

Università degli Studi di Padova

Dipartimento di Fisica e Astronomia "Galileo Galilei"
Corso di Laurea Triennale in Fisica

Solitoni nell'equazione di Schrödinger non polinomiale

Laureando:
Lorenzo Valbusa Dall'Armi
Matricola **1097599**

Relatore:
Prof. Luca Salasnich

Anno Accademico 2016-2017

Indice

Introduzione	1
1 L'equazione di Schrödinger non polinomiale	3
1.1 Condensati di Bose-Einstein	3
1.2 Sistema di N bosoni	4
1.3 Metodo variazionale	4
1.4 L'equazione di Gross-Pitaevskii	5
1.5 Trappola armonica	7
1.6 L'equazione di Gross-Pitaevskii 1D	10
2 Solitoni	13
2.1 Soluzioni shape-invariant	13
2.2 Equazioni generali	13
2.3 Fase	14
2.4 Integrale Primo	14
2.5 Proprietà delle soluzioni	15
2.6 Modulo	16
3 Bright Soliton	17
3.1 Bright Soliton nella NPSE	17
3.2 Bright soliton in accoppiamento debole	19
4 Black Soliton	23
4.1 Dark Soliton	23
4.2 Black Soliton nella NPSE	23
4.3 Black soliton in accoppiamento debole	25
4.4 Black soliton in accoppiamento forte	26
5 Gray Soliton	29
5.1 Gray Soliton nella NPSE	29
5.2 Gray soliton in accoppiamento debole	32
6 Instabilità modulazionale	35
6.1 Instabilità modulazionale per la NPSE	35
6.2 Instabilità modulazionale in accoppiamento debole	38

Bibliografia

41

Introduzione

Il solitone è un'onda che, propagandosi con una certa velocità, mantiene inalterato il proprio profilo. Tale effetto è dovuto a dei termini non lineari nelle equazioni del moto che vanno a cancellare gli effetti dispersivi che altrimenti ne altererebbero la forma.

I solitoni si manifestano in svariati ambiti della fisica, a partire dalla fluidodinamica, dove furono per la prima volta osservati da John Scott Russell [1], per passare poi alla fisica dei plasmi ed infine ai condensati di Bose-Einstein, caso del quale ci occuperemo.

Sono stati infatti rilevati sperimentalmente per la prima volta nel 1999 in un condensato di Bose-Einstein fatto da atomi di ^{87}Rb dei solitoni scuri (dark) [2], ossia che presentano come forma d'onda una depressione, nel 2002 in un condensato fatto da atomi di ^7Li dei solitoni chiari (bright) [3], che presentano un'elevazione, ed anche, sempre nel 2002, un treno di solitoni [4], ossia un insieme di più bright soliton vicini tra loro.

In questa tesi studieremo in primis le proprietà di un generico condensato di Bose-Einstein, ricavando tramite un approccio di tipo variazionale l'equazione di Gross-Pitaevskii, che descrive l'evolversi temporale dello stato del sistema. Successivamente analizzeremo il caso specifico in cui sia presente un potenziale esterno armonico lungo un dato piano e ridurremo il problema ad un numero inferiore di dimensioni tramite la scelta di un certo ansatz, arrivando a un'equazione differenziale alle derivate parziali detta equazione di Schrödinger non polinomiale. A questo punto cercheremo come soluzioni particolari di tale equazione dei solitoni, analizzando prima il problema in maniera generica, soffermandoci solo in seguito sui vari tipi di solitoni, bright o dark. Effettueremo poi per i solitoni trovati un confronto tra la loro forma, analitica (quando possibile) o grafica (ricavata da integrazione numerica), e quella dei solitoni soluzione dell'equazione di Gross-Pitaevskii 1D, che deriva da un approccio variazionale differente, analizzandone le analogie e le differenze al variare dell'intensità dell'interazione tra i bosoni del sistema. Infine studieremo lo spettro di eccitazione di Bogoliubov relativo all'equazione di Schrödinger non polinomiale ed useremo tale risultato per stimare approssimativamente il numero di solitoni che si formano in un treno di solitoni, confrontando anche in quest'ultimo caso il risultato da noi ottenuto con quello della 1D GPE.

Capitolo 1

L'equazione di Schrödinger non polinomiale

1.1 Condensati di Bose-Einstein

In meccanica quantistica le particelle seguono due statistiche differenti:

- la statistica di Fermi-Dirac, che prevede che la funzione d'onda di un sistema di N particelle identiche sia antisimmetrica rispetto allo scambio di due particelle, il che implica che due particelle identiche non possono occupare lo stesso stato quantistico;
- la statistica di Bose-Einstein, che prevede che la funzione d'onda di un sistema di N particelle identiche sia simmetrica rispetto allo scambio di due particelle, da cui discende che due particelle identiche possono coesistere nello stesso stato quantistico simultaneamente.

Secondo il teorema spin-statistica particelle a spin intero, detti bosoni, come il fotone o il gluone, seguono la statistica di Bose-Einstein, mentre particelle a spin semintero, detti fermioni, come l'elettrone o il protone, seguono la statistica di Fermi-Dirac.

Tra i bosoni possiamo includere anche gli atomi il cui spin totale, somma di quello nucleare ed elettronico, è intero, come ad esempio il ^{87}Rb , che presenta uno spin nucleare pari a $s_{nuc} = \frac{3}{2}$ e uno spin elettronico pari a $s_{orb} = \frac{1}{2}$, quindi avente spin totale $s_{tot} = 1$ o $s_{tot} = 2$.

Una proprietà particolare dei sistemi di bosoni è che essi possono presentarsi in un particolare stato della materia, detto condensato di Bose-Einstein, che consiste in una frazione non trascurabile di particelle che occupano lo stesso stato quantistico, quello di minima energia.

Da considerazioni statistiche si trova che più la temperatura si abbassa più la frazione di bosoni che si trovano nello stato di condensato aumenta, nello specifico vale la relazione

$$\frac{N_0}{N} = 1 - \left(\frac{T}{T_{BEC}}\right)^3 \quad (1.1.1)$$

dove N_0 è il numero di bosoni che occupano lo stato di più bassa energia, N è il numero totale di bosoni e T_{BEC} è una costante del sistema.

Si vede chiaramente che nel limite di temperatura nulla tutti i bosoni si trovano nello stato fondamentale, $N_0 = N$, e il sistema è un puro condensato di Bose-Einstein.

I puri condensati di Bose-Einstein sono stati osservati sperimentalmente la prima volta nel 1995 portando a 170nK dei vapori di atomi di ^{87}Rb [5].

1.2 Sistema di N bosoni

Ci proponiamo di studiare un sistema composto da N bosoni il cui stato è descritto, indicando con \mathbf{r}_i e con σ_i rispettivamente le coordinate spaziali e i gradi di libertà relativi allo spin dell'i-esima particella, dalla funzione d'onda

$$\Psi = \Psi(\mathbf{r}_1, \sigma_1, \dots, \mathbf{r}_N, \sigma_N, t) \quad (1.2.1)$$

Affrontiamo il caso in cui l'Hamiltoniano ha la forma

$$H = \sum_{i=1}^N h(\mathbf{r}_i) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1, i \neq j}^N V(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j) \quad (1.2.2)$$

ove con $V(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j)$ intendiamo il potenziale d'interazione tra due bosoni e con $h(\mathbf{r}_i)$ l'hamiltoniano di particella singola dipendente esclusivamente dalle coordinate spaziali dell'i-esima particella e dalle loro derivate

$$h(\mathbf{r}_i) = \nabla_i^2 + U(\mathbf{r}_i) \quad (1.2.3)$$

Si osserva che la dinamica del nostro sistema non è influenzata dagli spin delle varie particelle, non essendoci potenziali dipendenti da essi, per cui possiamo semplificare la nostra analisi considerando una nuova funzione d'onda che non ne tiene conto

$$\psi = \psi(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, t) \quad (1.2.4)$$

1.3 Metodo variazionale

Procediamo ora a cercare l'equazione che descrive l'evoluzione temporale dello stato del sistema tramite un approccio di tipo variazionale: dato un certo funzionale $S[\psi]$ e imponendo che la sua variazione si annulli si ottiene proprio l'equazione cercata.

Definiamo tale funzionale come

$$S[\psi] = \int_{t_1}^{t_2} dt \int_V d^3\mathbf{r}_1 \dots d^3\mathbf{r}_N \psi^*(\mathbf{r}_1 \dots \mathbf{r}_N, t) (i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - H) \psi(\mathbf{r}_1 \dots \mathbf{r}_N, t) \quad (1.3.1)$$

Far annullare la sua variazione significa porre

$$\delta S[\psi] = \partial_\lambda S[\psi + \lambda \delta\psi]_{\lambda=0} = 0 \quad (1.3.2)$$

per una qualsiasi funzione continua $\delta\psi$ che si annulli negli estremi di integrazione temporale t_1, t_2 .

Facendo ciò si ottengono due distinte equazioni che si devono annullare rispettivamente per ogni $\delta\psi$ e per il suo complesso coniugato $\delta\psi^*$. Ci proponiamo preliminarmente di dimostrare che le due equazioni non sono altro che una il complesso coniugato dell'altra e che quindi è sufficiente studiarne soltanto una. Per farlo dimostriamo, usufruendo del teorema della divergenza, la seguente proprietà, valida per funzioni che si annullano sul bordo del volume di integrazione

$$\begin{aligned} \int_V dV \beta(\mathbf{r}) \nabla^2 \gamma(\mathbf{r}) &= \int_V dV \nabla[\beta(\mathbf{r}) \nabla \gamma(\mathbf{r})] - \int_V dV \nabla \beta(\mathbf{r}) \nabla \gamma(\mathbf{r}) = \\ &= \int_{\partial V} d\Sigma \beta(\mathbf{r}) \nabla \gamma(\mathbf{r}) - \int_V dV \nabla[\gamma(\mathbf{r}) \nabla \beta(\mathbf{r})] + \int_V dV \gamma(\mathbf{r}) \nabla^2 \beta(\mathbf{r}) = \\ &= - \int_{\partial V} d\Sigma \gamma(\mathbf{r}) \nabla \beta(\mathbf{r}) + \int_V dV \nabla^2 \beta(\mathbf{r}) \gamma(\mathbf{r}) = \int_V dV \nabla^2 \beta(\mathbf{r}) \gamma(\mathbf{r}) \end{aligned} \quad (1.3.3)$$

quindi possiamo spostare il laplaciano da una funzione all'altra a nostro piacimento, in quanto la funzione d'onda da noi studiata soddisfa necessariamente le ipotesi di annullarsi sul bordo del volume, poichè in

tale regione è nulla la probabilità di trovarvi dei bosoni.

Verifichiamo che è possibile fare lo stesso, a meno di un cambio di segno, anche per la derivata temporale, richiedendo però che almeno una delle due funzioni si annulli negli estremi di integrazione temporale (ipotesi soddisfatta dalla variazione $\delta\psi$ da noi scelta)

$$\int_{t_1}^{t_2} dt g(t) \frac{d}{dt} f(t) = [g(t)f(t)]|_{t_1}^{t_2} - \int dt \frac{d}{dt} g(t) f(t) = - \int dt \frac{d}{dt} g(t) f(t) \quad (1.3.4)$$

Possiamo riscrivere l'espressione

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} dt \int_V d^3 \mathbf{r}_1 \dots \mathbf{r}_N \left[\delta\psi^* \left(i \frac{\partial}{\partial t} - H \right) \psi + \psi^* \left(i \frac{\partial}{\partial t} - H \right) \delta\psi \right] \quad (1.3.5)$$

come

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} dt \int_V d^3 \mathbf{r}_1 \dots \mathbf{r}_N \left[\delta\psi^* \left(i \frac{\partial}{\partial t} - H \right) \psi + \delta\psi \left(i \frac{\partial}{\partial t} - H \right)^* \psi^* \right] \quad (1.3.6)$$

poichè lo scambio di posizione nell'integrale tra $\delta\psi$ e ψ^* è garantito dal fatto che gli unici termini che modificano analiticamente la funzione sulla quale agiscono, e che quindi non rendono ovvia la possibilità di scambiare le due funzioni sopra menzionate, sono solo $-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2$ e $i\hbar \frac{\partial}{\partial t}$ che, per quanto visto grazie a 1.3.3 e a 1.3.4, forniscono

$$\begin{aligned} \int_V d^3 \mathbf{r}_1 \dots \mathbf{r}_N \psi^* \nabla^2 \delta\psi &= \int_V d^3 \mathbf{r}_1 \dots \mathbf{r}_N \delta\psi \nabla^2 \psi^* \\ \int_{t_1}^{t_2} dt \psi^* i \frac{\partial}{\partial t} \delta\psi &= \int_{t_1}^{t_2} dt \delta\psi (-i) \frac{\partial}{\partial t} \psi^* = \int_{t_1}^{t_2} dt \left[\delta\psi^* i \frac{\partial}{\partial t} \psi \right]^* \end{aligned} \quad (1.3.7)$$

In base a tale risultato possiamo considerare una sola delle due equazioni che otteniamo. Nel nostro caso, per semplicità, studieremo quella relativa a $\delta\psi^*$.

1.4 L'equazione di Gross-Pitaevskii

Adottiamo a questo punto un'importante approssimazione, detta di Hartree, che fattorizza la funzione d'onda totale in N funzioni di particella singola.

Assumiamo anche di trovarci in presenza di un puro condensato di Bose-Einstein, per cui, secondo quanto visto nella sezione 1.1, la funzione d'onda del sistema si può scrivere come

$$\psi(\mathbf{r}_1 \dots \mathbf{r}_N, t) = \phi(\mathbf{r}_1, t) \dots \phi(\mathbf{r}_N, t) \quad (1.4.1)$$

Gli addendi di S possono essere riscritti, in questa approssimazione, come

$$\begin{aligned}
\langle H \rangle &= \langle \psi | H | \psi \rangle = \int d^3 \mathbf{r}_1 \dots d^3 \mathbf{r}_N \phi^*(\mathbf{r}_1, t) \dots \phi^*(\mathbf{r}_N, t) H(\phi(\mathbf{r}_1, t) \dots \phi(\mathbf{r}_N, t)) = \\
&= \int d^3 \mathbf{r}_1 \dots d^3 \mathbf{r}_N \phi^*(\mathbf{r}_1, t) \dots H(\phi(\mathbf{r}_1, t)) \dots \phi(\mathbf{r}_N, t) + \dots \int d^3 \mathbf{r}_1 \dots d^3 \mathbf{r}_N \phi^*(\mathbf{r}_1, t) \dots \phi(\mathbf{r}_1, t) \dots H(\phi(\mathbf{r}_N, t)) = \\
&= N \int d^3 \mathbf{r} \phi^*(\mathbf{r}, t) h(\mathbf{r}) \phi(\mathbf{r}, t) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1, i \neq j}^N \int d^3 \mathbf{r}_1 \dots d^3 \mathbf{r}_N \phi^*(\mathbf{r}_1, t) \dots \phi^*(\mathbf{r}_N, t) V(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j) \phi(\mathbf{r}_1, t) \dots \phi(\mathbf{r}_N, t) = \\
&= N \int d^3 \mathbf{r} \phi^*(\mathbf{r}, t) h(\mathbf{r}) \phi(\mathbf{r}, t) + \frac{1}{2} N(N-1) \int d^3 \mathbf{r} d^3 \mathbf{r}' \phi^*(\mathbf{r}, t) \phi^*(\mathbf{r}', t) V(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \phi(\mathbf{r}, t) \phi(\mathbf{r}', t) = \\
&= N \int d^3 \mathbf{r} \phi^*(\mathbf{r}, t) h(\mathbf{r}) \phi(\mathbf{r}, t) + \frac{1}{2} N(N-1) \int d^3 \mathbf{r} d^3 \mathbf{r}' |\phi(\mathbf{r}, t)|^2 V(\mathbf{r}, \mathbf{r}') |\phi(\mathbf{r}', t)|^2 \\
\langle i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \rangle &= \langle \psi | i\hbar \frac{\partial}{\partial t} | \psi \rangle = N \int d^3 \mathbf{r} dt \phi^*(\mathbf{r}, t) i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \phi(\mathbf{r}, t)
\end{aligned} \tag{1.4.2}$$

Calcoliamo le variazioni dei termini sopra calcolati tenendo conto della condizione di normalizzazione delle autofunzioni ϕ di particella singola del nostro sistema, quindi introducendo anche un moltiplicatore di Lagrange ϵ nella variazione.

$$\begin{aligned}
\delta \left[N \int dt d^3 \mathbf{r} \phi^*(\mathbf{r}, t) h(\mathbf{r}) \phi(\mathbf{r}, t) + \frac{N(N-1)}{2} \int dt d^3 \mathbf{r} d^3 \mathbf{r}' |\phi(\mathbf{r}, t)|^2 V(\mathbf{r}, \mathbf{r}') |\phi(\mathbf{r}', t)|^2 + \right. \\
\left. + N\epsilon \left(1 - \int dt d^3 \mathbf{r} \phi^*(\mathbf{r}, t) \phi(\mathbf{r}, t) \right) \right] = \\
= N \int dt d^3 \mathbf{r} \delta \phi^*(\mathbf{r}, t) \left[h(\mathbf{r}) \phi(\mathbf{r}, t) + \frac{(N-1)}{2} \int d^3 \mathbf{r}' \phi(\mathbf{r}', t) V(\mathbf{r}, \mathbf{r}') |\phi(\mathbf{r}', t)|^2 - \epsilon \phi(\mathbf{r}, t) \right] + c.c. = \\
= N \int dt d^3 \mathbf{r} \delta \phi^*(\mathbf{r}, t) \left(h(\mathbf{r}) + (N-1) \int d^3 \mathbf{r}' V(\mathbf{r}, \mathbf{r}') |\phi(\mathbf{r}', t)|^2 - \epsilon \right) \phi(\mathbf{r}, t) + c.c. \\
\delta \left[N \int dt d^3 \mathbf{r} dt \phi^*(\mathbf{r}, t) i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \phi(\mathbf{r}, t) \right] = N i\hbar \int dt d^3 \mathbf{r} dt \delta \phi^*(\mathbf{r}, t) \frac{\partial}{\partial t} \phi(\mathbf{r}, t) + c.c.
\end{aligned} \tag{1.4.3}$$

