



Università degli Studi di Padova

DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA DELL'INFORMAZIONE
Corso di Laurea Triennale in Ingegneria dell'Informazione

Tesi di Laurea Triennale
Introduzione al controllo digitale

Laureando:
Bruno Tonello

Relatore:
Ch.mo Prof. Sandro Zampieri

Indice

1	Introduzione	1
1.1	Convertitore A/D	3
1.2	Convertitore D/A	5
2	Sistemi a dati campionati	7
2.1	Stabilità a tempo discreto	8
3	Sintesi di controllori digitali	11
3.1	Progetto nel continuo e discretizzazione	11
3.1.1	Metodo della trasformata Zeta	12
3.1.2	Trasformazione bilineare	12
3.1.3	Matching di poli e zeri	15
3.2	Progetto nel discreto	15
3.2.1	Sintesi mediante luogo delle radici	16
3.2.2	Sintesi nel piano w	20
4	Esempio applicativo	23
4.1	Discretizzazione del controllore	27
4.2	Progetto nel discreto	31
4.2.1	Luogo delle radici	31
4.2.2	Sintesi nel piano w	34
5	Conclusione	37
	Bibliografia	39

Capitolo 1

Introduzione

Prima della rivoluzione digitale i sistemi di controllo erano basati essenzialmente su componenti idraulici, pneumatici e meccanici connessi opportunamente tra loro. Successivamente, prima la diffusione di transistor ed amplificatori operazionali e più tardi l'invenzione del microprocessore, hanno rivoluzionato il mondo del controllo permettendo la diffusione di sistemi di controllo a prestazioni più elevate ed adatti ad una varietà sempre maggiore di sistemi.

Con il termine controllo digitale si intende in generale uno schema di controllo in retroazione in cui la legge di controllo viene eseguita da un calcolatore digitale. Un calcolatore moderno utilizzato per il controllo comprende in generale un'unità centrale di calcolo (un processore o un microprocessore), alcune unità input-output e un'unità di memoria. La potenza, la dimensione e il numero di componenti utilizzati per realizzare un sistema di controllo digitale specifico varia a seconda della quantità di dati da analizzare e della velocità di calcolo richiesta dalla specifica applicazione. La disponibilità di sistemi di elaborazione sempre più potenti e affidabili ha fatto in modo che negli ultimi trent'anni il numero di sistemi di controllo realizzati in forma digitale aumentasse molto velocemente. Le moderne applicazioni spaziano in vari ambiti: macchine utensili, processi di lavorazione di metalli, processi chimici, controllo di sistemi in ambito automobilistico (es. cruise control). Lo schema a blocchi generale di un possibile sistema di controllo digitale è proposto in figura 1.1.

Poiché il calcolatore non può né ricevere né elaborare segnali analogici non è possibile interfacciarlo direttamente con sistemi di misura ed attuatori, i quali sono generalmente sistemi analogici. Nello schema di figura il calcolatore riceve l'errore in forma digitale e restituisce un segnale di uscita ancora in forma digitale. È necessario pertanto che i dati in ingresso e in uscita vengano convertiti mediante l'utilizzo rispettivamente di un convertitore

analogico-digitale e di un convertitore digitale-analogico. Sistemi in cui si interfacciano sistemi a tempo continuo e sistemi a tempo discreto sono chiamati sistemi a dati campionati.

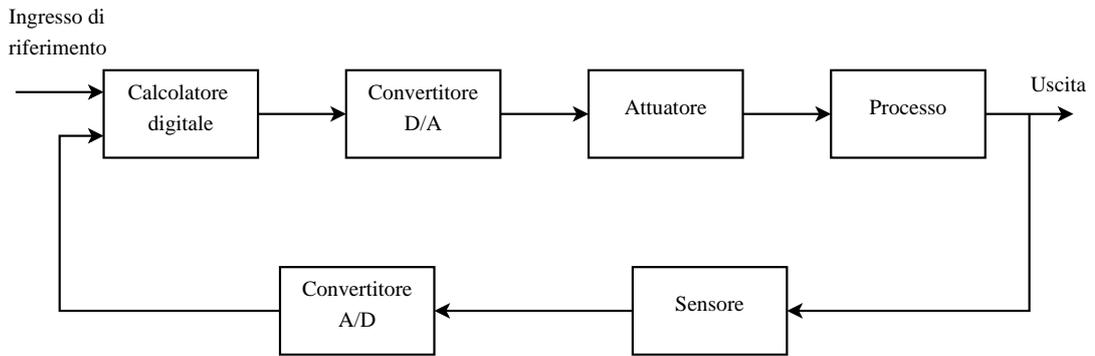


Figura 1.1: Possibile schema generale di un sistema di controllo digitale

È bene precisare che lo schema proposto non è unico, sono possibili infatti schemi alternativi ad esempio nel caso in cui il riferimento sia un segnale continuo e non discreto è necessario inserire in convertitore A/D aggiuntivo che trasformi il segnale di riferimento prima di inviarlo al computer.

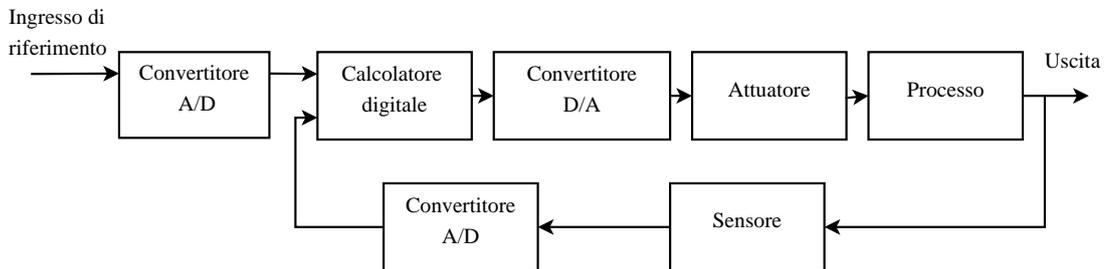


Figura 1.2: Schema alternativo di un sistema di controllo digitale

La diffusione del controllo digitale è stata senza dubbio favorita dai suoi innumerevoli vantaggi.

La legge di controllo realizzata tramite software consente un'enorme flessibilità poiché cambiare controllore equivale a modificare l'algoritmo eseguito dal computer. Ciò consente altresì un'accresciuta possibilità di effettuare simulazioni ed esperimenti. È possibile sviluppare con maggior semplicità leggi di controllo anche molto complesse: possono essere presenti nell'algoritmo ad esempio sia funzioni logiche sia funzioni matematiche, inoltre la capacità da parte di un computer di gestire più ingressi offre la possibilità di realizzare sistemi di controllo digitale multivariabile. La sempre maggiore capacità di

elaborazione dei moderni microprocessori consente una precisione e un'affidabilità in generale molto elevate.

Il controllo digitale porta anche alcune problematiche. La progettazione è più complessa ed articolata poiché vengono coinvolte grandezze discrete, la stabilizzazione del sistema è in generale più delicata; inoltre sono possibili arresti non previsti dovuti a malfunzionamenti del calcolatore. Sono presenti anche problematiche dovute alla corretta temporizzazione dell'intero sistema, come ad esempio la scelta del periodo di campionamento e la gestione del ritardo dovuto all'elaborazione dei dati da parte del calcolatore.

Come detto in precedenza poiché i calcolatori sono in grado di elaborare segnali discreti, essi sono connessi ad attuatori e sensori rispettivamente tramite convertitori digitale-analogico e analogico-digitale.

1.1 Convertitore A/D

Un convertitore analogico-digitale è un dispositivo che esegue le operazioni di campionamento e quantizzazione del segnale analogico in ingresso. Il processo di campionamento discretizza un segnale continuo nel tempo, mentre il processo di quantizzazione discretizza l'ampiezza del segnale continuo facendo in modo che questa assuma valori in un insieme finito di possibili ampiezze, quindi rappresentabile con un numero finito di cifre binarie.

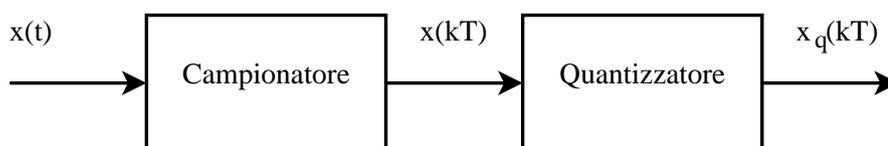


Figura 1.3: Schema a blocchi di campionamento e quantizzazione

Il campionamento viene rappresentato con una sequenza di impulsi che partono dall'istante $t = 0$, a distanza uno dall'altro di T_c secondi e assumo ampiezza pari a $x(kT_c)$.

Si ha quindi che la relazione per il campionamento nel dominio del tempo è la seguente (con abuso di notazione):

$$x(kT) = \sum_{k=0}^N x(kT_c) \delta(t - kT_c) \quad (1.1)$$

Il periodo $T = T_c$ è detto periodo di campionamento, e analogamente $f_c = \frac{1}{T_c}$ è detta frequenza di campionamento. Il processo di quantizzazione

consiste invece nell'associare ad ogni valore possibile di ampiezza dei campioni, cioè ogni valore di $x(kT)$, il valore di ampiezza più vicino codificato dal calcolatore. Prima della quantizzazione i possibili valori di ampiezza che il segnale può assumere sono infiniti, mentre il segnale quantizzato può assumere solo un numero finito di valori di ampiezza. Una rappresentazione del processo complessivo è mostrata in figura 1.4 per un generico segnale $x(t)$. La precisione con cui un computer rappresenta i campioni è limitata, quindi la precisione di un convertitore analogico-digitale dipende dal numero di livelli di quantizzazione scelti e dal numero di bit utilizzati per rappresentare un singolo dato. Questi due valori sono legati dalla relazione: $L = 2^b$ dove L indica il numero di livelli di quantizzazione e b indica il numero di bit per rappresentare un singolo campione. È inevitabile pertanto la presenza di un errore di quantizzazione, che è definito come la differenza tra il valore di ampiezza del campione e il valore di ampiezza del campione in seguito alla quantizzazione, formalmente:

$$e_q(kT) = x(kT) - x_q(kT) \quad (1.2)$$

Se il valore dell'errore di quantizzazione è molto minore rispetto alle variazioni di ampiezza del segnale, il sistema risulta sufficientemente preciso e l'errore di quantizzazione è trascurabile; inoltre si deve considerare anche che la precisione dei moderni calcolatori è molto alta.

Si noti, in figura 1.4, l'errore di quantizzazione presente tra i valori di ampiezza dei campioni originali e i valori di ampiezza del segnale quantizzato, maggiore è il numero di bit utilizzati maggiore sarà il numero di livelli e l'errore di quantizzazione può essere trascurato per un numero sufficiente di livelli di quantizzazione rappresentabili dal computer.

