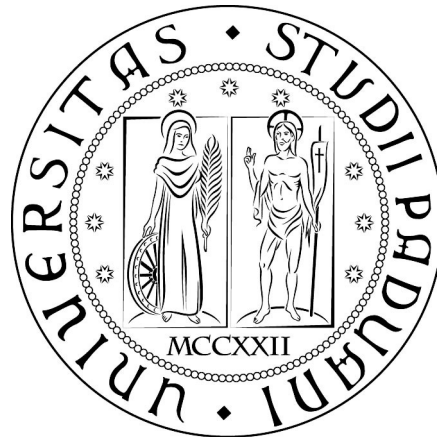


UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA
Dipartimento di Matematica

Corso di Laurea in Magistrale in Matematica



Tesi di Laurea Magistrale

**Simulazione di una strategia di investimento
ottimale per il passaggio a tecnologie a ridotte
emissioni di CO₂**

Laureanda :

Marika Sistoni

Numero di matricola :

1108599

Relatore :

Prof. Tiziano Vargiolu

22 Settembre 2017

Indice

Indice	3
1 Richiami di teoria	7
1.1 Il moto browniano	8
1.2 L'integrale stocastico	9
1.3 La formula di Itô	10
1.4 Equazioni differenziali stocastiche	11
1.5 Processo di diffusione	12
1.6 Problema di arresto ottimale	13
1.6.1 Caso di omogeneità temporale	13
1.6.2 Caso di non omogeneità temporale	20
1.6.3 Disequazione variazionale	21
1.7 Programmazione dinamica	26
1.7.1 Least Square Monte Carlo (LSMC)	28
2 Il sistema di scambio di emissioni europeo (EU ETS)	33
2.1 Incertezza dei mercati e della politica climatica	36
2.2 Prezzo minimo per i certificati di emissione di CO ₂ ("price floor")	36
2.3 Dinamica dei prezzi	41
3 Opzioni reali	43
3.1 Tipi di opzioni reali	43
3.2 Analogia con le opzioni finanziarie	44
3.3 Modello dei flussi di cassa attualizzati	45
3.3.1 Criterio del valore attuale netto	46
3.4 Opportunità di investimento e valutazione di un'opzione reale tramite programmazione dinamica	48
3.4.1 Caso a tempo continuo	48
3.4.2 Caso a tempo discreto	54
4 Struttura del modello	59
4.1 Il problema decisionale	59
4.2 Prezzo come processo stocastico	61

4.3	Procedura di ottimizzazione	63
4.3.1	Decisione al tempo $t = T$	73
4.3.2	Decisione all'istante $t < T$	74
5	Risultati numerici	77
5.1	Dati	77
5.2	Risultati senza l'introduzione del prezzo minimo per le emissioni di CO ₂	79
5.3	Risultati con l'introduzione del prezzo minimo per i certificati di emissione di CO ₂	80
5.3.1	P^{min} costante nel tempo	81
5.3.2	P^{min} variabile in ogni periodo temporale	83
5.4	Robustezza del modello	87
	Appendice A Codice	105
	Bibliografia	117

Introduzione

I combustibili fossili rappresentano oggi la principale fonte energetica dell'umanità in quanto hanno un alto rapporto energia/volume, sono facilmente trasportabili e stoccabili, e costano ancora relativamente poco. La caratteristica di avere un basso costo ha rallentato lo sviluppo delle energie alternative, anche a causa dello stretto legame tra interessi economici e politici di multinazionali e governi. D'altra parte gli idrocarburi presentano alcuni svantaggi: sono altamente inquinanti, non sono rinnovabili, rilasciano grandi quantità di gas ad effetto serra e determinano un incremento di CO₂ in atmosfera, un gas serra determinante per il surriscaldamento globale. Pertanto l'utilizzo di combustibili fossili per la produzione di energia elettrica risulta essere poco sostenibile a lungo termine.

Sono stati presi dei provvedimenti in merito, ad iniziare dal Protocollo di Kyoto, un accordo internazionale per contrastare il riscaldamento climatico riducendo quantitativamente le emissioni di gas serra. Sono stati adottati degli schemi di scambio di emissioni, stabilendo mercati di compravendita di quote di emissione. Per effetto di questi, le aziende si trovano a coprire le proprie emissioni tramite il relativo numero di quote, che possono acquistare o vendere in base a quanto necessario. Con l'introduzione di una "valuta" nel sistema (la quota) si dà un prezzo alle emissioni: di conseguenza, per le aziende sarà redditizio trovare il modo più economico per ridurre le proprie emissioni o pagare chi è in grado di farlo a un costo inferiore. Questa flessibilità dovrebbe assicurare che le emissioni vengano ridotte nella maniera più efficace possibile.

Nel Capitolo 2 analizzeremo il sistema "EU ETS" (European Union Emissions Trading Scheme), che non è soltanto il primo grande mercato al mondo, ma è anche il più ampio poiché copre più di tre quarti degli scambi di quote nell'Unione Europea. L'EU ETS resta uno strumento fondamentale per stimolare l'utilizzo più intenso di innovazione e tecnologia tramite il prezzo dei certificati di emissione di CO₂ e l'uso diretto delle quote assegnate e dei proventi derivanti dalla messa all'asta. Fissare un prezzo per i permessi delle emissioni di CO₂ è il modo migliore per ridurre le emissioni in maniera economicamente efficace, motivare le imprese a ridurre ulteriormente le proprie emissioni e stimolare l'innovazione contribuendo a far entrare nuove tecnologie nel mercato. Il sistema di scambio delle emissioni UE ha bisogno di un meccanismo che riduca l'incertez-

za degli operatori di mercato, migliori le loro aspettative riguardo ai prezzi, e, quindi, ristabilisca la credibilità del mercato. Ciò può essere ottenuto mediante un prezzo minimo per i certificati di emissione di CO_2 introducendolo nelle aste cosicché il valore di mercato di un permesso non possa scendere al di sotto del prezzo minimo d'asta.

L'obiettivo di questa tesi sarà quello di verificare se l'introduzione di un prezzo minimo per i certificati di emissione di CO_2 possa influenzare gli investimenti in tecnologie a ridotte emissioni di CO_2 e l'abbattimento di CO_2 risultante.

Dopo un'introduzione al problema decisionale di un'impresa e alla valutazione di un problema di investimento tramite il valore attuale netto o VAN (Capitolo 3), nel Capitolo 4 studieremo il caso di una impresa che si trova di fronte a quattro alternative: può continuare a produrre energia elettrica tramite la tecnologia esistente ed inquinante, può investire in un impianto con una tecnologia alternativa a ridotte emissioni, può reinvestire in un nuovo impianto a tecnologia inquinante, oppure può abbandonare completamente l'investimento.

Capitolo 1

Richiami di teoria

In questo capitolo riportiamo concetti di analisi stocastica che utilizzeremo all'interno della tesi.

Definizione 1.1 (Processo stocastico). Una famiglia di variabili aleatorie $\{X_t\}_{t \in I}$ (ove $I \subseteq \mathbb{R}$ è detto insieme dei tempi) definite sullo stesso spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ed a valori nello stesso spazio misurabile (E, ε) , è detta processo stocastico.

Indichiamo con $\mathcal{B}(E)$ la σ -algebra dei boreliani associata all'insieme E .

Un processo stocastico X definito su $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ed a valori in uno spazio misurabile (E, ε) si dice

- continuo se $\forall \omega \in \Omega$ la mappa $t \mapsto X_t(\omega)$ è continua;
- quasi certamente continuo se $\exists A \in \mathcal{F}$ con $\mathbb{P}(A) = 1$, tale che $\forall \omega \in A$ la funzione $t \mapsto X_t(\omega)$ è continua;
- misurabile se l'applicazione $(t, \omega) \mapsto X_t(\omega)$ è un'applicazione misurabile definita su $(I \times \Omega, \mathcal{B}(I) \otimes \mathcal{F})$ ed a valori in $(E, \mathcal{B}(E))$.

Dato uno spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, definiamo

- filtrazione una famiglia crescente $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in I}$ di sotto- σ -algebre di \mathcal{F} , cioè tali che $\mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t$ per ogni $s, t \in I$ con $s \leq t$;
- filtrazione naturale $\{\mathcal{F}_t^X\}_{t \in I}$ di un processo $\{X_t\}_{t \in I}$ definita da $\mathcal{F}_t^X := \sigma(\{X_u\}_{u \in I, u \leq t})$;
- ampliamento standard $\{\overline{\mathcal{F}}_{t+}^X\}_{t \in I}$ della filtrazione $\{\mathcal{F}_t^X\}_{t \in I}$ (definita su uno spazio di probabilità completo) una filtrazione completa ($\forall t \in I$ la σ -algebra \mathcal{F}_t contiene tutti gli eventi di \mathcal{F} di misura nulla) e continua a destra ($\mathcal{F} = \mathcal{F}_{t+} := \bigcap_{u > t} \mathcal{F}_u$ per ogni $t \in [0, \infty)$).

Un processo stocastico $\{X_t\}_{t \in I}$ definito su uno spazio di probabilità filtrato $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \in I}, \mathbb{P})$ ed a valori in uno spazio misurabile (E, ε) si dice

- adattato alla filtrazione se per ogni $t \in I$ la variabile X_t è \mathcal{F}_t -misurabile, cioè se è misurabile come applicazione da (Ω, \mathcal{F}) in (E, ε) ;
- progressivamente misurabile rispetto $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in I}$ se $\forall T > 0, T \in I$, l'applicazione $(t, \omega) \mapsto X_t(\omega)$ è un'applicazione misurabile definita su $([0, T] \times \Omega, \mathcal{B}([0, T]) \otimes \mathcal{F}_t)$ ed a valori in $(E, \mathcal{B}(E))$.

Introduciamo infine i tempi di arresto.

Definizione 1.2. Dato uno spazio filtrato $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \in I}, \mathbb{P})$, un tempo di arresto è una variabile aleatoria

$$\begin{aligned} \tau : \Omega &\rightarrow I \cup \{\infty\} \\ \omega &\mapsto \tau(\omega) \end{aligned} \tag{1.1}$$

tale che $\{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t$, per ogni $t \in I$. Si definisce inoltre la σ -algebra \mathcal{F}_τ nel seguente modo $\mathcal{F}_\tau := \{A \in \mathcal{F} : A \cap \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t, \forall t \in I\}$.

1.1 Il moto browniano

Definizione 1.3 (Moto browniano). Si dice moto browniano un processo stocastico reale $B = \{B_t\}_{t \geq 0}$ che soddisfa le seguenti proprietà:

1. $B_0 = 0$ quasi certamente;
2. $\forall k \geq 2$ e $0 \leq t_0 < t_1 < \dots < t_k < \infty$ le variabili aleatorie date dagli incrementi di B , cioè $\{B_{t_i} - B_{t_{i-1}}\}_{i=1}^k$, sono indipendenti;
3. $\forall t > s \geq 0$ si ha che $B_t - B_s \sim \mathcal{N}(0, t - s)$;
4. B ha traiettorie quasi certamente continue.

Diamo anche una caratterizzazione più forte, supponendo che il moto browniano sia adattato alla filtrazione $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$.

Definizione 1.4 (Moto browniano rispetto ad una filtrazione). Un processo stocastico $B = \{B_t\}_{t \geq 0}$, definito su uno spazio di probabilità filtrato $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}, \mathbb{P})$, è detto $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ -moto browniano se è adattato a $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ e se soddisfa le seguenti proprietà:

- i $B_0 = 0$ quasi certamente;
- ii $\forall 0 \leq s < t$ si ha che la variabile aleatoria $B_t - B_s$ è indipendente da \mathcal{F}_s ;
- iii $\forall t > s \geq 0$ si ha che $B_t - B_s \sim \mathcal{N}(0, t - s)$;
- iv B ha traiettorie quasi certamente continue.

1.2 L'integrale stocastico

Fissiamo $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}, \mathbb{P})$ uno spazio di probabilità filtrato su cui è definito un $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ - moto browniano reale $B = \{B_t\}_{t \geq 0}$ e su cui saranno definiti tutti i processi che introdurremo.

Siano $0 \leq a < b < \infty$ fissati.

Definizione 1.5 (Processo semplice). Diremo che un processo $X = \{X_s\}_{s \in [a, b]}$ è semplice se esistono $k \in \mathbb{N}_{>0}$, $a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_k = b$ e delle variabili aleatorie $C_i : (\Omega, \mathcal{F}_{t_i}, \mathbb{P}) \rightarrow \mathbb{R}$ tali che per ogni $\omega \in \Omega$ si ha

$$X_s(\omega) = \sum_{i=0}^{k-1} C_i(\omega) \mathbf{1}_{[t_i, t_{i+1})}(s), \quad \forall s \in [a, b]. \quad (1.2)$$

Indichiamo con $\mathcal{S}[a, b]$ lo spazio dei processi semplici, tali che $\forall i = 0, \dots, k-1$ si ha che $C_i \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_{t_i}, \mathbb{P})$.

Definizione 1.6. Dato un processo semplice $X \in \mathcal{S}[a, b]$, come in (1.2), si dice integrale stocastico di X rispetto al moto browniano $B = \{B_t\}_{t \geq 0}$ la seguente variabile aleatoria

$$J_{a,b}(X) := \int_a^b X_t dB_t := \sum_{i=0}^{k-1} C_i (B_{t_{i+1}} - B_{t_i}) \quad (1.3)$$

definita sullo stesso spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ su cui è definito il moto browniano B ed a valori in \mathbb{R} .

Definizione 1.7. (Spazio $M^2[a, b]$). Indichiamo con $M^2[a, b]$ lo spazio vettoriale dei processi reali $X = \{X_t\}_{t \in [a, b]}$ progressivamente misurabili e tali che

$$\|X\|_{M^2}^2 := \mathbb{E} \left[\int_a^b X_t^2 dt \right] < \infty. \quad (1.4)$$

Definizione 1.8 (Integrale stocastico). Definiamo integrale stocastico l'unico operatore

$$\begin{aligned} J_{a,b} : M^2[a, b] &\longrightarrow L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \\ X &\longmapsto J_{a,b}(X) = \int_a^b X_t dB_t \end{aligned} \quad (1.5)$$

con le seguenti proprietà:

- $J_{a,b}$ è un operatore lineare, cioè $J_{a,b}(\alpha X + \beta Y) = \alpha J_{a,b}(X) + \beta J_{a,b}(Y)$ quasi certamente per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $X, Y \in M^2[a, b]$;
- $J_{a,b}$ è un operatore isometrico

$$\|J_{a,b}(X)\|_{L^2(\Omega)} = \|X\|_{M^2}, \quad \forall X \in M^2[a, b]; \quad (1.6)$$

- se $X \in \mathcal{S}[a, b]$ allora $J_{a,b}(X)$ è dato dalla definizione [\(1.6\)](#)

Definizione 1.9. (Spazio $M_{loc}^2[a, b]$). Indichiamo con $M_{loc}^2[a, b]$ lo spazio vettoriale dei processi $X = \{X_t\}_{t \in [a,b]}$ progressivamente misurabili tali che $\int_a^b X_t^2(\omega) dt < \infty$, per quasi ogni $\omega \in \Omega$.

Se fissiamo $0 < T < \infty$ e consideriamo $X \in M^2[0, T]$, risulta essere ben definito il processo $I = \{I_t = I_t(X)\}_{t \in [0, T]}$ ponendo

$$I_t := J_{0,t}(X) = \int_0^t X_s dB_s. \quad (1.7)$$

Teorema 1.2.1. Se $X \in M^2[0, T]$, allora il processo $I = \{I_t\}_{t \in [0, T]}$ definito in [\(1.7\)](#) è una martingala di quadrato integrabile con variazione quadratica data da

$$\langle I \rangle_t = \int_0^t X_u^2 du. \quad (1.8)$$

Possiamo allora definire l'integrale stocastico anche per processi in $M_{loc}^2[0, T]$. Fissato un processo $X = \{X_t\}_{t \in [0, T]}$ in $M_{loc}^2[0, T]$, introduciamo per $n \in \mathbb{N}$ la variabile aleatoria

$$\tau_n := \left\{ t \in [0, T] \text{ t.c. } \int_0^t X_u^2 du > n \right\}$$

che è un tempo di arresto. Definiamo inoltre per ogni $n \in \mathbb{N}$ un processo $X^{(n)} = \{X_u^{(n)}\}_{u \in [0, T]}$ ponendo $X_u^{(n)} := X_u \mathbf{1}_{[0, \tau_n)}(u)$. Poiché $X^{(n)} \in M^2[0, T]$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, risulta ben definito il processo $I^{(n)} = \{I_t^{(n)}\}_{t \in [0, T]}$ dato da

$$I_t^{(n)} := \int_0^t X_u^{(n)} dB_u = \int_0^t X_u \mathbf{1}_{[0, \tau_n)}(u) dB_u. \quad (1.9)$$

Definizione 1.10. (Integrale stocastico in $M_{loc}^2[a, b]$). Per ogni $X \in M_{loc}^2[0, T]$ definiamo l'integrale stocastico di X rispetto al moto browniano $\{B_t\}_{t \geq 0}$ il processo $I = \{I_t =: \int_0^t X_u^2 du\}_{t \in [0, T]}$ tale che $\forall t \in [0, T]$ si ha

$$I_t(\omega) := \begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} I_t^{(n)}(\omega), & \forall \omega \in A \text{ (dove } A \in \mathcal{F} : \mathbb{P}(A) = 1) \\ 0, & \text{altrove} \end{cases} \quad (1.10)$$

1.3 La formula di Itô

Definizione 1.11. (Spazio $M_{loc}^1[0, T]$). Indichiamo con $M_{loc}^1[0, T]$ lo spazio vettoriale dei processi $X = \{X_t\}_{t \in [a,b]}$ tali che $\int_0^T |X_t| dt < \infty$ quasi certamente.

Definizione 1.12. (Spazi \mathcal{M}_{loc}^2 e \mathcal{M}_{loc}^1). Indichiamo con \mathcal{M}_{loc}^2 (rispettivamente \mathcal{M}_{loc}^1) lo spazio vettoriale dei processi $X = \{X_t\}_{t \in [0, \infty]}$ progressivamente misurabili tali che per ogni $T > 0$ si ha $\{X_t\}_{t \in [0, T]} \in M_{loc}^2[0, T]$ (rispettivamente $\{X_t\}_{t \in [0, T]} \in M_{loc}^1[0, T]$).

Definizione 1.13 (Processo di Itô). Un processo stocastico reale quasi certamente continuo $X = \{X_t\}_{t \geq 0}$ è detto processo di Itô se esistono $\phi = \{\phi_t\}_{t \geq 0} \in \mathcal{M}_{loc}^2$ e $\varphi = \{\varphi_t\}_{t \geq 0} \in \mathcal{M}_{loc}^1[0, T]$ tale che quasi certamente

$$X_t - X_0 = \int_0^t \phi dB_s + \int_0^t \varphi_s ds, \quad t \geq 0 \quad (1.11)$$

Indichiamo la relazione precedente in notazione differenziale $dX_t = \phi dB_t + \varphi dt$.

Definizione 1.14 (Formula di Itô). Sia $X = \{X_t\}_{t \geq 0}$ un processo di Itô tale che $dX_t = \phi dB_t + \psi dt$ e sia $F : [0, \infty] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ di classe $C^{1,2}$. Allora quasi certamente per ogni $t \geq 0$ si ha

$$\begin{aligned} F(t, X_t) - F(t, X_0) &= \int_0^t \frac{\partial F}{\partial t}(s, X_s) ds + \int_0^t \frac{\partial F}{\partial x}(s, X_s) dX_s + \\ &+ \frac{1}{2} \int_0^t \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(s, X_s) d\langle X \rangle_s, \end{aligned} \quad (1.12)$$

ovvero, in notazione differenziale, si ha

$$dF(t, X_t) = \frac{\partial F}{\partial t}(t, X_t) dt + \frac{\partial F}{\partial x}(t, X_t) dX_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(t, X_t) d\langle X \rangle_t. \quad (1.13)$$

In generale, sia $X = \{X_t\}_{t \geq 0}$ un processo di Itô n -dimensionale con $dX_t = \phi dB_t + \psi dt$ tale che per ogni $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq d$ sia $\phi_{i,j} = \{(\phi_t)_{i,j}\}_{t \geq 0} \in \mathcal{M}_{loc}^2$ e $\varphi_i = \{(\varphi_t)_i\}_{t \geq 0} \in \mathcal{M}_{loc}^1$ e sia $F = F(t, x) : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione di classe $C^{1,2}$. Allora quasi certamente per ogni $t \geq 0$ si ha

$$\begin{aligned} F(t, X_t) - F(t, X_0) &= \int_0^t \frac{\partial F}{\partial s}(s, X_s) ds + \sum_{i=1}^n \int_0^t \frac{\partial F}{\partial x_i}(s, X_s) dX_s^i + \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \int_0^t \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}(s, X_s) d\langle X^{(i)}, X^{(j)} \rangle_s, \end{aligned} \quad (1.14)$$

ed in notazione differenziale

$$\begin{aligned} dF(t, X_t) &= \frac{\partial F}{\partial t}(t, X_t) dt + \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial x_i}(t, X_t) dX_t^i + \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}(t, X_t) d\langle X^{(i)}, X^{(j)} \rangle_t, \end{aligned} \quad (1.15)$$

1.4 Equazioni differenziali stocastiche

Sia $T > 0$ fissato, $x \in \mathbb{R}^n$ e siano $b : [0, T] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $\sigma : [0, T] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n \times d}$ due funzioni misurabili.

Definizione 1.15. Una soluzione dell'equazione differenziale stocastica della forma

$$\begin{cases} dX_t = \sigma(t, X_t) dB_t + b(t, X_t) dt \\ X_0 = x \end{cases} \quad (1.16)$$

è il dato di

- uno spazio di probabilità filtrato standard $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \in [0, T]}, \mathbb{P})$;
- un $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in [0, T]}$ - moto browniano d-dimensionale $B = \{B_t\}_{t \in [0, T]}$;
- un processo reale $X = \{X_t\}_{t \in [0, T]}$ definito su Ω , quasi certamente continuo ed adattato alla filtrazione $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in [0, T]}$ tale che per $1 \leq i \leq n$ e $1 \leq j \leq d$ si ha che $\{\sigma_{ij}(s, X_s)\}_{s \in [0, T]} \in M_{loc}^2[0, T]$, $\{b_i(s, X_s)\}_{s \in [0, T]} \in M_{loc}^1[0, T]$ e per ogni $t \in [0, T]$

$$X_t = x + \int_0^t \sigma(s, X_s) dB_s + \int_0^t b(s, X_s) ds. \quad (1.17)$$

Si dice che (1.16) ha soluzioni forti se per ogni $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in [0, T]}$ - moto browniano $\{B_t\}_{t \in [0, T]}$ definito su uno spazio di probabilità filtrato standard $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \in [0, T]}, \mathbb{P})$ esiste un processo $X = \{X_t\}_{t \in [0, T]}$ tale che $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \in [0, T]}, \{X_t\}_{t \in [0, T]}, \{B_t\}_{t \in [0, T]}, \mathbb{P})$ sia soluzione di (1.16).

Enunciamo una teorema che, sotto opportune ipotesi, garantisce l'esistenza di soluzioni forti per un'equazione differenziale stocastica.

Teorema 1.4.1 (Esistenza ed unicità di soluzioni forti). *Siano b e σ come definite in precedenza e supponiamo che esistano due costanti $L, M < \infty$ tali che $\forall t \in [0, T]$ ed $x, y \in \mathbb{R}$ si ha*

$$\begin{aligned} |b(t, x)|^2 &\leq M(1 + |x|^2), & |\sigma(t, x)|^2 &\leq M(1 + |x|^2), \\ |b(t, x) - b(t, y)|^2 &\leq L|x - y|, & |\sigma(t, x) - \sigma(t, y)|^2 &\leq L|x - y|. \end{aligned} \quad (1.18)$$

dove $|\sigma|^2 = \sum_{i,j} \sigma_{ij}^2$. Allora per ogni spazio standard filtrato $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \in [0, T]}, \mathbb{P})$ su cui è definito un $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in [0, T]}$ - moto browniano $B = \{B_t\}_{t \in [0, T]}$ esiste un processo $X = \{X_t\}_{t \in [0, T]} \in M^2[0, T]$ che è soluzione forte dell'equazione differenziale stocastica (1.16) ed è unico per traiettorie, cioè se X' è un'altra soluzione allora X e X' sono indistinguibili, ovvero $\mathbb{P}(X_t = X'_t, \forall t \in [0, T]) = 1$.

1.5 Processo di diffusione

Diamo la definizione di processo di diffusione di Itô.

Definizione 1.16 (Processo di diffusione). Una diffusione è un processo stocastico $X = \{X_t\}_{t \geq 0}$ definito su uno spazio di probabilità filtrato standard $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}, \mathbb{P})$ ed a valori in \mathbb{R}^n che risolve l'equazione

$$\begin{cases} dX_t = b(X_t) dt + \sigma(X_t) dB_t \\ X_0 = x \end{cases} \quad (1.19)$$

dove $x \in \mathbb{R}^n$, $B = \{B_t\}_{t \geq 0}$ è un $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ -moto browniano d-dimensionale, $\sigma : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n \times d}$ e $b : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ sono funzioni che supponiamo essere globalmente lipschitziane.

Introduciamo la probabilità \mathbb{Q}^x tale che $X_0 = x$. Una proprietà importante dei processi di diffusione è che sono processi di Markov omogenei:

$$\mathbb{Q}^x(X_{t+h} \in A | \mathcal{F}_t) = \mathbb{Q}^z(X_h \in A) |_{z=X_t}. \quad (1.20)$$

1.6 Problema di arresto ottimale

In questa sezione introdurremo un problema di arresto ottimale in caso di omogeneità temporale ed in caso di non omogeneità temporale. Inoltre riporteremo un teorema di verifica per arresto ottimale (disequazione variazionale) che ci sarà utile nel Capitolo [3](#).

1.6.1 Caso di omogeneità temporale

Sia X_t un processo di diffusione su \mathbb{R}^n con dinamica $dX_t = b(X_t) dt + \sigma(X_t) dB_t$, con $X_0 = x$ e sia g (detta funzione profitto) una data funzione su \mathbb{R}^n che soddisfa:

- $g(\xi) \geq 0$ per ogni $\xi \in \mathbb{R}^n$
- g è continua.

Il problema consiste nel trovare un tempo di arresto $\tau^* = \tau^*(x, \omega)$ (detto tempo di arresto ottimale) per X_t con $X_0 = x$ tale che

$$\mathbb{E}^x [g(X_{\tau^*})] = \sup_{\tau} \mathbb{E}^x [g(X_{\tau})] \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}^n, \quad (1.21)$$

dove il sup è preso tra tutti i tempi di arresto τ per X_t , $g(X_{\tau})$ va inteso pari a 0 nei punti $\omega \in \Omega$ tali che $\tau(\omega) = \infty$ e con $\mathbb{E}^x [\cdot]$ si intende il valore atteso rispetto alla probabilità \mathbb{Q}^x tale che $X_0 = x \in \mathbb{R}^n$. Inoltre vogliamo trovare il profitto atteso ottimo corrispondente, cioè

$$g^*(x) = \mathbb{E}^x [g(X_{\tau^*})], \quad (1.22)$$

dove τ^* è il tempo di arresto ottimale.

Riportiamo alcuni risultati che ci serviranno nella dimostrazione del teorema di unicità per tempi di arresto ottimali.

Sia X_t un processo di diffusione di Itô con dinamica $dX_t = b(X_t) dt + \sigma(X_t) dB_t$, con $X_0 = x$.

Definizione 1.17 (Funzione valutata sopra la media e funzione superarmonica). Diremo che una funzione $f : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty]$ misurabile è valutata sopra la media (rispetto a X_t) se

$$f(x) \geq \mathbb{E}^x [f(X_{\tau})] \quad (1.23)$$

per ogni tempo di arresto τ e per ogni $x \in \mathbb{R}^n$, dove $\mathbb{E}^x [\cdot]$ è il valore atteso rispetto a \mathbb{Q}^x .

Diremo che f è superarmonica (rispetto a X_t) se

- f è valutata sopra la media,
- f è semicontinua inferiormente.

Lemma 1.6.1. a) Siano f_1, f_2, \dots funzioni superarmoniche (valutate sopra la media) tali che $f_k \uparrow f$ puntualmente, allora f è superarmonica (valutata sopra la media).

b) Sia f è una funzione valutata sopra la media e siano σ e τ due tempi di arresto tali che $\sigma \leq \tau$. Allora $\mathbb{E}^x [f(X_\sigma)] \geq \mathbb{E}^x [f(X_\tau)]$.

c) Sia f una funzione valutata sopra la media e sia H un insieme boreliano. Allora $\tilde{f}(x) := \mathbb{E}^x [f(X_{\tau_H})]$ è valutata sopra la media.

Definizione 1.18. Sia h una funzione reale misurabile definita su \mathbb{R}^n . Se f è una funzione superarmonica (valutata sopra la media) e $f \geq h$, allora diremo che f è un maggiorante superarmonico (valutato sopra la media) di h (rispetto a X_t).

Supponiamo che esista una funzione \hat{h} tale che

- \hat{h} sia un maggiorante superarmonico di h ,
- se f è un altro maggiorante superarmonico di h , allora $\hat{h} \leq f$.

Allora \hat{h} è detto il più piccolo maggiorante superarmonico di h , cioè

$$\hat{h} = \inf_f f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n \quad (1.24)$$

dove l'inf è preso al variare di tutti i maggioranti superarmonici di h .

Sia $\mathcal{M}_\infty = \sigma(X_s : s \geq 0)$ e \mathcal{H} l'insieme delle variabili aleatorie reali e \mathcal{M}_∞ -misurabili. Consideriamo l'operatore di traslazione per $t \geq 0$

$$\begin{aligned} \theta_t : \mathcal{H} &\rightarrow \mathcal{H} \\ \eta = g_1(X_{t_1}) \cdots g_k(X_{t_k}) &\mapsto \theta_t \eta = g_1(X_{t_1+t}) \cdots g_k(X_{t_k+t}), \end{aligned} \quad (1.25)$$

dove g_{t_i} sono Borel-misurabili, $t_i \geq 0$.

Sia $H \subset \mathbb{R}^n$ misurabile e sia τ_H il tempo di prima uscita da H per X_t . Sia α un altro tempo di arresto e g una funzione continua e limitata su \mathbb{R}^n . Poniamo

$$\eta = g(X_{\tau_H}) \cdot \mathbf{1}_{\{\tau_H < \infty\}}, \quad \tau_{H^\alpha} = \inf\{t \geq \alpha : X_t \notin H\}.$$

Allora abbiamo che

$$\theta_\alpha \eta \cdot \mathbf{1}_{\{\alpha < \infty\}} = g(X_{\tau_{H^\alpha}}) \cdot \mathbf{1}_{\{\tau_{H^\alpha} < \infty\}}. \quad (1.26)$$

In particolare, se $\alpha = \tau_G$ con $G \subset \subset H$ misurabile e $\tau_H < \infty$ \mathbb{Q}^x -quasi certamente, allora

$$\tau_H = \tau_{H^\alpha} \quad \text{e} \quad \theta_{\tau_G} g(X_{\tau_H}) = g(X_{\tau_H}). \quad (1.27)$$

Inoltre se f è una funzione misurabile e limitata, allora vale

$$\mathbb{E}^x [f(X_{\tau_H})] = \mathbb{E}^x [\mathbb{E}^{X_{\tau_G}} [f(X_{\tau_H})]]. \quad (1.28)$$

Lemma 1.6.2 (Legge 0-1). Sia $\mathcal{M}_t = \sigma(X_s : s \leq t)$ e $H \in \bigcap_{t \geq 0} \mathcal{M}_t$. Allora o $\mathbb{Q}^x(H) = 0$ oppure $\mathbb{Q}^x(H) = 1$.

Sia D un insieme aperto di \mathbb{R}^n .

Corollario 1.6.3. Sia $x \in \mathbb{R}^n$ e $\tau_D = \inf \{t \geq 0 : X_t \notin D\}$. Allora o $\mathbb{Q}^x(\tau_D = 0) = 0$ oppure $\mathbb{Q}^x(\tau_D = 0) = 1$.

In altre parole, X_t partendo da $X_0 = x$ rimane in D per un periodo di tempo positivo, oppure partendo da x lascia D immediatamente. Da quanto appena visto possiamo ricavare la seguente definizione.

Definizione 1.19 (Punto regolare ed irregolare). Diremo che un punto $x \in \partial D$ è

- regolare se $\mathbb{Q}^x(\tau_D = 0) = 1$,
- irregolare se $\mathbb{Q}^x(\tau_D = 0) = 0$.

Teorema 1.6.4 (Teorema di esistenza per tempi di arresto ottimali). Sia g^* la funzione di profitto ottimale definita nell'equazione (1.22) e sia \hat{g} il più piccolo maggiorante superarmonico di g .

a) Allora

$$g^*(x) = \hat{g}(x). \quad (1.29)$$

b) Per $\epsilon > 0$ poniamo

$$D_\epsilon = \{x : g(x) < \hat{g}(x) - \epsilon\}. \quad (1.30)$$

Supponiamo che g sia limitata. Allora risulta essere quasi ottimale fermarsi al primo tempo τ_ϵ di uscita da D_ϵ , cioè

$$|g^*(x) - \mathbb{E}^x [g(X_{\tau_\epsilon})]| \leq 2\epsilon, \quad \forall x. \quad (1.31)$$

c) Definiamo la seguente regione di continuazione

$$D = \{x : g(x) < g^*(x)\}. \quad (1.32)$$

Per $N = 1, 2, \dots$ definiamo

1. $g_N = g \wedge N$,
2. $D_N = \{x : g_N(x) < \hat{g}_N(x)\}$,
3. $\sigma_N = \tau_{D_N}$.

Allora $D_N \subset D_{N+1}$, $D_N \subset D \cap g^{-1}([0, N])$ e $D = \bigcup_N D_N$. Se $\sigma_N < \infty$ \mathbb{Q}^x -quasi certamente per ogni N , allora

$$g^*(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{E}^x [g(X_{\sigma_N})]. \quad (1.33)$$

d) In particolare, se $\tau_D < \infty$ \mathbb{Q}^x -quasi certamente e $\{g(X_{\sigma_N})\}_N$ è uniformemente integrabile rispetto a \mathbb{Q}^x , allora

$$g^*(x) = \mathbb{E}^x [g(X_{\tau_D})] \quad (1.34)$$

e $\tau^* = \tau_D$ è un tempo di arresto ottimale.

Dimostrazione. Per dimostrare a) distinguiamo due casi.

- Assumiamo che g sia limitata e definiamo

$$\tilde{g}_\epsilon(x) = \mathbb{E}^x [\hat{g}(X_{\tau_\epsilon})], \quad \forall \epsilon > 0. \quad (1.35)$$

Grazie al Lemma [1.6.1 c\)](#) abbiamo che \tilde{g}_ϵ è valutata sopra la media. Affermiamo che

$$g(x) \leq \tilde{g}_\epsilon(x) + \epsilon, \quad \forall x. \quad (1.36)$$

Per mostrarlo supponiamo che

$$\beta := \sup_x \{g(x) - \tilde{g}_\epsilon(x)\} > \epsilon. \quad (1.37)$$

Allora per ogni $\eta > 0$ possiamo trovare un x_0 tale che

$$g(x_0) - \tilde{g}_\epsilon(x_0) \geq \beta - \eta, \quad (1.38)$$

da cui

$$\tilde{g}_\epsilon(x_0) \leq g(x_0) - \beta + \eta. \quad (1.39)$$

D'altra parte, poiché $\tilde{g}_\epsilon + \beta$ è un maggiorante valutato sopra la media di g , abbiamo che

$$\tilde{g}_\epsilon(x_0) + \beta \geq \hat{g}(x_0). \quad (1.40)$$

Pertanto combinando [\(1.39\)](#) e [\(1.40\)](#) otteniamo che

$$\hat{g}(x_0) \leq g(x_0) + \eta. \quad (1.41)$$

Distinguiamo ora due casi.

- Sia $\tau_\epsilon > 0$, \mathbb{Q}^{x_0} -quasi certamente. Da [\(1.41\)](#) e dalla definizione di D_ϵ abbiamo che

$$g(x_0) + \eta \geq \hat{g}(x_0) \geq \mathbb{E}^{x_0} [\hat{g}(X_{t \wedge \tau_\epsilon})] \geq \mathbb{E}^{x_0} [(\hat{g}(X_t) + \epsilon)\mathbf{1}_{\{t < \tau_\epsilon\}}],$$

per ogni $t > 0$. Dal Lemma di Fatou e per la semicontinuità dal basso di g otteniamo

$$\begin{aligned} g(x_0) + \eta &\geq \liminf_{t \rightarrow 0} \mathbb{E}^{x_0} [(\hat{g}(X_t) + \epsilon)\mathbf{1}_{\{t < \tau_\epsilon\}}] \\ &\geq \mathbb{E}^{x_0} \left[\liminf_{t \rightarrow 0} (\hat{g}(X_t) + \epsilon)\mathbf{1}_{\{t < \tau_\epsilon\}} \right] \geq g(x_0) + \epsilon \end{aligned}$$

che è vero solo se $\eta \geq \epsilon$.

