



UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

Dipartimento di Fisica e Astronomia “Galileo Galilei”

Corso di Laurea in Fisica

Tesi di Laurea

L'elettrodinamica di Wheeler e Feynman

Relatore

Prof. Kurt Lechner

Laureando

Gabriele Casagrande

Anno Accademico 2018/2019

Indice

Introduzione	v
1 Elettrodinamica classica	1
1.1 Le equazioni di Maxwell	1
1.1.1 La funzione di Green	1
1.1.2 Soluzione tradizionale e problema dell'autointerazione	6
1.2 L'equazione di Lorentz-Dirac	8
1.2.1 Derivazione dell'equazione di Lorentz-Dirac	9
2 La teoria dell'assorbitore di Wheeler e Feynman	15
2.1 La teoria di azione-a-distanza	16
2.2 La teoria dell'assorbitore	18
2.2.1 Risposta dell'assorbitore al moto di una carica	19
2.2.2 Equivalenza delle due formulazioni dell'elettromagnetismo	23
2.3 La freccia temporale dell'elettromagnetismo	26
2.3.1 Un approccio cosmologico: l'universo come assorbitore	28
3 Il modello di A. Galgani e L. Carati	31
3.1 Il modello	31
3.2 Modi normali come soluzione dell'equazione del moto	35
3.3 L'identità di Oseen	38
3.4 Il collegamento con la teoria di Wheeler e Feynman	39
Conclusioni	43
Bibliografia	46

Introduzione

In un articolo [1] del 1945 J. A. Wheeler e R. Feynman formalizzavano la loro teoria dell'elettrodinamica classica: intento dei due autori era quello di risolvere, all'interno di una sua trattazione appunto classica, le inconsistenze a cui l'elettromagnetismo era andato incontro. Tali incongruenze riguardano la natura dei campi elettromagnetici generati da cariche in moto, il meccanismo dell'autointerazione, ovvero la forza che una carica percepisce per effetto del campo da essa stessa generato, e la violazione (apparentemente spontanea) della simmetria delle equazioni di Maxwell rispetto all'inversione temporale, che si manifesta in particolare nei fenomeni legati all'emissione di radiazione elettromagnetica da parte di una carica accelerata.

Esaminiamo più in dettaglio queste problematiche. Indicando i campi elettromagnetici con il simbolo $F^{\mu\nu}$ e la quadricorrente con j^μ , una generica soluzione delle equazioni di Maxwell in presenza di sorgente è data dalla combinazione di due contributi indipendenti, detti rispettivamente campo ritardato e campo avanzato (si vedano (1.9) e (1.10)):

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu \quad \longrightarrow \quad F^{\mu\nu} = \alpha F_{\text{ret}}^{\mu\nu} + \beta F_{\text{adv}}^{\mu\nu}, \quad (1)$$

dove α e β sono i due coefficienti della combinazione, tali che $\alpha + \beta = 1$. La denominazione delle due componenti è dovuta al fatto che la prima descrive un campo che raggiunge un dato punto dello spazio ad un istante successivo alla sua produzione da parte della sorgente, mentre la seconda descrive un campo che si propaga verso la sorgente, raggiungendo dunque i punti dello spazio in anticipo rispetto all'istante di produzione. La soluzione ritardata è fisicamente ben posta e sperimentalmente verificata, la soluzione avanzata comporta invece una violazione del principio di causalità: i valori ad un dato istante di un campo di questo tipo dipendono infatti dallo stato della sorgente ad istanti successivi.

Sulla base di questa non-fisicità e dell'evidenza sperimentale, la componente avanzata è in elettrodinamica classica genericamente scartata dalla soluzione delle equazioni di Maxwell (scegliendo cioè $\alpha = 1$, $\beta = 0$ nell'equazione (1)), che si identificano quindi con il solo campo ritardato. Questa scelta si scontra tuttavia con la simmetria dell'azione del campo elettromagnetico

$$I = -m \int ds - \int \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} d^4x - \int j_\mu A^\mu d^4x \quad (2)$$

e delle equazioni del moto che ne derivano (equazioni di Maxwell per i campi ed equazione di Lorentz per la dinamica della sorgente) rispetto all'inversione temporale. Questa proprietà si riflette nelle soluzioni delle equazioni di Maxwell nella scelta $\alpha = \frac{1}{2} = \beta$ per i coefficienti dell'equazione (1): a garantire l'invarianza per inversione temporale è proprio la combinazione simmetrica dei campi ritardato e avanzato, mentre la simmetria viene violata se la com-

binazione è asimmetrica (in particolare quando campo ritardato o avanzato vengono presi singolarmente).

Sembra quindi che i fenomeni elettromagnetici individuino una direzione preferenziale nel tempo (una “freccia temporale”), similmente a quanto accade in termodinamica: fenomeni quali la trasmissione del calore dai corpi caldi ai corpi freddi o il costante aumento dell’entropia di un sistema isolato avvengono esclusivamente in un verso poiché i processi opposti, ovvero quelli che si osserverebbero invertendo la direzione temporale, è di fatto impossibile che avvengano spontaneamente; è quindi possibile distinguere, attraverso l’osservazione di questi processi, una precisa direzione temporale, favorita rispetto all’altra dalla natura stessa. Per rendere manifesta questa unidirezionalità è stato però necessario effettuare una scelta arbitraria sulle soluzioni, che cioè non segue da alcuna proprietà delle equazioni fondamentali dell’elettromagnetismo, che al contrario discendono, come abbiamo visto, da un principio di minima azione invariante rispetto a questa simmetria. Nonostante l’evidenza sperimentale, l’origine teorica di questo fenomeno non è dunque affatto chiara: la scelta del solo campo ritardato rompe la simmetria temporale delle equazioni di Maxwell, la scelta della soluzione simmetrica non è invece consistente con l’esperienza.

Malgrado questo aspetto dubbio della teoria, la violazione *ad hoc* introdotta in elettrodinamica classica con la scelta $\alpha = 1$, $\beta = 0$ in (1) è l’approccio fisicamente accettabile e in accordo (a meno di alcune problematiche discusse di seguito) con l’esperienza. Sviluppando la teoria sulla base di questa scelta si arriva ad affrontare la descrizione del noto fenomeno dell’emissione di radiazione elettromagnetica da parte di una carica accelerata (detto anche irraggiamento). Il campo elettromagnetico generato da una carica in moto è detto campo di Liénard-Wiechert; esso si può scrivere come la somma di due campi che dipendono principalmente uno dalla velocità della particella carica, ed è il termine più rilevante alle piccole distanze (detta r la distanza dall’origine del punto dello spazio in cui si vuole valutare il campo, il suo andamento è proporzionale a $1/r^2$), l’altro dalla sua accelerazione e domina alle grandi distanze (andamento $\sim 1/r$). Il campo di accelerazione a grandi distanze è un fenomeno di origine puramente relativistica e determina la radiazione emessa dalla carica per irraggiamento. Se la carica emette radiazione essa perde energia durante il suo moto, che quindi ci aspettiamo si smorzi progressivamente; ci dev’essere allora una forza che provochi questo smorzamento. Applicando le equazioni di Maxwell a questo sistema si arriva a capire che questa forza di frenamento dovrebbe essere determinata dal campo generato dalla carica valutato lungo la traiettoria della carica stessa, ovvero dall’autointerazione della carica con il proprio campo. Tuttavia nelle vicinanze della carica abbiamo visto che domina il campo di velocità, che però nel limite $r \rightarrow 0$ richiesto dalla forza di smorzamento diverge irrimediabilmente: a causa di questa divergenza ultravioletta l’equazione di Lorentz della dinamica della particella perde dunque di significato. Questa contraddizione evidenzia l’incompletezza dell’elettrodinamica classica, che fallisce nella descrizione di un fenomeno non marginale.

Un tentativo di sanare questa inconsistenza è rappresentato dall’equazione di Lorentz-Dirac. Derivata (secondo una prescrizione che esamineremo più avanti) da P. A. M. Dirac nel 1938 [3], quest’equazione si ottiene modificando l’equazione di Lorentz standard per la dinamica di una particella carica sostituendo “manualmente” il termine divergente appena discusso con un termine che parametrizza (questa volta in maniera regolare) la forza di frenamento:

$$\frac{dp^\mu}{ds} = eF_{in}^{\mu\nu} u_\nu + \frac{e^2}{6\pi} \left(w^2 u^\mu + \frac{dw^\mu}{ds} \right), \quad (3)$$

dove u^μ e w^μ rappresentano rispettivamente quadrivelocità e quadriaccelerazione della ca-

rica, p^μ il suo quadrimomento e $F_{\text{in}}^{\mu\nu}$ il campo esterno. Il termine $\frac{e^2}{6\pi}w^2u^\mu$ è detto termine di Larmor e rappresenta la radiazione dovuta al campo di accelerazione (quella significativa a grandi distanze), mentre il termine $\frac{e^2}{6\pi}\frac{dw^\mu}{ds}$ è detto termine di Schott e rappresenta una radiazione spuria che non si propaga indefinitamente ma che verrà riassorbita dalla particella. Il termine di Larmor deriva dalla conservazione del quadrimomento, il termine di Schott garantisce invece la consistenza dell'equazione con la proprietà di ortogonalità tra quadri-velocità e quadrimomento $u_\mu \frac{dp^\mu}{ds} = 0$. Anche se l'equazione è matematicamente ben posta (è consistente in particolare con la conservazione dell'energia, dalla quale può essere anche derivata) essa introduce ulteriori complicazioni. La forza di Lorentz-Dirac ha infatti la particolarità di dipendere dalla derivata dell'accelerazione, il che la rende non derivabile da un principio di minima azione canonico: quest'equazione sembra quindi avere un'origine diversa dalle equazioni fondamentali dell'elettrodinamica, che ammettono invece una descrizione di tipo variazionale. In questo contesto l'equazione di Lorentz-Dirac (3) sembra dunque esterna all'insieme delle equazioni cardine dell'elettromagnetismo e il suo ruolo rispetto ad esse risulta poco chiaro. Inoltre, per ottenere l'unicità di una sua soluzione sono necessarie tre condizioni al contorno, non due come in una tipica equazione del moto: l'esigenza di una condizione anche sull'accelerazione pone l'equazione di Lorentz-Dirac (3) in contrasto con il determinismo della dinamica classica, in cui fissare posizione e velocità iniziali garantisce l'unicità della soluzione dell'equazione del moto; questa anomalia rende le sue soluzioni difficilmente compatibili con l'osservazione sperimentale, se non addirittura fisicamente contraddittorie. Anche se è possibile “sfruttare” la condizione aggiuntiva sull'accelerazione per escludere soluzioni non fisiche dallo spettro di quelle possibili (la condizione $\vec{a}(+\infty) = 0$ esclude per esempio le cosiddette soluzioni “run-away”, quelle cioè che divergono esponenzialmente nel tempo) l'equazione di Lorentz-Dirac (3) conduce intrinsecamente a soluzioni che non rispettano il principio di causalità. Evidente manifestazione di questa violazione è il fenomeno della pre-accellerazione: applicando l'equazione di Lorentz-Dirac (3) ad un generico sistema formato da una carica in moto sotto l'azione di un campo elettromagnetico esterno si ottiene che la reazione di radiazione (in particolare il termine di Schott) fa sì che la carica risenta dell'azione della forza (ovvero che acceleri) ad un istante precedente a quello di effettiva azione della forza stessa. Questo fenomeno è in palese contrasto con la causalità, poiché l'effetto (l'accelerazione) si manifesta prima della causa (la forza).

La reazione di radiazione è quindi un fenomeno che l'elettromagnetismo classico non è in grado di descrivere nella sua completa fenomenologia¹. Non solo, i fenomeni legati alla radiazione costituiscono un'evidente violazione della simmetria temporale delle equazioni di Maxwell: se dalla soluzione ritardata si determina l'emissione di quadrimomento da parte di una carica accelerata, la soluzione avanzata descrive allora il processo speculare in cui la carica assorbe la radiazione elettromagnetica che la raggiunge dall'infinito, aumentando così progressivamente la propria energia. Oltre a non aver alcun riscontro sperimentale, che fenomeni di questo tipo avvengano spontaneamente sembra del tutto innaturale.

È all'interno di questa cornice che si inserisce il lavoro di Wheeler e Feynman. Essi riportano all'attivo una trattazione dell'elettromagnetismo alternativa a quella dell'elettrodinamica classica, che si basa su un principio di azione-a-distanza e che era stata sviluppata a inizio '900 da autori quali Schwarzschild [4], [5], Tetrode [6] e Fokker [7], [8], [9]. Questa teoria si fonda su un principio di minima azione (la cosiddetta azione di Fokker - si veda la (2.1)) che descrive una dinamica in cui le cariche interagiscono tra loro a distanza, ovvero senza il tramite del campo elettromagnetico; in particolare non può quindi trovare posto in questa

¹Una soluzione definita al problema della radiazione si ha in realtà solo in ambito quantistico. Tuttavia la teoria sviluppata in [1] da Wheeler e Feynman affronta questo problema da un punto di vista esclusivamente *classico*; per questo motivo gli aspetti quantistici del problema non verranno sviluppati.

teoria il fenomeno dell'autointerazione delle cariche con il proprio campo. Una trattazione di questo tipo mette in discussione proprio il concetto stesso di campo: all'interno della teoria di azione-a-distanza il campo elettromagnetico non è più un ente fisico indipendente (non ha alcun grado di libertà proprio), ma è al più una quantità fittizia che parametrizza l'azione reciproca delle cariche, il cui stato di moto è il solo a determinare i fenomeni elettromagnetici. La teoria di azione-a-distanza rispetta in questo senso le equazioni di Maxwell, ma diversamente dall'elettrodinamica classica la soluzione che prevede è quella simmetrica ($\alpha = \frac{1}{2} = \beta$ come scelta dei coefficienti in (1)). Questa teoria ha i pregi di basarsi su un principio di minima azione, di rimuovere dalla trattazione le inconsistenze dovute all'autointerazione delle cariche e di rispettare la simmetria per inversione temporale delle equazioni di Maxwell (il "campo" risultante è la semisomma di quello ritardato e avanzato); essa però esclude dalla trattazione (almeno in prima istanza) la reazione di radiazione e i fenomeni ad essi legati: anche la teoria di azione-a-distanza è quindi una teoria incompleta dell'elettromagnetismo.

Wheeler e Feynman si propongono di unificare le due teorie (elettrodinamica classica e teoria di azione-a-distanza), guardando alla radiazione come anello di giunzione. Il punto cruciale del loro lavoro è il concetto di *assorbitore*: nel trattare la dinamica di una carica in moto è necessario considerarla posta all'interno di un sistema di cariche (che costituisce il suddetto assorbitore) che reagisce al moto della particella secondo un meccanismo in grado sia di rendere conto della forza di frenamento sia di garantire l'equivalenza delle due diverse formulazioni dell'elettromagnetismo. Affinché ciò sia possibile l'assorbitore deve essere *completo*, ovvero deve essere in grado di assorbire tutta la radiazione che interessa il sistema in cui è posto. Wheeler e Feynman introducono quest'ipotesi sull'assorbitore senza però dare una dimostrazione di come questa completezza venga effettivamente realizzata nel caso generale, motivo per il quale la validità della loro teoria continua a essere messa in discussione.

In questa tesi mi sono occupato di studiare il modello di Wheeler e Feynman, in particolare nella sua struttura concettuale, evidenziandone sia i limiti (di consistenza teorica e di compatibilità con l'esperienza) che i possibili spunti applicativi. Da questo punto di vista sarà importante lo studio di un modello (idealizzazione di un solido) di reticolo lineare di cariche sviluppato da A. Carati e L. Galgani [16], nel quale la condizione di assorbitore perfetto postulata da Wheeler e Feynman nel loro lavoro è verificata come conseguenza della struttura stessa del modello, ovvero come sua proprietà intrinseca. Questo modello potrebbe quindi rappresentare una possibile spiegazione classica di una proprietà fondamentale dei corpi solidi, dai quali non si osserva alcuna emissione di radiazione nonostante i costituenti della loro struttura interna siano in moto accelerato.

Organizzazione del materiale. I contenuti di questa tesi sono suddivisi come segue: il primo capitolo tratta delle equazioni di Maxwell in presenza di sorgente, prosegue con l'analisi della soluzione adottata in elettrodinamica classica e introduce al problema della reazione di radiazione; il secondo capitolo è incentrato sul lavoro di Wheeler e Feynman che viene analizzato nei suoi vari aspetti, compreso il problema della freccia temporale elettromagnetica; il terzo capitolo riguarda infine il modello di Galgani e Carati in relazione all'ipotesi di assorbitore perfetto di Wheeler e Feynman.

Convenzioni seguite. In questo lavoro viene seguita la convenzione di Einstein sugli indici sommati, che verranno indicati con le lettere greche nel caso di indici spazio-temporali e con quelle latine se puramente spaziali; lo spazio a cui faremo riferimento è quello di Minkowski di tensore metrico $\eta = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$. La velocità della luce viene poi posta uguale a 1 e resa esplicita quando necessario.

Capitolo 1

Elettrodinamica classica

1.1 Le equazioni di Maxwell

Cominciamo affrontando il problema delle equazioni di Maxwell in presenza di sorgente. Indichiamo con $A^\mu(x)$ il quadripotenziale elettromagnetico e con $j^\mu(x)$ la quadricorrente del sistema in questione; scegliendo come condizione di gauge-fixing la gauge di Lorenz $\partial_\mu A^\mu = 0$ le equazioni di Maxwell sono le seguenti:

$$\square A^\mu(x) = j^\mu(x). \quad (1.1)$$

Le soluzioni si possono ricavare (a meno di una soluzione del sistema omogeneo associato) introducendo un'opportuna funzione G , detta funzione di Green, tale che

$$\square G(x, y) = \delta^{(4)}(x - y), \quad (1.2)$$

dove l'operatore d'Alembertiano è inteso agire rispetto alla variabile x ; con una funzione di questo tipo possiamo infatti ricavare (sfruttando la linearità dell'operatore \square) il quadripotenziale A^μ come

$$A^\mu(x) = \int d^4y j^\mu(y) G(x, y), \quad (1.3)$$

in cui la variabile x rappresenta quindi il punto dello spazio-tempo in cui si vuole calcolare il quadripotenziale e y descrive invece la traiettoria della sorgente che lo genera.

1.1.1 La funzione di Green

Analizziamo ora la struttura della funzione di Green di (1.3). Essa dev'essere innanzitutto invariante per trasformazioni di Poincaré:

$$G(x', y') = G(\Lambda x + a, \Lambda y + a) = G(x, y) \quad \forall \Lambda \in SO(1, 3)_+, \quad \forall a \in \mathbb{R}^4. \quad (1.4)$$

Dovendo valere queste condizioni per ogni rototraslazione nello spazio di Minkowski, la funzione di Green deve godere delle seguenti due proprietà:

$$G(x - y, 0) = G(x, y) \implies G(x, y) \equiv G(x - y), \quad (1.5)$$

$$G(\Lambda x) = G(x) \quad \forall \Lambda \in SO(1, 3)_+; \quad (1.6)$$

la consistenza con queste proprietà sarà un criterio importante nella determinazione della corretta funzione di Green di (1.3). L'equazione che dobbiamo risolvere risulta

$$\square G(x) = \delta^{(4)}(x), \quad (1.7)$$

che equivale a determinare la funzione di Green associata all'operatore d'Alembertiano. Una classe di soluzioni particolari di quest'equazione è data da

$$G(x) = \alpha G_{\text{ret}}(x) + \beta G_{\text{adv}}(x), \quad (1.8)$$

in cui $G_{\text{ret}}(x)$ e $G_{\text{adv}}(x)$ sono dette rispettivamente funzione di Green ritardata e avanzata e soddisfano singolarmente la condizione (1.2), mentre i coefficienti α e β sono tali che $\alpha + \beta = 1$, cosicché la funzione G soddisfi anch'essa la (1.2), condizione che la rende una buona funzione di Green per il nostro problema; $G_{\text{ret}}(x)$ e $G_{\text{adv}}(x)$ hanno espressione

$$G_{\text{ret}}(x) = \frac{\delta(x^0 - |\vec{x}|)}{4\pi|\vec{x}|} = \frac{1}{2\pi} \Theta(x^0) \delta(x^2), \quad (1.9)$$

$$G_{\text{adv}}(x) = \frac{\delta(x^0 + |\vec{x}|)}{4\pi|\vec{x}|} = \frac{1}{2\pi} \Theta(-x^0) \delta(x^2), \quad (1.10)$$

dove Θ indica la funzione di Heaviside. Osserviamo che Θ permette di scrivere le due funzioni di Green in modo tale da rendere evidente la loro consistenza con la proprietà (1.6) di invarianza sotto le trasformazioni del gruppo di Lorentz proprio: è possibile infatti dimostrare che all'interno del cono luce associato ad x il segno di x^0 è invariante sotto le trasformazioni del gruppo $SO(1, 3)_+$. Le due funzioni di Green ritardata (1.9) e avanzata (1.10) si ottengono singolarmente da (1.8) imponendo una condizione aggiuntiva; per $G_{\text{ret}}(x)$ si deve richiedere

$$G(x) = 0 \quad \forall x^0 < 0, \quad (1.11)$$

mentre per $G_{\text{adv}}(x)$ si deve richiedere la condizione simmetrica

$$G(x) = 0 \quad \forall x^0 > 0, \quad (1.12)$$

condizioni che si riflettono nelle funzioni di Heaviside presenti in (1.9) e (1.10).