Imponendo quindi che la variazione del funzionale S si annulli per ogni $\delta \phi^*$ otteniamo

$$\left[h(\mathbf{r}, t) + (N-1) \int d^3 \mathbf{r}' V(\mathbf{r}, \mathbf{r}') |\phi(\mathbf{r}', t)|^2 - \epsilon \right] \phi(\mathbf{r}, t) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \phi(\mathbf{r}, t) \tag{1.4.4}$$

Se escludiamo la dipendenza temporale otteniamo il caso stazionario

$$\left[h(\mathbf{r}) + (N-1) \int d^3 \mathbf{r}' V(\mathbf{r}, \mathbf{r}') |\phi(\mathbf{r}')|^2 \right] \phi(\mathbf{r}) = \epsilon \phi(\mathbf{r}) \tag{1.4.5}$$

La presenza di ϵ è importante nel caso stazionario, mentre nell'equazione time-dependant può essere rimossa moltiplicando la funzione per una fase complessa, $\tilde{\phi} = \phi e^{i\frac{\epsilon t}{\hbar}}$, in quanto la nuova funzione descrive lo stesso stato quantistico di quella precedente e, una volta inserita nell'equazione 1.4.4, restituisce:

$$\left[h(\mathbf{r}) + (N-1) \int d^3 \mathbf{r}' V(\mathbf{r}, \mathbf{r}') |\phi(\mathbf{r}', t)|^2 - \epsilon \right] \phi(\mathbf{r}, t) e^{i\frac{\epsilon t}{\hbar}} = e^{i\frac{\epsilon t}{\hbar}} i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \phi(\mathbf{r}, t) - \hbar \frac{\epsilon}{\hbar} \phi(\mathbf{r}, t) e^{i\frac{\epsilon t}{\hbar}} \tag{1.4.6}$$

che si riconduce di nuovo a

$$\left[h(\mathbf{r}) + (N-1) \int d^3 \mathbf{r}' V(\mathbf{r}, \mathbf{r}') |\phi(\mathbf{r}')|^2 \right] \phi(\mathbf{r}, t) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \phi(\mathbf{r}, t) \tag{1.4.7}$$

Assumiamo ora che il potenziale d'interazione sia a corto raggio e che tale raggio d'interazione sia molto minore della distanza media tra le particelle, ipotesi verificata se il gas di bosoni è sufficientemente rarefatto, ovvero se $a_s N |\phi|^2 \ll 1$, con a_s lunghezza di scattering, parametro misurabile che quantifica l'intensità della forza in gioco. A questo punto il potenziale di interazione si può scrivere come un potenziale di contatto del tipo

$$V(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = g\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (1.4.8)$$

con un'interazione attrattiva per $g < 0$ e repulsiva per $g > 0$, ove g è detta ampiezza di scattering e per costruzione vale

$$g = \int d^3\mathbf{r} V(\mathbf{r}) \quad (1.4.9)$$

La costante g è legata ad a_s dalla relazione

$$g = \frac{4N\pi\hbar^2}{m} a_s \quad (1.4.10)$$

Se inoltre supponiamo di avere a che fare con un gran numero di bosoni, $N \gg 1$, allora possiamo approssimare $N-1$ con N stesso, arrivando alla nota equazione di Gross-Pitaevskii dipendente dal tempo [6, 7]

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + U(\mathbf{r}) + Ng|\phi(\mathbf{r}, t)|^2 \right] \phi(\mathbf{r}, t) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \phi(\mathbf{r}, t) \quad (1.4.11)$$

1.5 Trappola armonica

Procediamo ad analizzare il caso specifico in cui il potenziale esterno di particella singola sia dato dalla somma di un potenziale armonico sul piano (x,y), la cosiddetta trappola armonica, e un potenziale generico lungo l'asse z

$$U(\mathbf{r}) = \frac{m\omega_{\perp}^2}{2} (x^2 + y^2) + V(z) \quad (1.5.1)$$

I bosoni si trovano tutti nello stato fondamentale, in quanto la GPE è valida a temperature prossime allo zero dove non è rilevante l'agitazione termica, pertanto la componente della funzione d'onda relativa alle coordinate (x,y) si può pensare come l'autostato fondamentale dell'oscillatore armonico quantistico, che è una gaussiana, per cui possiamo fattorizzare $\phi(\mathbf{r}, t)$ nel seguente modo

$$\phi(x, y, z, t) = f(z, t) \frac{e^{-\frac{(x^2+y^2)}{2\sigma(z,t)^2}}}{\pi^{1/2}\sigma(z,t)} \quad (1.5.2)$$

con $f(z, t)$, funzione complessa, e $\sigma(z, t)$, funzione reale, da determinare.

Per ricavare le due funzioni minimizziamo il funzionale S dopo l'integrazione sul piano (x,y)

$$\begin{aligned} S &= \int dt d^3\mathbf{r} \phi^* \left[i\hbar \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 - U - \frac{Ng}{2} |\phi|^2 \right] \phi = \\ &= \int dt dz dx dy f^* \frac{e^{-\frac{(x^2+y^2)}{2\sigma^2}}}{\pi^{1/2}\sigma} \left[i\hbar \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 - V - \frac{m\omega_{\perp}^2}{2} (x^2 + y^2) - \frac{Ng}{2} |f|^2 \frac{e^{-\frac{(x^2+y^2)}{\sigma^2}}}{\pi\sigma^2} \right] f \frac{e^{-\frac{(x^2+y^2)}{2\sigma^2}}}{\pi^{1/2}\sigma} \end{aligned} \quad (1.5.3)$$

Riportiamo preliminarmente i seguenti integrali che prendiamo per noti e che utilizzeremo nei conti:

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} dx dy \frac{1}{\pi \sigma^2} e^{-\frac{(x^2+y^2)}{\sigma^2}} &= 1 \\
\int_{-\infty}^{+\infty} dx dy \frac{1}{\pi \sigma^2} e^{2-\frac{(x^2+y^2)}{\sigma^2}} &= \frac{1}{2} \\
\int_{-\infty}^{+\infty} dx dy \frac{1}{\pi \sigma^2} (x^2 + y^2) e^{-\frac{(x^2+y^2)}{\sigma^2}} &= \sigma^2 \\
\int_{-\infty}^{+\infty} dx dy \frac{e^{-\frac{x^2+y^2}{\sigma^2}}}{\pi \sigma^2} (x^2 + y^2)^2 &= 2\sigma^4
\end{aligned} \tag{1.5.4}$$

Per semplicità di notazione integriamo i vari addendi separatamente, classificandoli in varie tipologie a seconda della loro dipendenza da (x,y), andando a sommarli solo nel risultato finale:

- Le funzioni da noi scelte devono essere normalizzate per (x,y). Ciò implica che tutti i termini di S indipendenti da (x,y), esclusa la dipendenza da $|\phi|^2$, non vengono modificati dall'integrazione.
- Il termine che differisce da quello precedente per un cambio di costanti nell'esponenziale è

$$\int dx dy \phi^* \frac{Ng}{2} |\phi|^2 \phi = \int dx dy \frac{Ng}{2} \left(\frac{1}{\pi \sigma^2} \right)^2 e^{2-\frac{(x^2+y^2)}{\sigma^2}} f^* |f|^2 f = \frac{1}{2} \frac{1}{\pi \sigma^2} \frac{Ng}{2} f^* |f|^2 f \tag{1.5.5}$$

- Calcoliamo ora il contributo dei termini contenenti le derivate temporali, osservando che quelle di σ non influenzano in alcun modo le equazioni che discendono dal principio variazionale.

$$\begin{aligned}
\phi^* \frac{\partial}{\partial t} \phi &= \phi^* \left[\frac{\partial}{\partial t} f \frac{e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}}}{\pi^{\frac{1}{2}} \sigma} + \frac{e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}}}{\pi^{\frac{1}{2}} \sigma} f \frac{x^2 + y^2}{\sigma^3} \frac{\partial}{\partial t} \sigma - \frac{e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}}}{\pi^{\frac{1}{2}}} f \frac{1}{\sigma^2} \frac{\partial}{\partial t} \sigma \right] = \\
&= \frac{e^{-\frac{x^2+y^2}{\sigma^2}}}{\pi \sigma^2} \left[f^* \frac{\partial}{\partial t} f + \left(\frac{x^2 + y^2}{\sigma^3} - \frac{1}{\sigma} \right) f^* f \frac{\partial}{\partial t} \sigma \right]
\end{aligned} \tag{1.5.6}$$

Quindi integrando tale espressione si ottiene

$$\begin{aligned}
\int dx dy \frac{e^{-\frac{x^2+y^2}{\sigma^2}}}{\pi \sigma^2} \left[f^* \frac{\partial}{\partial t} f + \left(\frac{x^2 + y^2}{\sigma^3} - \frac{1}{\sigma} \right) f^* f \frac{\partial}{\partial t} \sigma \right] &= \left[f^* \frac{\partial}{\partial t} f + \left(\frac{\sigma^2}{\sigma^3} - \frac{1}{\sigma} \right) f^* f \frac{\partial}{\partial t} \sigma \right] = \\
&= f^* \frac{\partial}{\partial t} f
\end{aligned} \tag{1.5.7}$$

- Integriamo ora i termini riguardanti le derivate spaziali, notando che per quanto riguarda le derivate

lungo l'asse z di σ compare unicamente la derivata prima, che denotiamo con l'apice σ' :

$$\begin{aligned}
& \int dx dy dz dt \phi^* \nabla^2 \phi = \int dx dy dz dt \left[\nabla(\phi^* \nabla \phi) - \nabla \phi^* \nabla \phi \right] = \\
& = - \int dx dy dz dt |\nabla \phi|^2 = - \int dx dy dz dt \left[\left| \frac{\partial}{\partial x} \phi \right|^2 + \left| \frac{\partial}{\partial y} \phi \right|^2 + \left| \frac{\partial}{\partial z} \phi \right|^2 \right] = \\
& = - \int dt dz dx dy \frac{e^{\frac{x^2+y^2}{\sigma^2}}}{\pi \sigma^2} \left[\frac{x^2+y^2}{\sigma^4} |f|^2 + \left(\sigma' \left(\frac{x^2+y^2}{\sigma^3} - \frac{1}{\sigma} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \right) f \left(\sigma' \left(\frac{x^2+y^2}{\sigma^3} - \frac{1}{\sigma} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \right) f^* \right] = \\
& = - \int dt dz dx dy \frac{e^{\frac{x^2+y^2}{\sigma^2}}}{\pi \sigma^2} \left[\frac{x^2+y^2}{\sigma^4} f^* f + (\sigma')^2 \left(\frac{x^2+y^2}{\sigma^3} - \frac{1}{\sigma} \right)^2 f^* f + \left| \frac{\partial}{\partial z} f \right|^2 + \right. \\
& \quad \left. + \sigma' \left(\frac{x^2+y^2}{\sigma^3} - \frac{1}{\sigma} \right) \left(f^* \frac{\partial}{\partial z} f + f \frac{\partial}{\partial z} f^* \right) \right] = \\
& = - \int dt dz \left[\frac{\sigma^2}{\sigma^4} f^* f + \left(2 \frac{\sigma^4}{\sigma^2} + \frac{1}{\sigma^2} - 2 \frac{1}{\sigma^2} \right) (\sigma')^2 f^* f + \frac{\partial}{\partial z} f \frac{\partial}{\partial z} f^* \right] = \\
& = - \int dt dz \left[\frac{1}{\sigma^2} f^* f + \frac{(\sigma')^2}{\sigma^2} f^* f + \frac{\partial}{\partial z} \left(f^* \frac{\partial}{\partial z} f \right) - f^* \frac{\partial^2}{\partial z^2} f \right] = \\
& = - \int dt dz \left[\frac{1}{\sigma^2} f^* f + \frac{(\sigma')^2}{\sigma^2} f^* f - f^* \frac{\partial^2}{\partial z^2} f \right]
\end{aligned} \tag{1.5.8}$$

Applicando tali risultati al funzionale descritto in 1.5.3 si trova

$$S = \int dt dz f^* \left[i \hbar \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\hbar^2}{2m\sigma^2} - \frac{m\omega_{\perp}^2 \sigma^2}{2} - V + \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{Ng}{4\pi\sigma^2} |f|^2 - \frac{\hbar^2 (\sigma')^2}{2m \sigma^2} \right] f \tag{1.5.9}$$

Calcolando la variazione di S rispetto a σ e ad f separatamente otteniamo due distinte equazioni per questi parametri variazionali. Consideriamo solo la variazione δf^* , tenendo conto che quella per δf sar , come visto in 1.3.6, il suo complesso coniugato:

$$\int dx dt \delta f^* \left[i \hbar \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\hbar^2}{2m\sigma^2} - \frac{m\omega_{\perp}^2 \sigma^2}{2} - V + \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{Ng}{4\pi\sigma^2} |f|^2 - \frac{\hbar^2 (\sigma')^2}{2m \sigma^2} \right] f = 0 \tag{1.5.10}$$

Il fattore 2 del penultimo addendo deriva dal fatto che   stato fatto variare sia il fattore moltiplicativo f^* sia $|f|^2$. Da tale variazione nulla discende immediatamente

$$i \hbar \frac{\partial}{\partial t} f = \left[\frac{\hbar^2}{2m\sigma^2} + \frac{m\omega_{\perp}^2 \sigma^2}{2} + V - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{Ng}{2\pi\sigma^2} |f|^2 + \frac{\hbar(\sigma')^2}{2m\sigma^2} \right] f \tag{1.5.11}$$

Studiando invece la variazione di σ

$$\begin{aligned}
0 & = \int dt dz f^* \left[\delta \sigma \left(\frac{\hbar^2}{m\sigma^3} - m\omega_{\perp}^2 \sigma + \frac{Ng}{2\pi\sigma^3} |f|^2 + \frac{\hbar^2 (\sigma')^2}{m\sigma^3} \right) - \delta \sigma' \frac{\hbar \sigma'}{m\sigma^2} \right] f = \\
& = \int dt dz \left[f^* \delta \sigma \left(\frac{\hbar^2}{m\sigma^3} - m\omega_{\perp}^2 \sigma + \frac{Ng}{2\pi\sigma^3} |f|^2 + \frac{\hbar^2 (\sigma')^2}{m\sigma^3} \right) f - \frac{\partial}{\partial z} \left(f^* f \frac{\hbar \sigma'}{m\sigma^2} \delta \sigma \right) + \delta \sigma \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\hbar \sigma'}{m\sigma^2} |f|^2 \right) \right] = \\
& = \int dt dz \left[|f|^2 \left(\frac{\hbar^2}{m\sigma^3} - m\omega_{\perp}^2 \sigma + \frac{Ng}{2\pi\sigma^3} |f|^2 + \frac{\hbar^2 (\sigma')^2}{m\sigma^3} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\hbar \sigma'}{m\sigma^2} |f|^2 \right) \right] \delta \sigma
\end{aligned} \tag{1.5.12}$$

Per la variazione di σ otteniamo quindi il risultato

$$0 = \frac{\hbar^2}{m\sigma^3} - m\omega_{\perp}^2 \sigma + \frac{Ng}{2\pi\sigma^3} |f|^2 + \frac{\hbar^2 (\sigma')^2}{m\sigma^3} + \frac{\hbar}{m|f|^2} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\sigma'}{\sigma^2} |f|^2 \right) \tag{1.5.13}$$

Le due equazioni accoppiate sono quindi [8]

$$\begin{cases} 0 = \frac{\hbar^2}{m} - m\omega_{\perp}^2\sigma^4 + \frac{Ng}{2\pi}|f|^2 + \frac{\hbar^2(\sigma')^2}{m} + \frac{\hbar\sigma^3}{m|f|^2} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\sigma'}{\sigma^2} |f|^2 \right) \\ i\hbar \frac{\partial}{\partial t} f = \left[\frac{\hbar^2}{2m\sigma^2} + \frac{m\omega_{\perp}^2\sigma^2}{2} + V - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{Ng}{2\pi\sigma^2}|f|^2 + \frac{\hbar(\sigma')^2}{2m\sigma^2} \right] f \end{cases} \quad (1.5.14)$$

Possiamo a questo punto, dopo aver trattato il problema nella caso più generale, trascurare le derivate spaziali di σ , supponendo che essa vari molto lentamente, ottenendo quindi il sistema di equazioni semplificato

$$\begin{cases} i\hbar \frac{\partial}{\partial t} f = \left[\frac{\hbar^2}{2m\sigma^2} + \frac{m\omega_{\perp}^2\sigma^2}{2} + V - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{Ng}{2\pi\sigma^2}|f|^2 \right] f \\ \frac{\hbar^2}{m\sigma^3} - m\omega_{\perp}^2\sigma + \frac{Ng}{2\pi\sigma^3}|f|^2 = 0 \end{cases} \quad (1.5.15)$$

Ricaviamo dunque σ^2 in funzione di f dalla seconda equazione, utilizzando le costanti a_s , definita dall'equazione 1.4.10, e $a_{\perp} = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega_{\perp}}}$, ottenendo

$$\sigma^2 = \sqrt{\frac{\frac{\hbar^2}{m} + \frac{Ng}{2\pi}|f(z)|^2}{m\omega_{\perp}^2}} = \frac{\hbar}{m\omega_{\perp}} \sqrt{\frac{m^2\omega_{\perp}^2}{\hbar^2} \left(\frac{\hbar^2}{m} + \frac{N4\pi\hbar^2 a_s |f|^2}{2\pi m} \right) \frac{1}{m\omega_{\perp}^2}} = a_{\perp}^2 \sqrt{1 + 2Na_s |f(z)|^2} \quad (1.5.16)$$

Riscivendo con questa espressione per σ^2 la prima equazione troviamo un'equazione di Schrodinger non polinomiale (NPSE) [9], in quanto non può essere scritta come una somma di potenze naturali di f , ma compaiono dei termini ad esponente razionale

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} f = \left[\frac{\hbar^2}{2ma_{\perp}^2 \sqrt{1 + 2Na_s |f|^2}} + \frac{m\omega_{\perp}^2 a_{\perp}^2 \sqrt{1 + 2Na_s |f|^2}}{2} + V - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{Ng|f|^2}{2\pi a_{\perp}^2 \sqrt{1 + 2Na_s |f|^2}} \right] f \quad (1.5.17)$$

Effettuiamo ora dei semplici riscalamanti nell'equazione, in unità di ω_{\perp}^{-1} per t e di a_{\perp} per z , utilizzando anche il cambio di variabile $\gamma = |a_s| \frac{N}{a_{\perp}}$ e $\tau = \text{sgn}(a_s)$, sostituendo a quest'ultima variabile ± 1 solo nei casi particolari, trattando il tutto inizialmente in maniera generale.

