



UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

Dipartimento di Fisica e Astronomia “Galileo Galilei”

Corso di Laurea in Fisica

Tesi di Laurea

Condensazione di Bose-Einstein sulla superficie di una sfera

Relatore

Prof. Luca Salasnich

Laureando

Martina Russo

Anno Accademico 2018/2019

Sommario

L'oggetto di studio della tesi è costituito da un sistema di particelle bosoniche non interagenti vincolate a muoversi sulla superficie di una sfera. In particolare, dopo una fase iniziale di studio delle proprietà generali del sistema, utilizzando il formalismo della meccanica statistica quantistica, si calcolerà la temperatura critica di condensazione di Bose-Einstein e la frazione condensata di un gas di bosoni sotto l'assunzione di potenziale chimico nullo. Solo nel limite del raggio della sfera che tende ad infinito, corrispondente ad un sistema bidimensionale piatto, ci si aspetta di ottenere una temperatura critica di condensazione uguale a zero, in accordo con il teorema di Mermin-Wagner. Si confronteranno i risultati analitici ottenuti utilizzando l'approssimazione semi-classica con quelli numerici ottenuti senza tale approssimazione. Successivamente, lavorando in approssimazione semi-classica, si studierà lo stesso sistema eliminando l'ipotesi di potenziale chimico nullo; infine le due configurazioni saranno messe a confronto per studiare l'accordo tra il caso reale e quello approssimato e ricavare quindi delle condizioni sulle variabili fisiche del sistema in esame sotto le quali l'approssimazione utilizzata e i risultati ottenuti nella prima sezione risultino giustificati.

Successivamente si tenterà di estendere lo studio ad un sistema analogo in cui si sostituisce la superficie sferica con quella di un ellissoide, cercando di ricavare una formula di quantizzazione per l'energia.

Indice

1	Introduzione	1
2	Gas di Bose-Einstein ideale	3
2.1	Ensemble grancanonico	3
2.1.1	Potenziale chimico	4
2.2	Condensazione	4
2.2.1	Condensazione in 2D	5
3	BEC sulla superficie di una sfera	7
3.1	Il sistema	7
3.1.1	Formula di quantizzazione dell'energia sulla superficie di una sfera	7
3.2	Potenziale chimico nullo	8
3.2.1	Risultati in approssimazione semiclassica	8
3.2.2	Risultati da calcolo numerico	10
3.3	Potenziale chimico non nullo	11
3.3.1	Risultati da approssimazione semiclassica	12
3.4	Confronto tra $\mu = 0$ e $\mu \neq 0$	13
4	BEC sulla superficie di un ellissoide	17
4.1	Quantizzazione dell'energia	17
4.2	Equazione di Schrödinger in coordinate ellittiche	18
4.3	Approssimazione semiclassica o WKB	20
4.3.1	Quantizzazione di Sommerfeld	21
5	Conclusioni	25
	Bibliografia	27

Capitolo 1

Introduzione

Il fenomeno della condensazione di Bose-Einstein (BEC) fece la sua comparsa nel 1925, come predizione teorica formulata da Einstein, il quale sviluppò la teoria a partire da un articolo del fisico S.N. Bose. Bose aveva proposto un metodo di derivazione della formula di radiazione del corpo nero di Planck basato su considerazioni di tipo statistico che Einstein estese dai fotoni, quanti di luce introdotti da Planck nel 1900 e utilizzati da Bose per trattare le onde elettromagnetiche come gas di particelle identiche, alle particelle massive di un gas ideale. Ne derivò la formulazione della statistica di Bose-Einstein così come è conosciuta oggi, insieme alla predizione del fenomeno della BEC. I bosoni di un dato sistema possono occupare il medesimo stato, ossia essere descritti dal medesimo insieme di numeri quantici; proprio questo si verifica quando un gas bosonico viene raffreddato al di sotto di una temperatura critica, quando una frazione finita del numero totale di particelle condensa occupando il medesimo stato di energia minima. Se si trattano le particelle come pacchetti d'onda con una determinata lunghezza d'onda dipendente dalla temperatura, la lunghezza d'onda termica di de Broglie, il punto di transizione equivale al raggiungimento di una lunghezza d'onda dello stesso ordine della separazione interatomica, ossia alla sovrapposizione dei pacchetti e alla formazione di un condensato di particelle indistinguibili tra loro.

Da un punto di vista sperimentale la storia dei condensati di Bose-Einstein è strettamente collegata alla sfida tecnica del raggiungimento di temperature prossime allo zero assoluto e della realizzazione di sistemi di confinamento. La soluzione ottimale fu raggiunta con la tecnica del laser-cooling basata sullo scattering tra particelle del gas e fotoni, i quali sottraggono più energia di quanta sia assorbita dai bosoni, così da raffreddarli, in aggiunta ad evaporazione atomica forzata e confinamento in trappole ottiche e magnetiche.

Così nel 1995 Cornell e Wieman, Premi Nobel per la fisica nel 2001 insieme a Ketterle, osservarono i primi condensati di ^{87}Rb nel laboratorio JILA [1], seguiti poco dopo da esperimenti al MIT [2] con ^{23}Na e presso la Rice University con ^7Li . Tali esperimenti raggiunsero densità di particelle tra 10^{14} e 10^{15}cm^{-3} e temperature tra 0.5 e $2\ \mu\text{K}$. L'interesse legato alla BEC si estese subito ad altri effetti quantistici macroscopici, quali la superconduttività e superfluidità, che possono essere descritti a partire dagli stessi principi, ma lo studio teorico del fenomeno trova ampio riscontro anche in esperimenti molto recenti.

Il 23 gennaio 2017 l'esperimento MAIUS 1 (Matter-Wave Interferometry in Microgravity) ha prodotto per la prima volta un condensato di atomi diluiti e ultrafreddi di ^{87}Rb a bordo di un razzo in condizioni di microgravità realizzate durante la fase di lancio (circa

sei minuti) [6]. Grazie ai tempi estesi di permanenza del condensato, che in presenza del campo gravitazionale terrestre sono difficilmente osservabili, questi sistemi costituiscono uno strumento di elevata sensibilità e precisione per misure interferometriche [3], ma anche un utile oggetto di studio per testare ipotesi di relatività generale, teoria quantistica, meccanica statistica e fisica a molti corpi dei sistemi fortemente correlati in materia condensata.

Anche la NASA ha realizzato a bordo dell'ISS (Stazione Spaziale Internazionale) un sistema (CAL: Cold Atom Lab [4], [5]) per creare sistemi di atomi ultrafreddi (^{87}Rb , ^{39}K e ^{40}K) e investigare particolari geometrie di confinamento di esatta simmetria sferica, dette "bubble trap", non ancora esplorate a causa delle limitazioni imposte dalla forza gravitazionale. Si tratta di trappole a guscio sferico o ellittico, che confinano i gas quantistici su una superficie bidimensionale, topologicamente controllata [8]. Queste configurazioni possono fornire informazioni su come la meccanica quantistica funzioni in geometrie curve (come una sfera appunto), attraverso lo studio di onde sonore su tali "quantum bubbles". Inoltre gli esperimenti a bordo dell'ISS possono essere un supporto per la comprensione della dinamica dei vortici nei condensati e nella definizione dei limiti delle dimensioni dei condensati di Bose-Einstein entro i quali questi preservano le loro peculiari proprietà quantistiche [7].

In questo elaborato si studierà un sistema di particelle bosoniche confinate su una superficie 2D di una sfera per ricavare l'andamento della frazione di condensato in funzione della temperatura e un'espressione della temperatura critica. Saranno confrontati i metodi di approssimazione semi-classica con quelli di calcolo numerico esatto, così come le configurazioni a potenziale chimico nullo o non nullo. I risultati saranno poi confrontati tra di loro in relazione anche ai parametri fisici caratteristici del sistema e controllabili, come numero totale di particelle e dimensione caratteristica della trappola.

Si cercherà di applicare la stessa analisi ad un sistema costituito da particelle vincolate a muoversi sulla superficie di un ellissoide; tuttavia la maggiore complessità nella descrizione del sistema, privo di simmetria sferica, non permette di ricavare una formula analitica per la quantizzazione dell'energia; dunque si cercherà di impostare un metodo di analisi del sistema in questione, senza però ottenere formule compiute come sarà fatto invece nel caso di una sfera.

Capitolo 2

Gas di Bose-Einstein ideale

In meccanica quantistica si definiscono bosoni le particelle, a spin intero, che obbediscono alla statistica di Bose-Einstein (si distinguono dai fermioni che hanno invece spin semi-intero, obbediscono alla statistica di Fermi-Dirac e al principio di esclusione di Pauli), ossia tali che in un sistema di particelle bosoniche il numero medio di occupazione dello stato di particella singola di energia ϵ segue la distribuzione di Bose-Einstein

$$f_{BE}(\epsilon) = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon-\mu)} - 1}, \quad (2.1)$$

dove $\beta = \frac{1}{k_B T}$, k_B è la costante di Boltzmann e μ è il potenziale chimico del gas. In questo capitolo saranno richiamati i passaggi fondamentali della descrizione del gas bosonico ideale di particelle di massa m sfruttando le nozioni di meccanica statistica caratteristiche dell'ensemble grancanonico [11].

2.1 Ensemble grancanonico

L'ensemble grancanonico è l'ensemble caratteristico della descrizione di sistemi termodinamici nei quali il numero totale di particelle N e l'energia totale del sistema E non vengono fissati, ma sono liberi di fluttuare, mentre la temperatura T è mantenuta costante per contatto diffusivo con una sorgente, che costituisce quindi un serbatoio di particelle ed energia. La funzione di partizione grancanonica è definita come

$$Z(\beta, \mu) = \sum_{N'=0}^{\infty} e^{\beta\mu N'} Q_{N'}(\beta), \quad (2.2)$$

con $Q_{N'} = \sum_k e^{-\beta\epsilon_k}$ funzione di partizione canonica di un sistema di N' particelle, dove la somma è estesa a tutti gli autovalori di energia ϵ_k .