La (1.8) non è però la soluzione più generale dell'equazione (1.7); per ottenere una soluzione completa della (1.7) bisogna infatti aggiungere alla (1.8) una soluzione dell'equazione omogenea associata

$$\square G(x) = 0. \quad (1.13)$$

Le soluzioni invarianti per Poincaré di quest'equazione sono le seguenti:

$$G_1(x) = \mathcal{P} \frac{1}{x^2}, \quad G_2(x) = \text{sgn}(x^0) \delta(x^2), \quad G_3(x) = 1, \quad (1.14)$$

in cui \mathcal{P} indica la parte principale in relazione a x^0 e sgn la funzione segno. Di queste tre diverse soluzioni formali della (1.13) possiamo tuttavia accettare solo $G_2(x)$: $G_1(x)$ non è utilizzabile poiché la parte principale \mathcal{P} è non nulla anche al di fuori del cono luce associato ad x (il quadripotenziale a cui darebbe origine violerebbe pertanto il principio di causalità della relatività ristretta), mentre $G_3(x)$, essendo una funzione costante, conduce in (1.3) ad un potenziale divergente.

La soluzione completa dell'equazione (1.7) è quindi formata dalla soluzione particolare (1.8) più la funzione $G_2(x)$:

$$G(x) = \alpha G_{\text{ret}}(x) + \beta G_{\text{adv}} + c G_2(x), \quad (1.15)$$

dove c è un coefficiente reale; osserviamo però che la funzione segno $\text{sgn}(x^0)$ presente in $G_2(x)$ può essere scritta come

$$\text{sgn}(x^0) = \Theta(x^0) - \Theta(-x^0) \quad (1.16)$$

e $G_2(x)$ risulta di conseguenza pari a

$$G_2(x) = 2\pi(G_{\text{ret}}(x) - G_{\text{adv}}(x)). \quad (1.17)$$

Inserendo quest'espressione di $G_2(x)$ nella (1.15) si ottiene

$$G(x) = (\alpha + 2\pi c)G_{\text{ret}}(x) + (\beta - 2\pi c)G_{\text{adv}}(x); \quad (1.18)$$

essendo la somma dei due coefficienti di $G_{\text{ret}}(x)$ e $G_{\text{adv}}(x)$ ancora pari a 1, esattamente come in (1.8), possiamo concludere che la (1.18) non è altro che una riscrittura formale della soluzione particolare (1.8).

Soluzione ritardata e soluzione avanzata per una carica puntiforme. Ritornando all'equazione di partenza (1.2), le due funzioni di Green ritardata (1.9) e avanzata (1.10) conducono a due diverse espressioni per il quadripotenziale elettromagnetico, chiamate di conseguenza potenziale ritardato e potenziale avanzato:

$$A_{\text{ret}}^\mu(x) = \frac{1}{4\pi} \int d^3y \frac{j^\mu(x^0 - |\vec{x} - \vec{y}|, \vec{y})}{|\vec{x} - \vec{y}|}, \quad (1.19)$$

$$A_{\text{adv}}^\mu(x) = \frac{1}{4\pi} \int d^3y \frac{j^\mu(x^0 + |\vec{x} - \vec{y}|, \vec{y})}{|\vec{x} - \vec{y}|}, \quad (1.20)$$

il campo soluzione delle equazioni di Maxwell (1.1) ha allora la seguente espressione:

$$A^\mu(x) = \alpha A_{\text{ret}}^\mu(x) + \beta A_{\text{adv}}^\mu(x), \quad (1.21)$$

$$F^{\mu\nu}(x) = \partial^\mu A^\nu(x) - \partial^\nu A^\mu(x) = \alpha F_{\text{ret}}^{\mu\nu}(x) + \beta F_{\text{adv}}^{\mu\nu}(x). \quad (1.22)$$

Il metodo della funzione di Green è stato fin qui trattato soltanto da un punto di vista matematico; con l'idea di descrivere il significato fisico delle due funzioni di Green ritardata (1.9) e avanzata (1.10) andiamo ora ad applicare i risultati della sezione precedente al caso in cui la sorgente è formata da una carica puntiforme in moto arbitrario. Indichiamo con $y^\mu(s)$ la linea di universo della carica sorgente, in cui s indica il suo tempo proprio; la quadricorrente $j^\mu(x)$ associata ad una carica puntiforme è data da

$$j^\mu(x) = e \int \delta^{(4)}(x - y(s)) u^\mu(s) ds, \quad (1.23)$$

dove $u^\mu(s) = \frac{dy^\mu(s)}{ds}$ rappresenta la quadrivelocità della carica sorgente. In base a questa definizione i quadripotenziali ritardato e avanzato (1.19) e (1.20) hanno la seguente espressione:

$$A_{\text{ret/adv}}^\mu(x) = \frac{e}{2\pi} \int dy^\mu \delta((x - y(s))^2) \Theta(\pm(x^0 - y^0(s))), \quad (1.24a)$$

$$A_{\text{ret/adv}}^\mu(x) = \frac{e}{4\pi} \frac{u^\mu(s)}{(x - y(s)) \cdot u(s)} \Big|_{s=s_{\text{ret/adv}}}, \quad (1.24b)$$

in cui s_{ret} e s_{adv} sono rispettivamente gli istanti di tempo proprio ritardato e avanzato definiti dalla condizione

$$(x - y(s))^2 = 0, \quad (1.25)$$

imposta dalle delta di Dirac presenti nelle due funzioni di Green (1.9) e (1.10), unita alla richiesta aggiuntiva

$$x^0 > y^0(s) \quad (1.26)$$

nel caso di s_{ret} , e alla richiesta speculare

$$x^0 < y^0(s) \quad (1.27)$$

nel caso di s_{adv} . La condizione (1.25) ha dunque l'effetto di concentrare il quadripotenziale in questione nelle due possibili intersezioni fra la linea di universo $y^\mu(s)$ della sorgente e il cono di luce dell'evento x in cui lo si valuta, rispetto al quale sono una nel passato (s_{ret}) e una nel futuro (s_{adv}), come rappresentato in **Figura 1.1**.

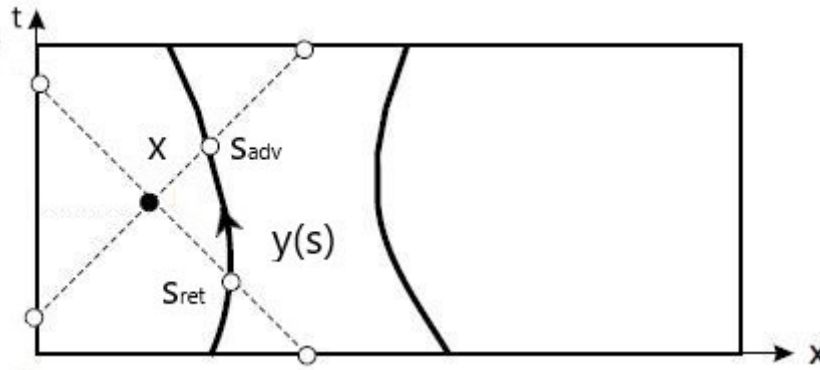


Figura 1.1: Possibili intersezioni tra una generica linea di universo y e il cono luce associato ad un evento x

La (1.25) ha come conseguenza la non simultaneità fra produzione del campo da parte della sorgente e sua manifestazione in un punto dello spazio. Nel caso della soluzione ritardata questo è perfettamente ragionevole: il campo elettromagnetico si propaga alla velocità della luce c , quindi il tempo necessario a percorrere la distanza fra la posizione della sorgente e il dato punto dello spazio in cui lo si vuole calcolare sarà pari, seguendo la notazione di sopra, a $|\vec{x} - \vec{y}|/c$, ovvero l'istante in cui la funzione di Green ritardata ha localizzato la rispettiva soluzione; osserviamo inoltre che questo ritardo è un effetto puramente relativistico, poiché nel limite classico in cui $c \rightarrow +\infty$ esso si annulla.

La non simultaneità causa invece non pochi problemi concettuali quando calata nel contesto della soluzione avanzata. A_{adv}^μ descrive infatti un campo il cui valore in un dato punto dello spazio dipende questa volta dallo stato della sorgente ad un istante *futuro* a quello della sua manifestazione, ovvero lo osserviamo prima ancora che la sorgente abbia raggiunto lo stato di moto tale da generarlo. Questo processo sembra quindi violare il principio di causalità, poiché si osserva avvenire l'effetto, ovvero il campo, prima della relativa causa, cioè il moto della carica. Anche se non ha alcuna controprova sperimentale, questo campo è perfettamente compatibile con le equazioni di Maxwell (G_{adv} è una soluzione ben posta dell'equazione (1.7)); in particolare la soluzione (1.8) data dalla combinazione simmetrica di campo ritardato e avanzato ($\alpha = \frac{1}{2} = \beta$) è la soluzione che rispetta l'invarianza delle equazioni di Maxwell rispetto alla simmetria di inversione temporale.

Il suo conflitto con la causalità ordinaria rende di difficile analisi il campo avanzato, soprattutto per quanto riguarda le sue proprietà: a causa di questa sorta di "causalità invertita" risulta infatti non banale la direzione di propagazione temporale di questo campo. Dal punto di vista spaziale si osserverebbe il campo avanzato propagarsi (simmetricamente rispetto a quello ritardato) dall'infinito verso la sorgente; questo tipo di propagazione spaziale è però compatibile sia con la propagazione temporale del campo in avanti¹ sia con una propagazione del campo all'indietro nel tempo ma spazialmente invertita. Ammettendo questa "flessibilità" temporale, un ragionamento di questo tipo potrebbe, in linea di principio, essere applicato in modo analogo anche al campo ritardato, nonostante sia fisicamente controintuitivo; fissando allora (come sorta di riferimento temporale) la propagazione del campo ritardato avanti nel tempo, sfruttiamo la proprietà di simmetria per inversione temporale della soluzione (1.8) con $\alpha = \frac{1}{2} = \beta$ sopra citata per determinare la direzione di propagazione temporale del campo avanzato. La simmetria di questa soluzione è data dal fatto che applicando l'inversione temporale \mathcal{T} le nuove funzioni di Green che descrivono il sistema risultano

¹Gli orientamenti "avanti" e "indietro" fanno riferimento alla consueta direzione temporale.

$$\hat{G}_{\text{ret}}(x) = \mathcal{T}G_{\text{ret}}(x) = \Theta(-x^0)\delta(x^2) = G_{\text{adv}}(x), \quad (1.28)$$

$$\hat{G}_{\text{adv}}(x) = \mathcal{T}G_{\text{adv}}(x) = \Theta(x^0)\delta(x^2) = G_{\text{ret}}(x). \quad (1.29)$$

Da queste due relazioni capiamo che le due soluzioni (1.19) e (1.20) delle equazioni di Maxwell ricavate in precedenza devono giocare il ruolo rispettivamente di campo ritardato e campo avanzato nella consueta direzione temporale mentre questi due ruoli si scambiano a direzione temporale invertita, ma sono sempre gli stessi due campi. Affinché questa simmetria sia verificata dobbiamo quindi concludere che il campo avanzato si propaga dalla sorgente verso l'infinito spaziale ma all'indietro nel tempo: in questo modo la sua versione *time-reversed* è un campo che si propaga sempre dalla sorgente verso l'infinito ma in avanti nella nuova direzione temporale, il che lo rende un effettivo campo ritardato, come richiesto dalla (1.29). Osserviamo inoltre che la necessità di invertire la direzione temporale nel caso della soluzione avanzata che deriva dalle richieste di simmetria per inversione temporale è anche conseguenza della richiesta che il campo in un dato punto x dello spazio sia *causato* dalla carica sorgente e non viceversa: è con questa causalità di tipo fenomenologico² che entra in conflitto il campo avanzato e le ambiguità nella sua propagazione temporale sono legate anche al rispetto di tale ordinamento causale.

Entrambi i campi ritardato e avanzato sono soluzioni formalmente consistenti delle equazioni di Maxwell, tuttavia il confronto con l'esperienza rende conto della sola componente ritardata: questo carattere di apparente incompletezza è indice della necessità di un ulteriore sviluppo dell'elettromagnetismo nell'ottica di dare una soluzione a questa conflittualità fra teoria ed esperimento. L'approccio storicamente prevalente è stato rendere "forzatamente" compatibile l'elettromagnetismo con l'esperienza, ovvero scegliendo i coefficienti dell'equazione (1.22) pari a $\alpha = 1$ e $\beta = 0$, ovvero in modo tale da avere una soluzione formata dalla sola componente ritardata, a discapito però della simmetria per inversione temporale, essendo la scelta dei coefficienti asimmetrica. La teoria dell'elettromagnetismo che si sviluppa a partire da questa scelta è detta "elettrodinamica classica" e verrà esaminata nella prossima sezione; una teoria alternativa è la cosiddetta teoria di azione-a-distanza, sviluppata a inizio '900 da Schwarzschild, Tetrode e Fokker: questa teoria sceglie come soluzione delle equazioni di Maxwell quella simmetrica ($\alpha = \frac{1}{2} = \beta$) e descrive tutti i processi elettromagnetici attraverso l'interazione reciproca fra le cariche, anche se così facendo esclude di per sé dalla trattazione i fenomeni legati all'autointerazione delle cariche. Nonostante la teoria di azione-a-distanza fosse stata via via accantonata in favore dell'elettrodinamica classica, Wheeler e Feynman la reintrodussero nel loro lavoro con lo scopo di unificare le due versioni dell'elettromagnetismo, viste come mutuamente complementari.

1.1.2 Soluzione tradizionale e problema dell'autointerazione

In ambito di quella che viene chiamata elettrodinamica classica la violazione della causalità e l'evidenza sperimentale portano alla scelta di una soluzione delle equazioni di Maxwell formata dal solo campo ritardato ($\alpha = 1$, $\beta = 0$ in (1.8)), a discapito quindi della simmetria per inversione temporale (o alternativamente in favore di una sua rottura spontanea).

²Il campo avanzato risulta invece perfettamente compatibile con la causalità relativisticamente intesa: anche se a direzione temporale invertita, esso si propaga comunque alla velocità della luce.

Il campo ritardato $F_{\text{ret}}^{\mu\nu}$ di una carica puntiforme in moto arbitrario, che si ottiene da A_{ret}^μ in (1.24), è detto campo di Liénard-Wiechert ed è formato da due diversi contributi, che chiameremo campo di velocità ($F_{\text{v}}^{\mu\nu}$) e campo di accelerazione ($F_{\text{a}}^{\mu\nu}$):

$$F_{\text{ret}}^{\mu\nu} = F_{\text{v}}^{\mu\nu} + F_{\text{a}}^{\mu\nu}, \quad (1.30)$$

$$F_{\text{v}}^{\mu\nu} = \frac{e}{4\pi} \frac{L^\mu u^\nu - L^\nu u^\mu}{(u \cdot L)^3}, \quad (1.31)$$

$$F_{\text{a}}^{\mu\nu} = \frac{e}{4\pi} \frac{L^\mu [(u \cdot L)w^\nu - (w \cdot L)u^\nu] - L^\nu [(u \cdot L)w^\mu - (w \cdot L)u^\mu]}{(u \cdot L)^3}, \quad (1.32)$$

dove $u^\mu(s)$ indica, come sopra, la quadrivelocità della carica, $w^\mu(s)$ la sua quadriaccelerazione e L^μ è la quantità definita come $L^\mu := x^\mu - y^\mu(s)$; le tre espressioni (1.30), (1.31) e (1.32) sono intese essere valutate all'istante di tempo proprio ritardato s_{ret} definito dalle condizioni (1.25) e (1.26), condizioni dalle quali segue inoltre che la quantità L^μ è tale che

$$L_\mu L^\mu = 0, \quad L^0 = x^0 - y^0(s) > 0. \quad (1.33)$$

Esplicitando la dipendenza del campo di Liénard-Wiechert (1.30) dal parametro $R := |\vec{x} - \vec{y}(s)| = L^0$ (dove di nuovo $s = s_{\text{ret}}$), che rappresenta la distanza fra il punto dello spazio in cui viene calcolato il campo e la posizione della sorgente lungo la propria traiettoria all'istante s_{ret} , si ottiene che il campo di velocità ha andamento $\sim 1/R^2$, mentre il campo di accelerazione va come $\sim 1/R$: i campi di velocità hanno quindi maggior rilevanza a brevi distanze dalla sorgente, mentre a grandi distanze dominano i campi di accelerazione.

L'irraggiamento. Una volta stabilita la soluzione delle equazioni di Maxwell la teoria deve affrontare la descrizione del ben noto fenomeno dell'irraggiamento, ovvero l'emissione di radiazione elettromagnetica da parte di una carica che compia un moto accelerato. È infatti il campo di accelerazione (1.32) a determinare, a causa del suo andamento alle grandi distanze dalla sorgente, questa emissione di quadrimomento, che viene descritta attraverso la legge di Larmor (qui nella sua versione relativistica):

$$\frac{dp^\mu}{ds} = -\frac{e^2}{6\pi} w^2 u^\mu. \quad (1.34)$$

L'emissione di energia ha come conseguenza uno smorzamento progressivo del moto della carica durante la sua evoluzione, smorzamento che tuttavia non si riesce a descrivere attraverso la forza di Lorentz standard. Consideriamo a questo proposito il sistema formato da una carica puntiforme in moto all'interno di un generico campo esterno $F_{\text{in}}^{\mu\nu}$ soluzione delle equazioni di Maxwell omogenee; il campo totale $F^{\mu\nu}$ è quindi

$$F^{\mu\nu} = F_{\text{ret}}^{\mu\nu} + F_{\text{in}}^{\mu\nu} \quad (1.35)$$

e la forza di Lorentz risultante è

$$\frac{dp^\mu}{ds} = eF^{\mu\nu}(y)u_\nu = e[F_{\text{ret}}^{\mu\nu}(y) + F_{\text{in}}^{\mu\nu}(y)]u_\nu, \quad (1.36)$$

dove $y = y(s)$ (ovvero il campo è valutato lungo la traiettoria della carica). La componente della forza data da $F_{\text{in}}^{\mu\nu}$ corrisponde alla forza di Lorentz esterna; riconosciamo allora nel contributo dato da $F_{\text{ret}}^{\mu\nu}$ la forza di smorzamento, che risulta quindi essere l'effetto dell'interazione della carica con il campo da essa stessa generato (detta appunto “autointerazione”).

Quest'equazione è però *inconsistente* poiché il campo di Liénard-Wiechert (1.30) è *divergente* nel limite in cui viene calcolato lungo la traiettoria della particella. Questa divergenza ultravioletta svuota di significato l'equazione della dinamica della particella carica: questa inconsistenza non è sanabile all'interno dei confini dell'elettrodinamica classica, che risulta quindi essere una teoria incompleta e inconsistente dell'elettromagnetismo; sarà necessario ancora una volta introdurre “manualmente” delle correzioni alla teoria per dare ragione (quanto possibile) dei fenomeni legati alla reazione di radiazione.

1.2 L'equazione di Lorentz-Dirac

Il primo tentativo di soluzione al problema della reazione di radiazione è rappresentato dalla cosiddetta equazione di Lorentz-Dirac:

$$\frac{dp^\mu}{ds} = eF_{\text{in}}^{\mu\nu}u_\nu + \frac{e^2}{6\pi} \left(w^2 u^\mu + \frac{dw^\mu}{ds} \right). \quad (1.37)$$

Quest'equazione venne proposta da P. A. M. Dirac in un articolo del 1938 [3] in sostituzione dell'equazione di Lorentz standard. Rispetto a quest'ultima essa parametrizza la forza di frenamento attraverso due nuovi termini: $\frac{e^2}{6\pi} w^2 u^\mu$ è detto termine di Larmor ed è collegato all'energia emessa dalla carica per irraggiamento (si veda la (1.34)), $\frac{e^2}{6\pi} \frac{dw^\mu}{ds}$ è detto termine di Schott e rappresenta una radiazione che non contribuisce all'irraggiamento ma che viene riassorbita dalla particella durante il suo moto; il termine di Schott rende anche l'equazione consistente con l'identità $u_\mu \frac{dp^\mu}{ds} = 0$.