I vari termini dell'equazione vengono modificati nel seguente modo

$$\begin{aligned} \sqrt{1 + 2Na_s |f|^2} &= \sqrt{a_{\perp}} \sqrt{1 + 2Na_s |f|^2} \frac{1}{a_{\perp}} = \sqrt{a_{\perp}} \sqrt{1 + 2\tau\gamma |f|^2} \rightarrow \sqrt{1 + 2\tau\gamma |f|^2} \\ -\frac{\hbar^2}{2m} &= -\hbar \frac{\hbar}{2m} = -\frac{\hbar}{2} \omega_{\perp} a_{\perp}^2 \rightarrow -\frac{\hbar}{2} \\ \frac{gN}{2\pi a_{\perp}^2} &= \frac{4\pi\hbar^2 Na_s}{a_{\perp}^2 2\pi m} = \frac{2\hbar}{m} \frac{\hbar}{a_{\perp}} \frac{a_s N}{a_{\perp}} \rightarrow 2\hbar\tau\gamma \end{aligned} \quad (1.5.18)$$

L'equazione si presenta quindi in una forma più semplice, tenendo conto che \hbar si raccoglie a fattor comune e viene semplificata:

$$i \frac{\partial}{\partial t} f = \left[\frac{1}{2\sqrt{1 + 2\tau\gamma |f|^2}} + \frac{\sqrt{1 + 2\tau\gamma |f(z)|^2}}{2} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial z^2} + V + 2\tau\gamma |f|^2 \sqrt{1 + 2\tau\gamma |f(z)|^2} \right] f \quad (1.5.19)$$

1.6 L'equazione di Gross-Pitaevskii 1D

Se come ansatz variazionale avessimo scelto una funzione del tipo [10]

$$\phi(x, y, z, t) = f(z, t) \frac{e^{-\frac{(x^2+y^2)}{2\sigma^2}}}{\pi^{1/2}\sigma} \quad (1.6.1)$$

con $\sigma = a_{\perp} = \text{cost.}$ e avessimo minimizzato in questo caso il funzionale S dopo l'integrazione su (x,y) , avremmo trovato un risultato analogo al sistema 1.5.14 senza però le derivate di σ e senza l'equazione relativa alla sua variazione, in quanto essa è assunta ora come costante, cioè l'equazione finale sarebbe stata un'equazione analoga in forma a quella di Gross-Pitaevskii, solo in una dimensione, cioè

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} f = \left[\frac{\hbar^2}{2ma_{\perp}^2} + \frac{m\omega_{\perp}^2 a_{\perp}^2}{2} + V - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{Ng}{2\pi a_{\perp}^2} |f|^2 \right] f = \left[\hbar\omega_{\perp} + V - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{Ng}{2\pi a_{\perp}^2} |f|^2 \right] f \quad (1.6.2)$$

Si può giungere allo stesso risultato a partire dall'equazione 1.5.17 se il termine $a_s N |f|^2 \ll 1$, infatti si può sviluppare la NPSE in serie di Taylor al primo ordine in $a_s N |f|^2$ e, sfruttando l'uguaglianza $\frac{\hbar^2}{ma_{\perp}^2} = m\omega_{\perp}^2 a_{\perp}^2 = \hbar\omega$, si ricava

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial}{\partial t} f &= \left[\frac{\hbar\omega}{2} (1 - Na_s |f|^2) + \frac{\hbar\omega}{2} (1 + Na_s |f|^2) + V - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{Ng|f|^2}{2\pi a_{\perp}^2} \right] f = \\ &= \left[\hbar\omega + V - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{Ng|f|^2}{2\pi a_{\perp}^2} \right] f \end{aligned} \quad (1.6.3)$$

Tale range di valori per a_s significa che l'entità forza totale che agisce sui nostri bosoni, cioè quella tra due singoli bosoni, quantificata da a_s , per la densità di bosoni lungo l'asse z, $N|f|^2$, è molto piccola, siamo cioè nel limite debolmente interagente.

Ciò che si osserva, confrontando la soluzione numerica della 3D GPE, della 1D GPE e della NPSE è che la non polinomiale rispecchia maggiormente l'andamento della soluzione dell'equazione di Gross-Pitaevskii tridimensionale rispetto alla sua riduzione ad una dimensione [9], quindi possiamo affermare che l'equazione 1.5.17 è una generalizzazione della 1.6.2, che ne rappresenta il limite per bosoni debolmente interagenti.

Capitolo 2

Solitoni

2.1 Soluzioni shape-invariant

Procediamo ora a studiare le soluzioni di tale equazione che hanno un profilo costante, cioè che dipendono da z e t tramite una qualsiasi funzione in $z-vt$ moltiplicata, al più, per una fase complessa del tempo, che, come abbiamo visto in 1.4.7, può essere facilmente rimossa.

Possiamo quindi scrivere la funzione $f(z,t)$ come

$$f(z,t) = \Phi(z-vt)e^{i[\theta(z-vt)+\beta(t)]} \quad (2.1.1)$$

dove Φ , θ e β sono tre funzioni reali. Il modulo quadro di una funzione di questo tipo presenta proprio la caratteristica di mantenere la stessa forma, spostandosi però con una certa velocità v lungo l'asse z , infatti prendendo due istanti di tempo t_1, t_2 si vede che la funzione $|f(z, t_2)|^2 = |\Phi(z-vt_2)|^2$ rappresenta la funzione $|f(z, t_1)|^2 = |\Phi(z-vt_1)|^2$ traslata nello spazio di $v(t_2 - t_1)$. Fisicamente dunque, per tale soluzione, la densità di bosoni lungo l'asse z si muove di moto traslatorio lungo l'asse z , rimanendo però la stessa a livello di forma.

Utilizzeremo pertanto, da un certo punto della nostra trattazione, il cambio di variabile

$$\chi = z - vt \quad (2.1.2)$$

in quanto l'informazione sulla forma della funzione che stiamo studiando ci è fornita più semplicemente da χ , non c'è alcun bisogno di analizzare separatamente z e t .

2.2 Equazioni generali

Inserendo f nella forma (2.1.1) nell'equazione (1.5.17) con $V(z)=0$ osserviamo che scompare la dipendenza dall'esponenziale, in quanto è presente in tutti i termini e può essere raccolto a fattor comune e semplificato, inoltre esso non contribuisce ai termini del tipo $|f|^2$, poichè è una fase complessa, quindi l'equazione diventa

$$\begin{aligned} \left[i \frac{\partial}{\partial t} + i^2 \left(\frac{\partial}{\partial t} \theta + \frac{\partial}{\partial t} \beta \right) \right] \Phi = & \left[\frac{1}{2\sqrt{1+2\tau\gamma\Phi^2}} + \frac{\sqrt{1+2\tau\gamma\Phi^2}}{2} + 2\tau\gamma\sqrt{1+2\tau\gamma\Phi^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \right. \\ & \left. + (-1)i \frac{1}{2} 2 \frac{\partial}{\partial z} \theta \frac{\partial}{\partial z} - i \frac{1}{2} \partial_{z^2}^2 \theta + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial z} \theta \right)^2 \right] \Phi \end{aligned} \quad (2.2.1)$$

Un'equazione in campo complesso comporta necessariamente l'uguaglianza tra la parte reale dell'equazione e la parte immaginaria, quindi troviamo un sistema di due equazioni differenziali accoppiate che andiamo

a risolvere. Il sistema a cui arriviamo, tenendo conto che per una generica funzione dipendente da $(z-vt)$ vale la regola di derivazione di funzioni composte $\frac{\partial}{\partial t}h(z-vt) = -v\frac{\partial}{\partial z}h(z-vt)$, è

$$\begin{cases} v\frac{\partial}{\partial z}\Phi = \frac{\partial}{\partial z}\Phi\frac{\partial}{\partial z}\theta + \frac{1}{2}\partial_z^2\theta\Phi \\ \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial z^2}\Phi = \frac{1}{2\sqrt{1+2\tau\gamma\Phi^2}}\Phi + \frac{\sqrt{1+2\tau\gamma\Phi^2}}{2}\Phi + 2\tau\gamma\sqrt{1+2\tau\gamma\Phi^2}\Phi + \frac{1}{2}\Phi\left(\frac{\partial}{\partial z}\theta\right)^2 - v\frac{\partial}{\partial z}\theta\Phi + \frac{\partial}{\partial t}\beta\Phi \end{cases} \quad (2.2.2)$$

2.3 Fase

Dalla prima equazione del sistema 2.2.2, introducendo il cambio di variabile 2.1.2 possiamo ricavare $\frac{d}{d\chi}\theta$ in funzione di Φ

$$\begin{aligned} v\frac{d}{d\chi}\Phi &= \frac{d}{d\chi}\Phi\frac{d}{d\chi}\theta + \frac{1}{2}\frac{d^2}{d\chi^2}\theta\Phi \rightarrow v\frac{\frac{d}{d\chi}\Phi^2}{\Phi} = \frac{\frac{d}{d\chi}(\Phi^2\frac{d}{d\chi}\theta)}{\Phi} \rightarrow v\frac{d}{d\chi}\Phi^2 = \frac{d}{d\chi}(\Phi^2\frac{d}{d\chi}\theta) \\ \int_{\chi_0}^{\chi} d\tilde{\chi}v\frac{d}{d\tilde{\chi}}\Phi^2 &= \int_{\chi_0}^{\chi} d\tilde{\chi}\frac{d}{d\tilde{\chi}}(\Phi^2\frac{d}{d\tilde{\chi}}\theta) \rightarrow k = \Phi^2\left(v - \frac{d}{d\chi}\theta\right) \end{aligned} \quad (2.3.1)$$

ove k è una costante di integrazione qualsiasi da determinare. Per farlo assumiamo che $\Phi(\chi)$ e $\theta(\chi)$ all'infinito assumano un valore costante

$$\begin{aligned} \lim_{\chi \rightarrow \infty} \Phi &= \Phi_{\infty} \\ \lim_{\chi \rightarrow \infty} \frac{d}{d\chi}\theta &= 0 \rightarrow k = v\Phi_{\infty}^2 \end{aligned} \quad (2.3.2)$$

Notiamo ora che se $\Phi = 0$ per qualche χ allora necessariamente $k=0$, quindi deve essere soddisfatta la seguente condizione

$$\Phi_{\infty} = 0 \quad \text{oppure} \quad v = 0 \quad (2.3.3)$$

Fatta tale precisazione possiamo scrivere l'equazione differenziale per $\theta(\chi)$ in funzione di $\Phi(\chi)$ che è quindi

$$\frac{d}{d\chi}\theta = v\left(1 - \frac{\Phi_{\infty}^2}{\Phi^2}\right) \quad (2.3.4)$$

2.4 Integrale Primo

La funzione $\beta(t)$ non è univocamente determinata e, in quanto argomento di una fase complessa dipendente esclusivamente dal tempo, possiamo sceglierla nella forma che semplifica il più possibile le nostre equazioni, come ad esempio

$$\beta = t\left(\frac{v^2}{2} - \mu\right) \quad (2.4.1)$$

Fatta tale semplificazione e sostituendola nella seconda equazione del sistema 2.2.2 otteniamo

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\frac{d^2}{d\chi^2}\Phi &= \left[\frac{1}{2\sqrt{1+2\tau\gamma\Phi^2}} + \frac{\sqrt{1+2\tau\gamma\Phi^2}}{2} + 2\tau\gamma\frac{\Phi^2}{\sqrt{1+2\tau\gamma\Phi^2}} + \frac{1}{2}\left(\frac{d}{d\chi}\theta\right)^2 - v\frac{d}{d\chi}\theta + \frac{\partial}{\partial t}\beta \right]\Phi = \\ &= \left[\frac{1}{2\sqrt{1+2\tau\gamma\Phi^2}} + \frac{\sqrt{1+2\tau\gamma\Phi^2}}{2} + 2\tau\gamma\frac{\Phi^2}{\sqrt{1+2\tau\gamma\Phi^2}} + \frac{v^2\Phi_{\infty}^4}{2\Phi^4} - \mu \right]\Phi = -\frac{1}{2}\frac{d}{d\chi}V(\Phi) \end{aligned} \quad (2.4.2)$$

Si vede facilmente che tale equazione è analoga all'equazione del moto di Newton in una dimensione, quindi conosciamo già un suo integrale primo, che ha la stessa forma dell'energia della meccanica classica:

$$I = \frac{\left(\frac{d}{d\chi}\Phi\right)^2}{2} + V(\Phi) \quad (2.4.3)$$

Procediamo quindi a cercare il potenziale esprimendolo nella forma

$$V(\Phi) = \sum_{i=1}^4 V_i(\Phi) \quad (2.4.4)$$

andando ad integrare separatamente i vari addendi trattandoli come singoli potenziali e sommandoli tutti alla fine per ottenere quello totale, ponendo convenzionalmente a zero la costante di integrazione di ogni singolo potenziale:

$$\begin{aligned} V_1 &= -2 \int d\Phi \left[\frac{v^2 \Phi_\infty^4}{2\Phi^4} - \mu \right] \Phi = -2 \left[-\frac{1}{2} \mu \Phi^2 - \frac{v^2 \Phi_\infty^4}{4\Phi^2} \right] = \mu \Phi^2 + \frac{v^2 \Phi_\infty^4}{2\Phi^2} \\ V_2 &= -2 \int d\Phi \frac{\Phi}{2\sqrt{1+2\tau\gamma\Phi^2}} = -2 \frac{1}{4\tau\gamma} \sqrt{1+2\tau\gamma\Phi^2} = -\frac{1}{2\tau\gamma} \sqrt{1+2\tau\gamma\Phi^2} \\ V_3 &= -2 \int d\Phi \frac{\sqrt{1+2\tau\gamma\Phi^2}}{2} = -\frac{1}{12\tau\gamma} \sqrt{(1+2\tau\gamma\Phi^2)^3} = -\sqrt{1+2\tau\gamma\Phi^2} \left(\frac{\Phi^2}{3} + \frac{1}{6\tau\gamma} \right) \\ V_4 &= -2 \int d\Phi 2\tau\gamma \frac{\Phi^3}{\sqrt{1+2\tau\gamma\Phi^2}} = -2\Phi^2 \sqrt{1+2\tau\gamma\Phi^2} + 2 \int d\Phi 2\Phi \sqrt{1+2\tau\gamma\Phi^2} = \\ &= -2\Phi^2 \sqrt{1+2\tau\gamma\Phi^2} + \frac{2}{3\tau\gamma} \sqrt{(1+2\tau\gamma\Phi^2)^3} = -\sqrt{1+2\tau\gamma\Phi^2} \left(\frac{2\Phi^2}{3} - \frac{2}{3\tau\gamma} \right) \\ V &= \int d\Phi \partial_\Phi V(\Phi) = -\sqrt{1+2\tau\gamma\Phi^2} \left(\frac{1}{2\tau\gamma} + \frac{\Phi^2}{3} + \frac{1}{6\tau\gamma} + \frac{2\Phi^2}{3} - \frac{2}{3\tau\gamma} \right) + \mu \Phi^2 + \frac{v^2}{2} \frac{\Phi_\infty^4}{\Phi^2} = \\ &= -\sqrt{1+2\tau\gamma\Phi^2} \Phi^2 + \mu \Phi^2 + \frac{v^2}{2} \frac{\Phi_\infty^4}{\Phi^2} \end{aligned} \quad (2.4.5)$$

Otteniamo di conseguenza anche l'integrale primo della nostra equazione differenziale

$$I = \frac{\left(\frac{d}{d\chi}\Phi\right)^2}{2} - \sqrt{1+2\tau\gamma\Phi^2}\Phi^2 + \mu\Phi^2 + \frac{v^2}{2} \frac{\Phi_\infty^4}{\Phi^2} = \text{cost.} \quad (2.4.6)$$

2.5 Proprietà delle soluzioni

Dalla forma del sistema 2.2.2 notiamo che sono soddisfatte le ipotesi di esistenza e unicità locale delle soluzioni, in quanto le equazioni che lo definiscono sono continue $\forall(\chi, \Phi, \frac{d}{d\chi}\Phi) : 1+2\tau\gamma\Phi^2 > 0$.

Dimostriamo che tale equazione differenziale ammette soluzioni sia pari che dispari.

Se $Y(\chi)$ è soluzione per $\chi > 0$ allora vale

$$I = \frac{\left(\frac{d}{d\chi}Y(\chi)\right)^2}{2} - \sqrt{1+2\tau\gamma(Y(\chi))^2}(Y(\chi))^2 + \mu(Y(\chi))^2 + \frac{v^2}{2} \frac{\Phi_\infty^4}{(Y(\chi))^2} \quad (2.5.1)$$

Possiamo scrivere per $\chi < 0$

$$I = \frac{\left(\frac{d}{d\chi}Y(-\chi)\right)^2}{2} - \sqrt{1+2\tau\gamma(Y(-\chi))^2}(Y(-\chi))^2 + \mu(Y(-\chi))^2 + \frac{v^2}{2} \frac{\Phi_\infty^4}{(Y(-\chi))^2} \quad (2.5.2)$$

in quanto $Y(-\chi)$ sarà soluzione nell'intervallo opposto a quello di partenza. Definendo $W(\chi) = \pm Y(-\chi)$, relativamente all'intervallo $\chi < 0$ si può scrivere anche

$$I = \frac{\left(\mp \frac{d}{d\chi}W(\chi)\right)^2}{2} - \sqrt{1+2\tau\gamma(\pm W(\chi))^2}(\pm W(\chi))^2 + \mu(\pm W(\chi))^2 + \frac{v^2}{2} \frac{\Phi_\infty^4}{(\pm W(\chi))^2} \quad (2.5.3)$$

ma anche $W(\chi)$ soddisfa l'equazione differenziale, in quanto tutte le differenze di segno vengono rimosse poichè tutti i termini in $W(\chi)$, comprese le sue derivate, sono elevati al quadrato, pertanto anche $W(\chi)$ è

soluzione. Tuttavia $W(0) = Y(0)$ da cui si conclude, per unicità delle soluzioni, che le due distinte soluzioni $W(\chi)$ e $Y(\chi)$ sono la stessa e quindi, dato che $W(\chi) = \pm Y(-\chi)$ le soluzioni sono pari/dispari. A seconda delle condizioni al contorno che scegliamo per il nostro problema di Cauchy siamo quindi liberi di scegliere delle soluzioni pari/dispari sapendo che l'equazione differenziale garantisce la loro esistenza.