Si definisce la fugacità come $z = e^{\beta\mu}$; nel caso dei bosoni l'equazione (2.2) fornisce un limite per la convergenza sulla fugacità, che si trova dover essere $z \leq 1$, che si traduce nella condizione sul potenziale chimico $\mu \leq 0$. Nel caso dei bosoni dunque la (2.2) diventa

$$Z = \prod_k \frac{1}{1 - ze^{-\beta\epsilon_k}}. \quad (2.3)$$

Applicando le regole dell'ensemble grancanonico è possibile esprimere le grandezze termodinamiche caratteristiche del sistema, come il numero medio di particelle $\langle N \rangle$ e l'equazione di stato che lega pressione P , temperatura T e volume V . Si ha infatti

$$\langle N \rangle = z \frac{\partial}{\partial z} \ln Z = \sum_k z \frac{e^{-\beta \epsilon_k}}{1 + z e^{-\beta \epsilon_k}} = \sum_k \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_k - \mu)} - 1} = \sum_k \langle N_k \rangle, \quad (2.4)$$

$$\frac{PV}{k_B T} = \ln Z = - \sum_k \ln(1 - z e^{-\beta \epsilon_k}). \quad (2.5)$$

Da (2.4) si deduce l'espressione del numero medio statistico di un certo $\langle N_k \rangle$, e in particolare di quello relativo allo stato fondamentale di energia ϵ_0 :

$$\langle N_0 \rangle = \frac{z}{1 - z} = \frac{1}{e^{-\beta \mu} - 1}. \quad (2.6)$$

L'equazione (2.6) può essere poi invertita per ricavare il potenziale chimico

$$\mu = -k_B T \ln \left(1 + \frac{1}{\langle N_0 \rangle} \right). \quad (2.7)$$

2.1.1 Potenziale chimico

Il potenziale chimico è una grandezza fisica introdotta nella costruzione dell'ensemble grancanonico. Ricordando la definizione di energia libera di Helmholtz

$$A = E_{int} - TS, \quad (2.8)$$

ove E_{int} è l'energia interna del sistema, S la sua entropia; si definisce il potenziale chimico come

$$\mu = \frac{\partial A}{\partial N}. \quad (2.9)$$

Questa grandezza è tale che, per due sistemi all'equilibrio diffusivo tra loro, cioè in grado di scambiarsi particelle identiche, deve verificarsi che il potenziale chimico tra i due è lo stesso. Il potenziale chimico è legato ad altre variabili termodinamiche di un sistema come la pressione P e il volume V dalla relazione che definisce un altro potenziale termodinamico, l'energia libera di Gibbs (utile per sistemi termostatati e sottoposti a pressione costante):

$$\mu N = G = A + PV. \quad (2.10)$$

2.2 Condensazione

Si vogliono cercare delle espressioni più agevoli per le espressioni (2.4) e (2.5) in cui la dipendenza tra le variabili sia più esplicita e non coinvolga operazioni di sommatoria. È possibile fare ciò passando al limite termodinamico, ossia considerare il limite in cui $V \rightarrow \infty$ e dunque procedere in approssimazione semiclassica, cioè sostituire la sommatoria con un integrale, considerando gli indici di energia k nel continuo [9], [10]. Prestando attenzione nell'isolare il termine relativo all'occupazione media del ground state, che diverge per $z \rightarrow 1$, ed espandendo l'integrando in serie si ottengono i risultati finali:

$$\frac{P}{k_B T} = \frac{1}{\Lambda^3} g_{5/2}(z) - \frac{1}{V} \ln(1 - z), \quad (2.11)$$

$$\frac{1}{v} = \frac{1}{\Lambda^3} g_{3/2}(z) + \frac{1}{V} \frac{z}{1-z}, \quad (2.12)$$

dove è stata introdotta la lunghezza d'onda termica di de Broglie di una particella di massa m e temperatura T , definita come $\Lambda = \sqrt{\frac{2\pi\hbar^2}{mk_B T}}$, il volume specifico $v = \frac{V}{N}$ e la classe generica di funzioni $g_n(z) = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{z^l}{l^n}$, studiate e tabulate in letteratura.

La funzione $g_{3/2}(z)$ ha andamento monotono crescente per $z \leq 1$, dove è limitata e positiva, diverge per valori $z \geq 1$ mentre in $z = 1$ ha derivata divergente ma valore finito $g_{3/2}(1) = \zeta(3/2) \approx 2.612$, con $\zeta(x)$ funzione zeta di Riemann.

Osservando l'equazione (2.12) si ha che, per alcuni valori di volume specifico e lunghezza d'onda, ossia di volume e temperatura, esistono condizioni in cui il numero di occupazione del ground state diventa finito, confrontabile con quello totale (transizione statistica). Si ha il fenomeno di condensazione di Bose-Einstein: una frazione finita di particelle occupa il livello a energia nulla, mentre il resto di esse si distribuisce "finemente" sui livelli con energia diversa da zero (condensazione nello spazio dei momenti). La condizione definisce un sottospazio nello spazio termodinamico $P - v - T$ del gas bosonico ideale, corrispondente alla regione di transizione. Questa è indicata dal caso limite $\frac{\Lambda^3}{v} = g_{3/2}(1)$ che, nel caso di volume specifico fissato definisce la temperatura critica

$$T_c = \frac{2\pi\hbar^2}{k_B m} \left(\frac{1}{v g_{3/2}(1)} \right)^{2/3} \quad (2.13)$$

come temperatura al di sopra della quale la frazione di condensato è identicamente nulla, mentre a temperatura fissata definisce un volume specifico critico

$$v_c = \frac{\Lambda^3}{g_{3/2}(1)}. \quad (2.14)$$

tale che se il volume occupato dal gas supera tale valore, non si ha condensazione. In particolare la frazione di condensato presente ad una certa temperatura T vale

$$\frac{N_0}{N} = 1 - \left(\frac{T}{T_c} \right)^{3/2}. \quad (2.15)$$

Al di sopra della temperatura critica nessun singolo livello, nemmeno il fondamentale, è occupato da una frazione finita di particelle, mentre se si potesse raggiungere una temperatura esattamente pari allo zero assoluto, allora tutte le particelle occuperebbero lo stato a energia nulla.

2.2.1 Condensazione in 2D

Per i sistemi in dimensioni inferiori a 3 il teorema di Bogoliubov o Hohenberg-Mermin-Wagner (BHMW) stabilisce l'impossibilità di formazione di ordine a lungo raggio (Long-Range Order, LRO), nozione fondamentale nelle transizioni di fase tridimensionali [12]. Dunque la condensazione di Bose-Einstein in un piano omogeneo infinito per LRO è proibita a temperature finite, diverse dallo zero assoluto. Tuttavia non mancano esempi sperimentali di formazione di condensati in basse dimensioni, così come transizioni dimensionali in condensati 3D.

Ad esempio Imry, Bergman e Gunther ottennero che una transizione di fase 2D nel livello di ground state è realizzabile raffreddando il gas bosonico non a densità costante, bensì a pressione costante, così da non mantenere finita la densità come previsto nel

limite termodinamico.

Ciò che sembra una violazione del teorema sopra enunciato è in realtà una conseguenza delle dimensioni finite e delle forme dei sistemi sperimentali, del numero di particelle, oltre che dell'effetto di non uniformità introdotto dai potenziali di confinamento esterni. Ne risulta che i limiti imposti dai risultati teorici vanno adattati alle caratteristiche reali dei sistemi realizzati in laboratorio.

Innanzitutto è opportuno osservare che, anche in sistemi $3D$ ciò che si osserva sperimentalmente non è mai una vera transizione di fase allo stato di Bose-Einstein poichè, ricordando che tutti i risultati sul fenomeno della condensazione di Bose-Einstein sono stati ottenuti nel limite termodinamico, un sistema fisico reale aderente a questo limite dovrebbe essere caratterizzato da un numero di particelle e un volume finiti, tali che la densità numerica di particelle si mantenga però finita. Ovviamente questo è irrealizzabile, ma nel caso di sistemi omogenei il limite termodinamico è comunque una buona approssimazione.

Quello che si osserva è comunque un'occupazione macroscopica del livello inferiore di energia con un netto aumento al diminuire della temperatura. Si può quindi definire una temperatura "pseudo-critica" alla quale l'incremento della frazione di condensato è brusco. Viceversa è possibile che una "pseudo-transizione" si verifichi in $D \leq 2$ nonostante una transizione reale non sia prevista teoricamente.

Prendiamo ad esempio una transizione $2D$ in potenziale armonico, per osservare come la presenza della trappola di confinamento incida sulle proprietà del sistema, così che la condensazione BEC diventi possibile. Ciò che afferma il teorema BHMW è che non può esserci condensazione nello stato con numero d'onda $k = 0$, ossia con momento nullo. Allo stesso tempo un altro teorema, il teorema di CPO (dovuto a Chester, basato su un lemma di Penrose e Onsager) afferma che non può esserci condensazione in un qualsiasi stato di particella singola, a meno che questo si verifichi in uno stato con $k = 0$.

Tuttavia CPO richiede che la densità sia finita ovunque nel sistema. Nel limite termodinamico, invece, la densità diventa infinita nell'origine dell'oscillatore, da cui l'inapplicabilità del teorema stesso. Poichè l'applicabilità del teorema di Hohenberg non dipende dalla finitezza della densità, al contrario questo deve essere rispettato. Ne segue che, nel problema dell'oscillatore armonico $2D$, benchè non ci sia BEC nello spazio dei momenti, cioè nello stato con momento nullo, questa si verifica nello spazio vero e proprio, nello stato di energia minima. Definendo quindi due diversi numeri di condensato, N_0 per lo spazio e f_0 per lo spazio dei momenti, si ha che in un gas bosonico ideale $2D$ con N particelle nel limite termodinamico a temperatura finita, f_0/N tende a zero, mentre N_0/N rimane una frazione finita.

In conclusione, nonostante i sistemi finiti non presentino una vera transizione di fase, in essi può verificarsi una pseudo-transizione nella quale una frazione finita delle particelle totali occupa lo stato a energia minima se la temperatura scende al di sotto di un valore, che dipende anche dal numero di particelle N . Queste transizioni possono aver luogo per qualsiasi numero di dimensioni (anche $1D$), senza che siano violati teoremi consistenti e dimostrati, il cui regime di applicazione però è spesso ideale e non confrontabile con quelli reali.

Capitolo 3

BEC sulla superficie di una sfera

L'intento del seguente capitolo è quello di studiare un sistema di atomi bosonici in stato gassoso e ultrafreddi confinati sulla superficie di una sfera. In particolare sarà calcolata un'espressione per la temperatura critica del sistema e per la frazione di condensato ad una temperatura generica.