L'equazione di Lorentz-Dirac è matematicamente ben posta ed è inoltre consistente con la conservazione dell'energia (da cui è anche possibile darne una sorta di derivazione) ma la presenza della derivata dell'accelerazione la rende incompatibile con il determinismo della dinamica classica: fissare posizione e velocità iniziali non garantiscono, a differenza di un'equazione newtoniana standard, l'unicità della soluzione; diventa quindi necessario porre una condizione al contorno anche sull'accelerazione. Inoltre, essendo del terz'ordine nella posizione, l'equazione di Lorentz-Dirac non è derivabile da un principio di minima azione canonico: questo suo carattere atipico fa sì che la sua applicazione conduca a risultati non fisici, come nel caso delle cosiddette “soluzioni run-away” (si veda la (1.39)), dove l'accelerazione diverge esponenzialmente nel tempo, o addirittura in conflitto con il principio di causalità che avevamo chiamato “fenomenologica”. Questo è il caso del fenomeno della preaccelerazione, in cui (sempre a causa dell'anomalo termine di Schott) l'accelerazione per esempio di una carica ad un dato istante è collegata all'azione della forza ad un istante ad esso successivo; la paradossalità della preaccelerazione sta nell'inversione del rapporto causa-effetto che comporta: l'effetto, ovvero l'accelerazione, si manifesta in anticipo rispetto alla sua causa, cioè la forza.

Esempio di preaccelerazione. Vediamo all'opera il fenomeno della preaccelerazione in un esempio concreto. Consideriamo una particella di massa m e carica e in moto con velocità $v \ll c$, all'interno di un campo elettrico esterno della forma $\vec{E}(t) = \vec{E}\Theta(t)$, dove $\Theta(t)$ indica, come sopra, la funzione di Heaviside. L'equazione di Lorentz-Dirac (1.37) in questo limite non-relativistico si riduce a

$$\vec{a} = \frac{e}{m} \vec{E}(t) + \tau \frac{d\vec{a}}{dt}, \quad (1.38)$$

dove il parametro τ , definito come $\tau := \frac{e^2}{6\pi mc^3}$, rappresenta il tempo caratteristico della forza di frenamento. Una soluzione formale di quest'equazione è

$$\vec{a}(t) = \vec{w}e^{\frac{t}{\tau}} + \frac{e}{m} \vec{E}(t) \left(1 - e^{\frac{t}{\tau}}\right), \quad (1.39)$$

in cui \vec{w} è il parametro di integrazione che riduce l'equazione (1.38) dal terzo al secondo ordine. Possiamo per esempio imporre che per $t \rightarrow +\infty$ l'accelerazione sia limitata: $\vec{a}(t \rightarrow +\infty) < +\infty$; il parametro \vec{w} viene allora fissato a

$$\vec{w} = \frac{e}{m} \vec{E} \quad (1.40)$$

e l'accelerazione della carica risulta quindi essere

$$\vec{a}(t) = \frac{e}{m} \vec{E} \left[(1 - \Theta(t))e^{\frac{t}{\tau}} + \Theta(t) \right]. \quad (1.41)$$

Per le proprietà della funzione di Heaviside vale però $[1 - \Theta(t)] = \Theta(-t)$. Questo significa che l'accelerazione della carica è diversa da zero anche per tempi negativi, precedenti quindi all'“accensione” del campo $\vec{E}(t) = \vec{E}\Theta(t)$ e quindi alla manifestazione della forza che determina tale accelerazione.

1.2.1 Derivazione dell'equazione di Lorentz-Dirac

Nonostante la sua incompatibilità con il determinismo newtoniano, l'equazione di Lorentz-Dirac sembra rendere conto correttamente della forza di smorzamento. Anche se può essere euristicamente derivata sulla base della conservazione del quadrimomento e in consistenza con la relatività ristretta, essa non può essere in alcun modo derivata dall'equazione di Lorentz standard (1.36), che abbiamo visto risulta essere divergente: in elettrodinamica classica l'equazione di Lorentz-Dirac (1.37) va pertanto *postulata*³.

³È d'obbligo precisare che quest'inconsistenza dell'elettrodinamica classica viene in realtà “recuperata” grazie all'intervento della meccanica quantistica. Il tempo caratteristico della forza di frenamento vale infatti $\tau = \frac{e^2}{6\pi mc^3} \simeq 0.6 \cdot 10^{-23} s$, mentre dal principio di indeterminazione di Heisenberg si ricava che nel caso di una carica accelerata gli effetti quantistici diventano rilevanti ad una scala temporale pari a 137τ : molto prima dei fenomeni legati alla reazione di radiazione entrano quindi in gioco degli effetti quantistici che rendono inapplicabile l'elettrodinamica classica. La meccanica quantistica rende dunque l'inconsistenza dell'elettrodinamica classica legata all'autointerazione delle cariche più formale che sostanziale poiché dal punto di vista fenomenologico gli effetti quantistici schermano quelli dovuti alla reazione di radiazione. L'espressione “inconsistenza dell'elettrodinamica classica” va quindi intesa da un punto di vista esclusivamente classico (il riferimento è la divergenza dell'equazione di Lorentz (1.36)), esulando questo lavoro da una trattazione quantistica dell'elettromagnetismo.

Fu P. A. M. Dirac a dare una derivazione relativistica della forza di smorzamento che si basasse sulle equazioni di Maxwell e sulla conservazione del quadrimomento. Per fare ciò egli introduce nella trattazione, anche se solamente da un punto di vista formale, anche il campo avanzato $F_{\text{adv}}^{\mu\nu}$ (cioè la controparte avanzata del campo di Liènard-Wiechert, introdotta in (1.21) e (1.22)) e utilizza la conservazione del quadrimomento per determinare un'equazione del moto di una carica accelerata che sia questa volta libera da singolarità.

Esaminiamo allora la derivazione proposta da Dirac. Ripartiamo dal sistema formato da una carica in moto in un generico campo esterno, che in precedenza abbiamo visto essere descritto dal campo totale (1.35), pari a

$$F^{\mu\nu} = F_{\text{ret}}^{\mu\nu} + F_{\text{in}}^{\mu\nu};$$

l'applicazione diretta di questo campo al moto della carica conduce, come detto, alla divergenza ultravioletta dell'equazione di Lorentz (1.36), in quanto divergente è il campo di Liènard-Wiechert (1.30) lungo la traiettoria della carica che lo genera. Lo stesso sistema può essere formalmente descritto in maniera analoga in termini del campo avanzato $F_{\text{adv}}^{\mu\nu}$ come

$$F^{\mu\nu} = F_{\text{adv}}^{\mu\nu} + F_{\text{out}}^{\mu\nu}, \quad (1.42)$$

con $F_{\text{out}}^{\mu\nu}$ che al pari di $F_{\text{in}}^{\mu\nu}$ descrive un campo libero. Osserviamo che assumendo che l'accelerazione della carica si annulli per $t \rightarrow -\infty$ il campo di Liènard-Wiechert (1.30) si riduce in questo limite alla sola componente di velocità (1.31): di conseguenza il campo totale in questo limite sarà costituito esclusivamente da $F_{\text{in}}^{\mu\nu}$, dato che il campo di velocità (per \vec{x} fissato) si annulla (vale infatti $\vec{y}(t) \rightarrow \vec{v}t \rightarrow -\infty$); questo ragionamento si trasporta in modo analogo al campo avanzato $F_{\text{adv}}^{\mu\nu}$ in (1.42) nel limite opposto $t \rightarrow +\infty$, pertanto valgono le seguenti due relazioni:

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} F^{\mu\nu} = F_{\text{in}}^{\mu\nu}, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} F^{\mu\nu} = F_{\text{out}}^{\mu\nu}. \quad (1.43)$$

Mettendo assieme le due espressioni (1.35) e (1.42) si ottiene che il campo $F^{\mu\nu}$ può essere scritto come

$$F^{\mu\nu} = F_{\text{in}}^{\mu\nu} + \frac{F_{\text{ret}}^{\mu\nu} + F_{\text{adv}}^{\mu\nu}}{2} + \frac{F_{\text{ret}}^{\mu\nu} - F_{\text{adv}}^{\mu\nu}}{2}. \quad (1.44)$$

Sia $F_{\text{rad}}^{\mu\nu}$ il termine dato in questa formula dalla semidifferenza fra i campi ritardato e avanzato:

$$F_{\text{rad}}^{\mu\nu} := \frac{F_{\text{ret}}^{\mu\nu} - F_{\text{adv}}^{\mu\nu}}{2}; \quad (1.45)$$

valutando l'espressione (1.44) di $F^{\mu\nu}$ lungo la traiettoria della carica si ha che mentre la semisomma dei due campi è ancora un termine divergente, al pari del solo $F_{\text{ret}}^{\mu\nu}$ in (1.36), $F_{\text{rad}}^{\mu\nu}$ risulta invece finito e nelle vicinanze della carica ($x^\mu \rightarrow y^\mu(s)$) vale

$$F_{\text{rad}}^{\mu\nu} = \frac{e}{6\pi} \left(\frac{dw^\mu}{ds} u^\nu - u^\mu \frac{dw^\nu}{ds} \right). \quad (1.46)$$

$F_{\text{rad}}^{\mu\nu}$ risulta essere il campo che parametrizza l'azione di frenamento subita dalla carica; per vedere questo fatto è necessario proseguire il ragionamento trattando la divergenza che ancora caratterizza il sistema, operazione eseguita da Dirac per mezzo della conservazione del quadrimomento totale P^μ . A questo proposito introduciamo preliminarmente il campo $f^{\mu\nu}$, definito come

$$f^{\mu\nu} := F^{\mu\nu} - \frac{F_{\text{ret}}^{\mu\nu} + F_{\text{adv}}^{\mu\nu}}{2}; \quad (1.47)$$

l'utilità di questo campo sarà chiara poco più avanti. Consideriamo ora il tensore energia-impulso $T^{\mu\nu}$ associato al campo $F^{\mu\nu}$:

$$T^{\mu\nu} = F^\mu{}_\lambda F^{\lambda\nu} - \frac{1}{4}\eta^{\mu\nu} F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta}. \quad (1.48)$$

Anche questo tensore è però interessato dalla divergenza ultravioletta legata alla traiettoria della carica: la sua componente relativa al campo $F_{\text{ret}}^{\mu\nu}$ ha infatti, nelle vicinanze della traiettoria della carica, andamento proporzionale a $1/R^4$ (si veda l'espressione del campo di Liénard-Wiechert (1.30)), di conseguenza il quadrimomento P^μ diverge in questo limite:

$$P^\mu = \int d^3x T^{0\mu} \simeq \int dR \frac{1}{R^2} \xrightarrow{R \rightarrow 0} +\infty. \quad (1.49)$$

Dirac regolarizza questa divergenza considerando una superficie cilindrica (una sorta di tubo) che circonda la traiettoria della carica seguendola in ogni suo punto; sia ϵ il raggio di questa superficie, tale che essa risulti di dimensioni trascurabili rispetto alle varie distanze che interessano il sistema. A questo punto è possibile calcolare il flusso di quadrimomento uscente dalla superficie, che indichiamo con Σ , di questo contorno cilindrico:

$$\frac{dP_\Sigma^\mu}{dt} = \int_\Sigma d\Sigma_i T^{i\mu}. \quad (1.50)$$

Dirac determinò che, indipendentemente dalla lunghezza della superficie cilindrica, il quadrimomento emesso attraverso la superficie Σ nell'intervallo di tempo in cui la carica compie il relativo tratto di traiettoria si può esprimere, grazie all'utilizzo del campo $f^{\mu\nu}$ definito in (1.47), in funzione della traiettoria della carica come

$$P_\Sigma^\mu = \int \left[\frac{e^2}{2\epsilon} w^\mu - e f^{\mu\nu} u_\nu \right] ds + \mathcal{O}(\epsilon^2), \quad (1.51)$$

dove questo integrale è inteso essere calcolato tra i due estremi della traiettoria della carica corrispondenti al tratto di superficie tubolare considerato.

La conservazione del tensore energia-impulso (1.48) ci dice che il flusso di quadrimomento uscente dalla superficie cilindrica (1.50) equivale alla variazione di energia all'interno della superficie stessa e in particolare che, indipendentemente dalla lunghezza della traiettoria della carica, esso dipende esclusivamente dalle condizioni agli estremi del tratto di cilindro considerato. Ciò significa che il flusso (1.50) ha la proprietà di essere un differenziale esatto, proprietà che possiamo esprimere, in funzione di un certo quadrivettore B^μ , come

$$\frac{e^2}{2\epsilon} w^\mu - e f^{\mu\nu} u_\nu = \frac{dB^\mu}{ds}. \quad (1.52)$$

Osservando che il membro di sinistra di quest'equazione risulta nullo se contratto con u^μ , possiamo fissare⁴ il quadrivettore B^μ richiedendo la sua consistenza con questa proprietà:

$$u_\mu \frac{dB^\mu}{ds} = 0 \implies B^\mu = k u^\mu, \quad (1.53)$$

dove k è una costante. Inserendo questa definizione di B^μ nell'equazione (1.52) osserviamo che la costante k può essere fissata in modo tale da eliminare la divergenza legata alla traiettoria della carica ($\epsilon \rightarrow 0$):

$$k = \frac{e^2}{2\epsilon} - m, \quad (1.54)$$

in cui m è una nuova costante, indipendente da ϵ , che nel limite $\epsilon \rightarrow 0$ permette di ridurre l'equazione (1.52) a

$$m w^\mu = e f^{\mu\nu} u_\nu. \quad (1.55)$$

L'equazione appena ottenuta ha tutto l'aspetto di un'equazione di Lorentz; essa rappresenta infatti la versione regolarizzata dell'equazione di Lorentz divergente (1.36) e non è nient'altro che l'equazione di Lorentz-Dirac introdotta in (1.37). Il campo $f^{\mu\nu}$ in (1.47) ha infatti espressione (ricordando la (1.44), dalla quale è stato sostanzialmente definito, e la (1.45)):

$$f^{\mu\nu} = F_{\text{in}}^{\mu\nu} + F_{\text{rad}}^{\mu\nu}, \quad (1.56)$$

che sostituita in (1.55)⁵ restituisce proprio

$$m w^\mu = e F_{\text{in}}^{\mu\nu} u_\nu + \frac{e^2}{6\pi} \left(\frac{dw^\mu}{ds} + w^2 u^\mu \right). \quad (1.57)$$

La costante m , ovvero la massa fisica della particella, è il contributo finito risultante dall'eliminazione dei termini divergenti in ϵ nel limite $\epsilon \rightarrow 0$ che si effettua per valutare il campo generato dalla particella lungo la traiettoria della particella stessa.

L'equazione di Lorentz-Dirac (1.57) viene allora proposta come corretta equazione del moto di una carica accelerata in sostituzione dell'equazione di Lorentz standard (1.36), che abbiamo visto essere divergente. Sebbene sia consistente con la relatività ristretta e con la conservazione del quadrimomento, l'equazione di Lorentz-Dirac non è derivabile dall'equazione di Lorentz standard: il termine di Schott $\frac{e^2}{6\pi} \frac{dw^\mu}{ds} = \frac{e^2}{6\pi} \frac{d^3 y^\mu}{ds^3}$ contiene infatti la derivata terza della posizione della carica sorgente, pertanto non potrà discendere, a differenza dell'equazione di Lorentz standard, da un principio di minima azione canonico; l'unico modo

⁴Dirac osserva che in linea di principio sono possibili anche altre espressioni di B^μ , alternative a (1.53), tali da renderlo consistente con la proprietà richiesta; tuttavia l'espressione scelta è quella che ha la forma semplice, ritenute le altre meno probabili.

⁵Ricordiamo che la (1.55) è il risultato del limite $\epsilon \rightarrow 0$ che individua la traiettoria della carica considerata, pertanto l'espressione di $F_{\text{ret}}^{\mu\nu}$ che va utilizzata nel passaggio dalla (1.56) alla (1.57) è quella definita in (1.46).

per includere il fenomeno della reazione di radiazione in elettrodinamica classica è pertanto *postulare* l'equazione di Lorentz-Dirac (1.57).

Osserviamo inoltre che l'equazione di Lorentz-Dirac è in esplicito contrasto con la simmetria per inversione temporale delle equazioni di Maxwell: applicando infatti la trasformazione $s \rightarrow -s$ alla (1.57), mentre $\frac{dp^\mu}{ds}$ e la forza esterna $eF_{\text{in}}^{\mu\nu}u_\nu$ restano invariati, la forza di frenamento $eF_{\text{rad}}^{\mu\nu}u_\nu$ cambia di segno, rompendo così la suddetta simmetria per inversione temporale; la versione *time-reversed* dell'equazione di Lorentz-Dirac (1.57) ha quindi come effetto un aumento dell'energia della particella carica invece che una sua diminuzione. Questa violazione è diretta conseguenza del fatto che la forza di frenamento $eF_{\text{rad}}^{\mu\nu}u_\nu$ è causata dalla radiazione uscente dalla carica, che viene descritta attraverso $F_{\text{ret}}^{\mu\nu}$: essendo questo campo di per sè non simmetrico per inversione temporale, anche la forza di frenamento che determina sarà caratterizzata da questa asimmetria. L'irraggiamento è dunque il fenomeno che mostra in modo più evidente la violazione da parte della natura della simmetria per inversione temporale dell'elettromagnetismo perché la sua descrizione dipende dalla rottura esplicita di questa simmetria nella soluzione delle equazioni di Maxwell scelta in questa teoria e questo si riflette direttamente nella dinamica descritta dall'equazione di Lorentz-Dirac.

Capitolo 2

La teoria dell'assorbitore di Wheeler e Feynman

Nel Capitolo 1 abbiamo visto come l'elettrodinamica classica fallisca nella descrizione della reazione di radiazione, ovvero l'insieme dei fenomeni legati all'interazione di una carica con il proprio campo; questa formulazione dell'elettromagnetismo è di fatto inconsistente poiché le difficoltà a cui conduce nella trattazione di questo fenomeno (in particolare la divergenza ultravioletta nella forza di Lorentz (1.36)) seguono da un'applicazione diretta delle equazioni di Maxwell, cioè derivano dalle sue equazioni di base. L'autointerazione delle cariche è un problema che in elettrodinamica classica non ha una soluzione definita e per tenerne comunque conto si è costretti a *postulare* l'equazione di Lorentz-Dirac (1.37), operazione che evidenzia la necessità di una descrizione più avanzata dell'elettromagnetismo. A questo si aggiungono poi la violazione *ad hoc* della simmetria per inversione temporale delle equazioni di Maxwell che caratterizza la soluzione, esclusivamente ritardata, scelta in elettrodinamica classica e la divergenza ultravioletta del tensore energia-impulso¹, ovvero la sua non integrabilità lungo la traiettoria di una data carica del sistema considerato, la quale rende divergente il quadrimomento totale in questi punti dello spazio (si vedano le equazioni (1.48) e (1.49)).

Questa generale incompletezza dell'elettrodinamica classica ha incoraggiato Wheeler e Feynman a rivolgersi verso un'altra formulazione dell'elettromagnetismo, la cosiddetta teoria di azione-a-distanza, formulata da Schwarzschild [4], [5], Tetrode [6] e Fokker [7], [8], [9] a inizio '900; questa teoria descrive l'interazione elettromagnetica in termini del solo moto delle cariche, svuotando i campi di ogni grado di libertà proprio e relegandoli così a puro strumento formale. La teoria di azione-a-distanza ha il pregio di fondarsi su un principio di minima azione, il quale risulta inoltre manifestamente Lorentz-invariante e tale da descrivere un'interazione elettromagnetica che rispetta la simmetria per inversione temporale delle equazioni di Maxwell; inoltre questa teoria non descrive, a differenza dell'elettrodinamica classica, alcuna autointerazione divergente (essa è di fatto esclusa a priori dalla condizione $i < j$ sugli indici che individuano ciascuna carica nell'azione di Fokker (2.1)). Tuttavia non è chiaro nemmeno in teoria di azione-a-distanza quale sia l'origine della forza di smorzamento percepita da una carica in moto accelerato poiché l'invarianza per inversione temporale della teoria è in aperto contrasto con l'esplicita rottura di questa simmetria da parte del fenomeno dell'irraggiamento. Per questo motivo Wheeler e Feynman hanno visto nella radiazione il possibile anello di giunzione fra le due formulazioni dell'elettromagnetismo, apparentemente

¹Per una possibile soluzione a questo problema si veda K. Lechner & P. Marchetti, *Variational principle and energy-momentum tensor for relativistic electrodynamics of point charges*, Ann. Phys. **322**, 1162, 2007.

molto diverse l'una dall'altra (sia dal punto di vista concettuale sia soprattutto da quello puramente fenomenologico): razionalizzare la reazione di radiazione rappresentava, nell'ottica dei due autori, la chiave per ottenere una teoria ben definita dell'elettromagnetismo.