2.6 Modulo

A questo punto si può procedere, almeno a livello formale, ad esprimere la soluzione per quadrature, cioè

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{d}{d\chi} \Phi = \pm \sqrt{I + \Phi^2 \sqrt{1 + 2\tau\gamma\Phi^2} - \mu\Phi^2 - \frac{v^2}{2} \frac{\Phi_\infty^4}{\Phi^2}} \quad (2.6.1)$$

che in definitiva fornisce, separando le variabili Φ e χ e ponendo come estremi di integrazione $\chi_i = 0$ e $\chi_f = \chi$

$$\chi = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{\Phi(0)}^{\Phi(\chi)} d\Phi \frac{1}{\sqrt{I + \Phi^2 \sqrt{1 + 2\tau\gamma\Phi^2} - \mu\Phi^2 - \frac{v^2}{2} \frac{\Phi_\infty^4}{\Phi^2}}} \quad (2.6.2)$$

Mettiamo quest'ultima equazione a sistema con l'equazione 2.3.4 e risolviamo cercando $\Phi(\chi)$ e $\theta(\chi)$.

Non è detto che l'integrale 2.6.2 sia sempre risolvibile in maniera esatta: la sua possibile risoluzione analitica dipende dalle condizioni al contorno del nostro sistema di equazioni differenziali, che sono diverse a seconda del tipo di solitone che stiamo studiando, che può essere bright, black o gray, quindi affrontiamo ciascuno dei tre casi separatamente dagli altri.

Capitolo 3

Bright Soliton

3.1 Bright Soliton nella NPSE

Studiamo per primo il bright soliton, definito da un profilo simmetrico rispetto all'asse $\chi = 0$ e tale da avere in quel punto un massimo di probabilità isolato, con una probabilità tendente a zero distante da esso. Tale picco fisicamente corrisponde ad un addensamento di bosoni, quindi si suppone che il potenziale tra di essi sia attrattivo, cioè $a_s < 0$, pertanto in questo caso $\tau = -1$. Possiamo quindi riscrivere 2.6.2 e 2.3.4 come

$$\begin{cases} \chi = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{\Phi(0)}^{\Phi(\chi)} d\Phi \frac{1}{\sqrt{I + \Phi^2 \sqrt{1 - 2\gamma\Phi^2 - \mu\Phi^2 - \frac{v^2}{2} \frac{\Phi^4}{\Phi^2}}}} \\ \frac{d}{d\chi} \theta = v \left(1 - \frac{\Phi_\infty^2}{\Phi^2} \right) \end{cases} \quad (3.1.1)$$

In base a quanto assunto la funzione cercata si deve annullare, insieme alle sue derivate, all'infinito

$$\begin{aligned} \lim_{\chi \rightarrow \infty} \Phi(\chi) &= 0 \\ \lim_{\chi \rightarrow \infty} \frac{d}{d\chi} \Phi(\chi) &= 0 \end{aligned} \quad (3.1.2)$$

il che comporta l'annullarsi anche dell'integrale primo

$$I = \lim_{\chi \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{d}{d\chi} \Phi(\chi) \right)^2 + \mu \Phi(\chi)^2 - \Phi(\chi)^2 \sqrt{1 - 2\gamma\Phi(\chi)^2} + \frac{v^2}{2} \frac{\Phi_\infty^4}{\Phi^2} \right] = 0 \quad (3.1.3)$$

L'equazione 2.3.4 si semplifica notevolmente in questo particolare caso e possiamo risolverla senza conoscere la forma di Φ

$$\frac{d}{d\chi} \theta = v \rightarrow \theta(\chi) = v\chi \quad (3.1.4)$$

A questo punto possiamo esprimere un ulteriore vincolo sulla nostra funzione: la parità di Φ implica che la sua derivata in 0 è nulla, il che ci fornisce una relazione tra il massimo della funzione $\Phi_0 = \Phi(0)$ e i due parametri μ e γ

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2} \left(\frac{d}{d\chi} \Phi_0 \right)^2 + \mu \Phi_0^2 - \Phi_0^2 \sqrt{1 - 2\gamma\Phi_0^2} = 0 \\ 0 &= \Phi_0^2 \left[\mu - \sqrt{1 - 2\gamma\Phi_0^2} \right] \\ \Phi_0^2 &= \frac{1 - \mu^2}{2\gamma} \end{aligned} \quad (3.1.5)$$

Risolviamo l'equazione per Φ lungo la semiretta $[0, +\infty]$, dato che l'altra metà sarà determinata univocamente dalla parità della funzione. Poichè abbiamo assunto che in $\chi = 0$ c'è un massimo, il segno che dobbiamo prendere per la derivata è negativo, quindi la nostra equazione è

$$\chi = -\frac{1}{\sqrt{2}} \int_{\Phi_0}^{\Phi(\chi)} d\Phi \frac{1}{\sqrt{\sqrt{1-2\gamma\Phi^2\Phi^2} - \mu\Phi^2}} \quad (3.1.6)$$

Tale integrale è risolubile analiticamente, però la sua primitiva non è invertibile, pertanto la funzione che otteniamo è l'inversa di quella cercata, cioè $\chi(\Phi(\chi))$ ¹

$$\chi = \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{1-\mu}} \operatorname{arctanh} \left(\sqrt{\frac{\sqrt{1-2\gamma\Phi^2(\chi)} - \mu}{1-\mu}} \right) - \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{1+\mu}} \operatorname{arctan} \left(\sqrt{\frac{\sqrt{1-2\gamma\Phi^2(\chi)} - \mu}{1+\mu}} \right) \right] \quad (3.1.7)$$

Tale soluzione rappresenta però soltanto la soluzione per $\chi > 0$ quindi, sapendo che la funzione è pari, la soluzione estesa a tutto il dominio si scrive

$$|\chi| = \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{1-\mu}} \operatorname{arctanh} \left(\sqrt{\frac{\sqrt{1-2\gamma\Phi^2(\chi)} - \mu}{1-\mu}} \right) - \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{1+\mu}} \operatorname{arctan} \left(\sqrt{\frac{\sqrt{1-2\gamma\Phi^2(\chi)} - \mu}{1+\mu}} \right) \right] \quad (3.1.8)$$

La funzione che stiamo cercando deve essere normalizzata, quindi con quest'ultima condizione ricaviamo un'equazione che lega μ a γ . Non conoscendo analiticamente la funzione sfruttiamo un cambio di variabile che ci permette di calcolare l'integrale nella forma di $\frac{d}{d\Phi}\chi$, cioè

$$\int_{x_-}^{x_+} dx y(x) = \int_{y(x_-)}^{y(x_+)} dy \frac{dx}{dy} y \quad (3.1.9)$$

Applicandolo al nostro caso particolare si ottiene, tenendo conto della parità della soluzione

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} d\chi (\Phi(\chi))^2 &= 2 \int_0^{+\infty} d\chi (\Phi(\chi))^2 = 2 \int_{\Phi_0}^{\Phi(+\infty)} d\Phi(\chi) \frac{d\chi}{d\Phi(\chi)} (\Phi(\chi))^2 = \\ &= -\frac{2}{\sqrt{2}} \int_{\Phi_0}^{\Phi(+\infty)} d\Phi \frac{\Phi^2}{\sqrt{\sqrt{1-2\gamma\Phi^2\Phi^2} - \mu\Phi^2}} = -\frac{2}{\sqrt{2}} \int_{\Phi_0}^{\Phi(+\infty)} d\Phi \frac{\Phi}{\sqrt{\sqrt{1-2\gamma\Phi^2} - \mu}} = \\ &= -\frac{2}{\sqrt{2}} \left[\frac{(-1)}{3\gamma} \sqrt{\sqrt{1-2\gamma\Phi^2} - \mu(\sqrt{1-2\gamma\Phi^2} + 2\mu)} \right]_{\Phi_0}^0 = \frac{2}{3\sqrt{2}\gamma} \sqrt{1-\mu}(1+2\mu) = \\ &= \frac{2}{3\sqrt{2}\gamma} \sqrt{1-\mu}(-2+2\mu+3) = -\frac{4}{3\sqrt{2}\gamma} \sqrt{(1-\mu)^3} + \frac{2}{\sqrt{2}\gamma} \sqrt{1-\mu} = 1 \end{aligned} \quad (3.1.10)$$

La condizione che ricaviamo è quindi

$$(1-\mu)^{3/2} - \frac{3}{2}(1-\mu)^{1/2} + \frac{3}{2\sqrt{2}}\gamma = 0 \quad (3.1.11)$$

Esplicitiamo γ rispetto a μ

$$\gamma = \frac{2\sqrt{2}}{3} \left[\frac{3}{2}(1-\mu)^{1/2} - (1-\mu)^{3/2} \right] \quad (3.1.12)$$

¹Vi è un leggero abuso di notazione in quanto abbiamo chiamato l'estremo di integrazione di Φ $\Phi(\chi)$, quando invece sarebbe stato più corretto integrare in $d\tilde{\Phi}$ e porre come estremo di integrazione Φ ma, per semplicità di notazione, useremo sempre questa convenzione.

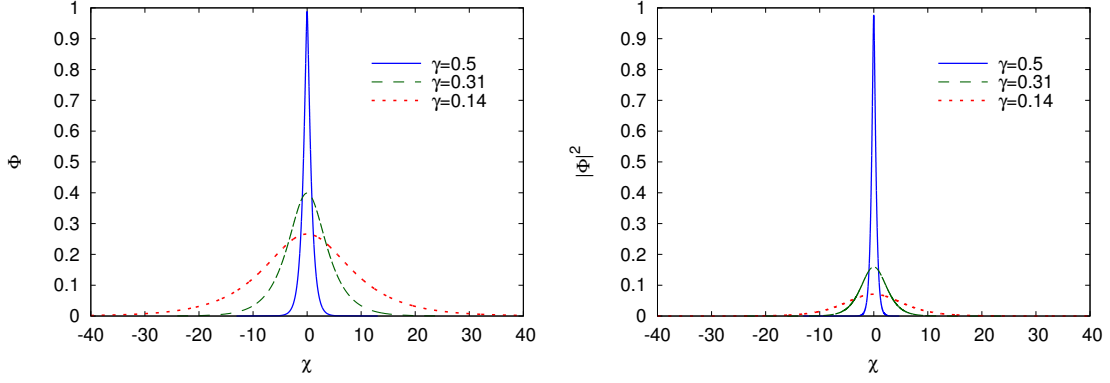


Figura 3.1.1: Plot al variare di γ dell'inversa di 3.1.8 nella figura di sinistra e in quella di destra del suo modulo quadro. Si nota come all'aumentare di γ il picco diviene sempre più stretto e i bosoni sono concentrati in una regione minore di spazio.

Troviamo il range di valori a cui γ appartiene studiandone la crescita rispetto a μ :

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\mu}\gamma &= \frac{2\sqrt{2}}{3} \left[-\frac{1}{2} \frac{3}{2} \frac{1}{(1-\mu)^{1/2}} + \frac{3}{2}(1-\mu)^{1/2} \right] = \frac{1}{(1-\mu)^{1/2}} \frac{2\sqrt{2}}{3} \left[-\frac{1}{2} \frac{3}{2} + \frac{3}{2}(1-\mu) \right] = \\ &= \frac{1}{(1-\mu)^{1/2}} \frac{2\sqrt{2}}{3} \left(\frac{3}{4} - \frac{3}{2}\mu \right) \end{aligned} \quad (3.1.13)$$

La funzione presenta un massimo assoluto in $\mu = \frac{1}{2}$ e il valore della funzione in tale punto è $\gamma_{max} = \frac{2}{3}$.

Quindi, sapendo che $\gamma > 0$, possiamo concludere che tale parametro appartiene a un intervallo ben definito e non può assumere qualunque valore, cioè $\gamma \in [0, \frac{2}{3}]$.

Una rappresentazione grafica dell'inversa di 3.1.8 al variare di γ si vede in figura 3.1.1.

3.2 Bright soliton in accoppiamento debole

Vogliamo dimostrare che la soluzione da noi trovata è una generalizzazione di quella già nota nel caso della 1D GPE [3]

$$\Phi(\chi) = \sqrt{\frac{\gamma}{2}} \operatorname{sech}[\gamma\chi] \quad (3.2.1)$$

Per farlo mostriamo innanzitutto che le due soluzioni coincidono per $|a_s|N|f|^2 \ll 1$, cioè per $\gamma\Phi^2 \ll 1$. Successivamente osserviamo che dato che la non polinomiale rispecchia meglio l'andamento della 3D GPE allora la sua soluzione è necessariamente una generalizzazione della 1D GPE che ne rappresenta il limite di debole interazione.

Sviluppiamo quindi in serie di Taylor rispetto a $\gamma\Phi^2$, fermandoci al primo ordine, tutti i termini dell'equazione 2.4.6, trovando

$$I = \frac{(\frac{d}{dx}\Phi)^2}{2} - (1 - \gamma\Phi^2)\Phi^2 + \mu\Phi^2 = \frac{(\frac{d}{dx}\Phi)^2}{2} + \gamma\Phi^4 + (\mu - 1)\Phi^2 \quad (3.2.2)$$

Anche le relazioni tra i parametri della nostra equazione cambiano approssimando i termini al primo ordine, infatti dalla parità della soluzione si ricava

$$\begin{aligned} I &= \left(-1 + \gamma\Phi^2(0) + \mu\right)\Phi_0^2 = 0 \\ \Phi_0^2\gamma &= 1 - \mu \end{aligned} \quad (3.2.3)$$

Dalla normalizzazione si trova invece

$$\begin{aligned} 1 &= -\frac{2}{\sqrt{2}} \int_{\Phi_0}^{\Phi(+\infty)} d\Phi \frac{\Phi}{\sqrt{1 - \gamma\Phi^2 - \mu}} \\ 1 &= -\frac{2}{\sqrt{2}} \frac{(-1)}{\gamma} \sqrt{1 - \gamma\Phi^2 - \mu} \Big|_{\Phi_0}^0 = \frac{2}{\gamma\sqrt{2}} \sqrt{1 - \mu} \\ 1 &= \frac{2}{\gamma^2} (1 - \mu) \\ \mu &= 1 - \frac{\gamma^2}{2} \\ \Phi_0 &= \sqrt{\frac{\gamma}{2}} \end{aligned} \quad (3.2.4)$$

Per trovare la soluzione invece sfruttiamo il valore dell'integrale

$$\int dx \frac{1}{x\sqrt{1-x^2}} = \log\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}+1}\right) \quad (3.2.5)$$

e usando le condizioni da noi trovate e procedendo per quadrature si trova

$$\begin{aligned} \chi &= -\frac{1}{\sqrt{2}} \int_{\Phi_0}^{\Phi(\chi)} d\Phi \frac{1}{\Phi\sqrt{1 - \gamma\Phi^2 - \mu}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \int_{\Phi_0}^{\Phi(\chi)} d\Phi \frac{1}{\Phi\sqrt{1 - \gamma\Phi^2 - 1 + \frac{\gamma^2}{2}}} \\ \chi &= -\frac{1}{\sqrt{2}} \int_{\Phi_0}^{\Phi(\chi)} d\Phi \frac{1}{\frac{\sqrt{2}\Phi}{\sqrt{\gamma}} \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{2}\Phi}{\sqrt{\gamma}}\right)^2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \int_{\Phi_0}^{\Phi(\chi)} d\left(\frac{\sqrt{2}\Phi}{\sqrt{\gamma}}\right) \frac{1}{\frac{\sqrt{2}\Phi}{\sqrt{\gamma}} \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{2}\Phi}{\sqrt{\gamma}}\right)^2}} \frac{\sqrt{2}}{\gamma} \\ \chi &= -\frac{1}{\gamma} \log\left(\frac{\frac{\sqrt{2}\Phi(\chi)}{\sqrt{\gamma}}}{\sqrt{1 - \frac{2\Phi^2(\chi)}{\gamma}} + 1}\right) + \frac{1}{\gamma} \log\left(\frac{\frac{\sqrt{2}\Phi_0}{\sqrt{\gamma}}}{\sqrt{1 - \frac{2\Phi_0^2}{\gamma}} + 1}\right) \\ \chi &= -\frac{1}{\gamma} \log\left(\frac{\frac{\sqrt{2}\Phi(\chi)}{\sqrt{\gamma}}}{\sqrt{1 - \frac{2\Phi^2(\chi)}{\gamma}} + 1}\right) + \frac{1}{\gamma} \log\left(\frac{\frac{\sqrt{2}\sqrt{\frac{\gamma}{2}}}{\sqrt{\gamma}}}{\sqrt{1 - \frac{2\frac{\gamma}{2}}{\gamma}} + 1}\right) \\ \chi &= -\frac{1}{\gamma} \log\left(\frac{\frac{\sqrt{2}\Phi(\chi)}{\sqrt{\gamma}}}{\sqrt{1 - \frac{2\Phi^2(\chi)}{\gamma}} + 1}\right) + \log(1) = -\frac{1}{\gamma} \log\left(\frac{\frac{\sqrt{2}\Phi(\chi)}{\sqrt{\gamma}}}{\sqrt{1 - \frac{2\Phi^2(\chi)}{\gamma}} + 1}\right) \\ \left(\sqrt{1 - \frac{2\Phi^2(\chi)}{\gamma}} + 1\right) e^{-\gamma\chi} &= \frac{\sqrt{2}\Phi(\chi)}{\sqrt{\gamma}} \\ \left(\frac{\sqrt{2}\Phi(\chi)}{\sqrt{\gamma}} - e^{-\gamma\chi}\right)^2 &= e^{-2\gamma\chi} \left(1 - \frac{2\Phi^2(\chi)}{\gamma}\right) \\ (\Phi(\chi))^2 \left(1 + e^{-2\gamma\chi}\right) \frac{2}{\gamma} - \Phi(\chi) \sqrt{\frac{2}{\gamma}} e^{-\gamma\chi} &= 0 \\ \Phi(\chi) &= \sqrt{\frac{\gamma}{2}} \frac{e^{-\gamma\chi}}{1 + e^{-2\gamma\chi}} = \sqrt{\frac{\gamma}{2}} \frac{1}{e^{\gamma\chi} + e^{-\gamma\chi}} = \sqrt{\frac{\gamma}{2}} \operatorname{sech}(\gamma\chi) \end{aligned} \quad (3.2.6)$$

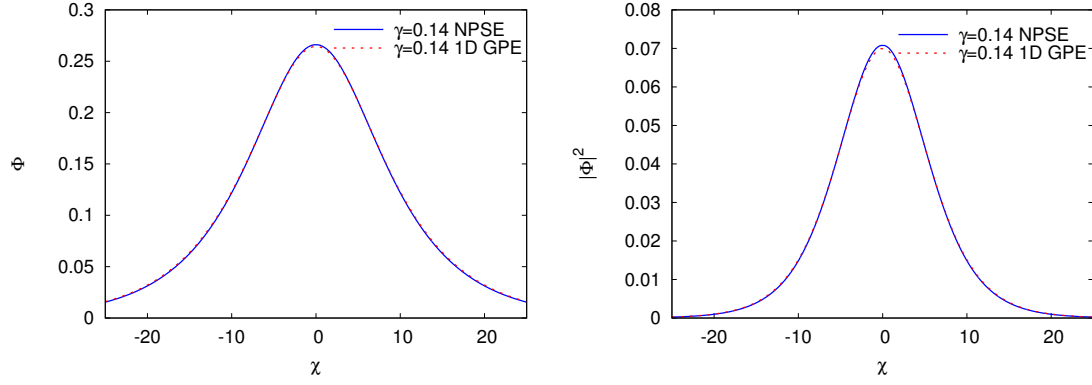


Figura 3.2.1: In figura sono stati plottati i grafici di 3.2.1 e l'inversa di 3.1.8 per $\gamma = 0.14$. Come si evince dal plot le due funzioni sono quasi perfettamente sovrapposte, a testimonianza di quanto l'approssimazione sia effettivamente buona.