- Se $\tau_\epsilon = 0$ \mathbb{Q}^{x_0} -quasi certamente allora $\tilde{g}_\epsilon(x_0) = \hat{g}(x_0)$. Pertanto $g(x_0) \leq \hat{g}(x_0) = \tilde{g}_\epsilon(x_0)$ che contraddice quanto visto in (1.39) per $\eta < \beta$.

Entrambi i casi precedenti portano alla stessa conclusione, ossia che (1.37) è una contraddizione. Abbiamo così provato (1.36) e possiamo quindi dire che $\tilde{g}_\epsilon + \epsilon$ è un maggiorante sopra la media di g . Inoltre abbiamo che

$$\hat{g} \leq \tilde{g}_\epsilon + \epsilon = \mathbb{E}[\hat{g}(X_{\tau_\epsilon})] + \epsilon \leq \mathbb{E}[(g + \epsilon)(X_{\tau_\epsilon})] + \epsilon \leq \mathbb{E}[g(X_{\tau_\epsilon})] + 2\epsilon \leq g^* + 2\epsilon. \quad (1.42)$$

Poiché \hat{g} è un maggiorante superarmonico di g allora vale

$$\hat{g}(x) \geq \mathbb{E}^x[\hat{g}(X_{\tau_\epsilon})] \geq \mathbb{E}^x[g(X_{\tau_\epsilon})] \quad (1.43)$$

e quindi

$$\hat{g}(x) \geq g^*(x), \quad \forall x. \quad (1.44)$$

Per quanto appena visto, per (1.42) e per l'arbitrarietà di ϵ otteniamo $\hat{g} = g^*$.

- Se g non è limitata, poniamo

$$g_N = \min(N, g), \quad N = 1, 2, \dots \quad (1.45)$$

Sia \hat{g}_N un maggiorante superarmonico di g_N . Essendo g_N limitata, riconducendoci al caso precedente, possiamo dire che $g_N^* = \hat{g}_N$. Allora

$$g^* \geq g_N^* = \hat{g}_N, \quad \text{con } \hat{g}_N \uparrow h \text{ per } N \rightarrow \infty, \quad \text{dove } h \geq \hat{g} \geq g^* \quad (1.46)$$

supponendo che h sia un maggiorante superarmonico di g . Quindi $h = \hat{g} = g^*$.

Per mostrare il punto b) del teorema, basta notare che (1.29) e (1.42) implicano la tesi (1.31).

Per dimostrare c) e d), distinguiamo due casi.

- Supponiamo che g sia limitata. Allora, poiché

$$\tau_\epsilon \uparrow \tau_D \quad \text{per } \epsilon \downarrow 0$$

e $\tau_D < \infty$ quasi certamente abbiamo che

$$\lim_{\epsilon \downarrow 0} \mathbb{E}^x[g(X_{\tau_\epsilon})] = \mathbb{E}^x[g(X_{\tau_D})], \quad (1.47)$$

e per (1.42) e (1.29) otteniamo

$$g^*(x) \leq \lim_{\epsilon \downarrow 0} (\mathbb{E}^x[g(X_{\tau_\epsilon})] + 2\epsilon) \leq \lim_{\epsilon \downarrow 0} (g^*(x) + 2\epsilon)$$

da cui

$$g^*(x) = \mathbb{E}^x[g(X_{\tau_D})]. \quad (1.48)$$

- Se g non è limitata definiamo

$$h = \lim_{N \rightarrow \infty} \hat{g}_N. \quad (1.49)$$

Per il Lemma [1.6.1 a\)](#) h è superarmonica. Inoltre $\hat{g}_N \leq \hat{g}$ per ogni N , perciò $h = \lim_{N \rightarrow \infty} \hat{g}_N \leq \hat{g}$. D'altra parte $g_N \leq \hat{g}_N \leq h$ per ogni N , pertanto $g = \lim_{N \rightarrow \infty} g_N \leq h$. Dal fatto che \hat{g} è il più piccolo maggiorante superarmonico di g , possiamo concludere che

$$h = \hat{g}. \quad (1.50)$$

Da [\(1.48\)](#) e da quanto appena visto abbiamo che

$$\begin{aligned} g^*(x) &= \hat{g}(x) = h(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} g_N(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{E}^x [g_N(X_{\sigma_N})] \\ &\leq \lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{E}^x [g(X_{\sigma_N})] \leq g^*(x) \end{aligned}$$

e quindi otteniamo

$$g^*(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{E}^x [g(X_{\sigma_N})].$$

Ricordiamo che $g_N \geq \hat{g}_N$ per definizione di maggiorante e notiamo che $\hat{g}_N \leq N$ ovunque. Se $g_N(x) < \hat{g}_N(x)$, allora $g_N(x) < N$ e quindi $g_N(x) = g(x)$. Inoltre

$$g(x) = g_N(x) < \hat{g}_N(x) \leq \hat{g}(x) = g^*(x)$$

e

$$g_{N+1}(x) = g = g_N(x) < \hat{g}_N(x) \leq \hat{g}_{N+1}(x).$$

Quindi $D \subset D_N \cap \{x : g(x) < N\}$ e $D_N \subset D_{N+1}$ per ogni N . Inoltre da [\(1.48\)](#) otteniamo che D è un'unione crescente di insiemi D_N , $N = 1, 2, \dots$

Da quanto appena visto possiamo dire che

$$\tau_D = \lim_{N \rightarrow \infty} \sigma_N = \lim_{N \rightarrow \infty} \tau_{D_N}.$$

Da [\(1.33\)](#) e per l'uniforme integrabilità di $\{g(\sigma_N)\}_N$ abbiamo

$$\begin{aligned} \hat{g}(x) &= h(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} \hat{g}_N(x) = g^*(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{E}^x [g(X_{\sigma_N})] \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{E}^x [g_N(X_{\sigma_N})] = \mathbb{E}^x \left[\lim_{N \rightarrow \infty} g_N(X_{\sigma_N}) \right] = \mathbb{E}^x [g(X_{\tau_D})]. \end{aligned}$$

□

Basandoci su quanto detto in precedenza, enunciamo e dimostriamo un teorema per tempi di arresto ottimali che sarà utile nella dimostrazione della disequazione variazionale:

Teorema 1.6.5 (Teorema di unicità per tempi di arresto ottimali). *Supponiamo che esista un tempo di arresto ottimale $\tau^* = \tau^*(x, \omega)$ per il problema (1.21) per ogni x . Definiamo $D = \{x : g(x) < g^*(x)\} \subset \mathbb{R}^n$. Sia $\tau_D = \inf \{t > 0 : X_t \notin D\}$ il tempo di prima uscita da D . Allora*

$$\tau^* \geq \tau_D \quad \forall x \in D \quad (1.51)$$

e

$$g^*(x) = \mathbb{E}^x [g(X_{\tau_D})], \quad \forall x \in D. \quad (1.52)$$

Quindi τ_D è un tempo di arresto ottimale per il problema (1.21).

Dimostrazione. Sia $x \in D$, sia τ un \mathcal{F}_t -tempo di arresto ed assumiamo che $\mathbb{Q}^x(\tau < \tau_D) > 0$. Abbiamo che

$$\begin{aligned} \mathbb{E}^x [g(X_\tau)] &= \int_{\tau < \tau_D} g(X_\tau) d\mathbb{Q}^x + \int_{\tau \geq \tau_D} g(X_\tau) d\mathbb{Q}^x \\ &\stackrel{a)}{\leq} \int_{\tau < \tau_D} g^*(X_\tau) d\mathbb{Q}^x + \int_{\tau \geq \tau_D} g^*(X_\tau) d\mathbb{Q}^x \\ &= \mathbb{E}^x [g^*(X_\tau)] \leq g^*(x) \end{aligned}$$

poiché g^* è superarmonica (ricordando la Definizione 1.17) g^* è misurabile, semicontinua dal basso in quanto continua, ed essendo $g^*(x) = \mathbb{E}^x [g(X_{\tau^*})]$ in particolare si ha anche $g^*(x) \geq \mathbb{E}^x [g(X_{\tau^*})]$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$. In *a)* abbiamo utilizzato il fatto che $g \leq g^*$ sempre, ma poiché $g(X_\tau) < g^*(X_\tau)$ se $\tau < \tau_D$ in realtà si avrebbe una disequazione stretta, che però sarebbe possibile solo se $\mathbb{Q}^x(\tau < \tau_D) = 0$. Pertanto se esiste un tempo di arresto τ allora deve verificarsi $\tau \geq \tau_D$, \mathbb{Q}^x -quasi certamente. Da ciò deduciamo che $\tau^* \geq \tau_D$.

Per dimostrare (1.52) distinguiamo tre casi.

- Sia $x \in D$. Definiamo \hat{g} , come visto nella Definizione 1.18, il più piccolo maggiorante superarmonico di g . Delle proprietà di \hat{g} in particolare ricordiamo che

- \hat{g} è una funzione superarmonica,
- $\hat{g} \geq g$ cioè \hat{g} è un maggiorante di g ,

Poiché $\tau^* \geq \tau_D$, poiché \hat{g} è superarmonica e sfruttando quanto visto nel Lemma 1.6.1 b) otteniamo che $\mathbb{E}^x [\hat{g}(X_{\tau_D})] \geq \mathbb{E}^x [\hat{g}(X_{\tau^*})]$. Inoltre, ricordando la Proposizione 1.6.4 ed essendo $X_{\tau_D} \notin D$, abbiamo che $g(X_{\tau_D}) \geq g^*(X_{\tau_D}) = \hat{g}(X_{\tau_D})$, quindi risulta che $g(X_{\tau_D}) = \hat{g}(X_{\tau_D})$ \mathbb{Q}^x -quasi certamente. Pertanto

$$\begin{aligned} g^*(x) &= \mathbb{E}^x [g(X_{\tau^*})] \leq \mathbb{E}^x [\hat{g}(X_{\tau^*})] \leq \mathbb{E}^x [\hat{g}(X_{\tau_D})] \\ &= \mathbb{E}^x [g(X_{\tau_D})] \leq g^*(x). \end{aligned}$$

Quindi otteniamo che $g^*(x) = \mathbb{E}^x [g(X_{\tau_D})]$ per $x \in D$ e che τ_D è ottimale.

- Sia ora $x \in \partial D$, un punto irregolare per D , come visto nella Definizione [1.19](#), cioè tale che $\mathbb{Q}^x(\tau_D = 0) = 0$. Pertanto $\tau_D > 0$, \mathbb{Q}^x -quasi certamente.

Sia $\{\alpha_k\}$ una successione di tempi di arresto tali che

- $0 < \alpha_k < \tau_D$,
- $\alpha_k \rightarrow 0$ per $k \rightarrow \infty$, \mathbb{Q}^x -quasi certamente.

Allora $X_{\alpha_k} \in D$, cioè $g(X_{\alpha_k}) < g^*(X_{\alpha_k})$. Inoltre detto θ_t per $t \geq 0$ l'operatore di traslazione temporale per il quale $\theta_{\alpha_k} g(X_{\tau_D}) = g(X_{\tau_D + \alpha_k}) = g(X_{\tau_D})$ con le proprietà [\(1.27\)](#) e [\(1.28\)](#) ed utilizzando la proprietà di Markov forte, si ha che

$$\mathbb{E}^x [g(X_{\tau_D})] = \mathbb{E}^x [\theta_{\alpha_k} g(X_{\tau_D})] = \mathbb{E}^x [\mathbb{E}^{X_{\alpha_k}} [g(X_{\tau_D})]] = \mathbb{E}^x [g^*(X_{\alpha_k})], \quad \forall k.$$

Per quanto appena visto, per la semicontinuità dal basso e per il lemma di Fatou otteniamo che

$$\begin{aligned} g^*(x) &\geq \mathbb{E}^x \left[\liminf_{k \rightarrow \infty} g^*(X_{\alpha_k}) \right] \geq \liminf_{k \rightarrow \infty} \mathbb{E}^x [g^*(X_{\alpha_k})] \\ &= \liminf_{k \rightarrow \infty} \mathbb{E}^x [g(X_{\tau_D})] = \mathbb{E}^x [g(X_{\tau_D})] \geq g^*(x). \end{aligned}$$

Pertanto $g^*(x) = \mathbb{E}^x [g(X_{\tau_D})]$ per ogni $x \in \partial D$ irregolare e τ_D è ottimale.

- Se $x \in \partial D$ è un punto regolare o $x \notin \bar{D}$ allora $\tau_D = 0$ \mathbb{Q}^x -quasi certamente. Poiché $X_{\tau_D} \notin D$, allora $g(X_{\tau_D}) \geq g^*(X_{\tau_D})$ e quindi $g(X_{\tau_D}) = g^*(X_{\tau_D})$, \mathbb{Q}^x -quasi certamente. Pertanto $g^*(x) = \mathbb{E}^x [g(X_{\tau_D})]$ e τ_D è ottimale.

□

1.6.2 Caso di non omogeneità temporale

Consideriamo ora il caso in cui la funzione profitto g dipenda sia dallo spazio che dal tempo, cioè

$$g = g(t, x) : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty), \quad g \text{ è continua.} \quad (1.53)$$

Il problema diventa: trovare $g_0(x)$ e τ^* tali che

$$g_0(x) = \sup_{\tau} \mathbb{E}^x [g(\tau, X_{\tau})] = \mathbb{E}^x [g(\tau^*, X_{\tau^*})]. \quad (1.54)$$

Possiamo comunque ridurci al caso omogeneo come segue. Sia $X_t = X_t^x$ un processo di diffusione della forma

$$dX_t = b(X_t) dt + \sigma(X_t) dB_t \quad \text{per } t \geq 0, \quad X_0 = x \quad (1.55)$$

Definiamo il processo di Itô $Y_t = Y_t^{(s,x)}$ in \mathbb{R}^{n+1}

$$Y_t = \begin{bmatrix} s+t \\ X_t^x \end{bmatrix}, \quad \text{per } t \geq 0. \quad (1.56)$$

Allora

$$dY_t = \begin{bmatrix} 1 \\ b(X_t) \end{bmatrix} dt + \begin{bmatrix} 0 \\ \sigma(X_t) \end{bmatrix} dB_t = \widehat{b}(Y_t)dt + \widehat{\sigma}(Y_t)dB_t \quad (1.57)$$

dove

$$\widehat{b}(\eta) = \widehat{b}(t, \xi) = \begin{bmatrix} 1 \\ b(\xi) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n+1}, \quad \widehat{\sigma}(\eta) = \widehat{\sigma}(t, \xi) = \begin{bmatrix} 0 \cdots 0 \\ \sigma(\xi) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(n+1) \times m},$$

per $\eta = (t, \xi) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. Allora Y_t è un processo di diffusione che parte da $y = (s, x)$. Poniamo $\mathbb{P}^y = \mathbb{P}^{(s,t)}$ la probabilità di Y_t con $Y_0 = y$ e sia $\mathbb{E}^y = \mathbb{E}^{(s,x)}$ l'operatore di speranza matematica rispetto a \mathbb{P}^y . Possiamo ora riscrivere il problema come nel caso omogeneo:

$$g_0(x) = g^*(0, x) = \sup_{\tau} \mathbb{E}^{(0,x)} [g(Y_{\tau})] = \mathbb{E}^{(0,x)} [g(\tau^*, X_{\tau^*})] \quad (1.58)$$

che è un caso speciale del problema

$$g^*(s, x) = \sup_{\tau} \mathbb{E}^{(s,x)} [g(Y_{\tau})] = \sup_{\tau} \mathbb{E}^{(s,x)} [g(\tau, X_{\tau})] = \mathbb{E}^{(s,x)} [g(\tau^*, X_{\tau^*})] \quad (1.59)$$

che è analogo a (1.21) con Y_t al posto di X_t .

1.6.3 Disequazione variazionale

Riportiamo alcuni risultati e definizioni che ci saranno utili per la dimostrazione del teorema sulla disequazione variazionale.

Definizione 1.20 (Generatore infinitesimale di un processo di diffusione di Itô (caso di omogeneità temporale)). Sia $\{X_t\}$ un processo di diffusione in \mathbb{R}^n . Il generatore (infinitesimale) A di X_t è definito da

$$Af(x) = \lim_{t \downarrow 0} \frac{\mathbb{E}^x [f(X_t)] - f(x)}{t}, \quad x \in \mathbb{R}^n. \quad (1.60)$$

Denotiamo con $\mathcal{D}_A(x)$ l'insieme delle funzioni $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ tale che il limite (1.60) esiste in x , mentre con \mathcal{D}_A indichiamo l'insieme delle funzioni per cui il limite (1.60) esiste per ogni $x \in \mathbb{R}^n$.

Diamo una formula per calcolare il generatore A di un processo di Itô:

Teorema 1.6.6. *Sia $\{X_t\}$ un processo di diffusione di Itô con dinamica*

$$dX_t = b(X_t) dt + \sigma(X_t) dB_t.$$

Se $f \in C_0^2(\mathbb{R}^n)$ allora $f \in \mathcal{D}_A$ e

$$Af(x) = \sum_i b_i(x) \frac{\partial f}{\partial x_i} + \frac{1}{2} \sum_{i,j} (\sigma \sigma^T)_{i,j}(x) \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}. \quad (1.61)$$

Denotiamo con $L = L_X$ l'operatore differenziale dato dal secondo membro di (1.61).

L'operatore caratteristico nel caso di non omogeneità temporale diviene:

$$A\phi(s, x) = \frac{\partial \phi}{\partial s}(s, x) + A\phi(s, x); \quad \phi \in C^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n), \quad (1.62)$$

dove A è l'operatore caratteristico nel caso omogeneo.

Enunciamo la formula di Dynkin come segue:

Teorema 1.6.7 (Formula di Dynkin). *Sia $f \in C_0^2(\mathbb{R}^n)$. Supponiamo che τ sia un tempo di arresto e che $\mathbb{E}^x[\tau] < \infty$, dove $\mathbb{E}^x[\cdot]$ rappresenta l'operatore valore atteso rispetto a \mathbb{Q}^x (probabilità di X_t con $X_0 = x$). Allora*

$$\mathbb{E}^x[f(X_\tau)] = f(x) + \mathbb{E}^x \left[\int_0^\tau Af(X_s) ds \right]. \quad (1.63)$$

Infine diamo un ultimo risultato che sarà utile in seguito:

Teorema 1.6.8. *Siano $D \subset V \subset \mathbb{R}^n$ insiemi aperti tali che ∂D sia una superficie di Lipschitz, cioè ∂D è localmente il grafico di una funzione $h : \mathbb{R}^{k-1} \rightarrow \mathbb{R}$ tale che esiste $K < \infty$ ed*

$$|h(x) - h(y)| \leq K|x - y|, \quad \text{per ogni } x, y \in \mathbb{R}^{k-1}, \quad (1.64)$$

e sia $\phi : \bar{V} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione con le seguenti proprietà:

- (a) $\phi \in C^1(V) \cap C^1(\bar{V})$
- (b) $\phi \in C^2(V \setminus \partial D)$ e le derivate seconde di ϕ sono localmente limitate vicino a ∂D .

Allora esiste una sequenza $\{\phi_j\}_{j=1}^\infty$ di funzioni $\phi_j \in C^2(V) \cap C(\bar{V})$ tali che

1. $\phi_j \rightarrow \phi$ uniformemente sui compatti di \bar{V} , per $j \rightarrow \infty$
2. $A\phi_j \rightarrow A\phi$ uniformemente sui compatti di $V \setminus \partial D$, per $j \rightarrow \infty$
3. $\{A\phi_j\}_{j=1}^\infty$ è localmente limitato su V .

Possiamo ora introdurre la disequazione variazionale. Fissiamo un dominio V in \mathbb{R}^k e consideriamo il seguente processo di diffusione

$$\begin{cases} dY_t = b(Y_t) dt + \sigma(Y_t) dB_t \\ Y_0 = y \end{cases} \quad (1.65)$$

Definiamo $T = T(y, \omega) = \inf \{t > 0 : Y_t(\omega) \notin V\}$. Siano inoltre $f : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ funzioni continue che soddisfano le seguenti proprietà:

- (a) $\mathbb{E}^y \left[\int_0^T |f(Y_t)| dt \right] < \infty$ per ogni $y \in \mathbb{R}^k$,

- (b) la famiglia $\{g^-(Y_\tau) : \tau \text{ è un tempo di arresto con } \tau \leq T\}$, dove $g^-(x) = -\min\{g(x), 0\}$, è uniformemente integrabile rispetto a \mathbb{P}^y (probabilità di Y_t con $Y_0 = y$), per ogni $y \in \mathbb{R}^k$.

Consideriamo il seguente problema: trovare $\Phi(y)$ e $\tau^* \leq T$ tale che

$$\Phi(y) := \sup_{\tau \leq T} J^\tau(y) = J^{\tau^*}(y), \quad (1.66)$$

dove

$$J^\tau(y) := \mathbb{E}^y \left[\int_0^\tau f(Y_t) dt + g(Y_\tau) \right], \quad \text{per } \tau \leq T. \quad (1.67)$$

Poiché $J^0(y) = \mathbb{E}^y [g(Y_0)] = g(y)$ allora $\Phi(y) \geq g(y)$ per ogni $y \in V$.

Poniamo

$$L = L_Y = \sum_{i=1}^k b_i(y) \frac{\partial}{\partial y_i} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^K (\sigma \sigma^T) \frac{\partial^2}{\partial y_i \partial y_j}$$

l'operatore differenziale che coincide con il generatore A_Y di Y_t su $C_0^2(\mathbb{R}^k)$. Ora possiamo formulare la disequazione variazionale.

Teorema 1.6.9 (Disequazione variazionale per arresto ottimale). *Supponiamo di trovare una funzione $\phi : \bar{V} \rightarrow \mathbb{R}$ tale che*

$$(i) \quad \phi \in C^1(V) \cap C^1(\bar{V})$$

$$(ii) \quad \begin{cases} \phi \geq g & \text{su } V, \\ \phi = g & \text{su } \partial V. \end{cases}$$

Definiamo la regione di continuazione $D = \{x \in V : \phi(x) > g(x)\}$.

Supponiamo che Y_t non passi mai su ∂D quasi certamente, cioè

$$(iii) \quad \mathbb{E}^y \left[\int_0^T \mathbf{1}_{\partial D}(Y_t) dt \right] = 0 \quad \text{per ogni } y \in V$$

e che

$$(iv) \quad \partial D \text{ è una superficie di Lipschitz.}$$

Inoltre supponiamo che

$$(v) \quad \phi \in C^2(V \setminus \partial D) \text{ e le derivate parziali seconde di } \phi \text{ sono localmente limitate vicino } \partial D$$

$$(vi) \quad L\phi + f \leq 0 \text{ su } V \setminus \bar{D}$$

$$(vii) \quad L\phi + f = 0 \text{ su } D$$

$$(viii) \quad \text{sia } \tau_D := \inf \{t > 0 : Y_t \notin D\} < \infty \text{ } R^y\text{-quasi certamente per ogni } y \in V$$

$$(ix) \quad \text{la famiglia } \{\phi(Y_\tau) : \tau \leq \tau_D\} \text{ è uniformemente integrabile rispetto a } \mathbb{P}^y, \text{ per ogni } y \in V.$$

Allora

$$\phi(y) = \Phi(y) = \sup_{\tau \leq T} \mathbb{E}^y \left[\int_0^\tau f(Y_t) dt + g(Y_\tau) \right], \quad \text{per } y \in V. \quad (1.68)$$

e

$$\tau^* = \tau_D \quad (1.69)$$

è un tempo di arresto ottimale per questo problema.

Dimostrazione. Le ipotesi (i), (iv), (v) soddisfano il teorema (1.6.8), pertanto possiamo trovare una sequenza di funzioni $\phi_j \in C^2(V) \cap C(\bar{V})$, $j = 1, 2, \dots$, tali che

- (1) $\phi_j \rightarrow \phi$ uniformemente sui compatti di \bar{V} , per $j \rightarrow \infty$
- (2) $L\phi_j \rightarrow L\phi$ uniformemente sui compatti di $V \setminus \partial D$, per $j \rightarrow \infty$
- (3) $\{L\phi_j\}_{j=1}^\infty$ è localmente limitato su V .

Per $R > 0$ poniamo $T_R = \min(\inf\{t > 0 : |Y_t| \geq R\})$ e sia $\tau \leq T$ un tempo di arresto. Sia $y \in V$. Dalla formula di Dynkin (1.6.7) otteniamo che

$$\mathbb{E}^y [\phi_j(Y_{\tau \wedge T_R})] = \phi_j(y) + \mathbb{E}^y \left[\int_0^{\tau \wedge T_R} L\phi_j(Y_t) dt \right]. \quad (1.70)$$

Da (1), (2), (3), (iii) e dal lemma di Fatou si ha che

$$\begin{aligned} \phi(y) &= \lim_{j \rightarrow \infty} \phi_j = \lim_{j \rightarrow \infty} \mathbb{E}^y \left[\int_0^{\tau \wedge T_R} -L\phi_j(Y_t) dt + \phi_j(Y_{\tau \wedge T_R}) \right] \geq \\ &\geq \mathbb{E}^y \left[\lim_{j \rightarrow \infty} \left(\int_0^{\tau \wedge T_R} -L\phi_j(Y_t) dt + \phi_j(Y_{\tau \wedge T_R}) \right) \right] = \\ &= \mathbb{E}^y \left[\int_0^{\tau \wedge T_R} -L\phi(Y_t) dt + \phi(Y_{\tau \wedge T_R}) \right]. \end{aligned} \quad (1.71)$$

Le ipotesi (ii), (iii), (vi) e (vii) implicano che

$$\phi(y) \geq \mathbb{E}^y \left[\int_0^{\tau \wedge T_R} f(Y_t) dt + g(Y_{\tau \wedge T_R}) \right]. \quad (1.72)$$

Ricordando le ipotesi a) e b) su f e g e applicando il lemma di Fatou a quanto ottenuto in precedenza otteniamo che

$$\begin{aligned} \phi(y) &\geq \liminf_{R \rightarrow \infty} \mathbb{E}^y \left[\int_0^{\tau \wedge T_R} f(Y_t) dt + g(Y_{\tau \wedge T_R}) \right] \geq \\ &\geq \mathbb{E}^y \left[\liminf_{R \rightarrow \infty} \left(\int_0^{\tau \wedge T_R} f(Y_t) dt + g(Y_{\tau \wedge T_R}) \right) \right] \geq \\ &\geq \mathbb{E}^y \left[\int_0^\tau f(Y_t) dt + g(Y_\tau) \right]. \end{aligned} \quad (1.73)$$

Poiché la scelta di $\tau \leq T$ è arbitraria, possiamo concludere che

$$\phi(y) \geq \sup_{\tau \leq T} \mathbb{E}^y \left[\int_0^\tau f(Y_t) dt + g(Y_\tau) \right] = \Phi(y), \quad \forall y \in V. \quad (1.74)$$

Distinguiamo ora due casi.

- Se $y \notin D$ allora per definizione di D e per la (ii) si ha che $\phi(y) = g(y)$. Inoltre risulta $\phi(y) \leq \Phi(y)$ che, assieme a (1.74) implica che $\phi(y) = \Phi(y)$ e che $\hat{\tau} = \hat{\tau}(y, \omega) := 0$ è ottimale per $y \notin D$.
- Se $y \in D$ consideriamo una sequenza crescente $\{D_k\}_{k=1}^\infty$ di insiemi aperti D_k tali che

- $\overline{D_k} \subset D$,
- le chiusure $\overline{D_k}$ sono compatte,
- $D = \bigcup_{k=1}^\infty D_k$.

Poniamo $\tau_k = \inf\{t > 0 : Y_t \notin D\}$, $k = 1, 2, \dots$. Applicando la formula di Dynkin (1.6.7) e l'ipotesi (vii) otteniamo per $y \in D_k$

$$\begin{aligned} \phi(y) &= \lim_{j \rightarrow \infty} \phi_j(y) = \lim_{j \rightarrow \infty} \mathbb{E}^y \left[\int_0^{\tau_k \wedge \tau_R} -L\phi_j(Y_t) dt + \phi_j(Y_{\tau_k \wedge T_R}) \right] = \\ &= \mathbb{E}^y \left[\lim_{j \rightarrow \infty} \left(\int_0^{\tau_k \wedge \tau_R} -L\phi_j(Y_t) dt + \phi_j(Y_{\tau_k \wedge T_R}) \right) \right] \\ &= \mathbb{E}^y \left[\int_0^{\tau_k \wedge T_R} -L\phi(Y_t) dt + \phi(Y_{\tau_k \wedge T_R}) \right] = \\ &= \mathbb{E}^y \left[\int_0^{\tau_k \wedge T_R} f(Y_t) dt + \phi(Y_{\tau_k \wedge T_R}) \right]. \end{aligned} \quad (1.75)$$

Dall'uniforme integrabilità, dalle ipotesi (ii), (vii), (viii) e dal fatto che $\tau_k \rightarrow \tau_D$ per $k \rightarrow \infty$ per le ipotesi fatte su D_k , si ha che

$$\begin{aligned} \phi(y) &= \lim_{k, R \rightarrow \infty} \mathbb{E}^y \left[\int_0^{\tau_k \wedge T_R} f(Y_t) dt + \phi(Y_{\tau_k \wedge T_R}) \right] = \\ &= \mathbb{E}^y \left[\lim_{k, R \rightarrow \infty} \left(\int_0^{\tau_k \wedge T_R} f(Y_t) dt + \phi(Y_{\tau_k \wedge T_R}) \right) \right] = \\ &= \mathbb{E}^y \left[\int_0^{\tau_D} f(Y_t) dt + g(Y_{\tau_D}) \right] = J^{\tau_D}(y) \leq \\ &\leq \Phi(y). \end{aligned} \quad (1.76)$$

Ricordando quanto ottenuto in (1.6.9) e (1.76) si ha che

$$\phi(y) \geq \Phi(y) \geq J^{\tau_D}(y) = \phi(y). \quad (1.77)$$

Pertanto $\phi(y) = \Phi(y)$ e $\hat{\tau}(y, \omega) := \tau_D$ risulta essere ottimale quando $y \in D$.

Quindi ricapitolando abbiamo ottenuto che $\phi(y) = \Phi(y)$ è valida sia per $y \in D$ che per $y \notin D$. Pertanto possiamo concludere che $\phi(y) = \Phi(y)$ per ogni $y \in V$.

Inoltre, il tempo di arresto $\hat{\tau}$ definito da

$$\hat{\tau}(y, \omega) = \begin{cases} 0 & \text{se } y \notin D \\ \tau_D & \text{se } y \in D \end{cases} \quad (1.78)$$

è ottimale. Grazie al Teorema [1.6.5](#) possiamo concludere che τ_D è ottimale. \square

1.7 Programmazione dinamica

Come abbiamo visto nella sezione precedente, i problemi di arresto ottimale a tempo continuo sono risolvibili tramite un'opportuna disequazione variazionale. A tempo discreto invece, questi problemi sono caratterizzati dalla presenza di un controllo che interrompe l'evoluzione del sistema. Ad ogni passo si osserva lo stato attuale del sistema e si decide se fermarsi o andare avanti. Questi problemi si possono analizzare tramite l'utilizzo della programmazione dinamica, che è una tecnica che consiste nel decomporre il problema originario in sequenze di problemi di ottimizzazione più semplici che si risolvono indietro nel tempo.

Introduciamo il problema di controllo ottimo a tempo discreto. Siano S un boreliano non vuoto detto spazio degli stati, C un boreliano non vuoto detto spazio dei controlli ed $U \subseteq C$ detto vincolo di controllo. Sia $F = \{J : S \rightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}\}$, $M = \{\mu : S \rightarrow C \text{ tali che } \mu(x) \in U(x) \forall x \in S\}$ e $\Pi = \{\pi = (\mu_0, \mu_1, \dots) : \mu_k \in M\}$.

Consideriamo il nostro sistema a tempo discreto

$$x_{k+1} = f(x_k, u_k, w_k) \quad k = 0, \dots, N-2$$

dove $f : S \times C \times W \rightarrow S$, x_k e x_{k+1} rappresentano lo stato rispettivamente al tempo k e al tempo successivo ed assumiamo che appartengano allo stesso spazio degli stati S , u_k rappresenta la variabile di controllo scelta in $U(x_k)$, $\{w_k\}_k$ sono variabili aleatorie indipendenti e identicamente distribuite con distribuzione di probabilità $p(dw_k)$ ed appartenenti allo spazio di disturbo W che è un boreliano non vuoto, infine N è un intero positivo che rappresenta o l'orizzonte temporale oppure il numero di volte che il controllo viene applicato.

Ogni funzione μ_k specifica il controllo u_k . Se x_0 è lo stato iniziale, $u_0 = \mu_0(x_0)$ è il primo controllo. Se $(x_0, u_0, \dots, u_{k-1}, x_k)$ sono gli stati ed i rispettivi controlli accaduti allora si ha che

$$u_k = \mu_k(x_0, u_0, \dots, u_{k-1}, x_k).$$

Richiediamo che $\mu_k(x_0, u_0, \dots, u_{k-1}, x_k) \in U(x_k)$ per ogni $(x_0, u_0, \dots, u_{k-1}, x_k)$ e k . In questo modo il decisore utilizza tutta l'informazione disponibile ad ogni passo. Invece di scegliere una sequenza di variabili di controllo (u_0, \dots, u_{N-1}) il decisore può trovare $\pi = (\mu_0, \dots, \mu_{N-1})$ che massimizza la funzione di costo totale attesa del sistema. Consideriamo solo controlli

u_k che dipendono unicamente dallo stato attuale x_k e non dall'intera storia $(x_0, u_0, \dots, u_{k-1}, x_k)$, così anche per μ_k . Inoltre osserviamo che la distribuzione di probabilità di w_k non dipende dai valori passati w_{k-1}, \dots, w_0 ma dipende solo dallo stato x_k e dal rispettivo controllo u_k .

Il costo totale corrispondente a $\pi = (\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_{N-1})$ ed allo stato iniziale x_0 è dato da

$$J_{N,\pi}(x_0) = \mathbb{E}_{w_0, \dots, w_{N-1}} \left[\sum_{k=0}^{N-1} g(x_k, \mu_k(x_k), w_k) \right],$$

dove $g : S \times C \times W \rightarrow [-\infty, +\infty]$ e gli stati x_1, x_2, \dots, x_{N-1} sono generati a partire da x_0 e π attraverso l'equazione

$$x_{k+1} = f(x_k, \mu_k(x_k), w_k), \quad \text{con } \mu_k \in M, \quad \text{per } k = 0, \dots, N-2. \quad (1.79)$$

Le probabilità $p(dw_0), p(dw_1), \dots, p(dw_{N-1})$ con l'equazione del sistema data da (1.7) definiscono un'unica misura prodotto $p(d(w_0, w_1, \dots, w_{N-1}))$ su W^N (prodotto di W con se stesso N volte). Il valore atteso $\mathbb{E}_{w_0, \dots, w_{N-1}} [\cdot]$ è calcolato rispetto a questa probabilità, cioè

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}_{w_0, \dots, w_{N-1}} \left[\sum_{k=0}^{N-1} g(x_k, \mu_k(x_k), w_k) \right] \\ &= \int_{W^N} \left\{ \sum_{k=0}^{N-1} g(x_k, \mu_k(x_k), w_k) \right\} p(d(w_0, w_1, \dots, w_{N-1})). \end{aligned} \quad (1.80)$$

L'algoritmo di programmazione dinamica per il problema precedente è dato dall'equazione di Bellman:

$$\begin{cases} J_0(x) = 0 \\ J_{k+1}(x) = \sup_{u \in U(x)} \mathbb{E}_w [g(x, u, w) + J_k(f(x, u, w))], \quad \text{per } k = 0, \dots, N-1 \end{cases} \quad (1.81)$$

per ogni stato iniziale $x \in S$, dove il valore atteso è calcolato rispetto a $p(dw)$ con $w \in W$ variabile aleatoria di disturbo. Il costo ottimo $J^*(x_0)$ per il problema precedente si ottiene al passo N , cioè

$$J^*(x_0) = \sup_{\pi \in \Pi} J_{N,\pi}(x_0) = J_N(x_0).$$

Possiamo anche ottenere il valore $J_{N,\pi}(x_0)$ che corrisponde a $\pi = (\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_{N-1})$ al passo N dell'algoritmo

$$\begin{cases} J_{0,\pi}(x) = 0 \\ J_{k+1,\pi}(x) = \mathbb{E}_w \{g(x, \mu_{N-k-1}(x), w) + J_{k,\pi}(f(x, \mu_{N-k-1}(x), w))\} \\ k = 0, \dots, N-1 \end{cases} \quad (1.82)$$

per ogni stato iniziale $x \in S$, dove $w \in W$ è una variabile aleatoria con distribuzione di probabilità $p(dw)$ rispetto alla quale viene calcolato il valore atteso $\mathbb{E}_w[\cdot]$.