Partendo dall'assunzione iniziale che il campo generato da una particella carica corrisponda al campo simmetrico descritto dalla teoria di azione-a-distanza, l'unificazione di quest'ultima con l'elettrodinamica classica avviene grazie all'introduzione da parte di Wheeler e Feynman del concetto di *assorbitore*: con quest'espressione si intende una modellizzazione dell'interazione elettromagnetica in cui la dinamica di una data carica è determinata dalla sua costante interazione con tutte le altre cariche presenti nel sistema (o più in generale nell'universo stesso), che reagiscono al moto della carica di partenza e appunto costituiscono il suddetto assorbitore. Il particolare meccanismo che si viene a creare sarà in grado al contempo di dare una "naturale" derivazione dell'espressione della forza di frenamento $eF_{\text{rad}}^{\mu\nu}u_\nu$ (si veda la (1.46)) prescritta da Dirac e di determinare l'equivalenza fra elettrodinamica classica e teoria di azione-a-distanza. Anche se Wheeler e Feynman sembrano, con questo meccanismo, aver raggiunto l'obiettivo di formulare una teoria dell'elettromagnetismo che fosse consistente, la loro teoria nasconde in realtà diverse criticità che hanno fatto sì che non si affermasse mai come tale, una su tutte la realizzazione fisica dell'assorbitore e delle sue proprietà.

2.1 La teoria di azione-a-distanza

La teoria di azione-a-distanza parametrizza i fenomeni elettromagnetici per mezzo del solo stato di moto delle cariche, non facendo dunque ricorso al concetto di *campo*, fondamentale in elettrodinamica classica; la quantità fondamentale in questa teoria è la cosiddetta azione di Fokker:

$$J_F[x(s)] = - \sum_i \int m_i ds_i - \sum_{i < j} \int \frac{e_i e_j}{4\pi} \delta(r_{ij}^2) \eta_{\mu\nu} dx_i^\mu dx_j^\nu. \quad (2.1)$$

In questa formula m_i indica la massa della carica i -esima, s_i il suo tempo proprio e $x_i^\mu(s_i)$ la relativa linea di universo, mentre la quantità r_{ij}^μ è definita come $r_{ij}^\mu := x_i^\mu - x_j^\mu$, ovvero rappresenta il quadrivettore che collega la posizione della carica i -esima con quella della j -esima; il tutto è indicizzato da i e j che scorrono sul numero delle cariche presenti nel sistema.

L'azione di Fokker (2.1) è formata dal consueto termine inerziale e da un secondo termine che descrive l'interazione fra le cariche, che la presenza della delta di Dirac $\delta(r_{ij}^2)$ ci dice si instaura solo quando le linee di universo x_i^μ e x_j^μ delle cariche i -esima e j -esima si trovano a distanza di tipo luce; importante proprietà di quest'azione è quella di preservare (come vedremo in (2.7)) la simmetria per inversione temporale dell'elettromagnetismo. Confrontando l'azione di Fokker (2.1) con quella dell'elettrodinamica classica per l' i -esima carica

$$I[x(s), A] = -m_i \int ds_i - \int \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} d^4x - \int j_\mu A^\mu d^4x \quad (2.2)$$

si vede chiaramente che il nuovo termine della teoria di azione-a-distanza ha sostituito il contributo del campo elettromagnetico alla dinamica del sistema. Nell'ottica di questa teoria, l'interazione fra cariche elettriche non necessita di alcun tramite (il campo) per essere trasmessa ma è conseguenza diretta del loro stato di moto reciproco (da cui la denominazione

di “azione-a-distanza”). Il campo elettromagnetico risulta in quest’ottica una quantità puramente formale, priva di significato fisico: esso non possiede infatti alcun grado di libertà proprio ma è completamente determinato dalla traiettoria della carica.

Volendo introdurre questa sorta di campi² anche in teoria di azione-a-distanza, si può definire il quadripotenziale generato dalla generica carica i -esima come

$$A_i^\mu(x) = \frac{e_i}{4\pi} \int \delta((x - x_i(s))^2) dx_i^\mu = \frac{A_{i,\text{ret}}^\mu(x) + A_{i,\text{adv}}^\mu(x)}{2}. \quad (2.3)$$

La differenza di questo quadripotenziale con quello dell’elettrodinamica classica è resa evidente dal suo confronto con la (1.24a): rispetto a quest’ultimo la (2.3) non è vincolata ad alcun tipo di ordinamento temporale tra l’istante x^0 di manifestazione del quadripotenziale nel punto x dello spazio e il tempo proprio $x^0(s_i) = s_i$ della carica i -esima che lo determina. Questo vincolo è espresso in (1.24a) dalla presenza della funzione Θ di Heaviside e determina in un caso il potenziale ritardato e nell’altro quello avanzato; in (2.3) essa è assente a causa della simmetria dell’azione di Fokker (2.1) per inversione temporale e tale risulta infatti il quadripotenziale.

Detta $j_i^\mu(x)$ la quadricorrente associata alla carica i -esima, che in base alla (1.23) ha espressione

$$j_i^\mu(x) = e_i \int \delta^{(4)}(x - x_i) dx_i^\mu, \quad (2.4)$$

il quadripotenziale (2.3) soddisfa le seguenti relazioni:

$$\partial_\mu A_i^\mu(x) = 0, \quad (2.5)$$

$$\square A_i^\mu(x) = j_i^\mu(x). \quad (2.6)$$

Le relazioni (2.5) e (2.6) hanno sì rispettivamente la forma delle equazioni di Maxwell in presenza di sorgente (1.1) e della condizione di gauge di Lorenz ma in teoria di azione-a-distanza, cioè con il quadripotenziale elettromagnetico della singola carica definito come in (2.3), esse non sono delle equazioni quanto delle vere e proprie identità.

Utilizzando queste identità formali possiamo calcolare il campo elettromagnetico $F_i^{\mu\nu}$ associato al quadripotenziale (2.3), che risulta essere il campo che si ottiene da (1.8) con la scelta $\alpha = \frac{1}{2} = \beta$ per i coefficienti, cioè il campo simmetrico rispetto all’inversione temporale:

$$F_i^{\mu\nu}(x) = \frac{F_{i,\text{ret}}^{\mu\nu}(x) + F_{i,\text{adv}}^{\mu\nu}(x)}{2}, \quad (2.7)$$

in cui $F_{i,\text{ret}}^{\mu\nu}$ e $F_{i,\text{adv}}^{\mu\nu}$ corrispondono ai campi ritardato e avanzato visti in (1.22) nel Capitolo 1. In quest’espressione del campo della teoria di azione-a-distanza sono manifeste sia la simmetria per inversione temporale che la caratterizza sia la differenza con il campo (1.35) (a meno del campo libero $F_{\text{in}}^{\mu\nu}$) esclusivamente ritardato dell’elettrodinamica classica.

Variando l’azione di Fokker (2.1) lungo la linea di universo della carica i -esima ($x_i^\mu \rightarrow x_i^\mu + \delta x_i^\mu$) si ottiene l’analogo in teoria di azione-a-distanza dell’equazione di Lorentz:

²L’uso dei termini “campo” e “potenziale” per queste quantità è, per quanto detto, improprio ma verranno comunque utilizzati per semplicità di linguaggio.

$$m_i \frac{d^2 x_i^\mu}{ds^2} = e_i \sum_{j \neq i} F_j^\mu{}_\nu(x_i) \frac{dx_i^\nu}{ds}. \quad (2.8)$$

È importante osservare che l'indice per l'indice j che scorre nella sommatoria presente in questa equazione è escluso il valore i relativo alla carica di cui si sta studiando la dinamica; ciò accade poiché nell'azione di Fokker (2.1) il termine che descrive l'interazione tra cariche è valutato per gli indici $i < j$. Questo significa che la carica i -esima risente dei campi (della forma (2.7)) generati da tutte le altre cariche presenti nel sistema ma non interagisce con il proprio campo: non è quindi presente il termine di autointerazione che avevamo visto divergere nell'equazione di Lorentz (1.36) dell'elettrodinamica classica, la condizione sugli indici presente a livello dell'azione iniziale (2.1) la esclude immediatamente dalla trattazione (non potrebbe essere altrimenti essendo il rapporto fra le linee di universo delle diverse particelle a determinare l'interazione elettromagnetica in questa teoria). L'assenza di autointerazione divergente fa sì che non sia necessaria alcuna operazione del tipo Lorentz-Dirac (equazione (1.57)) per descrivere la dinamica delle cariche elettriche; l'equazione di Lorentz è infatti perfettamente compatibile con la teoria di azione-a-distanza: rispetto alla (1.57), in (2.8) non è necessario introdurre alcun termine correttivo.

Anche se rappresenta una formulazione consistente dell'elettromagnetismo, la teoria di azione-a-distanza non può che essere in disaccordo con l'esperienza poiché in essa non trovano posto i fenomeni legati all'irraggiamento: mentre l'esperienza mostra la sola emissione di radiazione elettromagnetica da parte delle cariche, determinata dall'azione del campo ritardato (l'unico che si osserva) sulle cariche stesse, il campo (2.7) della teoria di azione-a-distanza comporterebbe, a causa della sua componente avanzata, non solo l'emissione ma anche l'assorbimento di quadrimomento da parte delle cariche, con un effetto complessivo nullo. La simmetria per inversione temporale della teoria di azione-a-distanza è dunque in netto contrasto con la rottura spontanea di questa simmetria da parte della natura; è questo il grande limite della teoria: rispettare la simmetria per inversione temporale comporta che la fenomenologia che la teoria descrive sia decisamente distante da quella che viene osservata.

2.2 La teoria dell'assorbitore

Abbiamo visto che la reazione di radiazione è un problema tanto in elettrodinamica classica quanto nella teoria di azione-a-distanza: nel primo caso il tentativo di trattarla attraverso le equazioni di Maxwell conduce alla divergenza ultravioletta dell'equazione di Lorentz (1.36), nell'altro viene invece esclusa in partenza (si veda l'azione di Fokker (2.1)) dallo spettro dei fenomeni descrivibili dalla teoria. Per questo motivo Wheeler e Feynman hanno mantenuto la radiazione come linea guida nel tracciare in [1] la loro teoria elettromagnetica³: derivare una formulazione consistente dell'elettromagnetismo avrebbe significato, nell'ottica dei due autori, unificare le due formulazioni dell'elettrodinamica classica e della teoria di azione-a-distanza, e la chiave per fare ciò non poteva che essere la radiazione.

La teoria di Wheeler e Feynman assume per prima cosa che il campo prodotto da una data carica sia il campo simmetrico (2.7) della teoria di azione-a-distanza e il suo nodo

³L'obiettivo di questo lavoro di Wheeler e Feynman è quello di dare soluzione all'inconsistenza dell'elettromagnetismo classico restando comunque all'interno di una sua trattazione *classica*: anche se è la quantizzazione il passo in avanti che permette di dare una soluzione definita al problema della reazione di radiazione questo tipo di approccio non è quello adottato dai due autori in [1], pertanto questo aspetto non verrà approfondito in questo lavoro.

concettuale sta nell'introduzione del concetto di *assorbitore* nella descrizione dell'interazione elettromagnetica. Riprendendo una proposta già effettuata precedentemente da Tetrode, i due autori suppongono che il fenomeno dell'emissione di radiazione elettromagnetica sia strettamente legato alla presenza di un ente fisico in grado di assorbirla, chiamato appunto assorbitore: è l'interazione che questo nuovo ente fisico instaura con una generica carica a determinare il fenomeno della radiazione, di cui non si verificherebbe l'emissione se la suddetta carica fosse posta in uno spazio altrimenti vuoto (coerentemente con le prescrizioni della teoria di azione-a-distanza). Una data carica va sempre pensata all'interno dell'assorbitore, che se inizialmente viene schematizzato come un vero e proprio mezzo materiale, con l'avanzare della teoria risulta che il ruolo di assorbitore viene di fatto assunto dalla totalità delle altre cariche elettriche presenti nel sistema oltre a quella di partenza.

2.2.1 Risposta dell'assorbitore al moto di una carica

Esaminiamo ora le ipotesi iniziali della teoria di Wheeler e Feynman e quale sia il funzionamento del meccanismo dell'assorbitore. Come detto, Wheeler e Feynman basano la loro teoria sulla formulazione dell'elettromagnetismo della teoria di azione-a-distanza. Il campo generato da una carica è quindi determinato unicamente dal suo stato di moto e corrisponde alla semisomma del campo ritardato e avanzato (2.7) descritti all'inizio del Capitolo 1; una data carica può inoltre risentire esclusivamente dell'effetto dei "campi" relativi alle altre cariche presenti nel sistema: una carica accelerata in uno spazio altrimenti privo di cariche non emette quindi radiazione.

Consideriamo dunque il sistema formato da una carica in moto all'interno dell'ente assorbitore introdotto da Wheeler e Feynman, che possiamo immaginare figurativamente come un vero e proprio mezzo materiale che circonda la carica. Supponendo che le particelle che formano l'assorbitore siano in numero sufficiente da assorbire completamente la radiazione proveniente dalla carica⁴, il meccanismo di interazione fra i due enti fisici è schematizzabile come segue:

1. la data carica produce, per effetto del proprio moto, un campo che interagisce con l'assorbitore;
2. le particelle dell'assorbitore sono messe in moto da questa prima interazione con la carica e generano a loro volta un campo, della forma (2.7), che instaura un'ulteriore interazione tra carica e assorbitore, questa volta sulla carica di riferimento;
3. il campo generato dalle particelle dell'assorbitore è dimostrato da Wheeler e Feynman essere indipendente dalle particolari proprietà del mezzo materiale che costituiscono e la sua componente avanzata è tale per cui il risultato netto delle diverse interazioni riproduce esattamente le osservazioni sperimentali, in particolare la forza di frenamento.

È l'interazione fra la carica e la componente avanzata del campo dell'assorbitore il passaggio fondamentale di questo meccanismo; questo campo avanzato ha difatti le seguenti peculiari proprietà:

- esercita una forza finita e simultanea all'istante di accelerazione della carica, che la priva esattamente dell'energia che la osserviamo emettere nel processo di frenamento;

⁴Quest'ipotesi è cruciale all'interno del lavoro di Wheeler e Feynman e la sua importanza verrà meglio discussa in seguito.

- nelle vicinanze della carica risulta pari al campo di radiazione (1.46) introdotto da Dirac;
- si combina con il campo simmetrico generato dalla carica accelerata in modo tale che il campo netto risultante è il campo interamente ritardato che riproduce le osservazioni sperimentali.

Questo meccanismo fornisce quindi una reinterpretazione dell'origine della dinamica di una carica accelerata osservata sperimentalmente, dando in particolare una derivazione "naturale" (almeno in prima analisi) sia della violazione della simmetria per inversione temporale delle equazioni di Maxwell (data dall'osservazione del solo campo ritardato) che della forza di Lorentz-Dirac (1.37); vedremo inoltre come questo meccanismo sia in grado di determinare l'equivalenza tra elettrodinamica classica e teoria di azione-a-distanza che Wheeler e Feynman si erano prefissati di ottenere. Tuttavia questo processo ha il difetto di essere in un certo senso costruito "ad hoc": affinché il meccanismo abbia il risultato sopra descritto è fondamentale che l'assorbitore sia *completo*, ovvero che sia in grado di assorbire tutta la radiazione che lo interessa. Quest'ipotesi (introdotta all'inizio del ragionamento) resterà tale in tutto il lavoro di Wheeler e Feynman, cioè non verrà mai dimostrato che questa sia effettivamente una proprietà universale di ogni assorbitore: è questo il motivo principale per cui alla teoria di Wheeler e Feynman si è sempre guardato con diffidenza. Non è poi da tralasciare, a questo proposito, il ruolo determinante che gioca il campo avanzato in questa teoria: anche se sembra nascondersi dietro il soddisfacente risultato finale, a causa delle sue proprietà esso introduce in qualsiasi processo elettromagnetico un intreccio temporale tra passato e futuro di difficile interpretazione, sia fisica che concettuale.

Esempio di interazione carica-assorbitore. Introdotte le ipotesi iniziali, vediamo ora all'opera in un esempio concreto il funzionamento vero e proprio del meccanismo dell'assorbitore che abbiamo descritto in precedenza solo per sommi capi. Ripercorriamo in particolare quella che in [1] Wheeler e Feynman chiamano "Derivazione I", in cui i due autori analizzano un semplice sistema carica-assorbitore che ne riprende la rappresentazione figurativa introdotta all'inizio di questa sezione.

Consideriamo una particella di carica $q = e$ posta inizialmente nell'origine O di un sistema di riferimento; assumiamo che lo spazio in cui è posta la carica sia vuoto in una cavità sferica di raggio R e centrata nella carica (e quindi nel sistema di riferimento scelto) e riempito invece con un mezzo materiale per $r > R$: è questo mezzo a ricoprire il ruolo di assorbitore in questo sistema, e ne indichiamo con N la densità di cariche (tutte pari ad e). Andiamo quindi a studiare la dinamica della carica q all'interno del sistema assorbente; per fare ciò analizziamo innanzitutto in espansione di Fourier la sua accelerazione, la cui tipica componente \vec{a}_0 si scrive come

$$\vec{a}_0(t) = \vec{u}_0 e^{-i\omega t}, \quad (2.9)$$

dove ω è la frequenza dell'espansione (è sottinteso che di questa espressione si considera la parte reale). Per entrare all'interno del meccanismo descritto da Wheeler e Feynman dobbiamo valutare l'azione del campo prodotto dalla carica q per effetto del suo moto sulle cariche dell'assorbitore e la conseguente reazione di quest'ultimo sulla carica q stessa. A questo proposito, Wheeler e Feynman scelgono in questo esempio di descrivere il campo della carica q

attraverso la sola componente ritardata (restando così “*in accordo con l’esperienza*”⁵), nel limite non relativistico, lungo la direzione dell’accelerazione della carica valutata all’interno della cavità e ad una distanza r dalla carica sufficientemente grande. Ricordando il campo di Liénard-Wiechert (1.30), il campo a grandi distanze dalla carica sorgente nel limite non relativistico ha la seguente espressione generale:

$$\vec{E}(t, r) = \frac{e}{4\pi r} [\vec{m} \times (\vec{m} \times \vec{a}_0)] \Big|_{t-r}, \quad (2.10)$$

in cui $\vec{m} = \vec{x} - \vec{y}(t - r)$. La componente $E_\theta(r)$ di questo campo lungo la direzione di accelerazione della carica risulta, utilizzando per quest’ultima l’espressione (2.9), pari a

$$E_\theta(t, r) = \frac{e}{4\pi r} u_0 \sin \theta e^{i\omega(r-t)}, \quad (2.11)$$

dove θ indica l’angolo fra l’accelerazione \vec{a}_0 della carica e la direzione individuata dal vettore posizione del punto in cui si sta calcolando il campo. Volendo poi valutare lo stesso campo in un punto P della regione dell’assorbitore ($r > R$) dobbiamo tenere conto dei cambiamenti introdotti dall’indice di rifrazione $n - ik$ del mezzo; nella regione dell’assorbitore il campo (2.11) assume quindi la forma (complessa)

$$E_\theta(t, r) = \frac{e \sin \theta u_0}{2\pi R(1 + n - ik)} e^{i\omega[r-t+(n-ik-1)(r-R)]}. \quad (2.12)$$

Il campo in (2.12) permette di calcolare l’accelerazione \vec{a} di una data particella dell’assorbitore (che assumiamo avere massa m) lungo la direzione di \vec{E}_θ :

$$\vec{a} = \frac{e}{m} p(\omega) \vec{E}_\theta, \quad (2.13)$$

in cui la funzione $p(\omega)$ si scrive in termini dell’indice di rifrazione secondo la relazione

$$(n - ik)^2 = 1 - \frac{4\pi N e^2}{m\omega^2} p(\omega). \quad (2.14)$$

Il moto delle varie cariche che compongono l’assorbitore, caratterizzato dalla tipica accelerazione (2.13), determina, come detto, una nuova interazione con la carica di partenza: applicando la teoria di azione-a-distanza si ottiene che la componente avanzata del campo prodotto dalle particelle dell’assorbitore che si trovano nel futuro della carica q agisce su quest’ultima *simultaneamente* (la sua propagazione è all’indietro nel tempo) alla sua accelerazione, cioè all’istante in cui essa aveva prodotto il campo ritardato (2.11). Valutando il campo (semi-)avanzato di ciascuna carica dell’assorbitore alla posizione \vec{x} della carica q lungo il suo moto nei pressi dell’origine e risommando tali campi, si ottiene che il campo percepito dalla carica per effetto dell’azione avanzata dell’assorbitore ha la forma:

$$\vec{R} = \frac{e}{6\pi} \dot{\vec{a}}_0. \quad (2.15)$$

⁵In [1] i due autori scrivono: “[...] *without any attempt in this first derivation of the force of radiative reaction to reconcile such an assumption with the half-retarded, half-advanced field of the theory of action at a distance.*”

Il campo \vec{R} è la risposta dell'assorbitore valutata lungo la direzione dell'accelerazione \vec{a} della carica q (tali erano le quantità da cui è stato ricavato) e la (2.15) può essere considerata una sua espressione generale poiché è indipendente dalle proprietà del mezzo considerato. Si può mostrare che la reazione normale al vettore \vec{u} in realtà si annulla, quindi \vec{R} è in definitiva la risposta totale dell'assorbitore al moto della carica q , che quindi risente di una forza elettromagnetica \vec{F}_R pari a

$$\vec{F}_R = e\vec{R} = \frac{e^2}{6\pi} \dot{\vec{a}}_0, \quad (2.16)$$

che corrisponde alla versione non-relativistica della forza di smorzamento presente nell'equazione di Lorentz-Dirac (1.37).