3.1 Il sistema

3.1.1 Formula di quantizzazione dell'energia sulla superficie di una sfera

Sia m la massa di una particella soggetta al potenziale $U(\vec{r})$. Nello spazio tridimensionale, in coordinate polari, essa è descritta dalla funzione d'onda $\psi(\vec{r})$, che soddisfa l'equazione stazionaria agli autovalori per l'energia E di Schrödinger:

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + U(\vec{r}) \right] \psi(\vec{r}) = E\psi(\vec{r}). \quad (3.1)$$

Si consideri ora il caso in cui la particella sia vincolata a muoversi sulla superficie di una sfera di raggio R , quindi con potenziale $U(\vec{r})$ identicamente nullo sulla superficie della sfera e infinito altrove

$$U(\vec{r}) = \begin{cases} 0 & \text{se } r = R \\ +\infty & \text{se } r \neq R \end{cases} \quad (3.2)$$

L'equazione (3.2) diventa quindi, introducendo l'operatore momento \vec{p} della particella,

$$\frac{\vec{p}^2}{2m}\psi(\vec{r}) = E\psi(\vec{r}). \quad (3.3)$$

Fattorizzando la funzione d'onda in funzione della coordinata radiale e delle coordinate angolari, ossia scrivendo $\psi(\vec{r}) = \hat{\psi}(r)\tilde{\psi}(\theta, \varphi)$ si osserva che il vincolo dato dal raggio della sfera sulla cui superficie avviene il moto, implica che la dipendenza è ridotta alle sole variabili angolari; quindi un operatore che agisce solo sulla variabile radiale r andrà valutato sulla costante R .

Utilizzando l'algebra dei commutatori è possibile dimostrare che l'operatore quadrato

del momento può essere scomposto in due termini, dove il primo rappresenta il momento radiale, il secondo è legato al momento angolare orbitale \vec{L} della particella:

$$\vec{p}^2 = p_r^2 + \frac{\vec{L}^2}{r^2}, \quad (3.4)$$

con

$$p_r^2 = -\hbar^2 \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} r. \quad (3.5)$$

Poichè per quanto detto sulla coordinata radiale l'operatore momento radiale p_r^2 produce risultato nullo applicato alla funzione d'onda, in definitiva l'equazione agli autovalori diventa

$$\frac{\vec{L}^2}{2mR^2} \tilde{\psi}(\theta, \varphi) = E \tilde{\psi}(\theta, \varphi). \quad (3.6)$$

La soluzione dell'equazione in tale forma è ben nota ed è data dalle funzioni armoniche $Y_l^{m_l}(\theta, \varphi)$, autostati comuni dell'operatore momento angolare orbitale al quadrato \vec{L}^2 con autovalore $\hbar^2 l(l+1)$ e della proiezione del momento angolare orbitale su un asse di misura z , L_z , con autovalore $\hbar m_l$.

Dunque l'energia E di una particella vincolata a muoversi sulla superficie di una sfera di raggio R risulta essere quantizzata e indicizzata dal numero quantico l secondo l'espressione:

$$\epsilon_l = \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2mR^2}. \quad (3.7)$$

Indicando con N il numero totale di particelle e con N_l il numero di particelle con energia ϵ_l si ha $N = \sum_{l=0}^{+\infty} N_l$; tenendo ora conto della statistica di Bose-Einstein (equazione (2.4)) e della molteplicità $(2l+1)$ data dal numero quantico m_l , si ottiene che il numero totale di particelle N è dato da

$$N = \sum_{l=0}^{+\infty} \frac{2l+1}{e^{(\epsilon_l - \mu)/(k_B T)} - 1}, \quad (3.8)$$

con μ potenziale chimico del sistema.

3.2 Potenziale chimico nullo

L'equazione (3.8) è sensata per valori negativi del potenziale chimico. Poichè nel contesto della meccanica statistica, per un gas bosonico ideale, nel limite in cui $\mu = 0$ si ha condensazione di Bose-Einstein, è possibile assumere in una prima fase effettivamente verificato l'annullarsi del potenziale chimico e derivare i risultati relativi a temperatura critica T_c , presso la quale $\mu \rightarrow 0^-$, e frazione di condensato.

3.2.1 Risultati in approssimazione semiclassica

Sotto l'ipotesi $\mu = 0$ l'equazione (3.8) diventa

$$N = N_0 + \sum_{l=1}^{+\infty} \frac{2l+1}{e^{\epsilon_l/(k_B T)} - 1}, \quad (3.9)$$

dove N_0 è il numero di bosoni nello stato di energia minima, cioè il numero di bosoni nel condensato. A partire da questa equazione è possibile calcolare la temperatura critica T_c al di sopra della quale $N_0 = 0$.

Introducendo l'approssimazione semi-classica è possibile calcolare un'espressione esplicita per N , sostituendo in (3.9) l'operazione di somma con quella di integrale, $\sum_{l=1}^{+\infty} \rightarrow \int_1^{+\infty} dl$, che diventa così:

$$N = N_0 + \int_1^{+\infty} \frac{2l+1}{e^{\frac{\hbar^2 l(l+1)}{2mR^2 k_B T}} - 1} dl. \quad (3.10)$$

L'integrale che compare a secondo membro può essere calcolato agevolmente, effettuando il cambio di variabili $z = l(l+1)$ e raggruppando per comodità di scrittura tutte le costanti in gioco nella costante $a = \frac{\hbar^2}{2mR^2 k_B T}$. Si riporta il calcolo esplicito:

$$N_{l \neq 0} = \int_2^{+\infty} dz \frac{1}{e^{az} - 1} \frac{e^{-az}}{e^{-az}} = \int_2^{+\infty} \frac{a}{a} \frac{e^{-az}}{1 - e^{-az}} dz = \frac{1}{a} \left[\ln(1 - e^{-az}) \right]_2^{+\infty} \quad (3.11)$$

e, sviluppando ancora,

$$N_{l \neq 0} = -\frac{1}{a} \ln(1 - e^{-a}) = \frac{1}{a} \ln\left(\frac{1}{1 - e^{-a}}\right) = \frac{1}{a} [\ln(e^a) - \ln(e^a - 1)]. \quad (3.12)$$

Esplicitando la costante a , così da reintrodurre le variabili prima raggruppate, e dividendo ambo i membri per la superficie della sfera $4\pi R^2$, otteniamo l'espressione finale per la densità superficiale totale n :

$$n = n_0 + \frac{mk_B T}{2\pi \hbar^2} \left[\frac{\hbar^2}{mR^2 k_B T} - \ln\left(e^{\frac{\hbar^2}{mR^2 k_B T}} - 1\right) \right] \quad (3.13)$$

Un'espressione per la temperatura critica T_c può essere ottenuta osservando che, proprio per $T = T_c$, la frazione di condensato si annulla; quindi imponendo $n_0 = 0$ in (3.13), si ottiene:

$$k_B T_c = \frac{\frac{2\pi \hbar^2}{m} n}{\frac{\hbar^2}{mR^2 k_B T_c} - \ln\left(e^{\frac{\hbar^2}{mR^2 k_B T_c}} - 1\right)}. \quad (3.14)$$

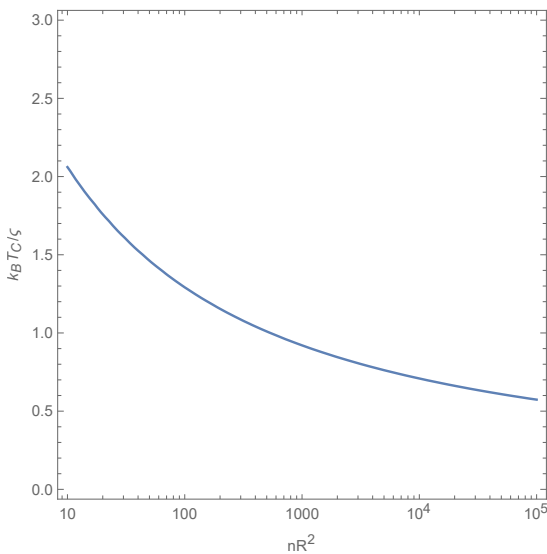


Figura 3.1: Energia riscalata $k_B T/\zeta$ in funzione del parametro nR^2 .

Si osservi come l'equazione (3.14) ottenuta per la temperatura critica non fornisca una formula esplicita, ma una formula implicita analitica che lega questo parametro, oltre che alla massa delle particelle, anche alla loro densità superficiale n e al raggio della sfera R . Come ci si aspetta, nel limite $R \rightarrow \infty$ risulta $T_c \rightarrow 0$; tuttavia per qualsiasi valore finito di R è possibile trovare una temperatura critica finita. Lo dimostra la figura 3.1, in cui si riporta l'energia riscalata $k_B T/\zeta$ in funzione del parametro nR^2 , con $\zeta = \hbar^2 n/m$.

Infine, mettendo insieme le equazioni (3.13) e (3.14), si ottiene un'espressione per la frazione di condensato al variare della temperatura T :

$$\frac{n_0}{n} = 1 - \frac{1 - k_B T \frac{mR^2}{\hbar^2} \ln(e^{\hbar^2/(mR^2 k_B T)} - 1)}{1 - k_B T_c \frac{mR^2}{\hbar^2} \ln(e^{\hbar^2/(mR^2 k_B T_c)} - 1)} \quad (3.15)$$

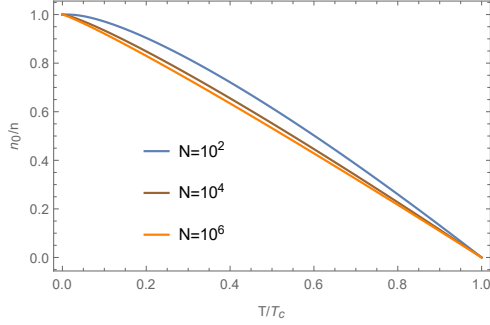


Figura 3.2: Frazione di condensato al variare della temperatura riscalata su T_c per $R = 1$ e diversi valori di N .

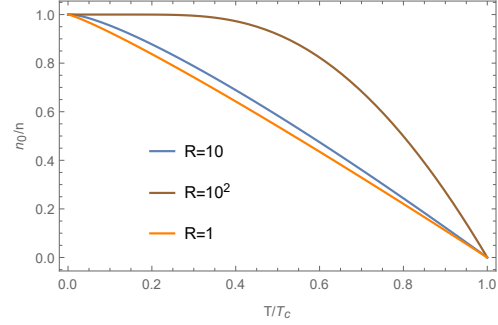


Figura 3.3: Frazione di condensato al variare della temperatura riscalata su T_c per $N = 10^5$ e diversi valori di R .