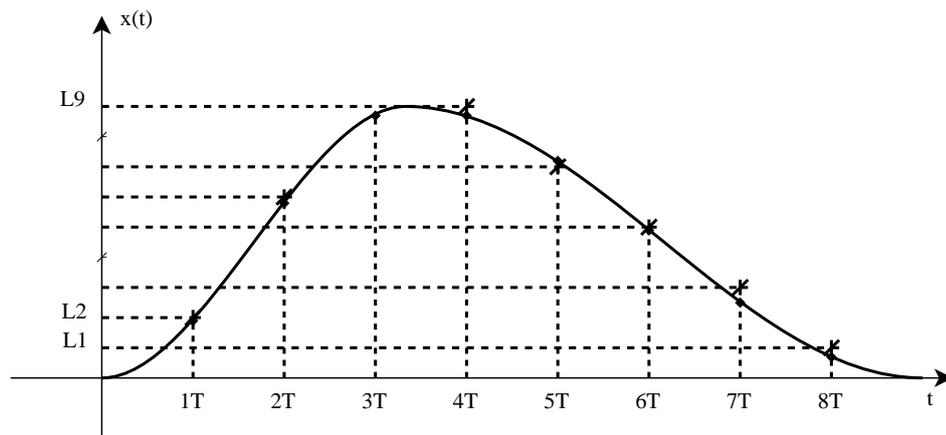


Figura 1.4: Rappresentazione di campionamento e quantizzazione su $x(t)$

1.2 Convertitore D/A

Un convertitore digitale-analogico è un dispositivo che converte un segnale a tempo discreto in un segnale continuo nel tempo. Il modo più semplice di realizzare la conversione consiste nell'utilizzare un mantenitore di ordine zero (abbreviato nel seguito ZOH: Zero Order Hold) il quale dato in ingresso il campione $x(kT_m)$, ne mantiene il valore costante fino all'istante $(k+1)T_m$ istante in cui il valore verrà aggiornato con il valore del campione $x((k+1)T_m)$; formalmente considerando sempre un generico segnale $x(t)$ si ha:

$$x(t) = x(kT_m) \quad kT_m < t < (k+1)T_m \quad (1.3)$$

dove $T = T_m$ è il periodo di mantenimento; nel seguito si ipotizzerà che periodo di mantenimento e di campionamento coincidano, cioè $T = T_m = T_c$. Il grafico della risposta impulsiva di uno ZOH è proposta in figura 1.5. In termini di trasformate di Laplace si ottiene:

$$G_o(s) = \frac{1}{s} + \frac{1}{s} e^{-sT} \quad (1.4)$$

Una rappresentazione grafica dell'uscita di un mantenitore dato in ingresso un segnale generico $x(t)$ precedentemente campionato è proposta in figura 1.6.

La scelta del periodo di campionamento (e mantenimento) è fondamentale perché influenza la complessità dei dispositivi: aumentando la frequenza di campionamento il costo dei convertitori A/D e D/A cresce notevolmente e aumenta la capacità di calcolo dell'elaboratore che esegue la legge di controllo, ciò comporta un' aumento complessivo dei costi dei dispositivi utilizzati. Un primo importante vincolo nella scelta è fornito dal teorema del campionamento. Innanzitutto è necessario che il segnale $x(t)$ sia a banda limitata; in caso contrario è necessario utilizzare preliminarmente un filtro anti-aliasing, in altri termini un filtro passa-basso con opportuna frequenza di taglio. Supponendo che il segnali abbia frequenza massima f_{max} , il teorema del campionamento afferma che per evitare fenomeni di aliasing è necessario che la frequenza di campionamento rispetti il seguente vincolo:

$$f_c > 2f_{max} \quad (1.5)$$

A livello pratico vista la non idealità dei filtri è necessario che si abbia:

$$f_c \gg 2f_{max} \quad (1.6)$$

Un periodo di campionamento eccessivamente piccolo (cioè una frequenza di campionamento eccessivamente alta) potrebbe richiedere una complessità

computazionale eccessiva ed un notevole costo dei dispositivi utilizzati. In generale la scelta della frequenza di campionamento va fatta a seconda delle caratteristiche del sistema che si sta considerando e delle prestazioni che si vogliono ottenere. Una regola euristica per la scelta del periodo di campionamento suggerisce di campionare ad una frequenza pari a circa 10 volte dell'ampiezza di banda della funzione di trasferimento in anello chiuso del sistema. Questi due vincoli suggeriscono un punto di partenza per la scelta del periodo di campionamento, una volta scelto è necessario effettuare alcune simulazioni ed eventualmente correggere la scelta iniziale.

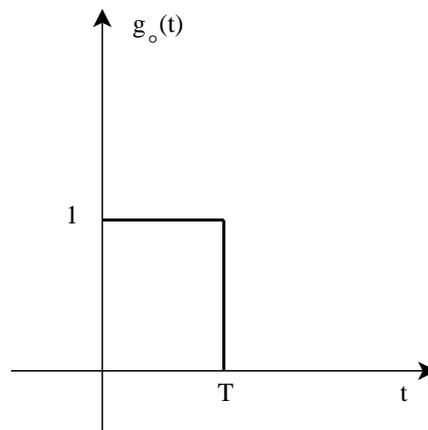


Figura 1.5: Risposta impulsiva Zero Order Hold

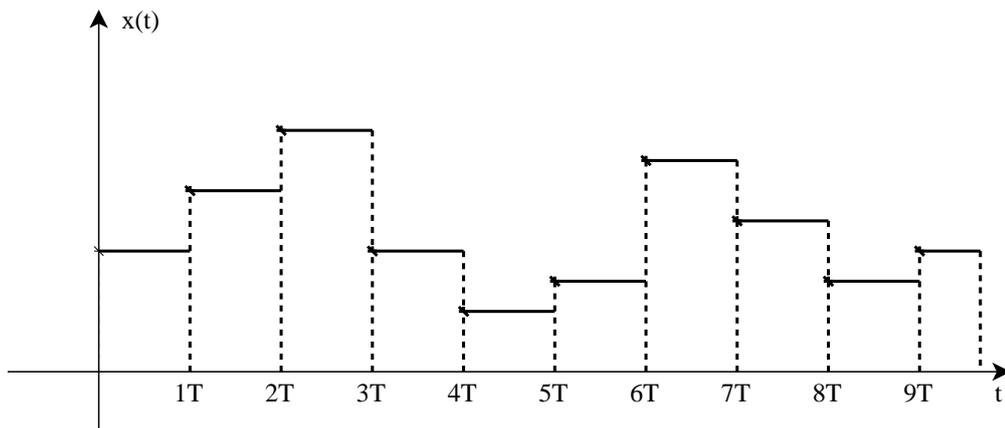


Figura 1.6: Esempio di uscita di un organo di tenuta di ordine zero ad un segnale discreto generico $x(kT)$

Capitolo 2

Sistemi a dati campionati

Come detto in precedenza i sistemi a dati campionati sono sistemi in cui si interfacciano sistemi a tempo continuo con sistemi a tempo discreto. In questo capitolo presentiamo i principali strumenti di analisi in termini di stabilità per sistemi a tempo discreto. Consideriamo il sistema di figura 2.1.

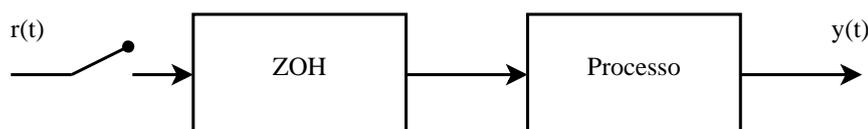


Figura 2.1: Esempio di sistema a dati campionati ad anello aperto

Poiché la presenza dello ZOH è necessaria per interfacciare il processo da controllare (tramite l'attuatore) con l'elaboratore, spesso si considera come funzione di trasferimento complessiva del sistema la funzione di trasferimento del processo vero e proprio insieme alla funzione di trasferimento dello ZOH. Posto $G_p(s)$ la funzione di trasferimento del processo da controllare, e $G_o(s)$ la funzione di trasferimento dello ZOH come dall'equazione 1.4 si ottiene:

$$G(s) = G_o(s)G_p(s) \quad (2.1)$$

Per eseguire un'analisi del sistema a tempo discreto è necessario usare la trasformata Zeta dell'intero sistema (con abuso di notazione):

$$G(z) = \mathcal{Z}\{G(s)\} = \mathcal{Z}\{G_o(s)G_p(s)\} = \frac{Y(z)}{R(z)} \quad (2.2)$$

Si noti che $Y(z)$ corrisponde alla trasformata del segnale $y(t)$ campionato, quindi più precisamente l'equazione 2.2 fa riferimento al sistema rappresentato in figura 2.2, dove è stato aggiunto un campionatore in corrispondenza dell'uscita del sistema.

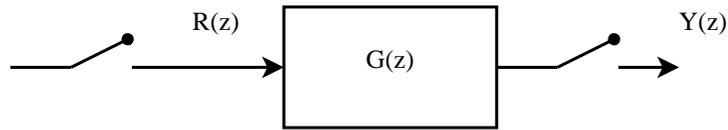


Figura 2.2: Sistema discreto equivalente al sistema proposto in fig. 2.1 con uscita campionata

2.1 Stabilità a tempo discreto

È possibile ricavare la condizione di stabilità BIBO a partire dalla relazione che intercorre tra il dominio della trasformata di Laplace e il dominio della trasformata Zeta, in altre parole tra il piano s e il piano z , ossia:

$$z = e^{sT} = e^{(\sigma + j\omega)T} \quad (2.3)$$

Essendo un'equazione complessa, equivale alle equazioni seguenti:

$$\begin{cases} |z| = e^{\sigma T} \\ \angle z = \omega T \end{cases} \quad (2.4)$$

imponendo la condizione di stabilità $\sigma \in]0, +\infty[$ si ottiene la condizione di stabilità per z , cioè $0 < |z| < 1$. Pertanto un sistema risulta BIBO stabile se e solo se tutti i poli della funzione di trasferimento giacciono all'interno del cerchio unitario. La relazione è presentata graficamente in figura 2.3.

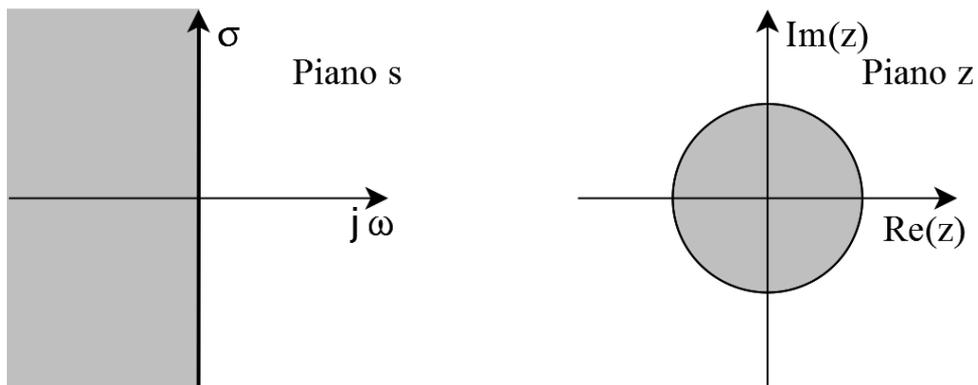


Figura 2.3: Regioni di stabilità nel piano s e nel piano z

Oltre al metodo diretto esistono altri metodi per la valutazione della stabilità di un sistema discreto, in particolare si può far riferimento al criterio di Jury, al luogo delle radici e al criterio di Nyquist.

Riga	Coefficienti						
1	ϕ_n	ϕ_{n-1}	ϕ_{n-2}	.	.	.	ϕ_0
2	ϕ_0	ϕ_1	ϕ_2	.	.	.	ϕ_n
3	b_{n-1}	b_{n-2}	b_{n-3}	.	.	b_0	
4	b_0	b_1	b_2	.	.	b_{n-1}	
5	c_{n-2}	c_{n-3}	.	.	c_0		
6	c_0	c_1	.	.	c_{n-2}		
.		
.		
$2n - 5$	p_3	p_2	p_1	p_0			
$2n - 4$	p_0	p_1	p_2	p_3			
$2n - 3$	q_2	q_1	q_0				

Tabella 2.1: Struttura generale della tabella di Jury

Criterio di Jury Il criterio di Jury rappresenta sostanzialmente l'analogo al criterio di Routh-Hurwitz per i sistemi discreti. Prevede infatti la costruzione di una tabella a partire dai coefficienti del polinomio da studiare. In particolare dato il polinomio:

$$P(z) = \phi_0 z^n + \phi_1 z^{n-1} + \dots + \phi_{n-1} z + \phi_n \quad (2.5)$$

(dove $\phi_0 > 0$) si costruisce una tabella con struttura triangolare, presentata in tabella 2.1.