Possiamo riformulare l'algoritmo di programmazione dinamica in termini di una mappa $H : S \times C \times F \rightarrow [-\infty, \infty]$ definita da

$$H(x, u, J) = \mathbb{E}_w [g(x, u, w) + J(f(x, u, w))] \quad \forall x \in S, u \in U, J \in F \quad (1.83)$$

assumendo che $w \in W$ sia una variabile aleatoria con distribuzione di probabilità $p(dw)$. Inoltre il valore atteso $\mathbb{E}_w[\cdot]$ è calcolato rispetto a tale distribuzione. Definiamo inoltre la mappa $T : F \rightarrow F$ tale che

$$T(J)(x) = \sup_{u \in U(x)} H(x, u, J), \quad \forall x \in S$$

e per ogni funzione $\mu \in M$ definiamo la mappa $T_\mu : F \rightarrow F$ tale che

$$T_\mu(J)(x) = H(x, \mu(x), J), \quad \forall x \in S.$$

Possiamo allora scrivere (1.82) nel seguente modo

$$\begin{cases} J_{0,\pi}(x) = 0 \\ J_{N,\pi}(x) = (T_{\mu_0} T_{\mu_1} \cdots T_{\mu_{N-1}})(J_0)(x) \end{cases} \quad (1.84)$$

per ogni stato iniziale $x \in S$, dove $(T_{\mu_0} T_{\mu_1} \cdots T_{\mu_{N-1}})$ è la composizione delle mappe $T_{\mu_0}, T_{\mu_1}, \dots, T_{\mu_{N-1}}$. Analogamente a (1.81), per ogni $x \in S$ abbiamo il seguente problema

$$\begin{cases} J_0(x) = 0 \\ J_{k+1}(x) = T(J_k)(x), \quad \text{per } k = 0, \dots, N-1 \end{cases} \quad (1.85)$$

ed inoltre abbiamo che

$$J_N^*(x) = \sup_{\pi \in \Pi} J_{N,\pi}(x) = T^N(J_0)(x), \quad \forall x \in S$$

dove T^N è la composizione di T con se stessa N volte. Diremo inoltre che $\pi^* \in \Pi$ è ottimale al passo N in $x \in S$ se $J_{N,\pi^*}(x) = J_N^*(x)$.

1.7.1 Least Square Monte Carlo (LSMC)

Poiché i problemi di arresto ottimale a tempo discreto con orizzonte temporale finito sono difficili da risolvere numericamente, una tecnica che si può utilizzare è la regressione ai minimi quadrati tramite simulazione Monte Carlo. Descriviamo tale tecnica nell'ambito dell'approssimazione del valore di opzioni americane.

Un'opzione americana può essere esercitata in qualsiasi istante temporale precedente la data di scadenza, quindi il guadagno dipende dalla politica di esercizio adottata. Uno dei problemi più importanti nella teoria del prezzaggio

delle opzioni è l'esercizio ottimo dell'opzione di tipo americano. La strategia ottimale consiste nello scegliere tra l'esercizio immediato ed il non esercizio, in ogni istante in cui l'esercizio anticipato è possibile. In genere, il valore dell'opzione esercitata è facile da determinare mentre il valore nel caso in cui si decida di non esercitare è più complicato, in quanto si deve determinare simultaneamente la strategia d'esercizio ottimale.

F. A. Longstaff e E. Schwartz, hanno sviluppato una procedura, nota con il nome di Least Squares Monte Carlo (LSMC), per determinare il valore dell'opzione non esercitata. Il loro approccio consiste nello stimare, con i minimi quadrati, la relazione tra il valore dell'opzione non esercitata e il valore delle variabili rilevanti, in ogni istante in cui l'esercizio anticipato è possibile. Pertanto questo algoritmo fornisce un'approssimazione del prezzo di opzioni americane, basata sul metodo di regressione e sulla simulazione Monte Carlo.

La simulazione è una valida alternativa al metodo delle differenze finite e presenta molteplici vantaggi nella valutazione, nella gestione del rischio e nell'esercizio ottimo delle opzioni americane. Per esempio, la simulazione è applicabile quando il valore di un'opzione dipende da molteplici fattori, inoltre consente alle variabili di stato di seguire processi stocastici generali. Da un punto di vista pratico, la simulazione permette una velocità di calcolo ed efficienza superiori. Infine, questa tecnica è semplice.

Ricordiamo che, ad ogni tempo di esercizio, il problema dell'esercizio ottimale si riduce al confronto tra il valore dell'esercizio immediato ed una speranza condizionata data dal valore di non esercizio del contratto, cioè dalla continuazione: quando il primo risulta maggiore del secondo, allora è il momento giusto di esercitare.

L'intuizione chiave dietro questo approccio è che la speranza condizionata può essere stimata attraverso l'informazione trasversale nella simulazione, usando i minimi quadrati. In particolare regrediamo i profitti, realizzati ex-post dalla continuazione, su funzioni di valori delle variabili di stato. Il valore stimato da tale regressione fornisce una stima diretta della funzione di speranza condizionata. Stimando per ogni data di esercizio, si ottiene una specificazione completa della strategia ottimale d'esercizio lungo ogni traiettoria.

La struttura di valutazione

Sia $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ uno spazio di probabilità completo e $[0, T]$ un orizzonte temporale finito e discreto. Definiamo $F = \{\mathcal{F}_j, j = 0, \dots, T\}$ la filtrazione discreta aumentata generata dai processi dei prezzi rilevanti ed assumiamo che $\mathcal{F}_T = \mathcal{F}$. Assumiamo inoltre che vi sia assenza di arbitraggio e che perciò esista una misura di martingala equivalente \mathbb{Q} per questa economia.

Si vuole valutare titoli derivati di tipo americano con flussi di cassa casuali che possono verificarsi durante $[0, T]$. L'attenzione va inoltre ai flussi di cassa in $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{Q})$. Il valore di un'opzione americana eguaglia il valore massimizzato

dei flussi di cassa attualizzati dell'opzione, dove il massimo è calcolato al variare di tutti i tempi di arresto rispetto alla filtrazione F .

Il metodo LSMC utilizza la programmazione dinamica per trovare il tempo d'arresto ottimale ed il metodo Monte Carlo per approssimare la speranza condizionata. Come detto in precedenza, la programmazione dinamica è un metodo utilizzato per risolvere problemi di ottimizzazione che considera sottoproblemi del problema originario, combinando le loro soluzioni per risolvere il problema generale. In questo caso significa considerare un insieme discreto di N date d'esercizio $0 < t_1 \leq t_2 \leq t_3 \leq \dots \leq t_N = T$ e studiare la strategia ottima d'arresto ad ogni tempo d'esercizio¹. Inoltre le variabili di stato vengono simulate K volte.

Sia $\omega \in \Omega$ un cammino del prezzo generato tramite una simulazione Monte Carlo sull'insieme discreto di tempi introdotto prima. Sia $C(\omega, t_j; t_n, T)$, con $t_n < t_j \leq t_N = T$ e $\omega \in \Omega$, il cammino dei flussi di cassa generati dall'opzione che al tempo t_j viene esercitata, condizionatamente al fatto che l'opzione non venga esercitata al tempo t_n o prima. Denotiamo con $V(\omega, t_j)$ il valore dell'opzione all'istante t_j con $t_n < t_j \leq T$, che coincide con $C(\omega, t_j; t_n, T)$ se l'opzione viene esercitata immediatamente in t_j .

Per determinare la strategia di esercizio ottimale ad ogni data di esercizio, seguiamo la seguente procedura.

- All'istante T il possessore dell'opzione riceve il profitto finale dell'opzione, cioè il valore $V(\omega, t_N) = C(\omega, t_N; t_n, T) \forall t_n < T$ con $n = 1, \dots, N - 1$.
- Ad ogni istante t_n ($n = 1, \dots, N - 1$) precedente la data finale T , il possessore dovrà scegliere tra l'esercizio immediato oppure il rinvio della decisione d'esercizio alla successiva data. Il valore dell'opzione è massimizzato se l'investitore esercita non appena il valore dell'esercizio immediato eguaglia o supera il valore di continuazione.

Ad ogni tempo t_n ($n = 1, \dots, N - 1$) il flusso di cassa dell'esercizio immediato è noto all'investitore ed il valore dell'esercizio immediato eguaglia semplicemente questo flusso; mentre il flusso di cassa atteso della continuazione è ignoto al tempo t_n .

L'assenza di arbitraggio implica che il valore della continuazione, o equivalentemente il valore dell'opzione assumendo che non possa essere esercitata fino a dopo t_n , è dato dal valore atteso dei restanti flussi di cassa attualizzati $C(\omega, s; t_n, T)$ rispetto alla misura neutrale al rischio \mathbb{Q} , condizionato all'informazione disponibile alla data attuale \mathcal{F}_{t_n} . Pertanto il valore di continuazione all'istante t_n per il cammino ω è dato da

$$F(\omega; t_n) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[\sum_{j=n+1}^N \exp \left(- \int_{t_n}^{t_j} r(\omega, s) ds \right) C(\omega, t_j; t_n, T) \mid \mathcal{F}_{t_n} \right],$$

¹Nella pratica, molte opzioni sono continuamente esercitabili. L'algoritmo LSMC può approssimare questo fatto prendendo N sufficientemente grande.

dove $r(\omega, t)$ è il tasso di sconto privo di rischio. Con questa rappresentazione, ad ogni istante t_n con $n = 1, \dots, N - 1$, il problema si riduce al confronto dell'esercizio immediato con la continuazione, cioè

$$V(\omega, t_n) = \max \{C(\omega, t_n; t_{n-1}, T), F(\omega; t_n)\}, \quad \text{con } n = 1, \dots, N - 1,$$

per poi esercitare non appena l'esercizio immediato risulta maggiore o uguale alla speranza condizionata.

L'algoritmo LSMC

Il metodo LSMC consiste nel simulare in avanti i cammini delle variabili di stato usando Monte Carlo e poi, iterando all'indietro, approssimare ad ogni passo la funzione di continuazione su un insieme di opportune funzioni base. Per ottenere una buona approssimazione del valore di continuazione, ossia del valore atteso condizionato alle date di esercizio $t_{N-1}, t_{N-2}, \dots, t_1$, LSMC utilizza i minimi quadrati ed utilizza un metodo di induzione all'indietro dal momento che il cammino del flusso di cassa $C(\omega, s; t, T)$ con $t < s \leq T$ è definito ricorsivamente.

Alla data finale $t_N = T$, i flussi di cassa dei cammini simulati sono noti e permettono di calcolare $C(\omega, t_N, t_{N-1}, T)$, cioè il flusso di cassa dopo il tempo t_{N-1} . Al tempo t_{N-1} assumiamo che $F(\omega; t_{N-1})$ possa essere rappresentata da una combinazione lineare di funzioni base $\mathcal{F}_{t_{N-1}}$ -misurabili². Si approssima $F(\omega; t_{N-1})$ usando le prime $M < \infty$ funzioni base. Sia $F_M(\omega; t_{N-1})$ tale approssimazione; essa è stimata regredendo i valori attualizzati di $C(\omega, t_N; t_{N-1}, T)$ sulle M funzioni base. Sia $\hat{F}_M(\omega; t_{N-1})$ la stima del valore di continuazione³. Questo valore viene confrontato al valore d'esercizio immediato al tempo t_{N-1} per decidere la strategia d'arresto ottimale per il tempo t_{N-1} . Dopo aver calcolato la regola di arresto ottimale per il tempo t_{N-1} , il suo valore risulta essere ormai noto e quindi si può ripetere tutto il procedimento per il tempo t_{N-2} , cioè si possono approssimare i cammini del flusso di cassa dell'opzione $C(\omega, s; t_{N-2}, T)$ utilizzando la strategia d'esercizio calcolata per il tempo t_{N-1} . Ripetendo ricorsivamente questa procedura, procedendo all'indietro nel tempo, si otterranno tutte le decisioni ottimali d'esercizio, ad ogni data e per ogni traiettoria.

L'opzione americana viene valutata individuando, partendo da zero e spostandosi in avanti lungo ciascun percorso, il primo tempo di arresto (cioè il primo tempo in cui risulta ottimale l'esercizio immediato), attualizzando poi il flusso di cassa risultante dall'esercizio all'indietro fino al tempo zero e prendendo poi la media su tutti i K percorsi ω simulati.

²Longstaff e Schwartz giustificano questo approccio grazie all'assunzione che il valore atteso condizionato è un elemento di L^2 , spazio delle funzioni di quadrato integrabile. Poiché L^2 è uno spazio di Hilbert, ha una base ortonormale numerabile e la speranza condizionata può essere rappresentata come funzione lineare degli elementi della base.

³Il valore stimato della regressione $\hat{F}_M(\omega; t_{N-1})$ converge in media quadratica ed in probabilità a $F_M(\omega; t_{N-1})$.

Capitolo 2

Il sistema di scambio di emissioni europeo (EU ETS)

Il protocollo del 1997 di Kyoto ha fissato, per la prima volta, obiettivi giuridicamente vincolanti di riduzione delle emissioni, per 37 paesi industrializzati. Ciò ha portato alla necessità di strumenti politici per raggiungere questi obiettivi.

Nell'ambito dell'inquinamento ambientale, l'Unione Europea ha adottato, in attuazione del Protocollo di Kyoto, il sistema europeo di scambio di quote di emissione (European Union Emissions Trading Scheme - "EU ETS"). L'EU ETS è finalizzato alla riduzione (e regolamentazione) delle emissioni a lungo termine di gas serra (greenhouse gas - "GHG") nei settori "energivori", cioè grandi consumatori di energia e quindi maggiori produttori di emissioni di CO₂. L'EU ETS è un sistema basato sulla limitazione e lo scambio ("cap & trade") perché stabilisce un tetto massimo ("cap") alla quantità totale di alcuni gas serra che possono essere emessi dagli impianti che rientrano nel sistema (tale tetto si riduce nel tempo in modo da diminuire le emissioni totali), ma permette ai partecipanti di acquistare e vendere sul mercato ("trade") diritti di emissione di CO₂ ("quote") secondo le loro necessità, all'interno del limite stabilito. Possono anche acquistare quantità limitate di crediti internazionali da progetti di riduzione delle emissioni di tutto il mondo. La limitazione del numero totale garantisce che le quote disponibili abbiano un valore.

L'approccio del limite massimo soddisfa l'obiettivo ambientale ma non può pienamente prevedere i costi che le aziende si troveranno ad affrontare nel raggiungimento del loro scopo.

La Direttiva ETS prevede che, dal primo gennaio 2005, gli impianti dell'Unione Europea con elevati volumi di emissioni non possano funzionare senza un'autorizzazione ad emettere gas serra.

In generale, i gestori degli impianti autorizzati possono scegliere tra investire per ridurre le proprie emissioni adottando tecnologie a basso contenuto di CO₂ ed eventualmente vendere l'eccesso di permessi che rimane a loro disposizione o acquistare quote da altri operatori del mercato, pagando quindi per l'inquinamento prodotto. Affinché vengano rispettati i limiti imposti, le compagnie aderenti al sistema devono monitorare e registrare annualmente le emissioni, inoltre sono tenute a stilare una relazione sulle emissioni, i cui dati verranno in seguito verificati. Una volta attestata la veridicità dei dati riportati, le imprese hanno l'obbligo di compensare le emissioni di CO₂ per l'anno solare precedente con quote di emissioni di CO₂ europee (European Union Allowances, "EUA" e European Union Aviation Allowances, "EUAA") che possono essere commercializzate, al fine di non subire pesanti multe.

Gli Stati membri dell'UE assegnano le quote agli operatori a titolo oneroso attraverso aste pubbliche europee. Fino al 2012, l'assegnazione delle quote nell'EU ETS è avvenuta prevalentemente a titolo gratuito e sulla base delle emissioni storiche ("grandfathering"). Dal 2013 il collocamento a titolo oneroso tramite asta ("auctioning") è divenuto il meccanismo cardine per l'assegnazione delle quote, salvo eccezioni legate alla tutela della competitività sui mercati internazionali dei settori manifatturieri. A differenza dell'assegnazione gratuita, la vendita all'asta mette in pratica il principio "chi inquina paga", garantisce più efficientemente la formazione di un prezzo di riferimento per i certificati di emissione di CO₂ in Europa, offre maggiore trasparenza e armonizzazione tra Stati membri e mira ad incentivare investimenti e tecnologie pulite. Un prezzo per i certificati di emissione di CO₂ omogeneo per tutti i settori è uno dei principali strumenti con i quali l'Unione Europea intende incentivare investimenti in efficienza energetica e tecnologie pulite, tra cui le tecnologie per l'uso delle fonti rinnovabili.

Alle aste partecipano i produttori di energia elettrica e gli impianti che si occupano della cattura, del trasporto e dello stoccaggio di CO₂ (Carbon Capture and Storage - "CCS") per coprire totalmente il loro fabbisogno di emissioni, mentre i settori manifatturieri e quello dell'aviazione ricevono una parte delle quote a titolo gratuito e per la restante parte ricorrono all'asta.

Possiamo ricondurre lo sviluppo del sistema di scambio europeo alle seguenti fasi:

- Fase 1: 2005-2008.

È stata una fase di preparazione. In questa fase sono stati stabiliti un prezzo per i certificati di emissione di CO₂, il libero scambio di quote di emissione in tutta l'UE, l'infrastruttura di controllo delle emissioni comunicate dalle imprese interessate. In assenza di dati attendibili sulle emissioni, i tetti sono stati fissati sulla base di stime. Si è poi scoperto che la quantità totale di quote assegnate eccedeva le emissioni e, dato che l'offerta superava di gran lunga la domanda, nel 2007 il prezzo delle quote è sceso praticamente a zero (le quote della prima fase non potevano essere scambiate per farne uso nella seconda).

Inoltre in caso di violazione degli obblighi è stata imposta una sanzione di 40 euro a tonnellata di CO₂.

- Fase 2: 2009-2012.

In questa fase è stato ridotto il tetto limite per le emissioni (inferiore al 6.5% circa rispetto al 2005) ed è stato fissato in base a dati effettivi; è stato inserito nel sistema il settore aereo; la sanzione in caso di mancato rispetto degli obblighi è aumentata a 100 euro per tonnellata; la proporzione di quote assegnate gratuitamente è scesa al 90%; alle imprese è stato consentito di acquistare crediti internazionali per un totale di circa 1,4 miliardi di tonnellate di CO₂-equivalente. Tuttavia, la crisi economica del 2008 ha provocato riduzioni delle emissioni maggiori del previsto, causando un cospicuo eccesso di quote e crediti, influenzando negativamente il prezzo dei certificati di emissione di CO₂.

- Fase 3: 2013-2020.

Questa è la fase in cui attualmente si trova il sistema EU ETS. Le principali modifiche sono l'applicazione di un tetto massimo unico per tutta l'UE (in passato si applicavano tetti nazionali); le quote vengono comunemente assegnate tramite un'asta; per i nuovi arrivati sono stati accantonati 300 milioni di quote ai fini di incentivare l'utilizzo di tecnologie innovative per le energie rinnovabili, cattura e stoccaggio di CO₂.

- Fase 4: 2021-2028.

La proposta legislativa, elaborata dalla Commissione per una revisione del sistema europeo di scambio delle quote di emissione, prevede che la quantità complessiva di quote di emissione diminuirà dal 2021 a un tasso annuo del 2.2% rispetto all'attuale 1.74%; stabilisce la creazione di due nuovi fondi a sostegno di investimenti proiettati verso un'economia a basse emissioni di CO₂; prevede l'inserimento di norme più specifiche su trasferimento delle emissioni di CO₂; infine comprende l'introduzione di una riserva per la stabilità di mercato (Market Stability Reserve - "MSR"), cioè un meccanismo automatico e flessibile per stabilizzare l'offerta di permessi a seconda della domanda, e che si propone di aumentare costantemente il prezzo dei certificati di emissione di CO₂ e sconfiggere la volatilità dei prezzi dei permessi.

Il sistema EU ETS ha dimostrato l'efficacia del fissare un prezzo per i certificati di emissione di CO₂ ed il loro scambio. Infatti le emissioni degli impianti vincolati dal sistema stanno diminuendo, come augurato, del 5% circa rispetto all'inizio della terza fase (2013); nel 2020 le emissioni diminuiranno del 21% rispetto al 2005; nel 2030, secondo la proposta della Commissione, saranno inferiori del 43% rispetto al 2005.

2.1 Incertezza dei mercati e della politica climatica

Il cambiamento climatico è considerato uno dei maggiori rischi sistemici del XXI secolo. Tuttavia il tentativo di rallentare l'accumulo delle emissioni è ancora allo stadio iniziale e i responsabili della politica ("policy-makers") non riescono a trasmettere corretti segnali a lungo termine a coloro che utilizzano tecnologie ad elevate emissioni di CO₂. Gli investitori non si trovano di fronte solo all'incertezza derivante dai prezzi volatili nei mercati tradizionali, ma anche all'incertezza sulla severa politica sui cambiamenti climatici. Vi sono infatti due fonti di incertezza:

- la volatilità del prezzo dovuta alle oscillazioni del mercato attorno ad un prezzo medio;
- la volatilità dovuta alle politiche dei cambiamenti climatici che si riflette nelle biforcazioni delle traiettorie dei prezzi.

Una conseguenza è che il produttore, di fronte all'incertezza del mercato dovuta ai prezzi dei certificati di emissione di CO₂, investe nelle tecnologie a risparmio di CO₂ prima di poter conoscere in anticipo il percorso reale del prezzo. D'altra parte, l'incertezza della politica induce i produttori ad aspettare, posticipando perciò l'investimento, e vedere se il governo si impegnerà ulteriormente in questo ambito. In altre parole gli investitori si trovano a dover risolvere un problema di ottimizzazione, che riguarda il tempo della decisione di investimento, sotto informazione incompleta, che li induce ad effettuare delle scelte che sarebbero differenti in presenza di informazione completa.

L'incertezza che emerge nel contesto del problema di investimento nel settore elettrico è duplice. Da un lato vi è incertezza rispetto ai prezzi dell'elettricità, e dall'altro il costo di produzione è influenzato dalle fluttuazioni del prezzo dei certificati di emissione di CO₂. Come detto precedentemente, il primo tipo riguarda l'incertezza del mercato che è rappresentata dai rischi catturati dalla volatilità del percorso del prezzo, mentre il secondo tipo rappresenta l'incertezza politica che riguarda non le fluttuazioni ma la direzione del cammino del prezzo che dipende dalle azioni del governo. Pertanto i produttori di elettricità devono adattare le loro decisioni in ambito degli investimenti in altri impianti di energia elettrica non solo alle incertezze del mercato, ma anche all'incertezza coinvolta nel processo politico decisionale.

2.2 Prezzo minimo per i certificati di emissione di CO₂ ("price floor")

Lo schema dello scambio delle quote di emissione di CO₂ presenta alcuni vantaggi:

- è economicamente vantaggioso, nel senso che gli obiettivi di abbattimento di CO₂ possono essere realizzati con minimi costi;
- è teoricamente efficace per l'ambiente, ed una volta definito l'obiettivo da perseguire, possono essere determinati sia il livello di CO₂ da abbattere, sia il tempo per raggiungerlo;
- infine lo schema è fattibile in particolare quando le concessioni sono distribuite liberamente.

Grazie a ciò, lo schema dello scambio di emissioni è stato adottato in molti Paesi per ridurre le emissioni di gas serra.

L'incompletezza delle informazioni relative ai costi di riduzione di CO₂ e l'incertezza dello sviluppo economico futuro, in pratica, possono causare l'eccessiva volatilità del prezzo dei certificati di emissione di CO₂.

Bassi prezzi dei certificati di emissione di CO₂ e fluttuazioni eccessive dei prezzi dei permessi di emissione di CO₂ non forniscono segnali sullo sviluppo di tecnologie energetiche a basso rilascio di CO₂. Infatti la volatilità del prezzo dei certificati di emissione di CO₂ potrebbe ritardare, in maniera significativa, le decisioni di investimento a ridotte emissioni a causa dell'avversione al rischio di potenziali investitori e della loro aspettativa futura sui prezzi. Pertanto, come accennato prima, prezzi bassi dei certificati di emissione di CO₂ e fluttuazioni potenzialmente grandi del prezzo dei permessi di emissione di CO₂, nel futuro, potrebbero scoraggiare investimenti sulla riduzione di CO₂.

Per affrontare le debolezze del mercato di CO₂ esistente, sono stati proposti dei meccanismi di stabilizzazione del prezzo, ad esempio un prezzo minimo ("price floor"), un prezzo massimo ("price ceiling") o entrambi contemporaneamente ("price collar"). In questa tesi ci occuperemo del ruolo del prezzo minimo per i certificati di emissione di CO₂ negli investimenti.

I prezzi massimi rappresentano un'opzione approvata per limitare il rischio che i prezzi dei certificati di emissione di CO₂ superino i livelli accettabili se il limitare delle emissioni dovesse risultare più costoso del previsto, fornendo una maggior certezza dei costi agli emettitori e limitando il potenziale e complessivo costo economico di mitigazione a breve termine.

Le discussioni circa i prezzi minimi sono meno sviluppate, anche se il concetto di un prezzo base ha iniziato a trovare la sua strada nella politica e nelle proposte legislative. Lo scopo di incorporare un costo minimo nello schema di scambio di emissioni è quello di garantire che il prezzo dei permessi di emissione di CO₂ rimanga sopra un certo valore, promuovendo investimenti in tecnologie a ridotte emissioni e realizzando obiettivi di riduzione di CO₂ a lungo termine (fornendo un maggior abbattimento se i costi risultassero più bassi del previsto).

L'introduzione di un prezzo minimo dei certificati di emissione di CO₂ è stato proposto, infatti, come una misura politica per diminuire l'incertezza dell'investitore, e per finanziare più investimenti nella produzione di energia elettrica a basso contenuto di CO₂.

Investire in impianti elettrici coinvolge orizzonti temporali a lungo termine. L'incertezza circa il prezzo futuro dei permessi di emissione di CO₂ aumenta i costi sia di chi investe in tecnologie mitiganti, sia di chi investe in tecnologie inquinanti. I potenziali investitori in tali tecnologie possono decidere se e quando investire, ottimizzando i profitti attesi a lungo termine. Il beneficio derivante dall'introduzione di un limite minimo dà agli investitori in tecnologie a ridotta emissione di CO₂ maggior certezza per quanto riguarda il rendimento minimo dei loro investimenti (effettivamente è una sorta di assicurazione contro i prezzi bassi dei certificati di emissione di CO₂). Tuttavia l'introduzione del prezzo minimo può avere anche effetti negativi: infatti se tale prezzo è troppo alto, può aggiungere un onere eccessivamente pesante ad una organizzazione che poi può trasferire i costi ai propri clienti; probabilmente si potrebbe avere un'eccessiva riduzione di CO₂ a breve termine, aumentando i costi complessivi della riduzione di CO₂, e così diminuire gli effetti di efficienza tipicamente associati allo scambio di emissioni di CO₂.

Vi sono tre metodi per implementare il prezzo minimo nello schema di scambio di emissioni:

1. Il gestore si impegna a riacquistare le licenze al prezzo minimo, riducendo in tal modo il numero di permessi nel mercato. Un approccio simile si basa sul pagamento di un sussidio alle imprese che posseggono più permessi rispetto a quelli richiesti per coprire le loro emissioni; il sussidio è proporzionale al numero di permessi in eccesso.
2. Quando i permessi vengono venduti all'asta, viene applicato un prezzo di riserva cioè un prezzo minimo, non dichiarato, a cui vengono venduti i permessi, e se al termine dell'asta non fosse raggiunto allora le licenze non verrebbero aggiudicate. Questo limita nuovamente la quantità di permessi disponibile agli emettitori.
3. Gli emettitori devono pagare una tariffa aggiuntiva (o tassa) per ogni tonnellata di CO₂ emessa, in aggiunta alla cessione di un permesso. Il prezzo effettivo di CO₂ diviene uguale alla somma del prezzo del permesso più la tassa.

Il primo approccio teoricamente potrebbe essere il modo più corretto per introdurre il prezzo minimo, in quanto permette di implementarlo solo attraverso l'utilizzo di uno strumento. Il prezzo di mercato non scenderà mai al di sotto del prezzo limite e la gestione del prezzo minimo rimane all'interno dello schema cap & trade. Se il prezzo di mercato fosse inferiore al prezzo minimo allora il sottoscrittore del riacquisto dovrebbe pagare questa differenza che spesso va oltre il bilancio a disposizione. Un impegno di riacquisto creerebbe potenziali passività ai governi, attraverso costi di bilancio di riacquisto di permessi sul mercato. Questo è particolarmente problematico quando la maggior parte delle quote iniziali sul totale dei permessi disponibili viene assegnate gratuitamente.

Il commercio internazionale dei permessi aggraverebbe i problemi di bilancio affrontati da un Paese, e creerebbe una responsabilità illimitata per l'amministratore. Anche se il riacquisto dei permessi è limitato ai permessi nazionali, i permessi internazionali potrebbero essere utilizzati da emettitori nazionali in sostituzione di quelli nazionali, estendendo in modo efficace la responsabilità a qualsiasi governo estero. Affinché il riacquisto dei permessi fosse compatibile con il commercio internazionale, servirebbe che tutti i sistemi coinvolti avessero lo stesso prezzo minimo, anche se ciò è difficilmente realizzabile a causa delle oscillazioni dei tassi di cambio.

Il secondo approccio è stato respinto dall'Unione Europea perché implicherebbe che non vi sia un rigoroso prezzo minimo, in quanto anche se esistesse un prezzo minimo che le imprese paghino alle aste, il prezzo di mercato potrebbe scendere al di sotto del prezzo di riserva. Un vantaggio del prezzo di riserva è che, indipendentemente dalla sua funzione come prezzo minimo, si tratta di un futuro schema d'asta per proteggere i venditori, ed in qualche caso anche gli acquirenti, da risultati d'asta inattesi. La traduzione di un prezzo di riserva in prezzo minimo dipende dalla quantità di permessi venduti all'asta. Se gran parte dei permessi è assegnata senza restrizioni, poi potrebbe verificarsi che pochi o nessuno dei permessi sia venduto all'asta, dato il prezzo di riserva. In questo caso il prezzo di mercato sarebbe superiore a quello che si avrebbe in un sistema cap & trade con l'intero ammontare di permessi disponibile agli emettitori, ma al di sotto del prezzo di riserva.

Il commercio internazionale dei permessi potrebbe anche provocare il fatto che il prezzo d'asta di riserva non sia più un prezzo minimo. Se i permessi dello schema di un altro Paese possono essere importati ad un prezzo inferiore al prezzo di riserva, allora questo diventerà il modo di acquisto dei permessi nello schema domestico piuttosto che l'acquisto all'asta del governo. In questo scenario c'è un importante impatto negativo sul bilancio per il paese che cerca (senza riuscire) di mantenere un prezzo minimo, perché piuttosto che contribuire alle entrate del governo nazionale attraverso acquisti alle aste, gli emettitori trasferiscono denaro per il permesso comprato all'estero. Nel complesso un prezzo di riserva non porterà ad un rigoroso prezzo minimo, ma ad una riduzione della quantità di permessi quando i costi di mitigazione sono bassi; inoltre limiterà dal basso la flessibilità dei prezzi a condizione che una quota sufficiente di permessi sia venduta all'asta.

Per quanto riguarda la terza metodologia, possiamo riscrivere il prezzo effettivo dei certificati di emissione di CO₂ nel seguente modo:

$$MC = p + t, \quad (2.1)$$

dove MC è il costo marginale di diminuzione (cioè il prezzo effettivo di CO₂), p è il prezzo del permesso, t è la tassa aggiuntiva.

Le imprese si impegnerebbero nel ridurre le emissioni se queste riduzioni costassero meno della somma del prezzo di permesso e della tassa extra.

Fondamentalmente vi sono due modi per impostare il prezzo della tariffa aggiuntiva:

1. Attraverso una tassa fissa sulle emissioni

$$t_{fissa} = p_{min} \quad (2.2)$$

cioè la tassa fissa è uguale al prezzo minimo. L'utilizzo della tassa fissa fa sì che il prezzo effettivo dei certificati di emissione di CO₂ non possa scendere al di sotto del livello della tassa ed che sia sempre superiore rispetto al prezzo dei permessi scambiati.

L'approccio della tassa fissa è simile ad una opzione call che consiste nel poter comprare un permesso ad un prezzo fissato.

2. Mediante una tassa variabile sulle emissioni. Quando il prezzo del permesso nel mercato è inferiore al prezzo minimo, la tassa extra è pari alla differenza tra il prezzo del permesso e il prezzo minimo; quando è superiore la tassa è nulla. Cioè

$$t_{variabile} = \begin{cases} p_{min} - p & \text{se } p < p_{min} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad (2.3)$$

dove $t_{variabile}$ è la tassa aggiuntiva, p_{min} è il prezzo minimo e p è il prezzo del permesso. Contrariamente all'approccio precedente, questo metodo consegue più attentamente gli effetti di un prezzo minimo classico, come un prezzo minimo predeterminato senza alcun effetto se i prezzi del mercato fossero al di sopra del limite. Il prezzo minimo verrebbe attivato solo se e nella misura in cui il prezzo scendesse sotto il livello limite.

Una complicanza è rappresentata dalla fluttuazione nel tempo dei prezzi dei permessi che provocano, conseguentemente, un cambiamento nel tempo della tassa variabile o la sua determinazione in un istante fissato. Vi sono parecchie opzioni per decidere quale prezzo del permesso utilizzare per determinare la tassa extra:

- Si potrebbe utilizzare il prezzo di permesso sul mercato alla data di consegna dello stesso. Tuttavia questa possibilità dà alle imprese con potere di mercato l'opportunità di influenzare il prezzo di mercato in prossimità del periodo di conformità per ridurre al minimo il pagamento della tassa.
- Oppure si potrebbe utilizzare il prezzo del permesso che l'impresa ha pagato al momento dell'acquisto (questo necessita che le informazioni circa i permessi venduti siano state conservate).
- Alternativamente si potrebbe utilizzare il prezzo medio dei permessi nei periodi di tempo in cui le emissioni vengono valutate (generalmente un anno).

- Infine sarebbe possibile addebitare la tassa al momento dell'acquisto del permesso da parte del governo. Questa alternativa potrebbe equivalere al prezzo d'asta di riserva discusso in precedenza.

Ricapitolando, prezzi minimi in sistemi di scambio di emissioni possono ridurre l'eccessiva volatilità dei prezzi, e fornire una miglior gestione dell'incertezza dei costi in caso di costi di abbattimento inferiori al previsto, che a sua volta migliora la prevedibilità dei rendimenti ed incrementa i rendimenti attesi degli investimenti a ridotte emissioni. I prezzi minimi possono svolgere quindi un importante ruolo di sostegno per una mitigazione efficiente ed efficace del cambiamento climatico, e possono essere implementati senza sconvolgere gli aspetti vitali del sistema di scambio.

2.3 Dinamica dei prezzi

Generalmente si assume che il prezzo di un titolo segua un moto browniano geometrico (Geometric Brownian Motion - GBM).

Definizione 2.1 (Moto Browniano Geometrico). L'equazione del moto browniano è la seguente

$$\begin{aligned} dP_t &= \alpha P_t dt + \sigma P_t dB_t \\ P_0 &= p_0 \end{aligned} \quad (2.4)$$

la cui soluzione è

$$P_t = p_0 \exp \left\{ \left(\alpha - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) t + \sigma B_t \right\}, \quad (2.5)$$

dove P_t è il prezzo del titolo, B_t è un processo di Wiener, $\alpha \in \mathbb{R}$ è il tasso di rendimento atteso e $\sigma > 0$ è la volatilità.

Osservando l'equazione differenziale stocastica

$$\frac{dP_t}{P_t} = \alpha dt + \sigma dB_t, \quad (2.6)$$

il primo membro può essere interpretato come il rendimento del prezzo nell'intervallo di tempo infinitesimo dt .

Se definiamo

$$Z_t := \ln \frac{P_t}{P_0} = \ln P_t - \ln P_0 \quad (2.7)$$

ricaviamo che

$$Z_t = \left(\alpha - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) t + \sigma B_t$$

Quindi deduciamo che

$$Z_t \sim \mathcal{N} \left(\left(\alpha - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) t; \sigma^2 t \right)$$

e cioè i log-rendimenti sono variabili aleatorie indipendenti e identicamente distribuite con distribuzione normale (e quindi $\frac{P_t}{P_0}$ ha distribuzione log-normale).