In figura 3.2 è raffigurato l'andamento della frazione di condensato n_0/n in funzione della temperatura riscalata T/T_c (la temperatura critica T_c è stata ottenuta risolvendo l'equazione implicita (3.14) per valori di $nR^2 \sim N$ fissati). In particolare qui si è mantenuto R costante, variando il numero totale N .

A differenza dell'energia riscalata (Figura 3.1), la frazione di condensato non dipende univocamente dal parametro nR^2 , proporzionale a N ($nR^2 = N/4\pi$), ma dipende separatamente sia dal numero di particelle N che dal raggio di confinamento R . Ad esempio in figura 3.3 si riporta lo stesso grafico in cui ad essere fissato è il valore di N , mentre R è fatto variare.

3.2.2 Risultati da calcolo numerico

Poichè i risultati della sezione precedente sono stati ottenuti tutti in approssimazione smiclassica, ossia sostituendo sommatorie con integrali e ricavando così espressioni analitiche ben definite, è possibile chiedersi se l'errore commesso sia o meno trascurabile. Quindi si riportano di seguito gli stessi grafici della sezione precedente, ottenuti a partire da calcolo numerico (ovviamente anche in questo caso è introdotto un errore sistematico, in quanto la sommatoria non è estesa all'infinito, tuttavia quest'errore è trascurabile in quanto l'indice estremo è abbastanza elevato da rendere inosservabili i contributi che sarebbero apportati dai termini successivi).

La temperatura critica può essere ricavata a partire dalla relazione (3.9), imponendo $N_0 = 0$, da cui

$$N = 4\pi n R^2 = \sum_{l=1}^{+\infty} \frac{2l+1}{e^{(\epsilon_l)/(k_B T_c)} - 1}. \quad (3.16)$$

Da quest'ultima relazione, combinata sempre con la (3.9), discende anche un'espressione per la frazione di condensato:

$$\frac{n_0}{n} = 1 - \frac{1}{N} \sum_{l=1}^{+\infty} \frac{2l+1}{e^{(\epsilon_l)/(k_B T_c)} - 1}. \quad (3.17)$$

Osservando la figura 3.6 si nota che la stima in approssimazione semiclassica è sistematicamente maggiore rispetto a quella da calcolo numerico, e la discrepanza tra i due risultati, più evidente per $nR^2 \rightarrow 0$, tende ad annullarsi per $nR^2 \rightarrow \infty$, come ci si aspetta dato che per $R \rightarrow \infty$ ci aspettiamo di ritrovare il caso noto in $2D$, in cui $T_c \rightarrow 0$.

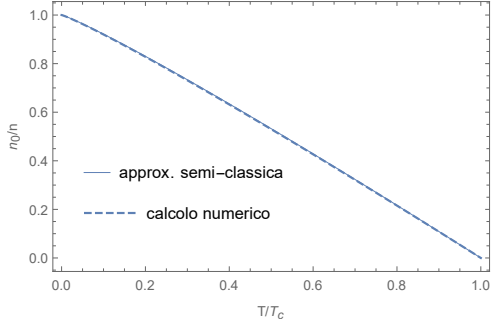


Figura 3.4: n_0/n in funzione di T/T_c per $R = 1$ e $N = 10^6$.

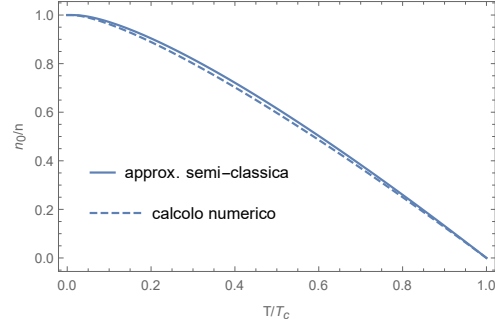


Figura 3.5: n_0/n in funzione di T/T_c per $R = 1$ e $N = 10^2$.

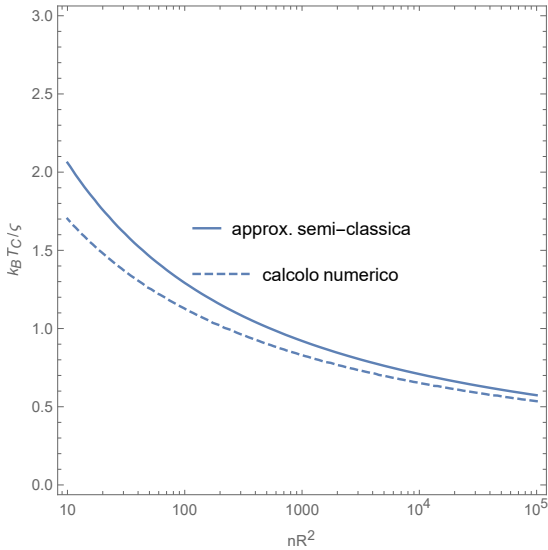


Figura 3.6: Energia riscalata $k_B T/\zeta$ in funzione del parametro nR^2 ; confronto tra approssimazione semi-classica e calcolo numerico.

Osservando invece la frazione di condensato, si ha che la differenza tra le due stime, praticamente nulla agli estremi $T/T_c \rightarrow 0$ e $T/T_c \rightarrow 1$, è rilevabile nella regione intermedia della temperatura normalizzata, e varia al variare di N ed R , passando da casi in cui le due stime in pratica coincidono (figura 3.4) a casi in cui si discostano leggermente (figura 3.5).

Si tenga presente che, poichè i grafici (realizzati utilizzando il software Mathematica) sono analizzati qualitativamente, si è fino ad ora lavorato normalizzando le variabili fisiche presenti nelle formule, ossia ponendo pari a 1 la massa m delle particelle, la costante di Planck h e la costante di Boltzmann k_B .

3.3 Potenziale chimico non nullo

Nella seguente sezione lo stesso sistema sarà studiato sottraendo l'ipotesi $\mu = 0$ e mantenendo invece l'approssimazione semi-classica. I risultati saranno quindi confrontati con quelli ottenuti in caso di potenziale chimico nullo.

3.3.1 Risultati da approssimazione semiclassica

Nel caso in cui il potenziale chimico μ sia diverso da zero, il numero totale di particelle N come scritto nell'equazione (3.9) diventa

$$N = N_0 + \sum_{l=1}^{+\infty} \frac{2l+1}{e^{(\epsilon_l - \mu)/(k_B T)} - 1}, \quad (3.18)$$

che sostituendo il simbolo di sommatoria con quello di integrale può essere scritto come

$$N = N_0 + \int_1^{+\infty} \frac{2l+1}{e^{\frac{\hbar^2 l(l+1)}{2mR^2 k_B T} - \mu} - 1} dl. \quad (3.19)$$

Poichè μ è costante una volta fissate tutte le altre variabili termodinamiche, l'integrale a secondo membro può essere risolto con passaggi del tutto analoghi a quelli svolti ai punti (3.11) e (3.11). Svolgendo i conti si trova che

$$N = \frac{1}{e^{-\frac{\mu}{k_B T}} - 1} + \frac{2mR^2 k_B T}{\hbar^2} \ln \left(\frac{1}{1 - e^{-\frac{\hbar^2}{mR^2 k_B T} + \frac{\mu}{k_B T}}} \right), \quad (3.20)$$

dove è stata inserita anche l'espressione (2.6) per il numero di particelle nello stato fondamentale. Inoltre, riarrangiando i termini dell'equazione (3.13) ed esplicitando le densità n ed n_0 in funzione di R e dei rispettivi N e N_0 , ci si accorge che le due espressioni sono esattamente della stessa forma, ossia la condizione $\mu = 0$ imposta nell'equazione (3.20) restituisce

$$N = N_0 + \frac{2mR^2 k_B T}{\hbar^2} \ln \left(\frac{1}{1 - e^{-\frac{\hbar^2}{mR^2 k_B T}}} \right), \quad (3.21)$$

a patto di nominare N_0 il numero di occupazione del ground state che divergerebbe se calcolato come nell'equazione (2.6) nel limite in cui $\mu \rightarrow 0$.

Ci si aspetta che in questo caso la frazione di condensato non abbia un andamento come quello nelle figure 3.2, 3.3, 3.4, 3.5, che partendo dall'unità si annulla esattamente ad un valore specifico T_c , esprimibile implicitamente dall'equazione (3.14), ma che invece partendo da $n_0/n = 1$ diminuisca progressivamente e tenda ad annullarsi soltanto asintoticamente, così da non poter definire una vera e propria T_c ma solo una soglia di temperatura per la quale la frazione diventi trascurabile quanto si vuole.

Poichè il parametro μ non è facilmente controllabile da un punto di vista pratico e sperimentale, mentre i parametri N ed R sono più regolabili, è possibile procedere fissando questi valori e imponendo l'uguaglianza (3.20), che diventa un'equazione trascendente nell'incognita μ ; benchè una soluzione analitica non possa essere ricavata, è possibile trovarla per via grafica come zero di funzione. La soluzione, oltre che da N ed R , dipende anche dalla temperatura T . Quindi, ripetendo la procedura per un certo set discreto di temperature si ottengono dei valori $\mu_{N,R}(T)$ che, sostituiti in (2.6), forniscono direttamente il numero di particelle nel ground state e quindi, dividendo per l' N fissato, la frazione di condensato.

Si riportano di seguito i risultati di potenziale chimico e frazione di condensato al variare della temperatura ottenuti per una certa coppia (N, R) .

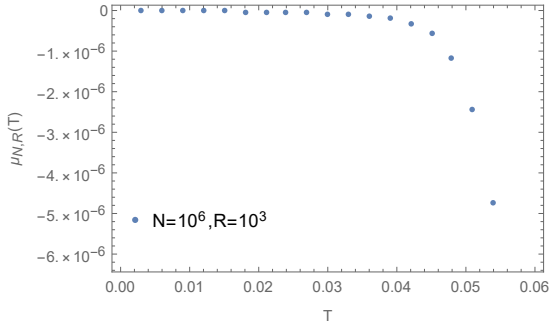


Figura 3.7: μ in funzione di T per N, R fissati.