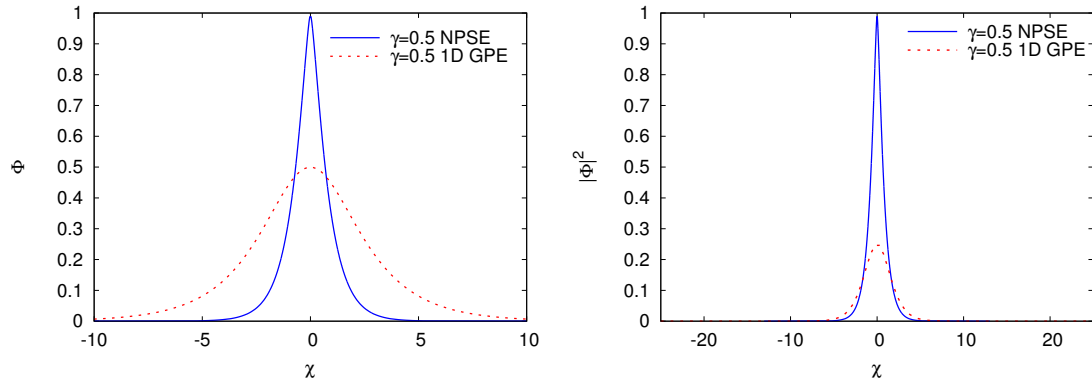


Figura 3.2.2: Per $\gamma = 0.5$ invece si vede chiaramente come il limite di accoppiamento debole non sia più valido: la NPSE comporta una soluzione che consiste in un picco molto più stretto rispetto alla soluzione della 1D GPE, cioè tale soluzione rispecchia maggiormente la tendenza dei bosoni a concentrarsi in una regione limitata di spazio nel caso di una forte interazione attrattiva, mentre l'altra soluzione non viene modificata in modo eccessivo dal brusco aumento di γ .

Abbiamo pertanto mostrato che nel limite di bosoni debolmente interagenti la derivata approssimata della soluzione della NPSE è uguale alla derivata della soluzione della 1D GPE, ma questo implica necessariamente che anche la soluzione della NPSE è uguale alla soluzione della 1D GPE, dunque abbiamo verificato l'uguaglianza tra le due nel limite di bosoni debolmente interagenti.

Abbiamo effettuato anche un confronto grafico tra la soluzione della NPSE e quella della 1D-GPE al variare di γ , trovando un'ottima sovrapposizione tra le due per bassi γ e delle sostanziali differenze per γ più alti, a conferma di quanto dedotto analiticamente, come si vede nelle figure 3.2.1 e 3.2.2.

Capitolo 4

Black Soliton

4.1 Dark Soliton

Nel caso del dark soliton invece cerchiamo un solitone la cui densità di probabilità presenti un minimo isolato, quindi concettualmente l'opposto del bright, poichè è presente non un'accumulazione di bosoni, bensì una lacuna che si sposta a profilo costante con velocità v . Ciò implica che la funzione non si annulla all'infinito, ma che presenta un asintoto verso un valore diverso da zero.

In questa configurazione il potenziale è repulsivo, cioè $a_s > 0$ e quindi $\tau = 1$ in 2.4.6, 2.3.4, 2.4.2 per cui le equazioni a cui facciamo riferimento sono

$$\begin{cases} I = \frac{(\frac{d}{d\chi}\Phi)^2}{2} - \sqrt{1 + 2\gamma\Phi^2}\Phi^2 + \mu\Phi^2 + \frac{1}{2}v^2\frac{\Phi_\infty^4}{\Phi^2} \\ \frac{d}{d\chi}\theta = v\left(1 - \frac{\Phi_\infty^2}{\Phi^2}\right) \\ \frac{1}{2}\frac{d^2}{d\chi^2}\Phi = \left[\frac{1}{2\sqrt{1+2\gamma\Phi^2}} + \frac{\sqrt{1+2\gamma\Phi^2}}{2} + 2\gamma\frac{\Phi^2}{\sqrt{1+2\gamma\Phi^2}} + \frac{v^2\Phi_\infty^4}{2\Phi^4} - \mu\right]\Phi \end{cases} \quad (4.1.1)$$

Possiamo distinguere due tipi di dark solitons: i black e i gray, che differiscono per alcuni aspetti.

4.2 Black Soliton nella NPSE

Nel caso del black soliton una condizione in più richiesta è che la funzione vada a zero nell'origine: non vi è solo un minimo isolato di probabilità, ma esso vale anche zero.

Formalmente le condizioni al contorno che abbiamo per il nostro black soliton sono

$$\begin{cases} \Phi_0 = 0 \\ \lim_{\chi \rightarrow \infty} \Phi(\chi) = \Phi_\infty \\ \lim_{\chi \rightarrow \infty} \frac{d}{d\chi}\Phi(\chi) = 0 \\ \lim_{\chi \rightarrow \infty} \frac{d^2}{d\chi^2}\Phi(\chi) = 0 \end{cases} \quad (4.2.1)$$

Dato che $\Phi_0 = 0$ e $\Phi_\infty \neq 0$ discende immediatamente, dalla condizione 2.3.3, che la velocità deve essere nulla.

Dato che $v=0$ si ricava subito che $\theta(z - vt) = 0$ e $\beta(z - vt) = -\mu t$.

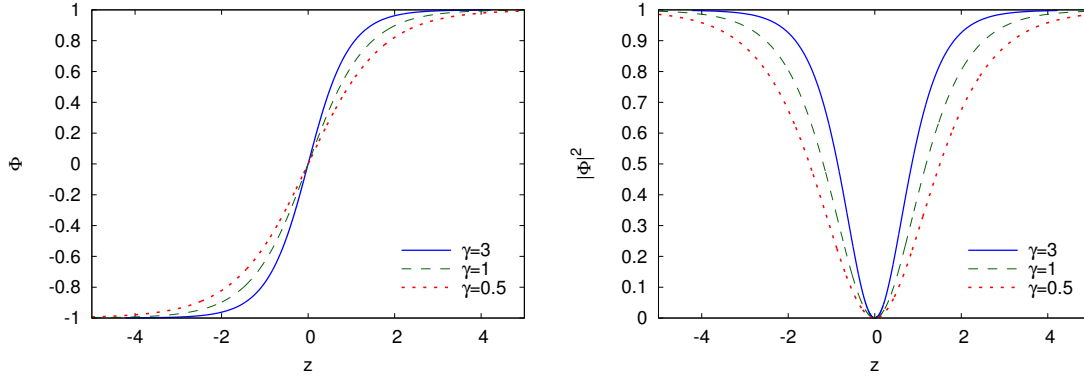


Figura 4.2.1: Il primo plot mostra Φ in funzione di z . Si nota che all'aumentare di γ aumenta anche il modulo della funzione che si approssima sempre di più ad una funzione a gradino. Il secondo plot mostra in maniera chiara che la lacuna di bosoni nell'intorno di $z = 0$ è tanto più marcata e concentrata in una regione minore di spazio quanto maggiore è γ .

Il solitone che stiamo studiando quindi non si muove spazialmente, corrisponde ad una distribuzione di bosoni statica, pertanto possiamo usare come variabile z al posto di χ .

Rispetto al caso precedente ora a fornirci informazioni è anche la condizione sulla derivata seconda, in quanto il non annullarsi della funzione all'infinito permette all'equazione 2.4.2 di non essere una banale identità ma di diventare

$$0 = \mu - \frac{1}{2\sqrt{1+2\gamma\Phi_\infty^2}} - \frac{\sqrt{1+2\gamma\Phi_\infty^2}}{2} - 2\gamma \frac{\Phi_\infty^2}{\sqrt{1+2\gamma\Phi_\infty^2}} \quad (4.2.2)$$

$$\mu = \frac{1+3\gamma\Phi_\infty^2}{\sqrt{1+2\gamma\Phi_\infty^2}}$$

Applicando le condizioni al contorno a 2.4.6 troviamo che

$$I = \mu\Phi_\infty^2 - \Phi_\infty^2\sqrt{1+2\gamma\Phi_\infty^2} = \Phi_\infty^2 \frac{1+3\gamma\Phi_\infty^2 - 1 - 2\gamma\Phi_\infty^2}{\sqrt{1+2\gamma\Phi_\infty^2}} = \frac{\gamma\Phi_\infty^4}{\sqrt{1+2\gamma\Phi_\infty^2}} \quad (4.2.3)$$

Basandoci sulla disparità di $\Phi(z)$ possiamo lavorare nell'intervallo $z > 0$, ove la derivata prima è crescente, dunque scegliendo il segno positivo per 2.6.2, andando quindi ad integrare

$$z = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{\Phi(z)} d\Phi \frac{1}{\sqrt{\frac{\gamma\Phi_\infty^4}{\sqrt{1+2\gamma\Phi_\infty^2}} + \sqrt{1+2\gamma\Phi^2} - \frac{1+3\gamma\Phi_\infty^2}{\sqrt{1+2\gamma\Phi_\infty^2}}\Phi^2}} \quad (4.2.4)$$

La formula analitica risulta però parecchio complicata poichè coinvolge integrali ellittici, pertanto ciò che ci limitiamo a svolgere è uno studio numerico della funzione $\Phi(z)$.

Per farlo abbiamo integrato numericamente $z(\Phi)$, ottenendo il plot dei punti della coordinata Φ in funzione di quelli della coordinata z in figura 4.2.1, ponendo $\Phi_\infty = 1$ e scegliendo tre distinti valori di γ , in modo da analizzare la dipendenza di Φ da tale parametro.

La scelta di fissare il valore di Φ_∞ liberamente è legittima perchè la funzione, non annullandosi all'infinito, non è normalizzabile in quanto divergente, il che non ha significato fisico, pertanto la forma del black soliton descritta sopra è solo un'approssimazione in vicinanza della lacuna di bosoni, mentre ad un certo punto la funzione smetterà di essere una distribuzione uniforme ed andrà a zero, in pratica il black soliton

sopra descritto si estende in una certa regione finita di estremi $-\chi_{ext}$ e χ_{ext} (per simmetria). In questo caso allora la funzione è normalizzabile e ciò fornisce un'ulteriore condizione che coinvolge Φ_∞ , χ_{ext} , γ . Possiamo scegliere arbitrariamente il valore di Φ_∞ in quanto ci disinteressiamo del valore di χ_{ext} univocamente determinato dalla normalizzazione, dato che in quest'analisi stiamo studiando le proprietà generali del black soliton, come ad esempio la forma, non è rilevante sapere l'esatto intervallo in cui è confinato il condensato.

4.3 Black soliton in accoppiamento debole

Verifichiamo ora che la soluzione della NPSE è uguale, nel limite di accoppiamento debole, a quella della 1D GPE [2]

$$\Phi(z) = \Phi_\infty \tanh\left(\Phi_\infty z \sqrt{2\gamma}\right) \quad (4.3.1)$$

Procediamo anche in questo caso prima in maniera analitica, riscrivendo le equazioni che descrivono il black soliton sviluppando in serie di Taylor al primo ordine tutti i termini in $\gamma\Phi^2$.

L'equazione 4.2.2 diventa

$$\mu = \frac{(1 + 3\gamma\Phi_\infty^2)}{\sqrt{1 + 2\gamma\Phi_\infty^2}} = (1 + 3\gamma\Phi_\infty^2)(1 - \gamma\Phi_\infty^2) = 1 + 2\gamma\Phi_\infty^2 \quad (4.3.2)$$

Invece per quanto riguarda 4.2.3 possiamo scrivere

$$I = \frac{\gamma\Phi_\infty^4}{\sqrt{1 + 2\gamma\Phi_\infty^2}} = \gamma\Phi_\infty^4 \quad (4.3.3)$$

Provando quindi a risolvere il problema per quadrature ciò che si ottiene è

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2} \left(\frac{d}{dz}\Phi\right)^2 + \mu\Phi^2 - \Phi^2\sqrt{1 + 2\gamma\Phi^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{d}{dz}\Phi\right)^2 + \Phi^2(\mu - 1) - \gamma\Phi^4 \\ I &= \frac{1}{2} \left(\frac{d}{dz}\Phi\right)^2 + 2\gamma\Phi_\infty^2\Phi^2 - \gamma\Phi^4 \\ \frac{1}{2} \left(\frac{d}{dz}\Phi\right)^2 &= \gamma\Phi_\infty^4 - 2\gamma\Phi_\infty^2\Phi^2 + \gamma\Phi^4 = \gamma\Phi_\infty^4 \left(1 - \frac{\Phi^2}{\Phi_\infty^2}\right)^2 \end{aligned} \quad (4.3.4)$$

Prendendo la soluzione per $z > 0$ ciò che si ottiene è sempre una funzione crescente che, rispetto alla soluzione della NPSE, ora è integrabile analiticamente:

$$z = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{\Phi(z)} d\Phi \frac{1}{\sqrt{\gamma\Phi_\infty^2 \left(1 - \frac{\Phi^2}{\Phi_\infty^2}\right)}} = \frac{1}{\Phi_\infty \sqrt{2\gamma}} \operatorname{arctanh}\left(\frac{\Phi(z)}{\Phi_\infty}\right) \quad (4.3.5)$$

La funzione analitica risulta invertibile e pertanto esprimiamo $\Phi(z)$, ottenendo il risultato già noto, cioè il solitone black stazionario che deriva dalla 1D-GPE

$$\Phi(z) = \Phi_\infty \tanh\left(\Phi_\infty z \sqrt{2\gamma}\right) \quad (4.3.6)$$

Abbiamo svolto un confronto anche a livello numerico tra le due funzioni e quello che otteniamo è lo stesso risultato che emerge chiaramente per via analitica, come si vede in figura 4.3.1. Nella stessa figura abbiamo inoltre confrontato le due soluzioni per valori di $\gamma\Phi^2$ non infinitesimo, trovando che le due funzioni differiscono in maniera evidente.

4.4 Black soliton in accoppiamento forte

Analizziamo ora il caso di bosoni fortemente interagenti, quindi descritti da $N|a_s||f|^2 \gg 1$ che, nelle nostre unità, equivale a $\gamma\Phi^2 \gg 1$.

Riscriviamo quindi le equazioni che descrivono il black soliton considerando esclusivamente il termine ad esponente maggiore in $\gamma\Phi^2$.

L'equazione 4.2.2 diventa

$$\mu = \frac{(1 + 3\gamma\Phi_\infty^2)}{\sqrt{1 + 2\gamma\Phi_\infty^2}} = \frac{3\gamma\Phi_\infty^2 \left(1 + \frac{1}{3\gamma\Phi_\infty^2}\right)}{\sqrt{2\gamma\Phi_\infty} \sqrt{1 + \frac{1}{2\gamma\Phi_\infty^2}}} = \Phi_\infty \frac{3}{2} \sqrt{2\gamma} \quad (4.4.1)$$

Il limite dell'integrale primo 4.2.3 è invece

$$I = \frac{\gamma\Phi_\infty^2}{\sqrt{1 + 2\gamma\Phi_\infty^2}} = \frac{\gamma\Phi_\infty^4}{\sqrt{2\gamma\Phi_\infty} \sqrt{1 + \frac{1}{2\gamma\Phi_\infty^2}}} = \frac{\sqrt{2\gamma}}{2} \Phi_\infty^3 \quad (4.4.2)$$

Anche in questo caso, studiando la parte di Φ in $z > 0$, riusciamo a risolvere in maniera esatta il problema procedendo per quadrature

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left(\frac{d}{dz} \Phi \right)^2 &= \sqrt{2\gamma} \left[\Phi^3 - \frac{3}{2} \Phi_\infty \Phi^2 + \frac{1}{2} \Phi_\infty^3 \right] \\ z &= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{\Phi(z)} d\Phi \frac{1}{\sqrt{\sqrt{2\gamma} \left[\Phi^3 - \frac{3}{2} \Phi_\infty \Phi^2 + \frac{1}{2} \Phi_\infty^3 \right]}} \\ z &= \frac{1}{\sqrt{\sqrt{2\gamma}}} \frac{2}{\sqrt{\frac{3\Phi_\infty}{2}}} \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\operatorname{arctanh} \left(\sqrt{\frac{2\Phi(z)+1}{3\Phi_\infty}} \right) - \operatorname{arctanh} \left(\sqrt{\frac{0+1}{3\Phi_\infty}} \right) \right] \\ \operatorname{arctanh} \left(\sqrt{\frac{2\Phi(z)+1}{3\Phi_\infty}} \right) &= \frac{\sqrt{\sqrt{2\gamma}} \sqrt{3\Phi_\infty}}{2} z + \operatorname{arctanh} \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right) \end{aligned} \quad (4.4.3)$$

arrivando infine al risultato [9]

$$\Phi(z) = \frac{3\Phi_\infty}{2} \tanh^2 \left(\frac{\sqrt{\sqrt{2\gamma}} \sqrt{3\Phi_\infty}}{2} z + \operatorname{arctanh} \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right) \right) - \frac{1}{2} \quad (4.4.4)$$

Anche in questo caso abbiamo effettuato un confronto grafico tra la soluzione appena ricavata e 4.2.1, che abbiamo riportato in figura 4.4.1, e abbiamo verificato che la soluzione 4.4.4 è valida per grandi γ , mentre non lo è per γ piccoli.

