo trovare un punto di intersezione. Ad esempio nel primo esercizio effettivamente ho sbagliato perché potevo vedere 1000 con 8.
Berto: È vero nella lettura del grafico ci sono queste cose qua. Trovi altre somiglianze tra questi due esercizi?
GDB: Mhh
Berto: Perché quello che mi hai detto tu, se lo vogliamo rileggere, è che tu hai fatto lo stesso ragionamento per trovare i punti del grafico, ma questo lo potevi fare perché il grafico è...
GDB: Quadrettato.
Berto: Sì, però qua è rappresentata una linea passante per l'origine e qua la stessa cosa.

GDB: Sì.
Berto: Quindi in qualche modo c'è questa somiglianza. Le grandezze che sono qui [nel primo esercizio] dovranno essere come sono qui [nel terzo esercizio]. Qui la x e la y erano direttamente proporzionali, quindi immagino che anche qui c'è qualcosa che è direttamente proporzionale... Chi secondo te?
GDB: Beh allora... all'aumentare di.... all'aumentare della variazione di temperatura aumenta anche il calore.
Berto: È vero, dal punto di vista matematico all'aumentare della variazione della temperatura aumenta il calore. Però questa non è solo una cosa matematica, cioè è una cosa matematica che rispecchia una cosa fisica, perché se io fornisco calore...
GDB: Aumenta la temperatura.
Berto: E quindi la costante di proporzionalità che qui era k, qui invece chi è la proporzionalità diretta?
GDB: Mh... Q fratto delta T? È il calore specifico.
Berto: Per un dato oggetto, cioè avendo una massa di un chilo è proprio il calore specifico. Quindi è vero che il calore specifico è tutto quello che ti hanno insegnato, però ha anche un significato matematico.

[esercizio due]
Berto: Qual è la situazione fisica nell'esercizio?
GDB: Ho un blocco di ferro di cui mi viene data la massa e la temperatura iniziale e lo immergo in 250g d'acqua alla temperatura di 20 gradi. Devo capire a che temperatura di equilibrio si arriverà quando si sarà raffreddato il blocco di ferro.
Berto: Ti ricordi un po' come si risolvono, cosa ci sta sotto? Qual è la richiesta dell'esercizio?
GDB: Trovare la temperatura di stabilità.
Berto: Ok, trovare la temperatura di equilibrio. Ti ricordi un po' come si fanno questi esercizi?
GDB: No.
Berto: Abbiamo il blocco di ferro, che ha una certa temperatura, tu mi hai detto però che sarà minore, che diminuirà. E quella dell'acqua che...
GDB: Aumenterà.
Berto: Quindi c'è il blocco di ferro che è più caldo e dà il calore all'acqua e l'acqua lo riceve. Questi due calori sono diversi o uguali?
GDB: Sono uguali perché il calore dato è il calore ricevuto.
Berto: Ma tu sai qual è la formula del calore!
GDB: Sì, so che Q uguale m per c per delta t. Quindi metto che Qt, calore dato... anzi lo scrivo direttamente.

Berto: Quindi calore dato uguale a calore ricevuto. Però poi uno deve essere positivo e uno negativo, perché...
GDB: Sì, sì.
Berto: Quindi al posto di quella Q puoi scrivere quello che sai.
[trascrive la formula]
GDB: Ho la massa del blocco di ferro e il calore specifico, quindi scrivo 500 g che vanno tradotti in chili quindi 0,5 chili... per 452 joule su chilogrammo per grado... per la variazione di temperatura che non ho, quindi metto x.
Berto: È vero, non la hai, però come si lega la temperatura di equilibrio con la variazione di temperatura?
GDB: Beh la variazione di temperatura è la temperatura iniziale meno la temperatura finale.
Berto: Il contrario! E quale sarà la temperatura finale?
GDB: Quella che raggiunge il sistema, quindi l'equilibrio.
[riscrive l'equazione]
Berto: Quindi abbiamo un'incognita unica, come la risolvi?