Le regole per la costruzione sono:

- nella prima riga si inseriscono i coefficienti del polinomio in ordine crescente secondo le potenze di z ;
- ogni riga pari si ottiene dalla riga dispari precedente invertendo l'ordine dei coefficienti;
- gli elementi dalla terza all'ultima riga si calcolano con i seguenti determinanti:

$$b_k = \begin{vmatrix} a_n & a_{n-1-k} \\ a_0 & a_{k+1} \end{vmatrix} \quad k = 0, 1, \dots, n-1 \quad (2.6)$$

$$c_k = \begin{vmatrix} b_{n-1} & b_{n-2-k} \\ b_0 & b_{k+1} \end{vmatrix} \quad k = 0, 1, \dots, n-2 \quad (2.7)$$

$$q_k = \begin{vmatrix} p_3 & p_{2-k} \\ p_0 & p_{k+1} \end{vmatrix} \quad k = 0, 1, 2. \quad (2.8)$$

Un sistema caratterizzato da $P(z)$ è stabile se le seguenti condizioni sono soddisfatte:

- $|a_n| < a_0$
- $P(z)|_{z=1} > 0$
- $P(z)|_{z=-1} \begin{cases} < 0 & \text{se } n \text{ è dispari} \\ > 0 & \text{se } n \text{ è pari} \end{cases}$
- $|b_{n-1}| > |b_0|$
 $|c_{n-2}| > |c_0|$
 \cdot
 \cdot
 \cdot
 $|q_2| > |q_0|$

A differenza del metodo diretto calcolando la posizione degli zeri del polinomio $P(z)$, la tabella di Jury permette di valutare la stabilità senza calcolare gli zeri del polinomio.

Luogo delle radici È possibile estendere il metodo del luogo delle radici sviluppato per sistemi a tempo continuo senza modifiche, infatti le regole per il tracciamento del luogo sono esattamente le stesse da seguire per il caso a tempo continuo. Ovviamente la posizione dei poli per determinare la stabilità del sistema in retroazione va interpretata diversamente, vista la corrispondenza tra piano s e piano z . Questo metodo è molto utile per determinare lo spostamento dei poli al variare di un parametro, ma richiede il calcolo degli zeri del polinomio.

Criterio di Nyquist Dato un sistema con funzione di trasferimento d'anello $G(z)$, il diagramma di Nyquist è costituito dall'immagine della circonferenza di raggio unitario e centro l'origine del piano z . Più precisamente è costituito dai punti $G(e^{j\theta})$ con $\theta \in]-\pi, \pi]$; nel caso in cui $G(z)$ abbia poli sulla circonferenza $e^{j\theta}$ la definizione va leggermente modificata considerando delle semicirconferenze aggiuntive infinitesime rivolte verso l'esterno e centrate nei poli così da poterli aggirare. Sia P il numero di poli di $G(z)$ con modulo maggiore di uno, e sia N il numero di giri che il diagramma compie attorno al punto -1 (conteggiati positivamente se compiuti in senso antiorario), allora la condizione necessaria e sufficiente alla stabilità del sistema è che risulti $N = P$ con N ben definito (N non è ben definito se il diagramma passa per il punto -1).

Capitolo 3

Sintesi di controllori digitali

Esistono due principali paradigmi di progettazione di controllori digitali:

- discretizzazione di un controllore a tempo continuo: questa tecnica prevede di progettare il controllore nel dominio della trasformata di Laplace e di individuare il suo corrispondente a tempo discreto mediante opportune tecniche di approssimazione del controllore;
- progettazione di un controllore direttamente nel dominio della trasformata Zeta: questo approccio prevede di individuare il controllore digitale partendo dallo studio del sistema discreto da controllare (poiché spesso il sistema non è discreto bisogna ricorrere al modello discreto equivalente del sistema).

3.1 Progetto nel continuo e discretizzazione

In questa sezione verranno discussi tre principali metodi di discretizzazione di un controllore a tempo continuo, in particolare si tratteranno:

- metodo della trasformata Zeta;
- metodo della trasformazione bilineare (facendo riferimento in particolare al metodo di Tustin);
- trasformazione diretta di poli e zeri;

Poiché tramite queste tecniche si ottiene un'approssimazione del controllore a tempo continuo originale, le prestazioni del sistema non potranno essere migliori del risultato ottenuto con il controllore analogico.

3.1.1 Metodo della trasformata Zeta

Questo metodo si basa sull'idea che un controllore digitale approssimi bene il comportamento di un controllore analogico se è in grado di rispondere allo stesso modo ai segnali canonici (es: gradino, rampa). Scelto come segnale di riferimento il gradino unitario (si parla in questo caso anche di metodo ad invarianza della risposta al gradino) si ha (con abuso di notazione):

$$\mathcal{Z} \left(C(s) \frac{1}{s} \right) = C(z) \mathcal{Z} \left(\frac{1}{s} \right), \quad (3.1)$$

da cui si ricava la seguente:

$$C(z) = (1 - z^{-1}) \mathcal{Z} \left(C(s) \frac{1}{s} \right) \quad (3.2)$$

Si noti che dato un sistema stabile otteniamo nuovamente un sistema stabile nel piano z per la corrispondenza tra semipiano sinistro e cerchio unitario rispettivamente nel piano s e z .

3.1.2 Trasformazione bilineare

Il problema di discretizzare un controllore a tempo continuo con il suo corrispettivo a tempo discreto è più facilmente interpretabile nel dominio del tempo. Infatti si cerca di approssimare un sistema dinamico a tempo continuo descritto da un sistema di equazioni differenziali con un altro sistema a tempo discreto descritto invece da equazioni alle differenze. Il sistema può essere descritto tramite le seguenti equazioni di stato:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Be(t) \\ u(t) = Cx(t) + De(t). \end{cases} \quad (3.3)$$

Dal sistema 3.3 è possibile ricavare la funzione di trasferimento del sistema:

$$R(s) = C(sI - A)^{-1}B + D \quad (3.4)$$

Integriamo entrambi i membri della prima equazione del sistema 3.3, ottenendo:

$$x((k+1)T) - x(kT) = A \int_{kT}^{(k+1)T} x(t)dt + B \int_{kT}^{(k+1)T} e(t)dt \quad (3.5)$$

Ora è necessario approssimare gli integrali con i valori delle funzioni integrate calcolati sugli estremi, utilizzando la seguente formula di integrazione numerica:

$$\int_{kT}^{(k+1)T} g(t)dt \simeq [(1 - \alpha)g(kT) + \alpha g((k+1)T)]T \quad (3.6)$$

Applicando la formula all'equazione di interesse si ottiene:

$$\begin{aligned} x((k+1)T) - x(kT) = & A[(1 - \alpha)x(kT) + \alpha x((k+1)T)]T \\ & + B[(1 - \alpha)e(kT) + \alpha e((k+1)T)] \end{aligned} \quad (3.7)$$

inoltre valutando la seconda equazione del sistema 3.3 agli istanti di campionamento si ha:

$$u(kT) = Cx(kT) + De(kT) \quad (3.8)$$

Le equazioni 3.7 e 3.8 sono una rappresentazione approssimata del sistema a tempo continuo di partenza, e possono essere interpretate come le equazioni che descrivono un sistema lineare a tempo discreto.

Da queste è inoltre possibile calcolare la funzione di trasferimento del sistema ottenendo:

$$R(z) = C \left(\frac{1}{T} \frac{z-1}{\alpha z + 1 - \alpha} I - A \right)^{-1} + D \quad (3.9)$$

Si noti che questa trasformazione garantisce che partendo da una f.d.t. razionale, la corrispondente f.d.t. discreta approssimata sia ancora razionale. In conclusione è possibile determinare un'approssimazione del digitale di un regolatore analogico con la sostituzione:

$$s = \frac{1}{T} \frac{z-1}{\alpha z + 1 - \alpha}. \quad (3.10)$$

Il metodo prende il nome di trasformazione bilineare, in particolare quando $\alpha = 0.5$ si parla di metodo di Tustin, e la trasformazione diventa:

$$s = \frac{2}{T} \frac{z-1}{z+1} \quad (3.11)$$

Vediamo in figura 3.1 dove vengono mappati i poli con la trasformazione generale:

- per $\alpha = 0$ la regione che ne risulta è la porzione di piano con ascissa minore di $z = 1$;
- per $\alpha = 1$ si ottiene la superficie all'interno del cerchio centrato in $z = \frac{1}{2}$ e raggio $\frac{1}{2}$

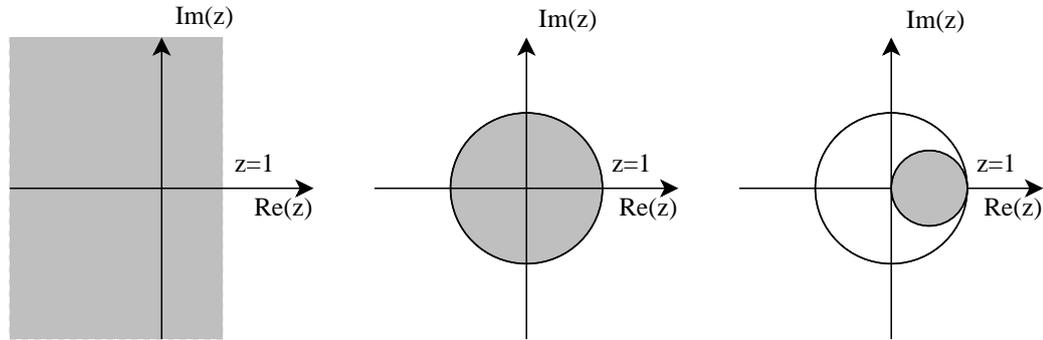


Figura 3.1: Mappatura del semipiano sinistro del piano s per differenti valori di α

- per $\alpha = \frac{1}{2}$ la regione coincide con il cerchio unitario centrato nell'origine quindi vi è corrispondenza tra le regioni di stabilità; in generale se si sceglie un valore di $\alpha < \frac{1}{2}$ è possibile che il regolatore asintoticamente stabile venga approssimato con un regolatore instabile.

Nel processo di discretizzazione è necessario mantenere il più possibile le caratteristiche della risposta in frequenza, in particolare margine di fase e pulsazione di attraversamento. Confrontiamo la risposta in frequenza ottenuta mediante la trasformazione di Tustin e la risposta iniziale:

$$\begin{aligned}
 C(e^{j\omega T}) &= C\left(\frac{2 e^{j\omega T} - 1}{T e^{j\omega T} + 1}\right) = C\left(\frac{2 e^{j\omega \frac{T}{2}} - e^{-j\omega \frac{T}{2}}}{T e^{j\omega \frac{T}{2}} + e^{-j\omega \frac{T}{2}}}\right) = C\left(\frac{2 j \sin(\frac{\omega T}{2})}{T 2 \cos(\frac{\omega T}{2})}\right) = \\
 &= C\left(j \frac{2}{T} \tan\left(\frac{j\omega}{2}\right)\right) \neq C(j\omega)
 \end{aligned} \tag{3.12}$$

Si ha quindi una distorsione in frequenza secondo la trasformazione:

$$\omega \longrightarrow \frac{2}{T} \tan\left(\frac{\omega T}{2}\right) \tag{3.13}$$

Passando al limite per $\omega \rightarrow \omega_n$ (pulsazione di Nyquist) si ottiene che $\frac{2}{T} \tan\left(\frac{\omega T}{2}\right) \rightarrow \infty$, e si ha dunque che il comportamento ad alta frequenza del controllore nel continuo viene compresso verso ω_n . Per mantenere le caratteristiche del controllore in un intorno della pulsazione di attraversamento si modifica leggermente la trasformazione di Tustin con una predistorsione in frequenza (prewarping).