Wheeler e Feynman dimostrarono inoltre come la reazione avanzata R dell'assorbitore (che in (2.15) avevamo visto in forma vettoriale e che qui riscriviamo invece in notazione tensoriale) calcolata nelle vicinanze della carica si può scrivere come

$$R = \frac{1}{2} (F_{\text{ret}}^{(q)} - F_{\text{adv}}^{(q)}), \quad (2.17)$$

dove $F_{\text{ret}}^{(q)}$ e $F_{\text{adv}}^{(q)}$ rappresentano i campi ritardato e avanzato della carica q sempre valutati nei pressi della traiettoria della carica q stessa: il risultato corrisponde nuovamente alla prescrizione di Dirac per la forza di smorzamento (si veda la (1.46)).

Nell'esempio analizzato è mostrato in che termini la forza di frenamento percepita da una carica in moto accelerato sia dovuta, all'interno della teoria di Wheeler e Feynman, all'interazione (avanzata) con essa dell'assorbitore, cioè delle varie altre cariche presenti nel sistema in cui è posta. L'espressione (2.17) della forza di frenamento trae origine dal particolare meccanismo che deriva dall'inserimento dell'assorbitore nei processi elettromagnetici, non descrive propriamente un'interazione della carica sorgente con il proprio campo come avveniva in elettrodinamica classica (equazione (1.36)): ricordiamo che in teoria di azione-a-distanza, assunta da Wheeler e Feynman nel descrivere l'assorbitore, il campo elettromagnetico è un concetto formale, che parametrizza in una forma utile la reciproca interazione fra le cariche elettriche, la quale però non ha bisogno di alcun tramite fisico per propagarsi; tale è dunque la (2.17), un'espressione formale dell'azione di frenamento che la reazione avanzata dell'assorbitore provoca sulla carica di partenza.

Quest'analogia formale della parametrizzazione di Dirac della reazione di radiazione in teoria di azione-a-distanza permette inoltre di dare una possibile spiegazione (legata ovviamente alle prescrizioni della teoria di Wheeler e Feynman) dell'effettiva osservazione del solo campo ritardato prodotto da una particella carica per effetto del proprio moto. Possiamo infatti riscrivere il campo ritardato prodotto dalla carica q come

$$F_{\text{ret}}^{(q)} = \frac{F_{\text{ret}}^{(q)} + F_{\text{adv}}^{(q)}}{2} + \frac{F_{\text{ret}}^{(q)} - F_{\text{adv}}^{(q)}}{2}; \quad (2.18)$$

nel primo dei due termini presenti in questa formula riconosciamo il campo generato da una particella carica in teoria di azione-a-distanza (2.7), nel secondo il termine di reazione di radiazione (2.17): da questa formula si intuisce come la rottura della simmetria per inversione temporale non sia quindi un atto spontaneo della natura ma sia una conseguenza diretta della particolare interazione elettromagnetica che instaura l'assorbitore.

2.2.2 Equivalenza delle due formulazioni dell'elettromagnetismo

L'esempio analizzato nella precedente sezione è utile per capire il funzionamento del meccanismo dell'assorbitore dal punto di vista "pratico": è necessario ora generalizzare quanto fatto nella precedente sezione per avere una visione completa del funzionamento del meccanismo dell'assorbitore e quindi della formulazione dell'elettromagnetismo descritta da Wheeler e Feynman.

I due autori dimostrarono come le varie caratteristiche "materiali" del mezzo che costituisce l'assorbitore siano irrilevanti per quanto riguarda il risultato finale del meccanismo. L'unica e fondamentale proprietà necessaria al suo corretto funzionamento è che il mezzo si comporti da *assorbitore completo*, ovvero che sia in grado di assorbire tutta la radiazione che lo investe. Abbiamo detto in precedenza che un assorbitore, nella forma che possiamo considerare quella generale, è essenzialmente costituito da un insieme di particelle cariche, non necessariamente poste all'interno di un mezzo materiale; consideriamo allora un sistema formato da k cariche elettriche, che possiamo sempre associare all'esempio visto sopra pensandolo come l'insieme formato da una carica di riferimento più le restanti $k - 1$ cariche che vanno a formare l'assorbitore. La proprietà di completezza si traduce in questi termini nel fatto che il campo di radiazione totale, dato dalla somma dei campi simmetrici di ciascuna carica, *si annulli a distanze sufficientemente grandi dalla carica di riferimento*, non avendo fatto alcuna supposizione sulla disposizione delle k cariche del sistema; avendo il tipico campo di radiazione associato ad una carica in moto andamento proporzionale all'inverso della distanza r dalla carica di riferimento (come visto nel Capitolo 1 trattando i campi di Liènard-Wiechert (1.30)) è sufficiente che il campo totale si annulli con velocità maggiore di $1/r$ nel limite $r \rightarrow +\infty$:

$$\sum_{i=1}^k \frac{F_{\text{ret}}^{(i)}(x) + F_{\text{adv}}^{(i)}(x)}{2} \sim \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^2}\right) \quad \text{per } r \rightarrow +\infty. \quad (2.19)$$

Questa relazione deve necessariamente valere ad ogni istante di tempo; poiché è molto difficile (e soprattutto non soddisfa la caratteristica di generalità cui si rifà questa trattazione) pensare che le onde elettromagnetiche descritte dai campi ritardati e avanzati relativi alle diverse cariche, che si propagano rispettivamente da e verso ciascuna di esse, siano in un rapporto tale da determinare interferenza distruttiva in ogni punto dello spazio e a ogni istante di tempo, ne consegue che le due componenti ritardata e avanzata della formula (2.19) devono soddisfare la condizione sull'andamento a grandi distanze *separatamente*:

$$\sum_{i=1}^k F_{\text{ret}}^{(i)}(x) \sim \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^2}\right) \quad \text{per } r \rightarrow +\infty, \quad (2.20)$$

$$\sum_{i=1}^k F_{\text{adv}}^{(i)}(x) \sim \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^2}\right) \quad \text{per } r \rightarrow +\infty. \quad (2.21)$$

Da queste due relazioni si ricava immediatamente che il campo

$$\mathcal{F}(x) := \sum_{i=1}^k \frac{F_{\text{ret}}^{(i)}(x) - F_{\text{adv}}^{(i)}(x)}{2} \quad (2.22)$$

soddisfa anch'egli la relazione sull'andamento asintotico:

$$\sum_{i=1}^k \frac{F_{\text{ret}}^{(i)}(x) - F_{\text{adv}}^{(i)}(x)}{2} \sim \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^2}\right) \quad \text{per } r \rightarrow +\infty. \quad (2.23)$$

Il campo (2.22) è inoltre un campo che soddisfa le equazioni di Maxwell omogenee:

$$\partial_\mu \mathcal{F}^{\mu\nu}(x) = \sum_{i=1}^k \frac{1}{2} [\partial_\mu F_{(i),\text{ret}}^{\mu\nu}(x) - \partial_\mu F_{(i),\text{adv}}^{\mu\nu}(x)] = \sum_{i=1}^k \frac{1}{2} [j_{(i)}^\nu(x) - j_{(i)}^\nu(x)] = 0. \quad (2.24)$$

Essendo soddisfatte contemporaneamente le due condizioni (2.24) e (2.23) per ogni istante di tempo possiamo concludere che il campo \mathcal{F} non può che essere identicamente nullo in tutto lo spazio:

$$\mathcal{F}(x) = \sum_{i=1}^k \frac{F_{\text{ret}}^{(i)}(x) - F_{\text{adv}}^{(i)}(x)}{2} \equiv 0. \quad (2.25)$$

La (2.25) segue semi-euristicamente dalla proprietà (2.19) di completezza dell'assorbitore e possiamo anzi interpretarla come una sua riformulazione più specifica: essa è determinante all'interno della teoria di Wheeler e Feynman poiché è la condizione che determina l'equivalenza fra le due formulazioni dell'elettromagnetismo dell'elettrodinamica classica e della teoria di azione-a-distanza. Per dimostrare questa unificazione scegliamo una delle k cariche del sistema come carica di riferimento, che indicheremo con l'indice j ; detta $y^\mu(s)$ la traiettoria di questa carica in funzione del suo tempo proprio, il campo F_j di cui essa risente per effetto dell'interazione con le altre $k - 1$ cariche ha espressione

$$F_j(y) = \sum_{i \neq j} \frac{F_{\text{ret}}^{(i)}(y) + F_{\text{adv}}^{(i)}(y)}{2}, \quad (2.26)$$

dove i indicizza appunto tutte le $k - 1$ particelle del sistema diverse dalla j -esima. Sfruttando la proprietà di completezza dell'assorbitore nella forma (2.25) (che vale in ogni punto dello spazio, compresi dunque quelli della traiettoria della carica j) il campo (2.26) si riscrive come

$$\begin{aligned} F_j(y) &\stackrel{(2.25)}{=} F_j(y) + \mathcal{F}(y) = \\ &= \sum_{i \neq j} \frac{F_{\text{ret}}^{(i)}(y) + F_{\text{adv}}^{(i)}(y)}{2} + \sum_i \frac{F_{\text{ret}}^{(i)}(y) - F_{\text{adv}}^{(i)}(y)}{2} = \sum_{i \neq j} F_{\text{ret}}^{(i)}(y) + \frac{F_{\text{ret}}^{(j)}(y) - F_{\text{adv}}^{(j)}(y)}{2}, \end{aligned}$$

operazione che in sintesi corrisponde a stabilire la seguente identità:

$$F_j(y) = \sum_{i \neq j} \frac{F_{\text{ret}}^{(i)}(y) + F_{\text{adv}}^{(i)}(y)}{2} = \sum_{i \neq j} F_{\text{ret}}^{(i)}(y) + \frac{1}{2} [F_{\text{ret}}^{(j)}(y) - F_{\text{adv}}^{(j)}(y)]. \quad (2.27)$$

La (2.27) afferma che è equivalente esprimere il campo di cui risente una carica in moto o attraverso il campo simmetrico (2.26) della teoria di azione-a-distanza o attraverso il campo esclusivamente ritardato dell'elettrodinamica classica unito al campo di radiazione di Dirac (1.46) che determina la forza di frenamento. Grazie alla relazione (2.25) risulta quindi del tutto analogo studiare un sistema elettromagnetico dal punto di vista dell'elettrodinamica classica o della teoria di azione-a-distanza: in quest'ottica, le differenze concettuali fra le due teorie sono di fatto una pura questione di formalismo espressivo, l'identità (2.27) ne determina l'equivalenza fisica e sostanziale.

Osservazioni finali sulla teoria di Wheeler e Feynman. Il meccanismo dell'assorbitore descritto da Wheeler e Feynman nella loro trattazione dell'elettromagnetismo permette, una volta reintrodotta per la carica elettrica il campo simmetrico (2.7) della teoria di azione-a-distanza in sostituzione di quello esclusivamente ritardato dell'elettrodinamica classica, di rileggere il fenomeno dell'emissione di radiazione elettromagnetica da parte di una carica in moto accelerato come il risultato della sua interazione con le altre cariche presenti nel sistema in cui è posta, le quali costituiscono il suddetto assorbitore.

Nel Capitolo 1 abbiamo visto che in elettrodinamica classica la reazione di radiazione è interpretata come il risultato dell'autointerazione di una carica con il proprio campo; cercare di trattare questa interazione attraverso l'equazione di Lorentz porta irrimediabilmente a risultati inconsistenti (la divergenza dell'equazione (1.36)) che non hanno soluzione in elettrodinamica classica: per tenere conto della reazione di radiazione nello studio della dinamica di una carica in moto è stato infatti necessario *postulare* l'equazione di Lorentz-Dirac (1.37), accettandone la derivazione vista nella sezione 2.1 nonostante l'introduzione (anche se in linea di principio esclusivamente formale) della soluzione avanzata (1.20) delle equazioni di Maxwell (1.1), che in elettrodinamica classica era stata scartata. L'introduzione dell'assorbitore nell'interazione elettromagnetica dà al campo di radiazione di Dirac (1.46) una naturale derivazione: grazie alla proprietà di completezza dell'assorbitore, descrivere la dinamica di una data carica attraverso l'equazione di Lorentz-Dirac è equivalente a farlo tramite la forza di Lorentz standard dove però il campo puramente ritardato dell'elettrodinamica classica viene sostituito dal campo semiritardato e semiavanzato della teoria di azione-a-distanza, che trova nuova vita grazie alla sua reintroduzione da parte di Wheeler e Feynman.

Anche se il meccanismo descritto da Wheeler e Feynman sembra funzionare correttamente (quasi miracolosamente), esso contiene però alcune difficoltà concettuali che ne intaccano la validità come teoria generale dell'elettromagnetismo. La prima difficoltà riguarda la proprietà di completezza dell'assorbitore. Affinché elettrodinamica classica e teoria di azione-a-distanza risultino interamente equivalenti deve valere la condizione (2.19) di completo assorbimento di tutta la radiazione elettromagnetica emessa dal sistema di cariche considerato: questa condizione è stata supposta da Wheeler e Feynman nella derivazione vista sopra dell'equivalenza fra le due formulazioni dell'elettromagnetismo, ma nel loro lavoro *non viene mai dimostrata essere una proprietà universale* di qualunque assorbitore: in questi termini il meccanismo introdotto dai due autori non è quindi una descrizione universale delle interazioni elettromagnetiche *a priori*, bensì il suo funzionamento è condizionato dalla validità della proprietà (2.19) per il dato sistema considerato⁶. Senza la validità generale della proprietà (2.19) di completo assorbimento diventa difficile ricondurre la totalità dei fenomeni elettromagnetici all'interazione del tipo carica-assorbitore poiché il meccanismo che ne deriva dipenderebbe di volta in volta dal particolare sistema, perdendo del tutto di generalità: l'equivalenza del-

⁶Sarà questo il caso del particolare modello sviluppato da A. Galgani e L. Carati [16], che verrà analizzato nel prossimo capitolo.

le due diverse formulazioni dell'elettromagnetismo descritte dall'identità (2.27) sarebbe una proprietà particolare del sistema in questione, non universale dell'elettromagnetismo.

Il secondo punto critico della teoria di Wheeler e Feynman è la presenza significativa del campo avanzato nelle interazioni elettromagnetiche: all'interno del meccanismo dell'assorbitore è fondamentale nel determinare una reazione da parte delle cariche dell'assorbitore che risulti simultanea all'istante di accelerazione della carica di partenza, con risultato la forza di Lorentz-Dirac (1.37); la sua importanza diventa ancor più evidente pensando all'interazione elettromagnetica in termini della teoria di azione-a-distanza, in cui garantisce il rispetto della simmetria per inversione temporale delle equazioni di Maxwell da parte delle soluzioni che vengono individuate. Il fatto che la soluzione avanzata abbia nella teoria di Wheeler e Feynman evidente rilevanza fisica (non formale come avveniva nella derivazione di Dirac della forza di frenamento) significa accettare che i fenomeni elettromagnetici (ma è evidente che questa relazione causale dovrebbe essere in qualche modo estesa a tutti i fenomeni fisici) dipendano tanto dal passato quanto dal futuro: una causalità di questo tipo, in cui la dimensione temporale assume quasi le fattezze di una vera e propria direzione spaziale, è un'implicazione concettuale quantomeno controversa.

2.3 La freccia temporale dell'elettromagnetismo

Nonostante le difficoltà appena evidenziate, la formulazione dell'elettromagnetismo di Wheeler e Feynman sembra avere il pregio di rispettare, nella soluzione che fornisce, la simmetria per inversione temporale delle equazioni di Maxwell (1.1): l'equivalenza tra elettrodinamica classica e teoria di azione-a-distanza (equazione (2.27)) permette di descrivere le interazioni elettromagnetiche secondo il campo semiritardato e semiavanzato (2.7) prescritto appunto dalla teoria di azione-a-distanza, il quale rispetta la simmetria temporale delle equazioni di Maxwell.

Nella nuova interpretazione dei fenomeni elettromagnetici sviluppata da Wheeler e Feynman sembra quindi trovare soluzione il problema dell'apparente violazione spontanea da parte della natura della simmetria per inversione temporale delle equazioni di Maxwell. Nel Capitolo 1 avevamo visto come il necessario accordo con l'esperienza aveva portato alla scelta forzata, a discapito della simmetria per inversione temporale, della soluzione esclusivamente ritardata delle equazioni di Maxwell ($\alpha = 1, \beta = 0$ in (1.8)) e al conseguente sviluppo dell'elettrodinamica classica; nella nuova teoria sviluppata da Wheeler e Feynman l'osservazione dei soli campi ritardati, uniti agli apparenti effetti di autointerazione delle cariche, sono una manifestazione dell'interazione delle cariche con l'assorbitore, interazione che di fatto (identità (2.27)) non è altro che quella prescritta dalla teoria di azione-a-distanza, che ristabilisce la simmetria temporale che sembrava perduta.

Tuttavia le cose non sono così lineari come potrebbero apparire in prima battuta: bisogna infatti porre maggior attenzione alla derivazione di Wheeler e Feynman dell'equivalenza delle due diverse formulazioni dell'elettromagnetismo. L'identità (2.27) che la garantisce è stata ottenuta sommando al campo semiritardato e semiavanzato (2.7) della teoria di azione-a-distanza il campo \mathcal{F} definito in (2.22), che a causa della proprietà di completezza dell'assorbitore considerato abbiamo visto nella (2.25) essere identicamente nullo; sommare il campo \mathcal{F} è il passaggio corretto per arrivare alla conclusione voluta da Wheeler e Feynman, ma come osservano gli stessi due autori il medesimo campo avrebbe potuto in linea di principio anche essere sottratto: così facendo l'identità (2.27) si riscrive come

$$F_j(x) = \sum_{i \neq j} \frac{F_{\text{ret}}^{(i)}(x) + F_{\text{adv}}^{(i)}(x)}{2} = \sum_{i \neq j} F_{\text{adv}}^{(i)}(x) + \frac{1}{2} [F_{\text{adv}}^{(j)}(x) - F_{\text{ret}}^{(j)}(x)]. \quad (2.28)$$

Il membro di destra di quest'identità rappresenta una formulazione dell'elettromagnetismo speculare all'elettrodinamica classica, in cui la soluzione delle equazioni di Maxwell è quella interamente avanzata (1.20) ($\alpha = 0$, $\beta = 1$ in (1.8)) e l'autointerazione di una carica ha come effetto un assorbimento (non l'emissione) di quadrimomento.

Nel problema della freccia temporale dell'elettromagnetismo siamo di fatto tornati al punto di partenza: la versione alternativa (2.28) dell'equivalenza fra le due formulazioni dell'elettromagnetismo è in aperto contrasto con l'esperienza, che si accorda invece con la (2.27), ma sia l'una che l'altra versione sono ancora una volta formalmente consistenti dal punto di vista esclusivamente elettromagnetico. Ancora una volta sembra necessaria un'imposizione *ad hoc* per rendere compatibili teoria e risultati sperimentali in elettromagnetismo.

Osserviamo che questa indeterminazione relativizza ulteriormente l'equivalenza delle due formulazioni dell'elettromagnetismo. La simmetria per inversione temporale mette infatti in discussione la stessa possibilità che quest'equivalenza possa stabilirsi: la teoria di azione-a-distanza è simmetrica per inversione temporale, mentre l'elettrodinamica classica ha come presupposto una sua esplicita violazione; da questo punto di vista le due teorie sembrano inconciliabili. L'ambiguità che abbiamo visto caratterizzare il passaggio da una formulazione all'altra, effettuato per mezzo della proprietà di completezza dell'assorbitore (2.25), è dovuta essenzialmente al fatto che poiché il campo \mathcal{F} definito in (2.22) cambia segno sotto time-reversal, sommarlo o sottrarlo al campo della teoria di azione-a-distanza (si vedano rispettivamente le equazioni (2.27) e (2.28)) ne rompe la simmetria per inversione temporale proprio a causa di questo cambiamento di segno. Di conseguenza, la presunta equivalenza della teoria di azione-a-distanza con l'elettrodinamica classica, già condizionata dalla controversa validità della proprietà di completezza dell'assorbitore (2.23), è ulteriormente relativizzata al problema dell'origine della freccia temporale elettromagnetica.