GDB: Raccolgo la temperatura di equilibrio...
Berto: Ok, va bene

[l'esercizio 4 fa il primo passaggio riconoscendo i prodotti notevoli]

Prima intervista

$$C = \frac{2250\ J}{18\ K} = 125\ J/(kg \cdot °C) \qquad \frac{Q}{m \cdot \Delta t} = \frac{\cancel{m} \cdot \cancel{\Delta t} \cdot c}{\cancel{m} \cdot \cancel{\Delta t}}$$

$$C = \frac{2500\ J}{1\ kg \cdot 18 K} = 138{,}89\ J/(kg \cdot °C) \qquad \frac{Q}{\Delta t \cdot c} = \frac{m \cdot \cancel{\Delta t} \cdot \cancel{c}}{\cancel{\Delta t} \cdot \cancel{c}}$$

$$m = \frac{1170\ J}{50\ K \cdot 138{,}89} = 0{,}17\ kg$$

$$\frac{y}{x} = K$$

$$\frac{6}{4} = 1{,}5$$

$$\left(\frac{1}{2} - x\right)^2 + \left(x + \frac{1}{3}\right)^3 = \left(x + \frac{1}{3}\right)\left(x - \frac{1}{3}\right) + x\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{27}$$

$$\frac{1}{4} + x^2 + x^3 + \frac{3}{3}x^2 + \frac{3}{9}x + \frac{1}{27} = x^2 - \frac{1}{3} + x\left(x^2 + \frac{2}{2}x + \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{27}$$

$$\frac{1}{4} + \cancel{x^2} + \cancel{x^3} + \cancel{\frac{3}{3}x^2} + \frac{3}{9}x + \frac{1}{27} = \cancel{x^2} - \frac{1}{3} + \cancel{x^3} + \cancel{\frac{2}{2}x^2} + \frac{1}{4}x + \frac{1}{27}$$

$$\frac{3}{9}x - \frac{1}{4}x = -\frac{1}{4} - \frac{1}{27} - \frac{1}{3} + \frac{1}{27}$$

$$\frac{12}{36}x - \frac{9}{36}x = -\frac{27}{108} - \frac{4}{108} - \frac{36}{108} + \frac{4}{108}$$

$$\frac{\cancel{3}^{\,1}}{\cancel{36}_{\,12}}x = -\frac{\cancel{63}\ \cancel{27}\ 7}{\cancel{108}\ \cancel{36}\ 12}$$

$$\frac{1}{12}x = \frac{7}{12}$$ → DIVIDO ENTRAMBI I MEMBRI PER 12

$$x = 7$$

$$\left(x + \frac{1}{3}\right)\left(x + \frac{1}{3}\right)\left(x + \frac{1}{3}\right)$$

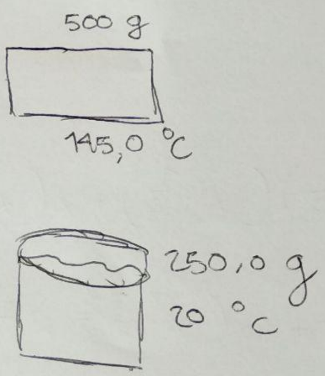
$$x^2 + \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}x + \frac{1}{9}\left(x + \frac{1}{3}\right)$$

$$x^3 + \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{9}x + \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{9}x + \frac{1}{9}x + \frac{1}{27}$$

$$x^3 + \frac{3}{3}x^2 + \frac{3}{9}x + \frac{1}{27}$$

$C_{H_2O} = 4186 \ J/(kg \cdot {}^\circ C)$

$C_{Fe} = 452 \ J/(kg \cdot {}^\circ C)$



Appendice G: Trascrizione interviste ed elaborato SB

Seconda intervista
[primo esercizio]
[Scrive solo il monomio “m per c per deltaT”, senza l'equazione]
Berto: Cos'è?
SB: La formula... della propagazione del calore.
Berto: m per c per deltaT è un calore, che di solito viene rappresentato con che lettera?
SB: Joule?
Berto: Quella è l'unità di misura.
[…] [La aiuto a ricordare la forma della formula, che è appunto l'equazione]