Capitolo 3

Opzioni reali

La teoria delle opzioni reali è ampiamente utilizzata sia per valutare le tecnologie di riduzione di CO₂ e gli investimenti in energia a basso contenuto di CO₂, sia per descrivere l'incertezza degli investimenti futuri.

Definizione 3.1 (Opzione reale). Un'opzione reale è il diritto ma non l'obbligo di intraprendere un'azione (ad esempio differire, espandere, contrarre, abbandonare) riguardante un investimento (tipicamente un bene fisico) ad un costo prestabilito, detto prezzo di esercizio, per un determinato periodo di tempo, ossia la vita dell'opzione.

3.1 Tipi di opzioni reali

Vi sono molte tipologie di opzioni reali, tuttavia quelle più comunemente usate sono le seguenti:

- opzioni reali di abbandono o di uscita (“option to abandon” o “option to exit”) permettono di interrompere il proseguimento dell'investimento ricavando o meno un determinato valore;
- opzioni reali di differimento (“option to defer” o “option to waiting to invest”) permettono di non effettuare l'investimento nell'immediato, lasciando aperta l'opportunità di realizzarlo in un momento successivo (valutano il miglior istante in cui investire dando peso sia al valore del titolo sia al costo dell'investimento). Queste opzioni sono comunemente usate in investimenti in ambito di industrie di estrazione di risorse naturali, o di sviluppo immobiliare;
- opzioni reali di conversione o di flessibilità (“option to switch”) danno la possibilità di scegliere tra due modalità operative, pagando il costo per tale variazione. L'utilizzo classico, nell'ambito della produzione da rinnovabile, è riferito agli impianti a biogas; potendo funzionare con più tipologie di

carburante si prevede la possibilità di variare l'alimentazione, scegliendo, ogni volta, il combustibile a minor prezzo nel caso il costo di variazione lo renda conveniente.

- opzioni di modifica della scala operativa (“option to alter operating scale”), come opzioni di espansione e opzioni di contrazione, forniscono al decisore il loro potenziale, ad esempio espandendo la scala di produzione o accelerando l'utilizzo delle risorse se le condizioni di mercato sono favorevoli, oppure riducendola se sono sfavorevoli;
- opzioni di opzioni, come opzioni di apprendimento, di crescita, derivano dalla divisione dell'investimento in più fasi; ogni fase è vista come opzione sul valore delle successive fasi perché alla conclusione di ogni fase è possibile abbandonare il progetto o procedere con la fase successiva.

3.2 Analogia con le opzioni finanziarie

Il concetto delle opzioni reali deriva dalle opzioni finanziarie.

Definizione 3.2 (Opzione finanziaria). Un'opzione finanziaria “tipica” è un contratto che dà al possessore il diritto, ma non l'obbligo, di comprare o vendere un determinato titolo (detto sottostante) ad una determinata scadenza (maturità) e ad un prezzo prefissato (prezzo di esercizio).

Ci sono due tipi di opzioni :

- le opzioni call che danno il diritto di comprare;
- le opzioni put che danno il diritto di vendere.

Diremo che una call è “in the money” se il prezzo di esercizio è inferiore al valore attuale del sottostante, se invece è superiore diremo che è “out of the money”; per una put le disuguaglianze si invertono. Call e put si dicono “at the money” quando il prezzo di esercizio è equivalente al prezzo del sottostante.

Le opzioni possono essere inoltre di tipo europeo quando l'opzione può essere esercitata solo ad una specificata data futura, oppure di tipo americano quando è possibile esercitare in qualsiasi istante prima della maturità.

Ricordando la definizione di opzione reale (3.1), possiamo dire che le opzioni reali tipicamente sono di tipo americano e l'opportunità di investire è simile ad un'opzione call. Se un'impresa ha la possibilità di investire denaro (prezzo d'esercizio), ora o in futuro, in cambio di un titolo (progetto) di un certo valore, potrebbe investire se l'opzione è in the money, e ricevere profitto positivo. D'altra parte l'impresa non può investire se l'opzione è out of the money, per evitare un profitto negativo.

3.3 Modello dei flussi di cassa attualizzati

La scelta degli investimenti nei settori economici, in particolare in quello dell'energia, coinvolge differenti aspetti, non tutti prevedibili e valutabili. Generalmente si tratta di decidere sull'esborso di una somma cospicua in un tempo relativamente breve (costi d'investimento), a fronte di un ricavo previsto spalmato in un intervallo di tempo relativamente lungo.

Per valutare se sia più conveniente rinviare l'investimento o procedere subito alla sua attuazione si utilizza il modello dei flussi di cassa attualizzati (discounted cash flows - "DCF") che si basa sulla rappresentazione nel tempo del flusso di entrate ed uscite di denaro, associato ad ognuna delle alternative considerate. Il flusso di cassa può essere positivo nel caso di un introito o negativo nel caso di un esborso.

Una versione dinamica dell'analisi dei flussi di cassa attualizzati offre un significativo miglioramento rispetto alla versione statica, in quanto l'analisi dinamica prende in considerazione la futura incertezza e le decisioni che possono essere prese in futuro per gestire il rischio e l'aumento del valore del progetto. Infatti, invece di considerare un percorso determinato ed un singolo scenario dei flussi di cassa futuri attesi, la versione dinamica richiede di disporre di tutte le possibili incertezze e delle eventuali future decisioni contingenti attraverso l'utilizzo della programmazione dinamica o di alberi decisionali. Tramite questi approcci si possono tenere in considerazione tutti i possibili stati ed incorporare nell'analisi l'insieme di tutte le possibili scelte decisionali ad ogni tempo e ad ogni stato. I valori risultanti e le probabilità usate in questa analisi riflettono le informazioni disponibili all'impresa al tempo attuale, mentre i flussi di cassa futuri attesi si derivano da dati di progetti simili, se disponibili.

Come nel caso statico, questa analisi utilizza un tasso di attualizzazione aggiustato per il rischio, detto costo opportunità del capitale, per determinare il valore attuale netto atteso. Il costo opportunità del capitale è il tasso di rendimento atteso da impiegare nella valutazione finanziaria degli investimenti, corrispondente al rendimento migliore che si potrebbe ottenere investendo la stessa somma in altro modo e per la stessa durata. Il tasso di sconto aggiustato per il rischio può essere espresso nel seguente modo:

$$RADR = r_f + PR$$

dove $RADR$ ("Risk Adjusted Discount Rate") è il tasso aggiustato per il rischio, r_f è il tasso di interesse privo di rischio e PR è il premio al rischio, cioè una ricompensa aggiuntiva dovuta all'elevato rischio connesso ad un particolare investimento.

L'analisi dinamica aggiunge delle complicazioni. Infatti l'appropriato costo del capitale non è fisso, ma dipende dalla rischiosità dei flussi di cassa e dalle correlazioni esistenti nel mercato.

3.3.1 Criterio del valore attuale netto

Il criterio del “VAN” (valore attuale netto) o “NPV” (net present value) è uno dei criteri più utilizzati per la valutazione preliminare di un investimento.

Definizione 3.3 (VAN, Valore Attuale Netto). Si definisce valore attuale netto di un’opzione al tasso composto r , la somma dei valori attuali di tutti gli importi futuri al tasso d’attualizzazione r , ossia:

$$\text{VAN}(r) = \sum_{t=0}^N \frac{c_t}{(1+r)^t} \quad (\text{tempo discreto}),$$

dove c_t è il flusso di cassa al tempo t , $t = 0, \dots, N$, ed N è la durata complessiva dell’opzione,

$$\text{VAN}(r) = \int_0^t c_s e^{-rs} ds, \quad 0 < t < N \quad (\text{tempo continuo}).$$

Più in generale, se il tasso di interesse varia da periodo a periodo, abbiamo la seguente formula:

$$\text{VAN}(r_t) = \sum_{t=0}^N \frac{c_t}{(1+r_t)^t} \quad (\text{tempo discreto}),$$

$$\text{VAN}(r) = \int_0^t c_s e^{\int_0^s r(u) du} ds \quad (\text{tempo continuo}).$$

Ci chiediamo come possa un’impresa, di fronte all’incertezza futura, decidere di investire in un nuovo impianto. C’è una semplice regola da applicare: prima di tutto si deve calcolare il valore attuale del flusso dei profitti atteso che tale impianto genererà, poi il valore attuale del flusso di spesa necessario per costruire l’impianto ed infine determinare quando la differenza tra i due, cioè il VAN, è maggiore di zero.

Il valore attuale netto è alla base della teoria degli investimenti. Una decisione finanziaria consiste nello scegliere se accettare o meno un progetto. Il criterio del VAN implica che si dovrebbero:

- accettare i progetti con VAN positivo, in quanto ciò equivale a ricevere il VAN corrispondente in denaro oggi;
- rifiutare i progetti con VAN negativo, poiché accettarli significa ridurre la ricchezza degli investitori, mentre rifiutarli non implica alcun costo (VAN = 0).

Il criterio consiste nel fissare il tasso r , ipotizzare i flussi di cassa futuri che ogni investimento garantirebbe nel caso venisse effettuato, e scegliere l’investimento che offre il maggior VAN tra tutti.

Il VAN di un investimento può essere interpretato quindi come il valore che garantisce al tempo $t = 0$ l’intera operazione futura.

Consideriamo un progetto da lanciare: se r è il tasso annuale di riferimento e C_0 il costo iniziale del macchinario o impianto da acquistare, il VAN è calcolato nel seguente modo:

$$\text{VAN}(r) = \sum_{t=1}^N \frac{C_t}{(1+r)^t} - C_0 \quad (\text{tempo discreto}),$$

$$\text{VAN}(r) = \int_0^t C_s e^{-rs} ds - C_0 \quad (\text{tempo continuo}).$$

dove N è il tempo di vita del macchinario, C_s è il flusso di cassa futuro che può essere positivo nel caso di ricavi derivanti dalle vendite del prodotto, o negativo in presenza di costi di produzione o manutenzione o di interessi bancari passivi.

Tale criterio può essere utilizzato anche per scegliere tra progetti alternativi, confrontando i rispettivi VAN: tra quelli con VAN positivi, la scelta migliore risulta essere quella con VAN maggiore (cioè che massimizza la ricchezza).

In condizioni di certezza l'investitore massimizza il suo profitto scegliendo gli investimenti con VAN più elevato, calcolato scontando i flussi di cassa futuri al tasso di interesse privo di rischio che rappresenta il costo di opportunità del capitale. Nel caso di investimenti rischiosi si procede analogamente purché si interpreti il concetto di progetti comparabili come investimenti appartenenti alla stessa classe di rischio.

Una questione importante riguarda la specificazione del tasso di interesse: se i flussi di cassa generati dal progetto sono dati per certi, allora si prende in considerazione il tasso privo di rischio. Nella realtà i flussi di cassa futuri sono generalmente sconosciuti, pertanto questa incertezza è incorporata nel tasso di attualizzazione aggiustato per il rischio. In questo caso la formula per il calcolo del VAN diviene:

$$\text{VAN}(r_a) = \sum_{t=1}^N \frac{\mathbb{E}_0 [C_t]}{(1+r_a)^t} - C_0, \quad (\text{tempo discreto}),$$

$$\begin{aligned} \text{VAN}(r_a) &= \mathbb{E}_0 \left[\int_0^t C_s e^{-r_a s} ds \right] - C_0 = \int_0^t \mathbb{E}_0 [C_s e^{-r_a s}] ds - C_0 \\ &= \int_0^t e^{-r_a s} \mathbb{E}_0 [C_s] ds - C_0 \quad (\text{tempo continuo}). \end{aligned}$$

dove $r_a > r$ è il tasso aggiustato per il rischio, ed $\mathbb{E}_0 [\cdot]$ è l'operatore di speranza matematica condizionata alle informazioni disponibili al tempo $t = 0$, quando l'investitore deve prendere le decisioni.

Con il metodo del VAN si ha una visione statica dei flussi di cassa futuri che è penalizzante in un'analisi a lungo termine. È necessaria un'analisi che, oltre ai flussi di cassa attualizzati, comprenda anche le opportunità future che un progetto in una attività reale potrebbe generare. Di questo si occupano le opzioni reali. Le caratteristiche che non sono colte dal VAN sono:

- **incertezza:** gli eventi futuri dipendono da fattori probabilistici non prevedibili senza errore, infatti minori saranno le informazioni sui processi ed i fattori, maggiore sarà l'errore di previsione; inoltre c'è incertezza nei guadagni futuri ed il meglio che si può fare è valutare le probabilità dei risultati alternativi in termini di maggiori o minori profitti e perdite;
- **irreversibilità:** una volta effettuata una scelta è quasi impossibile tornare indietro in quanto i costi sostenuti dismettendo un'attività reale con esito negativo, sono al più parzialmente recuperabili;
- **flessibilità:** è una caratteristica che permette di adattare dinamicamente le decisioni alle variabili condizioni di mercato, ad esempio dà la possibilità di posporre un investimento permettendo così di sfruttare opportunità future che al momento della scelta dell'investimento sono invece poco note.

Queste caratteristiche interagiscono tra di loro per determinare le decisioni ottime degli investitori.

3.4 Opportunità di investimento e valutazione di un'opzione reale tramite programmazione dinamica

Il tempo gioca un ruolo particolarmente importante nelle decisioni di investimento. Un aspetto importante è la possibilità di prendere la stessa decisione più tardi, perciò l'opzione di posporre deve essere inclusa nell'insieme di scelte di oggi.

La programmazione dinamica è uno strumento molto generale per l'ottimizzazione dinamica ed è particolarmente utile nel trattare l'incertezza. Spezza la serie di decisioni in due componenti: la decisione immediata ed una funzione di valutazione che incorpora le conseguenze di tutte le decisioni successive, partendo dalla posizione risultante dalla decisione immediata.

3.4.1 Caso a tempo continuo

Consideriamo il caso di una società che deve decidere quando investire in un solo progetto. Supponiamo che il costo dell'investimento sia I , e sia noto e fissato, mentre il valore del progetto V segua un moto browniano geometrico. La regola semplice del valore attuale netto ci dice che possiamo investire quando $V > I$, ma questo è inesatto in quanto i futuri valori di V sono sconosciuti e quindi esiste un costo opportunità di investire oggi. La regola ottima di investimento consiste nell'investire quando V è almeno grande come un valore critico V^* che deve superare I .

Descriviamo in dettaglio il modello base, e mostriamo come la regola di investimento ottima (che è il valore critico V^*) può essere determinata tramite la programmazione dinamica.

Consideriamo quindi una decisione di investimento in un progetto di valore aleatorio V con un costo fisso I da sostenere. Supponiamo che V evolva secondo un moto browniano geometrico

$$dV = \alpha V dt + \sigma V dB_t, \quad (3.1)$$

dove B_t è un processo di Wiener, $\alpha \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$.

La natura stocastica di V indica che, mentre il valore attuale è noto, i valori futuri di V sono distribuiti log-normalmente con varianza che cresce linearmente rispetto all'orizzonte temporale e sono pertanto incerti. Denotiamo con $F(V)$ il valore dell'opportunità di investimento. Cerchiamo una legge che massimizzi questo valore.

Il profitto derivante dall'investire al tempo t è dato da $V_t - I$, vogliamo quindi massimizzare il valore attuale atteso $\mathbb{E}[(V_T - I)e^{-\rho T}]$, cioè:

$$F(V) = \max_T \mathbb{E}[(V_T - I)e^{-\rho T}]. \quad (3.2)$$

dove $\mathbb{E}[\cdot]$ denota l'operatore di speranza, T è il tempo futuro (sconosciuto) in cui l'investimento verrà effettuato, ρ è il tasso di sconto. Assumiamo, affinché questo problema abbia senso, che sia $\alpha < \rho$. Sia inoltre $\delta := \rho - \alpha > 0$.

Il problema è determinare il momento esatto in cui è ottimale investire I in cambio di un valore V . Poiché V evolve stocasticamente, non siamo in grado di determinare analiticamente un tempo T . La nostra regola di investimento prenderà la forma di un valore critico v^* tale che sarà ottimo investire quando $V_t \geq v^*$.

Il problema da risolvere può essere visto come un problema di arresto ottimale nel caso di non omogeneità temporale.

Assumiamo che la regione di continuazione sia

$$D = \{(s, v) : 0 < v < v^*\} \quad (3.3)$$

con $v^* > 0$. Il valore atteso $f(s, v) = \mathbb{E}[(v - I)e^{-\rho s}]$ è soluzione del problema al bordo

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial s}(s, v) + (\rho - \delta)v \frac{\partial f}{\partial v}(s, v) + \frac{1}{2}\sigma^2 v^2 \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}(s, v) = 0 & \text{per } (s, v) \in D \\ f(s, 0) = 0 & \text{per ogni } s \\ f(s, v^*) = e^{-\rho s} (v^* - I) & \text{per ogni } s \\ \frac{\partial f}{\partial v}(s, v^*) = e^{-\rho s} & \text{per ogni } s. \end{cases} \quad (3.4)$$

L'equazione $\frac{\partial f}{\partial s} + (\rho - \delta)v \frac{\partial f}{\partial v} + \frac{1}{2}\sigma^2 v^2 \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} = 0$ corrisponde all'operatore caratteristico di V nel caso non omogeneo, come visto in [1.62](#). La condizione $f(s, v)|_{v=0} = 0$ segue dal fatto che, essendo V un moto browniano geometrico,

se $V_0 = 0$ allora $V_t = V_0 e^{(\alpha - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma B_t} = 0 \quad \forall t > 0$ e pertanto l'opzione da investire non ha valore. Le ultime due condizioni derivano rispettivamente dal fatto che f e $\frac{\partial f}{\partial v}$ sono continue in v^* : la condizione $f(s, v)|_{v=v^*} = e^{-\rho s} (v^* - I)$ è detta "matching value", mentre $\frac{\partial f}{\partial v}(s, v)|_{v=v^*} = e^{-\rho s}$ è detta "smooth-pasting condition" e fornisce un'ulteriore condizione per determinare v^* che non è noto.

Se cerchiamo una soluzione del tipo

$$f(s, v) = e^{-\rho s} \phi(v)$$

allora possiamo ricondurci allo studio della seguente equazione differenziale ordinaria del secondo ordine

$$\frac{1}{2}\sigma^2 v^2 \phi''(v) + (\rho - \delta)v\phi'(v) - \rho\phi(v) = 0, \quad v < v^*. \quad (3.5)$$

Vogliamo ora trovare una funzione $\phi(v)$ ed un numero reale v^* tali da soddisfare (3.5). $\phi(v)$ deve inoltre soddisfare le seguenti tre condizioni, ricavate rispettivamente dalle precedenti (3.4),

$$\begin{aligned} \phi(0) &= 0 \\ \phi(v^*) &= v^* - I \\ \phi'(v^*) &= 1. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Consideriamo l'equazione caratteristica di (3.5) data da

$$\gamma^2 + \left(2 \frac{\rho - \delta}{\sigma^2} - 1\right) \gamma - \frac{2\rho}{\sigma^2} = 0$$

da cui ricaviamo le due soluzioni

$$\gamma_i = \frac{1}{2} - \frac{\rho - \delta}{\sigma^2} \pm \sqrt{\left[\frac{\rho - \delta}{\sigma^2} - \frac{1}{2}\right]^2 + \frac{2\rho}{\sigma^2}} \quad (i = 1, 2), \gamma_2 < 0 < \gamma_1.$$

Poiché $\gamma_1 \neq \gamma_2$ la soluzione generale di (3.5) è del tipo

$$\phi(v) = C_1 v^{\gamma_1} + C_2 v^{\gamma_2}$$

dove C_1, C_2 sono due costanti arbitrarie e γ_1, γ_2 sono come sopra. Poiché $\phi(v)$ è limitata, per $v \rightarrow 0$ abbiamo che $C_2 = 0$. Dalla terza condizione di (3.6) ricaviamo che $C_1 \gamma_1 (v^*)^{\gamma_1} = 1$ cioè

$$v^* = \left(\frac{1}{\gamma_1 C_1}\right)^{1-\gamma_1}. \quad (3.7)$$

Dalla seconda condizione di (3.6) otteniamo che

$$C_1 = (v^*)^{-\gamma_1} (v^* - I). \quad (3.8)$$

Combinando (3.7) e (3.8) nella terza condizione al bordo di (3.6) otteniamo che

$$\begin{aligned} \frac{v^* - I}{(v^*)^{\gamma_1}} \gamma_1 (v^*)^{\gamma_1 - 1} &= 1, \\ (1 - (v^*)^{-1} I) \gamma_1 &= 1 \end{aligned}$$

da cui

$$v^* = \frac{\gamma_1}{\gamma_1 - 1} I. \quad (3.9)$$

Quindi una soluzione candidata del problema (3.2) è data da

$$f(s, v) = \begin{cases} e^{-\rho s} A v^\beta & \text{se } 0 < v < v^* \\ e^{-\rho s} (v - I) & \text{se } v \geq v^* \end{cases} \quad (3.10)$$

dove

$$\begin{aligned} \beta = \gamma_1 = \frac{1}{2} - \frac{\rho - \delta}{\sigma^2} + \sqrt{\left[\frac{\rho - \delta}{\sigma^2} - \frac{1}{2} \right]^2 + \frac{2\rho}{\sigma^2}} > 1 \\ v^* = \frac{\beta}{\beta - 1} I, \quad A = C_1 = \frac{v^* - I}{(v^*)^\beta}. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Per il teorema sulla disequazione variazionale (1.6.9) possiamo concludere che $f = F^*$ con $F^*(V) = \mathbb{E} [(V_{\tau^*} - I)e^{-\rho\tau^*}]$ ed il tempo di arresto $\tau^* = \tau_D$ (tempo di prima uscita da D) è ottimale.

Il problema di valutare un'opzione reale può essere formulato come un problema di arresto ottimale in quanto consiste nel massimizzare il profitto di un'opzione nel minor tempo possibile.

Introduciamo il problema di controllo ottimo. Siano $b : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \times U \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $\sigma : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \times U \rightarrow \mathbb{R}^{n \times m}$, con $U \subset \mathbb{R}^k$, due funzioni assegnate. Per un dato punto $x_0 \in \mathbb{R}^n$ possiamo considerare la seguente equazione differenziale stocastica "controllata":

$$dX_t = b(t, X_t, u_t) dt + \sigma(t, X_t, u_t) dB_t, \quad X_0 = x_0 \quad (3.12)$$

dove X_t è un processo n -dimensionale detto processo di stato, B è un processo di Wiener m -dimensionale ed $u_t \in U$ è il processo di controllo k -dimensionale, scelto in ogni istante t appositamente per controllare X . Affinché il processo di controllo u sia adattato al processo X , ossia al tempo t il valore u_t del processo di controllo dipenda solo dai valori passati di X , basta scegliere una funzione deterministica $u(t, x)$:

$$\begin{aligned} \mathbf{u} : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}^k \\ (t, X_t) &\mapsto u_t = \mathbf{u}(t, X_t). \end{aligned}$$

Pertanto fissato un controllo $\mathbf{u}(t, x)$ si ha

$$dX_t = b(t, X_t, \mathbf{u}(t, X_t)) dt + \sigma(t, X_t, \mathbf{u}(t, X_t)) dB_t. \quad (3.13)$$

Definiamo la classe dei controlli ammissibili come segue:

Definizione 3.4. Un controllo \mathbf{u} è detto ammissibile se

- $\mathbf{u}(t, x) \in U \quad \forall t \in \mathbb{R}_+ \text{ e } \forall x \in \mathbb{R}^n.$

- Per ogni condizione iniziale (t, x) data, l'equazione differenziale stocastica

$$\begin{aligned} dX_s &= b(s, X_s, \mathbf{u}(s, X_s)) ds + \sigma(s, X_s, \mathbf{u}(s, X_s)) dB_s \\ X_t &= x. \end{aligned}$$

ha un'unica soluzione.

Definiamo con \mathcal{U} la classe dei controlli ammissibili.

Consideriamo le seguenti funzioni

$$\begin{aligned} F &: \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R} \\ \Phi &: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Definiamo la funzione $\mathcal{J}_0 : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ tale che

$$\mathcal{J}_0(\mathbf{u}) = \mathbb{E} \left[\int_0^T F(t, X_t^{\mathbf{u}}, \mathbf{u}_t) dt + \Phi(X_T^{\mathbf{u}}) \right]$$

dove $X_t^{\mathbf{u}}$ è la soluzione di (3.13) con condizione iniziale $X_0 = x_0$.

Definiamo il valore ottimo come

$$\hat{\mathcal{J}}_0 = \sup_{\mathbf{u} \in \mathcal{U}} \mathcal{J}_0(\mathbf{u}).$$

Il problema diventa determinare il numero $\hat{\mathcal{J}}_0$ ed un controllo \mathbf{u}^* tale che $\mathcal{J}_0(\mathbf{u}^*) = \hat{\mathcal{J}}_0$. Se questo controllo \mathbf{u}^* esiste è chiamato controllo ottimo e $\hat{\mathcal{J}}_0$ è detta funzione valore.

Supponiamo che esista un controllo ottimo e ci poniamo il problema di determinarlo. Il metodo di cui ci occupiamo è quello della programmazione dinamica. L'idea sottostante è quella di incorporare il nostro problema originario in una classe più ampia di problemi e studiare un'equazione alle derivate parziali detta equazione di Hamilton Jacobi Bellman (HJB). Il problema di controllo diviene poi equivalente al problema di trovare una soluzione all'equazione HJB. Descriviamo ora la procedura e fissiamo un tempo t , con $0 \leq t \leq T$. Inoltre fissiamo un punto nello spazio degli stati $x \in \mathbb{R}^n$. Per (t, x) scelti definiamo il seguente problema.

Definizione 3.5. Definiamo il problema di controllo ottimo $\mathcal{P}(t, x)$ come il problema di massimizzare

$$\mathcal{J}(t, x, \mathbf{u}) = \mathbb{E}_{t,x} \left[\int_t^T F(s, X_s^{\mathbf{u}}, \mathbf{u}_s) ds + \Phi(X_T^{\mathbf{u}}) \right]$$

dove $\mathcal{J} : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \times \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ è detta funzione valore, data la dinamica

$$\begin{aligned} dX_s^{\mathbf{u}} &= b(s, X_s^{\mathbf{u}}, \mathbf{u}(s, X_s^{\mathbf{u}})) ds + \sigma(s, X_s^{\mathbf{u}}, \mathbf{u}(s, X_s^{\mathbf{u}})) dB_s \\ X_t &= x, \end{aligned}$$

con $\mathbf{u}(s, y) \in U, \quad \forall (s, y) \in [t, T] \times \mathbb{R}^n$.

Definizione 3.6. Definiamo funzione valore ottimale la seguente funzione $V : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ tale che

$$V(t, x) = \sup_{\mathbf{u} \in \mathcal{U}} \mathcal{J}(t, x, \mathbf{u}).$$

$\mathcal{J}(t, x, \mathbf{u})$ è l'utilità attesa data dall'utilizzo del controllo \mathbf{u} nell'intervallo di tempo $[t, T]$, dato il fatto che al tempo t lo stato iniziale si trova in x . La funzione valore ottimale restituisce l'utilità attesa ottimale nell'intervallo $[t, T]$ sotto le stesse condizioni iniziali.

Teorema 3.4.1 (Equazione di Hamilton-Jacobi-Bellman). *Assumiamo che*

- la funzione valore ottimale V sia di classe $C^{1,2}$,
- esiste un controllo ottimo \mathbf{u}^*

Allora

1. V soddisfa l'equazione di HJB

$$\begin{cases} \frac{\partial V}{\partial t}(t, x) + \sup_{u \in U} \{F(t, x, u) + A^u V(t, x)\} = 0, & \forall (t, x) \in (0, T) \times \mathbb{R}^n \\ V(T, x) = \Phi(x), & \forall x \in \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

dove A^u è il generatore infinitesimale di X .

2. Per ogni $(t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^n$ il sup nell'equazione HJB sopra si ottiene per $u = \mathbf{u}^*(t, x)$.

Ora fissiamo l'intervallo temporale $[0, T]$ e un dominio $D \subseteq [0, T] \times \mathbb{R}^n$. Definiamo quindi un tempo di arresto τ nel seguente modo

$$\tau = \inf\{t \geq 0 \mid (t, X_t) \in \partial D\} \wedge T.$$

Sia inoltre $\Phi : \partial D \rightarrow \mathbb{R}$. Il problema di controllo ottimo diviene quello di massimizzare

$$\mathbb{E} \left[\int_0^\tau F(s, X_s^{\mathbf{u}}, \mathbf{u}_s) ds + \Phi(\tau, X_\tau^{\mathbf{u}}) \right],$$

ricordando che $X_0 \in D$. Quando lo stato incontra ∂D allora termina l'attività e riceviamo $\Phi(\tau, X_\tau)$.

Anche in questo caso abbiamo l'equazione di HJB:

Teorema 3.4.2. *Assumiamo che*

- la funzione valore ottimale V sia di classe $C^{1,2}$,
- esiste un controllo ottimo \mathbf{u}^*

Allora

1. V soddisfa l'equazione di HJB

$$\begin{cases} \frac{\partial V}{\partial t}(t, x) + \sup_{u \in U} \{F(t, x, u) + A^u V(t, x)\} = 0, & \forall (t, x) \in D \\ V(t, x) = \Phi(t, x), & \forall (t, x) \in \partial D. \end{cases}$$

dove A^u è il generatore infinitesimale di X .

2. Per ogni $(t, x) \in D$ il sup nell'equazione HJB sopra si ottiene per $u = \mathbf{u}^*(t, x)$.

3.4.2 Caso a tempo discreto

In questa sezione vediamo in cosa consiste il problema di investimento di cui ci occuperemo.

L'approccio che utilizzeremo nel nostro studio sarà un'ottimizzazione delle decisioni di investimento in presenza di incertezza, con l'utilizzo della programmazione dinamica. La programmazione dinamica compara il risultato atteso dall'investire in un progetto nell'anno corrente con un'alternativa (“valore di continuazione”) che ritarda l'investimento fino al momento ottimo. Il calcolo del valore di continuazione richiede che il problema sia risolto dall'ultimo anno dello scenario, all'indietro fino al primo anno, per dedurre la regola ottima di investimento su tutto l'orizzonte di investimento possibile. Se l'orizzonte di pianificazione è finito, l'ultima decisione al suo termine non è seguita da nessun'altra decisione, pertanto può essere dedotta utilizzando i metodi standard di ottimizzazione statica. Questa soluzione poi fornisce la funzione di valutazione appropriata per la penultima decisione, che a sua volta è utilizzata per la decisione a due passi dalla fine e così via lavorando all'indietro. Se l'orizzonte è invece infinito, si semplifica il problema attraverso la ricorsione: ogni decisione è collegata ad un altro problema che assomiglia esattamente al problema originario. Questo non solo facilita il calcolo, ma permette di ottenere una caratterizzazione teorica della soluzione e qualche volta anche una soluzione analitica.

Prima di tutto diamo una prospettiva generale del problema decisionale che studieremo. Siano

- x_t lo stato del sistema attuale;
- u_t l'azione (o variabile controllo) che si sceglie di intraprendere nell'anno t .

Ad ogni periodo, il valore attuale della variabile di stato x_t è noto, a differenza dei suoi valori futuri x_{t+1}, x_{t+2}, \dots che sono invece variabili aleatorie. Ad ogni periodo si possono intraprendere determinate azioni, e questo viene rappresentato appunto da una variabile di controllo, che come abbiamo definito prima, è u_t . Nell'esempio in cui l'unica scelta è investire immediatamente o aspettare, u è una variabile scalare binaria (0 rappresenta l'attesa mentre 1 l'investimento

immediato). Lo stato ed il controllo al tempo t influenzano il flusso di profitto immediato, che denotiamo con $\pi_t(x_t, u_t)$. Il fattore di sconto tra due periodi è $\frac{1}{1+\rho}$ dove ρ è il tasso di attualizzazione.

Ricordando quanto detto sui problemi di controllo ottimo, l'obiettivo è scegliere la sequenza di controllo $\{u_t\}$ che massimizza il valore attuale netto atteso dei profitti. Denotiamo con $\Omega_T(x_T)$ la funzione di profitto finale. Le due scelte alternative di fronte a cui ci troviamo sono: esercizio immediato dell'opzione o attesa.

Supponiamo che l'attuale data sia t e lo stato attuale x_t . Denotiamo con $F_t(x_t)$ l'esito (il valore attuale netto atteso di tutti i flussi di cassa dell'impresa) quando le decisioni vengono prese in maniera ottima. Quando viene scelto il controllo u_t , si genera un immediato flusso di profitto $\pi_t(x_t, u_t)$. Al periodo successivo $t + 1$, lo stato sarà x_{t+1} . La decisione ottimale da ora in poi sarà fornita, nella notazione stabilita in precedenza, da $F_{t+1}(x_{t+1})$. Questo valore è sconosciuto all'istante t , così consideriamo il suo valore atteso $\mathbb{E}_t[F_{t+1}(x_{t+1})]$, detto valore di continuazione, con $\mathbb{E}_t[\cdot]$ operatore di speranza matematica condizionata all'informazione disponibile al tempo t . Attualizzando a t , la somma del profitto immediato e del valore di continuazione è

$$\pi_t(x_t, u_t) + \frac{1}{1+\rho} \mathbb{E}_t[F_{t+1}(x_{t+1})].$$

Sarà scelta la strategia u_t che massimizzerà questo valore, e il risultato ottenuto corrisponderà al valore $F_t(x_t)$. Pertanto, la decisione ottima in ogni anno può essere ottenuta ricorsivamente risolvendo la seguente equazione di Bellman (o equazione fondamentale di ottimalità):

$$F_t(x_t) = \max_{u_t} \left\{ \pi_t(x_t, u_t) + \frac{1}{1+\rho} \mathbb{E}_t[F_{t+1}(x_{t+1})] \right\}.$$

Se il nostro problema ha un orizzonte temporale finito e fissato T , possiamo similmente partire dalla fine e lavorare all'indietro. Alla data finale verrà generato il profitto finale $\Omega_T(x_T)$; nel periodo precedente invece otteniamo:

$$F_{T-1}(x_{T-1}) = \max_{u_{T-1}} \left\{ \pi_{T-1}(x_{T-1}, u_{T-1}) + \frac{1}{1+\rho} \mathbb{E}_{T-1}[\Omega_T(x_T)] \right\}.$$

Quindi conosciamo la funzione valore in $T - 1$, che a sua volta ci permette di risolvere il problema di massimizzazione per u_{T-2} , che porta alla funzione valore $F_{T-2}(x_{T-2})$, e così via. Poiché il valore di continuazione richiede il calcolo del valore atteso condizionato, uno dei metodi che si può utilizzare per calcolarlo è la simulazione Monte Carlo.

Alla luce di quanto detto in precedenza, il problema dell'investitore, quindi, può essere formulato come un problema di controllo ottimale e ripetuto ricorsivamente, e l'utilizzo della programmazione dinamica è necessaria per determinare la strategia di investimento ottima $\{u_t\}_{t=1}^T$, dove T è l'orizzonte di pianificazione.

Vediamo ora il caso particolare dell'impresa che deve decidere se investire in un nuovo progetto o se ritardare l'investimento. Questo approccio può essere

descritto matematicamente come segue. Consideriamo un progetto con durata L che può essere irreversibilmente attuato in ogni anno t , ($t = 0, \dots, T$), per un esborso complessivo di K . Il flusso di cassa nell'anno t senza l'investimento è A_t , e il flusso di cassa annuale con l'investimento è B_t . Poiché tali valori sono incerti, il valore del progetto dipenderà dal loro valore atteso.

Il valore attuale netto totale V_t^{inv} del progetto, se l'investimento prosegue nell'anno t , è dato da:

$$V_t^{inv} = \sum_{n=t}^{t+L} d(t, n) \mathbb{E}_t [B_n] - K$$

dove $d(t, n)$ denota il fattore di sconto applicato al tempo t ai flussi di cassa avvenuti al tempo n (con l'assunzione che $d(t, t) = 1$).

Il valore di continuazione, che è il valore attuale netto del progetto, se si sceglie di non investire nel progetto al tempo t (ma assumendo che l'opportunità di investimento ottimale dipenda da condizioni future), è dato da:

$$V_t^{con} = A_t + d(t, t+1) \mathbb{E}_t [V_{t+1}^*]$$

dove V^* è il valore attuale netto ottimo dei flussi di cassa del progetto dall'anno $t+1$ fino alla durata finale del progetto, sotto l'ipotesi del comportamento ottimo di investimento.