3.1.3 Matching di poli e zeri

Questa tecnica di discretizzazione approssimata si basa sull'idea che si possa ottenere un'approssimazione discreta di una f.d.t. continua utilizzando la trasformazione $z = e^{sT}$. Partendo dunque da una funzione di trasferimento del tipo:

$$C(s) = \frac{K \prod_{i=1}^m (s - z_i)}{s^l \prod_{k=1}^n (s - p_k)}, \quad (3.14)$$

si ottiene una funzione di trasferimento approssimata del tipo:

$$C(z) = K_d \frac{(z + 1)^{n+l-m} \prod_{i=1}^m (z - e^{z_i T})}{(z - 1)^l \prod_{k=1}^n (z - e^{p_k T})} \quad (3.15)$$

Confrontando le equazioni 3.14 e 3.15 si osserva che zeri e poli della f.d.t. 3.14 (sia quelli in zero che quelli nei punti p_k) vengono mappati direttamente tramite la relazione 2.4 che lega il piano z e il piano s ; nell'equazione 3.15 compare il termine $(z + 1)^{n+l-m}$ che non ha corrispondenza diretta. La motivazione consiste nell'osservare che se $m < n + l$ la risposta in frequenza $C(j\omega)$ tende a zero per $\omega \rightarrow \infty$. È ragionevole pertanto fare in modo che $C(e^{j\omega T})$ tenda a zero per la massima frequenza che può essere elaborata correttamente dal sistema, cioè la pulsazione di Nyquist $\omega_n = \frac{\pi}{T}$. Si introduce quindi il seguente vincolo:

$$C(e^{j\omega_n T}) = C(-1) = 0 \quad (3.16)$$

che equivale a introdurre uno zero in corrispondenza del punto $z = -1$; introducendo $n + l - m$ zeri in questo punto si conserva anche la velocità di convergenza a zero. Il guadagno K_d infine è ottenuto conservando il guadagno in continua, cioè imponendo che:

$$C(s)|_{s=0} = C(z)|_{z=1} \quad (3.17)$$

Si noti infine che questo metodo di discretizzazione consente di ottenere un controllore discreto approssimato stabile se il controllore di partenza è anch'esso stabile.

3.2 Progetto nel discreto

In questa sezione vediamo i principali metodi di progetto nel discreto:

- progetto mediante luogo delle radici: come nel caso continuo è possibile progettare il controllore individuando tramite il luogo delle radici la posizione opportuna per poli e zeri del controllore;

- progetto nel piano w : questa metodologia di progetto è sostanzialmente l'analogo della metodologia di progettazione in frequenza (sfruttando diagramma di Bode) utilizzata per i controllori a tempo continuo.

3.2.1 Sintesi mediante luogo delle radici

Questa tecnica di sintesi è particolarmente utile quando si possono tradurre le specifiche di progetto sotto forma di vincoli sulla posizione dei poli. La scelta del controllore avviene generalmente per tentativi successivi, in cui si incrementa la struttura del controllore fino a soddisfare tutte le specifiche. Ricaviamo dunque questi vincoli partendo dalle specifiche imposte sul transitorio in termini di massima sovraelongazione, tempo di salita e tempo di assestamento.

Definizione Come già discusso in precedenza le regole per il tracciamento del luogo delle radici a tempo discreto sono analoghe a quelle nel dominio della trasformata di Laplace. Si consideri un sistema retroazionato come quello proposto in figura 3.2, l'equazione caratteristica per questo sistema è:

$$1 + C(z)G(z) = 0. \quad (3.18)$$

Essendo la 3.18 un'equazione complessa, posto $L(z) = C(z)G(z)$, equivale a:

$$\begin{cases} |L(z)| = 1 \\ \angle L(z) = \pi(2k + 1) \end{cases} \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (3.19)$$

Queste due condizioni sono soddisfatte per i punti che appartengono al luogo, risultano spesso utili per determinare informazioni sul controllore quando questo è parzialmente definito.

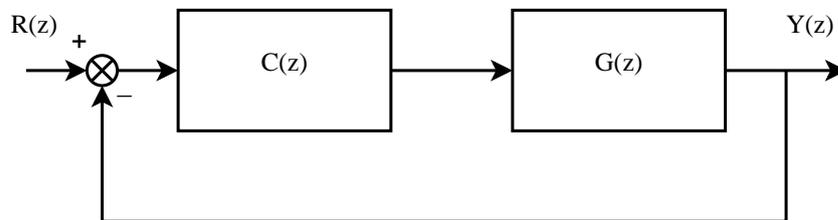


Figura 3.2: Schema di un sistema di controllo in retroazione.

Errore a regime Come nel caso continuo, l'errore a regime in risposta ai segnali canonici dipende dal tipo del sistema e dal guadagno del sistema.

Sovraelongazione S Il vincolo sulla massima sovraelongazione consentita si traduce in unvincolo sul coefficiente di smorzamento:

$$S = e^{\frac{-\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}} \iff \xi = \sqrt{\frac{\left(\frac{\ln S}{\pi}\right)^2}{1 + \left(\frac{\ln S}{\pi}\right)^2}} \quad (3.20)$$

In figura 3.3 è evidenziata la porzione di piano corrispondente. Linee radiali nel piano s corrispondono a spirali logaritmiche nel piano z.

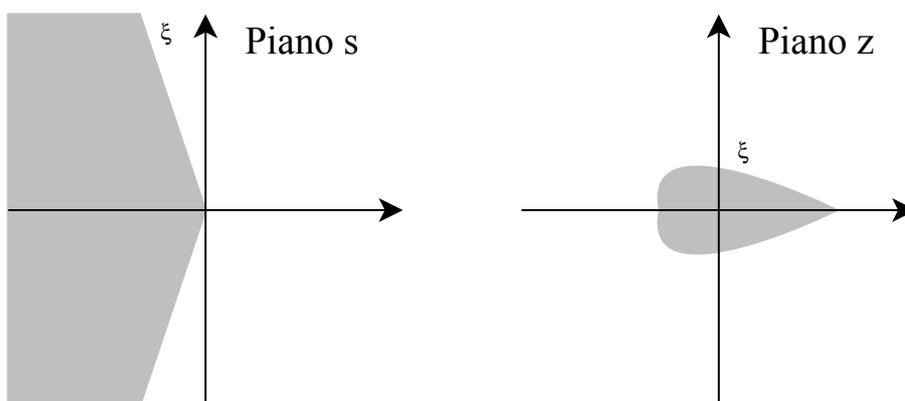


Figura 3.3: Regioni di piano s e z corrispondenti al vincolo di massima sovraelongazione

Tempo di assestamento T_a Il tempo di assestamento (definito con uno scarto del 2% sul valore di regime), definisce un vincolo su ω_n una volta calcolato ξ :

$$T_a = \frac{4}{\xi\omega_n} \quad (3.21)$$

In figura 3.4 sono evidenziate le regioni corrispondenti, ricordando che $\sigma = \xi\omega_n$.

Una volta tradotte le specifiche, sapendo che nel piano s vale la relazione:

$$s = -\xi\omega_n + j\omega_n\sqrt{1-\xi^2} \quad (3.22)$$

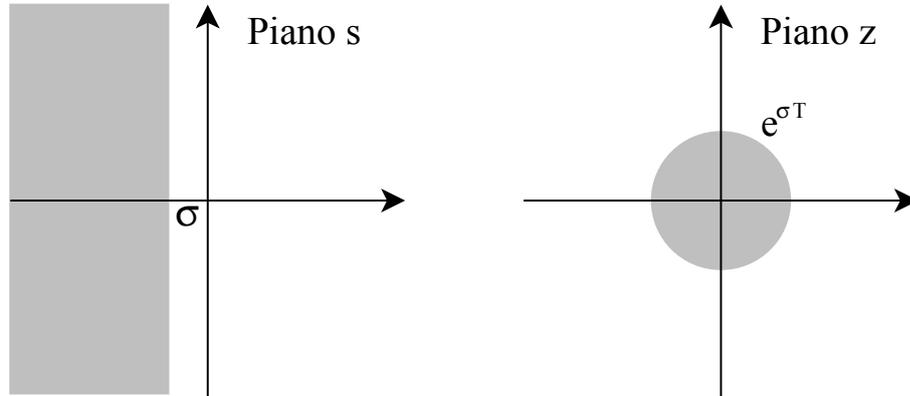


Figura 3.4: Regioni di piano s e z corrispondenti al vincolo di massimo tempo di assestamento (al 2%)

possiamo ottenere direttamente la corrispondenza con il piano z , ottenendo:

$$z = e^{(-\xi\omega_n + j\omega_n\sqrt{1-\xi^2})T} \iff \begin{cases} |z| = e^{j\omega_n T} \\ \angle z = T\omega_n\sqrt{1-\xi^2} \end{cases} \quad (3.23)$$

Arrivati a questo punto possiamo tracciare nel piano z , la porzione di piano accettabile per i poli del sistema retroazionato. In figura 3.5 sono tracciati i luoghi a ξ e ω_n costanti per valori diversi. Risulta utile come punto di partenza, una volta note le specifiche, individuare la porzione di piano accettabile per i poli del sistema in catena chiusa.

È conveniente innanzitutto eseguire una prova preliminare per vedere se è possibile soddisfare i requisiti anche solo con un semplice controllore proporzionale, se non è possibile si passa ad un controllore nella forma:

$$C(z) = K_c \frac{z + \alpha}{z + \beta} \quad (3.24)$$

Il controllore in questa forma risulta particolarmente conveniente perché una volta definita la posizione del polo o dello zero è possibile utilizzare le condizioni del sistema 3.19 per determinare le restanti informazioni. Ne caso in cui questo tipo di controllore non fosse sufficiente a soddisfare le specifiche è necessario arricchirne la struttura a seconda dell'applicazione specifica.