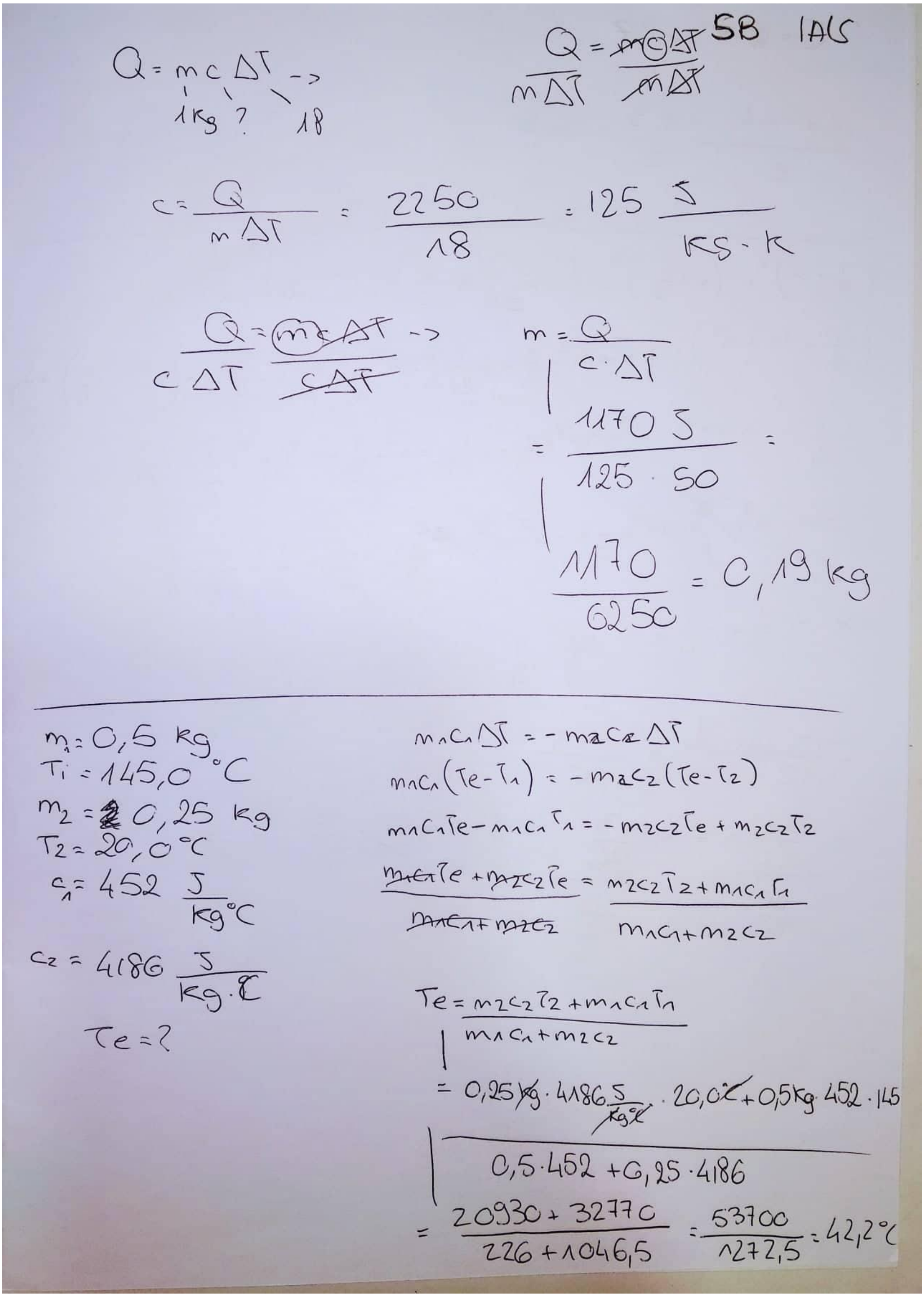
[terzo esercizio]
SB: La formula per ricavare la costante è y fratto x.
Berto: [È quella] perché te lo ricordi?
SB: Sì. Poi ho trovato due punti, x due e y tre.
Berto: Ok. L'esercizio che hai appena fatto e l'1 secondo te si somigliano?
SB: Beh il grafico sì, però richiede cose diverse.
Berto: Il grafico sì perché sono tutte e due...
SB: Direttamente proporzionali.