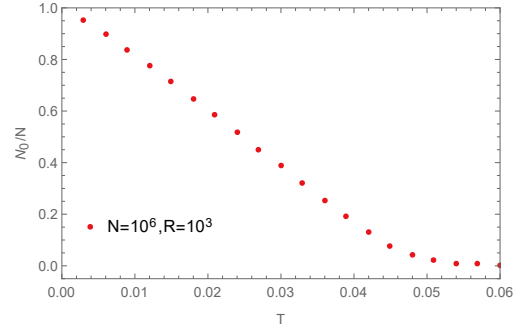


Figura 3.8: n_0/n in funzione di T per N, R fissati

L'andamento in figura 3.8 è quello atteso descritto prima ed anche il potenziale chimico (figura 3.7) ha un comportamento coerente; infatti si mantiene praticamente nullo prima che la temperatura raggiunga quella "pseudo-critica" in corrispondenza della quale la frazione di condensato inizia a tendere allo zero, mentre per valori di T superiori inizia a crescere in modulo, rimanendo negativo, ma sempre assumendo valori estremamente piccoli.

Nella sezione successiva si confronteranno nell specifico i risultati con quelli a $\mu = 0$ per dedurre entro quali range di N ed R questo avvenga oppure no.

3.4 Confronto tra $\mu = 0$ e $\mu \neq 0$

Si vuole cercare di studiare l'accordo tra il caso ideale $\mu = 0$ e quello reale $\mu \neq 0$ vari al variare del numero totale di particelle N e della dimensione caratteristica della superficie sferica R .

Per comodità riscriviamo l'equazione (3.14) (in cui la temperatura critica è ottenuta in approssimazione $\mu = 0$) esplicitando la densità n in funzione del numero totale di particelle N :

$$k_B T_c = \frac{\frac{\hbar^2}{2mR^2} N}{\frac{\hbar^2}{mR^2 k_B T_c} - \ln\left(e^{\frac{\hbar^2}{mR^2 k_B T_c}} - 1\right)}. \quad (3.22)$$

Si procederà come segue: fissati dei valori (N, R) si ricava la corrispondente T_c dall'equazione implicita (3.22); in corrispondenza di una certa percentuale di questa, in particolare per $T^* = 0.9T_c$, si calcola $\mu(T^*)$ imponendo l' N voluto in equazione (3.20); quindi si calcolano le frazioni di condensato per $\mu = 0$ e $\mu \neq 0$ rispettivamente dalle equazioni (3.21) e (2.6). Si riportano di seguito in tabelle i valori ottenuti rispettivamente per T_c ideale, $\mu(T^*)$, n_0/n ideale e reale, con N ed R che variano di un ordine tra 10 e, rispettivamente 10^6 e 10^3 .

	$R = 10^1$	$R = 10^2$	$R = 10^3$	$R = 10^1$	$R = 10^2$	$R = 10^3$
$N = 10^6$	465	4.65	$4.65 \cdot 10^{-2}$	$-3.17 \cdot 10^{-3}$	$-3.17 \cdot 10^{-5}$	$-3.17 \cdot 10^{-7}$
$N = 10^5$	57.7	$5.77 \cdot 10^{-1}$	$5.77 \cdot 10^{-3}$	$-3.63 \cdot 10^{-3}$	$-3.63 \cdot 10^{-5}$	$-3.63 \cdot 10^{-7}$
$N = 10^4$	7.54	$7.54 \cdot 10^{-2}$	$7.54 \cdot 10^{-4}$	$-4.19 \cdot 10^{-3}$	$-4.19 \cdot 10^{-5}$	$-4.19 \cdot 10^{-7}$
$N = 10^3$	1.06	$1.06 \cdot 10^{-2}$	$1.06 \cdot 10^{-4}$	$-4.88 \cdot 10^{-3}$	$-4.88 \cdot 10^{-5}$	$-4.88 \cdot 10^{-7}$
$N = 10^2$	$1.73 \cdot 10^{-1}$	$1.73 \cdot 10^{-3}$	$1.73 \cdot 10^{-5}$	$-5.72 \cdot 10^{-3}$	$-5.72 \cdot 10^{-5}$	$-5.72 \cdot 10^{-7}$
$N = 10^1$	$3.56 \cdot 10^{-2}$	$3.56 \cdot 10^{-4}$	$3.56 \cdot 10^{-6}$	$-6.75 \cdot 10^{-3}$	$-6.75 \cdot 10^{-5}$	$-6.75 \cdot 10^{-7}$

Tabella 3.1: Temperatura critica T_c e potenziale chimico $\mu(T^*)$.

	$R = 10^1$	$R = 10^2$	$R = 10^3$	$R = 10^1$	$R = 10^2$	$R = 10^3$
$N = 10^6$	0.109	0.109	0.109	0.132	0.132	0.132
$N = 10^5$	0.111	0.111	0.111	0.143	0.143	0.143
$N = 10^4$	0.114	0.114	0.114	0.162	0.162	0.162
$N = 10^3$	0.120	0.120	0.120	0.196	0.196	0.196
$N = 10^2$	0.132	0.132	0.132	0.268	0.268	0.268
$N = 10^1$	0.158	0.158	0.158	0.425	0.425	0.425

Tabella 3.2: Frazioni di condensato per $\mu = 0$ e $\mu \neq 0$.

	$R = 10^1$	$R = 10^2$	$R = 10^3$
$N = 10^1$	0.212	0.212	0.212
$N = 10^1$	0.290	0.290	0.290
$N = 10^1$	0.416	0.416	0.416
$N = 10^1$	0.633	0.633	0.633
$N = 10^1$	1.029	1.029	1.029
$N = 10^1$	1.694	1.694	1.694

Si ottiene che in entrambi i casi il valore della frazione di condensato è costante per N fissato ($N = 4\pi R^2$) e non dipende da R . La frazione è sistematicamente maggiore in caso di potenziale chimico non nullo, coerentemente con il fatto che quando $\mu \neq 0$ la condensazione avviene solo asintoticamente. L'accordo (quantificato come errore relativo) tra la previsione ideale e quella reale (che quindi come le frazioni di condensato dipende solo da N e non da R) migliora all'aumentare di N .

Tabella 3.3: Accordo tra caso ideale e reale quantificato come errore relativo.

Si osserva (tabella 3.1) che:

- a parità di R , T_c aumenta con N ; infatti la soluzione all'equazione (3.22) è data dall'intersezione tra due funzioni di T_c : una è una retta passante per l'origine la cui pendenza dipende da R , che è fissato, mentre l'altra è una funzione più complicata, che comunque aumenta all'aumentare di N ;
- a parità di N , T_c diminuisce all'aumentare di R^2 ; infatti, nell'equazione (3.22) temperatura e raggio compaiono soltanto attraverso il parametro $T_c R^2$, che quindi è costante per N fissato. Dunque se R aumenta di un ordine, T_c diminuisce di due. Nel limite termodinamico $R \rightarrow \infty$ risulta quindi verificato che $T_c \rightarrow 0$.

Di conseguenza, poichè il valore di μ è calcolato imponendo un valore N desiderato nell'eq. (3.20), si ha che:

Dunque, unendo tutte le considerazioni fatte osservando le frazioni di condensato ottenute nei due casi, si osserva che:

- a parità di N , queste si mantengono costanti con l'aumentare di R (come detto il rapporto μ/T rimane anch'esso costante);
- a parità di R , la frazione tende ad annullarsi all'aumentare di N (perchè $\mu \rightarrow 0^-$, quindi l'accordo tra caso ideale e reale è migliore).

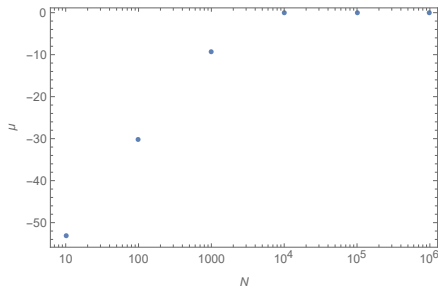


Figura 3.9: Potenziale chimico in funzione di N a R e T fissati.

- a parità di N , poichè il prodotto $T_c R^2$ si mantiene costante, deve farlo anche il rapporto μ/T , dunque così come T_c , anche μ si riduce di due ordini ogni volta che R aumenta di due;
- a parità di R , osservando l'eq. (3.20) si nota che se N aumenta devono aumentare entrambi i membri, quindi $\mu \rightarrow 0^-$ affinché i due termini divergano, cioè i loro denominatori tendano ad annullarsi. Per esempio, fissando R e T , l'andamento caratteristico di μ ed N è quello riportato in figura 3.9:

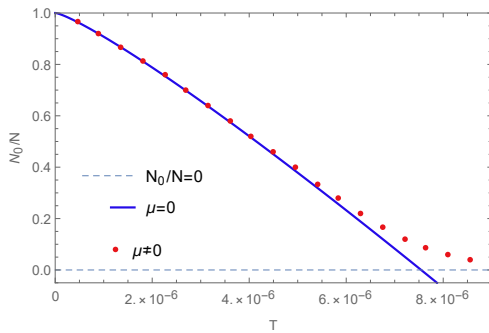


Figura 3.10: Risultati a confronto con $N = 10^4$ e $R = 10^4$.

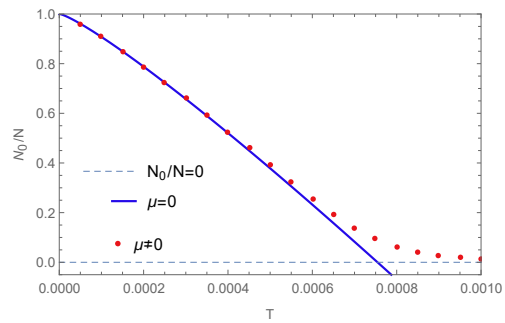


Figura 3.11: Risultati a confronto con $N = 10^4$ e $R = 10^3$.

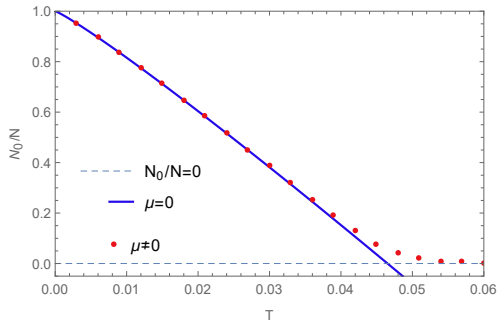


Figura 3.12: Risultati a confronto con $N = 10^6$ e $R = 10^3$.