Wheeler e Feynman si chiedono se la soluzione di questo problema non sia da ricercarsi in qualche causa esterna all'elettromagnetismo. I due autori sostengono, riprendendo a questo proposito un'ipotesi di Einstein⁷, che l'asimmetria temporale dell'elettromagnetismo sia dovuta all'asimmetria delle condizioni iniziali del problema: in analogia a quanto accade in meccanica statistica, essi sostengono che la formulazione avanzata dell'elettromagnetismo (2.28) non sia di per sè fisicamente impossibile, soltanto poco probabile in virtù delle tipiche condizioni iniziali dei sistemi carica-assorbitore come quelli analizzati nelle derivazioni precedenti, che favoriscono invece la formulazione ritardata. Per capire meglio l'affermazione di Wheeler e Feynman applichiamo l'inversione temporale all'esempio analizzato nella sezione 4.1. Quello che si ottiene è infatti che il moto della carica posta al centro del sistema di riferimento determina un'interazione avanzata con le cariche dell'assorbitore, che vengono quindi colpite dalla radiazione elettromagnetica prima che quest'ultima raggiunga la carica sorgente (l'interazione è questa volta avanzata, non ritardata): affinché il processo risulti simmetrico a quello originale le cariche dell'assorbitore dovrebbero essere in uno stato di moto tale che la radiazione dovuta al moto della carica sorgente le porti a riposo. Sono queste le "condizioni iniziali improbabili" a cui Wheeler e Feynman fanno riferimento, e la loro improbabile realizzazione è ancora una volta dovuta alla difficoltà che si ha nel calare le interazioni di tipo avanzato in una realtà fisica in cui la direzione temporale appare univoca. La freccia temporale dell'elettromagnetismo, legata all'esclusiva emissione di radiazione elettromagnetica da

⁷W.Ritz & A. Einstein, *Zum gegenwärtigen Stand des Strahlungsproblems*, Physik. Zeits. **10**, 323, 1909.

parte delle cariche in moto, è quindi ricondotta da Wheeler e Feynman alla freccia temporale termodinamica, determinata dal costante aumento dell'entropia dell'universo (ovvero dal Secondo Principio della termodinamica).

2.3.1 Un approccio cosmologico: l'universo come assorbitore

È possibile affrontare il problema della freccia temporale dell'elettromagnetismo anche da un secondo punto di vista, alternativo a quello "termodinamico" sostenuto da Wheeler e Feynman e che si rifà a considerazioni di tipo cosmologico (da parte essenzialmente di J. E. Hogarth in [12], rielaborate ed ampliate poi da F. Hoyle e J. V. Narlikar in [10] e [11]). La teoria di Wheeler e Feynman ha infatti un'immediata connessione con la cosmologia: nel descrivere il concetto di assorbitore abbiamo visto che la sua forma più generale è data da un insieme di cariche elettriche; è quindi naturale generalizzare il sistema carica-assorbitore alla situazione in cui il moto di una carica risente dell'interazione con tutte le altre cariche presenti *nell'universo* stesso, che diventa di fatto il vero e proprio assorbitore della teoria di Wheeler e Feynman. Nell'ottica in cui consideriamo essere l'universo il sistema assorbente in cui evolve il moto di una data carica, è opportuno capire quale sia il rapporto tra le proprietà dell'assorbitore (in particolare la sua completezza) e la struttura dell'universo stesso, che in particolare dipenderà dal modello cosmologico considerato.

L'evoluzione nel tempo dell'universo-assorbitore rende necessario, vista anche la natura (nella teoria di Wheeler e Feynman) sia ritardata sia avanzata delle interazioni elettromagnetiche, tenere conto del suo stato non solo nel futuro (quando cioè risente della componente ritardata del campo prodotto dalla carica sorgente) ma anche nel passato; possiamo dunque pensare di descrivere l'evoluzione dell'universo-assorbitore in termini dell'evoluzione nel tempo della sua completezza, essendo quest'ultima la sua proprietà fondamentale. Per fare ciò introduciamo due parametri di efficienza di assorbimento, sia nel passato che nel futuro, che indichiamo rispettivamente con p e f : $f = 1$ indica la completezza dell'assorbitore nel futuro, $p = 1$ nel passato (il caso $f = 1, p = 0$ corrisponde, come vedremo dalla (2.30) e dalla (2.31), alla situazione descritta da Wheeler e Feynman); ricordando la soluzione generale (1.22) delle equazioni di Maxwell, scriviamo per prima cosa il campo totale F_{tot} presente nell'universo come

$$F_{\text{tot}} = AF_{\text{ret}} + BF_{\text{adv}}, \quad (2.29)$$

in cui A e B sono due coefficienti tali che $A + B = 1$ e F_{ret} e F_{adv} rappresentano la totalità dei vari contributi ritardato e avanzato di ciascuna carica presente nell'universo al campo complessivo. Lo stesso campo può essere scritto come la somma del campo simmetrico prescritto dalla teoria di azione-a-distanza più un termine che parametrizza la reazione dell'universo come assorbitore, che grazie all'introduzione dei coefficienti p ed f si scrive facilmente modificando il campo di radiazione di Dirac (1.45):

$$F_{\text{tot}} = \frac{1}{2}[F_{\text{ret}} + F_{\text{adv}}] + \frac{1}{2}(Af - Bp)[F_{\text{ret}} - F_{\text{adv}}]. \quad (2.30)$$

Uguagliando ora la (2.29) e la (2.30) otteniamo l'espressione dei due coefficienti A e B in funzione dei parametri p e f di efficienza di assorbimento:

$$A = \frac{1-p}{2-f-p}, \quad B = \frac{1-f}{2-f-p}. \quad (2.31)$$

Osserviamo che quest'espressione dei coefficienti A e B (tanto quanto l'equazione (2.30)) è ben posta: la condizione $f = 1$ di assorbimento completo nel futuro implica $A = 1$ e $B = 0$, ovvero definisce, ritornando alla (2.29), un'elettrodinamica di tipo ritardato (è questo il caso della teoria di Wheeler e Feynman), mentre la condizione $p = 1$ di assorbimento completo nel passato, che implica $A = 0$ e $B = 1$, dà origine ad un'elettrodinamica speculare di tipo avanzato (si veda la (2.28)).

La proposta di Hogarth è dunque legare la proprietà di completezza dell'assorbitore al modello cosmologico⁸ che descrive l'universo (che, ricordiamo, coincide in questa visione con l'assorbitore di Wheeler e Feynman); il tipo di elettrodinamica (ritardata o avanzata) a cui conduce un dato modello cosmologico diventa in quest'ottica un discriminante della sua validità: potranno essere infatti accettati solo modelli che portano ad un'elettrodinamica di tipo ritardato, compatibilmente con l'esperienza. Questa connessione si può stabilire associando per esempio i fenomeni di redshift e blueshift delle onde che viaggiano nello spazio all'azione dell'universo come assorbitore rispettivamente nel futuro e nel passato; così facendo si può mostrare come per esempio nel modello cosmologico di Einstein-de Sitter [13], che descrive un universo piatto, l'universo si comporta come assorbitore perfetto nel passato ma non nel futuro: in questo universo troverebbe quindi spazio solo un'elettrodinamica di tipo avanzato. Nei modelli cosmologici a stato stazionario⁹, teorizzati da F. Hoyle [14] e da H. Bondi e T. Gold [15], si ha invece la completezza dell'assorbitore nel futuro ma non nel passato, con risultato un'elettrodinamica di tipo ritardato. Ciò avviene poiché in questo tipo di modelli l'universo si comporta in maniera tale da mantenere costante (nello spazio e nel tempo) le sue proprietà, in particolare la sua densità di materia: la conseguenza dell'espansione di un un'universo di questo tipo è allora la costante creazione di materia affinché la suddetta densità resti costante; è quest'abbondanza di materia nel futuro ripetto al passato a rendere questo tipo di universo un assorbitore completo nel futuro e incompleto nel passato. Anche se le sue conseguenze sull'elettromagnetismo sono quelle corrette dal punto di vista sperimentale, il modello a stato stazionario, in cui l'universo non ha alcun tipo di origine ma esiste eternamente, sono stati via via abbandonati in favore di modelli che si basano invece sul Big Bang, soprattutto grazie alle osservazioni sperimentali sulla radiazione cosmica di fondo.

Commento sulle frecce temporali. La teoria di Wheeler e Feynman fornisce una rilettura della simmetria per inversione temporale dell'elettromagnetismo e della sua rottura spontanea da parte dei fenomeni osservati in natura, uno su tutti quello della radiazione, sempre emessa e mai assorbita dalle cariche elettriche per effetto del proprio moto. Anche se l'equivalenza fra elettrodinamica classica e teoria di azione-a-distanza sembra ricostituire questa simmetria delle equazioni di Maxwell nella soluzione fisica che si ottiene (il campo simmetrico (2.7)), essa è in realtà una riformulazione della stessa problematica: la teoria di azione-a-distanza è formalmente equivalente sia alla formulazione ritardata dell'elettromagnetismo (l'elettrodinamica classica) sia ad una sua parallela formulazione avanzata; a questo livello resta quindi insoluto il problema di determinare un'origine della scelta della formulazione ritardata diversa dalle considerazioni sulla causalità "invertita" di quella avanzata,

⁸L'analisi che segue di alcuni modelli cosmologici è puramente descrittiva; una più approfondita esula infatti dagli intenti di questo lavoro.

⁹Forti sostenitori di questi modelli cosmologici sono stati appunto F. Hoyle e J. V. Narlikar.

in quanto essa risulta comunque formalmente consistente (senza dimenticare l'inconsistenza dell'elettrodinamica classica, espressa dalla divergenza dell'equazione (1.36)).

La difficoltà di trovare la causa di questa rottura della simmetria per inversione temporale dell'elettromagnetismo internamente alle dinamiche dell'elettromagnetismo stesso è forse ciò che ha spinto diversi autori a rivolgersi verso altre branche della fisica. Abbiamo visto che nel loro articolo [1] Wheeler e Feynman sostengono che l'interazione tra una data carica e le particelle dell'assorbitore vada in questo senso interpretata secondo i principi della meccanica statistica: l'interazione di tipo ritardato è favorita rispetto a quella di tipo avanzato non perché quest'ultima sia di per sé non ammessa dalla natura, ma poiché la prima soddisfa a condizioni iniziali più probabili (similmente, sostengono i due autori, a quanto accade in termodinamica nel passaggio del calore dai corpi caldi a quelli freddi e viceversa); Wheeler e Feynman interpretano l'asimmetria temporale dei fenomeni elettromagnetici come una conseguenza della freccia temporale individuata dal Secondo Principio della termodinamica.

Legare la freccia temporale elettromagnetica a quella termodinamica come fatto da Wheeler e Feynman per risolvere il problema dell'unidirezionalità della radiazione può risultare in un certo senso una soluzione forzata, che nasconde il problema piuttosto che risolverlo, quasi fosse una "rinuncia" a dare una formulazione dell'elettromagnetismo che sia allo stesso tempo completa ed autosufficiente. L'altra possibile (e se vogliamo più accurata) interpretazione è quella di tipo cosmologico. Una volta esteso il ruolo di assorbitore all'universo stesso, la sua evoluzione spazio-temporale modifica nel tempo (a differenza di quanto assunto da Wheeler e Feynman in (2.19)) anche il suo carattere di assorbitore completo: il particolare modello cosmologico con cui si descrive l'universo determina quale sia la formulazione (ritardata o avanzata) dell'elettrodinamica risultante (si vedano i coefficienti (2.31)).

Anche se il ricondurre la freccia temporale elettromagnetica a quella termodinamica o a quella cosmologica ha il pregio di agire in senso unificante fra le varie branche della fisica, è comunque teoricamente insoddisfacente non riuscire a determinare una causa "elettromagnetica" della rottura della simmetria per inversione temporale dell'elettromagnetismo stesso.

Capitolo 3

Il modello di A. Galgani e L. Carati

L'ultimo capitolo di questo lavoro è dedicato all'analisi dell'articolo [16] di A. Galgani e L. Carati, in cui essi sviluppano un particolare modello di interazione radiazione-materia. I due autori considerano un reticolo infinito e monodimensionale di particelle cariche identiche come idealizzazione (lineare) di un solido e dimostrano l'esistenza di modi normali di oscillazione come soluzione dell'equazione della dinamica di questo sistema.

Questi modi normali di oscillazione sono tali per cui le cariche del reticolo, pur essendo in moto accelerato (oscillano attorno alle rispettive posizioni di equilibrio), non emettono energia per irraggiamento in virtù di un'esatta compensazione tra la forza di autointerazione percepita da ciascuna carica e la forza di interazione elettromagnetica (puramente di tipo ritardato¹) con le altre particelle del reticolo. È proprio questa compensazione (che gli autori chiamano "identità di Oseen") a creare il collegamento con la teoria di Wheeler e Feynman: il modello reticolare di Galgani e Carati può essere infatti interpretato come un esempio di sistema carica-assorbitore descritto nel Capitolo 2; la sua rilevanza sotto questo punto di vista sta nel fatto che la completezza dell'assorbitore, esclusivamente postulata da Wheeler e Feynman nella loro teoria, è in questo modello matematicamente verificata e si realizza come conseguenza della sola struttura del modello stesso.

La teoria dell'assorbitore di Wheeler e Feynman trova quindi, a sessant'anni circa dalla sua prima formulazione, nuovi spunti applicativi: il lavoro di Galgani e Carati fornisce infatti l'occasione per una sua rilettura, nonostante le varie criticità che l'accompagnano e che l'hanno sempre resa difficilmente accettabile in ogni suo aspetto.

3.1 Il modello

Iniziamo dunque l'analisi di questo modello. Galgani e Carati considerano un reticolo infinito e monodimensionale con passo a e composto da particelle di massa m e carica e , le cui posizioni indichiamo con $\vec{x}_j(t)$, dove $j \in \mathbb{Z}$; denotiamo poi con \vec{r}_j le posizioni di equilibrio delle particelle nel reticolo, di modulo pari a $r_j = ja$. Indichiamo con $\vec{q}_j(t)$ lo scostamento della j -esima particella rispetto alla relativa posizione di equilibrio, di modo che le posizioni \vec{x}_j si possono scrivere come

$$\vec{x}_j(t) = \vec{r}_j + \vec{q}_j(t). \quad (3.1)$$

¹Nel loro lavoro Galgani e Carati hanno ovviamente utilizzato la formulazione dell'elettromagnetismo dell'elettrodinamica classica.

Determiniamo per prima cosa l'equazione della dinamica per ciascuna particella del reticolo; trattandosi di cariche elettriche puntiformi, l'equazione da cui bisogna partire è quella di Lorentz-Dirac (1.57), che per la j -esima carica del reticolo si scrive, in forma relativistica, come

$$mw_j^\mu = e \sum_{k \neq j} F_{jk, \text{ret}}^{\mu\nu} u_{i,\nu} + \frac{e^2}{6\pi} \left(\frac{dw_j^\mu}{ds} + w_j^2 u_j^\mu \right), \quad (3.2)$$

dove con u_j^μ e w_j^μ indichiamo rispettivamente quadrivelocità e quadriaccelerazione della j -esima carica del reticolo, mentre con $F_{jk, \text{ret}}^{\mu\nu}$ si intende il campo ritardato generato dalla carica k , che corrisponde al campo di Liénard-Wiechert (1.30), valutato in \vec{x}_j .

Vogliamo ora trattare il sistema nella cosiddetta approssimazione di dipolo, che consiste nel linearizzare ciascuna equazione del moto rispetto a posizione, velocità ed accelerazione di ogni particella; dalla (3.1) si vede che questo corrisponde a linearizzare il sistema rispetto agli scostamenti \vec{q}_j e alle loro derivate $\dot{\vec{q}}_j$ e $\ddot{\vec{q}}_j$. Osserviamo innanzitutto che l'approssimazione di dipolo "comprende" in sé anche il limite non relativistico, poiché il fattore $\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)$ si riduce a 1 in quest'approssimazione. La forza di frenamento presente al membro di destra in (3.2) diventa allora

$$\frac{e^2}{6\pi} \left(\frac{dw_j^\mu}{ds} + w_j^2 u_j^\mu \right) \rightarrow \frac{e^2}{6\pi} \dot{\vec{x}}_j = m\tau \ddot{\vec{q}}_j, \quad (3.3)$$

con τ tempo caratteristico della forza di frenamento, come definito nel Capitolo 1 (si veda la (1.38)). Più complicato è invece il termine di Lorentz $e \sum_{k \neq j} F_{jk, \text{ret}}^{\mu\nu} u_{i,\nu}$. Per trattarlo correttamente scriviamo esplicitamente i campi elettrico e magnetico compresi nel campo di Liénard-Wiechert (1.30) generato dalla k -esima particella, che (ricordando la notazione di (1.30)) in funzione del parametro $m^\mu := L^\mu/R = (1, \vec{m})$ hanno la seguente espressione:

$$\begin{aligned} \vec{E}_{k,v} &= \frac{e}{4\pi R_k^2} \frac{\left(1 - \frac{v_k^2}{c^2}\right) \left(\vec{m}_k - \frac{\vec{v}_k}{c}\right)}{\left(1 - \frac{\vec{v}_k \cdot \vec{m}_k}{c}\right)^3}, & \vec{B}_{k,v} &= \vec{m}_k \times \vec{E}_{k,v}, \\ \vec{E}_{k,a} &= \frac{e}{4\pi R_k c^2} \frac{\vec{m}_k \times \left[\left(\vec{m}_k - \frac{\vec{v}_k}{c}\right) \times \vec{a}_k \right]}{\left(1 - \frac{\vec{v}_k \cdot \vec{m}_k}{c}\right)^3}, & \vec{B}_{k,a} &= \vec{m}_k \times \vec{E}_{k,a}, \end{aligned} \quad (3.4)$$

in cui \vec{v}_k e \vec{a}_k indicano rispettivamente velocità e accelerazione della particella k -esima, mentre $R_k = |\vec{x} - \vec{x}_k(t')|$, con t' che indica il tempo ritardato definito dall'equazione $t' = t - |\vec{x} - \vec{x}_k(t')|/c$. Si tratta quindi di valutare questi campi all'interno del modello di Galgani e Carati e in approssimazione di dipolo.