[secondo esercizio]
Berto: Cos'hai fatto? Raccontami.
SB: Ho fatto la formula inversa per trovare la temperatura di equilibrio.
Berto: La prima cosa che hai scritto cos'è e da dove ti viene fuori?
SB: È la formula del calore...
Berto: È vero, centra il calore. Ma ad esempio qui [a sinistra dell'equazione] mi hai scritto una cosa e qui [a destra] la stessa cosa ma con il meno. Perché?
[vuoto]
Berto: Perché te la ricordi così, non c'è niente di male, va bene. Siamo esseri umani e abbiamo la memoria e la usiamo. Se le robe le capiamo però è anche meglio, perché magari il prossimo anno non te le ricordi più. È un esercizio sul calore scambiato, quindi c'è qualcuno che dà calore...
SB: e qualcuno che lo riceve.
Berto: Di solito chi lo riceve ha la più...
SB: e chi lo dà la meno.
Berto: E quindi tu mi hai scritto che l'unica incognita che abbiamo è la temperatura di equilibrio, quindi c'è un'equazione e la andiamo a risolvere, più o meno.

[quarto esercizio]
Berto: Ti piace di più la fisica o la matematica?
SB: L'anno scorso matematica, quest'anno fisica.
Berto: Perché, cosa c'è di diverso?
SB: La prof.
Berto: Ah, allora [la domanda sarebbe] ti piace di più la prof di fisica o la prof di matematica! Ti piacciono le materie solo perché ti piacciono i professori?
SB: No, però se un professore è bravo mi piace di più.
Berto: E com'è un professore bravo? Insegnami così magari se dovessi farlo un giorno...
SB: Mi piace il modo che ha di spiegare quest'anno la professoressa.

Berto: Cioè? Porta le torte in classe? Come si fa a spiegare bene?
SB: Boh cioè usa termini semplici poi magari boh è gentile.
Berto: Quindi crea un ambiente in cui ti senti più sicura.
SB: Esatto

Prima intervista



5B IAC

$Q = mc\Delta T \rightarrow$ 1 kg ? 18

$\frac{Q}{m\Delta T} = \frac{\cancel{m}c\cancel{\Delta T}}{\cancel{m\Delta T}}$

$c = \frac{Q}{m\Delta T} = \frac{2250}{18} = 125 \frac{J}{kg \cdot K}$

$\frac{Q}{c\Delta T} = \frac{m\cancel{c\Delta T}}{\cancel{c\Delta T}} \rightarrow$

$m = \frac{Q}{c \cdot \Delta T} = \frac{1170\ J}{125 \cdot 50} = \frac{1170}{6250} = 0,19\ kg$

$m_1 = 0,5\ kg$

$T_1 = 145,0\ °C$

$m_2 = 0,25\ kg$

$T_2 = 20,0\ °C$

$c_1 = 452 \frac{J}{kg°C}$

$c_2 = 4186 \frac{J}{kg \cdot °C}$

$T_e = ?$

$m_1c_1\Delta T = -m_2c_2\Delta T$

$m_1c_1(T_e - T_1) = -m_2c_2(T_e - T_2)$

$m_1c_1T_e - m_1c_1T_1 = -m_2c_2T_e + m_2c_2T_2$

$\frac{m_1c_1T_e + m_2c_2T_e}{\cancel{m_1c_1 + m_2c_2}} = \frac{m_2c_2T_2 + m_1c_1T_1}{m_1c_1 + m_2c_2}$

$T_e = \frac{m_2c_2T_2 + m_1c_1T_1}{m_1c_1 + m_2c_2}$

$= \frac{0,25\ \cancel{kg} \cdot 4186 \frac{J}{\cancel{kg°C}} \cdot 20,0\ \cancel{°C} + 0,5\ kg \cdot 452 \cdot 145}{0,5 \cdot 452 + 0,25 \cdot 4186}$