Poichè il regime di degenerazione quantistica di un sistema di particelle è definito come quello in cui, al di sotto di una temperatura critica T_c , la distanza media tra le particelle diventa confrontabile con la lunghezza d'onda termica di de Broglie, definita come

$$\Lambda = \sqrt{\frac{2\pi\hbar^2}{mk_B T}}, \quad (3.23)$$

è interessante confrontare questi due parametri fisici del sistema in esame. Si definisce la densità superficiale di particelle n come

$$n = \frac{N}{4\pi R^2} \quad (3.24)$$

da cui si ottiene che la distanza media tra le particelle è pari a $n^{-1/2}$. Imponendo la condizione

$$\Lambda \simeq n^{-1/2}, \quad (3.25)$$

si ottiene la relazione:

$$T \simeq \frac{2\pi\hbar^2}{mk_B} n \quad (3.26)$$

che, a meno delle costanti h, k_B ed m (che si ricorda essere poste tutte pari all'unità nell'analisi qualitativa precedente), si riduce a:

$$T \simeq \frac{1}{8\pi^2} \frac{N}{R^2}. \quad (3.27)$$

Dal confronto tra il valore di temperatura critica T_c ottenuto come sopra e il valore di riferimento appena ricavato $\frac{1}{8\pi^2} \frac{N}{R^2}$ per alcune combinazioni di parametri (N, R) , si osserva che il valore di T_c ottenuto è sempre maggiore della stima qualitativa ottenuta a partire dalla lunghezza d'onda termica di de Broglie, ma la proporzionalità tra i due valori non è data da un fattore costante uguale in tutte le configurazioni. In altre parole, se nel caso elementare di un gas di Bose tridimensionale esiste una relazione ben precisa tra separazione inter-particellare e lunghezza d'onda termica (si rimanda all'equazione (2.14)), in cui il fattore di proporzionalità è dato dalla funzione zeta di Riemann $g_{3/2}(1) = \zeta(3/2) \approx 2.612$, in un sistema di particelle bosoniche su una superficie sferica in regime di condensazione di Bose-Einstein si ha che, pur essendo verificata la compatibilità tra lunghezza d'onda termica e separazione inter-particellare, il coefficiente di proporzionalità non è fisso, ma dipende dalle caratteristiche del sistema stesso, in particolare numero di particelle totali N e raggio caratteristico R . Volendo riportare alcuni esempi, si ha che per $(N, R) = (10^4, 10^3)$ si ottiene ~ 5.96 , per $(N, R) = (10^4, 10^2)$ si ottiene ~ 5.95 , per $(N, R) = (10^6, 10^3)$ si ottiene ~ 3.67 , per $(N, R) = (10^6, 10^2)$ si ottiene ~ 3.67 .

Capitolo 4

BEC sulla superficie di un ellissoide

Risulta interessante, anche confrontandosi con le realizzazioni sperimentali [7] di sistemi di Bose-Einstein, lo studio di un sistema analogo a quello trattato fino ad ora, ossia costituito da particelle bosoniche non interagenti vincolate a muoversi sulla superficie di un solido di rotazione, in cui però la superficie è quella di un ellissoide di semiassi rispettivamente a, b e c , la cui equazione cartesiana è data da:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1. \quad (4.1)$$

Lo studio di tale sistema è in linea di principio del tutto simile al precedente: si risolve l'equazione di Schrödinger del sistema, si trova un'espressione per la quantizzazione dell'energia, si scrive il numero totale di particelle del sistema come somma sugli opportuni autovalori di energia con la rispettiva molteplicità di degenerazione, e infine si ricavano le espressioni per la temperatura critica di condensazione del sistema e per la frazione di condensato, in maniera analitica o numerica. La complicazione risiede tutta nel primo punto dell'analisi, ossia nella risoluzione dell'equazione di Schrödinger e nella necessità di ottenere una formula analitica per la quantizzazione dell'energia.

Nel primo paragrafo si tenterà un approccio di risoluzione diretto dell'equazione di Schrödinger utilizzando le coordinate ellittiche, più adatte alla simmetria del sistema, mostrando come una soluzione diretta non è facilmente ottenibile; quindi si passerà ad un approccio semi-classico di quantizzazione del sistema (Old Quantum Theory).

4.1 Quantizzazione dell'energia

Si potrebbe in primo luogo pensare di adattare le soluzioni trovate nel capitolo precedente al nuovo sistema oggetto di studio semplicemente per riscaldamento delle coordinate e riarrangiamento delle formule ottenute. Tuttavia, nonostante fisicamente un ellissoide differisca da una sfera semplicemente per dilatazione o compressione lungo tre assi tra loro perpendicolari, ciò non si traduce nella possibilità di effettuare queste operazioni in maniera lecita, poichè tutti i risultati ottenuti sopra sono stati ricavati a partire da ipotesi sul sistema che non sono più verificate. La soluzione all'equazione di Schrödinger è infatti stata ottenuta grazie alla notevole semplificazione introdotta dall'uso di coordinate sferiche, adatte proprio per la simmetria del sistema, e alla forma del potenziale, anch'esso a simmetria sferica, come espresso in equazione (3.2).

Qui, invece, la simmetria sferica è persa, in quanto il potenziale, ovunque infinito, si

annulla soltanto sulla superficie di un ellissoide; quindi l'utilizzo di coordinate sferiche si rivela poco utile, in quanto il potenziale presenterebbe una dipendenza, complicata, anche dalle variabili angolari. La scelta di sistema di riferimento più ragionevole per la descrizione del sistema appare quella che mette in evidenza la simmetria del sistema, ossia appunto il sistema di coordinate ellittiche, che sarà utilizzato nel primo paragrafo per cercare una soluzione all'equazione di Schrödinger.

4.2 Equazione di Schrödinger in coordinate ellittiche

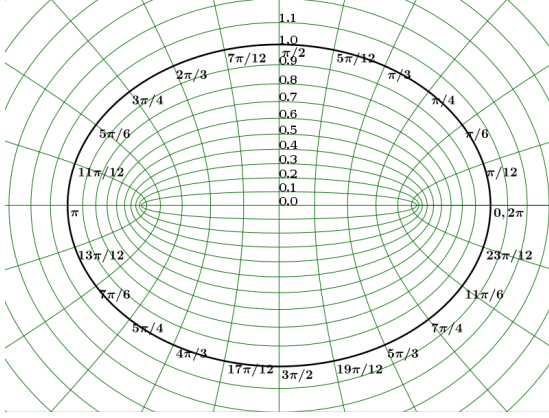


Figura 4.1: Sistema di coordinate ellittiche

Il sistema di coordinate ellittiche, o sferoidale prolato, è formato da una famiglia di ellissi e iperboli confocali, mutuamente ortogonali in ogni punto dello spazio. Fissati in $A = (0, 0, a)$ e $B = (0, 0, -a)$ i due fuochi, e definendo la lunghezza $R = 2a$ e le distanze dai due fuochi rispettivamente r_A e r_B , si introducono le coordinate ellittiche come:

$$\begin{cases} \mu = \frac{r_A + r_B}{R} & 1 \leq \mu \leq \infty \\ \nu = \frac{r_A - r_B}{R} & -1 \leq \nu \leq +1 \\ \varphi = \varphi & 0 \leq \varphi \leq 2\pi \end{cases} \quad (4.2)$$

Si osservi come la variabile angolare φ è la medesima che compare nel sistema di coordinate sferiche (angolo individuato sul piano xy), mentre fissare un valore di μ o ν equivale rispettivamente a fissare un dato ellissoide o iperboloidi di rotazione. Dunque nel seguito, quando si tratterà il sistema, si fisserà la coordinata $\mu := D$, con $1 \leq D \leq \infty$, per identificare un dato ellissoide. Inoltre il potenziale, identicamente nullo sulla sua superficie ed infinito altrove, sarà dato da:

$$U(\mu, \nu, \varphi) = \begin{cases} 0 & \text{se } \mu = D \\ +\infty & \text{se } \mu \neq D \end{cases} \quad (4.3)$$

L'operatore Laplaciano in coordinate ellittiche è dato da:

$$\nabla^2 = \frac{1}{a^2(\mu^2 - \nu^2)} \left\{ \frac{\partial}{\partial \mu} \left[(\mu^2 - 1) \frac{\partial}{\partial \mu} \right] + \frac{\partial}{\partial \nu} \left[(1 - \nu^2) \frac{\partial}{\partial \nu} \right] + \frac{\mu^2 - \nu^2}{(\mu^2 - 1)(1 - \nu^2)} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right\} \quad (4.4)$$

L'equazione di Schrödinger per una particella di massa M in coordinate ellittiche è data da:

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2M} \nabla^2 + U(\mu, \nu, \varphi) \right] \psi(\mu, \nu, \varphi) = E \psi(\mu, \nu, \varphi). \quad (4.5)$$

La funzione d'onda ψ della particella può essere fattorizzata, scrivendola come $\psi(\mu, \nu, \varphi) = \psi(D, \nu, \varphi) = \hat{\psi}(\varphi) \tilde{\psi}(\nu)$. Dunque, dato anche il potenziale in equazione

(4.3), l'equazione precedente diventa:

$$\frac{1}{a^2(D^2 - \nu^2)} \left\{ \frac{\partial}{\partial \nu} \left[(1 - \nu^2) \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \nu} \right] \right\} \hat{\psi} + \frac{1}{a^2(D^2 - \nu^2)} \left\{ \frac{D^2 - \nu^2}{(D^2 - 1)(1 - \nu^2)} \frac{\partial^2 \hat{\psi}}{\partial \varphi^2} \right\} \tilde{\psi} = -\frac{2M}{\hbar^2} E \tilde{\psi} \hat{\psi} \quad (4.6)$$

dove si è tenuto presente che la dipendenza dalla variabile μ viene meno, dunque nell'espressione dell'operatore Laplaciano (4.4) si è imposto $\mu = D$ e si è eliminato il primo termine all'interno delle parentesi graffe, in quanto l'azione di tale termine sulla funzione d'onda, indipendente dalla coordinata μ , fornisce risultato identicamente nullo. Dividendo ambo i membri per l'intera funzione d'onda $\tilde{\psi} \hat{\psi}$ e riarrangiando i termini, l'equazione diventa:

$$\frac{(D^2 - 1)(1 - \nu^2)}{D^2 - \nu^2} \frac{1}{\tilde{\psi}} \frac{\partial}{\partial \nu} \left[(1 - \nu^2) \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \nu} \right] + \frac{2Ma^2(D^2 - 1)(1 - \nu^2)}{\hbar^2} E + \frac{1}{\hat{\psi}} \frac{\partial^2 \hat{\psi}}{\partial \varphi^2} = 0 \quad (4.7)$$