La relazione di ottimo di investimento negli anni futuri richiede il confronto tra V_t^{inv} e V_t^{con} in ogni anno futuro

$$\begin{aligned} V_t^* &= \max \{ V_t^{inv}, V_t^{con} \} = \\ &= \max \left\{ \sum_{n=t}^{t+L} d(t, n) \mathbb{E}_t [B_n] - K ; A_t + d(t, t+1) \mathbb{E}_t [V_{t+1}^*] \right\}. \end{aligned}$$

La decisione ottima dell'impresa consisterà quindi in quella scelta che massimizzerà questo valore attuale netto.

Dal momento che il valore di continuazione dipende sempre dal valore atteso totale del progetto nell'anno seguente, questa procedura deve essere risolta all'indietro. L'ultimo tempo possibile per investire è T , in cui si assume che la decisione sia del tipo "ora o mai più". Nell'anno T , V^{inv} diviene il valore atteso del progetto durante la sua vita

$$\begin{aligned} V_T^{inv} &= d(T, T) \mathbb{E}_T [B_T] - K = \\ &= B_T - K \end{aligned} \tag{3.14}$$

e V_T^{con} è zero (poiché non vi è un'ulteriore opportunità di investire oltre quella data). Nell'anno T il comportamento ottimo è dato da

$$V_T^* = \max \{ V_T^{inv}; 0 \}. \tag{3.15}$$

L'investimento può perciò essere effettuato nell'anno T se $V_T^{inv} > 0$.

Dalla prospettiva dell'anno $T - 1$, la decisione nell'anno T dipenderà dai cambiamenti casuali delle variabili nell'anno intermedio. Perciò il valore di continuazione si baserà sulle aspettative dell'anno $T - 1$ che denotiamo con $\mathbb{E}_{T-1}[\cdot]$. Nell'anno $T - 1$, il valore di continuazione diviene il reddito dell'anno attuale A_{T-1} più il valore scontato del valore atteso del progetto, dato il risultato atteso della decisione dell'anno T , e l'attuale stato di informazioni dell'anno $T - 1$. Cioè

$$V_{T-1}^{con} = A_{T-1} + d(T-1, T) \mathbb{E}_{T-1} [\max \{V_T^{inv}, 0\}].$$

Una volta calcolato il valore di continuazione relativo all'anno $T - 1$, si ha un valore minimo che V_{T-1}^{inv} deve superare in modo che l'investimento vada avanti in quell'anno. Ciò fornisce una regola di investimento ottima per l'anno $T - 1$ date le aspettative su come i prezzi evolveranno nel periodo intercorrente. Dopo aver ottenuto il comportamento di investimento ottimo per l'anno $T - 1$, la stessa procedura può essere riutilizzata per calcolare la regola di investimento ottima per i periodi $T - 2, T - 3, \dots, 1$. Pertanto lavorando all'indietro nel tempo, possiamo dedurre il comportamento ottimo di investimento per ogni anno nel periodo $t = 0, \dots, T$.

I processi stocastici dei prezzi sono scelti in modo che i valori futuri attesi per le variabili possono essere determinati dai loro valori attuali. Questo significa che i rendimenti totali attesi lungo tutta la durata del progetto possono essere determinati dai valori attuali delle variabili stocastiche. La regola ottima di investimento in un dato anno esprime un livello minimo che i rendimenti annuali devono superare (dati i prezzi in questo anno e l'implicazione dei prezzi per i rendimenti futuri attesi) in modo che l'investimento proceda. In altre parole, il comportamento ottimo di investimento stabilisce i minimi rendimenti del progetto richiesti per giustificare l'investimento immediato piuttosto che l'attesa.

Capitolo 4

Struttura del modello

Consideriamo un'unica impresa che produce energia ed opera in un mercato soggetto a concorrenza perfetta. Assumiamo per semplicità che l'impresa sia neutrale al rischio. Al fine di conformarsi al sistema di scambio di emissioni deve ottenere i permessi di emissione che coprano le esigenze produttive. A tal proposito l'impresa deve pagare il prezzo di mercato per le emissioni di CO_2 alla fine di ogni periodo. Assumiamo, quindi, che l'azienda acquisti i certificati di emissione di CO_2 necessari, al termine di ogni periodo di conformità; questo assicura che l'impresa non detenga certificati in eccesso che dovrebbe poi vendere di nuovo al mercato.

4.1 Il problema decisionale

Questa impresa possiede contratti a lungo termine, già esistenti, per la fornitura di una quantità fissa di elettricità in ogni periodo (carico di base) e desidera sostituire una vecchia centrale elettrica ad elevata emissione di CO_2 , con una più recente. La decisione di investimento deve essere effettuata entro un orizzonte temporale fissato (la vita residua della centrale esistente a cui va sottratto il tempo di costruzione delle tecnologie sostitutive disponibili).

La centrale esistente utilizza un impianto di combustione a carbone ad elevate emissioni di CO_2 . Per la nuova centrale, l'impresa può investire nuovamente in un tale impianto o può scegliere una tecnologia con minori emissioni di CO_2 .

La compagnia guadagna flussi di cassa dall'impianto a carbone esistente fino a quando non viene attivata la nuova centrale (nel momento in cui la nuova centrale viene messa in funzione, la vecchia è chiusa). L'investimento nel nuovo impianto è associato ai costi di investimento che maturano linearmente nel tempo di costruzione. Sia l'ammontare dell'investimento, sia il tempo di costruzione, differiscono in base alla tecnologia scelta. Una volta completata la costruzione della nuova tecnologia, questa viene attivata e l'impresa inizia ad ottenere flussi di cassa da essa. Assumiamo che l'impresa faccia funzionare il suo nuovo im-

pianto fino alla fine dell'orizzonte del modello. Un'eccezione alla regola è data dalla decisione dell'impresa di non rimpiazzare la centrale elettrica in funzione, perché né l'impianto a carbone né l'impianto alternativo forniscono un VAN positivo. In questo caso l'impresa chiude l'investimento. Ricapitolando, l'impresa attualmente gestisce una centrale elettrica basata su una tecnologia "sporca" (D) con vita residua L^{D*} . Questa tecnologia è basata sulle elevate emissioni di CO_2 per unità di produzione, portando l'impresa a confrontarsi con elevati prezzi di conformità imposti dal sistema di scambio delle emissioni. L'impresa deve prendere una decisione sulla sostituzione della centrale attualmente in funzione prima della fine della sua vita economica. In particolare, l'impresa può scegliere una delle quattro possibili azioni, da intraprendere all'inizio di ogni periodo, modellate a tempo discreto:

- (i) aspettare;
- (ii) interrompere le attività;
- (iii) rimpiazzare la centrale elettrica esistente con una nuova che utilizza la medesima tecnologia D ;
- (iv) rimpiazzare la centrale elettrica esistente con una nuova che utilizza una tecnologia "pulita" (C).

Ogni singola scelta comporta delle conseguenze differenti. Decidere di aspettare significa rimandare la decisione di investimento all'anno successivo ed intanto continuare a produrre con la tecnologia esistente. Se l'impresa sceglie l'opzione (ii), questo disinvestimento è associato a dei costi (come lo smontaggio della centrale elettrica, la cessazione dei contratti) e ricavi (come la vendita della vecchia centrale e/o del terreno su cui è costruita) che supponiamo sommino a zero, con flussi di cassa nulli in ogni periodo successivo¹. Se invece opta per la terza o quarta opzione, si confronta con un costo di investimento dipendente dalla tecnologia scelta

$$Inv^\theta, \text{ con } \theta \in \{C, D\},$$

dove θ indica appunto la tecnologia.

Il costo dell'investimento è distribuito uniformemente nel tempo di costruzione che dipende dalla tecnologia dell'impianto

$$l^\theta, \text{ con } \theta \in \{C, D\}.$$

Durante questo periodo di costruzione, l'impianto attuale continua ad essere operativo, producendo flussi di cassa CF_t^D in ogni periodo. Dopo la costruzione, la vecchia centrale cessa la sua attività con i vecchi ricavi e costi a zero, mentre il nuovo impianto inizia a fruttare il flusso di cassa

¹Includiamo questa opzione per completezza del modello e analizziamo la decisione di sostituzione di questa centrale ignorando eventuali effetti che potrebbe avere sulle altre attività dell'impresa.

$$CF_t^\theta, \text{ con } \theta \in \{C, D\},$$

in ogni periodo della sua vita L^θ ².

Sottolineiamo il fatto che mentre le decisioni vengono spesso prese all'inizio di un periodo, i flussi di cassa maturano alla fine.

Fatta eccezione al caso in cui l'impresa decide, irreversibilmente, di interrompere l'attività, richiediamo che essa abbia esattamente un solo impianto in funzione in ogni tempo, cioè non vi può essere divario tra la fine dell'attività della centrale attuale e la fine del tempo di costruzione del nuovo impianto, inoltre la vecchia e la nuova centrale non possono funzionare simultaneamente. L'oggetto della nostra analisi è la decisione di rimpiazzare l'impianto attualmente operativo, quindi possiamo definire

$$T = L^{D^*} - \max_\theta \{l^\theta\}$$

e consideriamo $[1, T]$ come l'orizzonte di decisione dell'investimento. Questo è l'intervallo temporale durante il quale l'impresa ha l'opportunità di scegliere liberamente tra le precedenti opzioni. Nell'eventualità che la scelta avvenga oltre T , l'impresa non potrebbe più scegliere liberamente tra le tecnologie D e C se volesse soddisfare al requisito di possedere un impianto funzionante in ogni periodo.

Richiediamo che la decisione dell'impresa sia irreversibile per tutto l'orizzonte temporale del modello. In altre parole, se l'impresa decidesse di costruire il nuovo impianto di tecnologia θ , dovrebbe poi tenere attivo questo impianto (e questa tecnologia) fino a dopo la fine dell'orizzonte del modello

$$H < \min_\theta \{l^\theta + L^\theta\}.$$

dove L^θ con $\theta \in \{C, D\}$ rappresenta la vita dell'impianto della tecnologia scelta. Se l'impresa decidesse di cessare l'attività, non potrebbe mai riprendere gli affari.

Ricordando che T è l'orizzonte decisionale e H l'orizzonte del modello, possiamo dire che $T \leq H$.

Introducendo nella nostra analisi un prezzo minimo per i certificati di emissione di CO_2 , ci chiediamo:

1. se l'impianto esistente venga sostituito oppure no;
2. quale tecnologia venga scelta nel caso l'impianto esistente sia rimpiazzato;
3. in quale tempo t^* (se mai accadesse), l'impianto "sporco" venga rimpiazzato in maniera ottima da quello "pulito".

4.2 Prezzo come processo stocastico

Consideriamo le seguenti variabili:

²Modelliamo la tecnologia "sporca" D come statica, nel senso che i flussi di cassa della nuova centrale elettrica D seguono gli stessi processi stocastici dell'attuale centrale.

- P_t è il prezzo dei certificati di emissione di CO₂;
- PE_t è il prezzo che l'impresa riceve dalla vendita dell'elettricità;
- VC_t^θ è il costo variabile a seconda della tecnologia specificata (costi di gestione, di manutenzione e del combustibile).

Assumiamo che tali prezzi siano stocastici. Questo significa che, in ogni dato anno del periodo considerato, le aspettative dei valori futuri di queste variabili possono cambiare in accordo con il loro valore attuale che presenta degli elementi di casualità.

Assumiamo che il prezzo dei permessi di emissione di CO₂ segua un moto browniano geometrico³, e sia modellato da due componenti, quali un termine di deriva atteso ed un moto browniano:

$$dP_t = \mu_P P_t dt + \sigma_P P_t dB_t$$

dove μ_P è il tasso di rendimento, σ_P è volatilità, B è un processo di Wiener. Utilizziamo il medesimo processo sottostante, sebbene con differenti parametri, per le restanti variabili.

Ogni realizzazione di questi processi è discretizzata, partendo da valore fisso al tempo $t = 0$, ed è poi simulata per l'intero orizzonte temporale H . Da quanto assunto in precedenza, supponiamo che la variabile dei prezzi

$$\mathbf{X}_t = \left(P_t \quad PE_t \quad VC_t^D \quad VC_t^C \right)^T$$

segua un moto browniano geometrico multidimensionale:

$$d \ln \mathbf{X}_t = (\mathbf{m} \cdot dt + \text{diag}(\boldsymbol{\sigma}) \cdot d\mathbf{B}_t) \quad (4.1)$$

dove

- la matrice di deriva

$$\mathbf{m} = \left(m_P \quad m_{PE} \quad m_{VC^D} \quad m_{VC^C} \right)^T$$

contiene i tassi di crescita attesi, continui e composti, delle variabili presenti in $\ln \mathbf{X}_t$, cioè

$$\begin{aligned} m_P &= \mu_P - \frac{1}{2}\sigma_P^2, \\ m_{PE} &= \mu_{PE} - \frac{1}{2}\sigma_{PE}^2, \\ m_{VC^D} &= \mu_{VC^D} - \frac{1}{2}\sigma_{VC^D}^2, \\ m_{VC^C} &= \mu_{VC^C} - \frac{1}{2}\sigma_{VC^C}^2, \end{aligned}$$

³Abbiamo scelto il moto browniano geometrico per semplicità di modellazione. La forma specifica del processo stocastico non è centrale nella nostra analisi. È comunque possibile introdurre altri processi stocastici nel modello.

- la matrice di dispersione

$$\boldsymbol{\sigma} = \left(\sigma_P \quad \sigma_{PE} \quad \sigma_{VCD} \quad \sigma_{VCC} \right)^T$$

contiene le volatilità,

- $\text{diag}(\boldsymbol{\sigma})$ è una matrice diagonale 4×4 formata dagli elementi di $\boldsymbol{\sigma}$ come diagonale principale,
- \mathbf{B}_t è un processo di Wiener 4-dimensionale le cui componenti sono processi di Wiener correlati secondo la seguente matrice:

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 1 & \rho_{P,PE} & \rho_{P,VCD} & \rho_{P,VCC} \\ \rho_{P,PE} & 1 & \rho_{PE,VCD} & \rho_{PE,VCC} \\ \rho_{P,VCD} & \rho_{VCD,PE} & 1 & \rho_{VCD,VCC} \\ \rho_{P,VCC} & \rho_{PE,VCC} & \rho_{VCD,VCC} & 1 \end{pmatrix}.$$

4.3 Procedura di ottimizzazione

Il problema di investimento decisionale della nostra impresa che opera in un ambiente di multiple incertezze può essere descritto al meglio, come detto in precedenza, dalle opzioni reali. La flessibilità gestionale di ottimizzare il tempo di investimento introduce un'asimmetria nel valore del progetto. Esercitando l'opzione per investire immediatamente o posticipando l'investimento, l'impresa può far uso del potenziale di rialzo limitando i rischi di ribasso. Per calcolare il valore di questa opzione si può utilizzare sia la tecnica dei contratti contingent⁴, sia la programmazione dinamica spiegata nel capitolo precedente. Il primo approccio è preferibile quando l'obiettivo è quello di esplicitare il valore di un'opzione, ed inoltre è migliore se assumiamo che i mercati siano completi. Per il nostro lavoro è di minore importanza il valore esplicito dell'opzione e l'assunzione della completezza dei mercati risulta essere alquanto problematica.

Per quanto riguarda i prezzi delle quote, le proiezioni a lungo termine dei prezzi sono fondamentali. Considerando il sistema di scambio di emissioni europeo, le fluttuazioni estreme del prezzo entro un lasso di tempo relativamente breve hanno rivelato, nel passato, molti aspetti del comportamento del prezzo ancora sconosciuti o perlomeno non compresi bene.

Oltre all'incertezza derivante dalle fluttuazioni del prezzo, i partecipanti in questo mercato si trovano ad affrontare considerevoli incertezze riguardanti la futura politica climatica.

Per questo motivo le proiezioni a lungo termine del prezzo potrebbero deviare fortemente da quelle implicite ricavate dall'estrapolazione da dati storici.

Alla luce di queste difficoltà applichiamo un'analisi dinamica dei flussi di cassa attualizzati, in un normale quadro di valutazione aggiustato per il rischio, per esaminare il problema decisionale di investimento imminente.

⁴Il contratto contingente è una formula contrattuale in condizioni di incertezza, che consente di coprirsi dai rischi e si basa sulla costruzione di un portafoglio replicante.

Il procedimento di decisione ottima di investimento in ogni tempo segue in linea di principio l'approccio di Longstaff e Schwartz⁵ che unisce le tecniche di programmazione dinamica all'indietro e le tecniche di simulazione in avanti, fornendo una procedura versatile anche per le variabili di stato multivariate. L'intuizione chiave dietro l'approccio di Longstaff e Schwartz è che il valore condizionato (aspettazione) dei pagamenti futuri può essere stimata dalle informazioni trasversali nella simulazione, utilizzando la tecnica dei minimi quadrati⁶. La nostra procedura di ottimizzazione avviene attraverso la simulazione Monte Carlo che è usata per generare cammini per le variabili di stato rilevanti (nel nostro caso sono rappresentate da $\mathbf{X} = (P \quad PE \quad VC^D \quad VC^C)^T$.)

Basandoci su queste simulazioni, l'algoritmo di programmazione dinamica confronta il risultato previsto dall'investire nell'impianto della nuova tecnologia C con il ritardare, anche per più di un periodo, la decisione di investimento, con la possibilità di reinvestire in un nuovo impianto a tecnologia D e con la possibilità di uscire immediatamente dall'investimento.

La decisione di esercizio ottimo in ogni istante temporale è ottenuta come il massimo tra il valore attuale netto dell'investimento immediato, la stima del valore attuale netto derivante dal ritardare la decisione, e zero nel caso si opti per abbandonare totalmente l'investimento. Poiché il valore di continuazione stimato dipende dai risultati futuri, la procedura deve lavorare all'indietro, cioè dal più lontano ($t = T$) al più vicino ($t = 1$) istante temporale possibile. Seguendo questa procedura, otteniamo, per ogni possibile percorso, la decisione ottima che consiste:

- nell'interrompere l'investimento in qualsiasi istante $t \in [1, T]$,
- oppure reinvestire nella tecnologia D al tempo $t \in [1, T]$,
- o investire nella tecnologia "pulita" in qualsiasi momento $t \in [1, T]$.

Calcoliamo il valore attuale netto relativo ad un investimento in un impianto al tempo t e per ogni percorso simulato $i \in [1, I]$:

⁵Il metodo di Longstaff e Schwartz è riportato nel Capitolo 1 alla sezione 1.7.1

⁶Longstaff e Schwartz modellano un'opzione americana che ha le seguenti caratteristiche: il sottostante non paga dividendi e vi sono solo due possibilità di scelta in ogni istante, cioè esercitare o meno l'opzione. Nel nostro esempio, gli investimenti generano flussi di cassa in ogni periodo e ci troviamo di fronte ad un triplice problema: continuare la produzione con la tecnologia esistente, investire nella nuova tecnologia o uscire del tutto dall'attività.

- (tempo discreto)

$$\begin{aligned}
 \text{VAN}_{t,i}^{\theta} = & \overbrace{\sum_{n=t+1}^{t+l^{\theta}} r(t,n) \cdot CF_{n,i}^D}^{(a)} - \overbrace{\sum_{n=t+1}^{t+l^{\theta}} r(t,n) \cdot \frac{Inv^{\theta}}{l^{\theta}}}^{(b)} \\
 & + \overbrace{\sum_{n=t+l^{\theta}+1}^H r(t,n) \cdot CF_{n,i}^{\theta}}^{(c)} \\
 & + \overbrace{r(t,H) \cdot \frac{L^{\theta} - (H - T - l^{\theta})}{L^{\theta}} \cdot Inv^{\theta}}^{(d)}
 \end{aligned} \tag{4.2}$$

dove $r(t, n)$ denota il fattore di attualizzazione applicato al tempo t ai flussi di cassa che si verificano al tempo n , cioè

$$r(t, n) = \frac{1}{(1+r)^{n-t}}$$

dove assumiamo che il tasso di interesse r sia costante, mentre $CF_{n,i}^{\theta}$ rappresenta il flusso di cassa al tempo t del percorso simulato i .

- (tempo continuo)

$$\begin{aligned}
 \text{VAN}_{t,i}^{\theta} = & \overbrace{\int_t^{t+l^{\theta}} e^{-r(s-t)} CF_{s,i}^D ds}^{(a)} - \overbrace{\int_t^{t+l^{\theta}} e^{-r(s-t)} \frac{Inv^{\theta}}{l^{\theta}} ds}^{(b)} \\
 & + \overbrace{\int_{t+l^{\theta}}^H e^{-r(s-t)} CF_{s,i}^{\theta} ds}^{(c)} \\
 & + \overbrace{e^{-r(H-t)} \frac{L^{\theta} - (H - T - l^{\theta})}{L^{\theta}} \cdot Inv^{\theta}}^{(d)}
 \end{aligned} \tag{4.3}$$

Consideriamo il flusso di cassa operativo (“OCF” o operating cash flow) cioè il flusso di cassa che un’impresa genera dalla produzione e dalla vendita dei propri beni e servizi, che è dato da

$$\text{OCF} = \text{EBIT} + \text{ammortamenti} - \text{imposte}$$

dove EBIT (earnings before interests and taxes) sono i guadagni prima degli interessi e delle tasse e sono calcolati come

$$\text{EBIT} = \text{ricavi} - \text{costi} - \text{ammortamenti},$$

mentre le imposte sono date da

$$\text{imposte} = \text{EBIT} \cdot \text{aliquota di imposta.}$$

Quindi avremo che

$$\begin{aligned} \text{OCF} &= \text{EBIT} (1 - \text{aliquota di imposta}) + \text{ammortamenti} \\ &= (\text{ricavi} - \text{costi}) (1 - \text{aliquota di imposta}) \\ &\quad + \text{aliquota di imposta} \cdot \text{ammortamenti.} \end{aligned}$$

Nel nostro caso abbiamo che il flusso di cassa $CF_{n,i}^\theta$ è definito nel seguente modo:

$$CF_{t,i}^\theta = (R_{t,i} - VC_{t,i}^\theta - CC_{t,i}^\theta - \frac{Inv^\theta}{L^\theta}) \cdot (1 - \tau) + \frac{Inv^\theta}{L^\theta} \quad (4.4)$$

dove

- $R_{t,i}$ è il ricavo (calcolato come produzione di energia elettrica in MWh per il prezzo dell'elettricità $PE_{t,i}$) al tempo t sul percorso simulato i ;
- $VC_{t,i}^\theta$ sono le variabili costo (calcolate come produzione elettrica (in MWh) per il fattore di costo variabile dipendente dalla tecnologia) per ognuna delle due tecnologie;
- $CC_{t,i}^\theta$ sono i costi di CO₂ (calcolati come le emissioni di CO₂ (in tonnellate) per il prezzo $P_{t,i}$ dei certificati di CO₂);
- $\frac{Inv^\theta}{L^\theta}$ è l'ammortamento per la centrale;
- τ è l'aliquota fiscale sulla società.

Indipendentemente dal tempo specifico in cui l'investimento "pulito" viene realizzato, per garantire la comparabilità, valutiamo consistentemente tutti i progetti di investimento sull'orizzonte del modello di H periodi. Il VAN ricavato dall'equazione (4.2) ed analogamente dall'equazione (4.3) è la somma di quattro termini:

- (a) è la somma scontata dei flussi di cassa derivanti dall'impianto di tecnologia D (esistente) durante il tempo di costruzione del nuovo impianto (D o C);
- (b) è l'esborso di investimento scontato (da cui il segno negativo), distribuito linearmente nel tempo di costruzione;
- (c) è la somma attualizzata dei flussi di cassa dell'impianto nell'intervallo temporale che va dalla fine della sua costruzione fino all'orizzonte temporale H del modello;
- (d) è il reddito, attualizzato, ricavato dalla vendita dell'impianto per il suo valore contabile al tempo $t = H$.

Poiché i valori attuali si ricavano dai dei flussi di cassa simulati, essi sono variabili aleatorie; pertanto dobbiamo calcolare il loro valore atteso. Per semplicità di calcolo utilizziamo la versione continua del VAN, ossia (4.3).

$$\begin{aligned}
\widehat{\text{VAN}}_{t,i}^\theta(R_{t,i}, VC_{t,i}^\theta, P_{t,i}) &:= \mathbb{E}_t[\text{VAN}_{t,i}^\theta | R_{t,i}, VC_{t,i}^\theta, P_{t,i}] \\
&= \mathbb{E}_t \left[\int_t^{t+l^\theta} e^{-r(s-t)} CF_{s,i}^D ds \right] - \mathbb{E}_t \left[\int_t^{t+l^\theta} e^{-r(s-t)} \frac{Inv^\theta}{l^\theta} ds \right] \\
&\quad + \mathbb{E}_t \left[\int_{t+l^\theta}^H e^{-r(s-t)} CF_{s,i}^\theta ds \right] + e^{-r(H-t)} \frac{L^\theta - (H-T-l^\theta)}{L^\theta} Inv^\theta \\
&= \int_t^{t+l^\theta} e^{-r(s-t)} \mathbb{E}_t [CF_{s,i}^D] ds - \frac{Inv^\theta}{l^\theta} \int_t^{t+l^\theta} e^{-r(s-t)} ds \\
&\quad + \int_{t+l^\theta}^H e^{-r(s-t)} \mathbb{E}_t [CF_{s,i}^\theta] ds + e^{-r(H-t)} \frac{L^\theta - (H-T-l^\theta)}{L^\theta} Inv^\theta \\
&= \int_t^{t+l^\theta} e^{-r(s-t)} \mathbb{E}_t \left[\left(R_{s,i} - VC_{s,i}^D - CC_{s,i}^D - \frac{Inv^D}{L^D} \right) (1-\tau) + \frac{Inv^D}{L^D} \right] ds \\
&\quad - \left(\frac{1 - e^{-rl^\theta}}{r} \right) \frac{Inv^\theta}{l^\theta} \\
&\quad + \int_{t+l^\theta}^H e^{-r(s-t)} \mathbb{E}_t \left[\left(R_{s,i} - VC_{s,i}^\theta - CC_{s,i}^\theta - \frac{Inv^\theta}{L^\theta} \right) (1-\tau) + \frac{Inv^\theta}{L^\theta} \right] ds \\
&\quad + e^{-r(H-t)} \frac{L^\theta - (H-T-l^\theta)}{L^\theta} Inv^\theta,
\end{aligned} \tag{4.5}$$

con $\theta \in \{D, C\}$.

Risolviamo prima il seguente valore atteso condizionato

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_t [CF_{s,i}^\theta] &= \mathbb{E}_t \left[\left(R_{s,i} - VC_{s,i}^\theta - CC_{s,i}^\theta - \frac{Inv^\theta}{L^\theta} \right) (1-\tau) + \frac{Inv^\theta}{L^\theta} \right] \\
&= \mathbb{E}_t [(cost PE_{s,i} - VC_{s,i}^\theta - cost_\theta P_{s,i})] (1-\tau) + \tau \frac{Inv^\theta}{L^\theta} \\
&= (cost \mathbb{E}_t [PE_{s,i}] - \mathbb{E}_t [VC_{s,i}^\theta] - cost_\theta \mathbb{E}_t [P_{s,i}]) (1-\tau) + \tau \frac{Inv^\theta}{L^\theta}
\end{aligned} \tag{4.6}$$

dove *cost* corrisponde alla produzione di energia elettrica in MWh e *cost_θ* corrisponde alle tonnellate di CO₂ emesse dalla tecnologia $\theta \in \{D, C\}$. Ricordando che le variabili di stato seguono tutte un moto browniano geometrico come visto

in (4.2) e considerando ad esempio il prezzo dell'elettricità, per $s > t$ abbiamo

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_t [PE_{s,i}] &= \mathbb{E}_t \left[PE_{t,i} e^{(\mu_{PE} - \frac{1}{2}\sigma_{PE}^2)(s-t) + \sigma_{PE}(B_s - B_t)} \right] \\
&= PE_{t,i} e^{(\mu_{PE} - \frac{1}{2}\sigma_{PE}^2)(s-t)} \mathbb{E}_t \left[e^{\sigma_{PE}(B_s - B_t)} \right] \\
&\stackrel{a)}{=} PE_{t,i} e^{(\mu_{PE} - \frac{1}{2}\sigma_{PE}^2)(s-t)} \mathbb{E} \left[e^{\sigma_{PE}(B_s - B_t)} \right] \\
&= PE_{t,i} e^{(\mu_{PE} - \frac{1}{2}\sigma_{PE}^2)(s-t)} e^{\frac{1}{2}\sigma_{PE}^2(s-t)} \\
&= PE_{t,i} e^{\mu_{PE}(s-t)}
\end{aligned} \tag{4.7}$$

dove in a) abbiamo utilizzato il fatto che $B_s - B_t$ è indipendente da \mathcal{F}_t . Analogo ragionamento va fatto per le variabili di stato VC^D e VC^C . Per $s > t$ vale

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_t [VC_{s,i}^D] &= VC_{t,i}^D e^{\mu_{VC^D}(s-t)} \\
\mathbb{E}_t [VC_{s,i}^C] &= VC_{t,i}^C e^{\mu_{VC^C}(s-t)}.
\end{aligned} \tag{4.8}$$

Invece i prezzi dei permessi di emissione di CO₂ sono titoli finanziari trattati e per questo motivo abbiamo che

- $\mathbb{E}_t^Q [P_{s,i}] = P_{t,i} e^{r(s-t)}$ dove $\mathbb{E}_t^Q [\cdot]$, è la speranza condizionata all'informazione disponibile al tempo t sotto una misura Q neutrale al rischio,

- $\mu_P = r$.

Quindi ritornando a (4.6) abbiamo che

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}_t \left[\left(R_{s,i} - VC_{s,i}^\theta - CC_{s,i}^\theta - \frac{Inv^\theta}{L^\theta} \right) (1 - \tau) + \frac{Inv^\theta}{L^\theta} \right] \\
&= \left(cost PE_{t,i} e^{\mu_{PE}(s-t)} - VC_{t,i}^\theta e^{\mu_{VC^\theta}(s-t)} - cost_\theta P_{t,i} e^{r(s-t)} \right) (1 - \tau) \\
&\quad + \tau \frac{Inv^\theta}{L^\theta}.
\end{aligned} \tag{4.9}$$

Utilizzando quanto appena visto, otteniamo

$$\begin{aligned}
 & \mathbb{E}_t \left[\int_t^{t+l^\theta} e^{-r(s-t)} CF_{s,i}^D ds \right] \\
 &= (1-\tau) \int_t^{t+l^\theta} e^{-r(s-t)} \left(cost PE_{t,i} e^{\mu_{PE}(s-t)} - VC_{t,i}^D e^{\mu_{VCD}(s-t)} \right. \\
 &\quad \left. - cost_D P_{t,i} e^{r(s-t)} \right) ds + \tau \frac{Inv^D}{LD} \int_t^{t+l^\theta} e^{-r(s-t)} ds \\
 &= (1-\tau) \left(cost PE_{t,i} e^{-(\mu_{PE}-r)t} \int_t^{t+l^\theta} e^{(\mu_{PE}-r)s} ds \right. \\
 &\quad \left. - VC_{t,i}^D e^{-(\mu_{VCD}-r)t} \int_t^{t+l^\theta} e^{(\mu_{VCD}-r)s} ds - cost_D P_{t,i} \int_t^{t+l^\theta} ds \right) \quad (4.10) \\
 &\quad + \tau \frac{Inv^D}{LD} \left(\frac{1 - e^{-rl^\theta}}{r} \right) \\
 &= (1-\tau) \left(cost PE_{t,i} \frac{e^{(\mu_{PE}-r)l^\theta} - 1}{\mu_{PE} - r} - cost_D P_{t,i} l^\theta \right. \\
 &\quad \left. - VC_{t,i}^D \frac{e^{(\mu_{VCD}-r)l^\theta} - 1}{\mu_{VCD} - r} \right) + \tau \frac{Inv^D}{LD} \left(\frac{1 - e^{-rl^\theta}}{r} \right)
 \end{aligned}$$

ed analogamente abbiamo

$$\begin{aligned}
 & \mathbb{E}_t \left[\int_{t+l^\theta}^H e^{-r(s-t)} CF_{s,i}^\theta ds \right] = \\
 &= (1-\tau) \left(cost PE_{t,i} e^{-(\mu_{PE}-r)t} \int_{t+l^\theta}^H e^{(\mu_{PE}-r)s} ds \right. \\
 &\quad \left. - VC_{t,i}^\theta e^{-(\mu_{VCD}-r)t} \int_{t+l^\theta}^H e^{(\mu_{VCD}-r)s} ds - cost_\theta P_{t,i} \int_{t+l^\theta}^H ds \right) \\
 &\quad + \tau \frac{Inv^\theta}{L^\theta} \left(\frac{e^{-rl^\theta} - e^{-r(H-t)}}{r} \right) \quad (4.11) \\
 &= (1-\tau) \left(cost PE_{t,i} \frac{e^{(\mu_{PE}-r)(H-t)} - e^{(\mu_{PE}-r)l^\theta}}{\mu_{PE} - r} \right. \\
 &\quad \left. - VC_{t,i}^\theta \frac{e^{(\mu_{VCD}-r)(H-t)} - e^{(\mu_{VCD}-r)l^\theta}}{\mu_{VCD} - r} - cost_\theta P_{t,i} (H - t - l^\theta) \right) \\
 &\quad + \tau \frac{Inv^\theta}{L^\theta} \left(\frac{e^{-rl^\theta} - e^{-r(H-t)}}{r} \right).
 \end{aligned}$$

Sostituendo quanto appena ottenuto nell'equazione (4.5), si ha che

$$\begin{aligned}
& \widehat{VAN}_{t,i}^\theta(R_{t,i}, VC_{t,i}^\theta, P_{t,i}) = \\
& = (1 - \tau) \left(cost_{PE_{t,i}} \frac{e^{(\mu_{PE}-r)l^\theta} - 1}{\mu_{PE} - r} - cost_D P_{t,i} l^\theta \right. \\
& \quad \left. - VC_{t,i}^D \frac{e^{(\mu_{VCD}-r)l^\theta} - 1}{\mu_{VCD} - r} \right) + \tau \frac{Inv^D}{L^D} \left(\frac{1 - e^{-rl^\theta}}{r} \right) \\
& \quad - \frac{Inv^\theta}{l^\theta} \left(\frac{1 - e^{-rl^\theta}}{r} \right) + (1 - \tau) \left(cost_{PE_{t,i}} \frac{e^{(\mu_{PE}-r)(H-t)} - e^{(\mu_{PE}-r)l^\theta}}{\mu_{PE} - r} \right. \\
& \quad \left. - VC_{t,i}^\theta \frac{e^{(\mu_{VCO}-r)(H-t)} - e^{(\mu_{VCO}-r)l^\theta}}{\mu_{VCO} - r} - cost_\theta P_{t,i} (H - t - l^\theta) \right) \\
& \quad + \tau \frac{Inv^\theta}{L^\theta} \left(\frac{e^{-rl^\theta} - e^{-r(H-t)}}{r} \right) + e^{-r(H-t)} \frac{L^\theta - (H - T - l^\theta)}{L^\theta} Inv^\theta \\
& = (1 - \tau) \left(cost_{PE_{t,i}} \frac{e^{(\mu_{PE}-r)(H-t)} - 1}{\mu_{PE} - r} - VC_{t,i}^D \frac{e^{(\mu_{VCD}-r)l^\theta} - 1}{\mu_{VCD} - r} \right. \\
& \quad \left. - VC_{t,i}^\theta \frac{e^{(\mu_{VCO}-r)(H-t)} - e^{(\mu_{VCO}-r)l^\theta}}{\mu_{VCO} - r} - cost_D P_{t,i} l^\theta \right. \\
& \quad \left. - cost_\theta P_{t,i} (H - t - l^\theta) \right) + \frac{1 - e^{-rl^\theta}}{r} \left(\tau \frac{Inv^D}{L^D} - \frac{Inv^\theta}{l^\theta} \right) \\
& \quad + \frac{\tau}{r} \frac{Inv^\theta}{L^\theta} e^{-rl^\theta} + e^{-r(H-t)} \frac{Inv^\theta}{L^\theta} \left[L^\theta - (H - T - l^\theta) - \frac{\tau}{r} \right] \\
& = (1 - \tau) \left(R_{t,i} \frac{e^{(\mu_{PE}-r)(H-t)} - 1}{\mu_{PE} - r} - CC_{t,i}^D l^\theta - CC_{t,i}^\theta (H - t - l^\theta) \right. \\
& \quad \left. - VC_{t,i}^D \frac{e^{(\mu_{VCD}-r)l^\theta} - 1}{\mu_{VCD} - r} - VC_{t,i}^\theta \frac{e^{(\mu_{VCO}-r)(H-t)} - e^{(\mu_{VCO}-r)l^\theta}}{\mu_{VCO} - r} \right) \\
& \quad + \frac{1 - e^{-rl^\theta}}{r} \left(\tau \frac{Inv^D}{L^D} - \frac{Inv^\theta}{l^\theta} \right) + \frac{\tau}{r} \frac{Inv^\theta}{L^\theta} e^{-rl^\theta} \\
& \quad + e^{-r(H-t)} \frac{Inv^\theta}{L^\theta} \left[L^\theta - (H - T - l^\theta) - \frac{\tau}{r} \right].
\end{aligned} \tag{4.12}$$

Se nel modello introduciamo un prezzo minimo P_t^{min} per il prezzo dei certificati di emissione di CO₂, allora all'equazione (4.9) dobbiamo aggiungere

$$\mathbb{E}_t \left[(P_s^{min} - P_{s,i})^+ \right]. \tag{4.13}$$

Cioè al calcolo del VAN dobbiamo aggiungere il prezzo di un'opzione put scritta sul prezzo P_t dei permessi di emissione, con prezzo di esercizio pari a P_t^{min} e con maturità $s \geq 0$. Il prezzo dell'opzione put al tempo $0 \leq t < s$, ricavato dalla formula di Black & Scholes, è dato da

$$prezzo_{t,i}^{PUT} = e^{-r(s-t)} P_s^{min} N(-d_2(s, P_s^{min})) - P_{t,i} N(-d_1(s, P_s^{min})) \tag{4.14}$$

dove

$$\begin{aligned} d_1(s, P_s^{min}) &= \left[\ln \left(\frac{P_{t,i}}{P_s^{min}} \right) + \left(r + \frac{\sigma_P^2}{2} \right) (s-t) \right] \cdot \frac{1}{\sigma_P \sqrt{s-t}}, \\ d_2(s, P_s^{min}) &= d_1(s, P_s^{min}) - \sigma_P \sqrt{s-t} \\ &= \left[\ln \left(\frac{P_{t,i}}{P_s^{min}} \right) + \left(r - \frac{\sigma_P^2}{2} \right) (s-t) \right] \cdot \frac{1}{\sigma_P \sqrt{s-t}} \end{aligned} \quad (4.15)$$

e $N(x)$ rappresenta la funzione di distribuzione cumulativa di una normale standard, cioè

$$N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{y^2}{2}} dy.$$

Calcoliamo ora

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}_t \left[\int_t^{t+l^\theta} e^{-r(s-t)} (P_s^{min} - P_{s,i})^+ ds \right] \\ &= \int_t^{t+l^\theta} e^{-r(s-t)} \mathbb{E}_t \left[(P_s^{min} - P_{s,i})^+ \right] ds = \int_t^{t+l^\theta} \text{prezzo}_{t,i}^{PUT} ds \\ &= \int_t^{t+l^\theta} \left(e^{-r(s-t)} P_s^{min} N(-d_2(s, P_s^{min})) - P_{t,i} N(-d_1(s, P_s^{min})) \right) ds \\ &= \int_t^{t+l^\theta} e^{-r(s-t)} P_s^{min} N(-d_2(s, P_s^{min})) ds - P_{t,i} \int_t^{t+l^\theta} N(-d_1(s, P_s^{min})) ds \end{aligned} \quad (4.16)$$

ed analogamente

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}_t \left[\int_{t+l^\theta}^H e^{-r(s-t)} (P_s^{min} - P_{s,i})^+ ds \right] = \int_{t+l^\theta}^H \text{prezzo}_{t,i}^{PUT} ds \\ &= \int_{t+l^\theta}^H e^{-r(s-t)} P_s^{min} N(-d_2(s, P_s^{min})) ds - P_{t,i} \int_{t+l^\theta}^H N(-d_1(s, P_s^{min})) ds. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Poiché la dipendenza da θ è presente solo in un estremo dei precedenti integrali, possiamo allora ricondurci al seguente calcolo

$$\begin{aligned} & \int_t^{t+l^\theta} \text{prezzo}_{t,i}^{PUT} ds + \int_{t+l^\theta}^H \text{prezzo}_{t,i}^{PUT} ds = \int_t^H \text{prezzo}_{t,i}^{PUT} ds \\ &= \int_t^H e^{-r(s-t)} P_s^{min} N(-d_2(s, P_s^{min})) ds - P_{t,i} \int_t^H N(-d_1(s, P_s^{min})) ds. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Distinguiamo due casi.