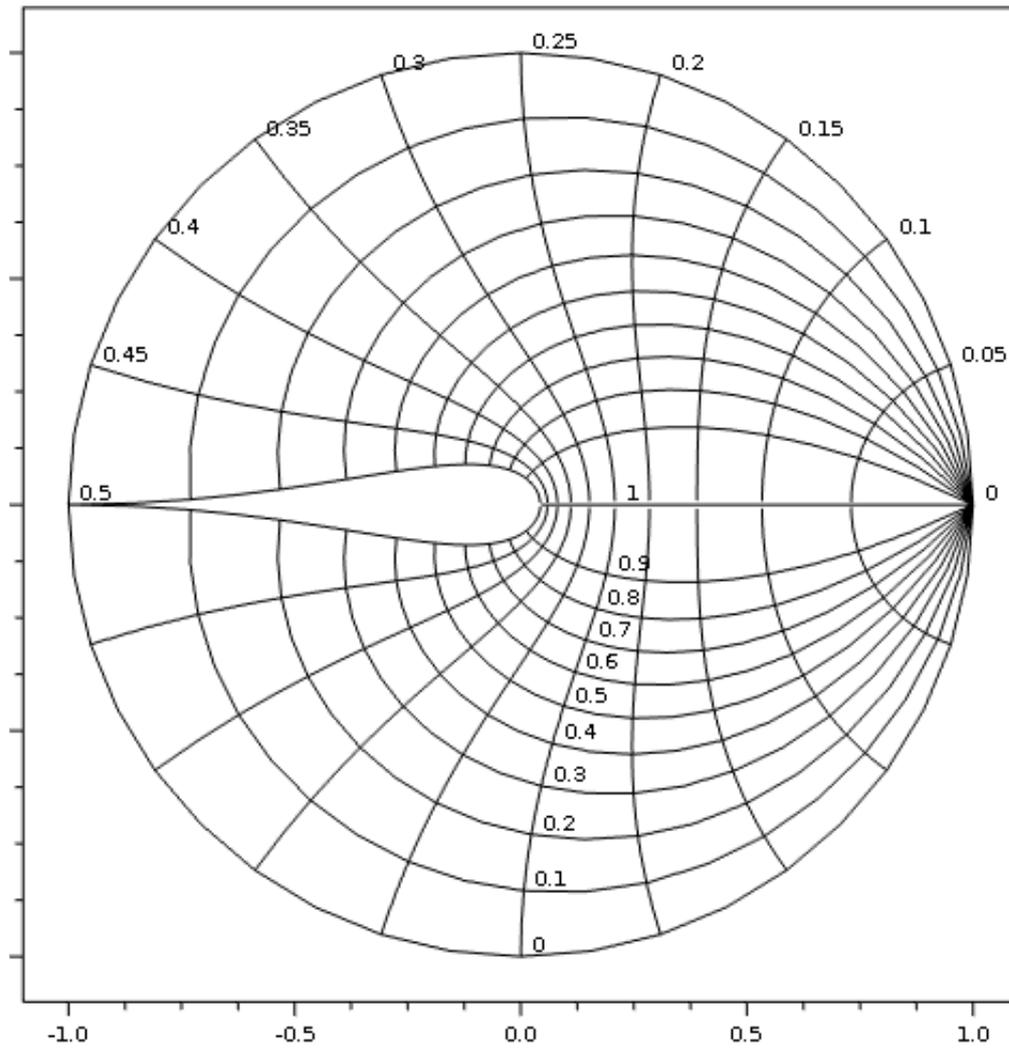


Figura 3.5: Piano z in cui sono evidenziati i luoghi $\xi = cost.$ e $\omega_n = cost.$

3.2.2 Sintesi nel piano w

Come già accennato la sintesi nel piano w risulta essere l'analogo della sintesi di Bode per controllori digitali. Per poter applicare questa tecnica a sistemi discreti sono necessarie alcune modifiche. Dal momento che nel dominio z la frequenza compare come $z = e^{j\omega T}$ la semplicità ottenuta dai diagrammi di Bode per la sintesi in frequenza andrebbe persa. Per risolvere il problema si applica all'equivalente discreto del sistema la trasformazione analoga alla trasformazione di Tustin:

$$z = \frac{1 + \left(\frac{T}{2}\right)w}{1 - \left(\frac{T}{2}\right)w}. \quad (3.25)$$

Tramite la trasformazione dal dominio s al dominio z (relazione 2.3), il semipiano sinistro caratterizzato da $\Re(s) < 0$ viene mappato, come detto in precedenza, nell'interno del cerchio unitario caratterizzato da $|z| < 1$; tramite la trasformazione bilineare da z a w di nuovo l'interno del cerchio unitario viene mappato nel semipiano sinistro del piano w . Una volta ottenuta $G(w)$ si pone $w = j\nu$ per il tracciamento dei diagrammi di Bode. La differenza fondamentale tra il piano s e il piano w consiste nel fatto che il comportamento nel piano s per $-\frac{\omega_c}{2} < \omega < \frac{\omega_c}{2}$ viene mappata in $-\infty < \nu < +\infty$ dove ω_c è la pulsazione di campionamento, e ν è la frequenza fittizia nel piano w . In analogia con quanto visto per la trasformazione di Tustin è presente una distorsione alle alte frequenze. Con un calcolo simile a quanto svolto nell'equazione 3.12 si ottiene:

$$w = j\nu = \frac{2}{T} \frac{z - 1}{z + 1} \Big|_{z=e^{j\omega T}} = \frac{2}{T} \frac{e^{j\omega T} - 1}{e^{j\omega T} + 1} = \frac{2}{T} j \tan \frac{\omega T}{2} \quad (3.26)$$

più semplicemente:

$$\nu = \frac{2}{T} \tan \frac{\omega T}{2} \quad (3.27)$$

L'equazione 3.27 fornisce la relazione tra la frequenza reale e la frequenza fittizia nel piano w . Si noti che per basse frequenze, cioè per bassi valori di ωT si ha che $\nu \simeq \omega$ e anche $G(s) \simeq G(w)$. La presenza di questo fattore di scala nella trasformazione permette di mantenere lo stesso errore costante prima e dopo la trasformazione; cioè la funzione di trasferimento nel dominio w approssima sempre meglio la funzione di trasferimento nel dominio s man mano che T tende a zero.

Complessivamente i passi da seguire per eseguire la sintesi in frequenza sono i seguenti:

1. dato un generico sistema da controllare $G(s)$ è necessario calcolare il suo equivalente discreto:

$$G(z) = \mathcal{Z}\{G(s)\} = \mathcal{Z}\{G_0(s)G_p(s)\} \quad (3.28)$$

2. applichiamo la trasformazione 3.25 a $G(z)$:

$$G(w) = G(z) \Big|_{z = \frac{1 + (\frac{T}{2})w}{1 - (\frac{T}{2})w}} \quad (3.29)$$

3. eseguiamo l'ulteriore sostituzione:

$$G(j\nu) = G(w) \Big|_{w = j\nu} \quad (3.30)$$

4. dopo aver tracciato i diagrammi di Bode è possibile individuare il margine di fase e di guadagno;
5. individuare il controllore che soddisfa le specifiche con le tecniche che si utilizzano per i controllori a tempo continuo;
6. convertire nuovamente il controllore ottenuto, $C(w)$, con la trasformazione inversa della 3.25, cioè:

$$C(z) = C(w) \Big|_{w = \frac{2}{T} \frac{z-1}{z+1}} \quad (3.31)$$

7. eseguire alcune simulazioni per verificare che il comportamento del sistema controllato sia effettivamente quello desiderato.

L'utilizzo del diagramma di Bode risulta molto vantaggioso in quanto permette di leggere le specifiche richieste per il transitorio direttamente dal diagramma, inoltre il progetto di un controllore digitale risulta essere meno complesso rispetto ad altri approcci.

Capitolo 4

Esempio applicativo

In questo capitolo si considera un esempio numerico per il quale verranno proposti tutti i metodi di sintesi discussi a livello teorico. Nella trattazione si farà ampio uso del software Matlab e della piattaforma Simulink in esso integrata.

E' dato il sistema:

$$G_p(s) = \frac{10}{s(s+5)} \quad (4.1)$$

Si richiede di utilizzare un controllore digitale con $T = 0.02s$ per ottenere le seguenti specifiche:

- tempo di assestamento inferiore a 1 secondo: $T_a \leq 1s$
- margine di fase maggiore di 45° : $m_\varphi \leq \frac{\pi}{4}$

Prima di presentare i metodi di discretizzazione è necessario innanzitutto progettare un controllore continuo che soddisfi le specifiche di progetto. Poiché viene fornito il vincolo sul tempo di assestamento possiamo utilizzare il metodo del luogo delle radici: come visto precedentemente il tempo di assestamento è legato alla parte reale dei poli in catena chiusa del sistema. Il margine di fase è legato alla sovralongazione dalla seguente:

$$m_\varphi = 1 - 0.8S \quad (4.2)$$

e una volta nota la sovralongazione massima tollerabile è possibile ottenere il coefficiente di smorzamento ξ dalla relazione 3.20.

In questo caso specifico otteniamo:

$$S \simeq 27\% \quad \iff \quad \xi \simeq 0.386 \quad (4.3)$$

$$\sigma \leq -4 \quad (4.4)$$

Utilizzando Matlab tracciamo inizialmente il luogo delle radici del sistema con semplice retroazione e osserviamo se è sufficiente al soddisfacimento delle specifiche. Il codice utilizzato è:

```
numG=[10];
denG=[1 5 0];
sysG=tf(numG, denG);
sysG_fb=feedback(sysG,1);
rlocus(sysG_fb);
sgrid(0.386,0);
```

Osservando il luogo delle radici (proposto in figura 4.1), si può osservare che la semplice retroazione proporzionale non è sufficiente a soddisfare le specifiche.

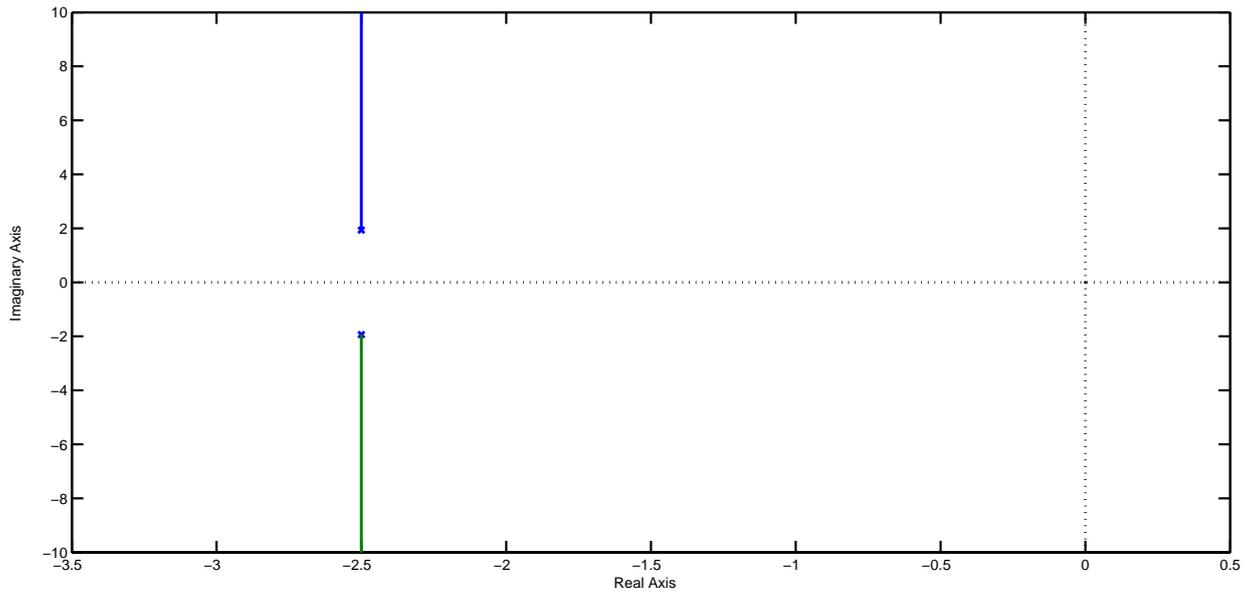


Figura 4.1: Luogo delle radici per il sistema $G(s)$ con retroazione proporzionale

È pertanto necessario un controllore più complesso rispetto a quello proporzionale, cerchiamo quindi un controllore nella forma:

$$C(s) = K_c \frac{s + \alpha}{s + \beta} \quad (4.5)$$

Utilizziamo Simulink per individuare la posizione opportuna per lo zero ed il polo del controllore. Dopo una serie di simulazioni, ottenute tramite il modello di figura 4.4, otteniamo un possibile controllore:

$$C(s) = 3 \frac{s + 4}{s + 7} \quad (4.6)$$

Osserviamo il luogo delle radici del sistema complessivo in catena chiusa e la risposta del sistema retroazionato al gradino unitario rispettivamente in figura 4.2 e 4.3.