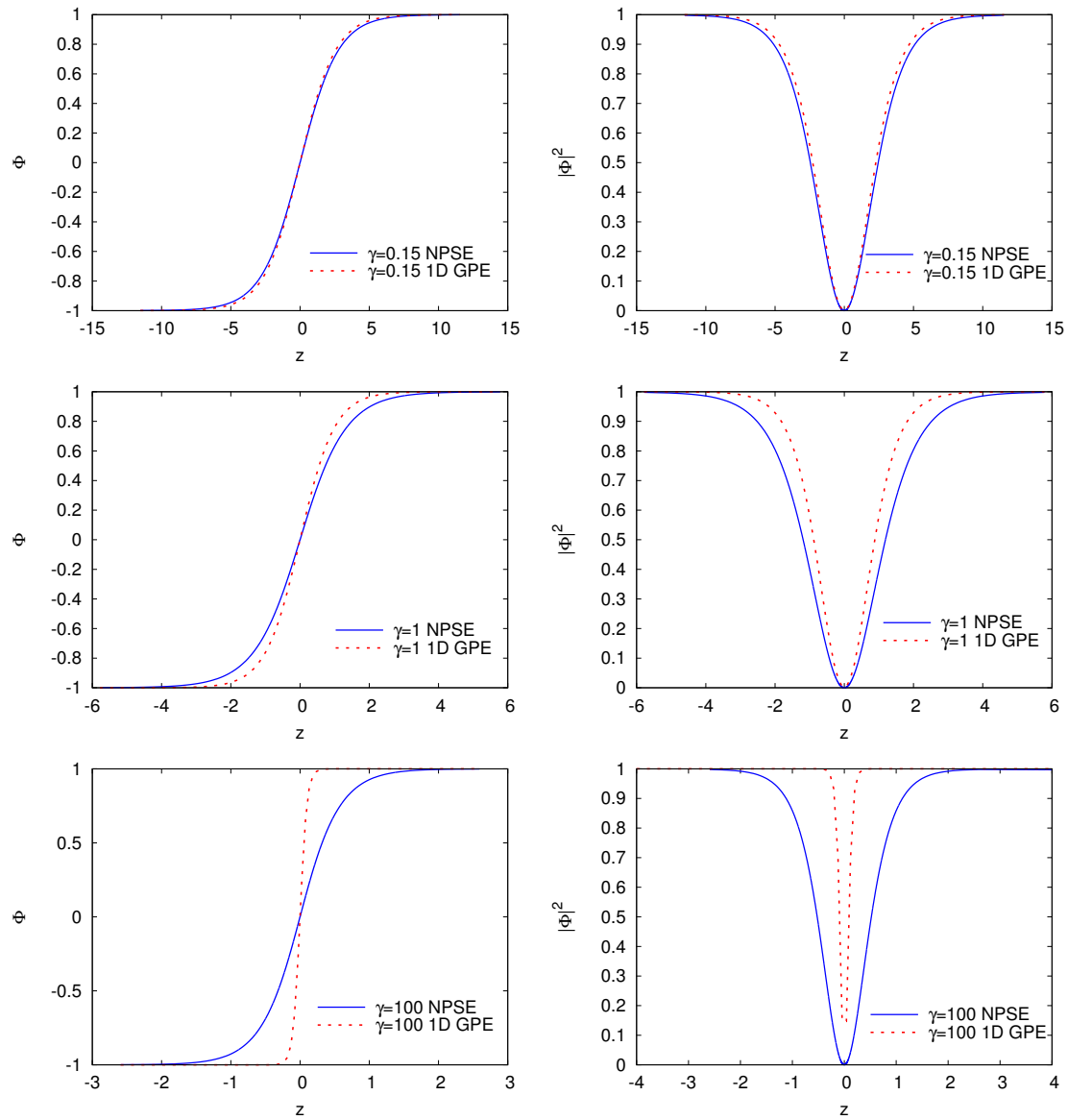


Figura 4.3.1: Plot della soluzione numerica della NPSE per il black soliton e per quella della 1D GPE. Ciò che si ottiene è che per $\gamma = 0.15$ è che le due funzioni sono quasi perfettamente sovrapposte, mentre per $\gamma = 1$ sono visibili le prime differenze e per $\gamma = 100$ le funzioni sono completamente diverse.

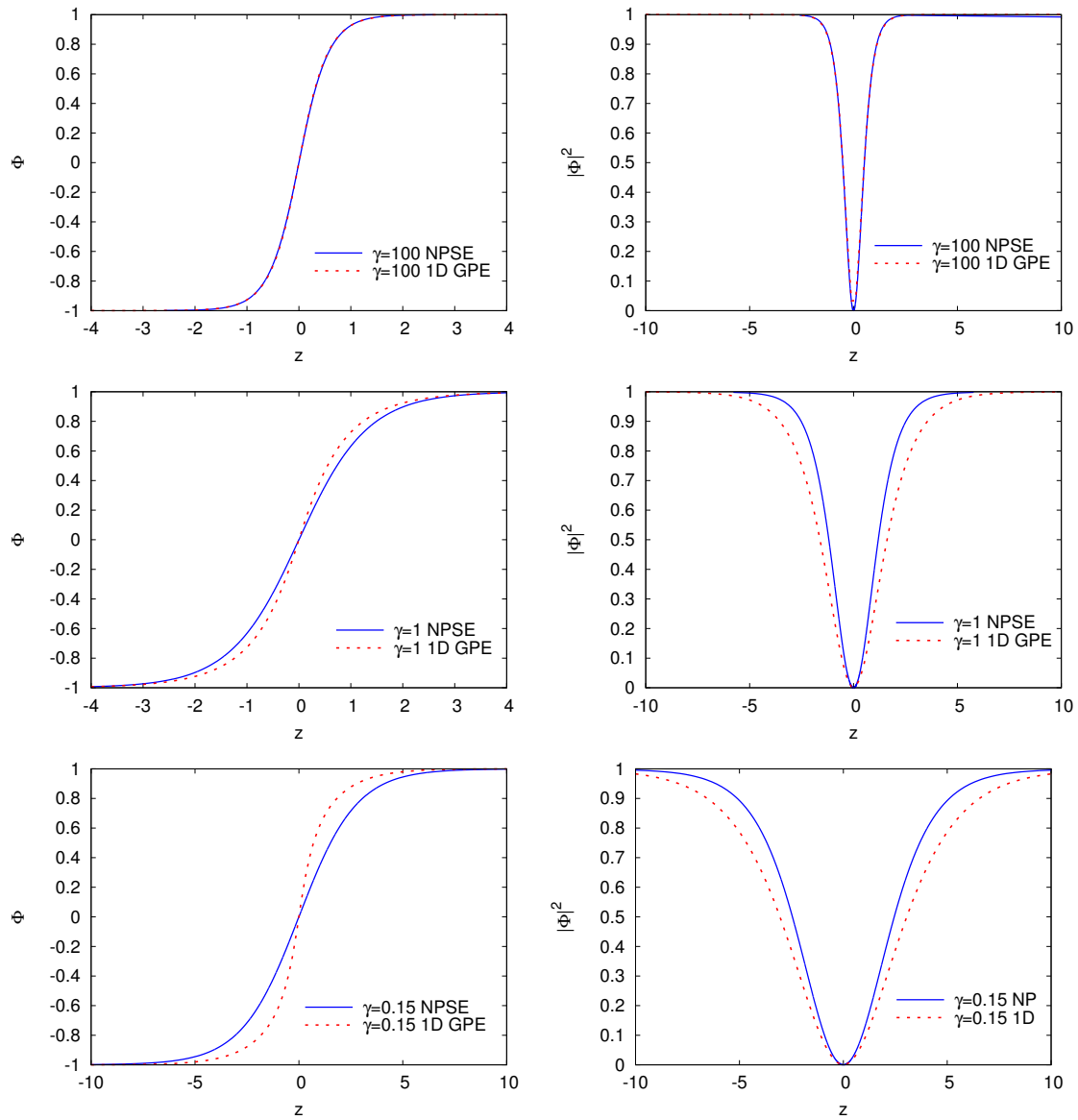


Figura 4.4.1: Abbiamo confrontato la soluzione di 4.2.1 con 4.4.4 osservando che per bassi γ le funzioni d'onda sono sensibilmente diverse, mentre per alti γ (per dare un'idea di perfetta sovrapposizione abbiamo preso $\gamma = 100$) le soluzioni combaciano.

Capitolo 5

Gray Soliton

5.1 Gray Soliton nella NPSE

Per quanto riguarda il gray soliton, le condizioni al contorno da imporre sono le equazioni 4.1.1 con la differenza però, rispetto al black soliton, che $v \neq 0$, quindi la funzione non si annulla nell'origine ed è pari. L'annullarsi all'infinito delle derivate seconde di Φ comporta la relazione

$$\mu = \frac{1}{2}v^2 + \frac{1 + 3\gamma\Phi_\infty^2}{\sqrt{1 + 2\gamma\Phi_\infty^2}} \quad (5.1.1)$$

Mentre l'integrale primo assume il valore

$$\begin{aligned} I &= \frac{(\partial_\chi \Phi)^2}{2} - \sqrt{1 + 2\gamma|\Phi|^2}\Phi^2 + \mu\Phi^2 + \frac{1}{2}v^2\frac{\Phi^4}{\Phi^2} = -\sqrt{1 + 2\gamma|\Phi_\infty|^2}\Phi_\infty^2 + \mu\Phi_\infty^2 + \frac{1}{2}v^2\Phi_\infty^2 = \\ &= v^2\Phi_\infty^2 + \frac{\gamma\Phi_\infty^4}{\sqrt{1 + 2\gamma\Phi_\infty^2}} \end{aligned} \quad (5.1.2)$$

Dall'annullarsi della derivata prima in zero troviamo il valore della funzione in 0:

$$\begin{aligned} v^2\Phi_0^2 + \frac{\gamma\Phi_0^4}{\sqrt{1 + 2\gamma\Phi_0^2}} &= \frac{1}{2}v^2\Phi_0^2 + \frac{1 + 3\gamma\Phi_\infty^2}{\sqrt{1 + 2\gamma\Phi_\infty^2}}\Phi_0^2 - \Phi_0^2\sqrt{1 + 2\gamma\Phi_0^2} + \frac{1}{2}v^2\frac{\Phi_0^4}{\Phi_0^2} \\ v^2 &= \frac{-\frac{\gamma\Phi_0^4}{\sqrt{1 + 2\gamma\Phi_0^2}} + \frac{1 + 3\gamma\Phi_\infty^2}{\sqrt{1 + 2\gamma\Phi_\infty^2}}\Phi_0^2 - \Phi_0^2\sqrt{1 + 2\gamma\Phi_0^2}}{\Phi_\infty^2 - \frac{\Phi_0^2}{2} - \frac{\Phi_\infty^4}{2\Phi_0^2}} \end{aligned} \quad (5.1.3)$$

Quindi la velocità del solitone è strettamente correlata all'altezza del minimo e a quella del massimo nel caso del gray soliton, non è un parametro completamente indipendente come per il bright.

Tra i vari parametri del nostro sistema ci sono dunque γ , μ , Φ_0 , Φ_∞ , v , ma solo due sono indipendenti, infatti, analogamente a quanto fatto per il black soliton, possiamo scegliere di porre $\Phi_\infty = 1$, inoltre vi sono le relazioni trovate precedentemente che legano i restanti quattro parametri. Scegliamo come parametri indipendenti v e γ , in quanto sono dei parametri che hanno un importante significato fisico, poichè rappresentano la velocità di propagazione del solitone e l'intensità dell'interazione tra i bosoni.

L'integrale da svolgere per ricavare $\Phi(\chi)$ è

$$\chi = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{\Phi_0}^{\Phi(\chi)} d\Phi \frac{1}{\sqrt{v^2\Phi_\infty^2 + \frac{\gamma\Phi_\infty^4}{\sqrt{1 + 2\gamma\Phi_\infty^2}} + \sqrt{1 + 2\gamma\Phi^2}\Phi^2 - \frac{1 + 3\gamma\Phi_\infty^2}{\sqrt{1 + 2\gamma\Phi_\infty^2}}\Phi^2 - \frac{v^2}{2}\Phi_\infty^2\Phi^2 - \frac{v^2}{2}\frac{\Phi_\infty^4}{\Phi^2}}} \quad (5.1.4)$$

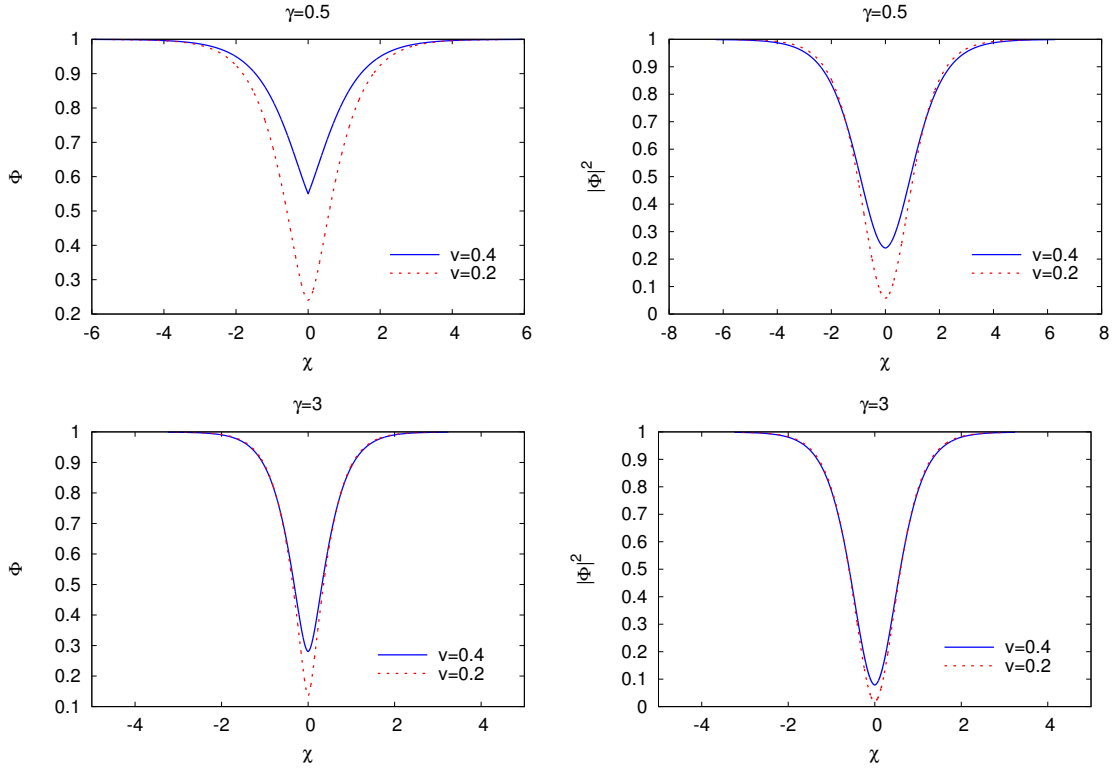


Figura 5.1.1: Plot di 5.1.4 al variare separatamente di γ , v , prendendo come valori di riferimento della velocità due valori nella prima metà del range $[0, v_{max}]$ e come riferimento per γ due valori che fossero una via di mezzo tra l'accoppiamento debole e forte. Si osserva che all'aumentare della velocità il minimo del gray soliton aumenta sempre più il proprio valore, mentre all'aumentare di γ diminuisce il valore del minimo.

ed anche in questo caso la sua primitiva non è ricavabile analiticamente, quindi ciò che ci limitiamo a svolgere è uno studio numerico facendo variare sia v che γ , ricavando i plot in figura 5.1.1

Dal grafico si deduce che la velocità, poichè aumenta all'aumentare dell'altezza del minimo, a parità di γ , assume necessariamente un valore massimo: dall'equazione 5.1.3 osserviamo che v^2 è pari e per $\Phi_0 > 0$ è monotona crescente. Dato che $\Phi \in [0, \Phi_\infty]$ il massimo di tale funzione sarà proprio in $\Phi_0 = \Phi_\infty$, cioè quando $\Phi_0 = 1$. Tuttavia la funzione presenta una forma indeterminata del tipo $\frac{0}{0}$ in tale punto, quindi occorre studiarne il limite. Per il calcolo ricorriamo alla regola di de l'Hôpital, tenendo conto che la derivata prima del denominatore, eccetto per $\Phi_0=1$, non si annulla mai nell'intorno di 1.

$$v_{max}^2 = \lim_{\Phi_0 \rightarrow \Phi_\infty} \frac{\frac{1+3\gamma\Phi_\infty^2}{\sqrt{1+2\gamma\Phi_\infty^2}} 2\Phi_0 - 2\Phi_0 \sqrt{1+2\gamma\Phi_0^2} - \frac{2\gamma\Phi_0^3}{\sqrt{1+2\gamma\Phi_0^2}}}{-\Phi_0 + \frac{1}{\Phi_0^3}} = \lim_{\Phi_0 \rightarrow \Phi_\infty} \frac{\frac{1+3\gamma\Phi_\infty^2}{\sqrt{1+2\gamma\Phi_\infty^2}} 2\Phi_0 - \frac{2\Phi_0+6\gamma\Phi_0^3}{\sqrt{1+2\gamma\Phi_0^2}}}{-\Phi_0 + \frac{1}{\Phi_0^3}} \quad (5.1.5)$$

Tuttavia osserviamo che otteniamo ancora una forma del tipo $\frac{0}{0}$, quindi ciò che facciamo è applicare una seconda volta la regola di de l'Hôpital, tenendo conto che anche questa volta sono soddisfatte le ipotesi del