- Se P_s^{min} è costante, cioè $P_s^{min} = P^{min}$ per ogni $s \geq 0$, allora (4.18) diviene

$$\begin{aligned} \int_t^H \text{prezzo}_{t,i}^{PUT} ds &= P^{min} \int_t^H e^{-r(s-t)} N(-d_2(s)) ds \\ &\quad - P_{t,i} \int_t^H N(-d_1(s)) ds \end{aligned} \quad (4.19)$$

con

$$\begin{aligned} d_1(s) &= \left[\ln \left(\frac{P_{t,i}}{P^{min}} \right) + \left(r + \frac{\sigma_P^2}{2} \right) (s-t) \right] \cdot \frac{1}{\sigma_P \sqrt{s-t}}, \\ d_2(s) &= \left[\ln \left(\frac{P_{t,i}}{P^{min}} \right) + \left(r - \frac{\sigma_P^2}{2} \right) (s-t) \right] \cdot \frac{1}{\sigma_P \sqrt{s-t}}. \end{aligned} \quad (4.20)$$

- Supponiamo invece che P_s^{min} vari in ogni periodo secondo un incremento assoluto e sia P_0^{min} il prezzo minimo iniziale fissato, cioè per $s \geq 0$:

$$P_s^{min} = P_0^{min} + M^a \cdot s, \quad (4.21)$$

dove M^a è l'incremento assoluto, allora abbiamo che

$$\begin{aligned} \int_t^H \text{prezzo}_{t,i}^{PUT} ds &= P_0^{min} \int_t^H e^{-r(s-t)} N(-d_2(s, P_s^{min})) ds \\ &+ M^a \int_t^H e^{-r(s-t)} s N(-d_2(s, P_s^{min})) ds \\ &- P_{t,i} \int_t^H N(-d_1(s, P_s^{min})) ds \end{aligned} \quad (4.22)$$

con

$$\begin{aligned} d_1(s, P_s^{min}) &= \left[\ln \left(\frac{P_{t,i}}{P_0^{min} + sM^a} \right) + \left(r + \frac{\sigma_P^2}{2} \right) (s-t) \right] \cdot \frac{1}{\sigma_P \sqrt{s-t}}, \\ d_2(s, P_s^{min}) &= \left[\ln \left(\frac{P_{t,i}}{P_0^{min} + sM^a} \right) + \left(r - \frac{\sigma_P^2}{2} \right) (s-t) \right] \cdot \frac{1}{\sigma_P \sqrt{s-t}}. \end{aligned} \quad (4.23)$$

- Se P_s^{min} varia in ogni periodo secondo un incremento relativo M^r con prezzo minimo iniziale P_0^{min} , cioè per $s \geq 0$

$$P_s^{min} = P_0^{min} \cdot (1 + M^r)^s, \quad (4.24)$$

allora otteniamo

$$\begin{aligned} \int_t^H \text{prezzo}_{t,i}^{PUT} ds &= P_0^{min} \int_t^H e^{-r(s-t)} (M^r + 1)^s N(-d_2(s, P_s^{min})) ds \\ &- P_{t,i} \int_t^H N(-d_1(s, P_s^{min})) ds \end{aligned} \quad (4.25)$$

con

$$\begin{aligned} d_1(s, P_s^{min}) &= \left[\ln \left(\frac{P_{t,i}}{P_0^{min} (1 + M^r)^s} \right) + \left(r + \frac{\sigma_P^2}{2} \right) (s-t) \right] \cdot \frac{1}{\sigma_P \sqrt{s-t}}, \\ d_2(s, P_s^{min}) &= \left[\ln \left(\frac{P_{t,i}}{P_0^{min} (1 + M^r)^s} \right) + \left(r - \frac{\sigma_P^2}{2} \right) (s-t) \right] \cdot \frac{1}{\sigma_P \sqrt{s-t}}. \end{aligned} \quad (4.26)$$

Per quanto visto in precedenza, il VAN nel caso in cui si aggiunga un prezzo minimo per i certificati di emissione di CO₂ è dato da

$$\begin{aligned}
 \widehat{\text{VAN}}_{t,i}^\theta + \mathbb{E}_t \left[\int_t^H e^{-r(s-t)} (P_s^{\min} - P_{s,i})^+ ds \right] &= \widehat{\text{VAN}}_{t,i}^\theta + \int_t^H \text{prezzo}_{t,i}^{\text{PUT}} ds \\
 &= (1 - \tau) \left(R_{t,i} \frac{e^{(\mu_{PE}-r)(H-t)} - 1}{\mu_{PE} - r} - CC_{t,i}^D l^\theta - CC_{t,i}^\theta (H - t - l^\theta) \right. \\
 &\quad \left. - VC_{t,i}^D \frac{e^{(\mu_{VC^D}-r)l^\theta} - 1}{\mu_{VC^D} - r} - VC_{t,i}^\theta \frac{e^{(\mu_{VC^\theta}-r)(H-t)} - e^{(\mu_{VC^\theta}-r)l^\theta}}{\mu_{VC^\theta} - r} \right) \\
 &\quad + \frac{1 - e^{-rl^\theta}}{r} \left(\tau \frac{Inv^D}{L^D} - \frac{Inv^\theta}{l^\theta} \right) + \frac{\tau}{r} \frac{Inv^\theta}{L^\theta} e^{-rl^\theta} \\
 &\quad + e^{-r(H-t)} \frac{Inv^\theta}{L^\theta} \left[L^\theta - (H - T - l^\theta) - \frac{\tau}{r} \right] \\
 &\quad + \int_t^H e^{-r(s-t)} P_s^{\min} N(-d_2(s, P_s^{\min})) ds - P_{t,i} \int_t^H N(-d_1(s, P_s^{\min})) ds
 \end{aligned} \tag{4.27}$$

con $d_1(s, P_s^{\min})$ e $d_2(s, P_s^{\min})$ come in [\(4.15\)](#).

Una volta ricavata la stima del VAN condizionato, non rimane che scegliere se uscire dall'investimento, oppure reinvestire nella tecnologia D o investire nella tecnologia C . Procediamo quindi alla stima del valore attuale netto assumendo il comportamento ottimo nei confronti dell'investimento:

$$\begin{aligned}
 \widehat{\text{VAN}}_{t,i}^{\text{ott}} &:= \mathbb{E}_t[\widehat{\text{VAN}}_{t,i}^{\text{ott}} | R_{t,i}, VC_{t,i}^D, VC_{t,i}^C, P_{t,i}] \\
 &:= \max \left\{ 0, \widehat{\text{VAN}}_{t,i}^D(R_{t,i}, VC_{t,i}^D, P_{t,i}), \widehat{\text{VAN}}_{t,i}^C(R_{t,i}, VC_{t,i}^C, P_{t,i}) \right\} \\
 &= \max \left\{ 0, \mathbb{E}_t[\widehat{\text{VAN}}_{t,i}^D | R_{t,i}, VC_{t,i}^D, P_{t,i}], \mathbb{E}_t[\widehat{\text{VAN}}_{t,i}^C | R_{t,i}, VC_{t,i}^C, P_{t,i}] \right\}
 \end{aligned} \tag{4.28}$$

Operativamente, le procedure di programmazione dinamica differiscono tra il tempo $t < T$ e $t = T$. Pertanto distinguiamo i due casi.

4.3.1 Decisione al tempo $t = T$

Al tempo $t = T$ e per ogni simulazione $i = 1, \dots, I$ utilizziamo la seguente procedura:

1. nel caso in cui $P^{\min} = 0$ stimiamo il valore attuale netto $\widehat{\text{VAN}}_{T,i}^\theta(R_{T,i}, VC_{T,i}^\theta, P_{T,i})$ tramite l'equazione [\(4.12\)](#) per entrambe le tecnologie D e C , mentre se $P^{\min} > 0$ utilizziamo la formula [\(4.27\)](#);
2. infine calcoliamo la strategia di investimento ottima $\widehat{\text{VAN}}_{T,i}^{\text{ott}}$ tramite la formula [\(4.28\)](#).

4.3.2 Decisione all'istante $t < T$

Il VAN condizionato stimato precedentemente, funge da base per la nostra analisi al tempo $t = T - 1$.

Siamo di fronte alle seguenti alternative:

- i. investire nella tecnologia “pulita”;
- ii. continuare a produrre energia utilizzando la tecnologia “sporca”;
- iii. reinvestire in un nuovo impianto a tecnologia “sporca”.

Nel primo e nel terzo caso calcoliamo ancora ogni simulazione del valore attuale netto della tecnologia “pulita” $\widehat{VAN}_{t,i}^C(R_{t,i}, VC_{t,i}^C, P_{t,i})$ e della tecnologia “sporca” $\widehat{VAN}_{t,i}^D(R_{t,i}, VC_{t,i}^C, P_{t,i})$ tramite l'equazione (4.12) se $P_t^{min} = 0$ e tramite (4.27) se $P_t^{min} > 0$. Nel secondo caso invece seguiamo la seguente procedura:

1. utilizziamo i valori ottenuti dall'equazione (4.28) per $t = T$ ed aggiungiamo il flusso di cassa per il periodo $t = T - 1$, che si accumula alla fine del periodo;
2. calcoliamo il valore attuale netto ipotizzando di continuare con il funzionamento dell'impianto di tecnologia esistente D :

$$VAN_{t,i}^{cont} := r(t, t+1) \cdot (CF_{t+1,i}^D + \widehat{VAN}_{t+1,i}^{ott}); \quad (4.29)$$

3. calcoliamo la stima del valore di continuazione regredendo (4.29) su una combinazione lineare di funzioni base delle variabili di stato simulate al tempo $t = T - 1$ ed usando i minimi quadrati:

$$\begin{aligned} \widehat{VAN}_{t,i}^{cont} &:= \mathbb{E}_{t+1}[VAN_{t+1,i}^{cont} | R_{t,i}, VC_{t,i}^\theta, P_{t,i}] \\ &= c_t^{ott} \\ &\quad + \beta_{R,t}^{ott} \cdot R_{t,i} + \beta_{VC^D,t}^{ott} \cdot VC_{t,i}^D + \beta_{VC^C,t}^{ott} \cdot VC_{t,i}^C + \beta_{P,t}^{ott} \cdot P_{t,i} \\ &\quad + \beta_{R^2,t}^{ott} \cdot (R_{t,i})^2 + \beta_{(VC^D)^2,t}^{ott} \cdot (VC_{t,i}^D)^2 + \beta_{(VC^C)^2,t}^{ott} \cdot (VC_{t,i}^C)^2 + \beta_{P^2,t}^{ott} \cdot (P_{t,i})^2 \\ &\quad + \epsilon_{t,i}^D \end{aligned} \quad (4.30)$$

dove

- $\mathbb{E}_{t+1}[\cdot]$ è l'operatore di speranza matematica condizionato all'informazione disponibile fino al tempo $t + 1$;
- c_t^{ott} è una costante;
- $\beta_{\cdot,t}^{ott}$ sono i coefficienti di regressione;
- $P_{t,i}$ è il prezzo dei certificati di emissione di CO₂ al tempo t sul cammino simulato i ;
- $VC_{t,i}^\theta$ è il costo per ognuna delle tecnologie $\theta \in \{D, C\}$ al tempo t sul cammino simulato i ;

- $R_{t,i}$ è il ricavo al tempo t sul cammino simulato i ;
- $\epsilon_{t,i}^D$ è il termine di rumore bianco⁷

Infine tramite l'equazione (4.28) ricaviamo il valore netto atteso condizionato al comportamento d'investimento ottimo del tempo $t = T - 1$; gli argomenti della funzione massimo in (4.28) ora sono le stime dei valori attuali netti attesi ottenuti da (i.), (ii.), (iii.) e zero cioè

$$\widehat{\text{VAN}}_{t,i}^{\text{ott}} = \max \left\{ 0, \widehat{\text{VAN}}_{t,i}^C(R_{t,i}, VC_{t,i}^C, P_{t,i}), \widehat{\text{VAN}}_{t,i}^D(R_{t,i}, VC_{t,i}^D, P_{t,i}), \widehat{\text{VAN}}_{t,i}^{\text{cont}} \right\} \quad (4.31)$$

Procedendo all'indietro, cioè ripetendo quanto compiuto per $t = T - 1$ per ogni altro tempo $t \in \{T - 2, T - 3, \dots, 1\}$, ricaviamo il valore attuale netto condizionato al comportamento ottimo d'investimento per l'intero orizzonte decisionale. Il risultato lungo ogni percorso simulato, è (temporalmente) il tempo in cui la decisione consiste nel non continuare con l'impianto di tecnologia "sporca", cioè partendo dal tempo $t = 1$, e procedendo in avanti nel tempo, per ogni cammino registriamo il primo punto temporale in cui la decisione ottima consiste nell'esercitare immediatamente, cioè investire nella tecnologia C o in un nuovo impianto a tecnologia D , oppure abbandonare del tutto l'affare.

⁷Si definisce rumore bianco una successione di variabili aleatorie $\epsilon_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ tali che $\mathbb{E}[\epsilon_t \epsilon_s] = 0$ per $s \neq t$.

Capitolo 5

Risultati numerici

In questo capitolo riportiamo i risultati numerici ottenuti utilizzando la metodologia introdotta nel capitolo precedente. Tale procedura può essere applicata a qualsiasi decisione di investimento che consista nel calcolare il tempo ottimale per poter passare a tecnologie a ridotte emissioni di CO₂.

5.1 Dati

Nel nostro modello confrontiamo un impianto a carbone che rappresenta la tecnologia sporca D , con un impianto ad uranio come tecnologia pulita C .

Basiamo i nostri parametri sulla situazione tecnologica nel mercato del 2010 e sulla previsione fino al 2050. Nella Tabella 5.1 sono riportati i parametri generali del modello. Le prime sei righe elencano i parametri per i processi del prezzo dei certificati di CO₂ e del prezzo dell'elettricità. Le ultime due righe riportano rispettivamente il tasso di sconto, che consideriamo costante in ogni periodo, e l'aliquota fiscale sulla società.

Tabella 5.1: Parametri generali del modello

Parametro	Simbolo	Valore
Prezzo dei permessi di emissione di CO ₂ in $t = 0$ (Euro/ton)	P_0	14.32
Tasso di crescita del prezzo di CO ₂ (per anno)	m_P	5%
Deviazione standard del prezzo di CO ₂ (per anno)	σ_P	27%
Prezzo dell'elettricità in $t = 0$ (Euro/MWh)	PE_0	80.00
Tasso di crescita del prezzo dell'elettricità (per anno)	m_{PE}	3%
Deviazione standard del prezzo dell'elettricità (per anno)	σ_{PE}	3%
Tasso di sconto (per anno)	r	5%
Tasso di imposta sui redditi d'impresa	τ	30%

Assumiamo che i processi stocastici, quali il prezzo dei certificati di CO₂, dell'elettricità e le variabili costo per l'impianto a carbone e quello ad uranio, siano moti browniani geometrici correlati in accordo con la seguente matrice:

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 1 & 0.7 & -0.2 & 0 \\ 0.7 & 1 & 0.5 & 0 \\ -0.2 & 0.5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La Tabella 5.2 mostra i parametri delle due tecnologie a confronto. Assumiamo che mediamente in un anno entrambe le tecnologie abbiamo un fattore di carico pari a 85% e che annualmente producano $1 \text{ MW} \cdot 8760 \text{ h} \cdot 0.85 = 7446 \text{ MWh}$. Assumiamo inoltre che le emissioni di CO₂ siano 0.820 ton/MWh per l'impianto a carbone e 0.015 ton/MWh per l'impianto ad uranio. I costi di costruzioni per l'impianto a carbone corrispondono a 1.265 milioni di Euro, mentre per l'impianto ad uranio sono 2.68 milioni di Euro. Il processo della variabile costo totale dell'impianto a carbonio al tempo $t = 0$ vale 166790 Euro ed ha un tasso di crescita del 2.11% e deviazione standard del 17.57% mentre l'impianto ad uranio al tempo $t = 0$ vale 148920 Euro ed il tasso di crescita corrisponde a 1.93% e la volatilità è 10.32%. I costi del combustibile per la tecnologia sporca sono 87434 Euro ed hanno tasso di crescita pari a 2.17% e volatilità 26.33%, mentre per la pulita sono 1599 Euro con tasso di crescita 1.93% e deviazione standard 23.07%.

Tabella 5.2: Parametri della tecnologia di generazione

Parametro	Carbone	Uranio
Vita economica (anni)	40	40
Fattore di carico	85%	85%
Capacità generazionale netta (MWh/anno)	7446	7446
Emissioni di CO ₂ (g/KWh)	820	15
Costi di costruzione (milioni Euro/MW)	1.265	2.680
Costi operativi e del combustibile in $t = 0$ (Euro)	166790	148920
Tasso di crescita dei costi operativi e del combustibile (per anno)	2.11%	1.93%
Deviazione standard dei costi operativi e del combustibile (per anno)	17.57 %	10.32 %

Nella Tabella 5.3 riportiamo i parametri temporali che utilizzeremo nel nostro algoritmo.

Assumiamo che il nostro orizzonte temporale del modello sia 40 anni. Supponiamo inoltre che attualmente l'impresa operi attraverso l'impianto a tecnologia sporca D con vita residua pari a 16 anni. Il tempo di costruzione nel caso in cui si reinvesta nella tecnologia D è 3 anni e nel caso si investa nella tecnologia pulita C è 6 anni ed entrambi i nuovi impianti hanno vita pari a 40 anni. L'orizzonte temporale di decisione (cioè il periodo in cui l'impresa può sostituire

il vecchio impianto con uno nuovo o può continuare a produrre con il vecchio) è pari a 10 anni, pertanto le decisioni di rimpiazzo della tecnologia esistente devono essere effettuate ad un tempo ottimale $t^* \in \{1, \dots, 10\}$.

Tabella 5.3: Parametri temporali (in anni)

Parametro	Simbolo	Valore
Orizzonte del modello	H	40
Vita residua del vecchio impianto D	L^{D^*}	16
Tempo di costruzione del nuovo impianto D	l^D	3
Tempo di costruzione del nuovo impianto C	l^C	6
Vita del nuovo impianto D	L^D	40
Vita del nuovo impianto C	L^C	40
Orizzonte decisionale	T	10

Infine nella Tabella 5.4 riportiamo i dati al tempo $t = 0$ che ci servono per simulare i cammini dei prezzi attraverso il metodo Monte Carlo. R rappresenta il ricavo, VC^D e VC^C sono le variabili dei costi operativi e del combustibile per le tecnologie D e C rispettivamente, mentre CC^D e CC^C sono i costi di CO_2 per le tecnologie D e C rispettivamente.

Tabella 5.4: Valori iniziali per la simulazione

Parametro	Valore
R_0	7446 MWh · 80.00 Euro/MWh = 595680 Euro
VC_0^D	7446 MWh · 22.40 Euro/MWh = 166790 Euro
VC_0^C	7446 MWh · 20.00 Euro/MWh = 148920 Euro
CC_0^D	0.820 ton/MWh · 7446 MWh · 14.32 Euro/ton = 87434 Euro
CC_0^C	0.015 ton/MWh · 7446 MWh · 14.32 Euro/ton = 1599 Euro

5.2 Risultati senza l'introduzione del prezzo minimo per le emissioni di CO_2

Iniziamo la nostra analisi senza introdurre nel modello un prezzo minimo P^{min} per il prezzo dei certificati di emissione.

Utilizzando quanto visto nel capitolo precedente, determiniamo il tempo ottimale t^* per il rimpiazzo dell'impianto a carbone (D) esistente con un impianto ad uranio (C) ed eventualmente anche con un nuovo impianto con la medesima tecnologia sporca (D).

Su 100000 cammini simulati, abbiamo ottenuto che

- per 85692 simulazioni la strategia ottimale consiste nel cambiare con la tecnologia ad uranio,
- per 14305 simulazioni reinvestire in un nuovo impianto con la medesima tecnologia risulta essere ottimale,
- infine per 3 simulazioni è meglio uscire totalmente dall'investimento.

Nella Tabella 5.5 per ogni tempo ottimale $t^* \in \{1, \dots, 10\}$ riportiamo il numero di simulazioni per le quali la strategia ottimale è data dalla sostituzione della tecnologia esistente D con la tecnologia C . Possiamo notare che la maggior parte delle simulazioni passa alla tecnologia C al tempo ottimale $t^* = 10$ che rappresenta l'orizzonte decisionale.

Tabella 5.5: Numero di simulazioni con tempo ottimale t^* di rimpiazzo con la tecnologia C .

t^*	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
num. di rimpiazzati con C	1588	4560	5586	5366	4741	5030	5361	6743	9559	37158

Nella Figura 5.1 riportiamo il grafico della funzione di distribuzione cumulata di t^* . Il grafico ribadisce quanto osservato in precedenza, cioè che il tempo $t^* = 10$ risulta essere il tempo ottimale per rimpiazzare la tecnologia sporca con quella pulita.

5.3 Risultati con l'introduzione del prezzo minimo per i certificati di emissione di CO₂

In questa sezione analizzeremo l'effetto sulla distribuzione dei tempi di rimpiazzo ottimali, dovuto all'introduzione di un prezzo minimo P_t^{min} per i certificati di emissione di CO₂. Come abbiamo detto in precedenza, il prezzo dei permessi di emissione di CO₂ segue un moto browniano geometrico, pertanto se il prezzo di mercato scende al di sotto di P_t^{min} , il prezzo viene fissato a P_t^{min} .

In presenza di un prezzo minimo, per il calcolo del VAN utilizziamo la formula (4.27) ottenuta aggiungendo il prezzo di un'opzione put.

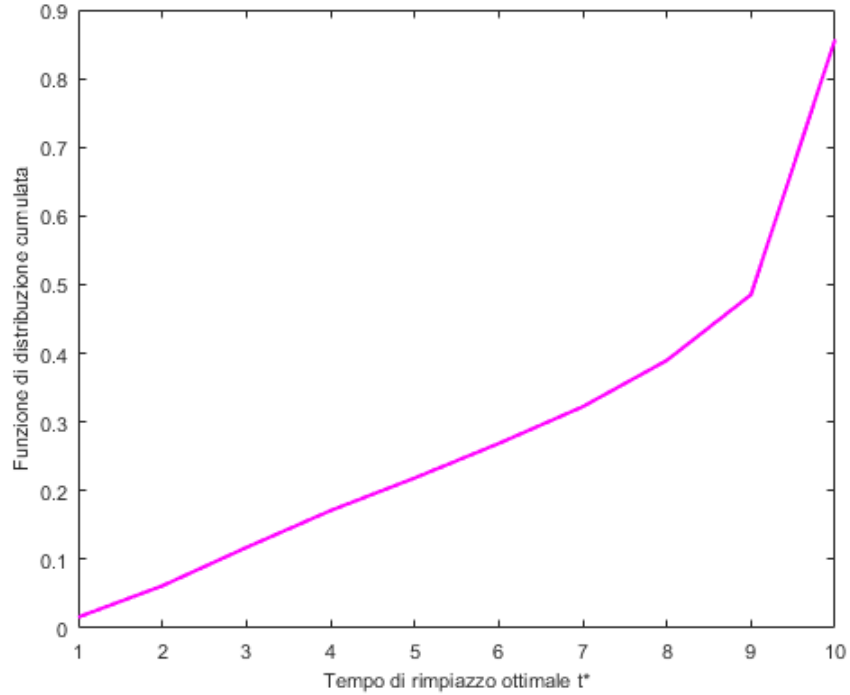


Figura 5.1: Funzione di distribuzione cumulata del tempo ottimale t^* di rimpiazzo con la tecnologia C .

5.3.1 P^{min} costante nel tempo

Supponiamo innanzitutto che il prezzo minimo dei certificati di emissione di CO_2 sia costante in ogni periodo, cioè $P_t^{min} = P^{min}$ per ogni t .

Nella Tabella 5.6, su 100000 simulazioni, per ogni prezzo minimo riportiamo il numero di rimpiazzati totali con C e D e il numero di volte in cui è preferibile abbandonare del tutto l'investimento. Notiamo che aumentando il prezzo minimo il numero di simulazioni in cui la strategia ottimale consiste nell'investire in un nuovo impianto a tecnologia C aumenta, mentre il numero di reinvestimenti nella tecnologia D diminuisce. Inoltre per i prezzi minimi più elevati si ha una simulazione in cui risulta ottimale abbandonare l'investimento.

Analogamente a quanto svolto per il caso senza prezzo minimo, nella Tabella 5.7 riportiamo il numero di simulazioni corrispondenti al prezzo minimo, per le quali risulta ottimale cambiare con la tecnologia C al tempo t^* . Notiamo che tra $P^{min} = 30$ e $P^{min} = 35$ il tempo ottimale passa drasticamente da $t^* = 10$ a $t^* = 1$.

Nella Figura 5.2 è riportata la funzione di distribuzione cumulata del tempo ottimale t^* al variare del prezzo minimo. Come possiamo notare c'è una rela-

Tabella 5.6: Numero di strategie ottimali, assumendo che i differenti prezzi minimi siano costanti in ogni periodo.

P^{min}	num. totale rimpiazzati con C	num. totale rimpiazzati con D	num. totale uscite dall'investimento
15	91860	8140	0
20	95660	4340	0
25	98027	1973	0
30	99190	810	0
35	99723	276	1
40	99974	102	0
45	99998	25	1
50	99994	5	1

Tabella 5.7: Numero di simulazioni con tempo ottimale t^* di rimpiazzo con la tecnologia C .

P^{min}	t^*	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
15	num. rimpiazzati	5138	7930	7770	6445	5931	5625	5641	6866	9775	30739
20	num. rimpiazzati	8235	10223	8960	7115	6197	5872	5744	6819	9476	27019
25	num. rimpiazzati	10121	12351	9795	7841	6707	6259	5735	7060	8924	23234
30	num. rimpiazzati	15581	14547	10587	8028	6510	5690	5088	6230	7682	19247
35	num. rimpiazzati	28081	14855	9782	6729	4608	3762	4313	5257	6844	15492
40	num. rimpiazzati	52137	12013	6822	4573	2923	2290	2491	3071	4199	9379
45	num. rimpiazzati	81427	5422	2501	1730	1025	798	830	1068	1566	3607
50	num. rimpiazzati	97516	711	307	226	115	94	80	152	210	583

zione tra P^{min} e t^* : per valori bassi di P^{min} il tempo ottimale rimane $t^* = 10$, mentre aumentando il prezzo minimo aumenta anche la probabilità di investire in tempi precedenti al tempo $t^* = 10$. Inoltre $P^{min} = 30$ Euro/tonnellata può essere considerato come prezzo minimo di bilanciamento tra valori più elevati di P^{min} per i quali il tempo di arresto ottimale risulta essere $t^* = 1$ e P^{min} inferiori per i quali $t^* = 10$.

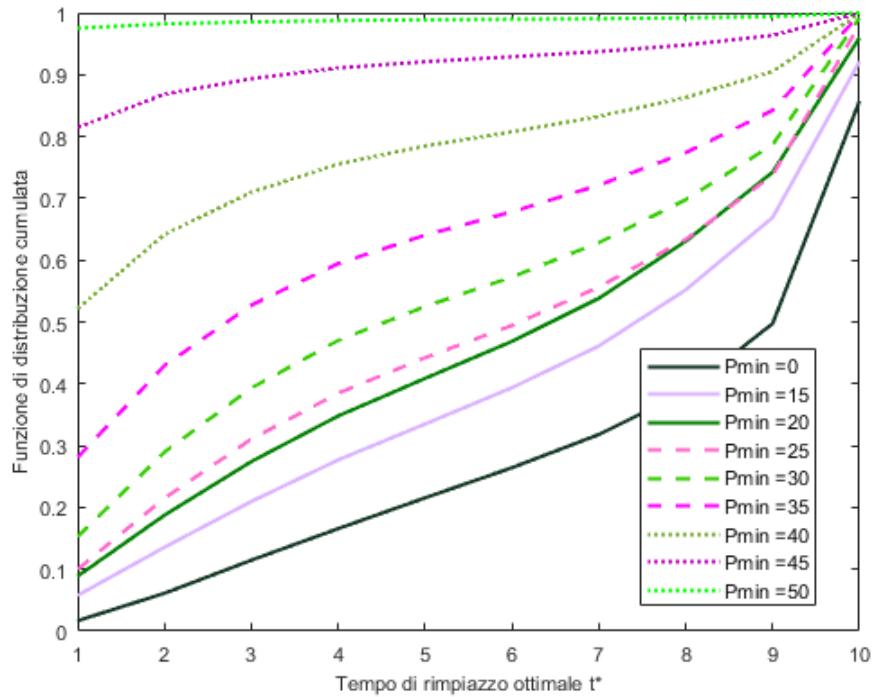


Figura 5.2: Funzione di distribuzione cumulata del tempo ottimale t^* di rimpiazzo con la tecnologia C con differenti P^{min} costanti nel tempo.

5.3.2 P^{min} variabile in ogni periodo temporale

Nella realtà non viene implementato un prezzo minimo pari al doppio o al triplo del prezzo di mercato attuale. Per questo motivo analizziamo gli effetti di due differenti approcci per il prezzo minimo. Poniamo il prezzo minimo iniziale P_0^{min} pari ad un valore vicino al prezzo di mercato dei certificati di CO_2 e lo aumentiamo di un incremento M in ogni periodo successivo.

Per questa sezione utilizziamo la metodologia introdotta nel Capitolo precedente in (4.21) e (4.24).

Incremento relativo

Nella Tabella 5.8 riportiamo il numero totale di simulazioni per le quali risulta ottimale cambiare con C , con D o uscire completamente dall'investimento. Notiamo che aumentando il valore dell'incremento relativo il numero di simulazioni in cui la strategia ottimale risulta investire in un nuovo impianto a tecnologia C aumenta, inoltre per i valori più elevati di M^r per quasi tutte le simulazioni risulta essere ottimale cambiare con C . Il numero di reinvestimenti nella tecnologia D diminuisce ed è inferiore al caso in cui il prezzo minimo è costante. In nessun caso è ottimale abbandonare l'investimento.

Tabella 5.8: Numero di strategie ottimali al variare dell'incremento relativo.

M^r	num. totale rimpiazzati con C	num. totale rimpiazzati con D	num. totale uscite dall'investimento
0.02	94502	5498	0
0.04	96756	3244	0
0.06	98475	1525	0
0.8	99433	567	0
0.10	99848	152	0
0.12	99976	24	0
0.14	99999	1	0

Nella Tabella 5.9 riportiamo il numero di simulazioni per le quali risulta ottimale cambiare con C . Notiamo che, fatta eccezione per i primi due valori dell'incremento relativo per i quali il tempo ottimale risulta essere $t^* = 10$, per tutti gli altri valori invece il tempo ottimale è $t^* = 1$. Inoltre aumentando il valore dell'incremento diminuisce sempre più il numero totale di simulazioni per le quali risulta ottimale cambiare con la tecnologia C al tempo $t^* = 10$.

Nella Figura 5.3 riportiamo la funzione di distribuzione cumulata di t^* al variare dell'incremento relativo. Come possiamo osservare, per valori più elevati dell'incremento ($M^r > 0.08$) aumenta la probabilità di cambiare con la tecnologia C in istanti temporali precedenti $t^* = 10$.

Incremento assoluto

Ripetiamo quanto appena visto nel caso in cui l'incremento per il prezzo minimo sia assoluto. Dalla Tabella 5.10 notiamo che per nessuna delle 100000 simulazioni risulta essere ottimale uscire completamente dall'investimento. Inoltre aumentando il valore dell'incremento M^a il numero di casi in cui è ottimale

Tabella 5.9: Numero di simulazioni con tempo ottimale t^* di rimpiazzo con la tecnologia C .