Il codice utilizzato è il seguente:

```
sysSGC= series(sysG,sysC);
sysCGfeed= feedback(sysSGC, 1);
step(sysCGfeed);
```

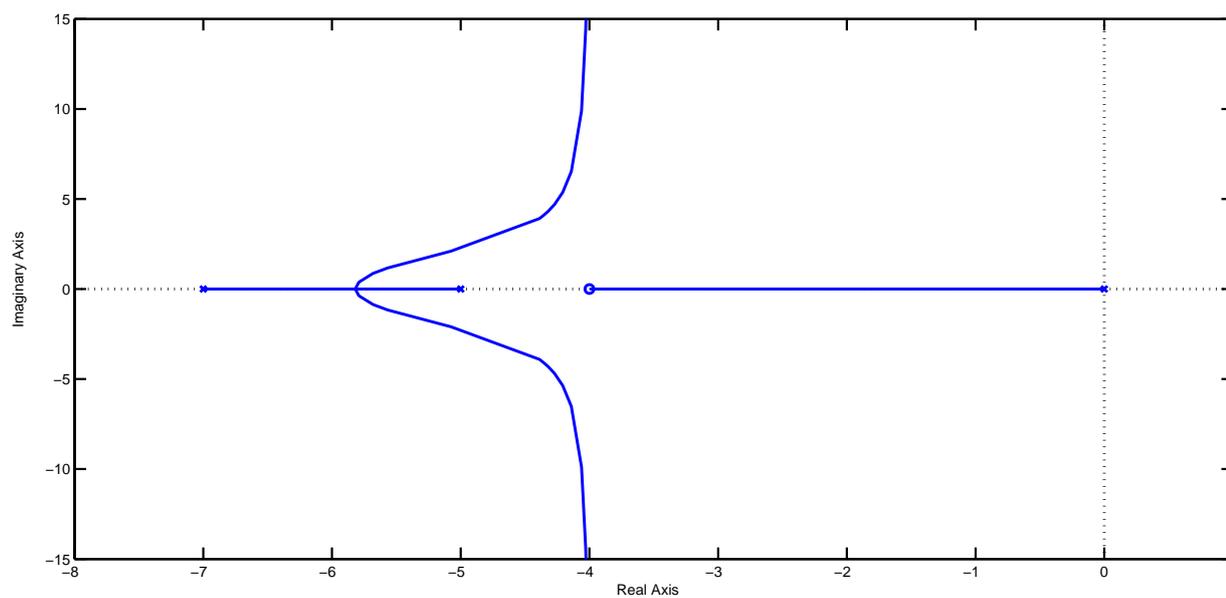


Figura 4.2: Luogo delle radici per il sistema $G(s)$ controllato in retroazione da $C(s)$

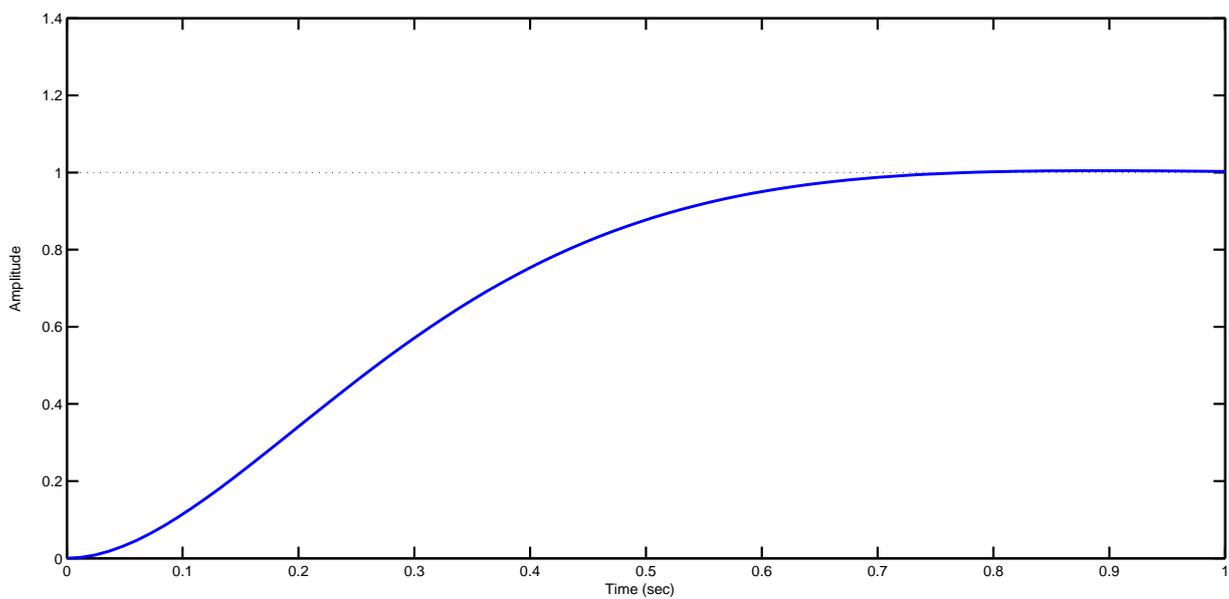


Figura 4.3: Risposta al gradino $G(s)$ controllato in retroazione da $C(s)$

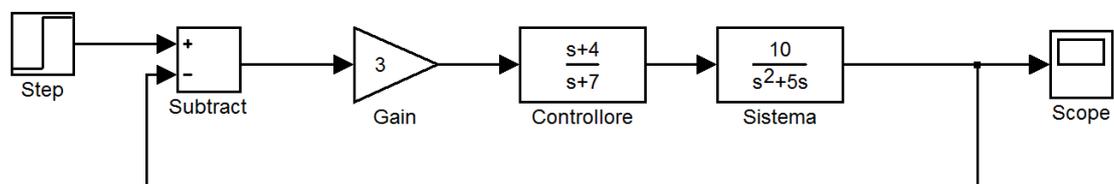


Figura 4.4: Modello realizzato tramite Simulink per il sistema $G(s)$ controllato in retroazione da $C(s)$

4.1 Discretizzazione del controllore

Uno volta progettato un controllore che soddisfi le specifiche a tempo continuo è necessario procedere prima alla discretizzazione del modello del sistema e in seguito discretizzare il controllore con i metodi presentati. Matlab mette a disposizione un comando per effettuare la discretizzazione:

```
sysGz=c2d(sysG, 0.02);
```

dove `sysGz` e `sysG` sono stati definiti precedentemente, il comando `c2d` riceve come parametri in ingresso il sistema da discretizzare e il tempo di campionamento; con un tempo di campionamento pari a $T = 0.02s$ complessivamente otteniamo:

$$G(z) = \frac{0.001935z + 0.001872}{z^2 - 1.905z + 0.9048} \quad (4.7)$$

A questo punto, sempre mediante utilizzo di Matlab, otteniamo il controllore nel dominio z con i tre metodi ottenuti, in seguito valutiamo le risposte al gradino per ognuno di questi sistemi.

La sintassi generale del comando `c2d` prevede di poter specificare anche il metodo con cui si vuole procedere alla discretizzazione.

Metodo della trasformata zeta Come detto è sufficiente specificare il sistema da discretizzare e il tempo di campionamento:

```
numC=[3 12];
denC=[1 7];
sysC=tf(numC, denC);
sysCz=c2d(sysC, 0.02, 'zoh');
```

Si ottiene il seguente controllore discreto:

$$C(z)_z = \frac{3z - 2.776}{z - 0.8694} \quad (4.8)$$

Trasformazione bilineare Con lo stesso comando possiamo ottenere la trasformazioni di Tustin, variando uno dei parametri in ingresso:

```
numC=[3 12];
denC=[1 7];
sysC=tf(numC, denC);
sysCzT=c2d(sysC, 0.02, 'tustin');
```

e si ottiene:

$$C_{T_s}(z) = \frac{2.916z - 2.692}{z - 0.8692} \quad (4.9)$$

Matching zeri e poli Infine otteniamo il controllore con la tecnica di corrispondenza tra poli e zeri con il codice:

```
numC=[3 12];
denC=[1 7];
sysC=tf(numC, denC);
sysCzZP=c2d(sysC, 0.02, 'matched');
```

e in output si ha:

$$C_{z_p}(z) = \frac{2.913z - 2.689}{z - 0.8694} \quad (4.10)$$

Come si può notare i controllori ottenuti con i vari metodi presentano coefficienti numerici molto simili, di conseguenza ci aspettiamo risposte al gradino pressochè coincidenti. Le risposte al gradino sono presentate nelle figure 4.5, 4.6, 4.7. Dal confronto dei grafici emerge che le risposte al gradino sono sostanzialmente identiche e approssimano molto bene la risposta del sistema retroazionato a tempo continuo rispettando entrambe le specifiche fornite.

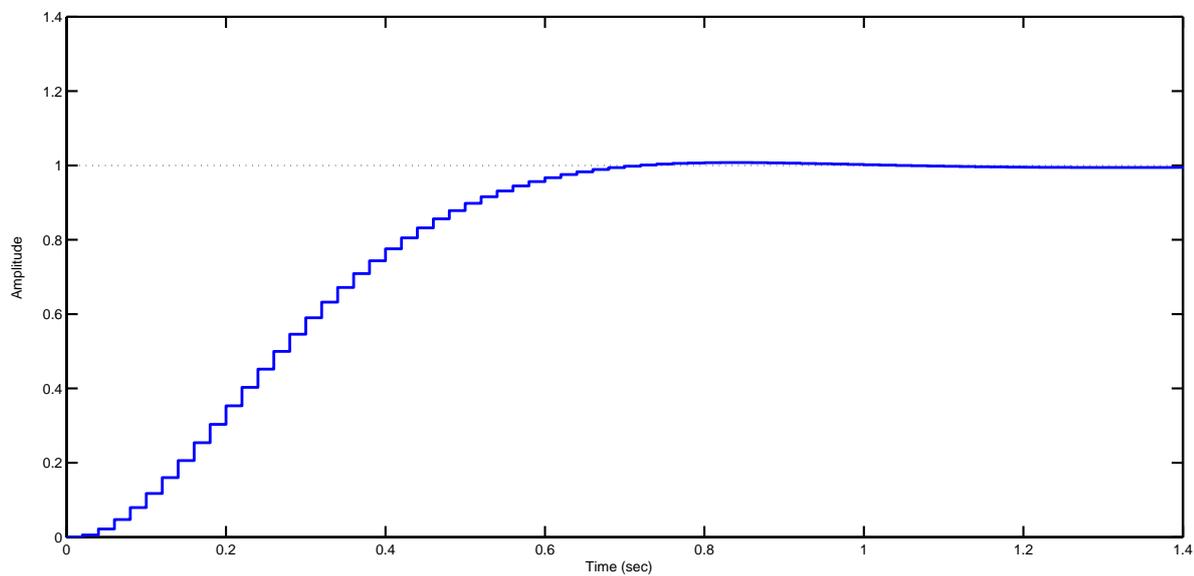


Figura 4.5: Risposta al gradino con controllore discretizzato mediante trasformata Zeta: $T_a = 0.64s$; $S \leq 1\%$