$= \frac{20930 + 32770}{226 + 1046,5} = \frac{53700}{1272,5} = 42,2\ °C$

$C = \cancel{2{,}}\ 2{,}7$

$$\frac{2{,}7 - 1{,}4}{2} = \frac{1{,}3}{2} = 0{,}65$$

$$\left(\frac{1}{2} - x\right)^2 + \left(x + \frac{1}{3}\right)^3 = \left(x + \frac{1}{3}\right)\left(x - \frac{1}{3}\right) + x\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{27}$$

$$\left(\frac{1}{4} - 1x + x^2\right) + \left(x^3 + 1x^2 + \frac{3}{9}x + \frac{1}{27}\right) = x^2 - \cancel{\frac{1}{3}}x + \cancel{\frac{1}{3}}x - \frac{1}{9} + x\left(x^2 + 1x + \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{27}$$

$$\frac{1}{4} - 1x + x^2 + x^3 + 1x^2 + \frac{1}{3}x + \frac{1}{27} = x^2 - \frac{1}{9} + x^3 + x^2 + \frac{1}{4}x + \frac{1}{27}$$

$$-1x + \cancel{x^2} + \cancel{x^3} + \cancel{1x^2} + \frac{1}{3}x - \cancel{x^2} - \cancel{x^3} - \cancel{x^2} - \frac{1}{4}x = \cancel{\frac{1}{27}} - \frac{1}{9} - \cancel{\frac{1}{27}} - \frac{1}{4}$$

$$-x + \frac{1}{3}x - \frac{1}{4}x = -\frac{1}{9} - \frac{1}{4}$$

$$\frac{-12x + 4x - 3x}{12} = \frac{-4 - 9}{36}$$

$$\frac{-\cancel{\frac{11}{12}}x}{\cancel{-\frac{11}{12}}} = \frac{-\frac{13}{36}}{-\frac{11}{12}} \qquad x = \frac{13}{36} \cdot \frac{12}{11} \to \frac{13}{33}$$

Seconda intervista

$m = 1\ kg$

$$\boxed{\frac{m c \Delta T}{c}}$$

$$1 \cdot 2500 \cdot 20 = -\left(\frac{1}{2} \cdot 250 \cdot \cancel{12}\right)$$

$$Q = m c \Delta T$$

$$m c (T_f - T_i)$$

$$\frac{2500}{1 \cdot 20} = \frac{\cancel{1} \cdot c \cdot \cancel{20}}{\cancel{1} \cdot \cancel{c} \cdot \cancel{20}}$$