Si osserva che l'equazione è composta da due termini: il primo è dato dalla somma di due addendi dipendenti dalla variabile ν e non da φ , mentre il secondo dipende soltanto da φ e non da ν . Poichè variando separatamente ν o φ , rispettivamente il secondo o il primo termine non variano, si deduce che essi devono essere separatamente uguali ad una costante e in particolare sono l'uno l'opposto dell'altro, cioè se il primo termine è pari alla costante m^2 , allora il secondo sarà pari a $-m^2$. Si è in altri termini effettuata una separazione delle variabili dell'equazione di partenza in due equazioni differenziali ciascuna in una variabile che devono essere risolte separatamente; le due equazioni, avendo definito la costante m^2 , sono:

$$\frac{d^2 \hat{\psi}}{d\varphi^2} = -m^2 \hat{\psi} \quad (4.8)$$

per la parte nella variabile angolare $\hat{\psi}(\varphi)$, e

$$\frac{d}{d\nu} \left[(1 - \nu^2) \frac{d\tilde{\psi}}{d\nu} \right] + (D^2 - \nu^2) \left[\frac{2Ma^2}{\hbar^2} E - \frac{m^2}{(D^2 - 1)(1 - \nu^2)} \right] \tilde{\psi} = 0 \quad (4.9)$$

per la parte nella variabile non angolare $\tilde{\psi}(\nu)$. Si fa notare che l'equazione (4.8) è la stessa che compare nella risoluzione dell'equazione di Scrödinger in coordinate sferiche, e come prima quindi è di elementare soluzione e fornisce la ben nota soluzione

$$\hat{\psi}(\varphi) \sim e^{\pm im\varphi}. \quad (4.10)$$

Non si può affermare lo stesso per quanto riguarda l'equazione (4.9), che mostra una complicata dipendenza dalla variabile ν . Nello specifico, tale problema è un esempio di equazione di Sturm-Liouville, classe di equazioni differenziali lineari del secondo ordine tra cui rientrano tutte quelle del tipo

$$-\frac{d}{dx} \left[p(x) \frac{dy}{dx} \right] + q(x)y = \lambda r(x)y \quad \lambda \in \mathbb{C} \quad (4.11)$$

dove $p(x)$ e $r(x)$ sono positive, mentre $q(x)$ è reale. Si noti come l'equazione per le funzioni associate di Legendre $X(\xi)$ del tipo

$$\frac{d}{d\xi} \left[(1 - \xi^2) \frac{dX}{d\xi} \right] + \left(C - \frac{m^2}{1 - \xi^2} \right) X = 0 \quad (4.12)$$

che compare nella risoluzione dell'equazione di Schrödinger in coordinate sferiche e la cui soluzione è nota (data appunto dalle funzioni di Legendre), è un esempio particolare di equazione di Sturm-Liouville singolare. Per tale categoria di problemi esistono teoremi su esistenza, realtà, unicità degli autovalori, che fanno uso anche di concetti di teoria degli operatori e in generale di analisi funzionale. Per questo in tale elaborato non ci si addentrerà in nozioni e sviluppi di questo tipo.

Dunque, poichè la soluzione dell'equazione (4.9) e di conseguenza dell'intera equazione di Schrödinger non è di risoluzione diretta, nel prossimo paragrafo si tenterà di seguire un approccio diverso per l'analisi del problema.

4.3 Approssimazione semiclassica o WKB

Nel 1916, per spiegare le discrepanze tra i risultati sperimentali negli spettri atomici dell'atomo di idrogeno e le aspettative teoriche del modello di Bohr, Sommerfeld e Wilson proposero un suo miglioramento introducendo delle nuove regole di quantizzazione e l'ipotesi che le orbite descritte dagli elettroni nell'atomo potessero essere ellittiche oltre che circolari. Il metodo, che risale quindi ai primissimi tempi della meccanica quantistica, è stato in seguito generalizzato da Einstein, Brillouin e Keller (metodo EBK, 1917) a sistemi integrabili ma non necessariamente separabili per calcolare autovalori di sistemi quantistici. Per esempio il metodo fu in grado di riprodurre con esattezza lo spettro energetico di un oscillatore armonico tridimensionale, o di una particella in buca di potenziale infinita, o di predire le correzioni spettroscopiche nell'atomo di idrogeno dovute alla struttura fine. Successive applicazioni furono ad esempio quelle di Gutzwiller, Berry e Tabor che applicarono con successo il metodo al calcolo della densità degli stati di un sistema integrabile, anche caotici.

La quantizzazione di Bohr-Sommerfeld e il metodo EBK sono in realtà esempi di un procedimento semiclassico più generale di cui rappresentano il primo ordine: l'approssimazione WKB o WKBJ (Wentzel-Kramers-Brillouin-Jeffreys). Questo è utilizzato come metodo di risoluzione dell'equazione di Schrödinger per la comprensione del comportamento globale di autovalori e autofunzioni del problema, specialmente quando questi si presentano come funzione di parametri esterni, in quanto spesso metodi semiclassici forniscono l'unica approssimazione possibile di un'espressione analitica degli autovalori. Tuttavia l'accuratezza dell'approssimazione WKB non è universale, ed è necessario analizzarla caso per caso. Se in alcuni casi il metodo fallisce nella determinazione di autovalori e autofunzioni, altre volte invece è possibile calcolare esplicitamente le correzioni da apportare ai risultati forniti dal metodo fino ad un certo ordine o, a volte, a tutti gli ordini. Inoltre in alcuni, seppur rari, casi è possibile che le correzioni si annullino identicamente, così che i risultati ottenuti in approssimazione semiclassica coincidano esattamente con quelli veri quantistici.

L'ipotesi da cui parte il metodo è la scrittura della funzione d'onda $\psi(x)$ in forma esponenziale, con esponente dato da una serie di potenze della costante di Planck \hbar :

$$\psi(x) = e^{S(x)} \quad (4.13)$$

dove la funzione $S(x)$ è in generale una funzione complessa, data da

$$S(x) = A(x) + iB(x). \quad (4.14)$$

In questo modo l'equazione stazionaria di Schrödinger per una particella di massa m soggetta al potenziale $V(x)$

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} \psi(x) + V(x)\psi(x) = E\psi(x) \quad (4.15)$$

si traduce nell'equazione differenziale per la funzione $S(x)$

$$S''(x) + [S'(x)]^2 = \frac{2m}{\hbar^2} [V(x) - E]. \quad (4.16)$$

A questo punto l'approssimazione semiclassica impone che le funzioni $A(x)$ e $B(x)$ siano serie di potenze in \hbar . Sviluppando i calcoli si ottiene che è possibile calcolare i singoli termini dell'espansione, fino a derivare la soluzione globale del sistema. Inoltre si ha che, al primo ordine di espansione, si ritrova il metodo di quantizzazione di Sommerfeld. Esattamente il metodo di quantizzazione di Sommerfeld sarà quello che si tenterà di applicare per ricavare una formula analitica della quantizzazione dell'energia del sistema oggetto di studio.

4.3.1 Quantizzazione di Sommerfeld

Si consideri un semplice sistema unidimensionale costituito da una particella di massa m con coordinata generalizzata q e rispettivo momento coniugato p , l'hamiltoniana del sistema $H(p, q)$ è data dalla somma di un termine cinetico e uno potenziale (che supponiamo non essere funzione dei momenti ma delle sole coordinate):

$$H(p, q) = \frac{p^2}{2m} + V(q). \quad (4.17)$$

Se si fissa un'energia, costante del moto, pari a E , allora $H(p, q) = E$ e l'espressione (4.17) può essere invertita in favore del momento p :

$$p = \sqrt{2m(E - V(q))}; \quad (4.18)$$

in corrispondenza di questo valore esisteranno in generale dei punti di inversione del moto, ossia dei valori $q_1 \leq q_2$ tali che $p(q_1) = p(q_2) = 0$, tra i quali avviene il moto, periodicamente, poichè per valori esterni a tale intervallo $[q_1, q_2]$ il radicando in equazione (4.18) assumerebbe valori negativi, ossia il vincolo imposto sul valore di E divide lo spazio delle fasi in una regione permessa nella quale si mantiene il sistema, e in una zona proibita, ove il limite tra le due è segnato dai punti di inversione.

L'idea alla base dell'approssimazione WKB arrestata al primo ordine corrisponde ad una quantizzazione dei momenti coniugati, ossia si impone che l'integrale del momento per la rispettiva variabile coniugata esteso ad un periodo sia quantizzato secondo il numero quantico n , in formule:

$$\frac{1}{2\pi} \oint p \cdot dq = n\hbar. \quad (4.19)$$

Nel caso semplice sopra introdotto si avrebbe quindi:

$$\frac{1}{2\pi} \oint \sqrt{2m(E - V(q))} dq = n\hbar \quad (4.20)$$

che, ricordando il significato fisico dei punti di inversione del moto, diventa

$$2 \frac{1}{2\pi} \int_{q_1}^{q_2} \sqrt{2m(E - V(q))} dq = n\hbar. \quad (4.21)$$

Il calcolo analitico dell'integrale fornisce quindi una soluzione che, se invertita, fornisce una relazione dell'energia del sistema E quantizzata secondo n .

Il procedimento può essere esteso in linea di principio ad un qualsiasi sistema. Sia (q, \dot{q}) l'insieme delle coordinate generalizzate utilizzate per descrivere il sistema e le rispettive velocità, i passaggi del procedimento sono:

- scrivere la lagrangiana del sistema $L(q, \dot{q})$;
- calcolare i momenti coniugati $p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$;
- introdurre le variabili d'azione e quantizzarle secondo Sommerfeld: $I = \oint p \cdot dq = 2\pi \cdot n\hbar$;
- scrivere l'hamiltoniana $H(q, p)$ del sistema e riarrangiarla in modo da scriverla come sola funzione delle azioni $H(I)$;
- se quanto previsto al punto precedente è possibile si dice che il sistema è integrabile e, avendo introdotto la condizione di quantizzazione, sarà immediato sostituire l'espressione quantizzata delle azioni nell'hamiltoniana per ottenere così una quantizzazione dell'energia E_n .

Si cercherà dunque di applicare il ragionamento al sistema dato da una particella di massa m vincolata a muoversi sulla superficie di un ellissoide.