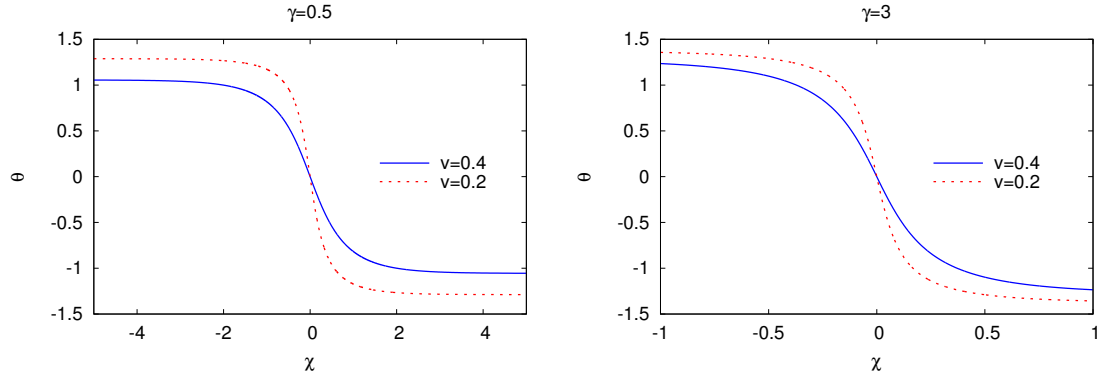


Figura 5.1.2: Plot dell'integrale 5.1.9. Si vede che θ all'infinito tende ad un valore asintotico, che è tanto maggiore quanto minore è la velocità del solitone e quanto maggiore è γ .

teorema, ricavando

$$\begin{aligned}
 v_{max}^2 &= \lim_{\Phi_0 \rightarrow \Phi_\infty} \frac{\frac{2+6\gamma\Phi_\infty^2}{\sqrt{1+2\gamma\Phi_\infty^2}} - \frac{2+18\gamma\Phi_0^2}{\sqrt{1+2\gamma\Phi_0^2}} + \frac{4\gamma\Phi_0+12\gamma^2\Phi_0^4}{\sqrt{(1+2\gamma\Phi_0^2)^3}}}{-1 - \frac{3}{\Phi_0^4}} = - \frac{(-12\gamma)(1+2\gamma) + 4\gamma + 12\gamma^2}{(1+3)\sqrt{(1+2\gamma)^3}} = \\
 &= - \frac{-12\gamma - 24\gamma^2 + 4\gamma + 12\gamma^2}{4\sqrt{(1+2\gamma\Phi_0^2)^3}} = \frac{12\gamma^2 + 8\gamma}{4\sqrt{(1+2\gamma\Phi_0^2)^3}} = \frac{2\gamma + 3\gamma^2}{\sqrt{(1+2\gamma)^3}}
 \end{aligned} \tag{5.1.6}$$

Abbiamo ottenuto che la velocità massima che può avere il gray soliton è [11]

$$v_{max} = \sqrt{\frac{2\gamma + 3\gamma^2}{\sqrt{(1+2\gamma)^3}}} \tag{5.1.7}$$

Questa velocità rappresenta però anche la velocità del suono locale, data dalla perturbazione infinitesima di un'onda del tipo $\Phi(z, t) = \Phi_\infty = \text{cost.}$, infatti (ricordando che nelle unità di misura da noi scelte $\frac{\hbar}{m} = 1$) per la 1.5.19 la velocità del suono è data da

$$\begin{aligned}
 c_s &= \sqrt{\frac{\Phi_\infty^2}{m} \frac{\partial}{\partial \Phi^2} \left(\hbar \frac{1+3\gamma\Phi^2}{\sqrt{1+2\gamma\Phi^2}} \right) \Big|_{\Phi=\Phi_\infty}} = \sqrt{\Phi_\infty \left(\frac{3\gamma}{\sqrt{1+2\gamma\Phi^2}} - \frac{(1+3\gamma\Phi^2)\gamma}{\sqrt{(1+2\gamma)^3}} \right) \Big|_{\Phi=\Phi_\infty}} = \\
 &= \sqrt{\frac{3\gamma + 6\gamma^2 - \gamma - 3\gamma^2}{\sqrt{(1+2\gamma)^3}}} = \sqrt{\frac{2\gamma + 3\gamma^2}{\sqrt{(1+2\gamma)^3}}}
 \end{aligned} \tag{5.1.8}$$

cioè proprio $c_s = v_{max}$.

Trovata la soluzione $\Phi(\chi)$, seppur per via numerica, possiamo trovare anche $\theta(\chi)$, ponendo come condizione iniziale $\theta(0) = 0$, in quanto non influisce sul nostro sistema poiché è una fase complessa, da cui si ricava la relazione

$$\theta(\chi) = \int_{\Phi_0}^{\Phi(\chi)} d\zeta v \left(1 - \frac{\Phi_\infty^2}{\Phi^2(\zeta)} \right) \tag{5.1.9}$$

Il risultato si vede in 5.1.2.

5.2 Gray soliton in accoppiamento debole

Vogliamo ricavare, anche in quest'ultimo caso, le compatibilità dei risultati ottenuti dalla NPSE con quelli già noti della 1D GPE nel limite di accoppiamento debole.

Riscriviamo dunque l'equazione 5.1.1 come

$$\mu = \frac{v^2}{2} + (1 + 3\gamma\Phi_\infty^2)(1 + \gamma\Phi_\infty^2) = \frac{v^2}{2} + 1 + 2\gamma\Phi_\infty^2 \quad (5.2.1)$$

e dunque l'equazione 5.1.2 diventa

$$I = v^2\Phi_\infty^2 + \gamma\Phi_\infty^4 \quad (5.2.2)$$

quindi l'equazione 5.1.3 vale

$$v^2 = \frac{-\gamma\Phi_\infty^4 + (1 + 2\gamma\Phi_\infty^2)\Phi_0^2 - \Phi_0^2(1 + \gamma\Phi_0^2)}{\Phi_\infty^2 - \frac{\Phi_0^2}{2} - \frac{\Phi_\infty^4}{2\Phi_0^2}} = 2\frac{-\gamma\Phi_\infty^4 + 2\gamma\Phi_0^2\Phi_\infty^2 - \gamma\Phi_0^4}{2\Phi_\infty^2 - \Phi_0^2 - \frac{1}{\Phi_0^2}} = 2\Phi_0^2\gamma \quad (5.2.3)$$

ed infine possiamo trovare una soluzione analitica per il nostro gray soliton dato che l'equazione 5.1.4 si modifica in

$$\begin{aligned} \chi &= \int_{\Phi_0}^{\Phi(\chi)} d\Phi \frac{1}{\sqrt{2} \sqrt{v^2\Phi_\infty^2 + \gamma\Phi_\infty^4 - \frac{v^2}{2}\frac{\Phi_\infty^4}{\Phi^2} - \frac{v^2\Phi^2}{2} - 2\gamma\Phi^2\Phi_\infty^2 + \gamma\Phi^4}} = \\ &= \int_{\Phi_0}^{\Phi(\chi)} d\Phi \frac{1}{\sqrt{2} \sqrt{2\gamma\Phi_0^2\Phi_\infty^2 + \gamma\Phi_\infty^4 - \gamma\Phi_0^2\frac{\Phi_\infty^4}{\Phi^2} - \gamma\Phi_0^2\Phi^2 - 2\gamma\Phi^2\Phi_\infty^2 + \gamma\Phi^4}} = \\ &= \int_{\Phi_0}^{\Phi(\chi)} d\Phi \frac{1}{\sqrt{2\gamma} \sqrt{\Phi^2 - \Phi_0^2}(\Phi_\infty^2 - \Phi^2)} = -\frac{1}{\sqrt{2\gamma}(\Phi_\infty^2 - \Phi_0^2)} \operatorname{arctanh}\left(\frac{\sqrt{(\Phi(\chi))^2 - \Phi_0^2}}{\sqrt{\Phi_\infty^2 - \Phi_0^2}}\right) \quad (5.2.4) \\ (\Phi(\chi))^2 - \Phi_0^2 &= (\Phi_\infty^2 - \Phi_0^2) \tanh^2\left(\chi\sqrt{2\gamma(\Phi_\infty^2 - \Phi_0^2)}\right) \\ \Phi(\chi) &= \sqrt{\Phi_0^2 + (\Phi_\infty^2 - \Phi_0^2) \tanh^2\left(\chi\sqrt{2\gamma(\Phi_\infty^2 - \Phi_0^2)}\right)} \end{aligned}$$

A questo punto si può trovare una soluzione analitica anche per $\theta(\chi)$ che è

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\chi}\theta &= v \left(1 - \frac{\Phi_\infty^2}{\Phi_0^2 + (\Phi_\infty^2 - \Phi_0^2) \tanh^2\left(\chi\sqrt{2\gamma(\Phi_\infty^2 - \Phi_0^2)}\right)} \right) \\ \theta &= -\frac{v}{\Phi_0\sqrt{2\gamma}} \operatorname{arctan}\left(\frac{1}{\Phi_0} \sqrt{(\Phi_\infty^2 - \Phi_0^2) \tanh\left(\chi\sqrt{2\gamma(\Phi_\infty^2 - \Phi_0^2)}\right)}\right) = \\ &= -\operatorname{sgn}(v) \operatorname{arctan}\left(\frac{1}{\Phi_0} \sqrt{(\Phi_\infty^2 - \Phi_0^2) \tanh\left(\chi\sqrt{2\gamma(\Phi_\infty^2 - \Phi_0^2)}\right)}\right) \quad (5.2.5) \end{aligned}$$

A questo punto abbiamo effettuato un confronto tra la soluzione nella NPSE e quella dell'accoppiamento debole. Abbiamo verificato che la compatibilità è ottima per piccoli γ e che è sensibilmente differente per grandi γ , ciò si vede in figura 5.2.1.

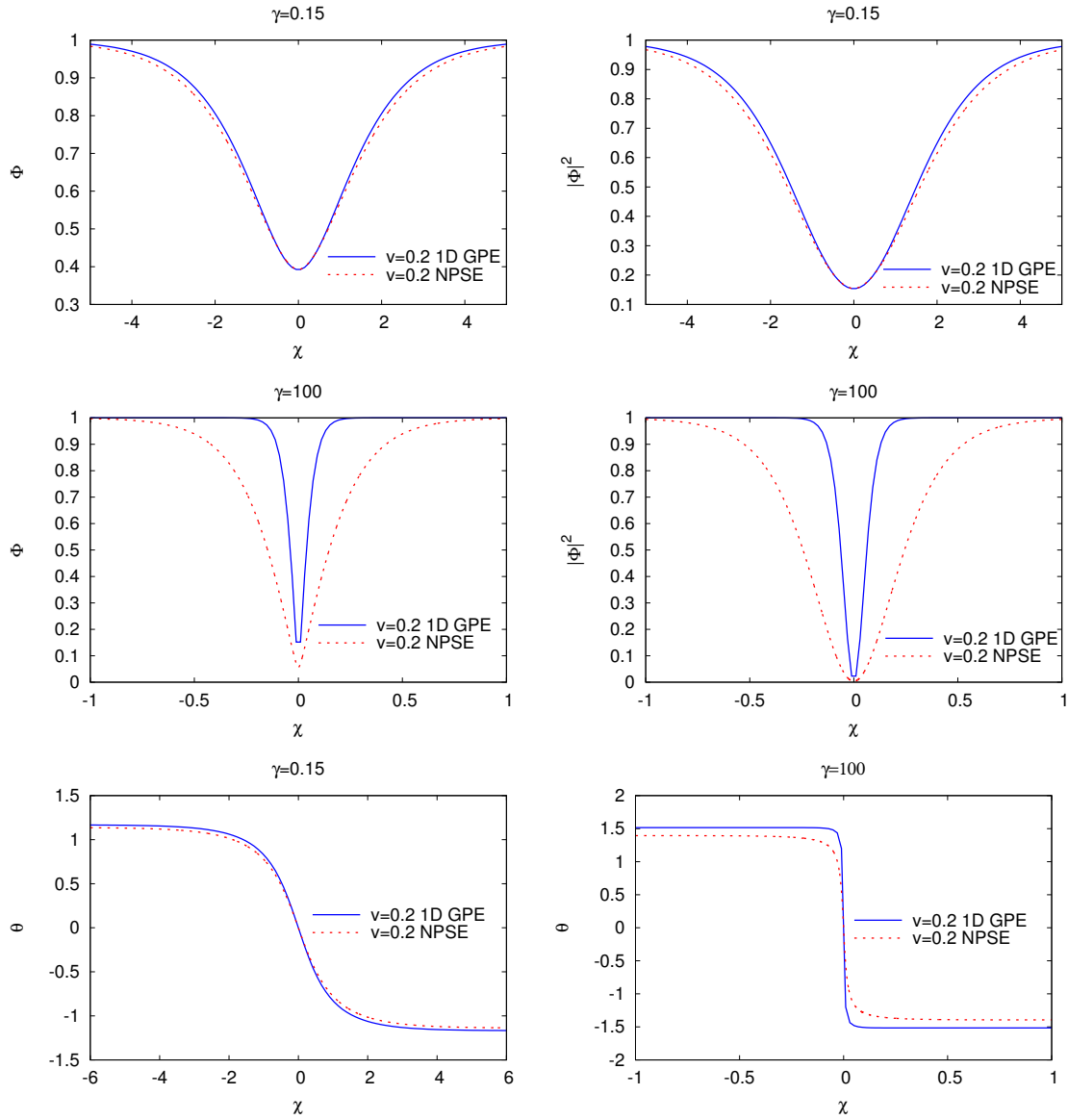


Figura 5.2.1: Dalla figura si evince come, anche in quest'ultimo caso, la soluzione della NPSE e la soluzione della 1D GPE si sovrappongono in maniera ottima nel limite debole, mentre ci sono delle consistenti differenze per grandi valori di $\gamma\Phi^2$. Ad essere meno evidente è la differenza tra le soluzioni per θ , che si discostano meno l'una dall'altra.

Capitolo 6

Instabilità modulazionale

6.1 Instabilità modulazionale per la NPSE

Riprendiamo la NPSE nella forma 1.5.17

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} f = \left[\frac{\hbar^2}{2ma_{\perp}^2 \sqrt{1 + 2Na_s |f|^2}} + \frac{m\omega_{\perp}^2 a_{\perp}^2 \sqrt{1 + 2Na_s |f|^2}}{2} + V - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{Ng|f|^2}{2\pi a_{\perp}^2 \sqrt{1 + 2Na_s |f|^2}} \right] f \quad (6.1.1)$$

riscrivendola però in maniera più compatta nel seguente modo

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} f = \left[V - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial z^2} + F(n) \right] f \quad (6.1.2)$$

dove abbiamo introdotto la variabile n definita come $n = |f|^2$.

Supponiamo ora che $V(z) = 0$, di avere il condensato confinato in una regione lungo l'asse z di lunghezza L e che la funzione d'onda che stiamo studiando sia una funzione costante e uniforme di valore f_0 che possiamo assumere reale, con $n_0 = f_0^2 = \frac{1}{L}$ dalla normalizzazione di f_0 . Procediamo dunque a studiarne la stabilità rispetto a delle piccole oscillazioni descritte da una funzione infinitesima $\zeta(z, t)$, cioè possiamo scrivere f come

$$f = (f_0 + \zeta) e^{-\frac{i\mu}{\hbar} t} \quad (6.1.3)$$

A questo punto possiamo sviluppare in serie di Taylor i termini di $F(n)$, rispetto alla variabile n , limitandoci al primo ordine, tenendo conto che il termine rispetto al quale sviluppiamo in serie è $n - n_0 = n_0 + f_0\zeta + f_0\zeta^* + |\zeta|^2 - n_0 = f_0\zeta + f_0\zeta^*$, cioè si ottiene

$$F(n) = F(n_0) + \frac{\partial}{\partial n} F(n_0) f_0 (\zeta + \zeta^*) \quad (6.1.4)$$

Conviene, prima di rimaneggiare l'equazione, trovare subito i valori di F e della sua derivata parziale rispetto ad n nel punto n_0

$$\begin{aligned}
F(n_0) &= \frac{\hbar^2}{2ma_{\perp}^2\sqrt{1+2Na_s n_0}} + \frac{m\omega_{\perp}^2 a_{\perp}^2 \sqrt{1+2Na_s n_0}}{2} + \frac{Ng n_0}{2\pi a_{\perp}^2 \sqrt{1+2Na_s n_0}} \\
\frac{\partial}{\partial n} F(n_0) &= -\frac{Na_s \hbar^2}{2ma_{\perp}^2(1+2Na_s n_0)^{\frac{3}{2}}} + \frac{m\omega_{\perp}^2 a_{\perp}^2 Na_s}{2\sqrt{1+2Na_s n_0}} + \frac{Ng}{2\pi a_{\perp}^2 \sqrt{1+2Na_s n_0}} - \frac{N^2 g a_s n_0}{2\pi a_{\perp}^2 (1+2Na_s n_0)^{\frac{3}{2}}} = \\
&= -\frac{Na_s \hbar^2}{2ma_{\perp}^2(1+2Na_s n_0)^{\frac{3}{2}}} + \frac{m\omega_{\perp}^2 a_{\perp}^2 Na_s}{2\sqrt{1+2Na_s n_0}} + \frac{N^2 g a_s n_0 + Ng}{2\pi a_{\perp}^2 (1+2Na_s n_0)^{\frac{3}{2}}} = \\
&= -\frac{Ng}{8\pi a_{\perp}^2 (1+2Na_s n_0)^{\frac{3}{2}}} + \frac{Ng}{8\pi a_{\perp}^2 \sqrt{1+2Na_s n_0}} + \frac{N^2 g^2 \frac{m}{4\pi \hbar^2} n_0 + Ng}{2\pi a_{\perp}^2 (1+2Na_s n_0)^{\frac{3}{2}}} = \\
&= \frac{3N^2 g^2 \frac{m}{4\pi \hbar^2} n_0 + 2Ng}{4\pi a_{\perp}^2 (1+2Na_s n_0)^{\frac{3}{2}}}
\end{aligned} \tag{6.1.5}$$

Precisiamo che la velocità del suono introdotta in 5.1.8 è proprio per definizione

$$c_s = \sqrt{\frac{n_0}{m} \frac{\partial}{\partial n} F(n_0)} \tag{6.1.6}$$

Giunti a questo punto possiamo inserire nella 6.1.2 f nella forma 6.1.3

$$\begin{aligned}
i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \zeta + \mu(f_0 + \zeta) &= \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial z^2} + F(n_0) + \frac{\partial}{\partial n} F(n_0) f_0(\zeta + \zeta^*) \right] (f_0 + \zeta) = \\
&= \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial z^2} + F(n_0) + \frac{\partial}{\partial n} F(n_0) n_0 \right] \zeta + \frac{\partial}{\partial n} F(n_0) n_0 \zeta^* + F(n_0) f_0
\end{aligned} \tag{6.1.7}$$