$$c = \frac{250\cancel{0}}{2\cancel{0}} \Rightarrow 125$$

$$1170 = m \cdot (50K) \cdot 125$$

$$m = \frac{117\cancel{0}}{5\cancel{0} \cdot 125} =$$

$$k = \frac{y}{x}$$

$x = 2$ $y = 3$

$$k = \frac{3}{2} = 1{,}5$$

$m_1 = 0{,}5\ kg$

$T_1 = 145\ °C$

$m_2 = 0{,}25\ kg$

$T_2 = 20\ °C$

$c_1 = 452\ \frac{J}{kg \cdot °C}$

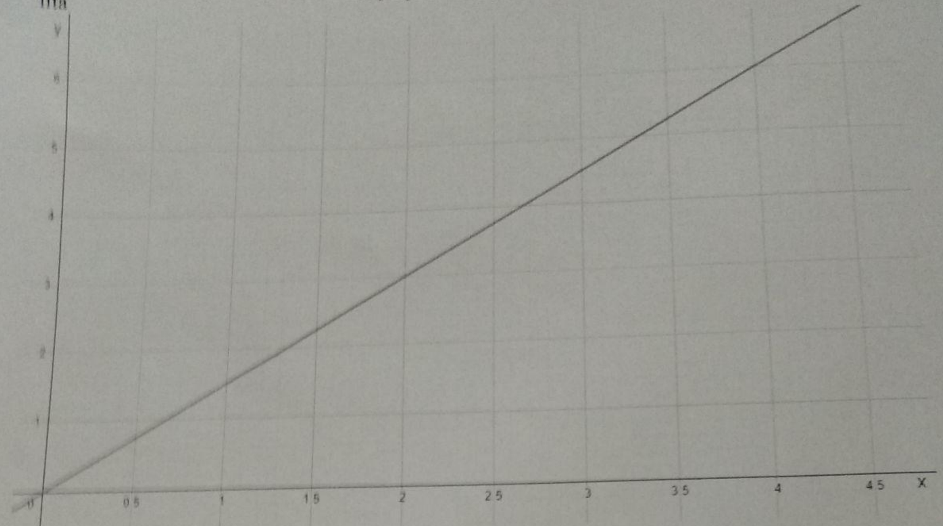
$c_2 = 4186\ \frac{J}{kg \cdot °C}$

$T_e = ?$

$$m_1 c_1 \Delta T_1 = - m_2 c_2 \Delta T_2$$

$$0{,}5 \cdot 452 \cdot (T_e - 145) = -0{,}25 \cdot 4186 \cdot (T_e -$$

3) Sapendo che x e y sono direttamente proporzionali, ricava dal grafico la costante di proporzionalità



$\frac{y}{x} = k \Rightarrow$ costante $\quad \frac{3}{2}$

4) Risolvi la seguente equazione

$$\left(\frac{1}{2}-x\right)^2+\left(x+\frac{1}{3}\right)^3=\left(x+\frac{1}{3}\right)\left(x-\frac{1}{3}\right)+x\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{27}$$

$$\frac{1}{4}+x^2-\frac{1}{2}x+x^3+\frac{1}{27}+x^2+\frac{1}{3} = x^2-\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}x-\frac{1}{9}+x\left(x^2+\frac{1}{4}+x\right)+\frac{1}{27}$$

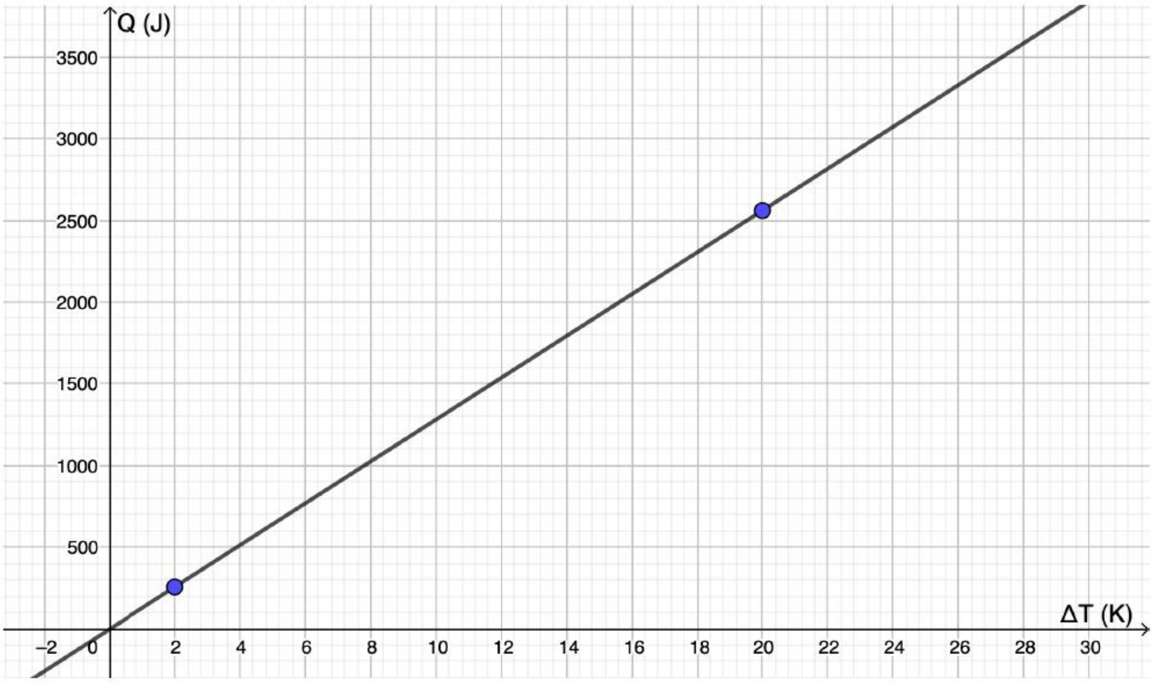
$\Rightarrow$

$$\frac{1}{4}-1x+x^2+x^3+1x^2+1x+\frac{1}{27}-x^2-\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}x-\frac{1}{9}+x\left(x^2+1x+\frac{1}{4}\right)$$