M^r	t^*	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0.02	num. rimpiazzati	8875	10289	8144	6870	6378	5695	5893	7310	8344	26704
0.04	num. rimpiazzati	16329	13018	8998	7410	6237	5426	5479	6442	6903	20514
0.06	num. rimpiazzati	31073	15305	9059	7100	5404	4379	4212	4421	4649	12873
0.08	num. rimpiazzati	55699	13816	7142	5238	3384	2527	2233	2019	1956	5419
0.10	num. rimpiazzati	79949	8290	3734	2510	1334	944	775	526	466	1320
0.12	num. rimpiazzati	92861	3663	386	845	400	259	192	88	93	189
0.14	num. rimpiazzati	97748	1403	406	248	81	45	27	15	13	13

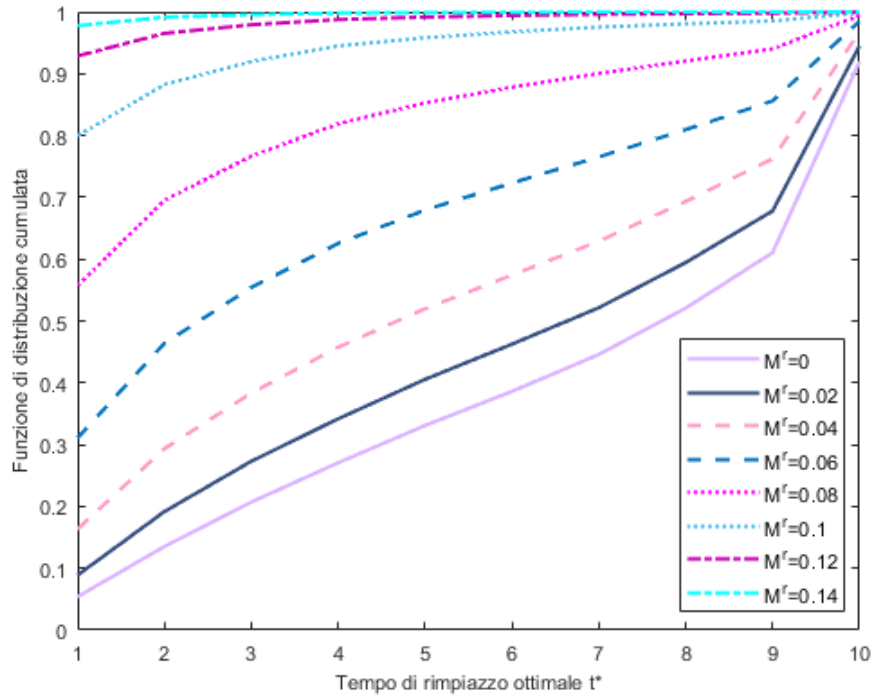


Figura 5.3: Funzione di distribuzione cumulata del tempo ottimale t^* di rimpiazzo con la tecnologia C al variare dell'incremento relativo, assumendo $P_0^{min} = 15$ Euro/tonnellata.

cambiare con D diminuisce mentre il rimpiazzo con la tecnologia C risulta essere ottimale per quasi tutte le simulazioni. Per $M^a > 2$ risulta essere quasi sempre ottimale cambiare con la tecnologia C , in particolare per $M^a = 3.5$ lo è sempre.

Tabella 5.10: Numero di strategie ottimali al variare dell'incremento assoluto.

M^a	num. totale rimpiazzi con C	num. totale rimpiazzi con D	num. totale uscite dall'investimento
0.5	95735	4265	0
1	98042	1958	0
1.5	99361	639	0
2	99896	104	0
2.5	99988	12	0
3	99998	2	0
3.5	100000	0	0

Nella Tabella 5.11 riportiamo il numero di strategie ottimali corrispondenti al tempo $t^* = 1, 2, \dots, 10$. Per $M^a = 0.5$ il tempo di arresto ottimale è $t^* = 10$, mentre per tutti gli altri valori è $t^* = 1$. Inoltre all'aumentare dell'incremento aumenta il numero di volte in cui è ottimale cambiare con la tecnologia al tempo $t^* = 1$.

Tabella 5.11: Numero di simulazioni con tempo ottimale t^* di rimpiazzo con la tecnologia C .

M^a	t^*	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0.5	num. rimpiazzi	11054	11927	8821	7193	6219	5598	5746	6591	8493	24093
1	num. rimpiazzi	26430	14999	8837	6857	5257	4538	4469	4750	5790	16115
1.5	num. rimpiazzi	58085	12050	5674	4103	2864	2303	2116	2226	2581	7359
2	num. rimpiazzi	89502	3872	1545	1044	587	483	377	426	478	1582
2.5	num. rimpiazzi	98779	577	193	100	54	36	33	38	39	139
3	num. rimpiazzi	99894	61	15	7	3	2	1	0	3	12
3.5	num. rimpiazzi	99991	3	3	0	1	0	0	0	0	2

Nella Figura 5.4 riportiamo la funzione di distribuzione cumulata di t^* al variare dell'incremento assoluto. Questo grafico conferma quanto appena detto: per valori sempre più elevati di M^a risulta essere ottimale investire in C in tempi precedenti $t^* = 10$. Addirittura per i valori più elevati risulta ottimale investire nella tecnologia pulita in qualsiasi istante temporale.

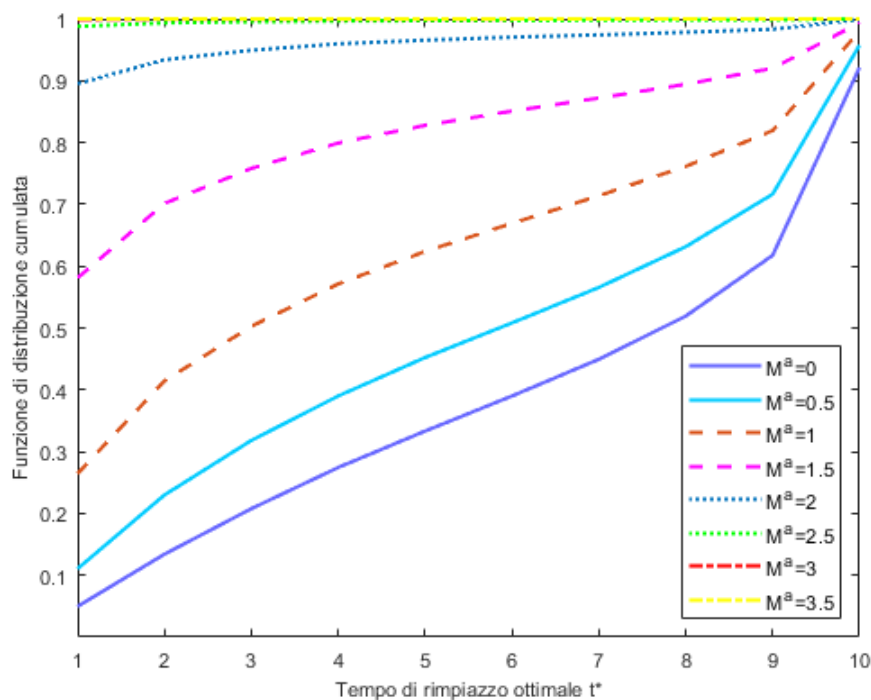


Figura 5.4: Funzione di distribuzione cumulata del tempo ottimale t^* di rimpiazzo con la tecnologia C al variare dell'incremento assoluto, assumendo $P_0^{min} = 15$ Euro/tonnellata.

5.4 Robustezza del modello

In questa sezione analizziamo la distribuzione del tempo di arresto ottimale t^* facendo variare separatamente M^a , σ_P , r e τ per mostrare i differenti effetti che questi parametri hanno sulla decisione d'investimento. Partiamo dallo scenario base introdotto all'inizio di questo Capitolo, ma scegliamo un prezzo minimo per le emissioni di CO_2 pari a 30 Euro/tonnellata in quanto, come visto nella Sezione [5.3.1](#), bilancia il tempo di arresto ottimale tra $t^* = 1$ e $t^* = 10$.

Quello che vogliamo mostrare è che cambiamenti nei singoli parametri hanno un impatto notevole sulla distribuzione del tempo di arresto ottimale, che rivela chiaramente in che modo le variazioni nei parametri alterano i nostri risultati.

Iniziamo con il variare la volatilità dei certificati di emissione. Sia $\sigma_P \in \{15\%, 20\%, 25\%, 30\%, 35\%, 40\%, 45\%\}$. Nella figura [5.5](#) riportiamo la funzione di distribuzione cumulata per ogni valore della volatilità. Come possiamo notare la probabilità di passare a C prima dell'ultimo tempo aumenta con l'aumentare del valore della volatilità.

Nella Figura [5.6](#) riportiamo la funzione di ripartizione del tempo di arresto ottimale facendo variare il tasso r che come abbiamo detto coincide con il rendi-

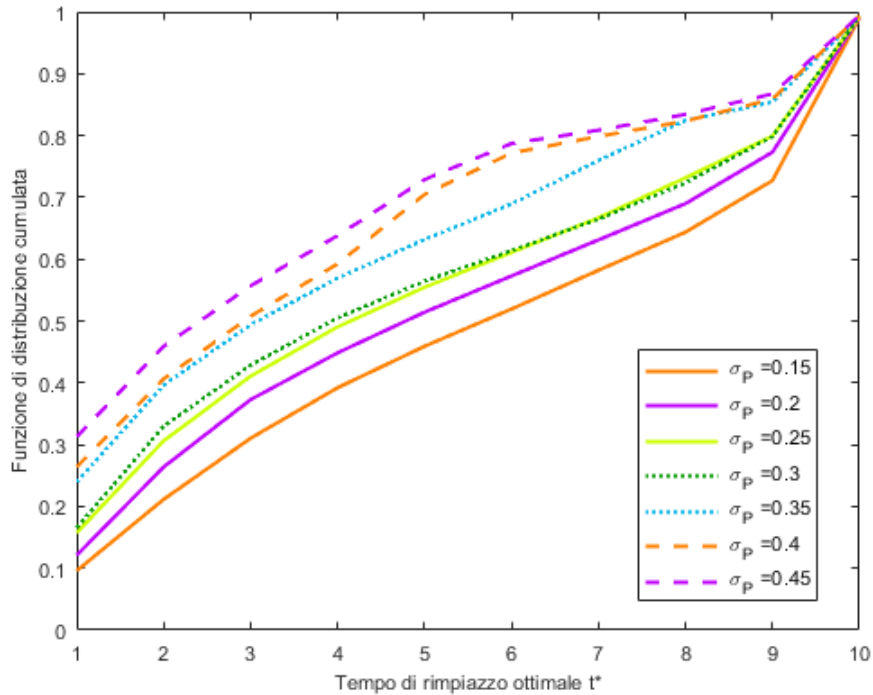


Figura 5.5: Funzione di distribuzione cumulata del tempo ottimale t^* di rimpiazzo con la tecnologia C al variare della volatilità dei certificati di emissione.

mento μ_P dei certificati di emissione. Sia $r \in \{1\%, 2\%, 3\%, 4\%, 5\%, 6\%, 7\%, 8\%, 9\%, 10\%\}$. Per i valori più piccoli di tale parametro la probabilità di cambiare con la tecnologia C in tempi precedenti $t^* = 10$ aumenta, per i valori più grandi invece tende a diminuire. In particolare per $r = 1\%$ e $r = 2\%$ risulta ottimale cambiare con la tecnologia pulita in qualsiasi istante temporale.

Se facciamo variare l'aliquota fiscale sulla società $\tau \in \{0, 10\%, 20\%, \dots, 50\%\}$, come riportato nella Figura 5.7 otteniamo che la strategia ottimale consiste nel cambiare con C in $t^* = 10$ per valori più elevati di τ , mentre per i valori più piccoli di τ si ha una maggior probabilità di passare alla tecnologia C prima di $t^* = 10$.

Ricapitolando il tasso r e l'aliquota fiscale τ sulla società hanno un ruolo importante per il tempo di arresto ottimale della decisione di investimento. In entrambi i casi i valori più piccoli di tali parametri promuovono un passaggio a C in tempi che precedono l'orizzonte decisionale $T = 10$.

Consideriamo ora il caso in cui a variare è il prezzo minimo dei certificati di emissione ed inoltre supponiamo che P^{min} cambi nel tempo mediante un incremento assoluto. Dal grafico riportato nella Figura 5.8 possiamo notare che

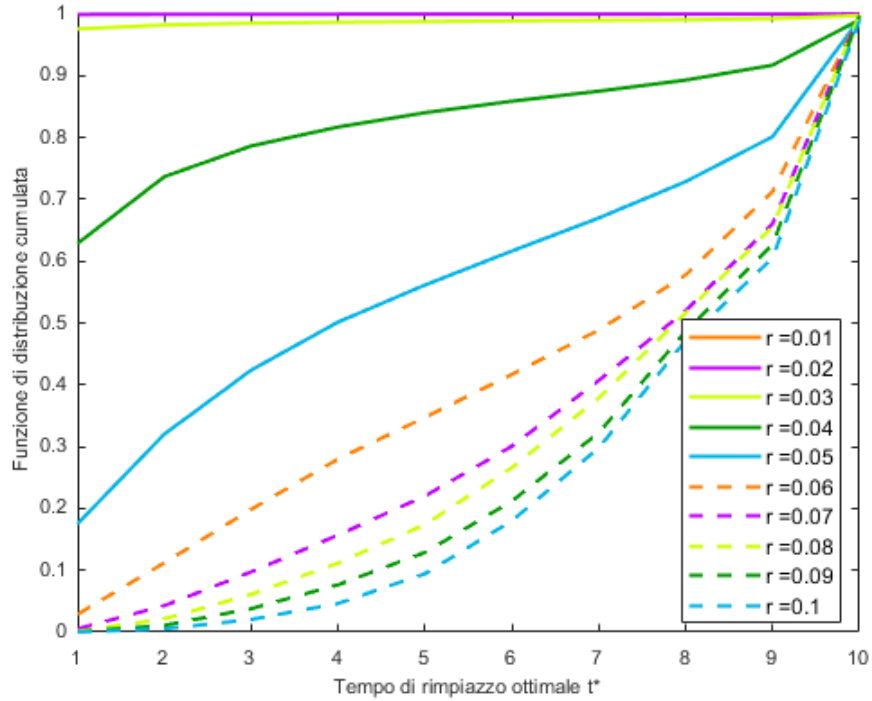


Figura 5.6: Funzione di distribuzione cumulata del tempo ottimale t^* di rimpiazzo con la tecnologia C al variare del tasso di interesse.

aumentando l'incremento aumenta la probabilità di cambiare con la tecnologia C in tempi precedenti $t^* = 10$. Inoltre per $M^a > 1.25$ è ottimale cambiare in qualsiasi tempo.

Facciamo inoltre variare la correlazione tra le variabili di stato. Consideriamo le seguenti matrici

$$\mathbf{R}_\epsilon = \mathbb{I} + \epsilon (\mathbf{R} - \mathbb{I}), \quad \text{con } \epsilon \in \{0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1.0\},$$

dove \mathbf{R} è la matrice di correlazione iniziale (4.2) che si ottiene per $\epsilon = 1$, mentre \mathbb{I} è la matrice identità 4×4 che si ottiene per $\epsilon = 0$. Dalle Figure 5.9, 5.10 e 5.11 possiamo notare che, per ogni valore di ϵ considerato, prezzi minimi più elevati favoriscono il passaggio alla tecnologia C in tempi precedenti $t^* = 10$, mentre per prezzi minimi più bassi diminuisce la probabilità che questo accada. Per $P^{min} = 50$ Euro/tonnellata è quasi sempre ottimale cambiare con la tecnologia pulita in qualsiasi istante. Nelle Tabelle 5.12 e 5.13 sono riportati i numeri delle strategie ottimali per ogni differente matrice di correlazione \mathbf{R}_ϵ con $\epsilon \in \{0, 0.2, \dots, 1\}$, calcolate per differenti prezzi minimi che supponiamo costanti nel tempo. Fissato un valore ϵ , abbiamo:

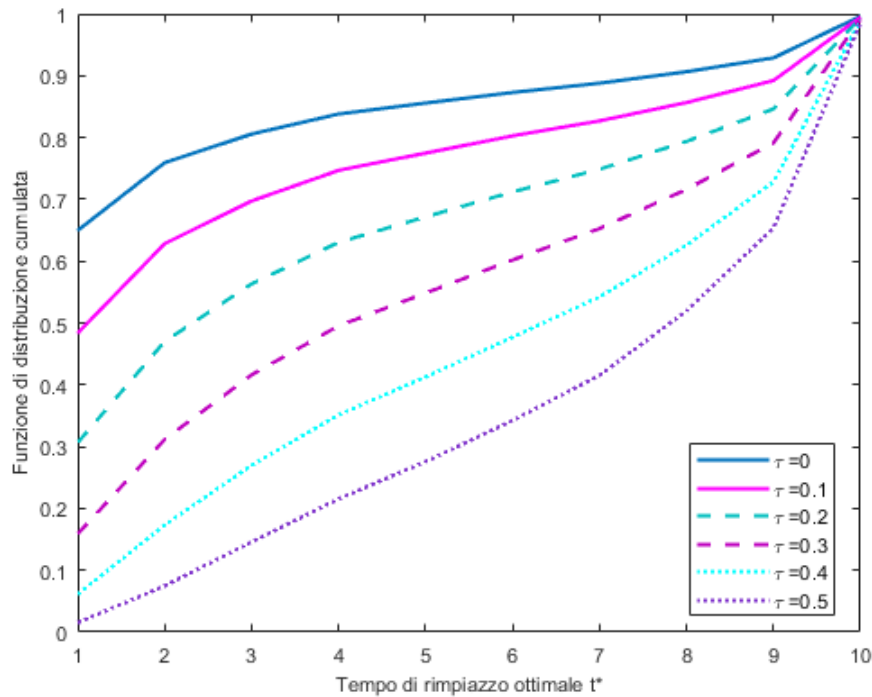


Figura 5.7: Funzione di distribuzione cumulata del tempo ottimale t^* di rimpiazzo con la tecnologia C al variare dell'aliquota fiscale sulla società.

- il numero di simulazioni per le quali è ottimale cambiare con C aumenta all'aumentare del prezzo minimo;
- il numero di simulazioni per le quali è ottimale reinvestire in D decresce all'aumentare di P^{min} ;
- il numero di simulazioni per le quali risulta ottimale abbandonare l'investimento tende a decrescere o a rimanere un numero vicino.

A parità di prezzo minimo P^{min} , abbiamo:

- il numero di simulazioni per le quali è ottimale investire in un nuovo impianto a tecnologia pulita C cresce all'aumentare di ϵ ;
- il numero di simulazioni per le quali è ottimale reinvestire nella tecnologia sporca D diminuisce col decrescere di ϵ ;
- il numero di simulazioni per le quali è ottimale uscire dall'investimento diminuisce col crescere di ϵ . In particolare per $\epsilon = 0$ si ha il maggior numero di uscite, mentre per $\epsilon > 0.2$ si hanno al più due simulazioni per le quali è ottimale abbandonare l'investimento.

Tabella 5.12: Numero di strategie ottimali calcolate per ogni differente matrice di correlazione \mathbf{R}_ϵ con $\epsilon \in \{0, 0.2, 0.4\}$ e per diversi prezzi minimi che assumiamo essere costanti in ogni periodo.

	P^{min}	num. totale rimpiazzati con C	num. totale rimpiazzati con D	num. totale uscite dall' investimento
$\epsilon = 0$	0	83101	16890	9
	15	90631	9354	15
	20	94869	5118	13
	25	97623	2367	10
	30	99048	947	5
	35	99678	319	3
	40	99886	112	2
	45	99974	25	1
	50	100000	0	0
$\epsilon = 0.2$	0	83329	16666	5
	15	90553	9446	1
	20	95099	4898	3
	25	97711	2285	4
	30	99026	970	4
	35	99657	339	4
	40	99904	92	4
	45	99977	21	2
	50	99998	1	1
$\epsilon = 0.4$	0	84344	15655	1
	15	91225	8774	1
	20	95366	4634	0
	25	97974	2023	3
	30	99181	817	2
	35	99693	306	1
	40	99905	94	1
	45	99971	27	2
	50	99995	5	0

Tabella 5.13: Numero di strategie ottimali calcolate per ogni differente matrice di correlazione \mathbf{R}_ϵ con $\epsilon \in \{0.6, 0.8, 1\}$ e per diversi prezzi minimi che assumiamo essere costanti in ogni periodo.

	P^{min}	num. totale rimpiazzati con C	num. totale rimpiazzati con D	num. totale uscite dall' investimento
$\epsilon = 0.6$	0	84623	15375	2
	15	91621	8376	3
	20	95481	4518	1
	25	97943	2056	1
	30	99154	845	1
	35	99681	318	1
	40	99893	107	0
	45	99976	24	0
	50	99995	5	0
$\epsilon = 0.8$	0	84936	15064	0
	15	91794	8206	0
	20	95590	4410	0
	25	97925	2075	0
	30	99097	903	0
	35	99641	359	0
	40	99890	110	0
	45	99982	18	0
	50	99998	2	0
$\epsilon = 1$	0	85349	14649	2
	15	91951	8049	0
	20	95758	4242	0
	25	98071	1929	0
	30	99162	837	1
	35	99701	298	1
	40	99912	87	1
	45	99981	18	1
	50	99998	2	0

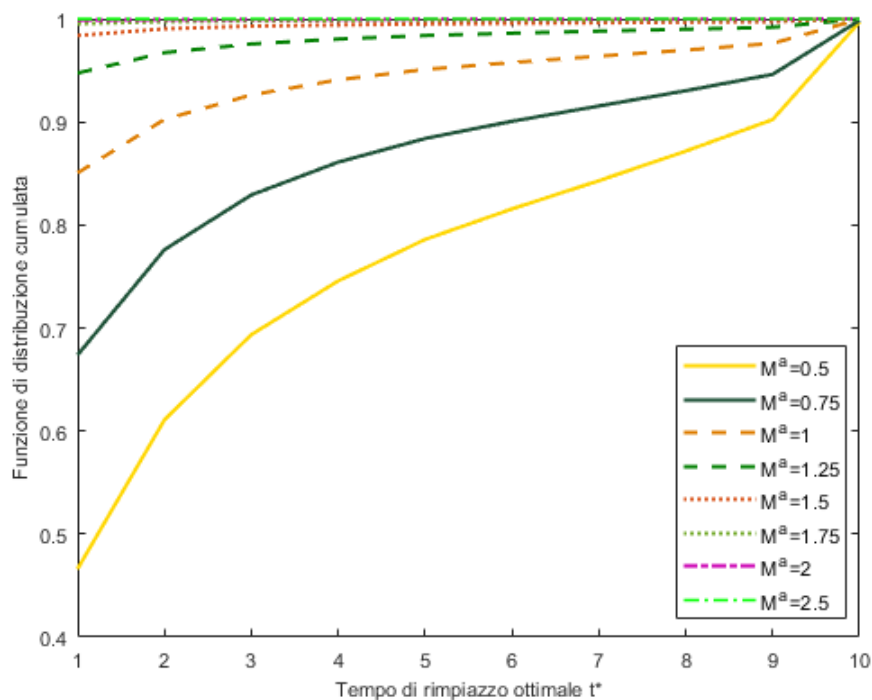


Figura 5.8: Funzione di distribuzione cumulata del tempo ottimale t^* di rimpiazzo con la tecnologia C al variare dell'incremento assoluto, assumendo un prezzo minimo iniziale $P_0^{min} = 30$ Euro/tonnellata.

Per testare la sensibilità del modello nel cambiare i parametri facciamo variare congiuntamente i seguenti parametri:

- $\sigma_P \in \{0.10, 0.20, 0.30, 0.40, 0.50\}$,
- $\mu_P = r \in \{0.01, 0.03, 0.05, 0.07, 0.09\}$,
- $P_0^{min} \in \{0, 2.5, 5, \dots, 50\}$,
- $M^a \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.

Tutti gli altri parametri restano invece costanti in quanto riguardano solo i rendimenti ed i costi relativi alle due tecnologie. Per semplicità di calcolo in questo caso effettuiamo 10000 simulazioni. Nella Figura 5.12 sono riportati i tempi di rimpiazzo ottimali che massimizzano la funzione di distribuzione cumulata dei cammini simulati, il cui tempo di passaggio a C corrisponde proprio a quello calcolato. Le aree bianche indicano il tempo $t = 10$, le aree nere corrispondono al tempo $t = 1$ mentre tutti i tempi intermedi sono riportati in scala di grigi. In ogni sottografico l'asse delle ascissa riporta i singoli incrementi assoluti M^a ,

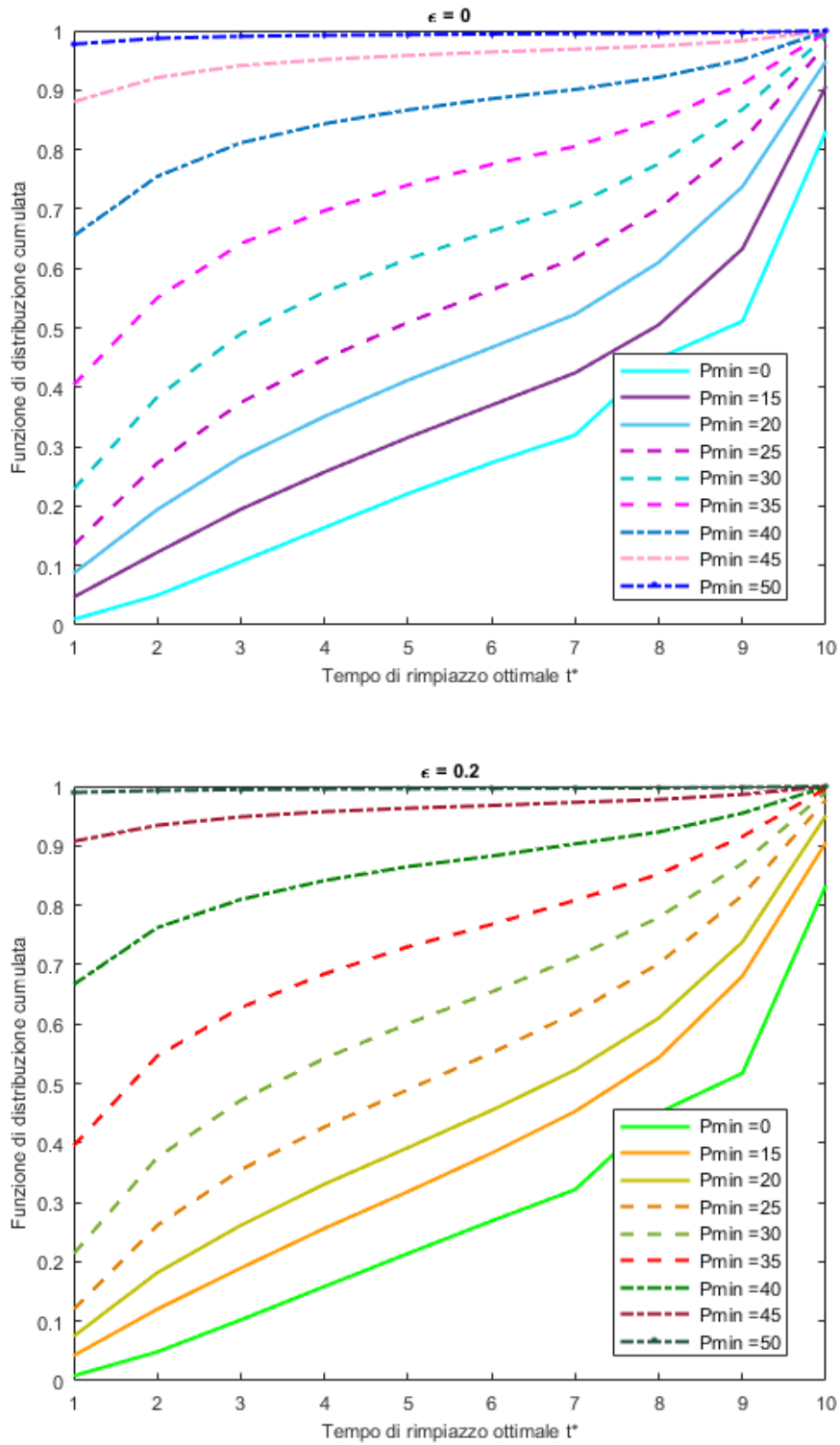


Figura 5.9: Funzioni di distribuzione cumulata al variare della matrice di correlazione \mathbf{R}_ϵ con $\epsilon \in \{0, 0.2\}$, calcolate per ogni differente prezzo minimo che assumiamo sia costante nel tempo.

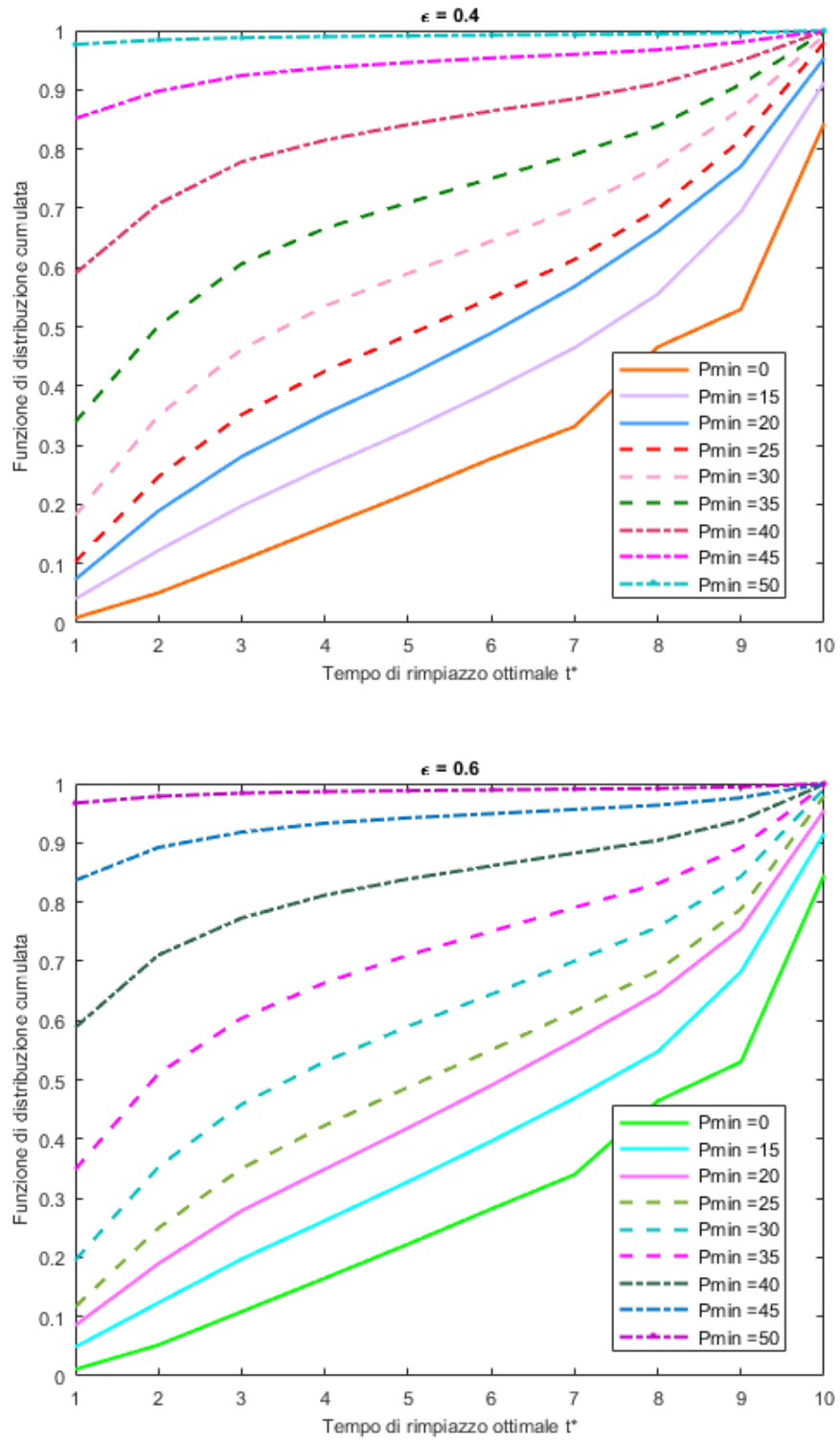


Figura 5.10: Funzioni di distribuzione cumulata al variare della matrice di correlazione \mathbf{R}_ϵ con $\epsilon \in \{0.4, 0.6\}$, calcolate per ogni differente prezzo minimo che assumiamo sia costante nel tempo.

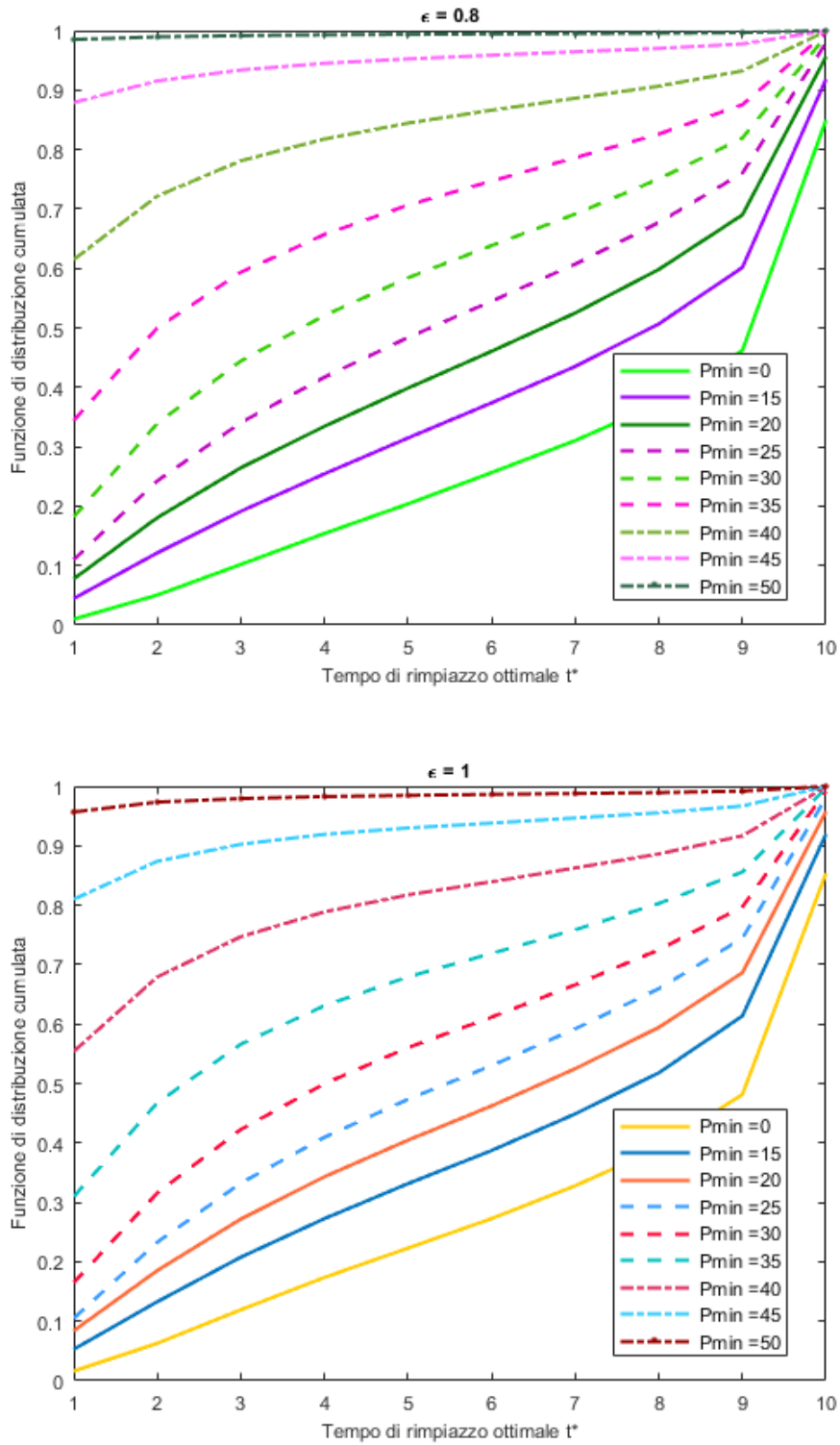


Figura 5.11: Funzioni di distribuzione cumulata al variare della matrice di correlazione \mathbf{R}_ϵ con $\epsilon \in \{0.8, 1\}$, calcolate per ogni differente prezzo minimo che assumiamo sia costante nel tempo.

mentre l'ordinata mostra i prezzi minimi iniziali per i certificati P_0^{min} . Se fissiamo il tasso di interesse, al crescere della volatilità del prezzo dei certificati diventa più frequente cambiare con la tecnologia C in $t = 1$, mentre a parità di volatilità per valori più elevati del tasso di interesse è preferibile reinvestire nella tecnologia sporca D . In particolare per r tra il 7% e il 9% e per σ_P compresa tra il 10% e il 20% risulta più frequente passare a C in $t = 10$.

Poiché nel nostro algoritmo utilizziamo la regressione lineare per calcolare la speranza condizionata del VAN, analizziamo il coefficiente R^2 che indica la bontà di adattamento del modello ai dati considerati. Dalle Tabelle 5.14, 5.15, 5.16 e 5.17 notiamo che in assenza di prezzo minimo R^2 varia tra 0.49 e 0.81, in presenza di un prezzo minimo invece abbiamo che se il prezzo minimo è costante o cambia nel tempo secondo un incremento assoluto allora R^2 varia tra 0.50 e 0.87, mentre se il prezzo minimo cambia nel tempo secondo un incremento relativo allora R^2 varia tra 0.49 e 0.87. In tutti i casi considerati gli R^2 sono abbastanza prossimi ad 1, pertanto possiamo considerare il modello ben adattato ai nostri dati, inoltre in presenza di prezzo minimo per i certificati di emissione R^2 tende ad aumentare per tempi più grandi.