Si scrive innanzitutto la trasformazione che porta dalle coordinate ellittiche a quelle cartesiane (si ricorda che fissare la coordinata $\mu = D$ equivale a fissare un dato ellissoide di rotazione):

$$\begin{cases} x = a\sqrt{(D^2 - 1)(1 - \nu^2)}\cos\varphi \\ y = a\sqrt{(D^2 - 1)(1 - \nu^2)}\sin\varphi \\ z = aD\nu \end{cases} \quad (4.22)$$

da cui si ottengono anche le trasformazioni delle velocità:

$$\begin{cases} \dot{x} = -\dot{\varphi}a\sqrt{(D^2 - 1)(1 - \nu^2)}\sin\varphi - \cos\varphi\sqrt{\frac{D^2 - 1}{1 - \nu^2}}a\nu\dot{\nu} \\ \dot{y} = \dot{\varphi}a\sqrt{(D^2 - 1)(1 - \nu^2)}\cos\varphi - \sin\varphi\sqrt{\frac{D^2 - 1}{1 - \nu^2}}a\nu\dot{\nu} \\ \dot{z} = aD\dot{\nu} \end{cases} \quad (4.23)$$

quindi è immediato scrivere la lagrangiana del sistema, che, data la forma del potenziale (4.3) coincide con il termine di energia cinetica ($L(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = \frac{1}{2}m\vec{v}^2 = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$):

$$L(\nu, \dot{\nu}, \varphi, \dot{\varphi}) = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) = \frac{1}{2}ma^2\left[(D^2 - 1)(1 - \nu^2)\dot{\varphi}^2 + \left(D^2 + \frac{D^2 - 1}{1 - \nu^2}\nu^2\right)\dot{\nu}^2\right]. \quad (4.24)$$

Quindi si ricavano le espressioni dei momenti coniugati (p_ν, p_φ):

$$p_\nu = \frac{\partial L}{\partial \dot{\nu}} = ma^2\left(D^2 + \frac{D^2 - 1}{1 - \nu^2}\nu^2\right)\dot{\nu} \quad (4.25)$$

$$p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = ma^2(D^2 - 1)(1 - \nu^2)\dot{\varphi} \quad (4.26)$$

Scrivendo l'hamiltoniana del sistema $H(\nu, \dot{\nu}, \phi, \dot{\phi}) = p_\nu\dot{\nu} + p_\phi\dot{\phi} - L$ si osserva che questa coincide con la lagrangiana dunque, volendo riscriverla in funzione di coordinate generalizzate e rispettivi momenti coniugati, si ha:

$$H(p_\nu, p_\varphi, \nu, \varphi) = \frac{p_\varphi^2}{2ma^2(D^2 - 1)(1 - \nu^2)} + \frac{p_\nu^2}{2ma^2} \frac{1 - \nu^2}{D^2 - \nu^2}. \quad (4.27)$$

Si noti come nessuno dei due momenti coniugati (equazioni (4.25) e (4.26)) dipenda dalla variabile angolare φ , mentre entrambi mostrano una dipendenza dalla coordinata ν , così come l'hamiltoniana (4.27) è composta da due termini ciascuno dei quali è funzione della coordinata ν , non solo attraverso i momenti coniugati che vi compaiono.

Poichè il momento coniugato alla variabile angolare, p_φ , è indipendente dalla rispettiva variabile, si ha che la quantizzazione di tale momento è immediata:

$$I_\varphi = \oint p_\varphi d\varphi = 2\pi p_\varphi = 2\pi \cdot n_\varphi \hbar \quad \Longrightarrow \quad p_\varphi = n_\varphi \hbar \quad (4.28)$$

da cui la quantizzazione dell'energia nella variabile angolare φ . Si osservi come, in maniera analoga, nel tentativo di risoluzione diretta dell'equazione di Schrödinger, la coordinata φ era associata ad un'equazione differenziale di risoluzione immediata dopo l'introduzione di un dato numero quantico (lì m , introdotto attraverso la costante $-m^2$), mentre la coordinata ν era, come lo sarà in questo approccio, causa di complicazioni. Ciò che resta da fare a questo punto è invertire l'equazione dell'hamiltoniana (4.27) ($H(p_\nu, p_\varphi, \nu, \varphi) = E(p_\nu, p_\varphi, \nu, \varphi)$) per ottenere un'espressione del momento coniugato alla variabile ν in funzione di tutte le altre variabili (la dipendenza diretta da φ è assente), da cui poter calcolare così la variabile azione I_ν :

$$p_\nu = p_\nu(E, p_\varphi, \nu) \quad \Longrightarrow \quad I_\nu = I_\nu(E, p_\varphi) = \oint p_\nu d\nu = 2\pi \cdot n_\nu \hbar \quad (4.29)$$

In linea di principio, dopo aver invertito l'espressione ricavata esplicitando l'energia E in funzione della variabile azione I_ν , il metodo sarebbe così concluso, poichè sarebbe sufficiente riscrivere le variabili azione come quantizzate dai due numeri quantici n_ν e n_φ per ottenere una formula analitica della quantizzazione dell'energia E_{n_ν, n_φ} . Svolgendo i conti si ottiene che, fissando un valore dell'energia E e invertendo l'equazione (4.27) si ha:

$$p_\nu = \sqrt{\frac{2ma^2(D^2 - \nu^2)}{1 - \nu^2} \left(E - \frac{p_\varphi^2}{2ma^2(D^2 - 1)(1 - \nu^2)} \right)} \quad (4.30)$$

Si osservi come l'espressione appena ricavata fornisca l'espressione per i punti di inversione del moto ν_0 :

$$\nu_0^\pm = \pm \sqrt{1 - \frac{p_\varphi^2}{2ma^2(D^2 - 1)E}} \quad (4.31)$$

tali per cui $p_\nu(\nu_0^\pm) = 0$.

Tra questi due estremi andrebbe dunque calcolato l'integrale

$$\int \sqrt{\frac{2ma^2(D^2 - \nu^2)}{1 - \nu^2} \left(E - \frac{p_\varphi^2}{2ma^2(D^2 - 1)(1 - \nu^2)} \right)} d\nu. \quad (4.32)$$

Una volta risolto sarebbe dunque possibile invertire il risultato ottenuto e ricavare così un'espressione per l'energia quantizzata.

Si ricorda tuttavia che, anche ottenendo un'espressione analitica, il risultato sarebbe comunque frutto di un'approssimazione al primo ordine, la cui attendibilità pertanto sarebbe da indagare, studiandone l'errore dal risultato vero per conoscerne una stima.

Capitolo 5

Conclusioni

In questo elaborato è stata riassunta la descrizione che la meccanica statistica quantistica fornisce dei ben noti sistemi di condensati di Bose-Einstein in spazi tridimensionali. Successivamente sono stati riportati i principali teoremi della letteratura fisica che descrivono sistemi quantistici analoghi ma in spazi di dimensione inferiore, estendendo il fenomeno della transizione di fase quantistica sotto opportune condizioni.

Quindi, applicando i principi elementari della meccanica quantistica, è stato descritto il sistema oggetto di studio principale, ossia un sistema di particelle bosoniche non interagenti confinate sulla superficie di una sfera, ricavando delle espressioni (ora esplicite ora implicite) per le grandezze caratteristiche del sistema, ossia temperatura critica e frazione di condensato. L'analisi è stata effettuata in primo luogo in approssimazione di potenziale chimico nullo, sia tramite calcolo numerico che a partire dai risultati analitici ricavati in approssimazione semiclassica. Successivamente si è ripetuta l'analisi, questa volta soltanto in approssimazione semiclassica, nel caso più aderente alla realtà di potenziale chimico non nullo. Si è ottenuto che l'approssimazione risulta fisicamente giustificata nel limite termodinamico, in cui il numero di particelle del sistema diventa ragionevolmente elevato.

Successivamente si è tentato di analizzare un sistema analogo nel caso in cui la superficie sia quella di un'ellisse piuttosto che di una sfera. La mancata simmetria sferica del sistema in esame conduce ad un'equazione differenziale la cui risoluzione richiederebbe strumenti di teoria operatoriale e algebra funzionale, ed è stata pertanto accantonata. Quindi è stato abbozzato un tentativo di analisi in approssimazione WKB arrestata al primo ordine, il cui sviluppo risulterebbe interessante non solo per conoscere la fisica del sistema, che è la configurazione effettivamente realizzata sperimentalmente, ma anche per indagare le potenzialità dell'approssimazione semiclassica in casi come questi in cui la risoluzione esatta dell'equazione di Schrödinger si rivela essere molto delicata, oltre che dell'accuratezza dei risultati da essa forniti e dall'eventuale errore che si commette nell'adottarli come risultati finali.

Bibliografia

- [1] E. A. Cornell and C. E. Wieman, *Nobel Lecture: Bose-Einstein condensation in a dilute gas, the first 70 years and some recent experiments*, Rev. Mod. Phys. **74**, 875 (2002).
- [2] W. Ketterle, *Nobel Lecture: When atoms behave as waves: Bose-Einstein condensation and the atom laser*, Rev. Mod. Phys. **74**, 1131 (2002).
- [3] D. Becker, M. D. Lachmann, E. M. Rasel et al., *Space-borne Bose-Einstein condensation for precision interferometry*, Nature **562**, 391-395 (2018).
- [4] E. Gibney, *Universe's coolest lab set to open up quantum world*, Nature **557**, 151-152 (2018).
- [5] E. R. Elliott, M. C. Krutzik, J. R. Williams, R. J. Thompson and D. C. Aveline, *NASA's Cold Atom Lab (CAL): system development and ground test status*, npj Microgravity **4**, 16 (2018).
- [6] *MAIUS 1 – First Bose-Einstein condensate generated in space*. https://www.dlr.de/dlr/en/desktopdefault.aspx/tabid-10081/151_read-20337/#/gallery/25194 (2017).
- [7] N. Lundblad, *Microgravity Dynamics of Bubble-Geometry Bose-Einstein Condensates*. https://taskbook.nasaprs.com/Publication/index.cfm?action=public_query_taskbook_content&TASKID=11095 (2017).
- [8] N. Lundblad, R.A. Carollo, C. Lannert, M.J. Gold, X. Jiang, D. Paseltiner, N. Sergay and D.C. Aveline, *Shell potentials for microgravity Bose-Einstein condensates*, arXiv.org (2019), 1906.05885.
- [9] J. F. Annett, *Superconductivity, Superfluids and Condensates (Oxford Master Series in Physics)*, Clarendon Press, 2004.
- [10] L. Pitaevskii and S. Stringari, *Bose-Einstein Condensation*, Clarendon Press, 2003.
- [11] K. Huang, *Statistical Mechanics*, John Wiley & Sons, 1963.
- [12] N. D. Mermin and H. Wagner, *Absence of Ferromagnetism or Antiferromagnetism in One- or Two-Dimensional Isotropic Heisenberg Models*, Phys. Rev. Lett. **17**, 1133-1136 (1966).