Osserviamo che a causa della simmetria rettilinea del reticolo in questione il campo elettrico di accelerazione (e di conseguenza quello magnetico) risulta nullo: vale infatti $\vec{m}_k \parallel \vec{v}_k \parallel \vec{a}_k$, di conseguenza i vari prodotti vettoriali si annullano; anche il campo magnetico di velocità (che sarebbe stato comunque trascurabile in approssimazione di dipolo poiché dà origine ad un termine quadratico nelle velocità all'interno della forza di Lorentz) risulta nullo per la stessa ragione. L'unico contributo non nullo è dato allora dal termine all'interno del

campo elettrico di velocità $\vec{E}_{k,v}$ che non viene moltiplicato per v_k^2/c^2 (fattore del second'ordine nelle velocità):

$$F_{k,\text{ret}}^{\mu\nu} \longrightarrow \vec{E}_k^{\text{ret}} = \sum_{k \neq j} \frac{e}{4\pi R_k^2} \frac{\left(\vec{m}_k - \frac{\vec{v}_k}{c}\right)}{\left(1 - \frac{\vec{v}_k \cdot \vec{m}_k}{c}\right)^3}. \quad (3.5)$$

È a questo campo che dobbiamo effettivamente applicare la linearizzazione dovuta all'approssimazione di dipolo. Per prima cosa espandiamo dunque il campo (3.5) al prim'ordine in \vec{v}_k :

$$\vec{E}_k^{\text{ret}} = \frac{e}{4\pi R_k^2} \vec{m}_k + \frac{e}{2\pi c R_k^2} \vec{v}_k + \mathcal{O}(|\vec{v}_k|^2). \quad (3.6)$$

Ricordando poi la forma (3.1) delle posizioni \vec{x}_k nel reticolo, possiamo espandere le quantità \vec{m}_k e R_k che compaiono in (3.6) al prim'ordine in \vec{q}_k ; a questo scopo introduciamo la quantità $\vec{X} := \vec{x} - \vec{r}_k$, attraverso la quale le \vec{m}_k e R_k si riscrivono come

$$\vec{m}_k = \frac{\vec{X} - \vec{q}_k(t')}{|\vec{X} - \vec{q}_k(t')|}, \quad R = |\vec{X} - \vec{q}_k(t')|. \quad (3.7)$$

Sotto questa riscrittura possiamo allora espandere il campo (3.6) al prim'ordine in \vec{q}_k e $\vec{v}_k = \dot{\vec{q}}_k$:

$$\vec{E}_k^{\text{ret}} = \frac{e}{4\pi} \frac{\vec{X} - \vec{q}_k(t')}{|\vec{X} - \vec{q}_k(t')|^3} + \frac{e}{2\pi c} \frac{\dot{\vec{q}}_k}{|\vec{X} - \vec{q}_k(t')|^2} \longrightarrow \frac{e}{4\pi} \frac{\vec{X}}{|\vec{X}|^3} + \frac{e}{2\pi} \left(\frac{\vec{q}_k(t')}{|\vec{X}|^3} + \frac{\dot{\vec{q}}_k(t')}{c|\vec{X}|^2} \right). \quad (3.8)$$

L'ultimo contributo da prendere in considerazione è quello legato al tempo ritardato, che dobbiamo valutare all'ordine zero in \vec{q}_k affinché il campo elettrico che stiamo espandendo rimanga al prim'ordine nelle posizioni e velocità, che sono appunto calcolate all'istante di tempo ritardato:

$$t' = t - \frac{|\vec{x} - \vec{x}_k(t')|}{c} = t - \frac{|\vec{X} - \vec{q}_k(t')|}{c} = t - \frac{|\vec{X}|}{c} + \mathcal{O}(\vec{q}_k). \quad (3.9)$$

Il campo generato dalla k -esima particella del reticolo al prim'ordine nelle posizioni e nelle velocità si riduce quindi a

$$\vec{E}_k^{\text{ret}}(t, \vec{x}) = \frac{e}{4\pi} \frac{\vec{X}}{|\vec{X}|^3} + \frac{e}{2\pi} \left(\frac{\vec{q}_k(t - |\vec{X}|/c)}{|\vec{X}|^3} + \frac{\dot{\vec{q}}_k(t - |\vec{X}|/c)}{c|\vec{X}|^2} \right). \quad (3.10)$$

Per scrivere l'equazione (3.2) della dinamica della j -esima particella del reticolo in approssimazione di dipolo non resta che valutare il campo (3.10) alla posizione di questa particella, che dalla (3.1) sappiamo essere $\vec{x} = \vec{x}_j(t) = \vec{r}_j + \vec{q}_j(t)$, e quindi sommare su tutte le particelle del reticolo diverse dalla j -esima. Posto $\vec{r}_{jk} := \vec{r}_j - \vec{r}_k$, il parametro \vec{X} valutato alla posizione $\vec{x}_j(t)$, che indichiamo con $\vec{X}_j(t)$, risulta

$$\vec{X}_j(t) = \vec{x}_j(t) - \vec{r}_k = \vec{q}_j(t) + \vec{r}_{jk}. \quad (3.11)$$

Analogamente a quanto osservato per la (3.9), l'approssimazione dipolare in cui stiamo lavorando impone che valutare i termini di (3.10) che contengono \vec{q}_k e $\dot{\vec{q}}_k$ (ovvero il secondo e il terzo) per $\vec{X} = \vec{X}_j(t)$ equivalga, dalla (3.11), a calcolarli per $\vec{X} = \vec{r}_{jk}$; maggiore attenzione va invece posta sul primo termine, che possiamo riscrivere come:

$$\frac{e}{4\pi} \frac{\vec{X}_j(t)}{|\vec{X}_j(t)|^3} = \frac{e}{4\pi} \frac{\vec{q}_j(t) + \vec{r}_{jk}}{|\vec{q}_j(t) + \vec{r}_{jk}|^3} = \frac{e}{4\pi} \left[\frac{\vec{r}_{jk}}{r_{jk}^3} - 2 \frac{\vec{q}_j(t)}{r_{jk}^3} \right] + \mathcal{O}(|\vec{q}_j|^2). \quad (3.12)$$

Sommando questo contributo su $k \neq j$ come richiesto dalla (3.2), il primo addendo, che equivale ad un campo coulombiano statico, si annulla per simmetria del reticolo, mentre il secondo addendo è il termine che descrive le oscillazioni delle particelle del reticolo: inserito in (3.2), la forza a cui dà luogo è infatti

$$e \sum_{k \neq j} \left[-\frac{e}{2\pi} \frac{\vec{q}_j(t)}{r_{jk}^3} \right] = - \left[\frac{e^2}{2\pi} \sum_{k \neq j} \frac{1}{r_{jk}^3} \right] \vec{q}_j(t) \equiv -m\omega_0^2 \vec{q}_j(t), \quad (3.13)$$

dove ω_0 rappresenta appunto la frequenza di oscillazione propria delle particelle del reticolo, uguale per tutte poiché nel caso di reticolo infinito ed equispaziato è indipendente da j . Osserviamo che questo termine appena derivato è di tipo non relativistico ed ha origine prettamente coulombiana; questo sarà anche il suo ruolo nell'equazione (3.37) che vedremo più avanti. Inserendo lo sviluppo appena visto del termine di Lorentz nell'equazione (3.2) (e omettendo la dipendenza esplicita dal tempo) quest'ultima diventa

$$m\ddot{\vec{q}}_j = e \sum_{k \neq j} \vec{E}_k^{\text{ret}}(t, \vec{x}_j) + m\tau \dot{\vec{q}}_j = \frac{e^2}{2\pi} \sum_{k \neq j} \left[\frac{\vec{q}_k(t - r_{jk}/c)}{r_{jk}^3} + \frac{1}{c} \frac{\dot{\vec{q}}_k(t - r_{jk}/c)}{r_{jk}^2} \right] - m\omega_0^2 \vec{q}_j + m\tau \dot{\vec{q}}_j; \quad (3.14)$$

l'equazione del moto della j -esima particella del reticolo in approssimazione di dipolo, ovvero l'equazione che caratterizza la dinamica del modello di Galgani e Carati, risulta dunque

$$m(\ddot{\vec{q}}_j + \omega_0^2 \vec{q}_j - \tau \dot{\vec{q}}_j) = \frac{e^2}{2\pi} \sum_{k \neq j} \left[\frac{\vec{q}_k(t - r_{jk}/c)}{r_{jk}^3} + \frac{1}{c} \frac{\dot{\vec{q}}_k(t - r_{jk}/c)}{r_{jk}^2} \right]. \quad (3.15)$$

Il membro di sinistra di quest'equazione ci dice che la dinamica di una tipica particella del reticolo è descritta da un moto di tipo oscillatorio (il termine $\omega_0^2 \vec{q}_j$) smorzato dalla forza di autointerazione $-m\tau \dot{\vec{q}}_j$; questa dinamica è determinata dal campo elettrico generato da tutte le altre particelle del reticolo, che in approssimazione di dipolo si riduce al membro di destra dell'equazione, il quale rappresenta dunque la forza netta agente sulla j -esima particella del reticolo e che d'ora in avanti indicheremo con $e \sum_{k \neq j} \vec{E}_{jk}^{\text{ret}}$.

3.2 Modi normali come soluzione dell'equazione del moto

Esaminiamo ora quello che è il cuore dell'articolo di Galgani e Carati, ovvero la dimostrazione dell'esistenza di modi normali di oscillazione come soluzione del sistema di equazioni (3.15) che descrivono la dinamica del modello reticolare che stiamo analizzando. Per fare ciò cominciamo (in linea con le convenzioni adottate da Galgani e Carati in [16]) abbandonando, essendo il reticolo considerato monodimensionale, la notazione vettoriale per semplicità di scrittura; riscriviamo quindi il sistema (3.15) in maniera più utile esplicitando il termine $r_{jk} = |r_j - r_k| = |j - k|a$ e ponendo $n := j - k$ ($n \in \mathbb{Z}$):

$$\ddot{q}_j + \omega_0^2 q_j - \tau \dot{q}_j = \frac{e^2}{2\pi m a^3} \sum_{n \neq 0} \left[\frac{q_{j+n}(t - |n|a/c)}{|n|^3} + \frac{a}{c} \frac{\dot{q}_{j+n}(t - |n|a/c)}{|n|^2} \right]. \quad (3.16)$$

Grazie alla linearità dell'equazione che stiamo studiando, ricercare modi normali come sua soluzione significa introdurre il seguente *ansatz*:

$$q_j(t) = u_j e^{i\omega t}, \quad (3.17)$$

in cui ω è a priori un parametro complesso e di cui alla fine si andrà a considerare la parte reale $\Re(q_j)$; inserito in (3.16) questo *ansatz* porge la seguente equazione nella variabile u_j :

$$(-\omega^2 + \omega_0^2 + i\tau\omega^3)u_j = \frac{e^2}{2\pi m a^3} \sum_{n \neq 0} u_{j+n} e^{-i|n|a\omega/c} \left(\frac{1}{|n|^3} + i \frac{a\omega}{c} \frac{1}{|n|^2} \right). \quad (3.18)$$

Data la forma della (3.18) possiamo osservare che se ω avesse parte immaginaria positiva la crescita dei termini della serie sarebbe di tipo esponenziale, dando luogo ad una serie divergente; se invece la parte immaginaria fosse negativa, dalla (3.17) si vede che la soluzione cercata sarebbe di tipo run-away: di conseguenza ω non può che essere reale. A questo punto introduciamo un secondo *ansatz*:

$$u_j = C e^{ikaj}, \quad (3.19)$$

che corrisponde a richiedere che il reticolo oscilli come una sorta di “onda materiale” con velocità di fase $v = \omega/k$, dove $k \in \left[-\frac{\pi}{a}, \frac{\pi}{a}\right)$ è quindi un parametro che ha il significato, in quest'ottica, di numero d'onda. Inserendo anche questo secondo *ansatz* nell'equazione del moto (3.18) essa assume la forma

$$-\omega^2 + \omega_0^2 + i\tau\omega^3 = \frac{e^2}{2\pi m a^3} [f(ka, a\omega/c) + ig(ka, a\omega/c)], \quad (3.20)$$

dove f e g sono due funzioni definite come

$$f(\alpha, \beta) = \sum_{n \neq 0} \left(\frac{\cos(n\alpha - |n|\beta)}{|n|^3} - \beta \frac{\sin(n\alpha - |n|\beta)}{|n|^2} \right), \quad (3.21)$$

$$g(\alpha, \beta) = \sum_{n \neq 0} \left(\frac{\sin(n\alpha - |n|\beta)}{|n|^3} + \beta \frac{\cos(n\alpha - |n|\beta)}{|n|^2} \right). \quad (3.22)$$

L'equazione (3.20) dà origine a due equazioni separate nelle due variabili ω e k , una per la parte reale e una per la parte immaginaria:

$$-\omega^2 + \omega_0^2 = \frac{e^2}{2\pi m a^3} f(ka, a\omega/c), \quad (3.23)$$

$$\tau\omega^3 = \frac{e^2}{2\pi m a^3} g(ka, a\omega/c), \quad (3.24)$$

che definiscono una correzione (ω) all'oscillazione propria del sistema (ω_0).

A priori la (3.23) e la (3.24) costituiscono un sistema di due equazioni nelle due incognite ω e k , il quale non permetterebbe dunque di definire una soluzione sottoforma di relazione di dispersione $\omega = \omega(k)$ (si otterrebbero due soluzioni separate, una per ω e una per k). Il nucleo concettuale di questa derivazione sta tuttavia nel fatto che la (3.24) risulta essere non tanto un'equazione quanto una vera e propria identità, che Galgani e Carati chiamano "identità di Oseen", scienziato che l'aveva proposta nel 1916. Quest'identità si ottiene osservando che la funzione $g(\alpha, \beta)$ in (3.22) può essere riscritta sfruttando il fatto che le componenti che la formano risultano essere l'espansione in serie di Fourier di funzioni polinomiali:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{n^3} &= \frac{x^3}{12} - \frac{\pi x^2}{4} + \frac{\pi^2 x}{6}, \\ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(nx)}{n^2} &= \frac{x^2}{4} - \frac{\pi x}{2} + \frac{\pi^2}{6}, \end{aligned} \quad (3.25)$$

dove $x \in [0, 2\pi)$. Nel modello in questione la funzione g ha per argomento le due variabili $\alpha = ka$ e $\beta = a\omega/c$; per poter applicare gli sviluppi di Fourier (3.25) l'argomento delle funzioni seno e coseno in (3.22) deve rientrare nel dominio di definizione $[0, 2\pi)$: studiando la casistica del rapporto reciproco tra $\alpha = ka$ e $\beta = a\omega/c$ si ottiene che le espansioni (3.25) si possono applicare direttamente nel caso $|\beta/\alpha| < 1$, mentre nel caso $|\beta/\alpha| > 1$ è necessario traslare opportunamente $\alpha + \beta$ o $\alpha - \beta$ (quantità che compaiono in (3.22)). Dato che ω e k sono parametri definiti un'onda ci aspettiamo che la sua velocità di fase rispetti la condizione relativistica $v/c < 1$, condizione che corrisponde a $|\beta/\alpha| < 1$. Concentriamoci dunque su questo caso e applichiamo gli sviluppi di Fourier (3.25):

$$\sum_{n \neq 0} \frac{\sin(n\alpha - |n|\beta)}{|n|^3} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n(\alpha - \beta))}{n^3} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n(\alpha + \beta))}{n^3} \stackrel{3.25}{=} -\frac{\beta\alpha^2}{2} - \frac{\beta^3}{6} + \pi\alpha\beta - \frac{\pi^2}{3}\beta, \quad (3.26)$$

$$\sum_{n \neq 0} \frac{\cos(n\alpha - |n|\beta)}{n^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(n(\alpha - \beta))}{n^2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(n(\alpha + \beta))}{n^2} \stackrel{3.25}{=} \frac{1}{2}(\alpha^2 + \beta^2) - \pi\alpha + \frac{\pi^2}{3}. \quad (3.27)$$

La funzione $g(\alpha, \beta)$ risulta dunque pari a

$$g(\alpha, \beta) = \sum_{n \neq 0} \left(\frac{\sin(n\alpha - |n|\beta)}{|n|^3} + \beta \frac{\cos(n\alpha - |n|\beta)}{|n|^2} \right) = \frac{\beta^3}{3}$$

e con questo risultato l'equazione (3.24) si rilegge appunto come la cosiddetta identità di Oseen:

$$\frac{e^2}{2\pi m a^3} g(ka, a\omega/c) = \frac{e^2}{2\pi m a^3} \left(\frac{a^3 \omega^3}{3c^3} \right) = \frac{e^2}{6\pi m c^3} \omega^3 = \tau \omega^3. \quad (3.28)$$

Questa identità è quindi una proprietà fondamentale del modello sviluppato da Galgani e Carati poiché essa è conseguenza della sola struttura del modello stesso e vedremo avrà un'importante conseguenza sul moto delle cariche del reticolo descritto da questi modi normali; essa permetterà inoltre di stabilire un interessante collegamento con la teoria di Wheeler e Feynman.

Determinata l'identità di Oseen (3.28), per verificare che modi normali di oscillazione della forma definita dai due *ansatz* (3.17) e (3.19) siano effettivamente soluzioni del sistema di equazioni (3.16) che descrive la dinamica di ciascuna particella del reticolo è necessario studiare la sola equazione (3.23), quella relativa alla parte reale del sistema (3.20), che fornisce dunque implicitamente, e in modo consistente, la relazione di dispersione $\omega(k)$; questa relazione non è però facile da trattare analiticamente, poiché a differenza di $g(\alpha, \beta)$ la funzione $f(\alpha, \beta)$ non è riscrivibile in termini di funzioni elementari. È però possibile effettuare uno studio di tipo numerico dell'equazione (3.23) troncando la serie definita da $f(\alpha, \beta)$ e cercandone le intersezioni con il paraboloide $z = -\omega^2 + \omega_0^2$ nel piano (k, ω) . Fissando il parametro ω_0 al valore tipico della frequenza di rotazione di un elettrone in moto circolare al raggio di Bohr a_0 nell'atomo di idrogeno e scegliendo il valore del passo del reticolo a nell'intervallo $[0.1 a_0, 5 a_0]$ si ottengono le figure di dispersione mostrate in **Figura 3.1**.

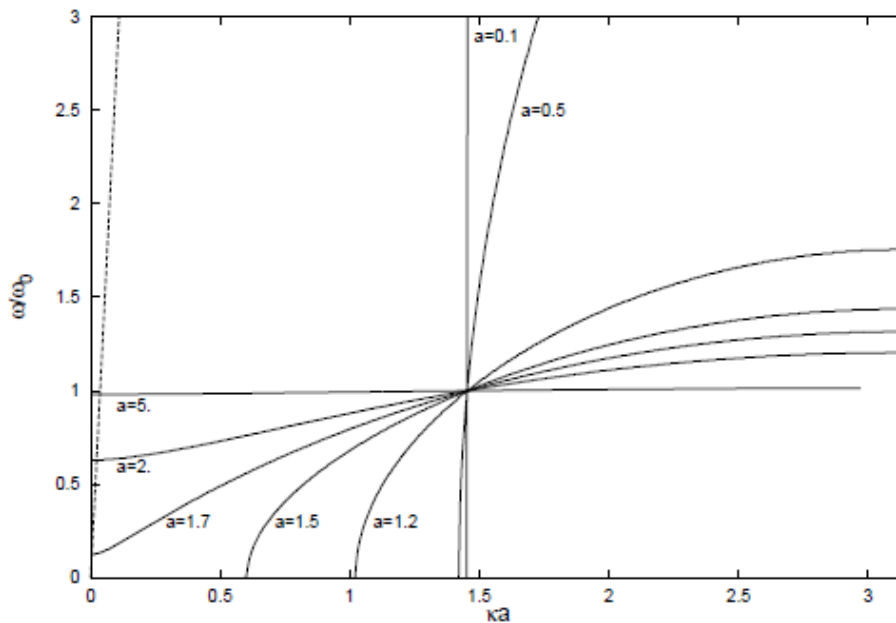


Figura 3.1: Curva di dispersione nel piano $(ka, \omega/\omega_0)$ per alcuni valori di a

L'analisi quantitativa dell'equazione (3.23) porta alla conclusione che grazie all'identità di Oseen (3.28) una relazione di dispersione tra ω e k di fatto esista: è quindi dimostrata l'esistenza di modi normali come soluzione dell'equazione della dinamica del modello reticolare di Galgani e Carati.

3.3 L'identità di Oseen

L'esistenza di modi normali di oscillazione come soluzione dell'equazione (3.15) della dinamica delle particelle del reticolo è strettamente legata a quella che Galgani e Carati chiamano identità di Oseen (3.28), che riveste quindi un ruolo centrale nel modello che stiamo analizzando.

Capiamo allora come l'identità di Oseen si rifletta nella dinamica delle particelle del reticolo. Sostituendo q_j nella forma descritta dai due *ansatz* (3.17) e (3.19) introdotti nella precedente derivazione al membro di destra dell'equazione di partenza (3.16) si ottiene che la forza netta agente sulla j -esima particella del reticolo vale

$$e \sum_{k \neq j} E_{jk}^{\text{ret}} = \frac{e^2}{2\pi a^3} [f(ka, a\omega/c) + ig(ka, a\omega/c)] q_j(t). \quad (3.29)$$

Applicando l'identità di Oseen (3.28) a quest'equazione si arriva al notevole risultato che nell'espressione della forza elettromagnetica subita da una generica particella del reticolo compare un termine che compensa esattamente il termine di reazione di radiazione:

$$i \frac{e^2}{2\pi a^3} g(ka, a\omega/c) q_j(t) = i \frac{e^2 \omega^3}{6\pi c^3} q_j(t) = -m\tau \dot{q}_j \quad (3.30)$$

e la (3.29) si riscrive quindi come

$$e \sum_{k \neq j} E_{jk}^{\text{ret}} = \frac{e^2}{2\pi a^3} f(ka, a\omega/c) q_j(t) - m\tau \dot{q}_j. \quad (3.31)$$

In virtù di questa cancellazione determinata dall'identità di Oseen (3.28) l'equazione della dinamica della j -esima particella del reticolo (3.15) si riscrive come la tipica equazione di un oscillatore armonico:

$$\ddot{q}_j + \left(\omega_0^2 - \frac{e^2}{2\pi m a^3} f(ka, a\omega/c) \right) q_j \equiv \ddot{q}_j + \tilde{\omega}^2 q_j = 0, \quad (3.32)$$

in cui la funzione f , che interviene nell'equazione per la parte reale (3.23), ha appunto il ruolo di correggere la frequenza di oscillazione propria ω_0 del reticolo. L'identità di Oseen (3.28) permette dunque, attraverso la compensazione del termine di reazione di radiazione (3.30) che essa determina, l'esistenza di modi normali di oscillazione, rappresentati in questo caso da un insieme di oscillatori armonici (le particelle del reticolo) di opportuna frequenza in cui viene separato il sistema.