Tabella 5.14: R^2 della regressione in assenza di un prezzo minimo per i certificati di emissione.

t^*	1	2	3	4	5	6	7	8	9
R^2	0.4850	0.6486	0.7282	0.7636	0.7987	0.8103	0.8099	0.7827	0.7018

Tabella 5.15: R^2 della regressione in presenza di differenti prezzi minimi costanti in ogni periodo temporale.

P^{min}	15	20	25	30	35	40	45	50
t^*	R^2	R^2	R^2	R^2	R^2	R^2	R^2	R^2
1	0,4859	0,4881	0,4915	0,4950	0,4972	0,4980	0,4982	0,4981
2	0,6554	0,6567	0,6591	0,6617	0,6638	0,6653	0,6661	0,6665
3	0,7336	0,7356	0,7377	0,7400	0,7423	0,744	0,7453	0,7461
4	0,7746	0,7772	0,7801	0,7823	0,7843	0,7861	0,7874	0,7886
5	0,8068	0,8099	0,8137	0,8157	0,8174	0,8186	0,8197	0,8205
6	0,8261	0,8311	0,8379	0,8402	0,8420	0,8435	0,8446	0,8454
7	0,8305	0,8389	0,8512	0,8546	0,8571	0,8591	0,8605	0,8616
8	0,7490	0,7739	0,8412	0,8483	0,8536	0,8579	0,8614	0,8644
9	0,8479	0,8599	0,7511	0,7681	0,7817	0,7931	0,8031	0,8118

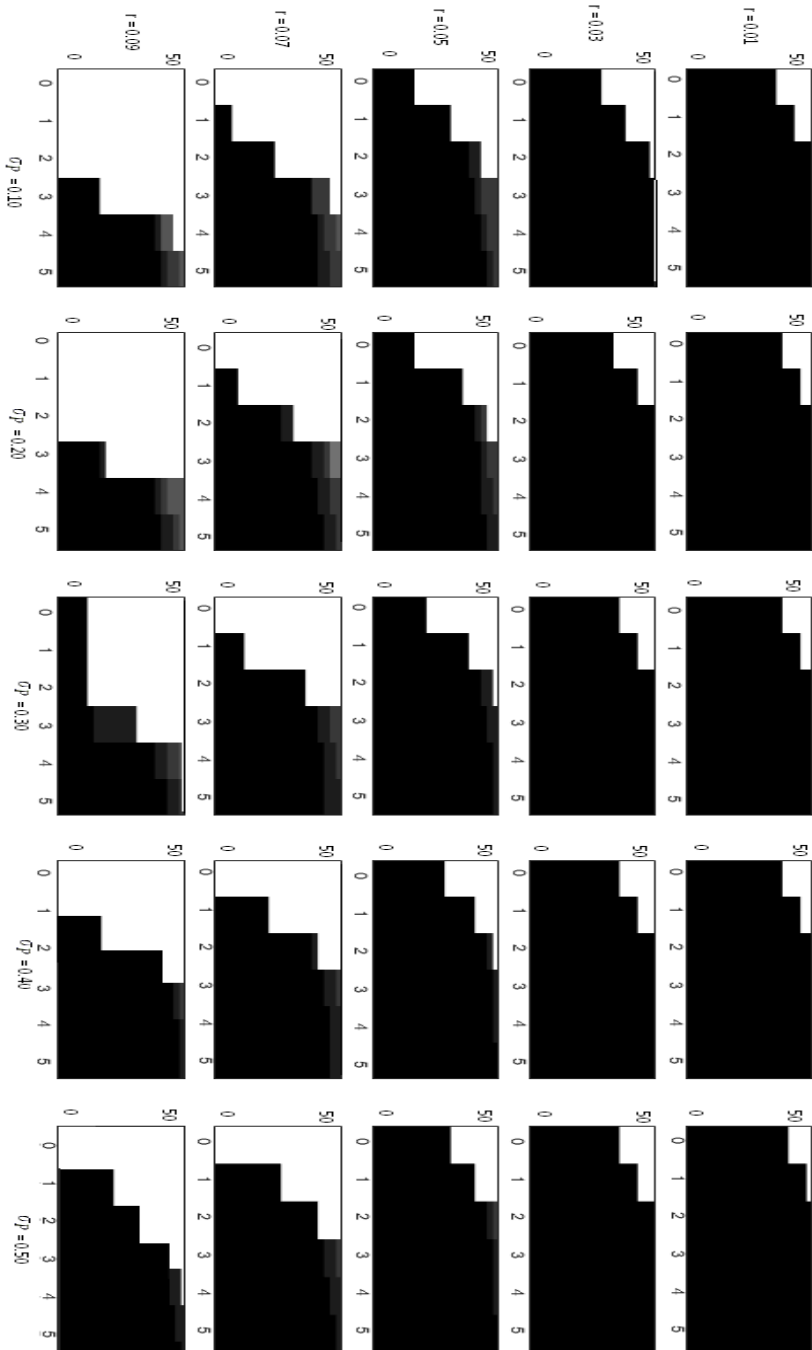


Figura 5.12: Tempi ottimali più frequenti per passare dalla tecnologia D a C . Il bianco indica $t^* = 10$ mentre il nero $t^* = 1$.

Tabella 5.16: R^2 della regressione al variare dell'incremento relativo, assunto un prezzo iniziale $P^{min} = 15$ Euro/tonnelata.

M^r	0.02	0.04	0.06	0.08	0.10	0.12	0.14
t^*	R^2	R^2	R^2	R^2	R^2	R^2	R^2
1	0,4868	0,4873	0,4877	0,4880	0,4880	0,4882	0,4885
2	0,6511	0,6518	0,6522	0,6523	0,6522	0,6523	0,6527
3	0,7331	0,7340	0,7343	0,7344	0,7344	0,7346	0,7353
4	0,7795	0,7806	0,7813	0,7817	0,7820	0,7825	0,7833
5	0,8090	0,8107	0,8119	0,8130	0,8136	0,8143	0,8152
6	0,8266	0,8287	0,8305	0,8321	0,8333	0,8345	0,8358
7	0,8385	0,8422	0,8453	0,8477	0,8496	0,8514	0,8533
8	0,8225	0,8305	0,8372	0,8427	0,8476	0,8521	0,8563
9	0,8031	0,8186	0,8313	0,8419	0,8508	0,8586	0,8655

Tabella 5.17: R^2 della regressione al variare dell'incremento assoluto, assunto un prezzo iniziale $P^{min} = 15$ Euro/tonnelata.

M^a	0.5	1	1.5	2	2.5	3	3.5
t^*	R^2	R^2	R^2	R^2	R^2	R^2	R^2
1	0,4912	0,4925	0,4934	0,4939	0,4944	0,4950	0,4956
2	0,6531	0,6544	0,6553	0,6558	0,6563	0,6569	0,6577
3	0,7328	0,7339	0,7346	0,7349	0,7353	0,7359	0,7367
4	0,7792	0,7804	0,7812	0,7819	0,7824	0,7832	0,7842
5	0,8081	0,8100	0,8115	0,8126	0,8136	0,8146	0,8156
6	0,8275	0,8300	0,8320	0,8335	0,8347	0,8356	0,8365
7	0,8344	0,8390	0,8425	0,8451	0,8471	0,8487	0,8501
8	0,8275	0,8361	0,8422	0,8467	0,8503	0,8532	0,8558
9	0,7950	0,8125	0,8247	0,8336	0,8407	0,8465	0,8514

Infine analizziamo l'influenza della scelta della tecnologia C . Come alternativa all'impianto ad uranio consideriamo quello a energia idroelettrica. Nella Tabella 5.18 riportiamo i dati che abbiamo utilizzato nella nostra analisi.

Tabella 5.18: Parametri della tecnologia idroelettrica

Parametro	Valore
Vita economica	50 anni
Tempo di costruzione	4 anni
Fattore di carico	50%
Capacità installata	1.7 MW
Capacità generazionale netta	7446 MWh/anno
Costi operativi e del combustibile in $t = 0$	55100 Euro
Costi di costruzione	3.06 milioni Euro/MW
Emissioni di CO ₂	6 g/KWh

I risultati dell'analisi effettuata sono qualitativamente confrontabili tra di loro, ma la tecnologia idroelettrica è migliore rispetto a quella ad uranio in quanto la decisione di esercizio anticipato è presa molto più frequentemente per ogni prezzo minimo dato. Infatti dalla Figura 5.13 osserviamo che senza un prezzo minimo si ha una probabilità del 4% di cambiare con C in $t^* = 1$, inserendo un prezzo minimo per i certificati di emissione tale proprietà aumenta sempre più. In particolare per $P^{min} > 25$ Euro per tonnellata l'esercizio immediato può avvenire in qualsiasi istante temporale.

Dalla Tabella 5.19 notiamo che per $P^{min} > 30$ Euro per tonnellata tutte le 100000 simulazioni passano alla tecnologia idroelettrica, mentre per $P^{min} \leq 25$ ed in assenza di un prezzo minimo per i certificati di emissione sono presenti alcune simulazioni per le quali è preferibile reinvestire nella tecnologia sporca. In nessun caso è ottimale abbandonare l'investimento.

Nella Tabella 5.20 è riportato il numero di simulazioni per le quali risulta ottimale passare alla tecnologia idroelettrica al tempo t^* . In assenza di prezzo minimo il 40% delle simulazioni preferisce cambiare in $t^* = 1$, mentre inserendo un prezzo minimo per i certificati la percentuale di cammini per i quali è preferibile esercitare immediatamente al tempo $t^* = 1$ aumenta. In particolare per $P^{min} > 40$ questo accade per tutte le simulazioni.

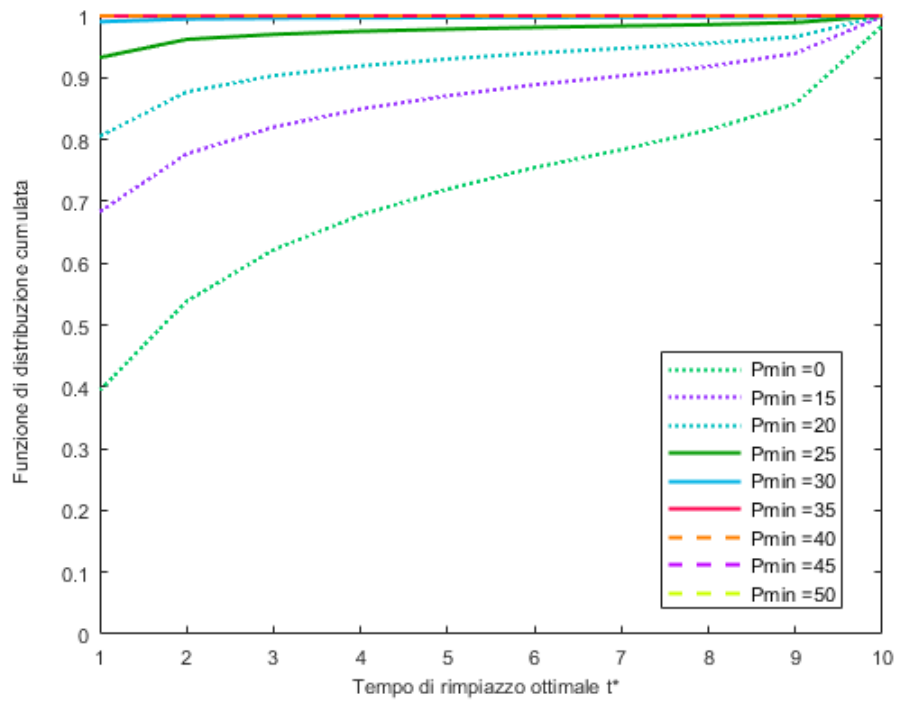


Figura 5.13: Funzione di distribuzione cumulata del tempo t^* di rimpiazzo con la tecnologia pulita idroelettrica, assumendo che ogni differente prezzo minimo sia costante in ogni periodo.

Conclusioni

In questa tesi abbiamo studiato le conseguenze dell'implementazione di un prezzo minimo per i certificati di emissione di CO₂ nel sistema di scambio. Abbiamo applicato una metodologia derivante dalla teoria di valutazione delle opzioni reali e dimostrato che il prezzo minimo per i certificati di emissione può essere usato per promuovere investimenti in tecnologie a ridotte emissioni di CO₂. La scelta del settore elettrico è dovuta al fatto che questo rappresenta una considerevole quota delle emissioni totali di gas serra.

L'argomento centrale del lavoro si basa sul fatto che la decisione di investire immediatamente in tecnologie a basse emissioni può risultare migliore rispetto al continuare ad operare tramite una tecnologia ad elevate emissioni, soprattutto quando il prezzo minimo dei permessi è elevato. Questa decisione è presa confrontando il valore attuale netto atteso di un immediato investimento "pulito" con il rinvio della decisione stessa.

I nostri risultati, basati su simulazioni Monte Carlo, identificano un livello per un prezzo minimo dei certificati di CO₂ appropriato in quanto implica un investimento immediato in tecnologie pulite. Se il prezzo minimo è costante allora tale livello fluttua tra i 30 ed i 35 Euro per tonnellata, se si assume invece un prezzo minimo iniziale fisso, questo aumenta nel tempo secondo un incremento assoluto tra il 4% ed il 6% o un incremento relativo tra 0.5 ed 1 Euro per tonnellata. Il tempo di passaggio alla tecnologia pulita risulta essere sensibile ai parametri del modello. A tale scopo abbiamo effettuato controlli di robustezza per trovare uno schema nella distribuzione del tempo ottimale di passaggio alla tecnologia pulita. In particolare i valori di alcuni parametri bilanciano il tempo ottimale tra $t^* = 1$ e $t^* = 10$. Utilizziamo questa osservazione per identificare l'impatto dei cambiamenti nel prezzo minimo dei certificati di emissione, nella sua volatilità, nel tasso di interesse e nell'aliquota fiscale.

Il mercato di CO₂ aiuta ad allocare i permessi di emissioni in maniera più efficiente e, come abbiamo mostrato, in combinazione con un prezzo minimo può essere utilizzato come strumento per promuovere l'adozione di tecnologie a ridotte emissioni di CO₂. Pertanto il prezzo minimo per i certificati di emissione è uno strumento che può rafforzare il sistema di scambio dei permessi nel processo di "decarbonizzazione" dell'economia.

Appendice A

Codice

Riportiamo il codice Matlab utilizzato per l'implementazione del nostro modello.

```
function A_epsilon = Matrice_Correlazione(A, epsilon)
    I = eye(size(A));
    A_epsilon = I + epsilon .* (A - I);
end
% Se epsilon == 0 ottengo A_epsilon = I.
% Se epsilon == 1 ottengo A_epsilon = A.

function spd = verifica_matrice_correlazione(A)
    % restituisce 1 se la matrice è semidefinita positiva
    % restituisce 0 se non lo è

    [n,m] = size(A);
    assert(n==m);

    % Verifico la simmetria
    for i = 1:n
        for j = 1:m
            if A(i,j) ~= A(j,i)
                error('A non è simmetrica');
            end
        end
    end

    % Verifico la semi-definita positività
    spd = true;
    autovalori_A = eig(A);
    for i = 1:n
        if autovalori_A(i) <= 0
            spd = false;
            break;
        end
    end
end

function S = Simulazione_MonteCarlo_Prezzi(PrezziIniziali ,mu,...
    Sigma ,nsim ,nsteps ,T, Matrice_Correlazione)
```

```

dt = T/nsteps;
nTitoli = length(PrezziIniziali);
m = mu - 0.5 * Sigma.^2;
S = NaN(nsteps + 1,nsim,nTitoli);
% Genero S formata da nTitoli, ciascuno di dimensioni
% (nsteps+1)x(nsim).
% Ogni riga rappresenta un passo temporale, mentre
% ogni colonna
% rappresenta una simulazione. La terza dimensione è
% data da un differente titolo

if not(verifica_matrice_correlazione(Matrice_Correlazione))
    error('La matrice non è definita positiva')
else
    TriangolareSuperioreCholesky = chol(Matrice_Correlazione);
    % Matrice triangolare superiore della decomposizione
    % di Cholesky della matrice di correlazione

    for sim = 1:nsim
        % Generazione di variabili casuali indipendenti
        Wiener = randn(nsteps, size(Matrice_Correlazione,2));
        % Trasformazione in variabili correlate
        CorrWiener = Wiener * TriangolareSuperioreCholesky;

        % Generiamo cammini assumendo che i prezzi seguano MBG
        S(:,sim,:) = [ones(1,nTitoli);cumprod(exp(...
            repmat(m * dt,nsteps,1)+ CorrWiener * diag(Sigma)...
            * sqrt(dt)))] * diag(PrezziIniziali);
    end
end
end

function P = nuovo_PrezzoCO2(S,PrezzoMinimo)
[nsim,nsteps] = size(S);
P = NaN(nsim,nsteps);
assert(length(PrezzoMinimo) == nsteps);
for sim = 1:nsim
    for step = 1:nsteps
        if S(sim,step) <= PrezzoMinimo(step)
            P(sim,step) = PrezzoMinimo(step);
        else
            P(sim,step) = S(sim,step);
        end
    end
end
end

function IA = incrementoAssoluto_Pmin(incremento,Pmin0,T)
IA = zeros(1,T);
for t = 1:T
    IA(1,t) = Pmin0 + incremento * t;
end
end

```

```

function IR = incrementoRelativo_Pmin(incremento ,Pmin0,T)
    IR = zeros(1,T);
    for t = 1:T
        IR(1,t) = Pmin0 * (1 + incremento)^t;
    end
end

function Iput = integrale_PUT_PminVariabile(Pmin0,Pt,SigmaP,r,t,M,...
        tipo_incremento)

% Pmin0 è il prezzo di esercizio che corrisponde al prezzo minimo
% iniziale Pt è il sottostante
% SigmaP è la volatilità di Pt
% r è il tasso di interesse che coincide con il rendimento di Pt
% M è l'incremento del prezzo minimo che può essere di tipo A
% (assoluto) o di tipo R (relativo)

H = 40;
if tipo_incremento == 'A' % Incremento assoluto
    Pmin = @(s,Pmin0,M)(Pmin0 + s .* M);
elseif tipo_incremento == 'R' % Incremento relativo
    Pmin = @(s,Pmin0,M)(Pmin0 .* ((1 + M).^s));
end
menod1 = @(s,Pmin0,Pt,SigmaP,r,t,M)((log(Pmin(s,Pmin0,M)./Pt) ...
    - (r + 0.5 .* (SigmaP.^2)))/(SigmaP .* sqrt(s - t)));
menod2 = @(s,Pmin0,Pt,SigmaP,r,t,M)((log(Pmin(s,Pmin0,M)./Pt) ...
    - (r - 0.5 .* (SigmaP.^2)))/(SigmaP .* sqrt(s - t)));
fattoreSconto = @(s,r,t)exp(-r .* (s - t));
prezzo_PUT = @(s,Pmin0,Pt,SigmaP,r,t,M)(Pmin(s,Pmin0,M) ...
    .* normcdf(menod2(s,Pmin0,Pt,SigmaP,r,t,M)) ...
    - Pt .* normcdf(menod1(s,Pmin0,Pt,SigmaP,r,t,M)));
prezzo_PUT_scontato = @(s,Pmin0,Pt,SigmaP,r,t,M) ...
    (fattoreSconto(s,r,t) .* prezzo_PUT(s,Pmin0,Pt,SigmaP,r,t,M));
Iput = integral(@(s)prezzo_PUT_scontato(s,Pmin0,Pt,SigmaP,r,...
    t,M),t,H);
end

clear;
workspace;

%%DATI DI MERCATO
r = 0.05; % Tasso di sconto
% r = 0.01:0.02:0.09;

tau = 0.30; % Aliquota fiscale sulla società
% tau = [0.00,0.10,0.20,0.30,0.40,0.50];

SigmaP = 0.27;
% SigmaP = 0.10:0.10:0.50;

SigmaVariabiliStato = [0.03, 0.1757, 0.1032];

Sigma = zeros(length(SigmaP),length(SigmaVariabiliStato)+1);

% Matrice delle volatilità

```

```

for sv = 1:length(SigmaVariabiliStato)
    for sigmaIndice = 1:length(SigmaP)
        Sigma(sigmaIndice,1) = SigmaP(sigmaIndice);
        Sigma(sigmaIndice,sv+1) = SigmaVariabiliStato(sv);
    end
end

muP = r;

mVariabiliStato = [0.03, 0.0211, 0.0193];

mu = zeros(length(r),length(mVariabiliStato)+1);

for mv = 1:length(mVariabiliStato)
    for muIndice = 1:length(muP)
        mu(muIndice,1) = muP(muIndice);
        mu(muIndice,mv+1) = mVariabiliStato(mv) + ...
            0.5 * SigmaVariabiliStato(mv).^2;
    end
end

%%DATI DEL MODELLO
% Vita residua della vecchia tecnologia sporca D (in anni)
LDstar = 16; % per nucleare
% LDstar = 14; % per idroelettrico

% Vita della nuova tecnologia
LD = 40;
LC = 40; % per nucleare
% LC = 50; % per idroelettrico

% Tempo di costruzione (in anni)
ID = 3;
IC = 6; % per nucleare
% IC = 4; % per idroelettrico

T = LDstar - max(ID,IC); % Orizzonte temporale decisionale
% (in anni)
H = 40; % Orizzonte temporale del modello (in anni)

% Fattore di carico medio
fcm_D = 0.85;
fcm_C = 0.85; % per nucleare
% fcm_C = 0.50; % per idroelettrico
fcm = [fcm_D, fcm_C];

OperA = 24 * 365; % Ore per anni

% Capacità installata (in MW)
ci_D = 1;
ci_C = 1; % per nucleare
% ci_C = 1.7; % per idroelettrico
ci = [ci_D, ci_C];

```



```

.*(1 - tau(tauIndice)) + InvD/LD;

% Dati per il calcolo del VAN
VAN_D= zeros(nsim,T);
VAN_C = zeros(nsim,T);

% Dati per la regressione
VAN_Ottimo = zeros(nsim,T);
VAN_AttesoContinuazione = zeros(nsim,T - 1);

for sim = 1:nsim
    for tempo = 1:T
        a1 = R(sim,tempo).*((exp((mu(muIndice,2) - ...
            r(rIndice)) * (H - tempo) - 1)/...
            (mu(muIndice,2) - r(rIndice))));
        put = integrale_PUT_PminVariabile(...
            PrezzoMinimo_iniziale(pminIndice),...
            PrezzoCO2(sim,tempo),Sigma(sigmaIndice,1),...
            r(rIndice),tempo,M(mIndice),'A');
        % put = integrale_PUT_PminVariabile(...
        % PrezzoMinimo_iniziale(pminIndice),...
        % PrezzoCO2(sim,tempo),Sigma(sigmaIndice...
        % ,1),r(rIndice),tempo,M(mIndice),'R');

        % VAN per la tecnologia D
        a2_D = VCD(sim,tempo).*((exp((mu(muIndice,3) - ...
            r(rIndice)) * ID) - 1)/(mu(muIndice,3) - ...
            r(rIndice)));
        a3_D = VCD(sim,tempo).*((exp((mu(muIndice,3) - ...
            r(rIndice)) * (H - tempo) - ...
            exp((mu(muIndice,3) - r(rIndice)) * ID))/ ...
            (mu(muIndice,3) - r(rIndice))));
        a4_D = CCD(sim,tempo).* ID;
        a5_D = CCD(sim,tempo).* (H - tempo - ID);

        b1_D = (1 - exp(-r(rIndice) * ID))* ...
            (tau(tauIndice) * InvD/LD - InvD/ID)/r(rIndice);

        b2_D = exp(-r(rIndice) * ID)* InvD * ...
            tau(tauIndice)/(r(rIndice) * LD);
        b3_D = (LD - (H - T - ID) - tau(tauIndice))/ ...
            r(rIndice))* InvD/LD;

        VAN_D(sim,tempo) = (1 - tau(tauIndice)).* (a1 -...
            a2_D - a3_D - a4_D - a5_D) + b1_D + b2_D ...
            + exp(-r(rIndice) * (H - tempo)) *...
            b3_D + put;

        % VAN per la tecnologia C
        a2_C = VCD(sim,tempo).*((exp((mu(muIndice,3) - ...
            r(rIndice)) * IC) - 1)/...
            (mu(muIndice,3) - r(rIndice)));
        a3_C = VCC(sim,tempo).*((exp((mu(muIndice,4) - ...
            r(rIndice)) * (H - tempo)) - ...

```

```

        exp((mu(muIndice,4) - r(rIndice)) * IC))/...
        (mu(muIndice,4) - r(rIndice)));
a4_C = CCD(sim,tempo).* IC;
a5_C = CCC(sim,tempo).* (H - tempo - IC);

b1_C = (1 - exp(-r(rIndice) * IC))* (tau(...
    tauIndice) * InvD/LD - InvC/IC)/r(rIndice);
b2_C = exp(-r(rIndice) * IC)* InvC *...
    tau(tauIndice)/r(rIndice) * LC;
b3_C = (LC - (H - T - IC) - tau(tauIndice))/...
    r(rIndice)) * InvC/LC;

VAN_C(sim,tempo) = (1 - tau(tauIndice)).* (a1 -...
    a2_C - a3_C - a4_C - a5_C) + b1_C...
    + b2_C + exp(-r(rIndice) * (H - tempo))...
    * b3_C + put;

end

VAN_Ottimo(sim,T) = max([VAN_D(sim,T), ...
    VAN_C(sim,T), 0]);

end

% REGRESSIONE
VAN_Ottimo_tempo_successivo = VAN_Ottimo(:,T);

for tempo = (T-1):-1:1
    VAN_Continuazione = exp(-r(rIndice) *...
        (tempo + 1 - tempo)).*(CFD(:,tempo + 1)...
        + VAN_Ottimo_tempo_successivo);

    MatriceRegressione = [ones(nsim,1), R(:,tempo), ...
        VCD(:,tempo), VCC(:,tempo), P(:,tempo), ...
        R(:,tempo).^2, VCD(:,tempo).^2, ...
        VCC(:,tempo).^2, P(:,tempo).^2];
    CoefficientiRegressione = pinv(MatriceRegressione)...
        * VAN_Continuazione;

    % Calcolo la stima del valore di continuazione
    VAN_AttesoContinuazione(:,tempo) = ...
        MatriceRegressione *...
        CoefficientiRegressione;

% R-QUADRO
media_VAN_Continuazione = mean(VAN_Continuazione);
devianza_totale_TSS = sum((VAN_Continuazione -...
    media_VAN_Continuazione).^2);
devianza_residua_RSS = sum((VAN_Continuazione -...
    VAN_AttesoContinuazione(:,tempo)).^2);
Rquadro(tempo, epsIndice, rIndice, ...
    sigmaIndice, tauIndice, pminIndice, ...
    mIndice) = 1 - (devianza_residua_RSS...
    /devianza_totale_TSS);

for sim = 1:nsim
    VAN_Ottimo(sim,tempo) = max([0, VAN_C(sim,tempo),

```



```

VAN_D(sim , tempo) , ...
VAN_AttesoContinuazione(sim , tempo)];
end

VAN_Ottimo_tempo_successivo = VAN_Ottimo(:, tempo);
end

TempoCambioTecnologia_C = Inf * ones(nsim ,1);
TempoCambioTecnologia_D = Inf * ones(nsim ,1);
TempoUscita = Inf * ones(nsim ,1);

for tempo = 1:T
    for sim = 1:nsim
        if TempoCambioTecnologia_C(sim)== Inf ...
            && TempoCambioTecnologia_D(sim)== Inf...
            && TempoUscita(sim)== Inf

            if VAN_Ottimo(sim , tempo) == VAN_C(sim , tempo)
                ContaVAN_C(tempo, epsIndice , rIndice , ...
                    sigmaIndice , tauIndice , pminIndice , ...
                    mIndice)= ContaVAN_C(tempo, epsIndice , ...
                        rIndice , sigmaIndice , tauIndice , ...
                        pminIndice , mIndice) + 1;
                TempoCambioTecnologia_C(sim) = min(tempo , ...
                    TempoCambioTecnologia_C(sim));

            elseif VAN_Ottimo(sim , tempo) == VAN_D(sim , tempo)
                ContaVAN_D(tempo, epsIndice , rIndice , ...
                    sigmaIndice , tauIndice , pminIndice , ...
                    mIndice) =ContaVAN_D(tempo , ...
                        epsIndice , rIndice , sigmaIndice , ...
                        tauIndice , pminIndice , mIndice) + 1;
                TempoCambioTecnologia_D(sim) = min(tempo , ...
                    TempoCambioTecnologia_D(sim));

            elseif VAN_Ottimo(sim , tempo) == 0
                ContaUscita(tempo, epsIndice , rIndice , ...
                    sigmaIndice , tauIndice , ...
                    pminIndice , mIndice) = ...
                ContaUscita(tempo, epsIndice , ...
                    rIndice , sigmaIndice , tauIndice , ...
                    pminIndice , mIndice) + 1;
                TempoUscita(sim) = min(TempoUscita(sim) , tempo);
            end
        end
    end
end

conta_C_totale(epsIndice , rIndice , sigmaIndice , ...
    tauIndice , pminIndice , mIndice) = sum(ContaVAN_C...
    (: , epsIndice , rIndice , sigmaIndice , tauIndice , ...
    pminIndice , mIndice));

```

```

conta_D_totale(epsIndice , rIndice , sigmaIndice , ...
    tauIndice , pminIndice , mIndice) = sum(ContaVAN_D...
    (: , epsIndice , rIndice , sigmaIndice , tauIndice , ...
    pminIndice , mIndice));
conta_U_totale(epsIndice , rIndice , sigmaIndice , ...
    tauIndice , pminIndice , mIndice) = sum(ContaUscita...
    (: , epsIndice , rIndice , sigmaIndice , tauIndice , ...
    pminIndice , mIndice));

%%FUNZIONE DI DISTRIBUZIONE CUMULATA
set(0, 'DefaultAxesLineStyleOrder', {'-', '—', ':', '-.'});
set(0, 'DefaultLineLineWidth', 1.5);
set(0, 'defaultaxescolororder', [1 0.5 0; 0.75 0 1; ...
    0.8 1 0; 0 0.6 0; 0 0.7 0.9; 1 0 0.3]);
[f, x] = ecdf(TempoCambioTecnologia_C);
g = f(2:end);
y = x(2:end);
figure(figura_funzione_ripartizione)
% figure(epsIndice)
hold on
box on
% plot(y, g, 'DisplayName', ['\ epsilon = ' ...
%     num2str(epsilon(epsIndice))]);
% title(['\ epsilon = ' num2str(epsilon(epsIndice))])

% plot(y, g, 'DisplayName', ['r = ' num2str(...
%     muP(muIndice))]);
% plot(y, g, 'DisplayName', ['\ sigma_{P} = ' num2str(...
%     SigmaP(sigmaIndice))]);
% plot(y, g, 'DisplayName', ['\ tau = ' num2str(...
%     tau(tauIndice))]);
plot(y, g, 'DisplayName', ['Pmin = ' num2str(...
    PrezzoMinimo_iniziale(pminIndice))]);
% plot(y, g, 'DisplayName', ['M = ' num2str(...
%     M(mIndice))]);

xlabel('Tempo di rimpiazzo ottimale t*')
ylabel('Funzione di distribuzione cumulata')
legend(gca, 'show', 'location', 'Best')
hold off
end
end
end

end
end
end

%%TEMPO FREQUENTE DI PASSAGGIO A C
tabella_tempo_frequente = zeros(length(PrezzoMinimo_iniziale), ...
    length(M), length(r), length(SigmaP), ...
    length(epsilon), length(tau));

```

```

for epsIndice = 1:length(epsilon)
  for tauIndice = 1:length(tau)
    for rIndice = 1:length(r)
      for sigmaIndice = 1:length(SigmaP)
        for pminIndice = 1:length(PrezzoMinimo_iniziale)
          for mIndice = 1:length(M)
            tempo_frequente = find(ContaVAN_C(:, epsIndice, ...,
              rIndice, sigmaIndice, tauIndice, pminIndice, ...
              == max(ContaVAN_C(:, epsIndice, rIndice, ...,
              sigmaIndice, tauIndice, pminIndice, mIndice)));

            if length(tempo_frequente) > 1
              tabella_tempo_frequente(pminIndice, mIndice, rIndice, ...
                sigmaIndice, epsIndice, tauIndice) = ...
                find(ContaVAN_C(:, epsIndice, rIndice, ...
                sigmaIndice, tauIndice, pminIndice, mIndice)...
                == max(ContaVAN_C(:, epsIndice, rIndice, ...
                sigmaIndice, tauIndice, pminIndice, mIndice)), 1);
            else
              tabella_tempo_frequente(pminIndice, mIndice, rIndice, ...
                sigmaIndice, epsIndice, tauIndice) = ...
                tempo_frequente;
            end
          end
        end
      end
    end
  end
end

figure()
k = 1:length(r)*length(SigmaP)-1;
j = k(1);

for epsIndice = 1:length(epsilon)
  for tauIndice = 1:length(tau)
    for rIndice = 1:length(r)
      for sigmaIndice = 1:length(SigmaP)
        subplot(length(r), length(SigmaP), j)
        H = heatmap(M, PrezzoMinimo_iniziale, ...
          tabella_tempo_frequente(:, :, rIndice, sigmaIndice, ...
          epsIndice, tauIndice), 'Colormap', 'ColorbarVisible', ...
          'off', 'GridVisible', 'off', gray, 'CellLabelColor', 'none');
        caxis([1 T]);
        j = j + 1;
      end
    end
  end
end
end

```


Bibliografia

- [1] Arnold, T., Nixon, T. Free Cash Flow, Net Present Value, and Economic Value Added. In: Baker, H.K., English, P. Capital Budgeting Valuation: Financial Analysis for Today's Investment Projects. Wiley, 2011. p. 63–77.
- [2] Brauneis, A., Mestel, R., Palan, S., 2012. Does a cap on the carbon price have to be a cap on green investment? *Empirica* 39, p. 217-231.
- [3] Brauneis, A., Mestel, R., Palan, S., 2011. Inducing low-carbon investment in the electric power industry through a price floor for emission trading. *Energy Policy* 53, p. 190-204.
- [4] Bertsekas, D.P., Shreve, S.E., 1996. Stochastic Optimal Control: The Discrete-Time Case. Athena Scientific.
- [5] Björk, T., 2009. Arbitrage Theory in Continuous Time. Oxford University Press. Third edition.
- [6] Caravenna, F.. Analisi stocastica: dispense del corso 2010/11 (accessibili al sito <http://www.matapp.unimib.it/~fcaraven/>)
- [7] Dixit, A., Pindyck, R., 1994. Investment under uncertainty. Princeton University Press.
- [8] European Commission, The EU Emissions Trading System (EU ETS), https://ec.europa.eu/clima/policies/ets_en.
- [9] Fuss, S., Johansson, D.J.A., Szolgayova, J., Obersteiner, M., 2009. Impact of climate policy uncertainty on the adoption of electricity generating technologies. *Energy Policy* 37, p. 733-743.
- [10] Fuss, S., Szolgayova, J., Obersteiner, M., Gusti, M., 2008. Investment under market and climate policy uncertainty. *Applied Energy* 85, p. 708-721.
- [11] GSE, Aste CO2, <http://www.gse.it/it/Gas%20e%20servizi%20energetici/Aste%20CO2/Pagine/default.aspx>.

-
- [12] Longstaff, F.A., Schwartz, E.S., 2001, Valuing American options by simulation. A simple least-square approach. *Review of Financial Studies* 14, p. 113-147.
- [13] Mo, J.L., Zhu, L., 2014. Using floor price mechanism to promote carbon capture and storage (CCS) investment and CO₂ abatement. *Energy & Environment* 25 (3&4), p. 687-708
- [14] Mun, J., 2005. *Real Options Analysis: Tools and Techniques for Valuing Strategic Investments and Decisions*. Wiley Finance.
- [15] Øksendal, B., 2000. *Stochastic Differential Equations: An Introduction with Applications*, Springer, Fifth edition.
- [16] Teisberg, E.O., 1995. Methods for evaluating capital investment decisions under uncertainty. In: Trigeorgis, L. (Ed.) *Real Option in Capital Investment-Models, Strategies and Applications*. Praeger, Westport, CT; p. 31-46.
- [17] Trigeorgis L. Real options: a primer. In: Alleman J, Noam E, editors. *The new investment theory of real options and its implication for telecommunications economics*. Springer US; 2000. p. 3-33.
- [18] Wood, P.J., Jotzo, F., 2009. *Price Floor for Emissions Trading*. Environmental Economics Research Hub, Research Report 36.
- [19] Yang, M., Blyth, W. Bradley, R., Bunn, D.W., Clarke, C., Wilson, T., 2008. Evaluating the power investment options with uncertainty in climate policy. *Energy Economics* 30, p. 1933-1950.