Ora passiamo ad eguagliare i termini indipendenti da ζ , in quanto partiamo dal presupposto che f_0 sia soluzione della NPSE e che quindi debba soddisfare l'equazione indipendentemente dalla perturbazione che scegliamo. Ciò che si ottiene è pertanto

$$\mu f_0 = F(n_0) f_0 \tag{6.1.8}$$

Quindi possiamo semplificare alcuni addendi nella NPSE per la perturbazione ottenendo

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \zeta = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial z^2} + F(n_0) + \frac{\partial}{\partial n} F(n_0) n_0 - \mu \right] \zeta + \frac{\partial}{\partial n} F(n_0) n_0 \zeta^* \tag{6.1.9}$$

Introduciamo ora una forma esplicita per la nostra eccitazione ζ , precisamente nella forma

$$\zeta = A e^{i(kz - \omega t)} + B e^{-i(kz - \omega t)} \tag{6.1.10}$$

con $A, B \ll f_0$ per definizione di fluttuazione. Tale forma, introdotta nella NPSE, fornisce

$$\begin{aligned}
&\hbar\omega (A e^{i(kz - \omega t)} - B e^{-i(kz - \omega t)}) = \\
&= \left(\frac{\hbar^2}{2m} k^2 + F(n_0) + \frac{\partial}{\partial n} F(n_0) n_0 - \mu \right) (A e^{i(kz - \omega t)} + B e^{-i(kz - \omega t)}) + \frac{\partial}{\partial n} F(n_0) (B e^{i(kz - \omega t)} + A e^{-i(kz - \omega t)}) n_0
\end{aligned} \tag{6.1.11}$$

A questo punto dobbiamo far sì che siano verificate le uguaglianze simultaneamente per tutti i termini dipendenti da $e^{i(kz - \omega t)}$ e per quelli dipendenti da $e^{-i(kz - \omega t)}$ in quanto le soluzioni sono tra loro indipendenti. Ciò equivale a richiedere che

$$\hbar\omega \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(\frac{\hbar^2}{2m} k^2 + F(n_0) + \frac{\partial}{\partial n} F(n_0) n_0 - \mu \right) & \frac{\partial}{\partial n} F(n_0) n_0 \\ -\frac{\partial}{\partial n} F(n_0) n_0 & -\left(\frac{\hbar^2}{2m} k^2 + F(n_0) + \frac{\partial}{\partial n} F(n_0) n_0 - \mu \right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \tag{6.1.12}$$

Quindi le due equazioni, affinché il sistema non presenti la soluzione banale $A = B = 0$, devono essere linearmente indipendenti, il che significa che

$$\det \begin{pmatrix} \left(\frac{\hbar^2}{2m} k^2 + F(n_0) + \frac{\partial}{\partial n} F(n_0) n_0 - \mu \right) - \hbar\omega & \frac{\partial}{\partial n} F(n_0) n_0 \\ -\frac{\partial}{\partial n} F(n_0) n_0 & -\left(\frac{\hbar^2}{2m} k^2 + F(n_0) + \frac{\partial}{\partial n} F(n_0) n_0 - \mu \right) - \hbar\omega \end{pmatrix} = 0 \quad (6.1.13)$$

$$(\hbar\omega)^2 - \left(\frac{\hbar^2}{2m} k^2 + F(n_0) + \frac{\partial}{\partial n} F(n_0) n_0 - \mu \right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial n} F(n_0) n_0 \right)^2 = 0$$

Si ottiene così lo spettro di energia di Bogoliubov per le piccole eccitazioni, ossia

$$\begin{aligned} \epsilon_k = \hbar\omega &= \sqrt{\left(\frac{\hbar^2}{2m} k^2 + F(n_0) + \frac{\partial}{\partial n} F(n_0) n_0 - \mu \right)^2 - \left(\frac{\partial}{\partial n} F(n_0) n_0 \right)^2} = \\ &= \sqrt{\left(\frac{\hbar^2}{2m} k^2 + \frac{\partial}{\partial n} F(n_0) n_0 \right)^2 - \left(\frac{\partial}{\partial n} F(n_0) n_0 \right)^2} = \sqrt{\left(\frac{\hbar^2}{2m} k^2 \right) \left(\frac{\hbar^2}{2m} k^2 + 2 \frac{\partial}{\partial n} F(n_0) n_0 \right)} = \\ &= \sqrt{\left(\frac{\hbar^2}{2m} k^2 \right) \left(\frac{\hbar^2}{2m} k^2 + \frac{3N^2 g^2 \frac{m}{4\pi\hbar^2} n_0 + 2Ng}{2\pi a_s^2 (1 + 2Na_s n_0)^{\frac{3}{2}}} n_0 \right)} \end{aligned} \quad (6.1.14)$$

Ciò che si osserva è che se $g > 0$, cioè nel caso di interazione repulsiva, lo spettro di energia è sempre reale e le fluttuazioni si mantengono infinitesime in quanto continuano ad oscillare in un certo range di valori, mentre se l'interazione è attrattiva, cioè per $g < 0$, ci sono dei piccoli valori di k per cui le eccitazioni elementari diventano immaginarie, il che comporta un esponenziale reale nel tempo, cioè che uno dei due termini di 6.1.10 va a zero e l'altro diverge, provocando l'instabilità nella soluzione. Il valore di k critico al di sotto del quale accade tale fenomeno è

$$k_c = \sqrt{-\frac{m}{\hbar^2} \left(\frac{3N^2 g^2 \frac{m}{4\pi\hbar^2} n_0 + 2Ng}{\pi a_s^2 (1 + 2Na_s n_0)^{\frac{3}{2}}} n_0 \right)} \quad (6.1.15)$$

Osservando la forma dello spettro di energie si capisce subito però che solo per un certo range di valori di a_s può presentarsi l'instabilità, cioè, banalmente, per

$$\begin{aligned} 3N^2 g^2 \frac{m}{4\pi\hbar^2} n_0 + 2Ng &< 0 \\ -\frac{8\pi\hbar^2}{3mn_0} &< Ng < 0 \\ -\frac{3}{2} &< Na_s n_0 < 0 \end{aligned} \quad (6.1.16)$$

Tuttavia dobbiamo intersecare tale risultato con le condizioni di esistenza della non polinomiale relative ad a_s , ovvero

$$\begin{aligned} 1 + 2Na_s n_0 &> 0 \\ Na_s n_0 &> -\frac{1}{2} \end{aligned} \quad (6.1.17)$$

quindi il range di valori in cui può esserci instabilità modulazionale è

$$-\frac{1}{2} < Na_s n_0 < 0 \quad (6.1.18)$$

Applichiamo ora tali considerazioni a una situazione fisica ben precisa: immaginiamo di avere inizialmente un potenziale repulsivo, quindi la nostra funzione d'onda è una funzione costante lungo tale tratto ed è soggetta a delle piccole fluttuazioni che però rimangono tali e non la modificano su lunghe scale di tempo. Se ad un certo istante invertiamo il segno del potenziale, rendendolo attrattivo, ciò che succede, in base a

quanto visto, è che le fluttuazioni temporalmente diventano sempre più grandi e si creano delle sostanziali modifiche nella nostra funzione d'onda, ovvero essa stessa si deforma. Otteniamo quindi che abbiamo una moltitudine di onde piane, tutte quelle per $k < k_c$, che si sovrappongono in questa regione finita lungo l'asse z di lunghezza L . Ciò che si osserva [4] è il formarsi di più impulsi l'uno vicino all'altro che sono dei veri e propri bright soliton di diverse ampiezze e aperture.

Procediamo a dare una stima di alcune proprietà di questo "treno di solitoni": in primis osserviamo che il valore di k che fornisce il massimo contributo nei vari esponenziali è quello con $|\omega|$ maggiore, in quanto essendo maggiore il coefficiente dell'esponenziale sarà maggiore anche la sua crescita temporale, quindi cerchiamo il massimo assoluto di $|\omega|$ (equivale a moltiplicare per -1 l'argomento sotto radice di ω) in funzione di k (possiamo cercare gli estremi assoluti perchè k appartiene a un insieme limitato nella instabilità modulazionale)

$$\frac{d}{dk} \hbar|\omega| = \frac{1}{2\hbar|\omega|} (-1) \frac{\hbar^2 k}{m} \left(2 \frac{\hbar^2}{2m} k^2 + \frac{3N^2 g^2 \frac{m}{4\pi\hbar^2} n_0 + 2Ng}{2\pi a_{\perp}^2 (1 + 2Na_s n_0)^{\frac{3}{2}}} n_0 \right) \quad (6.1.19)$$

Si trova banalmente che vi è un minimo per $k=0$ e vi è un massimo per

$$k_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} k_c = \sqrt{-\frac{m}{\hbar^2} \left(\frac{3N^2 g^2 \frac{m}{4\pi\hbar^2} n_0 + 2Ng}{2\pi a_{\perp}^2 (1 + 2Na_s n_0)^{\frac{3}{2}}} n_0 \right)} \quad (6.1.20)$$

Possiamo quindi stimare il numero di bright solitons N_s che si formano come, definita la lunghezza d'onda $\lambda_0 = \frac{2\pi}{k_0}$ e utilizzando come parametro la densità lineare di bosoni lungo l'asse z $\rho_0 = \frac{N}{L} = Nn_0$

$$N_s = \frac{L}{\lambda_0} = \frac{\sqrt{-\frac{mL}{\hbar^2} \left(\frac{3Ng^2 \frac{m}{4\pi\hbar^2} \rho_0 + 2Ng}{2\pi a_{\perp}^2 (1 + 2a_s \rho_0)^{\frac{3}{2}}} \right)}}{2\pi} = \frac{\sqrt{-NL a_s \left(\frac{3a_s \rho_0 + 2}{2(1 + 2a_s \rho_0)^{\frac{3}{2}}} \right)}}{\pi a_{\perp}} \quad (6.1.21)$$

6.2 Instabilità modulazionale in accoppiamento debole

Si può inoltre osservare che tale spettro di energia ricavato a partire dalla NPSE si riconduce a quello già noto per la 1D GPE [12], nel limite di debole interazione.

Trascurando i termini oltre il primo ordine in $Na_s n_0$ nella 6.1.14 otteniamo

$$\epsilon_k = \sqrt{\left(\frac{\hbar^2}{2m} k^2 \right)^2 + \frac{\hbar^2}{m} \frac{2Ng}{2\pi a_{\perp}^2 (1 + 2Na_s n_0)^{\frac{3}{2}}} n_0 k^2} = \sqrt{\left(\frac{\hbar^2}{2m} k^2 \right) \left(\frac{\hbar^2}{2m} k^2 + \frac{Ng n_0}{\pi a_{\perp}^2} \right)} \quad (6.2.1)$$

Ricalcolando inoltre, seguendo il medesimo procedimento, k_c otteniamo

$$k_c = \sqrt{-\frac{Ng n_0 2m}{\pi a_{\perp}^2 \hbar^2}} \quad (6.2.2)$$

da cui discende immediatamente anche k_0

$$k_0 = \sqrt{-\frac{Ng n_0 m}{\pi a_{\perp}^2 \hbar^2}} \quad (6.2.3)$$

ed infine si trova anche N_s

$$N_s = -\frac{1}{\pi a_{\perp}} \sqrt{-LN a_s} \quad (6.2.4)$$

A questo punto abbiamo effettuato un confronto grafico tra N_s ricavato dalla NPSE e quello ricavato dalla 1D GPE, il risultato si vede in figura 6.2.1.

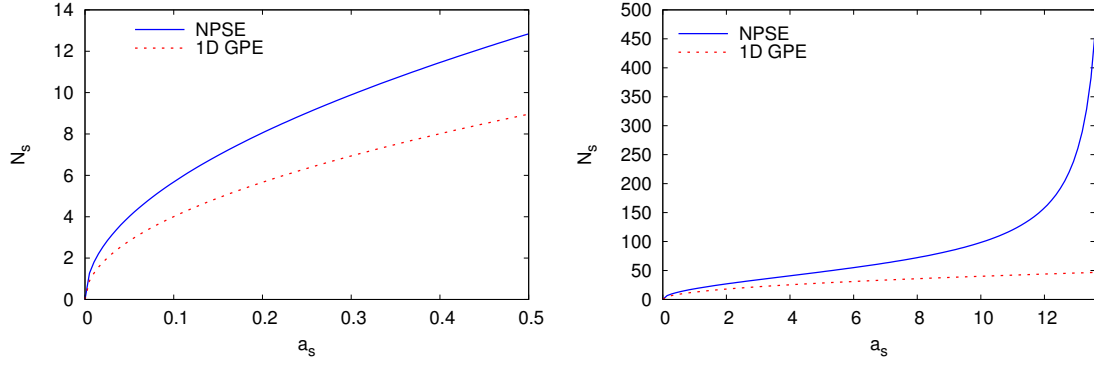


Figura 6.2.1: Abbiamo utilizzato come dati del sistema fisico $N = 10^4$, $\omega_{\perp} = 2\pi 800 Hz$, soffermandoci sul caso particolare di atomi di 7Li come condensato, da cui $m = m_{Li} = 6.536 GeV/c^2$, ed infine abbiamo preso $L = 284.4 \mu m$, da cui discende che $a_{\perp} = 1.34 \mu m$. Coerentemente con le unità di misura adottate per i vari parametri abbiamo riportato nel plot a_s in nm.

Nella prima immagine abbiamo considerato un range di valori più ristretto per far capire il comportamento nel limite piccolo di a_s . Si vede chiaramente che per $a_s \ll 0.1 nm$, le due funzioni sono perfettamente sovrapposte, mentre per valori di a_s dell'ordine dei decimi di nm le stime di N_s differiscono di qualche unità.

Nella seconda immagine invece riusciamo ad avere un'idea migliore dell'andamento complessivo di $N_s(a_s)$, osservando come le funzioni per a_s vicino al valore critico, cioè dell'ordine dei nm, differiscono enormemente.

Precisiamo che si trova un termine divergente per N_s ricavato dalla NPSE: esso discende dal fatto che per quel ben preciso valore di a_s la σ della gaussiana che definisce la funzione d'onda di singola particella sul piano (x,y) si annulla, quindi tale situazione equivale ad avere tutti i bosoni sull'asse z , c'è il collasso del condensato su una sola dimensione, rappresenta effettivamente un caso limite.

Osserviamo, infine, che il risultato ottenuto a partire dalla non polinomiale vale per $|a_s|\rho_0 < \frac{1}{2}$, mentre il risultato ottenuto a partire dalla 1D GPE funziona bene per $|a_s|\rho_0 \ll 1$ quindi anche in quest'ultimo caso abbiamo ottenuto un risultato più generale rispetto a quello valido solo per l'accoppiamento debole.

Conclusioni

In questa tesi abbiamo ricavato inizialmente l'equazione di Gross-Pitaevskii (GPE), che descrive l'evoluzione temporale dello stato di un generico condensato di Bose-Einstein, e l'equazione di Schrödinger non polinomiale (NPSE), che descrive bene lo stato di un condensato di Bose-Einstein in presenza di un potenziale armonico esterno lungo un dato piano, osservando che essa, nel limite di debole interazione, è uguale all'equazione di Gross-Pitaevskii ridotta ad una dimensione (1D GPE).

Abbiamo poi ricavato le soluzioni solitoniche della NPSE, trovando una forma analitica e grafica per il bright soliton e soltanto una forma grafica per il black e per il gray soliton.

Abbiamo inoltre verificato che tali soluzioni rispecchiano in maniera ottima, tramite confronti sia analitici che grafici per tutti e tre i tipi di solitoni, le soluzioni solitoniche della 1D GPE nel limite di bosoni debolmente interagenti.

Abbiamo trovato anche delle sostanziali differenze tra le soluzioni della NPSE e quelle della 1D GPE nel caso di bosoni non debolmente interagenti. Dato che si osserva che la NPSE è l'equazione che approssima meglio la 3D Gross-Pitaevskii, rispetto ad esempio alla 1D Gross-Pitaevskii, possiamo concludere che le soluzioni solitoniche che abbiamo trovato rappresentano una generalizzazione di quelle già note per la 1D GPE, che ne rappresenta esclusivamente il limite per bosoni debolmente interagenti.

Infine abbiamo ottenuto lo spettro di Bogoliubov delle piccole eccitazioni per la NPSE, ricavando le condizioni per l'instabilità modulazionale, trovando analiticamente anche il numero approssimativo di picchi che si formano in un treno di solitoni. Anche in questo caso abbiamo effettuato un confronto grafico tra quest'ultimo risultato e il numero di solitoni che si formano partendo dalla 1D GPE, trovando un ottimo accordo nel limite di weak coupling e delle sostanziali differenze al di fuori di quel limite.

Bibliografia

- [1] J. E. Allen, Phys. Scripta **57**, 436 (1998).
- [2] S. Burger et al., Phys. Rev. Lett. **83**, 5198 (1999).
- [3] L. Khaykovich, F. Schreck, G. Ferrari, T. Bourdel, J. Cubizolles, L. D. Carr, Y. Castin, and C. Salomon, Science **296**, 1290 (2002).
- [4] K. E. Strecker, G. B. Partridge, A. G. Truscott and R. G. Hulet, Nature **417**, 150 (2002).
- [5] M. H. Anderson, J. R. Ensher, M. R. Matthews, C. E. Wieman, E. A. Cornell, Science **269**, 5221 (1995)
- [6] E. P. Gross, Nuovo Cimento **20**, 454 (1961).
- [7] L. P. Pitaevskii, Sov. Phys. JETP **13**, 451 (1961).
- [8] L. Salasnich, B. A. Malomed and F. Toigo, Phys. Rev. A **76**, 063614 (2007).
- [9] L. Salasnich, A. Parola and L. Reatto, Phys. Rev. A **65**, 043614 (2002).
- [10] M. Olshanii, Phys. Rev. Lett. **81**, 938 (1998).
- [11] L. Salasnich, A. Parola and L. Reatto, J. Phys. B **39**, 2839 (2006).
- [12] L. Salasnich, A. Parola and L. Reatto, Phys. Rev. Lett. **91** 080405 (2003).