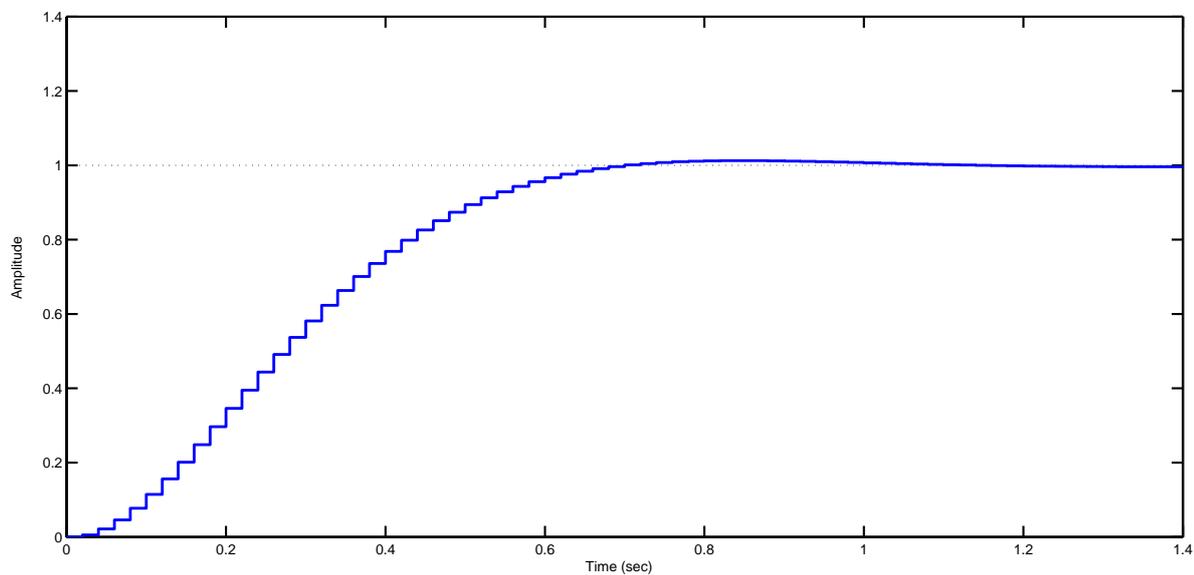


Figura 4.6: Risposta al gradino con controllore discretizzato mediante trasformazione di Tustin: $T_a = 0.64s$; $S \leq 1.5\%$

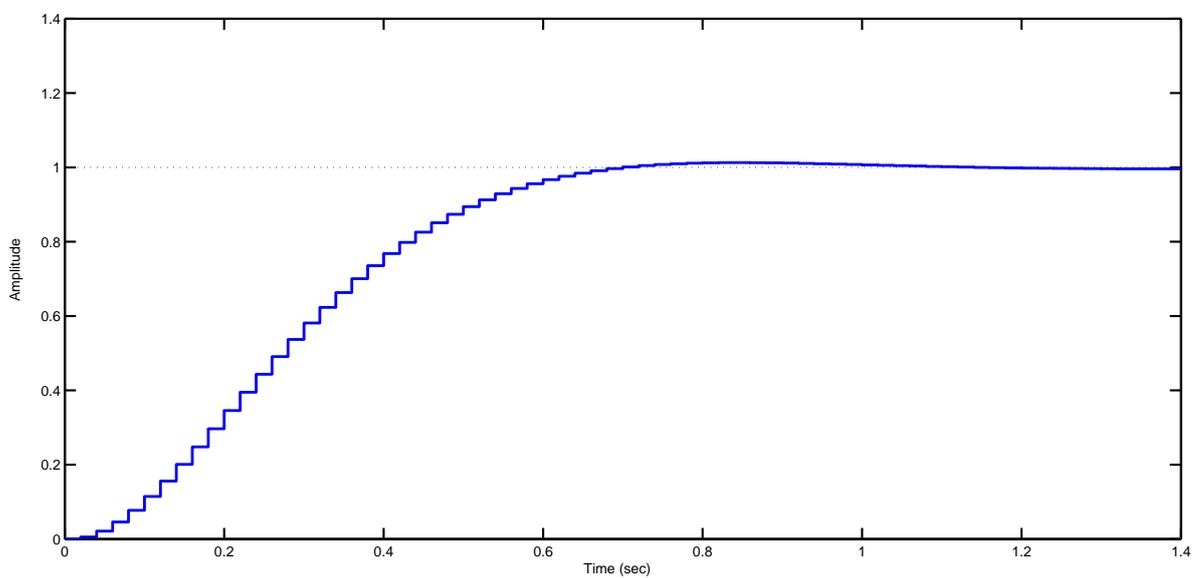


Figura 4.7: Risposta al gradino con controllore discretizzato mediante matching di zeri e poli: $T_a = 0.64s$; $S \leq 1.5\%$

4.2 Progetto nel discreto

4.2.1 Luogo delle radici

Riprendiamo il sistema discretizzato con tempo di campionamento richiesto $T = 0.02s$:

$$G(z) = \frac{0.001935z + 0.001872}{z^2 - 1.905z + 0.9048} \quad (4.11)$$

Osserviamo dapprima, anche in questo caso, il luogo delle radici per il sistema $G(z)$ retroazionato, nel caso in cui bastasse la retroazione proporzionale. Ricordiamo che le specifiche forniscono i seguenti vincoli nel piano z :

- $\xi \simeq 0.386$ impone l'appartenenza del luogo alla regione delimitata dai rami di spirale logaritmica in figura;
- $T_a \leq 1s$ si traduce in $|z| \leq e^{-4T} \simeq 0.9$.

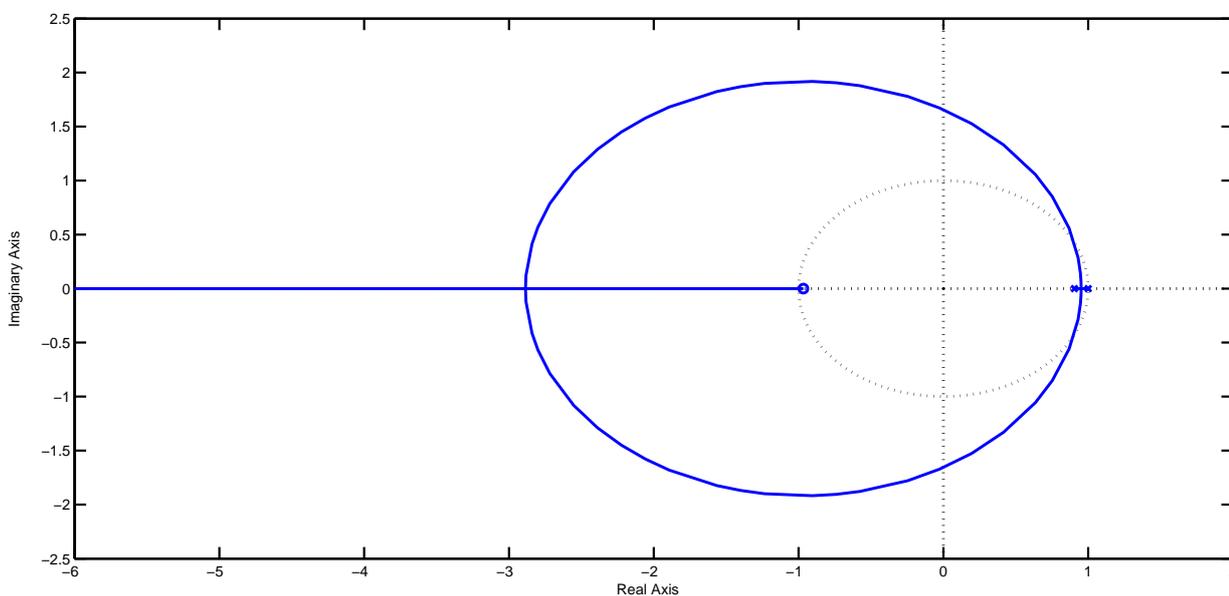


Figura 4.8: Luogo delle radici per il sistema $G(z)$ con retroazione proporzionale

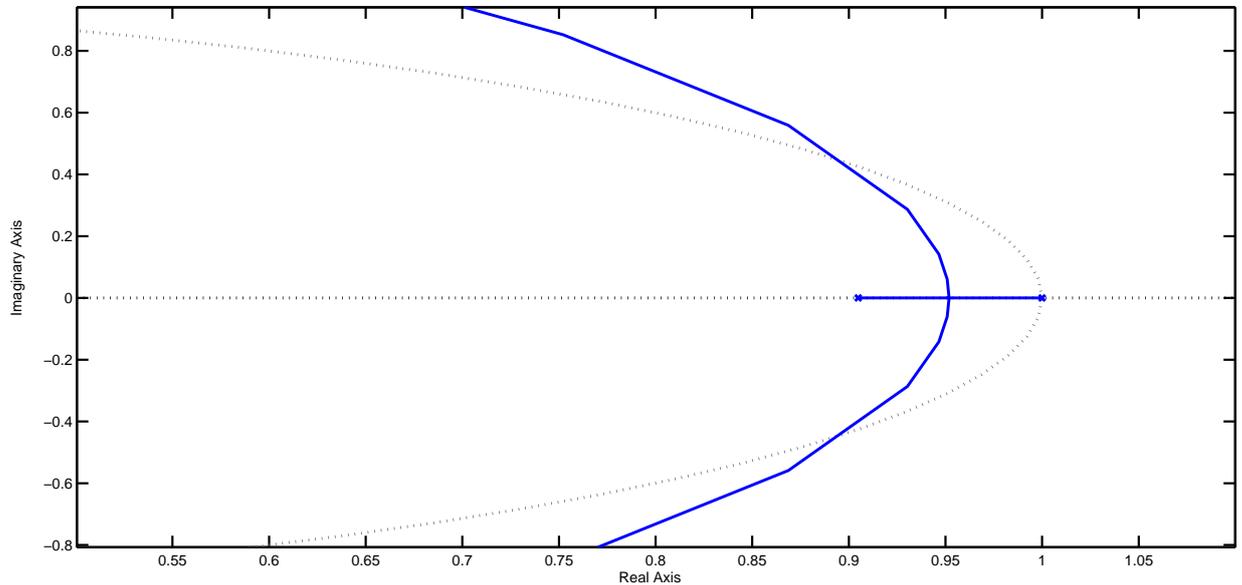


Figura 4.9: Luogo delle radici per il sistema $G(z)$ con retroazione proporzionale: dettaglio in prossimità del punto $z = 1$

In figura 4.8 e 4.9 vengono proposti il luogo delle radici del sistema $G(z)$ e il dettaglio dello stesso luogo nelle vicinanze del punto $z = 1$. Anche in questo caso la semplice retroazione non è sufficiente a soddisfare entrambe le specifiche fornite, quindi cerchiamo ancora un controllore nella forma:

$$C(z) = K_c \frac{z + \alpha}{z + \beta} \quad (4.12)$$

Utilizziamo Simulink per determinare il controllore opportuno e dopo una serie di prove si ottiene:

$$C(z) = \frac{15(z - 0.8)}{z - 0.55} \quad (4.13)$$

Utilizzando il controllore 4.13 si ottiene la risposta al gradino in figura 4.10.