Arrivati a questo punto ci si può chiedere se sia possibile generalizzare questa separazione della forza ritardata agente su ciascuna particella del reticolo in un termine di correzione alla frequenza propria ω_0 e in un termine di compensazione della forza di frenamento dovuta

all'emissione di radiazione. Similmente a quanto fatto da Dirac (si veda la sezione 1.2.1), introduciamo nella trattazione anche il campo avanzato, che, calato nel modello, ha espressione parallela a quello ritardato precedentemente derivato:

$$E_{jk}^{\text{adv}} = \frac{e}{2\pi} \left[\frac{q_k(t + r_{jk}/c)}{r_{jk}^3} - \frac{1}{c} \frac{\dot{q}_k(t + r_{jk}/c)}{r_{jk}^2} \right]. \quad (3.33)$$

Per introdurre formalmente questo campo nell'equazione del moto della j -esima particella del reticolo basta riscrivere il campo ritardato generato dalla k -esima particella come

$$E_{jk}^{\text{ret}} = \frac{E_{jk}^{\text{ret}} + E_{jk}^{\text{adv}}}{2} + \frac{E_{jk}^{\text{ret}} - E_{jk}^{\text{adv}}}{2}. \quad (3.34)$$

Se si va ora a ripercorrere la stessa derivazione della sezione 3.2 per la ricerca di modi normali di oscillazione come soluzione dell'equazione del moto (3.15) sostituendo l'espressione (3.34) al campo totale agente sulla j -esima particella del reticolo si ottiene (gli sviluppi in serie di Fourier (3.25) sono ancora applicabili: il campo avanzato introduce semplicemente un cambiamento di segno nell'argomento delle funzioni trigonometriche all'interno delle funzioni (3.21) e (3.22)) che il contributo alla dinamica del campo avanzato (3.33) è pari a

$$e \sum_{k \neq j} E_{jk}^{\text{adv}} = \frac{e^2}{2\pi a^3} f(ka, a\omega/c) q_j(t) + m\tau \ddot{q}_j(t). \quad (3.35)$$

Sfruttando le due equazioni (3.31) e (3.35) otteniamo allora una nuova versione dell'identità di Oseen:

$$e \sum_{k \neq j} \frac{E_{jk}^{\text{ret}} - E_{jk}^{\text{adv}}}{2} = -m\tau \dot{q}_j(t), \quad (3.36)$$

grazie alla quale possiamo concludere (sfruttando la linearità delle equazioni del moto) che per una qualsiasi combinazione di modi normali soluzioni dell'equazione (3.15) che descrive la dinamica del reticolo la forza di autointerazione percepita da ciascuna particella è compensata in modo esatto dalla semidifferenza dei campi ritardato e avanzato generati da tutte le altre particelle; l'equazione del moto netta che segue da questa cancellazione del termine di reazione di radiazione risulta quindi

$$m(\ddot{q}_j + \omega_0^2 q_j) = e \sum_{k \neq j} \frac{E_{jk}^{\text{ret}} + E_{jk}^{\text{adv}}}{2}. \quad (3.37)$$

3.4 Il collegamento con la teoria di Wheeler e Feynman

L'identità di Oseen (3.28) permette dunque non soltanto la cancellazione del termine di reazione di radiazione nel caso della soluzione del sistema (3.15) della forma di modi normali di oscillazione, ma anche di riformulare il problema in una forma equivalente (3.37) in cui non compare la forza di autointerazione delle cariche $m\tau \ddot{q}_j$ e il campo agente sulla j -esima particella è dato dalla semisomma dei campi ritardato e avanzato delle altre particelle del

reticolo: il sistema può cioè essere ripensato in termini della teoria di azione-a-distanza dell'elettromagnetismo che abbiamo introdotto nel Capitolo 2.

Se si guarda all'identità di Oseen e ai modi normali di oscillazione come particolare proprietà del modello considerato, la possibilità di formulare lo stesso problema in termini della teoria di azione-a-distanza potrebbe sembrare un fatto fortuito, una caratteristica sì interessante del sistema ma fine a sé stessa. È evidente però che questa equivalenza assume tutt'altre caratteristiche se si ripensa al lavoro di Wheeler e Feynman e alla loro teoria dell'assorbitore. Quanto abbiamo visto derivare dall'identità di Oseen (3.28), cioè l'equazione (3.37), è infatti l'equivalenza, anche se per determinate soluzioni di questo particolare sistema, delle due formulazioni dell'elettromagnetismo dell'elettrodinamica classica e della teoria di azione-a-distanza, equivalenza che era proprio il risultato principale (seppur non dimostrato) della teoria di Wheeler e Feynman. Il modello di Galgani e Carati è in questo senso un ottimo esempio di sistema carica-assorbitore: ciascuna particella del reticolo può essere pensata come posta all'interno di un sistema assorbente, formato da tutte le altre cariche del reticolo, che reagisce al suo moto secondo il meccanismo di Wheeler e Feynman, il quale determina la validità dell'equazione (3.37).

Fermandosi a questa analogia, il collegamento tra il modello di Galgani e Carati e la teoria di Wheeler e Feynman ha più che altro la forma di un parallelo formale fra le due teorie, in cui il reticolo che abbiamo finora studiato rappresenta semplicemente una riformulazione del primo esempio di sistema-carica assorbitore che Wheeler e Feynman presentano in [1] e che qui abbiamo analizzato nella sezione 2.2.1; approfondendo però il ruolo che l'identità di Oseen gioca nella dinamica del modello di Galgani e Carati si scopre che essa permette in realtà di stabilire una connessione più profonda fra le due teorie. Riprendendo, come già fatto in (3.34), quanto fatto da Dirac in [3], è possibile valutare la semidifferenza fra campo ritardato e avanzato della particella j -esima alla posizione di equilibrio r_j della j -esima particella stessa (campi che indichiamo, seguendo la notazione di (3.15) e (3.33), con E_{jj}^{ret} e E_{jj}^{adv}): la divergenza che in prima istanza sembra interessare questa quantità risulta anche in questo caso eliminabile e nel caso dei modi normali di oscillazione essa converge alla quantità

$$\frac{E_{jj}^{\text{ret}} - E_{jj}^{\text{adv}}}{2} = m\tau\ddot{q}_j, \quad (3.38)$$

che non è nient'altro che il risultato ottenuto da Dirac (1.46) in versione non relativistica. Di conseguenza possiamo riscrivere nuovamente l'identità di Oseen (3.36) in una forma questa volta illuminante:

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{E_{jk}^{\text{ret}} - E_{jk}^{\text{adv}}}{2} = 0. \quad (3.39)$$

Così scritta l'identità di Oseen è infatti molto simile all'espressione (2.25) della proprietà di completezza dell'assorbitore, con la differenza che se quest'ultima era assunta essere valida in ogni punto dello spazio, quella di Galgani e Carati vale nelle posizioni di equilibrio delle particelle nel reticolo: l'identità di Oseen (3.39) è quindi in questo senso una versione più debole della condizione di completo assorbimento (2.25) di Wheeler e Feynman. La principale differenza fra le due identità è però un'altra: se la proprietà di completo assorbimento è postulata da Wheeler e Feynman nella loro derivazione del funzionamento generale del meccanismo dell'assorbitore e della conseguente equivalenza tra elettrodinamica classica e

teoria di azione-a-distanza (sezione 2.2.2), l'identità di Oseen è invece stata da Galgani e Carati *dimostrata* essere valida per il modello da loro considerato come conseguenza della sola struttura del modello stesso.

Obiettivo di Wheeler e Feynman era trovare una formulazione consistente e *universale* dell'elettromagnetismo; dovendo di conseguenza essere la loro trattazione il più generale possibile, essi non potevano far altro che postulare la completezza dell'assorbitore (2.25) in tutto lo spazio, non potendo nè dimostrare la validità generale di questa proprietà nè limitare la propria trattazione ai soli sistemi in cui è possibile verificarla. Se però la formulazione dell'elettromagnetismo che deriva da quest'assunzione è di difficile accettazione come teoria universale (a causa delle varie criticità discusse nel precedente capitolo), il modello di Galgani e Carati suggerisce, grazie alle sue particolari proprietà, l'idea che il meccanismo dell'assorbitore potrebbe essere un processo fisico significativo non tanto a livello generale quanto più nei sistemi "chiusi" di cariche elettriche, come appunto il reticolo infinito e monodimensionale che abbiamo analizzato in questo capitolo.

Chiedere che quella dell'assorbitore di Wheeler e Feynman sia una teoria generale dell'elettromagnetismo va probabilmente oltre le possibilità della teoria stessa, ma nulla vieta che le ipotesi necessarie al funzionamento del meccanismo dell'assorbitore siano verificate in particolari sistemi; come detto, la proprietà fondamentale (2.25) della completezza dell'assorbitore non è infatti semplicemente assunta da Galgani e Carati nel proprio modello, essa è proprio *dimostrata* (anche se sotto particolari condizioni). Tanto quanto l'identità di Oseen (3.39) rappresenta una forma debole ma verificata della completezza (2.25) dell'assorbitore di Wheeler e Feynman, ridimensionare le sue applicazioni potrebbe dare alla teoria di Wheeler e Feynman maggior significatività e concretezza fisica.

Il meccanismo di Wheeler e Feynman rappresenterebbe infatti in questo senso una possibile spiegazione *classica* della stabilità dei corpi solidi. Le particelle che formano i diversi corpi materiali sono, all'interno della struttura atomico-molecolare, in moto accelerato (dovuto alle reciproche forze elettromagnetiche), tuttavia non si ha alcuna emissione di radiazione elettromagnetica da parte loro, la quale, se si verificasse, renderebbe del tutto instabili i corpi materiali stessi poiché priverebbe progressivamente ogni costituente della propria energia.

Prendendo come riferimento il modello di Galgani e Carati, si potrebbe pensare di schematizzare la struttura dei corpi solidi come un insieme di reticoli di particelle cariche (operazione peraltro tipica della fisica della materia) e cercare, come suggeriscono gli stessi Galgani e Carati, di estendere l'identità di Oseen (3.39) a categorie sempre più ampie di strutture materiali. La stabilità dei corpi solidi sarebbe dunque causata, in questa interpretazione fisica esclusivamente classica, dall'identità di Oseen (3.39), che come abbiamo visto ha il ruolo cruciale di determinare l'esatta compensazione del termine di reazione di radiazione nell'equazione della dinamica di ciascuna particella delle strutture reticolari della forma modellizzata da Galgani e Carati.

Conclusioni

Costruire una teoria completa e consistente dell'elettromagnetismo è stato uno dei grandi problemi della fisica classica: conciliare proprietà teoriche e risultati sperimentali è risultato essere, a più riprese, un problema non di poco conto durante lo sviluppo delle diverse teorie elettromagnetiche. Il nodo concettuale che più di tutti evidenzia questa difficoltà è quello legato alla simmetria per inversione temporale: mentre l'azione (2.2) dell'elettromagnetismo è perfettamente invariante sotto questa simmetria, la natura sembra invece violarla spontaneamente poiché si ha evidenza sperimentale della sola soluzione ritardata (1.19) delle equazioni di Maxwell (1.1). D'altro canto, anche la soluzione temporalmente simmetrica porta con sé ambiguità importanti: essa coinvolge infatti direttamente la soluzione avanzata (1.20) delle equazioni di Maxwell, che come abbiamo visto nel Capitolo 1 comporta una ridefinizione dei concetti di causalità e ordinamento temporale in quanto introduce concretamente la possibilità per una particella carica di determinare un campo elettromagnetico che si propaga (almeno formalmente) all'indietro nel tempo.

Di fronte al problema della simmetria temporale l'elettromagnetismo si separa in due diverse formulazioni: la teoria di azione-a-distanza, sviluppata da Schwarzschild, Tetrode e Fokker, che sceglie come soluzione delle equazioni di Maxwell quella temporalmente simmetrica, e l'elettrodinamica classica, che sceglie invece la soluzione esclusivamente ritardata in favore della causalità ordinaria ma a discapito della simmetria per *time-reversal*. Mentre la teoria di azione-a-distanza non ha avuto grandi sviluppi, è l'elettrodinamica classica la formulazione che storicamente si è imposta come teoria classica dell'elettromagnetismo, soprattutto grazie al suo accordo con l'esperienza. Tuttavia quest'accordo si "incrina" nel caso del fenomeno della reazione di radiazione. Tentare di descrivere la forza di frenamento percepito da una carica in moto accelerato per effetto della sua interazione con il proprio campo conduce irrimediabilmente alla divergenza dell'equazione di Lorentz (1.36): questa divergenza è conseguenza dell'applicazione diretta delle equazioni fondamentali dell'elettrodinamica classica (nella sua formulazione originale), ovvero equazioni di Maxwell per i campi e equazione di Lorentz per la dinamica, pertanto questa teoria risulta essere di fatto inconsistente.

In realtà quest'inconsistenza è appunto soltanto formale poiché il regime in cui si manifesta è di dominio quantistico piuttosto che classico. Mentre il tempo caratteristico della forza di frenamento è, come abbiamo visto, pari a $\tau = \frac{e^2}{6\pi mc^3} \simeq 0.6 \cdot 10^{-23} s$, la meccanica quantistica diventa non trascurabile a scale temporali pari a 137τ : l'applicazione dell'elettrodinamica classica risulta di conseguenza essere impropria e gli effetti dovuti alla particolare dinamica descritta dall'equazione di Lorentz-Dirac (1.37) (come ad esempio il fenomeno della preaccelerazione) non sono di fatto osservabili poiché vengono schermati da effetti di natura quantistica, che, ribadiamo, intervengono ben prima di quelli legati all'autointerazione delle cariche.

Ragionando però esclusivamente in termini classici (come fatto da Wheeler e Feynman), la reazione di radiazione rappresenta un fenomeno problematico: l'equazione di Lorentz-Dirac

(1.37) non è derivabile dall'equazione di Lorentz standard (1.36), è necessario *postularla* in sostituzione di quest'ultima, che essendo, come detto, divergente risulta priva di significato fisico. Il fallimento dell'elettrodinamica classica nella descrizione del fenomeno della radiazione è indice della necessità di una teoria più completa dell'elettromagnetismo. È questo l'obiettivo che Wheeler e Feynman si pongono con la formulazione della loro teoria dell'assorbitore: costruire una nuova teoria (classica) dell'elettromagnetismo che sia in grado di descrivere in maniera ben definita la reazione di radiazione. La teoria di Wheeler e Feynman prevede che una singola carica sia sempre pensata all'interno di quello che i due autori chiamano *assorbitore*, con il quale essa interagisce e che di fatto non è altro che il resto delle cariche presenti nel sistema considerato. Riportando all'attivo la soluzione simmetrica della teoria di azione-a-distanza, Wheeler e Feynman descrivono i fenomeni elettromagnetici per mezzo del particolare meccanismo che si instaura in conseguenza dell'interazione delle singole cariche con l'assorbitore: in quest'ottica la reazione di radiazione non è più dovuta all'autointerazione delle cariche con il proprio campo, ma è determinata dalla reazione delle cariche dell'assorbitore al moto della carica considerata. Sotto l'ipotesi di completezza dell'assorbitore (equazione (2.25)), il meccanismo di Wheeler e Feynman è anche in grado di determinare la totale equivalenza fra le due diverse formulazioni dell'elettromagnetismo, elettrodinamica classica e teoria di azione-a-distanza, le cui differenze concettuali sono unificate proprio grazie alla nuova interpretazione della radiazione come conseguenza dell'interazione carica-assorbitore.

La teoria dell'assorbitore di Wheeler e Feynman, nonostante l'apparente successo nella descrizione della radiazione (che riesce a includere anche una "naturale" derivazione dell'equazione di Lorentz-Dirac (1.37) come espressione della forza di frenamento), è tuttavia caratterizzata da diversi aspetti dubbi, i quali hanno fatto sì che non venisse mai ritenuta una vera e propria teoria dell'elettromagnetismo. La critica principale che gli viene mossa riguarda la proprietà di completezza dell'assorbitore. Affinché il meccanismo di Wheeler e Feynman abbia validità universale, ovvero che sia tale da descrivere la totalità dei fenomeni elettromagnetici, deve appunto valere la proprietà di completo assorbimento della radiazione che interessa il sistema; questa condizione viene però solamente supposta dai due autori nella loro trattazione ma non viene mai dimostrata essere una proprietà *reale* di ciascun sistema carica-assorbitore: l'applicabilità di tale meccanismo, e quindi della stessa teoria di Wheeler e Feynman, è dunque tutt'altro che ovvia.

Una seconda criticità è legata ancora una volta alla simmetria dell'elettromagnetismo per inversione temporale. La consistenza dei campi con questa simmetria delle equazioni da cui sono descritti, che in elettrodinamica classica era stata apertamente violata, sembra ristabilirsi nella teoria di Wheeler e Feynman grazie all'equivalenza fra elettrodinamica e teoria di azione-a-distanza: nell'ottica del meccanismo dell'assorbitore, l'osservazione del solo campo ritardato non è una caratteristica fondamentale della natura ma una conseguenza dell'interazione carica-assorbitore (si veda l'equazione (2.27)). Tuttavia anche in questo caso la condizione di completezza dell'assorbitore risulta caratterizzata da un'ambiguità di fondo: nella sua forma (2.25) essa può a priori determinare l'equivalenza della teoria di azione-a-distanza sia con l'elettrodinamica classica sia con una sua formulazione parallela basata sulla soluzione avanzata anziché su quella ritardata (equazione (2.28)). Il problema della violazione della simmetria per inversione temporale si ripresenta quindi anche nella teoria di Wheeler e Feynman, soltanto in una veste diversa.

Se risultano evidenti i limiti della teoria dell'assorbitore di Wheeler e Feynman come teoria universale dell'elettromagnetismo, l'analisi del modello reticolare di Galgani e Carati che è stata svolta nel terzo capitolo di questo lavoro ci porta ad affermare contestualmente che questa teoria potrebbe trovare nuovi sviluppi interessanti se pensata non in senso universale

ma calata di volta in volta in particolari sistemi di cariche elettriche. La caratteristica peculiare del modello di Galgani e Carati è che nel caso dei modi normali di oscillazione delle cariche del reticolo vale una condizione analoga alla proprietà di completo assorbimento (2.19), chiamata in questo contesto identità di Oseen (3.39): questa proprietà non viene postulata (come fatto da Wheeler e Feynman) da Galgani e Carati, essa è dai due autori proprio dimostrata. Se pensiamo il reticolo in questione come un sistema carica-assorbitore del tipo descritto da Wheeler e Feynman, il particolare fenomeno della cancellazione del termine di reazione di radiazione nell'equazione della dinamica di ciascuna particella del reticolo (permessa dall'identità di Oseen (3.28)) può essere interpretato come conseguenza del meccanismo dell'assorbitore, che si potrebbe pensare di applicare essendo verificata per questo sistema la proprietà (2.25) di completezza. Anche se resta dubbia la sua effettiva applicabilità, il meccanismo dell'assorbitore introdotto da Wheeler e Feynman nella loro teoria dell'elettromagnetismo potrebbe essere interpretato, in una visione ottimista, come una possibile spiegazione classica della stabilità dei corpi solidi.

Bibliografia

- [1] J. A. Wheeler & R. Feynman, *Interaction with the Absorber as the Mechanism of Radiation*, Rev. Mod. Phys. **17**, 157, 1945.
- [2] J. A. Wheeler & R. Feynman, *Classical Electrodynamics in Terms of Direct Interparticle Action*, Rev. Mod. Phys. **21**, 425, 1949.
- [3] P. A. M. Dirac, *Classical theory of radiating electrons*, Proc. R. Soc. Lond. **167**, 148, 1938.
- [4] K. Schwarzschild, *Zur Elektrodynamik. I. Zwei formen des princips der action in der elektronentheorie* Göttinger Nachrichten **2**, 126, 1903.
- [5] K. Schwarzschild, *Zur Elektrodynamik. II. die elementare elektrodynamische Kraft* Göttinger Nachrichten **2**, 132, 1903.
- [6] H. Tetrode, *Über den Wirkungszusammenhang der Welt. Eine Erweiterung der klassischen Dynamik*, Zeits. f. Physik **10**, 317, 1922.
- [7] A. D. Fokker, *Ein invarianter Variationssatz für die Bewegung mehrerer elektrischer Massenteilchen*, Zeits. f. Physik **58**, 386, 1929.
- [8] A. D. Fokker, *Wederkeerigheid in de werking van geladen deeltjes*, Physica **9**, 33, 1929.
- [9] A. D. Fokker, *Théorie relativiste de l'interaction de deux particules chargees*, Physica **12**, 145, 1932.
- [10] F. Hoyle & J. V. Narlikar, *Cosmology and action-at-a-distance electrodynamics*, Rev. Mod. Phys. **67**, 113, 1995.
- [11] J. V. Narlikar, *Action at a Distance and Cosmology: a Historical Perspective*, Annu. Rev. Astron. Astrophys. **41**, 169, 2003.
- [12] J. E. Hogarth, *Cosmological considerations of the absorber theory of radiation*, Proc. R. Soc. Lond. **267**, 365, 1962.
- [13] A. Einstein & W. de Sitter, *On the Relation between the Expansion and the Mean Density of the Universe*, Proc. Natl. Acad. Sci. **18**, 21, 1932.
- [14] F. Hoyle, *A new model for the expanding universe*, Mont. Not. Roy. Astr. Soc. **108**, 372, 1948.
- [15] H. Bondi & T. Gold, *The Steady-State Theory of the Expanding Universe*, Mon. Not. R. Astron. Soc. **108**, 252, 1948.
- [16] A. Carati & L. Galgani, *Nonradiating normal modes in a classical many-body model of matter-radiation interaction*, Nuovo Cim. **118 B**, 839, 2003.

- [17] K. Lechner, *Classical Electrodynamics: A Modern Perspective*, Springer International Publishing, 2018.
- [18] H. D. Zeh, *The physical basis of the direction of time*, Springer International Publishing, 2010.