$$\frac{1}{4}-x^3+\frac{1}{27}-x^2-\frac{1}{9}+x^3+x^2+\frac{1}{4}$$

Appendice H: Test

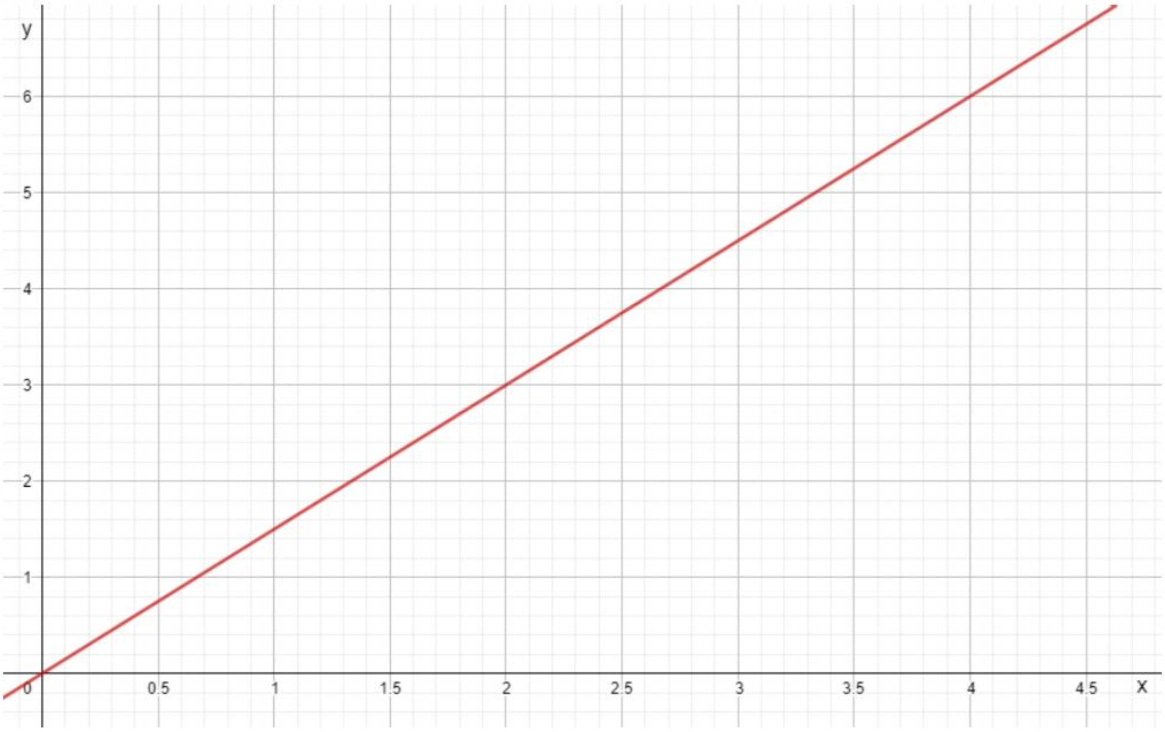
1) Considera un campione di 1 kg di piombo. Ricava dal grafico il suo calore specifico.



Se vengono forniti 1170 J di calore a un oggetto di piombo e si osserva una variazione di temperatura pari a 50 K, quanto vale la massa dell'oggetto?

2) Un blocco di ferro di massa 500 g ed alla temperatura iniziale di 145,0 °C viene immerso in 250 g di acqua alla temperatura di 20,0 ° C.
Sapendo che non ci sono dispersioni termiche e che il calore specifico del ferro è 452 J/(kg °C) e quello dell'acqua è 4186 J/(kg °C), calcolare la temperatura di equilibrio che raggiunge il sistema.

3) Sapendo che x e y sono direttamente proporzionali, ricava dal grafico la costante di proporzionalità



4) Risolvi la seguente equazione

$$\left(\frac{1}{2}-x\right)^2+\left(x+\frac{1}{3}\right)^3=\left(x+\frac{1}{3}\right)\left(x-\frac{1}{3}\right)+x\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{27}$$