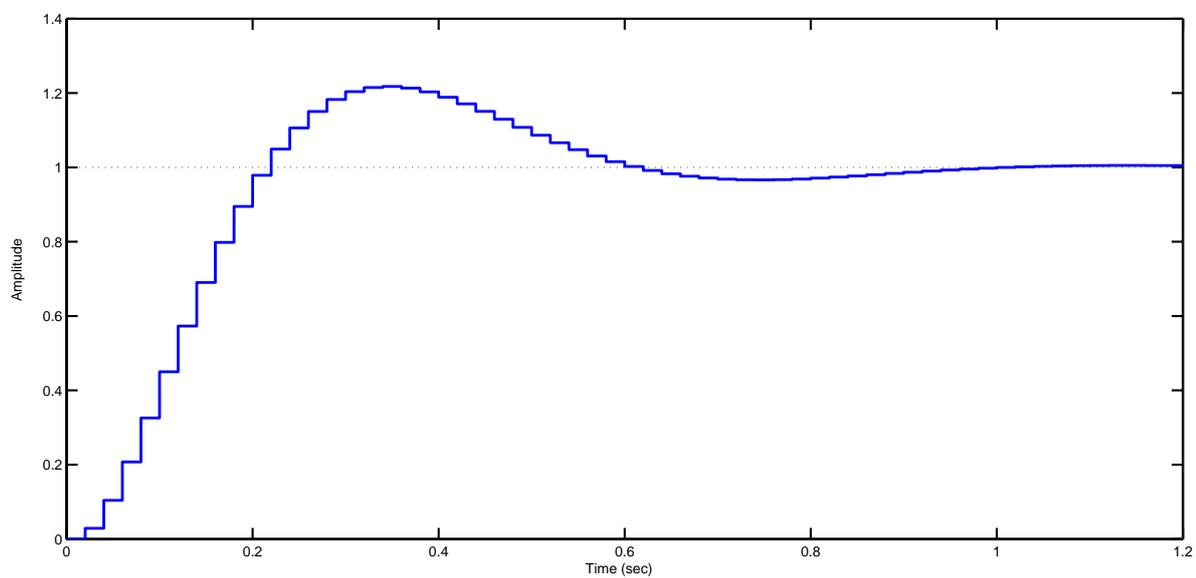


Figura 4.10: Risposta al gradino con controllore ottenuto tramite luogo delle radici: $T_a = 0.86s$; $S \leq 23\%$

4.2.2 Sintesi nel piano w

Prima di iniziare la sintesi del controllore vera e propria è necessario ottenere le specifiche nel dominio delle frequenze: in particolare dal tempo di assestamento è necessario individuare un vincolo sulla pulsazione di attraversamento ω_a . Essendo noto il tempo di assestamento e avendo calcolato il coefficiente di smorzamento necessario possiamo calcolare la pulsazione naturale, successivamente possiamo usare le seguenti relazioni approssimate per ottenere un vincolo sulla pulsazione di attraversamento:

$$\omega_n \simeq \frac{2\pi B}{2\xi\sqrt{1-\xi^2} + \sqrt{2-\xi^2+4\xi^4}} \quad (4.14)$$

$$\omega_a \simeq 5B \quad (4.15)$$

Dalle relazioni 4.14 e 4.15 otteniamo $\omega_a \simeq 9.54 \text{ rad/s}$. Per ottenere il controllore mediante progettazione in frequenza dobbiamo ancora partire dal sistema da controllare discretizzato:

$$G(z) = \frac{0.001935z + 0.001872}{z^2 - 1.905z + 0.9048} \quad (4.16)$$

Dobbiamo applicare al sistema la trasformazione di Tustin inversa, utilizzando il seguente codice in Matlab:

```
sysGwT= d2c(sysGz, 'tustin');
```

ottenendo la funzione di trasferimento $G(w)$ e la sua forma di Bode (con $T = 0.02 \text{ s}$):

$$\begin{aligned} G(w) = G(z) \Big|_{z=\frac{1+(\frac{T}{2})w}{1-(\frac{T}{2})w}} &= \frac{0.00001665w^2 - 0.09825w + 9.992}{w^2 + 4.996w} = \\ &= \frac{2 \cdot 0.00000166w^2 - 0.009832w + 1}{w \cdot 0.20016w + 1} \end{aligned} \quad (4.17)$$

Ora continuiamo come nel caso continuo imponendo $W(w) = C(w)D(w)$. Indichiamo con h_W, h_G e h_C rispettivamente il numero di poli in $w = 0$ di $W(w)$, $G(w)$ e $C(w)$. Per garantire errore a regime nullo in risposta al gradino deve essere $h_W = 1$, quindi:

$$h_W = h_G + h_C; \quad (4.18)$$

$$h_G = 1; \quad (4.19)$$

$$h_C = 0 \quad (4.20)$$

In controllore quindi non avrà poli in $w = 0$. Indichiamo ora con K_W, K_G e K_C rispettivamente i guadagni di Bode di $W(w), G(w)$ e $C(w)$. Per avere errore pari a $\epsilon = 0.1$ nella risposta alla rampa, è necessario che si abbia:

$$K_W = K_G K_C; \quad (4.21)$$

$$K_W = \frac{1}{\epsilon} = 10; \quad (4.22)$$

$$K_G = 2; \quad (4.23)$$

$$K_C = 5 \quad (4.24)$$

Una volta ottenuto guadagno e numero di poli, scriviamo:

$$\hat{W}(w) = K_C G(w) = 5G(w) \quad (4.25)$$

che consiste nella f.d.t. del sistema da controllare $G(w)$ e tutte le informazioni che già conosciamo di $C(w)$. Tracciamo i diagrammi di Bode e valutiamo margine di fase e pulsazione di attraversamento con il seguente codice:

```
sysW= 5*sysGwT;
bode(sysW);
margin(sysW);
v = j*6.25;
Wjwa= evalfr(sysW, v);
C = (abs(Wjwa))(-1);
dphi = 45 - (angle(Wjwa)+ pi);
```

ottenendo $\omega_a = 6.25 \text{ rad/s}$ e $m_\varphi = 35^\circ$. A questo punto dobbiamo valutare i coefficienti C e $\Delta\varphi$, si ottiene:

$$C = 0.999 \simeq 1 \quad (4.26)$$

$$\Delta\varphi \simeq 44.38 \text{ rad/s} \quad (4.27)$$

$$C < 1 \quad (4.28)$$

$$\Delta\varphi > 0 \quad (4.29)$$

Teoricamente le disequazioni 4.28 e 4.29 indicano di utilizzare una rete correttiva a sella, ma visto che il valore di C è molto vicino ad uno, tentiamo in prima battuta di soddisfare le specifiche con una più semplice rete anticipatrice, cioè un sistema con funzione di trasferimento:

$$\bar{C}(s) = \frac{1 + sT}{1 + saT} \quad T > 0, 0 < a < 1 \quad (4.30)$$

Utilizzando sempre Simulink, dopo una serie di tentativi otteniamo il seguente controllore (comprensivo del guadagno di Bode K_C):

$$C(w) = 5 \frac{1 + \frac{w}{5.7}}{1 + \frac{w}{11}} \quad (4.31)$$

Applichiamo la trasformazione di Tustin inversa per tornare nel dominio della trasformata zeta, ottenendo:

$$C(z)_w = \frac{9.189z - 8.198}{z - 0.8018} \quad (4.32)$$

La risposta al gradino è proposta in figura 4.11.

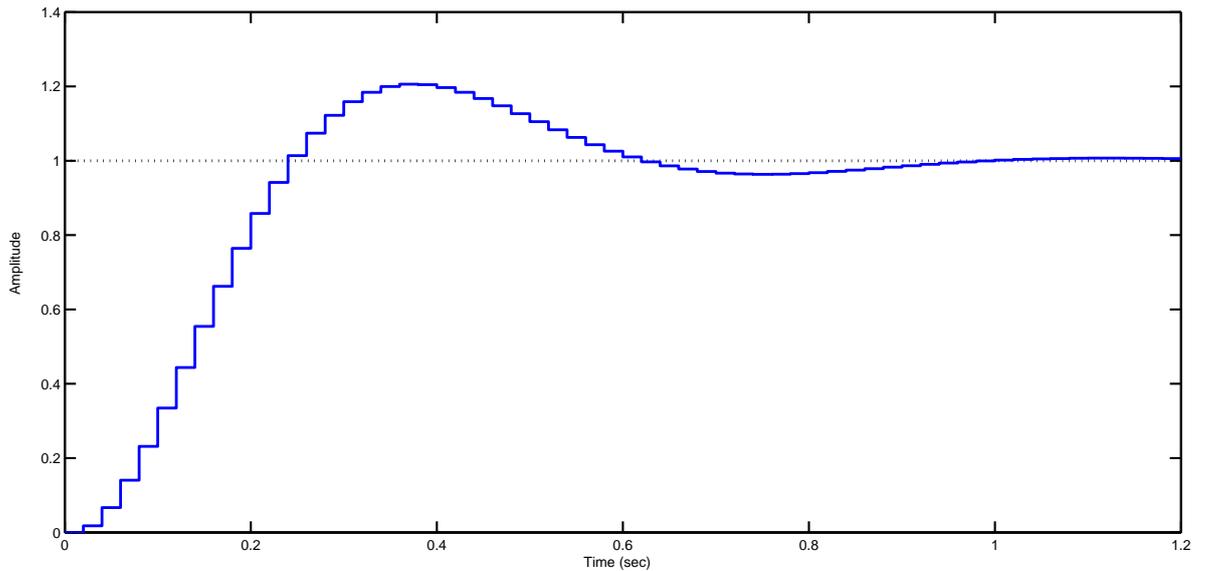


Figura 4.11: Risposta al gradino con controllore ottenuto mediante sintesi nel dominio w : $T_a = 0.88s$; $S \leq 20\%$

Capitolo 5

Conclusione

In questo elaborato è stata proposta una semplice introduzione al controllo digitale. In seguito ad una prima parte preliminare in cui è stato presentato il problema e sono stati introdotti i dispositivi necessari, sono stati forniti un modello equivalente di sistemi analogici nel discreto ed i relativi strumenti di analisi. Infine sono state esposte alcune tecniche per la progettazione di controllori a tempo discreto.

In particolare sono stati presentati due approcci per la progettazione di controllori digitali. Il primo consiste nel discretizzare il controllore dopo averlo progettato nel continuo; sono stati discussi tre metodi: metodo della trasformata zeta, trasformazione bilineare, e metodo di matching poli-zeri. I risultati ottenuti nell'esempio all'interno del capitolo 4 sono molto soddisfacenti, ciò è dovuto anche al periodo di campionamento scelto ($T = 0.02s$) che essendo molto basso fa in modo che il comportamento del controllore digitale approssimi molto bene il comportamento del controllore continuo.

Il secondo approccio consiste invece nel discretizzare il sistema da controllare e progettare, direttamente nel dominio zeta, un controllore digitale. Sono stati trattati due modi di procedere: design mediante luogo delle radici, e design nel piano w . In termini di soddisfacimento delle specifiche i risultati ottenuti con questi ultimi metodi sembrano complessivamente meno soddisfacenti rispetto ai precedenti, anche se le specifiche di progetto sono state completamente rispettate.

A questo punto ci si potrebbe chiedere quale metodo sia preferibile scegliere per la progettazione. Il primo approccio presenta un vantaggio: nel caso in cui il tempo di campionamento non risultasse adeguato non è necessario ripetere l'intero progetto del controllore, è sufficiente ripetere la discretizzazione ed effettuare alcune simulazioni per verificare che le specifiche siano soddisfatte anche con il nuovo periodo di campionamento; mentre nel secondo caso una variazione del periodo campionamento modifica il modello

equivalente del sistema da controllare ed è, in generale, necessario ripetere l'intero progetto (anche se per variazioni sufficientemente piccole potrebbe non essere necessario). Per quanto riguarda il design nel dominio z bisogna anche sottolineare che se il periodo di campionamento è elevato si ha una maggiore sensibilità ad errori numerici, di conseguenza la progettazione con il sistema discreto equivalente potrebbe risultare più complessa. Complessivamente la procedura di discretizzazione di un controllore analogico sembra un approccio più semplice.

Bibliografia

1. P. Bolzern, R. Scattolini, N.Schiavoni, *Fondamenti di Controlli Automatici*, 3/ed, McGraw-Hill
2. R. Bucher (2003), *Matlab e Simulink nella regolazione automatica*
3. C.Chen (1993), *Analog and Digital Control System Design: Transfer-Function, State-Space, and Algebraic Methods*, Oxford University Press, Oxford
4. D. Ciscato (2010), *Appunti di controllo digitale dalle lezioni del Prof. Dorian Ciscato*
5. R. C. Dorf, R. H. Bishop, (2007), *Modern Control Systems*, 11/ed, Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey
6. K. Ogata, *Discrete-Time Control Systems*, 2/ed, Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey
7. S. Zampieri, *Dispensa di Controlli Automatici*, Edizioni Libreria Progetto, Padova